ESERCIZI SULLE VARIABILI CASUALI ZERO-UNO E BINOMIALE

1. Considerata una moneta truccata in modo che la faccia testa abbia una probabilità pari a 9 volte la probabilità della faccia croce, determinare l'espressione della funzione di probabilità della v.c. X "numero di teste ottenute nel lancio di una moneta" e determinarne valore atteso, deviazione standard e coefficiente di variazione

Soluzione 1

Indicato con T l'evento "uscita della faccia testa", sia $P(T)=p$ la sua probabilità.
Dal sistema

$$\begin{cases} p + (1-p) = 1 \\ p = 9(1-p) \end{cases}$$

si ottiene

$$9(1-p) + (1-p) = 1$$

e quindi

$$(1-p) = \frac{1}{10}$$

$$p = P(T) = \frac{9}{10}$$

La variabile casuale X ha quindi la seguente distribuzione di probabilità

X	Probabilità
0	0.1
1	0.9
	1.0

Risulta

$$E(X) = 0.9$$

$$E(X^2) = 0.9$$

$$V(X) = \sigma_x^2 = 0.9 - 0.81 = 0.09$$

$$CV_x = 0.3/0.9 = 1/3$$

Soluzione 2

La variabile casuale X ha una distribuzione Zero-Uno di parametro π ignoto. Dato che la moneta è truccata in modo che la probabilità π associata all'uscita della faccia testa è pari a 9 volte la probabilità $(1-\pi)$ associata all'uscita della faccia croce si ha

$$\pi = 9(1-\pi) = 9 - 9\pi$$

per cui si ottiene

$10\pi = 9$
$\pi = 9/10$

La funzione di probabilità di X è

$$f(x) = P(X = x) = 0.9^x \times 0.1^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

$E(X) = 0.9$
$V(X) = \sigma_x^2 = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
$\sigma_x = 0.3$
$CV_x = 0.3/0.9 = 1/3$

2. Considerato un esperimento che consiste nel lancio di un dado equilibrato si consideri la v.c. X che assume valore 1 se si ottiene la faccia contrassegnata da 5 o 6 punti e valore 0 per qualsiasi altra faccia. Determinare l'espressione della funzione di probabilità della v.c. X, il suo valore atteso, il secondo momento ordinario e la varianza.

Soluzione 1

I possibili risultati associati all'esperimento hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi, per cui la distribuzione di probabilità della X è

X	Probabilità
0	4/6
1	2/6
	1.0

$E(X) = 1/3$
$E(X^2) = 1/3$
$V(X) = 1/3 - 1/9 = 2/9$

Soluzione 2

La variabile casuale X ha una distribuzione Zero-Uno in cui il parametro $\pi = 1/3$ corrisponde alla probabilità di ottenere la faccia contrassegnata da 5 o 6 punti. La funzione di probabilità di X è

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

$E(X) = E(X^2) = 1/3$
$V(X) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$

3. Considerato un dado truccato in modo che le facce pari abbiano una probabilità tripla rispetto alle facce dispari, determinare l'espressione della funzione di probabilità della v.c. X "numero di facce pari ottenute nel lancio del dado" e determinarne valore atteso e deviazione standard.

Soluzione 1
Indicato con A l'evento "uscita di una faccia pari", sia $P(A)=p$ la sua probabilità.
Dal sistema

$$\begin{cases} p + (1-p) = 1 \\ p = 3(1-p) \end{cases}$$

si ottiene

$$3(1-p) + (1-p) = 1$$

e quindi

$$(1-p) = \frac{1}{4}$$

$$p = P(A) = \frac{3}{4}$$

La variabile casuale X ha quindi la seguente distribuzione di probabilità

X	Probabilità
0	1/4
1	3/4
	1.0

Risulta

$$E(X) = 3/4$$

$$E(X^2) = 3/4$$

$$V(X) = \sigma_x^2 = 3/4 - 9/16 = 3/16$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Soluzione 2
La variabile casuale X ha una distribuzione Zero-Uno di parametro π ignoto. Dato che il dado è truccato in modo che la probabilità π associata all'uscita delle facce pari è 3 volte la probabilità $(1-\pi)$ associata all'uscita delle facce dispari

$$\pi = 3(1-\pi) = 3 - 3\pi$$

per cui si ottiene

$$4\pi = 3$$

$$\pi = 3/4$$

La funzione di probabilità di X è

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

$E(X) = \frac{3}{4}$

$V(X) = \sigma_x^2 = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$

$\sigma_x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

4. Considerato un esperimento che consiste nel lancio di 10 dadi equilibrati si consideri la v.c. X "numero di facce contrassegnate da 6 punti". Si determini l'espressione della funzione di probabilità della v.c. X, il suo valore atteso e la sua varianza. Si determini inoltre la probabilità che il numero di facce contrassegnate con 6 punti si presenti: a) mai, b) almeno una volta, c) 5 volte.

Soluzione

X ha una distribuzione Binomiale di parametri n =10 e $\pi = 1/6$. La sua funzione di probabilità è quindi

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{10-x} \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

$E(X) = n\pi = 10/6$

$V(X) = n\pi(1 - \pi) = 10\times1/6\times5/6 = 50/36$

Le probabilità richieste sono:

$a)\ P(X = 0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.1615$

$b)\ P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.8385$

$c)\ P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.0130$

5. Sapendo che il 20% degli articoli prodotti da un macchinario risulta difettoso, determinare la probabilità che estraendo con ripetizione 4 articoli se ne ottengano: a) 1 difettoso; b) 4 difettosi; c) al massimo due difettosi.

Soluzione 1

Indicato con D_i l'evento "articolo difettoso alla i-esima estrazione" e con $\overline{D}_i$ l'evento contrario, la probabilità richiesta al punto a) è pari alla somma delle probabilità associate ai seguenti eventi

$$D_1\overline{D}_2\overline{D}_3\overline{D}_4$$
$$\overline{D}_1 D_2\overline{D}_3\overline{D}_4$$
$$\overline{D}_1\overline{D}_2 D_3\overline{D}_4$$
$$\overline{D}_1\overline{D}_2\overline{D}_3 D_4$$

che hanno tutti una stessa probabilità 0.2×0.8^3
La probabilità cercata è quindi pari a
$4\times 0.2\times 0.8^3 = 0.4096$

La probabilità richiesta al punto b) corrisponde alla probabilità associata all'evento

$$D_1 D_2 D_3 D_4$$

pari a $0.2^4 = 0.0016$

La probabilità richiesta al punto c) corrisponde alla somma delle probabilità associate agli eventi

- "nessun articolo è difettoso",
- "un solo articolo è difettoso",
- "due articoli sono difettosi".

La probabilità che nessun articolo sia difettoso corrisponde alla probabilità associata all'evento

$$\overline{D}_1\overline{D}_2\overline{D}_3\overline{D}_4$$

ed è pari a $0.8^4 = 0.4096$
La probabilità associata all'evento "un solo articolo è difettoso" è stata calcolata al punto a) ed è pari a 0.4096
La probabilità associata all'evento "due articoli sono difettosi" si può ottenere considerando che 2 articoli difettosi e due funzionanti si possono ottenere in

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 2\times 1} = 6$$

modi diversi e che la probabilità associata a ciascuna sequenza contenente due articoli difettosi e due funzionanti è $0.2^2 \times 0.8^2$=0.0256
Complessivamente, quindi, la probabilità richiesta è pari a

$$0.4096 + 0.4096 + 6\times 0.0256 = 0.9728$$

Soluzione 2

Indicata con X la v.c. "numero di articoli difettosi", le probabilità richieste sono:

a) $P(X=1)=\binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3=0.4096$

b) $P(X=4)=\binom{4}{4}(0.2)^4(0.8)^0=0.0016$

c) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.8^4+0.4096+\binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2=0.9728$

6. Considerato nuovamente il macchinario considerato nell'esercizio precedente si consideri l'esperimento che consiste nell'estrazione casuale di 500 elementi con ripetizione. Si determini il valore atteso e la varianza del numero di pezzi difettosi.

Soluzione

In questo caso la variabile casuale X "numero di articoli difettosi estratti" ha la seguente distribuzione:

$$X\sim Binomiale(n=500,\pi=0.2)$$

per cui

$E(X)=500\times 0.2=100$

$V(X)=500\times 0.2\times 0.8=80$

7. Considerata una v.c. X che si distribuisce come una Binomiale di media 1.25 e varianza 1.21875, si determini il valore dei suoi parametri e si calcoli la probabilità che X risulti: a) uguale a zero; b) minore di 3.

Soluzione

Dal sistema

$$\begin{cases} n\pi=1.25 \\ n\pi(1-\pi)=1.21875 \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni n=50 e π =0.025.

Le probabilità richieste risultano

a) $P(X=0)=\binom{50}{0}(0.025)^0(0.975)^{50}\approx 0.2820$

b) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\approx 0.2820+0.3615+0.2271=0.8706$

8. Considerata una moneta in cui la faccia testa ha una probabilità doppia della faccia croce, si consideri un esperimento che consiste nel lanciare 4 volte la moneta. Indicata con sia Y la v.c. "numero di croci ottenute", determinare la sua funzione di probabilità e disegnarne il grafico. Determinare inoltre la corrispondente funzione di ripartizione e disegnarne il grafico.

Soluzione

La variabile casuale Y ha una distribuzione Binomiale in cui il parametro $n = 4$ mentre π va determinato. Dato che la moneta è truccata in modo che la probabilità π associata all'uscita della faccia croce è la metà della probabilità $(1 - \pi)$ associata all'uscita della faccia testa risulta

$\pi = 0.5(1 - \pi)= 0.5 - 0.5\pi$

per cui si ottiene

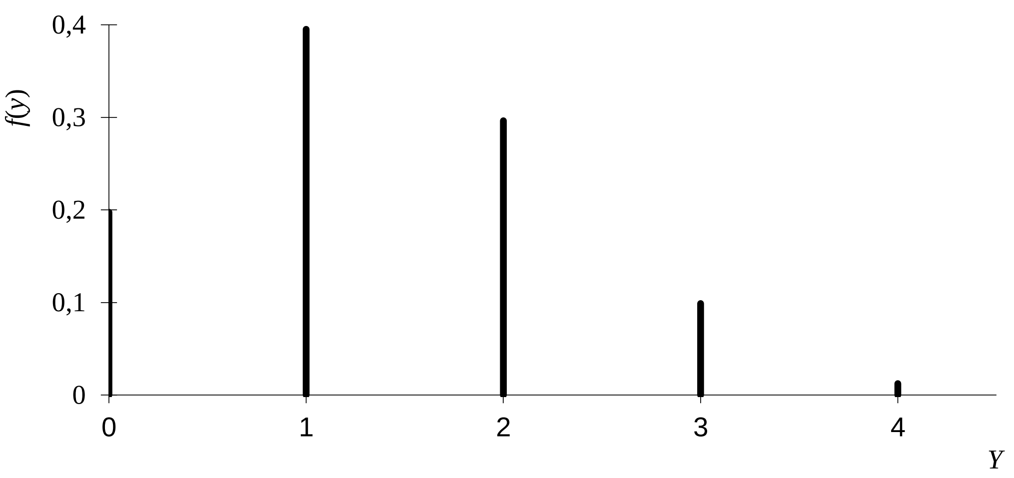
$1.5\pi = 0.5$

$\pi =1/3$

Risulta quindi $Y \sim Binomiale(4, 1/3)$. Nella tabella successiva sono riportati valori approssimati a 4 cifre decimali delle probabilità associate ai 5 valori di Y

Y	*probabilità*
0	0.1975
1	0.3951
2	0.2963
3	0.0988
4	0.0123
	1.0000

Il grafico corrispondente è



Sulla base della tabella si ottiene l'espressione analitica della funzione di ripartizione di Y

$$F(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1975 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5926 & 1 \leq x < 2 \\ 0.8889 & 2 \leq x < 3 \\ 0.9877 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Il grafico corrispondente risulta