Formulario PSI 24/25 - Varese - Insubria University

DEFINIZIONI DI PROBABILITÀ

DEF. FREQUENTISTA

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_A}{n}$$

m_A ← numero di occorrenze dell'evento
n ← numero di esperimenti effettuati

DEF. CLASSICA *valida solo in caso di eventi equiprobabili*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ ← numero di esiti favorevoli all'evento
$|\Omega|$ ← numero di esiti totali possibili

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

NON-NEGATIVITÀ

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \quad \forall A \in \Omega$$

PROB. DELLO SPAZIO CAMPIONARIO

$$P(\Omega) = 1$$

COMPLEMENTARIETÀ

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

ADDITIVITÀ NUMERABILE

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

se $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

CALCOLO COMBINATORIO

REINSERIMENTO	COMBINAZIONI	DISPOSIZIONI
SI	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k
NO	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$

ELEMENTI DISTINTI	PERMUTAZIONI
SI	$n!$
NO	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

per ogni partizione $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ tale che

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ e, inoltre $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \in [0, \ldots n]$

si ha: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

MOMENTI DI CENTRALITÀ VARIABILI ALEATORIE

DEF. VALORE ATTESO

v.a. discrete:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in domX} x \cdot P(X = x)$$

v.a. continue:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(X = x)$$

proprietà valore atteso:

$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$ *linearità*

$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) \cdot P(X = x)$ *trasformazione del valore atteso*

DEF. VARIANZA

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

proprietà varianza:

$$\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$$

$$\mathrm{Var}[X] \geq 0$$

formula *in due momenti:*

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

DEVIAZIONE STANDARD

$$Std[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

DEFINIZIONI FONDAMENTALI PROBABILITÀ

PROBABILITÀ DELL'UNIONE

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

PROBABILITÀ DELL'INTERSEZIONE
o probabilità *congiunta*

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

per eventi indipendenti:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se $P(B) > 0$

per eventi indipendenti:

$$P(A|B) = P(A)$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Bayes + t. prob. totale:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C)}$$

DEF. FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ (PMF)

(solo per v.a. discrete)

$$P_{\mathcal{X}}(x) = P(X = x), \quad x \in \mathcal{X}$$

proprietà

$$P_{\mathcal{X}}(x) \geq 0 \quad \forall x \qquad \sum_{x \in dom(\mathcal{X})} P_{\mathcal{X}}(x) = 1$$

DEF. FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ (PDF)

(solo per v.a. continue)

è una funzione $f_{\mathcal{X}}(x)$ *tale che:* $P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \int_a^b f_{\mathcal{X}}(x)dx$

DEF. FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (CMF/CDF)

è una funzione $F_X(x)$ *non decrescente tale che:*

$F_{\mathcal{X}}(x) = P(\mathcal{X} \leq x) = \sum_{t \leq x} P_{\mathcal{X}}(x)(t)$ *(per v.a. discrete)*

$F_{\mathcal{X}}(x) = P(\mathcal{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)$ *(per v.a. continue)*

proprietà

$0 \leq F_{\mathcal{X}}(x) \leq 1 \quad \forall x$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} F_{\mathcal{X}}(x) = 1$

$P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a)$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} F_{\mathcal{X}}(x) = 0$

LEGGI DI PROBABILITÀ NOTE (V.A. DISCRETE)

V.A. DI BERNOULLI *indica l'esito di un esperimento dove ci sono due possibili esiti il parametro p indica la probabilità di successo (x=1)*

$\mathcal{X} \sim \text{Bernoulli}(p), \quad 0 \leq p \leq 1 \qquad dom\,(\mathcal{X}) = \{0,1\}$

$P\,(\mathcal{X} = x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = p \qquad Var[\mathcal{X}] = p\,(1-p)$

V.A. BINOMIALE *indica il numero di successi ottenuti in una serie di **n** esperimenti di Bernoulli identici e indipendenti tra loro*

$\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n,p), \quad 0 \leq p \leq 1, n \in \mathbb{N} \qquad dom\,(\mathcal{X}) = \{0,1,\ldots,n\}$

$P\,(\mathcal{X} = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = np \qquad Var[\mathcal{X}] = np\,(1-p)$

V.A. DI POISSON *modella il numero di eventi in un intervallo fisso di tempo o spazio. Il parametro **λ** indica la frequenza degli eventi in tale intervallo.*

$\mathcal{X} \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad \lambda > 0 \qquad dom\,(\mathcal{X}) = \mathbb{N}_0$

$P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \lambda \quad Var[\mathcal{X}] = \lambda$

V.A. GEOMETRICA *indica l'istande di primo successo in una serie di **n** esperimenti di Bernoulli i.i.d*

$\mathcal{X} \sim \text{Geo}(p), \quad 0 < p \leq 1 \qquad dom\,(\mathcal{X}) = \mathbb{N}$

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \dfrac{1}{p} \quad Var[\mathcal{X}] = \dfrac{1-p}{p^2}$

APPROSSIMAZIONI DELLA BINOMIALE con POISSON

*data una v.a. binomiale con **n** molto grande e **p** molto piccolo:*

$$\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n,p)$$

tale che $0 \leq p \leq 0.1, n > 20$

allora si ha

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{Y} \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$$

APPROSS. DELLA BINOMIALE con v.a. GAUSSIANA

*data una v.a. binomiale con **n** molto grande e **p** vicino a 0.5:*

$$\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n,p)$$

tale che $0.4 \leq p \leq 0.6, n > 10$

allora si ha

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{np\,(1-p)}\right)$$

*applicando la **correzione di continuità:***

$$P(\mathcal{X} \geq k) \approx P\,(\mathcal{Y} > k - 0.5)$$
$$P(\mathcal{X} \leqslant k) \approx P\,(\mathcal{Y} < k + 0.5)$$
$$P(\mathcal{X} > k) \approx P\,(\mathcal{Y} > k + 0.5)$$
$$P(\mathcal{X} < k) \approx P\,(\mathcal{Y} < k - 0.5)$$

LEGGI DI PROBABILITÀ NOTE (V.A. CONTINUE)

V.A. UNIFORME *modella una variabile aleatoria che ha uguale probabilità di assumere qualsiasi valore in un intervallo **[a,b]***

$\mathcal{X} \sim \text{Uni}(a,b)$

$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \dfrac{a+b}{2} \qquad \text{Var}[\mathcal{X}] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

$F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$

V.A. ESPONENZIALE *modella il tempo tra eventi successivi in un processo di Poisson (il parametro λ indica la frequenza degli eventi in un intervallo di riferimento).*

$\mathcal{X} \sim \text{Exp}(\lambda)$

$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \dfrac{1}{\lambda} \qquad \text{Var}[\mathcal{X}] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

funzione di sopravivenza

$S_{\mathcal{X}}(x) = 1 - F_{\mathcal{X}}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$

proprietà di mancanza di memoria

$P(\mathcal{X} > t + s \mid \mathcal{X} > s) = P(\mathcal{X} > t), \quad \forall s,t \geq 0$

V.A. GAUSSIANA *modella fenomeni naturali dove valori medi sono più probabili, con una simmetria attorno al valore atteso, che è indicato dal parametro **μ. Il** parametro **σ** indica invece la deviazione standard.*

$\mathcal{X} \sim \mathcal{N}\,(\mu,\sigma)$

$f_{\mathcal{X}}(x) = \phi_{\mu,\sigma}\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mu \qquad \text{Var}[\mathcal{X}] = \sigma^2$

$F_{\mathcal{X}}(x) = \Phi_{\mu,\sigma}\,(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

dove Φ *è la CDF della v.a. gaussiana standard* $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}\,(0,1)$

la PDF Gaussiana è simmetrica, e perciò: $\Phi_{\mu,\sigma}\,(x) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}\,(-x)$

TEOREMI DI CENTRALITÀ

Sia $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ *una sequenza di variabili iid tale che:*

$\mathbb{E}[\mathcal{X}_i] = \mu$ *e* $\text{Var}[\mathcal{X}_i] = \sigma^2$ *e siano:*

$\overline{\mathcal{X}}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i$ *la v.a. "media campionaria"*

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *la v.a. "somma"*

*allora, per valori di **n**, grandi si ha:*

$\overline{\mathcal{X}}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}\right)$ *e* $S_n \sim \mathcal{N}\left(n\mu, \sqrt{n\sigma^2}\right)$

e quindi: $\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{\mathcal{X}}_n - \mu\right)}{\sigma} \sim \mathcal{N}\,(0,1)$

STIMATORE NON DISTORTO VARIANZA:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(\mathcal{X}_i - \overline{\mathcal{X}}_n\right)^2$$

errore standard stima v. atteso:

$$\text{SE}[\overline{\mathcal{X}}_n] = \sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}}$$

*inferenza con una v.a. **Y** continua e una v.a. **X** discreta:*

$$P_{\mathcal{X}}\,(x\,|y) = \frac{f_{\mathcal{Y}}\,(y\,|x) P_{\mathcal{X}}\,(x)}{f_{\mathcal{Y}}\,(y)}$$

DISUGUAGLIANZE DI CONCENTRAZIONE

*Sia **X** una qualsiasi v.a **non negativa**, si ha:*

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathcal{X}]}{a}, \quad \text{per } a > 0$$

(disuguaglianza di Markov)

*inoltre, se **X** ha valore atteso e varianza finite, si ha:*

$$\mathbb{P}(|\mathcal{X} - \mathbb{E}[\mathcal{X}]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}[\mathcal{X}]}{a^2} \quad \text{per } a > 0$$

(disuguaglianza di Chebyshev)