Logica dei Predicati

Logica Matematica

Pietro Galliani

Università dell'Insubria, Varese
pietro.galliani@uninsubria.it

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Logica dei predicati

Consideriamo la seguente frase

Per ogni numero n, se n è pari allora $n + 1$ è dispari.

Questa frase può essere resa nella logica proposizionale con una implicazione

$$A \rightarrow B$$

Però nota che mentre $A \rightarrow B$ è una formula che non è sempre vera, la formula

per ogni numero n, se n è pari allora $n + 1$ è dispari

è vera (almeno nell'interpretazione nei numeri interi).

Inoltre in $A \rightarrow B$ si perde il "*collegamento*" che c'è tra l'antecedente (che nomina n) e il conseguente (che nomina $n + 1$).
Bisogna introdurre una logica più ricca, la logica dei predicati.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Per ogni numero n, se n è pari allora $n+1$ è dispari.

La prima differenza è l'utilizzo del quantificatore **per ogni**.

"n **è pari**" è una proprietà della variabile n e ha un valore di verità (che dipende da come interpretiamo n).

$n+1$ invece dipende anche da n ma non è una proprietà di n, non possiamo dire se è vero o falso. E' una trasformazione di n in un altro elemento.

Dobbiamo quindi permettere al nostro linguaggio di distinguere le due situazioni.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Consideriamo la formula

$$\forall x(P(x) \to D(f(x)))$$

che andremo ad interpretare nell'ambito dei numeri naturali.

Interpretiamo $P(x)$ e $D(x)$ come x **è pari** e x **è dispari**. Questi sono dei *predicati*.

Invece $f(x)$ è interpretato dalla funzione che a x associa $x + 1$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Cerchiamo una formalizzazione della seguente frase:

Se Zoe e Zelda sono sorelle allora Zelda è la zia della figlia di Zoe.

- C'è un connettivo proposizionale che è l'implicazione.
- "*Zoe*" e "*Zelda*" sono dei nomi, che consideriamo come **costanti**.
- "*X e Y sono sorelle*" e "*X è la zia di Y*" sono proprietà con due argomenti (**relazioni**).
- "*figlia di Zoe*" indica ancora una persona (quindi non una proprietà) ottenuta "*trasformando*" Zoe.

La formalizzazione di questa frase può essere

$$P(c_1, c_2) \to Q(c_2, f(c_1))\,.$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Nella frase

Per ogni studente c'è un esame difficile da superare

non ci sono connettivi proposizionali, quindi l'unico modo di renderlo nella logica proposizionale sarebbe quello di utilizzare una variabile.
Invece nella logica dei predicati si può scrivere come

$$\forall x \exists y D(x, y)\,.$$

Linguaggio logica dei predicati

Definizione

Il linguaggio della logica dei predicati è formato dai seguenti insiemi:

- Variabili $x, y, z, \ldots$;
- costanti $c_1, c_2, \ldots$;
- funzioni $f_1, f_2, g, h, \ldots$; ogni funzione ha associata la sua *arietà* ;
- predicati $P, Q, A, B, \ldots$; ogni predicato ha associata la sua arietà ;
- connettivi proposizionali: $\wedge, \vee, \rightarrow \neg$;
- quantificatori: $\forall$, $\exists$;
- parentesi.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Termini

Definizione

L'insieme *Term* dei termini è così definito:

- Variabili e costanti sono termini;
- se f è una funzione n-aria e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora anche $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

Esempio

Se f è binaria, g è unaria, c è una costante e x, y sono variabili, allora

$$g(f(x, g(f(c, g(y)))))$$

è un termine. (Provare a scrivere l'albero di parsing.)

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Formule

Definizione

L'insieme *Form* delle formule della logica dei predicati è così definito:

- Se P è un predicato n-ario e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora

  $$P(t_1, \ldots, t_n)$$

  è una formula, che chiamiamo **formula atomica**.
- Se φ_1, φ_2 sono formule allora $(\neg\varphi_1)$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ sono formule.
- Se φ è una formula e x è una variabile, allora $(\forall x\varphi)$ e $(\exists x\varphi)$ sono formule.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempi

Nello scrivere una formula bisognerebbe specificare i simboli che sono utilizzati e il loro numero di argomenti, ma di solito queste informazioni sono chiare dal contesto.
Nella formula $\exists x(A(x,y) \land \forall y B(y))$ ho il predicato binario A e il predicato unario B. Il suo parsing tree è

$$
\begin{tikzcd}
 & \exists x(A(x,y) \land \forall y B(y)) \arrow[d, dash] & \\
 & A(x,y) \land \forall y B(y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A(x,y) & & \forall y B(y) \arrow[d, dash] \\
 & & B(y)
\end{tikzcd}
$$

Nota che nel parsing tree di una formula le foglie sono formule atomiche, cioè le formule più piccole che si possono considerare.

Esempi

Nelle formule atomiche compare un solo predicato applicato a dei termini, ma i termini non hanno limiti di lunghezza.
Nella formula $\forall A(f(g(x),c),g(f(x,c))) \wedge \exists yB(f(c,g(y)))$ compaiono anche la funzione binaria f, la funzione unaria g e la costante c. La formula ha il seguente parsing tree

$$\begin{array}{ccc}
 & \forall xA(f(g(x),c),g(f(x,c))) \wedge \exists yB(f(c,g(y))) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\forall xA(f(g(x),c),g(f(x,c))) & & \exists yB(f(c,g(y))) \\
| & & | \\
A(f(g(x),c),g(f(x,c))) & & B(f(c,g(y)))
\end{array}$$

Valgono le stesse considerazioni sulle parentesi e sulla gerarchia dei connettivi della logica proposizionale. I quantificatori però hanno precedenza rispetto agli altri connettivi binari:

Esempio

$$\forall x A(x) \to B(x)$$

è da intendersi come

$$(\forall x A(x)) \to B(x)\,.$$

Definizione

Nelle formula $\forall x\psi$ e $\exists x\psi$ la formula ψ si chiama **campo d'azione** del quantificatore.

Se x è una variabile, $\forall x$ e $\exists x$ sono chiamati x-quantificatori.

Una occorrenza di variabile x è **vincolata** se appare nel campo d'azione di un x quantificatore. Altrimenti si dice **libera**.

Una formula che non contiene occorrenze di variabili libere si dice **sentenza** o **formula chiusa**.

Esempio

Nella formula $\forall x(P(x,y) \to \exists y(R(x,f(y))))$ tutte le occorrenze della x sono vincolate, invece la prima occorrenza della y è libera e la seconda è vincolata.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

L'insieme $FV(\varphi)$ delle variabili libere di una formula φ è definito come segue:

- Se φ è una formula atomica allora $FV(\varphi)$ è l'insieme di tutte le variabili che compaiono in φ;
- Se $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ allora $FV(\varphi) = FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$;
- Se $\varphi = \neg\varphi_1$ allora $FV(\varphi) = FV(\varphi_1)$;
- Se $\varphi = \forall x \varphi_1$ o $\varphi = \exists x \varphi_1$ allora $FV(\varphi) = FV(\varphi_1) \setminus \{x\}$.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(\exists y(A(x,y) \rightarrow A(x,c)) \wedge \forall z(A(y,z) \vee \neg B(x, f(z))))$. Allora $FV(\varphi) = \{y\}$. Nota che non si tiene conto di quante occorrenze della variabile ci sono e se ce ne sono altre vincolate.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Semantica

Per interpretare una formula della logica dei predicati abbiamo bisogno di molte più informazioni rispetto alla logica proposizionale.

Infatti le formule atomiche possono assumere un valore vero o falso a seconda dei termini che vi compaiono, i quali non sono veri o falsi ma prendono un valore in un certo contesto di riferimento.

Esempio

Consideriamo la formula $\forall x P(x)$. Per dire è vera o falsa dobbiamo interpretare P in qualche modo e per far questo dobbiamo fissare un **contesto**: per esempio suppongo di interpretare la formula nell'insieme dei numeri naturali e il predicato P come la proprietà *essere pari*.
Allora la formula si legge come *tutti i numeri naturali sono pari* ed è chiaramente falsa.

Però se decido di interpretare la formula nel contesto di tutti gli animali e di interpretare P come la proprietà *respirare* allora la formula diventa *tutti gli animali respirano* ed è quindi vera.

Definizione

Una **struttura** è una coppia $\mathcal{A} = (D, I)$ dove

- D è un insieme qualsiasi detto **dominio**;
- I è detta **funzione di interpretazione** ed associa un significato a costanti, funzioni e predicati secondo il seguente schema:
  - Se c è una costante allora $I(c) \in D$;
  - Se f è una funzione n-aria allora $I(f) : D^n \to D$;
  - Se P è un predicato n-ario, allora $I(P) : D^n \to \{0, 1\}$.

Nota che chiedere che $I(P)$ sia una funzione a valori in $\{0, 1\}$ è equivalente a chiedere che $I(P) \subseteq D^n$. Infatti un sottoinsieme può sempre essere rappresentato dalla sua *funzione caratteristica*.

Esempio

Supponiamo che $D = \mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali (compreso lo 0). Posso interpretare un predicato unario P come

$$I(P) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

oppure

$$I(P) : n \in \mathbb{N} \to \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le due definizioni (anche se di *tipi* diversi), sono equivalenti. La seconda mette in risalto i valori di verità .

Definizione

Data una struttura $\mathcal{A} = (D, I)$, un **ambiente** (o interpretazione delle variabili) è una funzione

$$e_{\mathcal{A}} : x \in Var \to e_{\mathcal{A}}(x) \in D\,.$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

Data una struttura $\mathcal{A} = (D, I)$, un ambiente $e_{\mathcal{A}}$ e un termine t, l'interpretazione $[\![t]\!]^e_{\mathcal{A}} \in D$ di t in $\mathcal{A}$ è data da:

- Se t è una costante c allora $[\![t]\!]^e_{\mathcal{A}} = I(c)$;
- Se t è una variabile x allora $[\![t]\!]^e_{\mathcal{A}} = e(x)$;
- Se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ allora $[\![t]\!] = I(f)([\![t_1]\!]^e_{\mathcal{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]^e_{\mathcal{A}})$.

Nota che l'interpretazione di un termine è sempre un elemento del dominio (quindi ai termini non associamo un valore di verità).

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

1. Sia $t = f(c, d)$ con c e d costanti e f funzione binaria. Se $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove $I(c) = 2$, $I(d) = 3$ e

$$I(f) : (n, m) \in \mathbb{N}^2 \to n + m \in \mathbb{N}$$

   allora $[\![t]\!]_{\mathcal{A}} = I(f)([\![c]\!]_{\mathcal{A}}, [\![d]\!]_{\mathcal{A}}) = 2 + 3 = 5 \in \mathbb{N}$.
   Nota che non c'è bisogno di fissare un ambiente per le variabili poiché non ci sono variabili da interpretare.

2. Interpretare il termine

$$t = f(x, g(y, c), f(y, c, g(x, c)))$$

   con $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ e $I(c) = 4$, $I(f) : (n, m, h) \in \mathbb{N}^3 \to n + m \cdot h \in \mathbb{N}$, $I(g) : (n, m) \in \mathbb{N}^2 \to n \cdot m \in \mathbb{N}$ e $e_{\mathcal{A}}$ ambiente tale che $e_{\mathcal{A}}(x) = 1$ e $e_{\mathcal{A}}(y) = 2$. Cosa ci aspettiamo di ottenere?

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

Se $e_{\mathcal{A}}$ è un'interpretazione delle variabili rispetto ad $\mathcal{A} = (D, I)$ e se $d \in D$ allora con $e_{\mathcal{A}}(d/x)$ si denota l'interpretazione

$$e_{\mathcal{A}}(d/x) : y \in Var \rightarrow \begin{cases} e_{\mathcal{A}}(y) & \text{se } y \neq x \\ d & \text{se } y = x. \end{cases}$$

In altre parola $e_{\mathcal{A}}(d/x)$ è un ambiente che è uguale ad $e_{\mathcal{A}}$ tranne che sulla variabile x, alla quale assegna il valore d.
Questo ci servirà per interpretare in quantificatori.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione (Valutazione delle formule)

Fissata $\mathcal{A} = (D, I)$ e un ambiente $e_{\mathcal{A}}$, una valutazione delle formule è una funzione

$$v^{(\mathcal{A},e)} : Form \to \{0,1\}$$

definita nel seguente modo:

- Se $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$ allora

  $$v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_e^{\mathcal{A}}, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket_e^{\mathcal{A}});$$

  nella notazione insiemistica possiamo dire che $v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = 1$ se e solo se $(\llbracket t_1 \rrbracket_e^{\mathcal{A}}, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket_e^{\mathcal{A}}) \in I(P)$.
- se $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ con $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$ allora

  $$v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi_1) * v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi_2)$$

  Analogamente se $\varphi = \neg\varphi_1$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

- Se $\varphi = \forall x\psi$ allora

$$v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = \min\left\{v^{(\mathcal{A},e(d/x))}(\psi) \mid d \in D\right\}.$$

Questo è equivalente a dire che $v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = 1$ se e solo se per ogni $d \in D$ si ha $v^{(\mathcal{A},e(d/x))}(\psi) = 1$.

- Se $\varphi = \exists x\psi$ allora

$$v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = \max\left\{v^{(\mathcal{A},e(d/x))}(\psi) \mid d \in D\right\}.$$

Questo è equivalente a dire che $v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi)) = 1$ se e solo se esiste $d \in D$ tale che $v^{(\mathcal{A},e(d/x))}(\psi) = 1$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Consideriamo la formula $\varphi = P(x, y)$ e la struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, I)$ dove $I(P) = \{(n, m) \mid n \leq m\}$. Sia $e_{\mathcal{A}}$ l'ambiente tale che $e(x) = 2$ e $e(y) = 10$.
Allora

$$v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad (\llbracket x \rrbracket_e^{\mathcal{A}}, \llbracket y \rrbracket_e^{\mathcal{A}}) \in I(P)$$

cioè $v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = 1$ se e solo se $(2, 10) \in I(P)$.
Dato che $2 \leq 10$ allora la formula φ è valutata a 1.

La formula $\forall x P(x, y)$ invece è sempre falsa.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(P(x) \to D(x))$ e $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, I)$ con

$$I(P) = x \in \mathbb{Z} \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è multiplo di 4} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$I(D) = x \in \mathbb{Z} \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia inoltre $e_{\mathcal{A}}(x) = 2$. Allora

$$v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = \min\left\{ v^{(\mathcal{A},e(d/x))}(P(x) \to D(x)) \mid d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dobbiamo quindi valutare

$$v^{(\mathcal{A},e(d/x))}(P(x) \to D(x))$$

al variare di $d \in \mathbb{Z}$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Per $d = 0$, si ha

$$v^{(\mathcal{A},e(0/x))}(P(x) \to D(x)) = \max\{1 - v^{(\mathcal{A},e(0/x))}(P(x)), v^{(\mathcal{A},e(0/x))}(D(x))\}\,.$$

Poiché $v^{(\mathcal{A},e(0/x))}(P(x)) = I(P)(0) = 1$ e $v^{(\mathcal{A},e(0/x))}(D(x)) = I(D)(0) = 1$ allora

$$v^{(\mathcal{A},e(0/x))}(P(x) \to D(x)) = 1.$$

Per $d = 1$ si ha $v^{(\mathcal{A},e(1/x))}(P(x)) = 0$ e $v^{(\mathcal{A},e(1/x))}(D(x)) = 0$ quindi $v^{(\mathcal{A},e(1/x))}(P(x) \to D(x)) = 1$.

Chiaramente non possiamo effettivamente ripetere questo ragionamento per tutti i numeri interi, ma è altrettanto chiaro che la formula vale sempre 1 in questa interpretazione perché se d è un multiplo di 4 allora è un numero pari, mentre se d non è multiplo di 4 allora nell'implicazione l'antecedente è falso.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esercizi

Consideriamo la seguente espressione:

Per ogni numero *n* vale che o il numero è multiplo di 3, o è pari oppure *n* è multiplo di un numero dispari.

Scrivere una formula della logica dei predicati che può essere interpretata da tale espressione. Per esempio si può introdurre un predicato binario che andrà interpretato con *essere multiplo*, un predicato unario per *essere pari* e una constante da interpretare con 3.

Analogamente per

Se esiste uno studente bravo allora non è vero che tutti gli studenti sono bocciati all'esame di algoritmi.

In questo caso, introdurre un predicato unario per *essere bravo* e un predicato unario per *essere bocciati all'esame di algoritmi*. Il dominio in cui interpretare questa formula è l'insieme degli studenti.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Proposizione

Sia $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *e* $\mathcal{A}$ *una struttura. Allora se* e_1 *e* e_2 *sono due ambienti rispetto ad* $\mathcal{A}$ *tali che*

$$e_1(x_i) = e_2(x_i) \text{ per ogni } x_i \in FV(\varphi),$$

si ha che $v^{(\mathcal{A},e_1)}(\varphi) = v^{(\mathcal{A},e_2)}(\varphi)$.

In particolare se φ *è una formula chiusa, allora* $FV(\varphi) = \emptyset$ *e la valutazione di* φ *non dipende dal particolare ambiente. In questo caso scriviamo direttamente* $v^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Dimostrazione

Procediamo per induzione strutturale.

- Se φ è una formula atomica allora $FV(\varphi)$ sono tutte le variabili che compaiono in φ e quindi $e_1 = e_2$.

Dimostrazione

- Se $\varphi = \forall x \psi$ allora $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$. Per ipotesi di induzione, $e_1(y) = e_2(y)$ per ogni $y \in FV(\psi) \setminus \{x\}$. Allora per ogni $d \in D$, poiché $e_1(d/x)(x) = d = e_2(d/x)(x)$ si ha

$$v^{(\mathcal{A},e_1)}(\varphi) = \min \left\{ v^{(\mathcal{A},e_1(d/x))}(\psi) \mid d \in D \right\} =$$

$$= \min \left\{ v^{(\mathcal{A},e_2(d/x))}(\psi) \mid d \in D \right\} = v^{(\mathcal{A},e_2)}(\varphi).$$

- Gli altri casi sono analoghi.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

Diciamo che la coppia $(\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}})$ **soddisfa** una formula φ e scriviamo

$$(\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}) \vDash \varphi$$

se $v^{(\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}})}(\varphi) = 1$.

Una formula φ è **soddisfacibile da** $\mathcal{A}$ se esiste un ambiente $e_{\mathcal{A}}$ tale che $(\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}) \vDash \varphi$.

$\mathcal{A}$ è un **modello** di φ (e scriviamo $\mathcal{A} \vDash \varphi$) se per ogni ambiente $e_{\mathcal{A}}$ si ha $(\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}) \vDash \varphi$. Diremo anche che φ è vero in $\mathcal{A}$.

φ è **valida** se è vera in ogni struttura, cioè per ogni $\mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} \vDash \varphi$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Nota che se φ è una formula chiusa, allora φ è soddisfatta da una struttura $\mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{A}$ è un modello di φ, cioè in questo caso le definizioni di modello e di soddisfacibilità coincidono.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(P(x) \to M(x, y))$. La formula φ non è chiusa.
Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(P) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e
$I(M) = \{(n, m) \mid n \text{ è multiplo di } m\}$.
Fissiamo $e_{\mathcal{A}}(y) = 3$. Quindi $v^{(\mathcal{A},e)}(\varphi) = 1$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$v^{(\mathcal{A},e(n/x))}(P(x) \to M(x, y)) = 1$$

cioè se e solo se $v^{(\mathcal{A},e(n/x))}(P(x)) = 0$ oppure $v^{(\mathcal{A},e(n/x))}(M(x, y)) = 1$,
cioè se e solo se n non è pari oppure n è un multiplo di 3.
Quindi la formula φ non è soddisfatta da $(\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}})$.
Nota che φ è soddisfacibile dalla struttura $\mathcal{A}$. Quale ambiente dobbiamo considerare?

Esempi - insiemi

I predicati unari sono interpretati con sottoinsiemi del dominio. Possiamo quindi esprimere alcune proprietà degli insiemi con le formule della logica dei predicati:

- La formula $\forall x(A(x) \to B(x))$ è soddisfatta in una struttura (D, I) se e solo se $I(A) \subseteq I(B)$. Possiamo quindi dire che l'implicazione è interpretata con l'inclusione tra insiemi.
- La formula $\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$ è soddisfatta in una struttura se e solo se $I(A)$ e $I(B)$ sono disgiunti.
- La formula $\exists x((A(x) \vee B(x)) \wedge \neg C(x))$ è soddisfatta in una struttura se e solo se $(I(A) \cup I(B)) \setminus I(C)$ è non vuoto.
- **Esercizio**. Rappresentare con una formula il fatto che un insieme è contenuto nell'intersezione di altri due.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempi - relazioni

I predicati binari sono interpretati da relazioni sul dominio.
Consideriamo per esempio l'insieme $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e la relazione su D espressa dalla seguente tabella:

	1	2	3	4	5
1	✓	✓		✓	
2	✓		✓	✓	
3		✓	✓		
4	✓	✓	✓	✓	✓
5			✓		

Quali delle seguenti formule sono soddisfatte da questa struttura?

- $\forall x \exists y R(x, y)$
- $\forall x \forall y R(x, y)$
- $\exists x \forall y R(x, y)$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

Una formula φ è conseguenza logica di un insieme di formule Γ, e scriviamo

$$\Gamma \vDash \varphi,$$

se per ogni $(\mathcal{A}, e)$ tale che $(\mathcal{A}, e) \vDash \psi$ per ogni $\psi \in \Gamma$ si ha $(\mathcal{A}, e) \vDash \varphi$.

Definizione

Una formula φ è **falsa** in $\mathcal{A}$ se non esistono ambienti e tali che $(\mathcal{A}, e) \vDash \varphi$.

Una formula φ è una **contraddizione** se non ha modelli, cioè è falso in ogni struttura.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Proposizione

φ *è valida se e solo se* $\neg\varphi$ *è una contraddizione.*

φ *è soddisfacibile se e solo se* $\neg\varphi$ *non è valida.*

$\Gamma \vDash \varphi$ *se e solo se* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *è una contraddizione.*

Confronta con il proposizionale...

Formule valide

Se φ è una tautologia della logica proposizionale, allora sostituendo ogni variabile proposizionale con una formula della logica dei predicati si ottiene una formula valida della logica dei predicati.

Esempio

$X \vee \neg X$ è una tautologia, quindi per esempio

$$A(x, f(g(c, x))) \vee \neg A(x, f(g(c, x)))$$

è una formula della logica dei predicati che è valida.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Formule valide

Esempio

La formula chiusa

$$\varphi = \forall x(A(x) \wedge B(x)) \to (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$$

è valida. Infatti, qualsiasi sia la struttura $\mathcal{A} = (D, I)$ in cui la si interpreta, si ha che $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ poiché se ogni elemento d del dominio soddisfa sia A che B allora ogni elemento soddisfa A e ogni elemento soddisfa B.

Analogamente la formula

$$\varphi = \exists x(A(x) \vee B(x)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$$

è valida.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio (Paradosso del barbiere)

Esempio di formula contraddittoria.

In un villaggio c'è un barbiere che rade tutti quelli che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso?

Formalizziamo: predicato binario per "*radere*" $R(x, y)$. Costante b per il barbiere. La formula diventa

$$\varphi = \forall x(R(b, x) \leftrightarrow (\neg R(x, x))).$$

La struttura in cui interpretiamo questa formula è $\mathcal{A} = (D, I)$ dove D è l'insieme degli abitanti del villaggio, $I(R) = \{(x, y) \mid x \text{ rade } y\}$ e $I(b)$ è il barbiere.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

$$\varphi = \forall x(R(b,x) \leftrightarrow (\neg R(x,x))).$$

Consideriamo una struttura qualsiasi. La formula φ è chiusa, quindi non c'è bisogno di considerare le valutazioni delle variabili.
Sia $\mathcal{A} = (D, I)$, allora $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ se e solo se per ogni $d \in D$ si ha che

$$I(R)(I(b), d) = 1 - I(R)(d, d).$$

Ma questo non può valere per tutti i $d \in D$ perché basta scegliere $d = I(b)$ e non può essere

$$I(R)(I(b), I(b)) = 1 - I(R)(I(b), I(b)).$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Equivalenze logiche -I

Definizione

$\varphi \equiv \psi$ se per ogni $\mathcal{A}$ e per ogni $e^{\mathcal{A}}$ si ha

$$(\mathcal{A}, e^{\mathcal{A}}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, e^{\mathcal{A}}) \models \psi\,.$$

Esempio

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi \qquad\qquad \neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$$

Vediamo un caso particolare.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Consideriamo la formula chiusa

$$\varphi = \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \,.$$

La formula φ esprime la proprietà transitiva di R. Consideriamo una struttura in cui non vale. Sia $\mathcal{A} = (\{a,b,c\}, I)$ dove

$$I(R) = \{(a,a),(a,b),(c,a),(b,c)\} \,.$$

Allora $\mathcal{A} \nvDash \varphi$ dato che $I(R)$ non è transitiva. Infatti esistono tre elementi del dominio di $\mathcal{A}$ e cioè a, b, c tali che $(a,b) \in I(R)$, $(b,c) \in I(R)$ ma $(a,c) \notin I(R)$. Quindi $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$ e $\mathcal{A}$ soddisfa

$$\exists x \exists y \exists z \neg (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \,.$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Le equivalenze

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi \qquad\qquad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$$

sono una generalizzazione delle leggi di De Morgan. Infatti possiamo considerare il quantificatore universale $\forall$ come una congiunzione generalizzata e il quantificatore esistenziale $\exists$ come una disgiunzione generalizzata.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x P(x)$. Consideriamo $\mathcal{A} = (D, I)$ con $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Allora $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ se e solo se per ogni $d \in D$ si ha $d \in I(P)$, cioè se

$$1 \in I(P) \wedge 2 \in I(P) \wedge 3 \in I(P) \wedge 4 \in I(P) \wedge 5 \in I(P)$$

cioè se la formula

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4) \wedge P(x_5)$$

è soddisfatta dall'ambiente e tale che $e(x_1) = 1$, $e(x_2) = 2$, $e(x_3) = 3$, $e(x_4) = 4$, $e(x_5) = 5$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Analogamente, si consideri $\exists x P(x)$ e un dominio $D = \{1, 2, 3\}$. Allora $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$ se e solo se esiste $d \in D$ tale che $d \in I(P)$ cioè se e solo se

$$1 \in I(P) \vee 2 \in I(P) \vee 3 \in I(P)$$

cioè se la formula

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3)$$

è soddisfatta dall'ambiente e tale che $e(x_1) = 1$, $e(x_2) = 2$, $e(x_3) = 3$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Equivalenze logiche - II

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$
$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

però :

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$
$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

Esempio

Si considerino le formule

$$\forall x(P(x) \vee Q(x))$$
$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

interpretate nella struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove $I(P) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $I(Q) = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Equivalenze logiche - III

Se $x \notin FV(\psi)$ allora

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x \varphi) \vee \psi.$$

Esempio

Si consideri la formula $\forall x(P(x) \vee D(c))$ con c costante, per esempio interpretata come $I(c) = 3$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Equivalenze logiche - IV

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \varphi &\equiv \forall y \forall x \varphi \\ \exists x \exists y \varphi &\equiv \exists y \exists x \varphi \end{aligned}$$

però

$$\forall x \exists y \varphi \not\equiv \exists y \forall x \varphi$$

Esempio

Si consideri la formula $\varphi = \forall x \exists y M(x, y)$dove $I(M) = \{(n, m) \mid n < m\}$. Allora il significato della formula φ è che non esiste un elemento massimo (per ogni numero n ce n'è uno più grande).
Invece il significato della formula $\exists y \forall x M(x, y)$ è che esiste un numero che è più grande di tutti gli altri.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Equivalenze fondamentali

Queste sono le equivalenze fondamentali che coinvolgono i quantificatori:

$$
\begin{array}{rcll}
\forall x \varphi & \equiv & \varphi & \text{se } x \notin FV(\varphi) \\
\exists x \varphi & \equiv & \varphi & \text{se } x \notin FV(\varphi) \\
\\
\forall x \forall y \varphi & \equiv & \forall y \forall x \varphi & \\
\exists x \exists y \varphi & \equiv & \exists y \exists x \varphi & \\
\exists x \forall y \varphi & \not\equiv & \forall y \exists x \varphi & \\
\\
\forall x (\varphi_1 \wedge \varphi_2) & \equiv & \forall x \varphi_1 \wedge \forall x \varphi_2 & \\
\exists x (\varphi_1 \vee \varphi_2) & \equiv & \exists x \varphi_1 \vee \exists x \varphi_2 & \\
\\
\forall x (\varphi_1 \vee \varphi_2) & \equiv & (\forall x \varphi_1) \vee \varphi_2 & \text{se } x \notin FV(\varphi_2) \\
\exists x (\varphi_1 \wedge \varphi_2) & \equiv & (\exists x \varphi_1) \wedge \varphi_2 & \text{se } x \notin FV(\varphi_2)
\end{array}
$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Equivalenze logiche - V

Tutte le equivalenze logiche della logica proposizionale valgono anche per la logica dei predicati.

Esempio

$$
\begin{aligned}
\forall x(A(x) \to B(x,y)) &\equiv \forall x(\neg A(x) \vee B(x,y)) \equiv \\
\equiv \neg\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x,y)) &\equiv \neg\exists x(A(x) \wedge \neg B(x,y))
\end{aligned}
$$

Nota che posso sempre cambiare il nome di una variabile con un nuovo nome, sostituendo tutte le occorrenze e ottenendo una formula equivalente:

$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)\,.$$

Ma in genere non posso sostituire una variabile con un'altra che è già presente nella formula:

$$\forall x \exists y Q(x,y) \not\equiv \forall x \exists x Q(x,x)\,.$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Sostituzioni

Definizione

Se s e t sono termini e x è una variabile, allora indico con $s[t/x]$ il termine che si ottiene sostituendo t al posto di x in s. E' possibile dare una definizione per induzione strutturale.

Esempio

Sia $s = f(x, g(x, c))$ e $t = f(c, c)$. Allora

$$s[t/x] = f(f(c, c), g(f(c, c), c)).$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Lo scopo di una sostituzione è istanziare una data variabile ad un caso più particolare (un termine). Comunque il significato della formula non deve essere stravolto.
Quando si effettuano le sostituzioni su formule, bisogna fare attenzione ai quantificatori.

Esempio

Si consideri la struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove $I(M) = \{(n, m) \mid n < m\}$ (cioè M è interpretato come "*minore*").
Interpretare le due formule

$$\exists y(M(y, x)) \qquad \exists y(M(y, y)) .$$

La seconda può essere ottenuta dalla prima tra mite una sostituzione che però stravolge il significato della formula.

Definizione

Sia φ una formula e t un termine. Definiamo $\varphi[t/x]$ nel seguente modo:

- Se φ è una formula atomica, allora $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ e definiamo $\varphi[t/x] = P(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$.
- Se $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ allora $\varphi[t/x] = \varphi_1[t/x] \wedge \varphi_2[t/x]$. Analogamente per gli altri connettivi proposizionali.
- Se $\varphi = \forall y \psi$ allora

$$(\forall y \psi)[t/x] = \begin{cases} \forall y \psi & \text{se } x = y \\ \forall y(\psi[t/x]) & \text{se } x \neq y \text{ e } y \notin FV(t) \\ \forall z(\psi[z/y][t/x]) & \text{se } x \neq y \text{ e } y \in FV(t) \end{cases}$$

dove z è una nuova variabile. Analogamente per il quantificatore esistenziale.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Sia $\varphi = \forall y(A(y) \to B(f(x), y))$ e $t = g(y)$. Allora:

$$\varphi[t/x] = \forall z((A(y) \to B(f(x), y))[z/y][t/x]);$$

Si ha:

$$\begin{array}{rcl}(A(y) \to B(f(x), y))[z/y] & = & A(y)[z/y] \to B(f(x), y)[z/y] = \\ & = & A(z) \to B(f(x), z)\end{array}$$

e

$$A(z) \to B(f(x), z)[t/x] = A(z) \to B(f(t), z).$$

Quindi

$$\varphi[t/x] = \forall z(A(z) \to B(f(g(y)), z)).$$

Lemma (di sostituzione)

Se y non compare in t allora

$$[\![t]\!]^{\mathcal{A}}_{e(d/x)} = [\![t[y/x]]\!]^{\mathcal{A}}_{e(d/y)}$$

e se y non compare in φ allora

$$v^{\mathcal{A},e(d/x)}(\varphi) = v^{\mathcal{A},e(d/y)}(\varphi[y/x]).$$

La dimostrazione procede per induzione strutturale.
Nota che se y è una variabile che non occorre in φ, allora:

$$\forall x\varphi \equiv \forall y(\varphi([y/x])) \qquad \exists x\varphi \equiv \exists y(\varphi([y/x]))$$

quindi è sempre possibile rinominare una variabile sostituendola con una nuova.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Forme normali

Definizione

Una formula φ è in **forma normale PRENESSA** se è del tipo

$$\mathcal{Q}_1 x_1 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \psi$$

dove $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ e ψ non contiene quantificatori. ψ è detta **MATRICE** della formula φ.

Esempio

- $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(c))$ è una formula chiusa in forma normale prenessa.
- $\forall x (P(x, y))$ è in forma normale prenessa.
- $P(x, y) \rightarrow \exists y Q(y)$ non è in forma normale prenessa.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Utilizzando le equivalenze logiche possiamo trasformare ogni formula in una formula normale prenessa. Vale infatti:

Proposizione

Per ogni formula φ esiste una formula φ^P in forma normale prenessa tale che $\varphi \equiv \varphi^P$.

La dimostrazione procedere per induzione strutturale.

Esempio

Sia $\varphi = (\forall x A(x)) \rightarrow (\exists y \neg B(y))$. Abbiamo:

$$(\forall x A(x)) \rightarrow (\exists y \neg B(y)) \equiv \neg(\forall x A(x)) \vee (\exists y \neg B(y)) \equiv$$

$$\equiv \exists x \neg A(x) \vee \exists y \neg B(y) \equiv \exists x \neg A(x) \vee \exists x \neg B(x) \equiv$$

$$\exists x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

Una formula è in **forma di Skolem** se è in forma normale prenessa e non contiene quantificatori esistenziali.

La **Skolemizzazione** è un procedimento che permette di ottenere una formula in forma di Skolem φ^S data una formula φ in forma normale prenessa, eliminando i quantificatori esistenziali in maniera opportuna:

Sia $\varphi = \mathcal{Q}_1 x_1 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \psi$ con $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$.

Supponiamo che $\mathcal{Q}_1 = \exists$. Allora si sostituisce la variabile x_1 con una costante c che non appare nella formula, e si elimina il quantificatore $\exists x_1$.

Se invece abbiamo $\mathcal{Q}_i = \exists$ e per ogni $j < i$, $\mathcal{Q}_j = \forall$, allora la variabile x_i si sostituisce con il termine $f(x_1, \ldots, x_{i-1})$ dove f è un nuovo simbolo di funzione, e si elimina $\exists x_i$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Sia $\varphi = \exists z \forall x \exists y (A(x) \rightarrow (B(z, y))$ una formula in forma normale prenessa. Per trasformarla in forma di Skolem, posso sostituire la variabile z con una costante e quindi sostituire la variabile y con una funzione che dipende da x:

$$\varphi^S = \forall x (A(x) \rightarrow B(c, f(x)))\,.$$

Teorema

φ è soddisfacibile se e solo se φ^S è soddisfacibile. (Si dice che φ e φ^S sono equisoddisfacibili).

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

NOTA: φ e φ^S non sono necessariamente logicamente equivalenti.

Esempio

Consideriamo la formula $\exists x P(x)$ e la sua forma di Skolem $P(c)$. Se fossero logicamente equivalenti allora la formula

$$\varphi = \exists x P(x) \leftrightarrow P(c)$$

sarebbe valida.

Si consideri la struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove $I(P) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e $I(c) = 3$.
Allora $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
Ma chiaramente se c'è una struttura $\mathcal{A}_1 = (D_1, I_1)$ tale che $\mathcal{A}_1 \models \exists x P(x)$ allora posso modificare l'interpretazione I_1 in una interpretazione I_2 tale che $(D_1, I_2) \models P(c)$.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Sia $\varphi = \forall x \exists y M(x, y)$. Allora $\varphi^S = \forall x M(x, f(x))$. Consideriamo una struttura che soddisfa φ e a partire da questa costruiamo una struttura che soddisfa φ^S:
Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove $I(M) = \{(n, m) \mid x < y\}$. Allora

$$v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1 \text{ poiché per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \text{ tale che } n < m.$$

Come dobbiamo interpretare la nuova funzione f?
Poniamo $I(f)(n) = n + 1$. Questa interpretazione soddisfa la formula $\forall x M(x, f(x))$.

Esercizio

1. Scrivere una formula φ che formalizzi l'espressione

   Esiste un numero n tale che per ogni numero m, se m è pari allora $n + m$ è dispari.

Trasformare φ in forma di Skolem φ^S e trovare un modello per φ^S.

2. Scrivere una formula ψ che formalizzi l'espressione

   Per ogni numero n esiste un numero m maggiore di n.

Trasformare ψ in forma di Skolem ψ^S e trovare un modello per ψ^S.

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio (Paradosso)

$$\exists x(A(x) \to \forall y A(y))$$

Interpretiamo, nel dominio delle persone in questo edificio, il predicato A come "*avere il cappello*".
Trasformiamo la formula

$$\begin{aligned}\exists x(\neg A(x) \vee \forall y A(y)) &\equiv (\exists x \neg A(x)) \vee (\forall y A(y)) \equiv \\ &\equiv \neg\forall x A(x) \vee \forall y A(y) \equiv \neg\forall x A(x) \vee \forall x A(x)\end{aligned}$$

che è una formula sempre valida.
Trasformiamo prima in forma prenessa:

$$\exists x(\neg A(x) \vee \forall y A(y)) \equiv \exists x \forall y(\neg A(x) \vee A(y))$$

e poi in forma di Skolem

$$\forall y(A(c) \to A(y)).$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Esempio

Trasformare in forma normale prenessa e in forma di Skolem

$$\forall x \exists y \forall z \exists t (A(f(x,y),t,z));$$

$$\forall y ((\exists x A(x,y)) \to B(y,x)) \wedge \exists y \forall x B(x,y)\,.$$

(slides tratte dal corso di B. Gerla)

Definizione

Un **letterale** nella logica dei predicati è una formula atomica o la negazione di una formula atomica.

Una formula in FNP è in CNF se la sua matrice è una congiunzione di disgiunzioni di letterali (analogamente per DNF).