Esame di Algebra e Geometria del 15/1/2019

Nome Cognome.. **Matricola**.................................. C

Si risolvano i seguenti esercizi, <u>motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni</u> che si ritengono opportune:

[.../4] 1. Siano $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$.

(a) Quante funzioni iniettive ci sono tra Y e X?

(b) Quanti sottoinsiemi di 5 elementi ha l'insieme $X \times Y$?

[.../3] 2. Si scriva la definizione di relazione d'equivalenza, di classe d'equivalenza e di insieme quoziente.

[.../4] 3. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 .$$

[.../4] 4. Sull'insieme $X = \{a, b, c, d\}$ si consideri l'operazione $*$ determinata dalla seguente tabella:

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	b	c
d	a	d	c	b

Dire se esiste un elemento neutro e quali elementi sono invertibili.

Si consideri la funzione $f : X \to \mathbb{Z}_4$ tale che $f(a) = [0]_4$, $f(b) = [1]_4$, $f(c) = [2]_4$ e $f(d) = [3]_4$. Si dica se f è un omomorfismo tra $(X, *)$ e $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$.

[.../4] 5. Si calcoli l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e si calcoli il prodotto righe per colonne $A^{-1} \cdot A^T$ (con A^{-1} si indica l'inversa di A e con A^T si indica la trasposta di A).

[.../4] 6. Si consideri l'insieme $V = \{(x, 5x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Si dimostri che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, si trovi una sua base e si dia una rappresentazione nel piano cartesiano di V. Si consideri la funzione $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x, x + y) \in \mathbb{R}^2$, si dimostri che è un'applicazione lineare e si rappresenti graficamente $f(V)$ (cioè l'immagine di V tramite f).

[.../5] 7. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y, 3y + z, 2z) .$$

Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$. Trovare inoltre gli autovalori di f, la loro molteplicità algebrica e geometrica e gli autospazi relativi agli autovalori. Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.