19/01/2023 — Primo appello

Nome e Cognome: ________________________ Matricola: ______________

1 Esami e studenti

Un collettivo di 200 studenti è stato classificato secondo due criteri: **(a)** il voto ottenuto ad un certo esame; e **(b)** se l'esame è stato sostenuto al primo oppure al secondo appello. Ogni studente ha svolto unicamente uno dei due appelli. La tabella seguente riporta l'esito della classificazione:

	Appello	
	Primo	**Secondo**
Voto < 28	40	15
Voto ≥ 28	45	100

Numerdo di studenti per voto / appello.

Quale è la probabilità che uno studente scelto a caso dal collettivo:

1. abbia ottenuto un voto strettamente minore di 28? (1 pt)
2. abbia svolto l'esame al primo appello? (1 pt)
3. abbia ottenuto un voto maggiore o uguale a 28 *e* fatto il secondo appello? (2 pt)
4. abbia ottenuto un voto strettamente minore di 28 *oppure* abbia svolto il primo appello? (2 pt)
5. abbia fatto il primo appello *dato che* sappiamo ha ottenuto un voto maggiore o uguale a 28? (2 pt)

1 Soluzione

Definiamo le eventuali variabili aleatorie e gli eventi.
Scriviamo $\mathcal{A}$ per l'evento "lo studente ha ottenuto un voto strettamente minore di 28" e $\mathcal{B}$ per l'evento "lo studente ha fatto il primo appello".
oppure,
Scriviamo $\mathcal{X}$ per la variabile aleatoria che indica il voto preso dallo studente scelto e $\mathcal{Y}$ per la variabile aleatoria che indica l'appello svolto, assumento che quest'ultima prenda valori compresi nell'insieme $\{1,2\}$, per indicare il fatto che lo studente preso abbia svolto il primo (1) o il secondo (2) appello.

1. **Cosa mi viene chiesto? $P(\mathcal{A})$** (oppure $P(\mathcal{X} < 28)$)

   Ci viene chiesta cioè la probabilità *marginale* dell'evento $\mathcal{A}$. Per calcolare tale probabilità, usiamo la definizione classica di probabilità, sapendo che il numero di casi possibili in questo caso è 200, e che, dalla tabella, il numero di casi *favorevoli* è $40 + 15$. Quindi la risposta all'esercizio è:

   $$P(\mathcal{A}) = \frac{\text{\# stud. che hanno avuto un voto} < 28}{\text{\# stud. nel collettivo}}$$

   e cioè:

   $$P(\mathcal{A}) = \frac{55}{200} = \frac{11}{40}$$

   oppure:

   $$P(\mathcal{X} \leq 27) = \frac{55}{200} = \frac{11}{40}$$

2. **Cosa mi viene chiesto?** $\boldsymbol{P(\mathcal{B})}$ (oppure $\boldsymbol{P(\mathcal{Y}=1)}$) Anche qui facciamo lo stesso ragionamento:

$$P(\mathcal{B}) = \frac{\text{\# stud. che hanno fatto il primo appello}}{\text{\# stud. nel collettivo}}$$

e cioè:

$$P(\mathcal{B}) = \frac{85}{200} = \frac{17}{40}$$

oppure:

$$P(\mathcal{Y}=1) = \frac{85}{200} = \frac{17}{40}$$

3. **Cosa mi viene chiesto?**

$\boldsymbol{P(\mathcal{A}^C \cap \mathcal{B}^C)}$ (oppure $\boldsymbol{P(\mathcal{X} \geq 28, \mathcal{Y}=2)}$) Il quesito è forse il più facile di tutti, dato che il numero di casi favorevoli è fornito dalla tabella, e infatti, corrisponde al valore in seconda riga e seconda colonna, cioè 100. Quindi la risposta è:

$$P(\mathcal{A}^C \cap \mathcal{B}^C) = \frac{\text{\# stud. con voto } \geq 28 \text{ e facenti il secondo appello}}{\text{\# stud. nel collettivo}}$$

e cioè:

$$P(\mathcal{A}^C \cap \mathcal{B}^C) = \frac{100}{200} = 0.5$$

oppure:

$$P(\mathcal{X} \geq 28, \mathcal{Y}=2) = \frac{100}{200} = 0.5$$

4. **Cosa mi viene chiesto?** $\boldsymbol{P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})}$ (oppure $\boldsymbol{P(\mathcal{X} < 28 \cup \mathcal{Y}=1)}$)

Per calcolare questa probabilità ci dobbiamo ricordare che questi eventi non sono incompatibili, e cioè hanno un'intersezione non nulla. Quindi, la probabilità della loro unione si calcola sommando le probabilità marginali e sottraendo la probabilità dell'intersezione:

$$P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

E cioè:

$$P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \frac{55}{200} + \frac{85}{200} - \frac{40}{200}$$

dove per determinare $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ ho usato lo stesso ragionamento ragionamento del punto precedente. Quindi la risposta è:

$$P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \frac{11}{40} + \frac{17}{40} - \frac{8}{40} = \frac{20}{40} = 0.5$$

oppure:

$$P(\mathcal{X} \leq 27 \cup \mathcal{Y}=1) = \frac{11}{40} + \frac{17}{40} - \frac{8}{40} = \frac{20}{40} = 0.5$$

5. **Cosa mi viene chiesto?** $\boldsymbol{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}^C)}$ (oppure $\boldsymbol{P(\mathcal{Y}=1|\mathcal{X} \geq 28)}$)

Usiamo la definizione di probabilità complementare:

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}^C) = \frac{P(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^C)}{P(\mathcal{A}^C)} = \frac{\frac{45}{200}}{\frac{145}{200}} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}$$

oppure:

$$P(\mathcal{Y}=1|\mathcal{X} \geq 28) = \frac{9}{29}$$

2 Etica dell'Intelligenza Artificiale

Per far aumentare i ricavi aziendali, un cyborg prende decisioni anti-etiche il 40% delle volte. Le decisioni sono probabilisticamente indipendenti l'una dall'altra.

1. Quale è la probabilità che, su 6 decisioni prese dal cyborg, il numero di decisioni anti-etiche sia dispari? (3 pt)

2. Quali sono il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria che conta il numero di decisioni anti-etiche su 100 decisioni prese, e di quella che le conta su 1000 decisioni prese? (2 pt)

   Suggerimento: *Teniamo presente che* $100 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 24$

3. Supponendo invece che il cyborg prenda le decisioni anti-etiche il 50% delle volte, **approssimare il valore numerico, usando due cifre decimali** della probabilità che, su 100 decisioni prese, le decisioni anti-etiche siano in numero compreso tra 45 e 50 (estremi inclusi). (4 pt)

   Suggerimento: *Sarà utile sapere che:*

$$\frac{44.5 - 50}{5} = -1.1 \textit{ e anche che: } \frac{50.5 - 50}{5} = 0.1$$

2 Soluzione

1. Scriviamo $\mathcal{X}$ per la variabile aleatoria che conta il numero di decisioni anti-etiche in un insieme di 6 decisioni prese. Avremmo che $\mathcal{X}$ segue una distribuzione binomiale di parametri $n = 6$ e $p = 0.4$:

$$\mathcal{X} \sim \text{Binomiale}(n = 6, p = 0.4)$$

   Se usiamo $\mathcal{E}$ per denotare l'evento la v.a. "$\mathcal{X}$ prende un valore dispari", allora

   il quesito è $P(\mathcal{E})$

   Per trovare tale probabilità sommo la probabilità degli eventi che compongono $\mathcal{E}$, dato che sono incompatibili:

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{X} = 1) + P(\mathcal{X} = 3) + P(\mathcal{X} = 5)$$

   in questo caso abbiamo:

$$P(\mathcal{E}) = \binom{6}{1} \cdot 0.4 \cdot (1 - 0.4)^5 + \binom{6}{3} \cdot 0.4^3 \cdot (1 - 0.4)^3 + \binom{6}{5} \cdot 0.4^5 \cdot (1 - 0.4)$$

   e possiamo lasciare scritta la risposta così, oppure così:

$$P(\mathcal{E}) = 6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5 + 20 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^3 + 6 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6$$

   Comunque, il calcolo restitutisce:

$$0.1866 + 0.2765 + 0.0369 = 0.5$$

2. La variabile aleatoria $\mathcal{Y}$ che descrive il numero di decisioni anti-etiche prese in un insieme casuale di 100 decisioni sarà sempre una Binomiale, questa volta però con parametro $n = 100$, quindi il suo valore atteso sarà:

$$\mathbb{E}[\mathcal{Y}] = n \cdot p = 100 \cdot 0.4 = 40$$

E la sua varianza:

$$Var[\mathcal{Y}] = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 40 \cdot 0.6 = 24$$

(Nonostante il suggerimento, la risposta $Var[\mathcal{Y}] = 100 \cdot 0.4 \cdot 0.6$ è comunque esatta e quindi considerata corretta, ammesso che sia un minimo di procedimento)

Similmente, la variabile aleatoria $\mathcal{W}$ che descrive il numero di decisioni anti-etiche prese in un insieme casuale di 1000 decisioni sarà una Binomiale, questa volta però con parametro $n = 1000$, quindi il suo valore atteso sarà:

$$\mathbb{E}[\mathcal{W}] = n \cdot p = 1000 \cdot 0.4 = 400$$

E la sua varianza:

$$Var[\mathcal{W}] = n \cdot p \cdot (1-p) = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 400 \cdot 0.6 = 240$$

(Anche in questo caso, la risposta $Var[\mathcal{W}] = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.6$ è comunque esatta e quindi considerata corretta).

3. Creiamo una nuova v.a., $\mathcal{V}$ che indichi il numero di decisioni anti-etiche prese in 100 decisioni casuali, questa volta usando il parametro $p = 0.5$:

$$\mathcal{V} \sim \text{Binomiale}(n = 100, p = 0.5)$$

e **la probabilità richiesta è:**

$$\boldsymbol{P(45 \leq \mathcal{V} \leq 50)}$$

cioè:

$$P(45 \leq \mathcal{V} \leq 50) = \sum_{i \in \{45,\ldots,50\}} \binom{100}{i} \cdot 0.5^i \cdot 0.5^{100-i}$$

ovvero:

$$P(45 \leq \mathcal{V} \leq 50) = \sum_{i \in \{45,\ldots,50\}} \binom{100}{i} \cdot 0.5^{100}$$

Ora, visto che dobbiamo fornire il valore numerico di tale probabilità, all'esame conviene prendere un'altra strada:

Grazie al fatto che il valore di n elevato, possiamo usare **l'approssimazione della Binomiale con la normale**, ed consiste nel dire che la variabile $\mathcal{V}$ può essere approssimata con un'altra variabile aleatoria $\hat{\mathcal{V}}$ che segue una distribuzione Normale o Gaussiana:

$$\hat{\mathcal{V}} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

dove:

$$\mu = \mathbb{E}[\mathcal{V}] = n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50$$

e

$$\sigma = \sqrt{Var[\mathcal{V}]} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{50 \cdot 0.5} = \sqrt{25} = 5$$

cioè:

$$\hat{\mathcal{V}} \sim \mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 5)$$

oppure, se uno preferisce, può esprimerla usando la varianza e non la deviazione standard, ma in quel caso, ovviamente, deve indicare $\boldsymbol{\sigma^2}$ al posto di $\boldsymbol{\sigma}$ nella formulazione:

$$\hat{\mathcal{V}} \sim \mathcal{N}(\mu = 50, \sigma^2 = 25)$$

La probabilità richiesta dunque si può aprossimare con la seguente:

$$P(44.5 < \hat{\mathcal{V}} < 50.5)$$

dove abbiamo usato la **correzione di continuità**, visto che abbiamo approssimato una v.a. discreta (Binomiale) con una continua (Normale).

Per trovare questa probabilità trasformiamo $\hat{\mathcal{V}}$ in una v.a. con distribuzione normale standard $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z} = \frac{\hat{\mathcal{V}} - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{\mathcal{V}} - 50}{5}$$

dove

$$\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

e quindi:

$$P(44.5 < \hat{\mathcal{V}} < 50.5) = P(\frac{44.5 - 50}{5} < \mathcal{Z} < \frac{50.5 - 50}{5})$$

A questo punto usiamo il suggerimento per capire che la prob. richiesta è:

$$P(-1.1 < \mathcal{Z} < 0.1)$$

Sapendo poi le **proprietà della funzione di ripartizione normale standard**, sappiamo che:

$$P(-1.1 < \mathcal{Z} < 0.1) = \mathbf{\Phi}(0.1) - \mathbf{\Phi}(-1.1)$$

e, facendo un lookup sulla tabella $\mathbf{\Phi}$ abbiamo:

$$\mathbf{\Phi}(0.1) - \mathbf{\Phi}(-1.1) = 0.54 - 0.14 = 0.40$$

che è la risposta nel formatto richiesto. (Non verrà penalizzata l'inesattezza in quest'ultima risposta: ammesso che uno sia arrivato all'espressione $\mathbf{\Phi}(-0.1) - \mathbf{\Phi}(-1.1)$, verrà tollerato *un certo* margine nel calcolo di questa espressione).

3 Demo day

Antonio realizza un software senza errori e decide di fare una demo davanti al suo capo. Il giorno prima della Demo però, Antonio prende in considerazione l'opzione di apportare dei cambiamenti al codice. Ora, se modifica il codice relativo al **back-end**, la probabilità di introdurre un errore è **0.4**, se modifica il codice relativo al **front-end**, la probabilità di introdurre l'errore è **0.1**. Infine, se si modifica il codice relativo al modulo di **database**, potrebbe introdurre un bug con probabilità **0.7**. Si supponga in ognuno dei seguenti quesiti che, **se Antonio fa una modifica il codice**, allora ne fa soltanto una, e sceglie il tipo di modifica (back-end, front-end, database) con una probabilità uniforme tra questi.

1. Quale è la probabilità di non introdurre alcun errore supponendo che il modulo del database venga modificato? (1pt)

2. Supponendo che Antonio abbia deciso di fare una modifica al codice, di qualunque tipo essa sia, quale è la probabilità di non avere nessun errore? (1pt)

3. Supponendo che Antonio abbia deciso di fare una modifica al codice, quale è la probabilità che tale modifica abbia riguardato il front-end, dato che non c'è stato un bug il giorno della demo? (2pt)

4. Supponiamo di non sapere se Antonio abbia fatto la modifica o meno, sappiamo però, che lui decide di **non** fare alcuna modifica con probabilità $\frac{1}{4}$. Quale è la probabilità di non introdurre nessun errore? (2pt)

5. Con le assunzioni del punto precedente, calcolare nuovamente la probabilità che non ci sia alcun errore durante il demo day. (2pt)

3 Soluzione

Sia $\mathcal{F}$ l'evento "Antonio modifica il codice relativo al front-end", $\mathcal{B}$ l'evento "Antonio modifica il codice relativo al back-end" e $\mathcal{D}$ l'evento "Antonio modifica il codice relativo al database". Sia inoltre $\mathcal{E}$ l'evento "Antonio introduce un errore nel codice".
Le probabilità che abbiamo dalla traccia sono:

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{B}) = 0.4 \ , \ P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = 0.1 \ , \ P(\mathcal{E}|\mathcal{D}) = 0.7$$

1. Per la **complemetarietà**, abbiamo:

$$P(\mathcal{E}^C|\mathcal{B}) = 1 - P(\mathcal{E}|\mathcal{B}) = 0.6$$
$$P(\mathcal{E}^C|\mathcal{F}) = 1 - P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = 0.9$$
$$P(\mathcal{E}^C|\mathcal{D}) = 1 - P(\mathcal{E}|\mathcal{D}) = 0.3$$

   Il quesito chiedeva soltanto l'ultima. Qui le scriviamo tutti e tre perché serviranno dopo.

2. **Ci viene chiesta la probabilità: $\boldsymbol{P(\mathcal{E}^C)}$** e, per calcolarla, usiamo il **teorema della probabilità totale**:

$$P(\mathcal{E}^C) = P(\mathcal{E}^C|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{E}^C|\mathcal{F})P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}^C|\mathcal{D})P(\mathcal{D})$$

   Se assumiamo una probabilità uniforme sui tre tipi di modifica abbiamo che:

$$P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{F}) = P(\mathcal{D}) = \frac{1}{3}$$

   e quindi:

$$P(\mathcal{E}^C) = 0.6 \cdot \frac{1}{3} + 0.9 \cdot \frac{1}{3} + 0.3 \cdot \frac{1}{3} = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6$$

3. **Ci viene chiesta trovare la probabilità condizionata $\boldsymbol{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}^C)}$**

   Per calcolarla, usiamo il **teorema di Bayes**:

$$P(\mathcal{F}|\mathcal{E}^C) = \frac{P(\mathcal{E}^C|\mathcal{F})P(\mathcal{F})}{P(\mathcal{E}^C)}$$

   e quindi abbiamo:

$$P(\mathcal{F}|\mathcal{E}^C) = \frac{0.9 \cdot \frac{1}{3}}{0.6} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

4. Rispetto ai punto precendete, abbiamo un nuovo evento, $\mathcal{C}$, corrispondente a "Antonio non modifica il codice" **La probabilità richiesta è $\boldsymbol{P(\mathcal{E}^C)}$**

   Usiamo ancora una volta la probabilità totale:

$$P(\mathcal{E}^C) = P(\mathcal{E}^C|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{E}^C|\mathcal{F})P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}^C|\mathcal{D})P(\mathcal{D}) + P(\mathcal{E}^C|\mathcal{C})P(\mathcal{C})$$

   Dove abbiamo aggiunto la possibilità che non ci sia nessuna modifica al codice. Ora noi sappiamo che: $P(\mathcal{C}) = \frac{1}{4}$ e, ovviamente, che $P(\mathcal{E}^C|\mathcal{C}) = 1$ (se non si modifica il codice, non ci saranno errori).

   Dobbiamo fare attenzione anche a ricalibrare il valore degli eventi di modifica, visto che adesso questi tre eventi si contendono, in modo uniforme, la probabilità di modifica $P(\mathcal{C}^C) = 1 - P(\mathcal{C}) = \frac{3}{4}$. E quindi:

$$P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{F}) = P(\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{C}^C)}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

   La probabilità richiesta dunque è:

$$P(\mathcal{E}^C) = 0.6 \cdot \frac{1}{4} + 0.9 \cdot \frac{1}{4} + 0.3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0.7$$

5. **La probabilità richiesta è** la stessa del punto precedente. (Quindi, ai fini della valutazione dell'esame, la risposta era la stessa).

4 Macchine elettriche

Una macchina elettrica ha 4 batterie dello stesso tipo. Il funzionamento e l'eventuale guasto di ogni batteria è indipendente da quello delle altre. La durata di ciascuna batteria (in anni) è una variabile aleatoria distribuita esponenzialmente, e la vita media di una di queste batterie è di 18 anni:

1. Qual'è il parametro λ della v.a. associata al tempo di vita di ciascuna batteria in anni? (1pt)
2. Qual'è la probabilità che in **20** anni non occorra sostituire alcuna batteria? (2pt)
3. Qual'è la probabilità che in **30** anni si guasti al massimo una batteria? (2pt)

   Suggerimento: In questo caso non si può usare la distribuzione di Poisson perchè il numero massimo di potenziali guasti è finito (4).
4. Si prende in esame una particolare batteria e si osserva che questa **non** si è rotta negli ultimi 10 anni. Quale è la probabilità che tale batteria non si rompa nei prossimi **20** anni? (1pt)

4 Soluzione

Denotiamo con $\mathcal{X}$ la v.a. che indica il tempo di vita di una batteria in anni.

1. Abbiamo, dalla traccia, che $\mathcal{X}$ segue una distributione esponenziale, e che $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = 18$. Quindi la risposta la otteniamo sapendo che, per le v.a. esponenziali:

   $$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\lambda} = 18$$

   e perciò:

   $$\lambda = \frac{1}{18}$$

2. Denotiamo con $\mathcal{E}$ l'evento "in 20 anni non occorre sostituire alcuna batteria". **Ci viene chiesta la probabilità: $\boldsymbol{P(\mathcal{E})}$.**

   Sappiamo che ogni batteria ha una probabilità di sopravivenza ai prossimi vent'anni pari a:

   $$P(\mathcal{X} > 20) = e^{-\lambda \cdot 20} = e^{-\frac{20}{18}} = e^{-\frac{10}{9}}$$

   (Abbiamo utilizzato la **funzione di sopravvivenza**, ma si poteva ricavare anche con il complemento la funzione di probabilità cumulativa)

   Ora, dato che le batterie sono indipendenti, possiamo modellare il numero di batterie rotte nei prossimi vent'anni con una v.a. $\mathcal{Y}$ tale che:

   $$\mathcal{Y} \sim \text{Binomiale}(n = 4, p = 1 - e^{-\frac{10}{9}})$$

   dove abbiamo scelto l'evento "guasto della batteria nei prossimi vent'anni" come successo, con la probabilità complementare a quella dell'evento di sopravvivenza.

   Analogamente, avremmo potuto modellare il numero di batterie funzionanti dopo i prossimi vent'anni con una v.a. $\mathcal{W}$ tale che:

   $$\mathcal{W} \sim \text{Binomiale}(n = 4, p = e^{-\frac{10}{9}})$$

La probabilità richiesta quindi è:

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{Y} = 0) = \binom{4}{0}(1 - e^{-\frac{10}{9}})^0 \cdot (e^{-\frac{10}{9}})^4 = (e^{-\frac{10}{9}})^4 = e^{-\frac{40}{9}}$$

che è equivalente a:

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{W} = 4) = \binom{4}{4}(e^{-\frac{10}{9}})^4 \cdot (1 - e^{-\frac{10}{9}})^0 = (e^{-\frac{10}{9}})^4 = e^{-\frac{40}{9}}$$

(Il calcolo restituisce ≈ 0.01)

3. Ragionando in modo simile al punto precedente, creiamo una v.a. $\hat{\mathcal{Y}}$ che indichi il numero di batterie rotte nei prossimi trent'anni. Dato che:

$$P(\mathcal{X} > 30) = e^{-\lambda \cdot 30} = e^{-\frac{30}{18}} = e^{-\frac{10}{6}}$$

Avremmo che:

$$\hat{\mathcal{Y}} \sim \text{Binomiale}(n = 4, p = 1 - e^{-\frac{10}{6}})$$

Ci viene chiesta trovare la probabilità $\boldsymbol{P(\hat{\mathcal{Y}} \leq 1)}$ E cioè:

$$P(\hat{Y} \leq 1) = P(\hat{Y} = 0) + P(\hat{Y} = 1)$$

$$P(\hat{Y} \leq 1) = \binom{4}{0}(1 - e^{-\frac{10}{6}})^0 \cdot (e^{-\frac{10}{6}})^4 + \binom{4}{1}(1 - e^{-\frac{10}{6}}) \cdot (e^{-\frac{10}{6}})^3$$

$$P(\hat{Y} \leq 1) = (e^{-\frac{10}{6}})^4 + 4 \cdot (1 - e^{-\frac{10}{6}}) \cdot (e^{-\frac{10}{6}})^3 = e^{-\frac{20}{3}} + 4 \cdot (1 - e^{-\frac{10}{6}}) \cdot e^{-\frac{10}{2}}$$

(Il calcolo restituisce ≈ 0.02) E, anche in questo caso, si poteva aver risolto l'esercizio in funzione di una v.a. che indicasse il numero di batterie funzionanti, $\hat{\mathcal{W}}$, anzicché il numero di batterie guaste...

4. Ci viene chiesta la probabilità condizionata: $(P(\mathcal{X} > 30 | \mathcal{X} > 10))$

   Per la proprietà di **mancanza di memoria** della distribuzione esponenziale, sappiamo che:

$$P(\mathcal{X} > 30 | \mathcal{X} > 10) = \frac{P(\mathcal{X} > 10 + 20)}{P(\mathcal{X} > 10)} = P(\mathcal{X} > 20) = e^{-\frac{10}{9}} \approx 0.33$$