Esame di Algebra e Geometria del 07/02/2012

Nome Cognome... **Matricola**...................................A

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

1. Sia $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - Quanti elementi hanno gli insiemi $\mathcal{P}(A \times B)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?
   - Dire se esistono funzioni iniettive, suriettive o biettive tra A e B e, nel caso esistano, fornire un esempio.
   - Sia P l'insieme delle parole di quattro lettere sull'alfabeto A e si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su P definita, per ogni $u, v \in P$, da:

     $$u\mathcal{R}v \quad \text{se e solo se} \quad u \text{ e } v \text{ contengono lo stesso numero di lettere } a\,.$$

     Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza e dire quanti elementi ha l'insieme quoziente $P/\mathcal{R}$.

   Svolgimento.
   - $\mathcal{P}(A \times B)$ ha $2^{3\cdot 4}$ elementi e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ha 2^{2^3} elementi.
   - Non esistono funzioni suriettive e quindi non esistono funzioni biettive tra A e B perché A ha meno elementi di B. Un esempio di funzione iniettiva è $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$.
   - Riflessiva: ogni parola contiene lo stesso numero di lettere a di se stessa.
     Simmetrica: se u ha lo stesso numero di lettere a di v allora anche v ha lo stesso numero di lettere a di u.
     Transitiva: se u ha lo stesso numero di lettere a di v e v ha lo stesso numero di lettere a di w allora anche u ha lo stesso numero di lettere a di w.
   - L'insieme quoziente ha 5 elementi, che sono le classe delle parole senza lettere a, quelle con una, con due, con tre e con quattro lettere a.

2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

   $$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)\,.$$

   Svolgimento. Base di induzione: per $n = 1$ la sommatoria è uguale a 2 e $1(1+1) = 2$. Supponiamo che l'uguaglianza valga per $n-1$ e dimostriamola per n. Sappiamo quindi che vale

   $$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = (n-1)n$$

   quindi

   $$\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{n-1} 2k + 2n = (n-1)n + 2n = n^2 - n + 2n = n(n+1)\,.$$

3. Scrivere gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8$ rispetto all'operazione di prodotto. Quali strutture algebriche è possibile definire su $\mathbb{Z}_8$?

   Svolgimento. Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8$ sono individuati dai numeri coprimi con 8 e minori di 8, e cioè [1], [3], [5] e [7]. $(\mathbb{Z}_8, +)$ è un gruppo, $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ è un monoide, $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ è un anello.

4. Trovare il MCD di 126 e 324 usando l'algoritmo delle divisioni successive. Quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{126}$?

   Svolgimento.

$$\begin{aligned} 324 &= 2 \cdot 126 + 72 \\ 126 &= 72 + 54 \\ 72 &= 54 + 18 \\ 54 &= 3 \cdot 18 \end{aligned}$$

   Quindi il MCD(126,324) è 18. Il numero di elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{126}$ è dato dalla funzione di Eulero φ applicata a 126, cioè il numero di numeri minori di 126 e coprimi con 126. Si ha $\varphi(126) = 36$.

5. Risolvere con il metodo di Gauss-Jordan il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x \qquad +2z = 1 \\ x \quad +y \qquad = 1 \\ 3x \qquad +2z = 1. \end{cases}$$

   Svolgimento.

   La matrice associata al sistema è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sottraendo la prima riga alla seconda otteniamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sottraendo la prima riga moltiplicata per 3 alla terza riga otteniamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

   Da questa matrice possiamo ricavare il sistema
$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - 2z = 0 \\ -4z = -2 \end{cases}$$

   dal quale, procedendo per sostituzione otteniamo l'unica soluzione $x = 0$, $y = 1$, $z = 1/2$.

6. Si consideri la seguente applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ -z \\ kx + y - 2z \end{pmatrix}.$$

Si calcoli, al variare del parametro k, la dimensione di $Im\, f$ e di $Ker\, f$. Inoltre calcolare gli autovalori per $k = 1$ e dire se per tale valore di k esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.
Svolgimento. La matrice associata all'applicazione lineare nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ k & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a k. Quindi per $k \neq 0$ la matrice ha rango 3 e quindi $dim\, Imf = 3$ e $dim\, Kerf = 0$. Invece se $k = 0$ la matrice ha rango 2 e quindi $dim\, Imf = 2$ e $dim\, Kerf = 1$.

Poniamo $k = 1$ e calcoliamo gli autovalori:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ k & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

ha come determinante il polinomio caratteristico $(1-\lambda)(2\lambda + \lambda^2 + 1) = (1-\lambda)(\lambda + 1)^2$, quindi gli autovalori sono $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 2. Per vedere se esiste una base di autovettori, dobbiamo controllare che le molteplicità algebriche e geometriche coincidano. Calcoliamo quindi gli autospazi e le relative dimensioni.

Per $\lambda = 1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ k & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

dato che questa matrice ha rango 2, si può dedurre che l'autospazio relativo a $\lambda = 1$ ha dimensione 1 e quindi $\lambda = 1$ è un autovalore regolare.

Per $\lambda = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

dato che questa matrice ha rango 2, si può dedurre che l'autospazio relativo a $\lambda = -1$ ha dimensione 1 e quindi $\lambda = -1$ non è un autovalore regolare.

Quindi non esiste una base di autovettori.