Lezione 05/10/2022

La probabilità condizionata (seconda parte)

Come si usa il teorema della probabilità del prodotto di eventi indipendenti nella pratica?

Se A e B sono indipendenti allora si usa la formula $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ per calcolare la probabilità di $A \cap B$ (ovviamente $P(A)$ e $P(B)$ devono essere noti).

Esercizio 1. *Lanciamo due volte un dado regolare, qual è la probabilità di ottenere in entrambi i lanci un multiplo di 3?*

Svolgimento. *L'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità è A :"esce in entrambi i lanci un multuplo di 3". Osserviamo che $A = D_1 \cap D_2$ dove D_1 :"esce un multiplo di 3 nel lancio 1" e D_2 :"esce un multiplo di 3 nel lancio 2". Poichè D_1 e D_2 sono indipendenti e $D_1 = D_2 = \{3,6\}$ (3 e 6 sono i multipli di 3 tra 1,2,3,4,5 e 6),*

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{\#\{3,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} \cdot \frac{\#\{3,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Negli esercizi, per verificare che A e B sono indipendenti si contralla se l'uguaglianza $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ è vera.

Esercizio 2. *Lanciamo due volte un dado regolare, gli eventi A :"esce un due in almeno uno dei due lanci" e B :"la somma dei due risultati è 5" sono eventi indipendenti?*

Svolgimento. *Calcolo $P(A \cap B)$, $P(B)$ e $P(A)$ con la definizione classica di probabilità.*

$\Omega = \{(1,2),(1,1),(2,3),(4,5),\ldots\} = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$.

Per il principio di moltiplicazione (vedi il calcolo combinatorio): $\#\Omega = \#\{1,2,3,4,5,6\} \cdot \#\{1,2,3,4,5,6\} = 6 \cdot 6 = 36$.

Gli eventi che mi interessano sono:

$$A = \{(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\};$$

$$B = \{(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\};$$

$$A \cap B = \{(2,3),(3,2)\}.$$

Infine, $P(A \cap B) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$, $P(B) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ *e* $P(A) = \dfrac{11}{36}$. *Poichè* $\dfrac{1}{18} \neq \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{11}{36}$, *gli eventi* A *e* B *NON sono indipendenti.*

Il teorema delle probabilità totali

Esercizio 3. *Una ditta produttrice di autovetture riceve da tre fornitori i cambi da installare sulle auto nelle seguenti percentuali:* 65%, 25% *e* 10%.

Sapendo che i tre fornitori producono i cambi con una difettosità dichiarata del 5%, 10% *e* 25%, *calcolare la probabilità che ha la ditta di ricevere un cambio difettoso.*

Svolgimento. *Dobbiamo calcolare* $P(A)$ *dove* A : *"il cambio e difettoso" e lo spazio campionario* Ω *è l'insieme di tutti i cambi dell'azienda. Considero i seguenti eventi:*

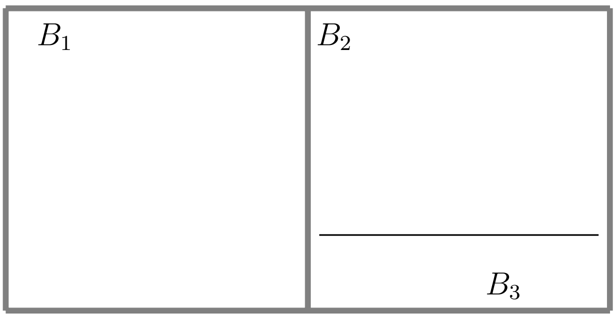
B_1 : *"cambi forniti dal primo fornitore";*

B_2 : *"cambi forniti dal secondo fornitore";*

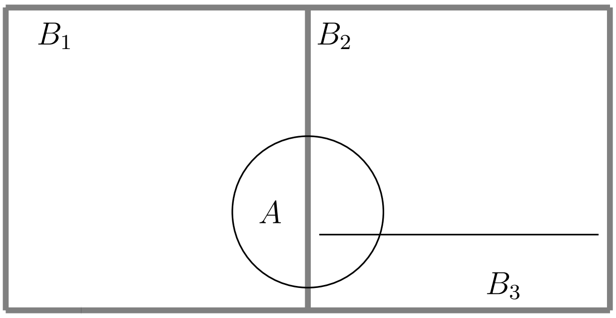
B_3 : *"cambi forniti dal terzo fornitore".*

Dalla traccia si conoscono le seguenti probabilità: $P(B_1) = 0,65$, $P(B_2) = 0,25$, $P(B_3) = 0,1$, $P(A|B_1) = 0,05$, $P(A|B_2) = 0,1$, $P(A|B_3) = 0,25$.

Osservo che B_1, B_2, B_3 *formano una partizione di* Ω*:*



Come mostrato nella seguente figura $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$.



Quindi $P(A) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$ *(notiamo che questi 3 insiemi sono disgiunti quindi possiamo usare l'assioma 3)=* $P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$ *(per il teorema della probabilità composta)=0,0825.*

Nel precedente esercizio, abbiamo calcolato la probabilità di A con questa formula: $P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$, dove A è un evento qualsiasi e B_1, B_2, B_3 formano una partizione of Ω. Più in generale, questa formula si può estendere a n insiemi $B_1, \ldots, B_n$:

Teorema (Teorema delle probabilità totali). *Siano* $B_1, \ldots, B_n$ *eventi che formano una partizione di* Ω ($B_i \cap B_j = \emptyset$ *e* $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n$) *e sia* A *un evento di* Ω*, allora*

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n).$$

Dimostrazione. $A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$*, quindi* $P(A) = P((A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n))$ *=(notiamo che* $(A \cap B_1), \ldots, (A \cap B_n)$ *sono a due a due disgiunti perchè per ipotesi* $B_1, \ldots, B_n$ *sono a due a due disgiunti, quindi possiamo usare l'assioma 3)=* $P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)$ *(per il teorema della probabilità composta).*

Il teorema di Bayes

Esercizio 4. *Consideriamo il problema precedente sui pezzi difettosi. Calcoliamo la probabilità che, avendo scelto a caso un pezzo della ditta DIFETTOSO, il pezzo sia stato fornito dal secondo fornitore.*

Svolgimento. *Dobbiamo calcolare la probabilità condizionata di* B_2 *dato* A*:*

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} (\textit{per la formula della probabilità condizionata}) =$$

$$\frac{P(A|B_2)P(B_2)(\textit{per il teor. della probabilità composta})}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)(\textit{per il teor. delle pr. totali})}$$
=0,303.

Nel precedente esercizio, abbiamo calcolato la probabilità di B_2 dato A con questa formula:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)},$$

dove A è un evento qualsiasi e B_1, B_2, B_3 formano una partizione of Ω. Più in generale, questa formula si può estendere a n insiemi $B_1, \ldots, B_n$:

Teorema (Teorema dei Bayes). *Siano $B_1, \ldots, B_n$ eventi che formano una partizione di Ω ($B_i \cap B_j = \emptyset$ e $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n$) e sia A un evento di Ω, allora*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)}.$$

Dimostrazione.

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}(\textit{per la formula della probabilità condizionata}) =$$

$$\frac{P(A|B_i)P(B_i)(\textit{per il teor. della probabilità composta})}{P(A|B_1)P(B_1)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)(\textit{per il teor. delle pr. totali})}$$

Il problema di Monty Hall con il teorema di Bayes

Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere fra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, due capre. Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, facendo uscire una capra.

Qual è la scelta più vantaggiosa? Conviene o no cambiare? Oppure è indifferente?

Consideriamo i seguenti eventi:

A_1: dietro la prima porta c'è un'auto;

A_2: dietro la seconda porta c'è un'auto;

A_3: dietro la terza porta c'è un'auto;

C_3: il conduttore ha aperto la terza porta (dove c'è una capra).

Calcolo P(vincere conservando la prima porta)=$P(A_1|C_3)$. Per il Teorema di Bayes,

$$P(A_2|C_3) = \frac{P(C_3|A_2)P(A_2)}{P(C_3|A_1)P(A_1) + P(C_3|A_2)P(A_2 + P(C_3|A_3)P(A_3)}.$$

Le varie probabilità le ho già calcolate, sostituisco e trovo $\frac{2}{3}$.

Poiché $P(A_1|C_3) < P(A_2|C_3)$ mi conviene cambiare la porta 1 con la porta 2 (sapendo che il conduttore svela una capra dietro la porta 3)!