Logiche non classiche

Logica Matematica

Brunella Gerla

Università dell'Insubria, Varese
brunella.gerla@uninsubria.it

Le logiche non classiche si dividono in due gruppi (semplificazione):

Logiche sottostrutturali

Più deboli della logica classica nel senso che hanno meno assiomi o meno regole deduttive:

- Logica Lineare
- Logica Intuizionista

Estensioni della logica classica

Aggiungono assiomi a quelli della logica classica:

- Logica modale e temporale
- Logica fuzzy o many-valued.

Logica Intuizionista

La logica Intuizionista è anche conosciuta come logica costruttiva, perché la sua caratteristica principale è quella di considerare vere solo le formule per le quali esiste una dimostrazione *costruttiva*.

Nel parlare di questa logica utilizziamo il concetto di derivabilità da un insieme di assiomi: scriviamo

$$\vdash \varphi$$

e diciamo che φ è derivabile per dire che la logica che stiamo considerando deve avere un insieme di assiomi dal quale poter derivare la formula φ. (O, analogamente, ci deve essere un metodo di dimostrazione, per esempio qualcosa simile ai tableaux o alla risoluzione, da cui ricavare φ).

Il nostro scopo è di descrivere la logica intuizionista dicendo quali formule sono derivabili e quali invece non lo sono.

Logica intuizionista

Nella logica intuizionista non vale il principio del terzo escluso:

$$\nvdash A \vee \neg A$$

e non vale il procedimento di prova per assurdo:

$$\nvdash (\neg A \to \bot) \to A$$

mentre è ancora valida la cosidetta legge del ex falso quodlibet:

$$\vdash \bot \to A\,.$$

Logica Intuizionista - negazione

Nella logica intuizionista, dimostrare $\neg A$ equivale a dimostrare che da A segue una contraddizione, cioè vale

$$\neg A \equiv A \to \bot.$$

(Nota che questo vale anche nella logica classica). Ma in genere i connettivi logici hanno una interpretazione diversa da quelli della logica classica: infatti mentre è vero che

$$\vdash A \to \neg\neg A,$$

non è più vero il contrario cioè che

$$\not\vdash \neg\neg A \to A\,.$$

Infatti, $\neg\neg A$ equivale a $A \to \bot$, cioè che da $\neg A$ si arriva ad una contraddizione. Ma da questo non posso ricavare una costruzione per A.

Logica Intuizionista - assiomi

Anche per gli altri connettivi vale una interpretazione in termini di costruttività : per esempio la formula $A \to B$ è dimostrabile se e solo se, data una dimostrazione di A si può ottenere in modo effettivo una dimostrazione di B.

Posso definire un insieme di assiomi per la logica intuizionista (proposizionale). Tali assiomi sono tutte formule che risultano vere nella logica classica: quindi

Tutte le formule dimostrabili nella logica intuizionista sono vere nella logica classica, ma non vale il viceversa.

Teorema

Una formula A è dimostrabile nella logica classica se e solo se $\neg\neg A$ è dimostrabile nella logica intuizionista.

Logica intuizionista - interpretazioni

Non è possibile per la logica intuizionista dare una interpretazione ai connettivi come nella logica classica, tramite le tavole di verità .

Posso definire una relazione di *comprovabilità* tra formule, cioè

$$A \equiv B \text{ se e solo se } \vdash A \leftrightarrow B\,.$$

Si prova che l'insieme delle classi d'equivalenza rispetto a questa relazione non è un'algebra di Boole, ma è un'altra struttura algebrica che si chiama **algebra di Heyting**.

Vedremo più avanti come interpretare le formule della logica intuizionista all'interno della logica modale.

Logica Lineare

La logica lineare (Girard, 1987) è conosciuta anche come logica delle risorse. E' una logica sottostrutturale perché rinuncia ad alcune delle regole strutturali della logica classica. In particolare, non vale sempre la equivalenza

$$A \wedge A \equiv A\,.$$

Consideriamo un esempio: nella logica classica, dalle formule $A \to B$ e $A \to C$ posso ricavare $A \to B \wedge C$ (controllare le tavole di verità):

$$A \to B, A \to C \models A \to B \wedge C\,.$$

Se però interpreto A con la frase "*Ho un euro*", B con la frase "*compro il giornale*" e C con la frase "*compro il caffé*", allora è vero che $A \to B$ e che $A \to C$, ma non è più vero che $A \to B \wedge C$.

Proseguendo l'esempio precedente, posso però accettare che

$$A \to B, A \to C \vdash A, A \to B \wedge C$$

quindi ripetere una formula due volte è diverso che asserirla una volta sola.

Questo si può formalizzare utilizzando due connettivi per la congiunzione:

- Una congiunzione *additiva* detta anche *scelta interna*: $A\&B$ significa che si ha la possibilità di scegliere una sola tra A e B (come nell'esempio del giornale e del caffé).
- Una congiunzione *moltiplicativa* detta anche *tensore* che indica la presenza simultanea di due risorse: $A \otimes B$ significa che si possono avere a disposizione sia A che B (ad esempio se A significa "*Ho un euro*" allora $A \otimes A$ significa "*Ho due euro*").

In corrispondenza ci sono anche due disgiunzioni.

La negazione si comporta come nella logica classica e vale anche il principio di doppia negazione.

Logica modale

La logica modale è una estensione della logica classica, cioè aggiunge altre formule vere oltre a quelle della logica classica.

Studiamo il caso proposizionale:

Definizione (Linguaggio)

Considero lo stesso linguaggio della logica proposizionale classica a cui si aggiungono due connettivi:

- operatore di necessità : $\Box$ oppure L. Lx si legge "*x è necessario*";
- operatore di possibilità : $\diamond$ oppure M. Mx si legge "*x è possibile*".

Questi sono connettivi unari, che però si interpretano in modo diverso dalla negazione. Sono chiamati **modalità** .

Esempi di formule della logica proposizionale sono:

- $L(x \rightarrow My)$ da leggere "*è necessario che x implichi che y è possibile*";
- $(x \wedge Ly) \rightarrow Mx$;
- $M(L(x \rightarrow M(L(M(M(y))))))$.

Come possiamo stabilire la verità di tali formule? Sappiamo interpretare i connettivi proposizionali con le tavole di verità , dobbiamo capire come interpretare le modalità . Introduciamo le **Strutture di Kripke**.

Kripke frame

Definizione

Una struttura di Kripke è una coppia (X, R) formata da un insieme X e una relazione $R \subseteq X \times X$.

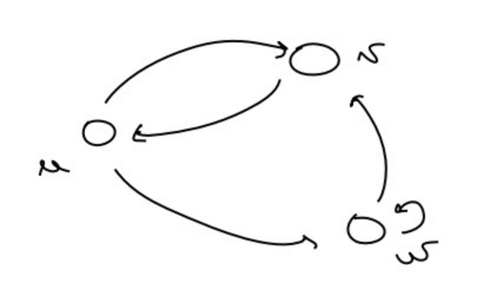
- Gli elementi di X si chiamano **mondi possibili**.
- La relazione R si chiama **relazione di accessibilità** .
- Se $(u, v) \in R$ allora diciamo che v **è accessibile da** u.

Come al solito utilizzeremo la notazione uRv per dire che $(u, v) \in R$ e cioè che u e v sono nella relazione R.

Esempio

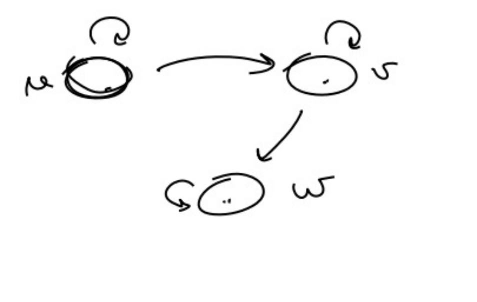
Esempio

Sia $X = \{u, v, w\}$ e $R = \{(u, v), (v, u), (u, w), (w, v), (w, w)\}$.
Possiamo rappresentare graficamente questa struttura come:



Esempio

Consideriamo adesso il seguente grafo:



In questo caso abbiamo $R = \{(u,u),(u,v),(v,v),(v,w),(w,w)\}$. Questa relazione è riflessiva.

L'insieme X può essere anche infinito.

Interpretazioni

Definizione

Una interpretazione modale in una struttura (X, R) è una funzione

$$I : Var \times X \to \{0, 1\}$$

che associa un valore di verità ad ogni variabile *in ogni mondo*.

I si estende ad una funzione

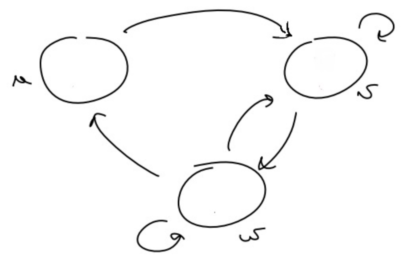
$$I : Form \times X \to \{0, 1\}$$

nel seguente modo:

- $I(\neg\varphi, u) = 1 - I(\varphi, u)$;
- $I(\varphi \wedge \psi, u) = \min(I(\varphi, u), I(\psi, u))$;
- $I(L\varphi, u) = 1$ se e solo se **per ogni** $v \in X$ tale che uRv si ha $I(\varphi, v) = 1$;
- $I(M\varphi, u) = 1$ se e solo se **esiste** $v \in X$ tale che uRv e $I(\varphi, v) = 1$;

Esempio

Consideriamo la seguente struttura di Kripke $W = (X, R)$:



e la formula

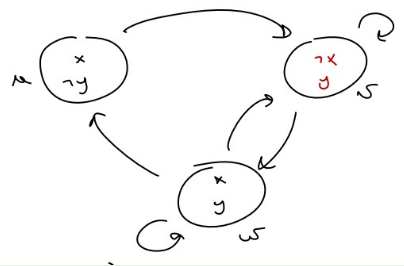
$$\varphi = L(x \to My).$$

Per interpretare φ nella struttura W devo fissare una interpretazione delle variabili nei tre mondi: fissiamo per esempio

$$I(x,u) = 1 \quad I(x,v) = 0 \quad I(x,w) = 1$$
$$I(y,u) = 0 \quad I(y,v) = 1 \quad I(y,w) = 1$$

Esempio

Possiamo rappresentare questa informazione nel seguente modo:



Calcoliamo $I(\varphi, u)$, $I(\varphi, v)$ e $I(\varphi, w)$.

Definizione

Una formula φ è valida in una struttura (X, R) se per ogni interpretazione I si ha $I(\varphi, u) = 1$ per ogni $u \in X$. Scriviamo $(X, R) \models \varphi$.

Una formula φ è valida nella logica modale se è valida in ogni struttura di Kripke. In questo caso scriviamo $\models \varphi$.

Cerchiamo un sistema assiomatico alla Hilbert per derivare tutte (e sole) le formule valide.

Esempio

Consideriamo la formula

$$\theta = L(\varphi \to \psi) \to (L\varphi \to L\psi)$$

e dimostriamo che è valida in qualsiasi struttura. Ragioniamo per assurdo:

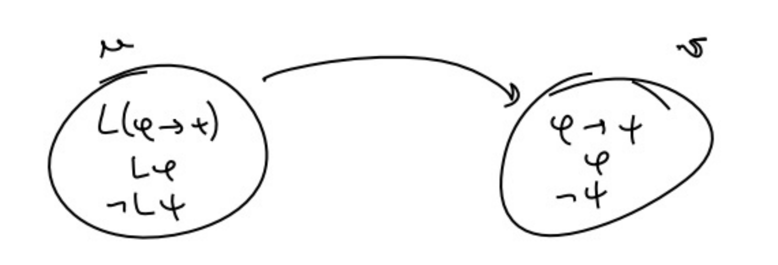
Se esistesse una struttura (X, R) in cui θ non è uguale a 1, allora ci sarebbe $u \in X$ tale che $I(\theta, u) = 0$.
Quindi $I(L(\varphi \to \psi), u) = 1$ e $I(L\varphi \to L\psi, u) = 0$.

Quindi $I(L(\varphi \to \psi), u) = 1$, $I(L\varphi, u) = 1$ e $I(L\psi, u) = 0$.

$I(L\psi, u) = 0$ vuol dire che esiste un mondo $v \in X$ tale che uRv e $I(\psi, v) = 0$. Dato che $I(L(\varphi \to \psi), u) = 1$ e $I(L\varphi, u) = 1$ allora in particolare nel mondo v si ha $I(\varphi \to \psi, v) = 1$, $I(\varphi, v) = 1$.

Esempio

Quindi abbiamo trovato un mondo v nel quale l'implicazione $\varphi \to \psi$ è vera, la formula φ è vera, mentre ψ è falso. Questo non è possibile perché nel mondo v i connettivi sono interpretati come quelli proposizionali e quindi se φ è vera e ψ è falsa non può essere $\varphi \to \psi$ vera.



Assiomi della logica modale

La *Logica modale minimale* è assiomatizzata nel seguente modo:

- assiomi della logica proposizionale
- $L(\varphi \to \psi) \to (L\varphi \to L\psi)$ (distributività)
- regola di modus ponens

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

- regola di necessitazione

$$\frac{\varphi}{L\varphi}$$

Allo stesso modo della logica proposizionale (sistema di Hilbert) si definisce il concetto di dimostrabilità come sequenza di formule derivate dagli assiomi tramite le regole.

Teorema

Una formula è dimostrabile nella logica modale minimale se e solo se è valida in ogni struttura di Kripke.

Nota che gli assiomi citano solo la modalità di necessità . Si può definire il connettivo di possibilità come

$$Mx \equiv \neg L \neg x$$

cioè "*x è possibile*" è equivalente a dire "*non è vero che $\neg x$ è necessario*".

Logica S4

Oltre alla logica minimale, ci sono altre logiche modali in cui si fanno ipotesi più forti sulle relazioni.
La logica $S4$ è la logica delle strutture riflessive e transitive, cioè è caratterizzata da un insieme di assiomi che riesce a dimostrare tutte e sole le formule valide in strutture (X, R) dove R è una relazione riflessiva e transitiva.

Si consideri la formula

$$\varphi = Lx \to x$$

e mostriamo che φ è valida in (X, R) se e solo se R è riflessiva.

Sia quindi $\varphi = Lx \to x$ valida in (X, R) e dimostriamo che R è riflessiva. Consideriamo $u \in X$ e l'interpretazione I tale che per ogni $v \in X$:

$$I(x, v) = 1 \qquad \text{se e solo se} \quad uRv\,.$$

Dato che φ è valida sarà $I(\varphi, u) = 1$ e dato che in ogni mondo v accessibile da u si ha $I(x, v) = 1$, allora si ha $I(Lx, u) = 1$ e quindi anche $I(x, u) = 1$. Dalla definizione di I si può allora dedurre che uRu. Ripetendo questo ragionamento per ogni $u \in X$ si ha la riflessività di R.

Viceversa, supponiamo che R sia riflessiva e dimostriamo che φ è valida in (X, R).
Se per assurdo φ non fosse valida in (X, R), allora esisterebbe $u \in X$ tale che $I(Lx \to x, u) = 0$.

Quindi $I(Lx, u) = 1$ e $I(x, u) = 0$. Quindi in ogni mondo v accessibile da u si ha $I(x, v) = 1$. Dato che R è riflessiva, si ha uRu cioè u è accessibile da u e quindi $I(x, u) = 1$ che è in contrasto con quanto detto prima.

Quindi

$Lx \to x$ è valida in (X, R) se e solo se R è riflessiva.

Abbiamo anche che

$Lx \to LLx$ è valida in (X, R) se e solo se R è transitiva.

Dimostriamo solo che se R è transitiva allora $Lx \to LLx$ è valida. Quindi consideriamo per assurdo che $Lx \to LLx$ non sia valida in (X, R) con R transitiva, quindi esiste $u \in R$ per cui $I(Lx \to LLx, u) = 0$.

Si ha quindi $I(Lx, u) = 1$ e $I(LLx, u) = 0$ e quindi esiste un mondo v accessibile da u tale che $I(Lx, v) = 0$ e quindi esiste un mondo w accessibile da v tale che $I(x, w) = 0$. Dato che R è transitiva, da uRv e vRw si ha uRw, e quindi dato che esiste un mondo w accessibile da u in cui x è falsa, sarà $I(Lx, u) = 0$, in contrasto con quanto detto prima.

Assiomi di S4

La logica S4 è definita dal seguente insieme di assiomi:

- assiomi della logica proposizionale
- $L(\varphi \to \psi) \to (L\varphi \to L\psi)$ (distributività)
- $Lx \to x$
- $Lx \to LLx$
- regole di modus ponens e necessitazione

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \qquad \frac{\varphi}{L\varphi}$$

Teorema

Una formula è dimostrabile nella logica S4 se e solo se è valida in ogni struttura di Kripke in cui la relazione è riflessiva e transitiva.

Interpretazione modale della logica intuizionista

Ad ogni formula P della logica intuizionista associamo una formula $m(P)$ della logica modale sostituendo ogni variabile x con Lx, ogni negazione $\neg A$ con la formula $L(\neg m(A))$ e ogni implicazione $A \to B$ con $L(m(A) \to m(B))$.

Teorema

Una formula P è derivabile nella logica intuizionista se e solo se $m(P)$ è derivabile nella logica S4.

Semantica di Kripke per la logica intuizionista

Un altro modo di vedere la traduzione precedente è di dare una semantica alla Kripke per la logica intuizionista (quindi senza modalità) nel seguente modo:

Si fissa una struttura W con una relazione $\leq$ che sia riflessiva e transitiva e si definisce l'interpretazione in un mondo di $u \in W$ nel seguente modo:

- Se x è una variabile, allora se $I(x, u) = 1$ deve essere anche $I(x, v) = 1$ per ogni $v \geq u$.
- $I(A \wedge B, u) = \min(I(A, u), I(B, u))$;
- $I(A \to B, u) = 1$ se e solo se in ogni $v \geq u$ si ha $I(A, v) \leq I(B, v)$.

Esempio

Ricavare $I(\neg A, u)$ e provare che nella struttura $\{u, v, w\}$ con $u \leq u, u \leq v, u \leq w, v \leq v, v \leq w, w \leq w$ si ha $I(\neg\neg A \to A, u) = 0$.

Logiche temporali

Le logiche temporali sono un particolare tipo di logica modale nel quale la struttura di Kripke è interpretata come *flusso temporale*.

Le formule della logica temporale si scrivono a partire dai connettivi proposizionali aggiungendo quattro operatori modali, due principali e due definiti a partire dai principali:

$$F\varphi \qquad P\varphi \qquad G\varphi \equiv \neg F \neg \varphi \qquad H\varphi \equiv \neg P \neg \varphi \,.$$

Definizione

Un flusso temporale è una coppia $(T, <)$ formata da un insieme T e una relazione $<$.
Un elemento $t \in T$ si chiama *istante*.

Interpretazioni

Una interpretazione delle variabili è una funzione

$$I : Var \times T \to \{0, 1\}.$$

Si estende ad una valutazione delle formule come nella logica modale, e le modalità sono interpretate nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll}
I(F\varphi, t) = 1 & \text{sse esiste un istante } t' > t \text{ tale che } I(\varphi, t') = 1 \\
I(P\varphi, t) = 1 & \text{sse esiste un istante } t' < t \text{ tale che } I(\varphi, t') = 1 \\
I(G\varphi, t) = 1 & \text{sse per ogni istante } t' > t \text{ si ha } I(\varphi, t') = 1 \\
I(H\varphi, t) = 1 & \text{sse per ogni istante } t' < t \text{ si ha } I(\varphi, t') = 1
\end{array}$$

Esempio

Sia

$$\varphi = Gx \to P(x \wedge Fx)$$

e interpretiamo in $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ con

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5\,.$$

Fissiamo una interpretazione della variabile x, per esempio $I(x,t) = 1$ se $t = t_1, t_3, t_4$ e $I(x,t) = 0$ altrimenti. Calcoliamo $I(\varphi, t_i)$ per $i = 1, \ldots, 5$.

Consideriamo $i = 1$. Allora sarà $I(Gx, t_1) = 0$ perché non è vero che in ogni momento successivo a t_1 la variabile x è vera (infatti $I(x, t_2) = 0$. Quindi $I(\varphi, t_1) = 1$ perché una implicazione è vera se la premessa è falsa.

Formule valide

La nozione di validità si definisce come nella logica modale (rispetto ad un flusso temporale).

Un esempio di formula sempre valida è

$$\varphi = x \to GPx\,.$$

Infatti supponiamo per assurdo che esista un flusso $(T, <)$ che non soddisfa la formula φ, cioè che esista $t \in T$ tale che

$$I(x \to GPx, t) = 0.$$

Quindi si avrà

$$I(x, t) = 1 \qquad \text{and } I(GPx, t) = 0$$

e quindi esiste $t' > t$ tale che $I(Px, t') = 0$ e quindi per ogni $t'' < t'$ si ha $I(x, t'') = 0$, in contrasto con il fatto che $t < t'$ e $I(x, t) = 1$.

Anche per la logica temporale possiamo studiare delle formule che caratterizzano il flusso temporale.

La formula $Gx \to GGx$ è valida in $(T, <)$ se e solo se $<$ è una relazione transitiva (vedi caso analogo logica modale).

Dato che di solito un flusso temporale si considera transitivo, allora la suddetta formula si aggiunge agli assiomi.

Assiomatizzazione

Definizione

La logica temporale minimale è definita dagli assiomi della logica proposizionale più i seguenti:

- $G(A \to B) \to (GA \to GB)$;
- $H(A \to B) \to (HA \to HB)$;
- $A \to GPA$;
- $A \to HFA$;
- $GA \to GGA$.

Le regole sono il modus ponens e le regole di necessitazione:

$$\frac{A}{GA} \qquad \frac{A}{HA}$$

Si definiscono come al solito le derivazioni (o dimostrazioni)

Completezza

Teorema

Una formula della logica temporale è valida in ogni flusso temporale (transitivo) se e solo se è provabile a partire dagli assiomi della logica temporale minimale.

Esempio

Consideriamo la formula sempre falsa $\perp$ e la formula temporale

$$G\perp \vee FG\perp .$$

Interpretiamo questa formula nel flusso $(\mathbb{N}, <)$ dato dai numeri naturali con la relazione d'ordine solita.

Si ha che $I(G\perp, n) = 1$ se per ogni $m > n$ vale $I(\perp, m) = 1$, che è impossibile dato che $\perp$ è falso in qualsiasi istante. Quindi sarà anche $I(G\perp, n) = 0$.
D'altra parte, $I(FG\perp, n) = 1$ se e solo se esiste $m > n$ tale che $I(G\perp, m) = 1$ se e solo se per ogni $m' > m$ si ha $I(\perp, m') = 1$. Dato che questo non è possibile anche $(IFG\perp, n) = 0$ e la formula di partenza non è valida in $(\mathbb{N}, <)$.

Interpretiamo adesso $G\bot \vee FG\bot$ in un flusso temporale $T = \{t_1, t_2\}$ con $t_1 < t_2$.
Si ha

$$I(G\bot, t_2) = 1 \text{ se e solo se, per ogni } t > t_2 \text{ vale } I(\bot, t) = 1\,.$$

Dato che non ci sono istanti maggiori di t_2, allora l'affermazione è corretta.
Invece $I(G\bot, t_1) = 0$ per lo stesso motivo di prima.

Consideriamo $I(FG\bot, t_1)$. Questa interpretazione è vera se esiste $t' > t$ tale che $I(G\bot, t') = 1$, ma c'è solo $t_2 > t$ e sappiamo che $I(G\bot, t_2) = 1$, quindi $I(FG\bot, t_1) = 1$.
Invece $I(FG\bot, t_2) = 0$ perché non esiste $t' > t_2$ con $I(\bot, t') = 1$.

La formula $G\bot \vee FG\bot$ è valida nei flussi temporali che hanno un istante finale.

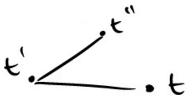
Esempio

Consideriamo le formule

$$
\begin{aligned}
PFx &\rightarrow Px \vee x \vee Fx \\
FPx &\rightarrow Px \vee x \vee Fx
\end{aligned}
$$

Queste due formule sono valide in tutti i flussi temporali linearmente ordinati.

Consideriamo l'insieme $T = \{t, t', t''\}$ con la relazione $<$ determinata dal seguente grafo:



(non è linearmente ordinata).

Consideriamo la valutazione della formula A nel seguente modo

$$I(x, t') = 0 \qquad I(x, t) = 0 \qquad I(x, t'') = 1\,.$$

Allora questa interpretazione è tale che $I(PFx \to Px \vee x \vee Fx, t) = 0$.

Se invece considero $t' < t < t''$ (o un qualsiasi altro ordine totale tra i tre istanti) la formula è valida.

Logica Fuzzy o a più valori

Partiamo dal concetto di *fuzzy set*. Abbiamo detto che un insieme può essere rappresentato tramite la sua funzione caratteristica.

Esempio

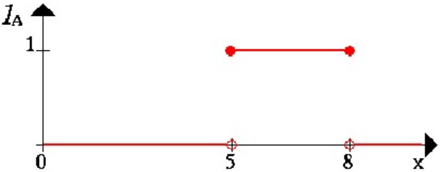
Sia X l'insieme di tutti i numeri reali tra 0 e 10 e sia $A = [5, 8]$ il sottoinsieme di X dei numeri reali tra 5 e 8.
Il sottoinsieme A si può rappresentare tramite la funzione:

$$\chi_A : x \in X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Gli elementi a cui è assegnato valore 1 sono quelli che appartengono ad A.

Insiemi crisp

Si può rappresentare la funzione con questo grafico:



Fuzzy sets

Indeboliamo questa definizione, considerando funzioni caratteristiche che hanno un grado di appartenenza che è compreso tra 0 e 1.

Definizione

Un sottoinsieme fuzzy F di un insieme X è una funzione

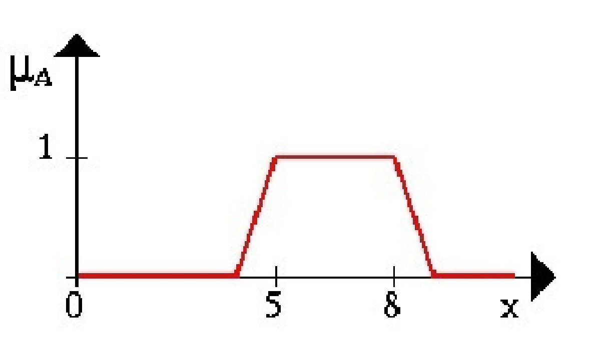
$$x \in X \mapsto \mu_F(x) \in [0, 1]$$

che assegna ad ogni elemento x di X un grado di **appartenenza** di x a F.

Fuzzy set

Esempio

Sia X l'insieme dei numeri reali tra 1 e 10. Nel grafico indichiamo una rappresentazione fuzzy dell'intervallo $[5, 8]$:



Operazioni tra insiemi

Tra insiemi *classici* sono definite delle operazioni.

Sia X un insieme e $P(X)$ l'insieme delle parti di X, o equivalentemente, l'insieme di tutte le funzioni tra X e $\{0, 1\}$.

Le operazioni di **unione**, **intersezione** e **complemento** sono definite nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\} & \text{i.e.} & \chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} \\ A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\} & \text{i.e.} & \chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} \\ A' = \{x \mid x \notin A\} & \text{i.e.} & \chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x) \end{array}$$

Notiamo i seguenti fatti:

- Le operazioni di unione, intersezione e complemento permettono di definire su $P(X)$ una struttura algebrica di **algebra di Boole**.
- Unione, intersezione e complemento hanno una forte relazione con i connettivi logici di congiunzione, disgiunzione e negazione.

Questo non è sorprendente, infatti:

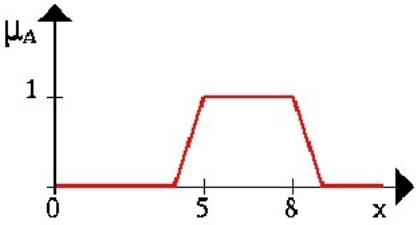
Le algebre di Boole sono le algebre della logica proposizionale classica.

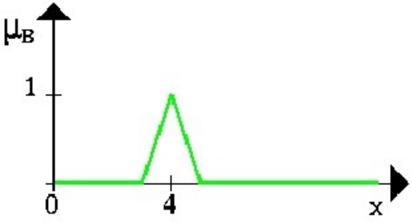
Unione di fuzzy set

Per quanto riguarda le funzioni caratteristiche, si ha:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

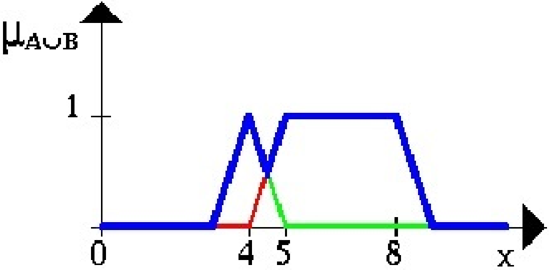
Proviamo a generalizzare ai fuzzy set: siano A e B due fuzzy subsets di X dati dalle membership functions μ_A e μ_B:





Poniamo

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



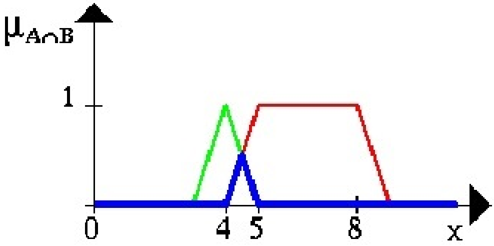
Intersezione di fuzzy set

Analogamente, per le funzioni caratteristiche abbiamo:

$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Poniamo

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



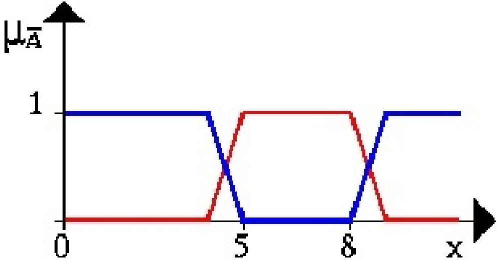
Complemento di fuzzy set

Per finire, il complemento di una funzione caratteristica è definito da:

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Poniamo:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$



Operazioni tra fuzzy set

Possiamo quindi definire le operazioni tra fuzzy sets generalizzando le operazioni tra funzioni caratteristiche di insiemi classici, a valore in $\{0, 1\}$.

Ma ci sono molte operazioni che ristrette a $\{0, 1\}$ coincidono con l'operazione di intersezione tra insiemi. Per esempio, oltre al minimo, c'è anche il prodotto:

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

Perché allora non considerare il prodotto come generalizzazione dell'intersezione tra fuzzy sets?

Per esempio vale anche

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \max\{0, \chi_A(x) + \chi_B(x) - 1\}.$$

T-norma

Cerchiamo allora una operazione su $[0,1]$ che possa servire come interpretazione della congiunzione.

Definizione

Una *norma triangolare*, o *t-norma*, è un operatore

$$*: [0,1]^2 \to [0,1]$$

tale che, per ogni $x, y, z, y_1, y_2 \in [0,1]$ valgono le seguenti proprietà:

- (Associatività): $x * (y * z) = (x * y) * z$;
- (Commutatività): $x * y = y * x$;
- (Monotonia non-decrescente): Se $y_1 \leq y_2$ allora $x * y_1 \leq x * y_2$;
- (Elemento assorbente): $x * 0 = 0$;
- (Elemento neutro): $x * 1 = x$.

Si noti che dalla commutatività e dalla monotonia segue che per ogni $x_1, x_2, y \in [0,1]$, se $x_1 \leq x_2$ allora $x_1 * y \leq x_2 * y$.

Le t-norme si pongono quindi come candidati ideali per l'interpretazione del connettivo di congiunzione nelle logiche verofunzionali:

Definizione

Una logica proposizionale *a più valori di verità* è formata da un insieme *Form* di formule scritte su un alfabeto contenente variabili proposizionali e connettivi. Una interpretazione delle variabili è una funzione

$$v : Var \to S \subseteq [0,1]$$

e può essere estesa all'insieme delle formule tramite le tavole di verità dei connettivi.

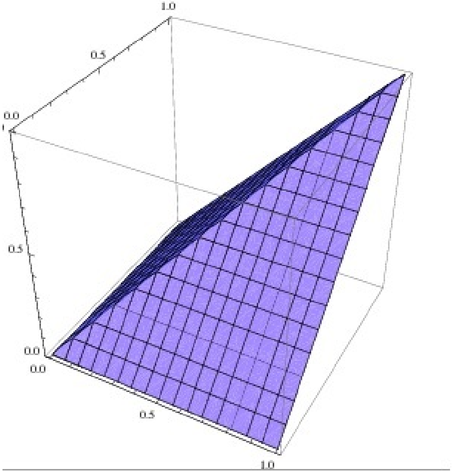
La diversa interpretazione dei connettivi fornisce quindi logiche many-valued o fuzzy diverse, per le quali si cerca di mostrare un opportuno insieme di assiomi.
Dato che i connettivi sono delle funzioni a valori reali, possiamo rappresentarli con il grafico della funzione associata (a due variabili).

Gödel

La t-norma di Gödel è

$$x \wedge y = \min\{x, y\}\,.$$

La sua *tavola di verità* è una funzione a valori reali:

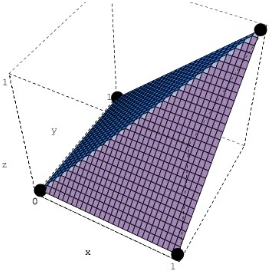


Gödel

Nota che se considero la restrizione di questa funzione ai punti in $\{0,1\}^2$ ottengo la tavola di verità della congiunzione classica. Si confronti la tabella:

	0	1
0	0	0
1	0	1

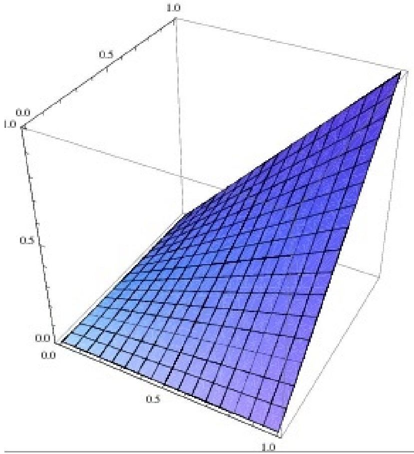
con



Prodotto

t-norma prodotto:

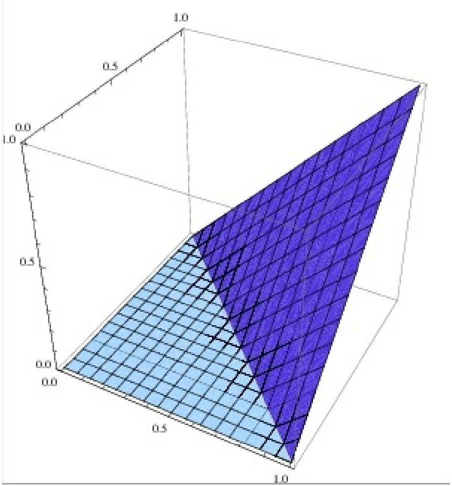
$$x \cdot y = xy \, .$$



Łukasiewicz

t-norma di Łukasiewicz:

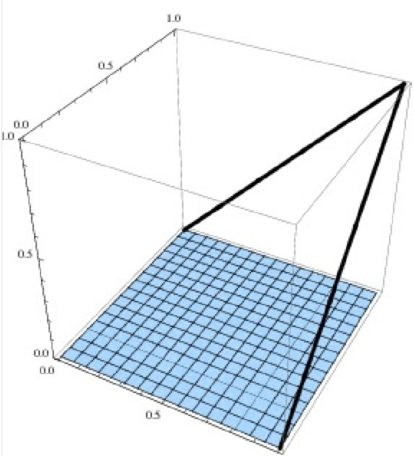
$$x \odot y = \max\{0, x + y - 1\}\,.$$



Drastico

t-norma prodotto drastico:

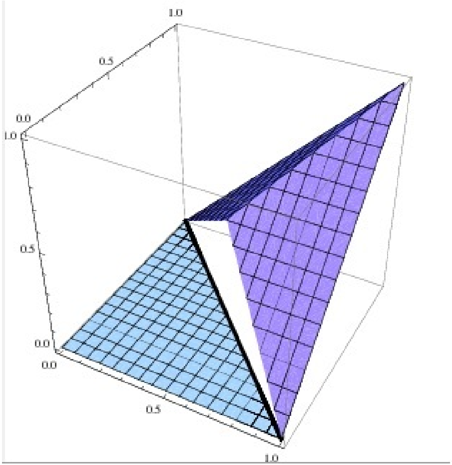
$$x *_{PD} y = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Minimo nilpotente

t-norma minimo nilpotente:

$$x *_{NM} y = \begin{cases} \min\{x, y\} & \text{se } x + y > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Si noti che le t-norme $\wedge, \odot, \cdot$ sono continue, mentre le t-norme $*_{PD}$ e $*_{NM}$ non lo sono.

In particolare $*_{PD}$ è continua *da destra*, vale a dire

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)^+} (x *_{PD} y) = x_0 *_{PD} y_0 \,,$$

mentre $*_{NM}$ è continua *da sinistra*, vale a dire

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)^-} (x *_{NM} y) = x_0 *_{NM} y_0 \,.$$

Come vedremo nella nostra discussione sul connettivo di implicazione, restringeremo lo spettro delle possibili interpretazioni del connettivo di congiunzione forte solo alle t-norme continue da sinistra (ovviamente una t-norma continua è anche continua da sinistra).

Residuo di una t-norma

Se usiamo una t-norma per interpretare la congiunzione, vediamo quali proprietà richiedere all'interpretazione $\Rightarrow$ dell'implicazione.

- $\Rightarrow$ sui valori Booleani 0 e 1 deve essere uguale alla tavola di verità dell'implicazione classica.
- Se $x \leq y$ allora $x \Rightarrow y = 1$. Infatti ogni volta che la premessa è meno vera della conclusione, allora l'intera implicazione deve essere assolutamente vera.

Residuo di una t-norma

Chiediamo che l'implicazione sia *non-crescente* nel primo argomento e *non-decrescente* nel secondo argomento.
Un operatore $\Rightarrow : [0,1]^2 \to [0,1]$ è detto:

- *non-crescente* nel primo argomento se per ogni $x_1, x_2, y \in [0,1]$ vale che
$$x_1 \leq x_2 \qquad \text{implica} \qquad x_1 \Rightarrow y \geq x_2 \Rightarrow y\,.$$
- *non-decrescente* nel secondo argomento se per ogni $x, y_1, y_2 \in [0,1]$ vale che
$$y_1 \leq y_2 \qquad \text{implica} \qquad x \Rightarrow y_1 \leq x \Rightarrow y_2\,.$$

Queste richieste non fissano ancora la semantica del connettivo di implicazione. Per determinare un unico operatore $\Rightarrow_*$ associato alla t-norma $*$, dobbiamo introdurre un vincolo ulteriore.

Modus Ponens

Il Modus ponens classico dice che:

Se A e $A \to B$ allora deduco B.

Vogliamo definire l'implicazione in modo che valga una versione sfumata di questa regola:

La congiunzione del valore di verità di A e del valore di verità di $A \to B$ deve essere minore del valore di verità di B.

e quindi

$$v(A) * v(A \to B) \leq v(B)\,.$$

Possiamo chiedere che $v(A \to B)$ sia il più grande numero b tale che si verifichi

$$v(A) * b \leq v(B)$$

e quindi richiedere

$$v(A) \Rightarrow_* v(B) := v(A \to B) = \max\{b \in [0,1] \mid v(A) * b \leq v(B)\}\,.$$

Questo valore però non sempre esiste (un sottoinsieme di $[0,1]$ può non avere massimo). Vale il seguente:

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una t-norma $*$ sia residuata, *vale a dire, che esista l'operatore*

$$x \Rightarrow_* y = \max\{z \in [0,1] \mid x * z \leq y\}\,,$$

è che $*$ sia continua da sinistra.

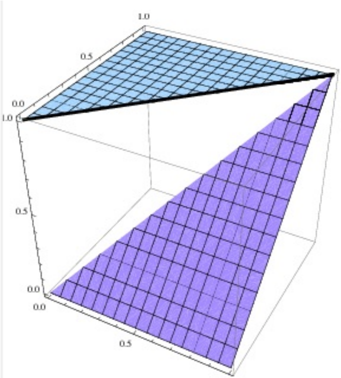
Quando una t-norma $*$ è residuata diciamo anche che l'implicazione è ottenuta dalla congiunzione tramite residuazione.

Esempi implicazione

Ecco i residui associati alle t-norme continue da sinistra viste prima. Dato che essi costituiscono l'interpretazione del connettivo di implicazione, con un leggero abuso di linguaggio li chiamiamo direttamente *implicazioni*.

Implicazione di Gödel:

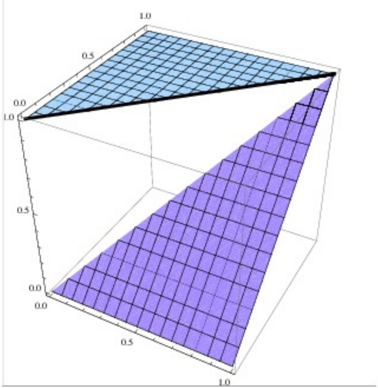
$$x \rightarrow_{\wedge} y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempi implicazione

Anche in questo caso, così come per le t-norme, l'implicazione è una generalizzazione di quella classica, quindi la rappresentazione grafica generalizza la tabella

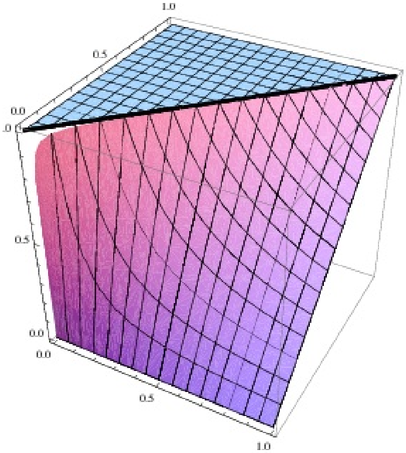
	0	1
0	1	1
1	0	1



Esempi implicazione

Implicazione del prodotto:

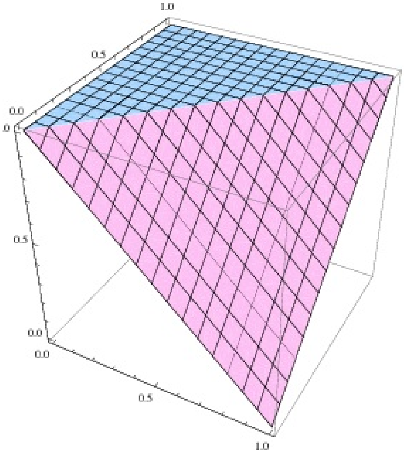
$$x \rightarrow . \ y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ y/x & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempi implicazione

Implicazione di Łukasiewicz:

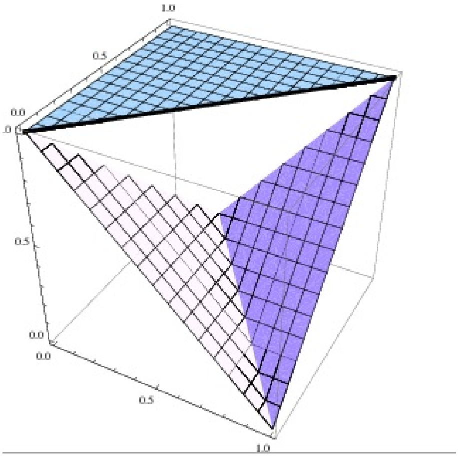
$$x \to_{\odot} y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ 1 - x + y & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad = \min\{1, 1 - x + y\}$$



Esempi implicazione

Implicazione del minimo nilpotente:

$$x \rightarrow_{NM} y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ \max\{1-x, y\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Negazione

Fissata una t-norma $*$ (continua a sinistra) definiamo, come nella logica intuizionista, la negazione come

$$\neg_* x = x \Rightarrow_* 0\,.$$

- Negazione di Gödel:

$$\neg_\wedge x = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Negazione del prodotto:

$$\neg_. x = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Negazione di Łukasiewicz:

$$\neg_\odot x = 1 - x$$

- Negazione del minimo nilpotente:

$$\neg_{NM} x = 1 - x$$

Congiunzione e disgiunzione deboli

Data una t-norma *continua* (la continuità a sinistra per questo discorso non è sufficiente) si definiscono altre due operazioni associate ai connettivi di *congiunzione* e *disgiunzione deboli* o *reticolari*, rispettivamente denotati da $\wedge$ e $\vee$.

Per ogni $x, y \in [0, 1]$:

$$x \wedge y = x * (x \Rightarrow_* y)\,,$$

$$x \vee y = ((x \Rightarrow_* y) \Rightarrow_* y) \wedge ((y \Rightarrow_* x) \Rightarrow_* x)\,.$$

Si ha che per ogni $x, y \in [0, 1]$, $x \wedge y = \min(x, y)$ e $x \vee y = \max(x, y)$.

Logica basata su una t-norma

Definizione

Sia $*\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ una t-norma continua, e sia $\Rightarrow_*\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ il residuo di $*$. Allora definiamo una logica (proposizionale) L_* nel seguente modo:

1. Il linguaggio di L_* è $\{\&, \to, \bot\}$.
2. Dato un assegnamento $v\colon \mathit{Var} \to [0,1]$, la sua estensione canonica alle formule del linguaggio di L_* è definita come segue:
   - $v(\varphi \& \psi) = v(\varphi) * v(\psi)$;
   - $v(\varphi \to \psi) = v(\varphi) \Rightarrow_* v(\psi)$;
   - $v(\bot) = 0$.
3. Si definiscono i seguenti connettivi *derivati*:
   - $\neg\varphi = \varphi \to \bot$;
   - $\top = \neg\bot$;
   - $\varphi \wedge \psi = \varphi \& (\varphi \to \psi)$;
   - $\varphi \vee \psi = ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$.

Logica basata su una t-norma

Definizione

- Una formula φ è una *tautologia* di L_* (o L_*-tautologia, in simboli $\models_{L_*} \varphi$) se e solo se per ogni assegnamento $v\colon Var \to [0,1]$ vale che
$$v(\varphi) = 1\,.$$
- Una formula φ è una *conseguenza logica* (o L_*-conseguenza), di un insieme di formule Γ in L_* (in simboli $\Gamma \models_{L_*} \varphi$) se e solo se per ogni assegnamento $v\colon Var \to [0,1]$ tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, si ha che $v(\varphi) = 1$.
- Una formula φ è *1-soddisfacibile* in L_* (o L_*-1-soddisfacibile), se e solo se esiste un assegnamento $v\colon Var \to [0,1]$ tale che $v(\varphi) = 1$.
- Una formula φ è *debolemente soddisfacibile* in L_* (o L_*-debolemente soddisfacibile), se e solo se esiste un assegnamento $v\colon Var \to [0,1]$ tale che $v(\varphi) > 0$.

Proposizione

Sia $*$ una t-norma continua. Per ogni assegnamento $v\colon Var \to [0,1]$ e ogni coppia di formule φ, ψ:

- $v(\neg\varphi) = v(\varphi) \Rightarrow_* 0$;
- $v(\top) = 1$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
- $v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$.

Si noti che $*$ *determina* $\Rightarrow_*$, nel senso che per ogni scelta possibile della t-norma continua $*$, esiste ed è unico il residuo ad essa associato $\Rightarrow_*$.
Ciò non implica che $\Rightarrow_*$ sia *derivabile* da $*$, cioè non esiste una formula $\theta(\varphi, \psi)$ nel linguaggio $\{\&, \bot\}$ tale che $v(\theta(\varphi, \psi)) = v(\varphi) \Rightarrow_* v(\psi)$.
I connettivi $\neg, \top, \wedge, \vee$ sono invece *derivabili* proprio in questo senso.

Esempio

Esempio

Proviamo che la formula

$$(X\&(X \to Y)) \to Y$$

è una tautologia sia in $L_{\odot}$ (logica di Łukasiewicz) che in $L_{.}$ (logica prodotto).

Per valutare la formula nella logica di Łukasiewicz, supponiamo prima di tutto che sia $v(X) \leq v(Y)$. Allora

$$v((X\&(X \to Y)) \to Y) = (v(X) \odot 1) \Rightarrow_{\odot} v(Y) = v(X) \Rightarrow_{\odot} v(Y) = 1\,.$$

Invece se $v(X) \geq v(Y)$, allora

$$\begin{aligned} & v((X\&(X \to Y)) \to Y) = (v(X) \odot 1 - v(X) + v(Y)) \Rightarrow_{\odot} v(Y) = \\ & = \min(v(X) + 1 - v(X) + v(Y) - 1, 1)) \Rightarrow_{\odot} v(Y) = \\ & = v(Y) \Rightarrow_{\odot} v(Y) = 1 \end{aligned}$$

Esempio

Esempio

Per valutare la formula nella logica prodotto, supponiamo prima di tutto che sia $v(X) \leq v(Y)$. Allora

$$v((X\&(X \to Y)) \to Y) = (v(X) \cdot 1) \Rightarrow_{\cdot} v(Y) = v(X) \Rightarrow_{\cdot} v(Y) = 1\,.$$

Invece se $v(X) \geq v(Y)$, allora

$$\begin{aligned} v((X\&(X \to Y)) \to Y) &= (v(X) \cdot v(Y)/v(X)) \Rightarrow_{\cdot} v(Y) = \\ &= v(Y) \Rightarrow_{\cdot} v(Y) = 1 \end{aligned}$$

Si può provare che la formula

$$(X\&(X \to Y)) \to Y$$

è una tautologia in ogni logica L_*.

Esempio

Proviamo che nella logica di Łukasiewicz e nella logica del minimo nilpotente la formula

$$\neg\neg X \to X$$

è una tautologia, mentre non lo è nella logica prodotto e nella logica di Gödel.

Infatti vale

$$v_{\odot}(\neg\neg X \to X) = 1 - (1 - v(X)) \Rightarrow_{\odot} v(X) = v(X) \Rightarrow_{\odot} v(X) = 1$$

(analogamente anche per il minimo nilpotente). Invece, dato che

$$\neg_{\wedge}\neg_{\wedge} x = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

$$v_{\wedge}(\neg\neg X \to X) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(X) = 0 \\ v(X) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi non è una tautologia.

Provare che la formula

$$X \to (X \& X)$$

è una tautologia per la logica di Gödel $L_\wedge$ ma non per le altre logiche.

La formula

$$X \wedge \neg X$$

invece non è una tautologia per nessuna delle logiche considerate.