Esercizi: Variabile uniforme, esponenziale e di Gauss

Esercizio 1. *Paolo promette a Barbara di andarla a trovare tra le 15 e le 16 di un dato giorno. Supposto che Paolo possa arrivare da Barbara, con la stess probabilità, in qualsiasi istante tra le 15 e le 16, calcola la probabilità:*

(a) che Paolo arrivi dopo le 15.20; (sol:2/3)

(b) che Barbara debba attendere Paolo per più di 45 minuti (sol:1/4).

Esercizio 2. *Si specifichi la funzione di densità di probabilità della v.a. uniforme continua* $X \sim U(-2, 2)$.

$$\left(Sol. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & se \ -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & altrimenti. \end{cases} \right)$$

Esercizio 3. *Se X ha distribuzione uniforme tra 2 e 5, qual è la probabilità che X assuma valori tra 3 e 4?*

(Sol. $\frac{1}{3}$*)*

Esercizio 4. *Un gol di Vincenzo ha permesso alla sua squadra di vincere la finale per 1-0. Calcola la probabilità che Vincenzo abbia segnato in chiusura di tempo, cioè entro cinque minuti dal termine di uno dei due tempi di gioco (un tempo di gioco dura 45 minuti, escludendo l'eventuale recupero).*

(Sol. $\frac{1}{9}$*)*

Esercizio 5. *Scelto a caso un numero appartenente all'intervallo [0, 1], calcola la probabilità:*

(a) che sia una soluzione dell'equazione $8x^2 - 6x + 1 = 0$*; (sol:0)*

(b) che sia una soluzione della disequazione $8x^2 - 6x + 1 > 0$*. (sol:* $\frac{3}{4}$*)*

Esercizio 6. *La durata di vita, espressa in ore, di un componente elettronico è una variabile aleatoria esponenziale di parametro* λ*. La probabilità che la durata di vita del componente sia inferiore alle 100 ore è uguale al 5%. Qual è il valore di* λ*?*

(Sol. $\frac{1}{100} ln \frac{20}{19}$*)*

Esercizio 7. *Un lampadario è formato da 4 lampadine dello stesso tipo. Il funzionamento di ogni lampadina è indipendente da quello delle altre. La durata di ciascuna lampadina (in mesi) è una variabile aleatoria distribuita esponenzialmente e la vita media di una lampadina è 8 mesi: Qual è la probabilità che in un anno:*

(a) *non occorra sostituire alcuna lampadina?*

(b) *si guastino al massimo due lampadine?*

(Sol a. $0,0025$*; b.*$0,22$*)*

Esercizio 8. *L'altezza di un gruppo di ragazzi è distribuita normalmente con media* $\mu = 174cm$ *e deviazione standard* $\sigma = 15cm$*. Calcolare la probabilità che un ragazzo scelto a caso abbia una statura superiore a* $190cm$*.*

(Sol. 14.23%*)*

Esercizio 9. *Il punteggio ottenuto in un test sul quoziente di intelligenza è una variabile aleatoria* X *avente distribuzione normale con media* $\mu = 100$ *e deviazione standard* $\sigma = 15$*. Trovare la probabilità che il punteggio ottenuto da un candidato sia*

(a) *minore di 118;*

(b) *maggiore di 112;*

(c) *compreso fra 100 e 112.*

(Sol. (a) 0.8849, (b) 0.2119, (c) 0.2881)

Esercizio 10. *La variabile aleatoria* Z *ha la distribuzione normale standardizzata. Determinare il valore di* k *per cui*

(a) $P(Z < k) = 0.9953$*; (Sol. 2.6)*

(b) $P(Z > k) = 0.2743$*; (Sol. 0.6)*

(c) $P(0 \leq Z \leq k) = 0.3770$*; (Sol. 1.16)*

(d) $P(|Z| < k) = 0.5762$*; (Sol. 0.8)*

(e) $P(k < Z < 1.6) = 0.7865$ *(Sol.* $k = 1 \vee k = -1$*)*

(f) $P(Z = k) = 0$ *(Sol. per ogni* $k \in R$*)*

Esercizio 11. *Sia* X *una variabile casuale normale che descrive la portata del fiume Adige nel mese di Giugno nella località di Boara Pisani. È noto che in tale località la portata media del fiume nel mese di giugno è di 243 metri cubici al secondo e che* $P(X < 400) = 0,9$*.*

(a) *Si determini la varianza di* X*.*

(b) *Supponendo che $\sigma^2 = 100$, si determini la probabilità che in giugno il fiume Adige abbia una portata compresa fra 230 e 260 metri cubici al secondo.*

(c) *Si supponga che $Y = 10+X$ sia la v.a. normale che descrive la portata del fiume Adige nella località di Boscochiaro. Supponendo che $\sigma_X^2 = 100$ (σ_X^2 è la varianza di X), si calcoli $P(240 < Y < 270)$.*

Svolgimento. *(a) La varianza va ricavata dalla seguente relazione*

$$P(X < 400) = \Phi\left(\frac{400-243}{\sigma}\right) = 0.9.$$

Dalle tavole di Φ, si ricava che

$$\frac{400-243}{\sigma} = 1.285$$

Si ha dunque che la deviazione stand è $\sigma = 122.17$ da cui si ottiene la varianza di X che risulta pari a $Var(X) = \sigma^2 = 14927$.

(b) *Supponendo che $\sigma^2 = 100$ e dunque $\sigma = 10$, la probabilità richiesta si calcola come segue*

$$P(230 \leq X \leq 260) = P\left(\frac{230-243}{10} \leq Z \leq \frac{260-243}{10}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{230-243}{10}\right) - \Phi\left(\frac{260-243}{10}\right) = \Phi(1.7) - \Phi(-1.3) = 0.8586.$$

(c) *$E(Y) = E(10+X) = 10 + E(X) = 10 + 243 = 253$ e $Var(Y) = Var(10+X) = Var(X) = 100$. Con questi elementi è possibile calcolare la probabilità $P(240 \leq Y \leq 270)$ (come fatto al punto b per la variabile casuale X). Quindi è possibile concludere che $P(240 \leq Y \leq 270) =$ 0.8586.*

Esercizio 12. *Una macchina viene usata per tagliare assi di legno; la lunghezza media è di 2 m, ma il 10% degli assi tagliati hanno una lunghezza inferiore a 1.95 m. Assumendo che le lunghezze degli assi tagliati abbiano una distribuzione normale, determinare la percentuale di assi più lunghi di 2.10 m.*

(Sol. la percentuale di assi più lunghi di 2.10 m è circa dello 0.5%)