Lab 2

2.1 Vincere lotterie

Se compri un biglietto per 40 lotterie diverse, e ognuna di esse ti offre una possibilità di vittora di $1/100$, Qual è la probabilità che tu vinca

(i) almeno una lotteria,

(ii) esattamente una lotteria,

(iii) almeno due lotterie?

(Basta scrivere l'espressione da calcolare, non è necessario calcolare il numero corrispondente)
Suggerimento: Che tipo di distribuzione è questa?

2.1 Soluzione

La variabile casuale $\mathcal{X}$, che rappresenta il numero di lotterie vinte, segue una distribuzione binomiale con $n = 40$ and $p = 0.01$.
Possiamo quindi calcolare direttamente le probabilità dalla definizione della distribuzione binomiale:

(i)
$$\begin{aligned} P[\mathcal{X} \geq 1] &= 1 - P[\mathcal{X} = 0] \\ &= 1 - \binom{n}{0} p^0 \, (1-p)^n \\ &= 1 - \binom{n}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^n = 1 - 0,99^{40}; \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} P[\mathcal{X} = 1] &= \binom{n}{1} p^1 \, (1-p)^{n-1} \\ &= \binom{40}{1} p^1 \, (1-p)^{39} = 40 \, p^1 \, (1-p)^{39}; \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} P[\mathcal{X} \geq 2] &= 1 - P[\mathcal{X} = 0] - P[\mathcal{X} = 1] \\ &= 1 - \binom{n}{0} p^0 \, (1-p)^n - \binom{n}{1} p^1 \, (1-p)^{n-1} \\ &= 1 - 1 \cdot 0,99^{40} - 40 \, p^1 \, (1-p)^{39}. \end{aligned}$$

2.2 Eventi Incompatibili e Indipendenti

1. Due eventi A e B hanno probabilità $P(A) = 0.2$ e $P(B) = 0.3$.

   Calcolate la probabilità $P(A \cup B)$ che almeno uno degli eventi A e B is verifichi e la probabilità $P(A \cap B)$ che entrambi si verifichino se

   - A e B sono incompatibili (nel senso che $A \cap B = \emptyset$);
   - A e B sono indipendenti.

2. Ora supponiamo invece che lo spazio dei risultati sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, che ci siano tre eventi $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $C = \{2, 3\}$, e che le probabilità siano assegnate secondo le regole della probabilità classica (vale a dire, non ci sono ragioni per ritenere alcun risultato più probabile di altri). Verificate che

   - A e B sono indipendenti;
   - B e C sono indipendenti;
   - A e C sono indipendenti;
   - $A \cap B$ e C **non** sono indipendenti.

2.2 Soluzione

1. - Se A e B sono incompatibili, per definizione non è possibile che sia A che B si verifichino: $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Inoltre, usando gli assiomi di Kolmogorov per la probabilità, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$.
   - Se A e B sono indipendenti, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.44$.

2. Abbiamo che $P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2$. Ora,

   - $P(A \cap B) = P(\{1\}) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$, quindi A e B sono indipendenti;
   - $P(B \cap C) = P(\{3\}) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$, quindi B e C sono indipendenti;
   - $P(A \cap C) = P(\{2\}) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$, quindi A e C sono indipendenti;
   - $P((A \cap B) \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq 1/4 \cdot 1/2$, quindi $A \cap B$ e C non sono indipendenti.

2.3 Punteggi di Test

Dall'esperienza passata, un professore sa che il punteggio di uno studente in un test è una variabile casuale con valore atteso 75.

1. Calcola un limite superiore per la probabilità che il punteggio di uno studente sia almeno 85.

2. Supponi che, inoltre, il professore sappia che la varianza del punteggio dello studente sia 25. Possiamo migliorare la stima descritta precedentemente?
3. Sotto le stesse ipotesi riguardo la media e la varianza del punteggio, cosa possiamo dire della probabilità che lo studente abbia un punteggio tra 65 e 85 (non compresi)?
4. Quanti studenti devono fare il test perchè, con probabilità almeno 0.9, la media della classe sia tra 70 e 80 (non compresi)?

2.3 Soluzione

1. Rappresentiamo il punteggio dello studente con una variabile casuale $\mathcal{X}$ con valore atteso $\mu = 75$ e applichiamo la Diseguaglianza di Markov. Otteniamo

$$P[\mathcal{X} \geq 85] \leq \frac{\mu}{85} = \frac{75}{85} = 0.882.$$

2. Se la varianza σ^2 è 25, la deviazione standard è la sua radice quadrata, quindi è $\sigma = 5$. Applichiamo la Diseguaglianza di Chebyshev:

$$\begin{aligned} P[\mathcal{X} \geq 85] &\leq P[\mathcal{X} \leq 65 \text{ o } \mathcal{X} \geq 85] \\ &= P[|\mathcal{X} - 75| \geq 10] \\ &= P[|\mathcal{X} - \mu| \geq 2\sigma] \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3. Applichiamo nuovamente la Diseguaglianza di Chebyshev (per comodità, usiamola in questa forma: se $\mathcal{X}$ ha valore atteso μ e varianza σ^2, $P(|X - \mu| \geq a) \leq \sigma^2/a^2$)

$$\begin{aligned} P[65 < \mathcal{X} < 85] &= 1 - P[\mathcal{X} \leq 65 \text{ o } \mathcal{X} \geq 85] \\ &= 1 - P[|\mathcal{X} - 75| \geq 10] \\ &\geq 1 - \frac{25}{10^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Nota che in questo caso otteniamo un limite inferiore per la probabilità richiesta.

4. Possiamo rappresentare i risultati di n studenti come n variabili casuali indipendenti $\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_n$, ognuna delle quali segue la stessa distribuzione di $\mathcal{X}$ (e ha quindi lo stesso valore atteso e varianza).

La media aritmetica delle variabili casuali $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ è anch'essa una variabile casuale che possiamo rappresentare come $\bar{\mathcal{X}}$, cioè,

$$\bar{\mathcal{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i.$$

Come visto a lezione, il valore atteso di $\bar{\mathcal{X}}$ è uguale al valore atteso di $\mathcal{X}$, cioè $\mu = 75$; e poichè gli $\mathcal{X}_i$ sono indipendenti, la varianza di $\bar{\mathcal{X}}$ è

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 = \mathit{Var}(\bar{\mathcal{X}}) &= \mathit{Var}(\,\frac{1}{n}\,\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\,\mathit{Var}(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\,\sum_{i=1}^{n}\mathit{Var}(\mathcal{X}_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\,n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Ora possiamo procedere come nel caso precedente, usando $\bar{\mathcal{X}}$ invece di $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
P[70 < \bar{\mathcal{X}} < 80] &= 1 - P[\bar{\mathcal{X}} \leq 70 \text{ o } \bar{\mathcal{X}} \geq 80] \\
&= 1 - P[|\bar{\mathcal{X}} - 75| \geq 5] \\
&\geq 1 - \frac{\sigma^2/n}{5^2} = 1 - \frac{25/n}{25} = 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Perchè questa probabilità sia almeno $9/10 = 1 - 1/10$, è necessario che $n \geq 10$.