Lab 1

1.1 Quale tipo di taxi è stato coinvolto nell'incidente?

Un taxi è stato coinvolto in un incidente automobilistico. Due compagnie di taxi, la Verde e la Blu, operano nella città. Avete le seguenti informazioni:

- L'85% dei taxi della città sono Verdi e il 15% sono Blu.
- Un testimone ha identificato il taxi come Blu. La corte ha verificato l'affidabilità del testimone nelle stesse circostanze della notte in cui si è verificato l'incidente e ha concluso che il testimone identifica correttamente i due colori di taxi l'80% delle volte e sbaglia il 20% delle volte.

Qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente sia Blu?

1.1 Soluzione

Sia $\mathcal{B}$ l'evento che il taxi in questione sia blu e sia $\mathcal{W}$ l'evento che il testimone identifichi il taxi come blu.
Vogliamo la probabilità

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{W}).$$

E abbiamo le probabilità

$$P(\mathcal{B}) = .15 \qquad P(\mathcal{W}|\mathcal{B}) = .8 \qquad P(\mathcal{W}|\overline{\mathcal{B}}) = .2$$

Secondo la formula di Bayes,

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{W}) = \frac{P(\mathcal{W}|\mathcal{B})\,P(\mathcal{B})}{P(\mathcal{W})} = \frac{P(\mathcal{W}|\mathcal{B})\,P(\mathcal{B})}{P(\mathcal{W}|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{W}|\overline{\mathcal{B}})P(\overline{\mathcal{B}})}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{20}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{20} + \frac{1}{5}\cdot\frac{17}{20}} = \frac{4\cdot 3}{4\cdot 3 + 1\cdot 17} = \frac{12}{29} = 41.38\,\%$$

1.2 Lanci di Dadi Indipendenti

Due dadi non truccati sono lanciati. Sia $\mathcal{E}$ l'evento secondo cui la somma dei dadi è 7.

1. $\mathcal{E}$ è indipendente dall'evento "$D_1 = 1$" secondo cui il primo dado ha risultato 1?
2. $\mathcal{E}$ è indipendente dall'evento "$D_1 = 2$" secondo cui il primo dado ha risultato 2?
3. $\mathcal{E}$ è indipendente dall'evento "$D_2 = 6$" secondo cui il secondo dado ha risultato 6?

Considerate le stesse domande rispetto all'evento $\mathcal{F}$ secondo cui la somma dei due dadi è 6.

1.2 Soluzione

Ci sono sei modi di ottenere una somma di 7 lanciando due dadi:

$$(1,6),\ (2,5)\,(3,4)\,(4,3)\,(5,2)\,(6,1).$$

Quindi, la probabilità di $\mathcal{E}$ è $6/36 = 1/6$. Ognuno dei tre altri eventi considerati (vale a dire, il risultato del primo dado è 1, o è 2, o il secondo dado ha risultato 6) ha probabilità 1/6, perchè fissare il numero di uno dei dadi lascia 6 possibilità per l'altro dado.
Ora, la cardinalità dell'evento secondo cui $\mathcal{E}$ succede insieme a uno di questi tre eventi, per esempio, $\mathcal{E}$ insieme a "$D_1 = 1$", è 1, perchè $\mathcal{E}$ contiene esattamente un risultato per ogni possibile risultato di ogni dado.
Quindi, la probabilità di questo evento combinato è $1/36 = 1/6 \times 1/6 = P(\mathcal{E}) \times P(\text{“}D_1 = 1\text{”})$. Equivalentemente, possiamo considerare la probabilità condizionata:

$$P(\text{“}D_1 = 1\text{”}|\mathcal{E}) = 1/6.$$

Quindi, $\mathcal{E}$ e "$D_1 = 1$" sono indipendenti. Lo stesso argomento vale per gli altri due casi.
La situazione cambia se sappiamo che la somma dei due dadi è 6. I possibili risultati sono

$$(1,5),\ (2,4)\,(3,3)\,(4,2)\,(5,1).$$

Ora, per "$D_1 = 1$" and "$D_1 = 2$", le probabilità condizionate sono

$$P(\text{“}D_1 = 1\text{”}|\mathcal{F}) = P(\text{“}D_1 = 2\text{”}|\mathcal{F}) = 1/5,$$

poichè solo uno dei cinque risultati che soddisfano $\mathcal{F}$ è tale che il primo dado ha risultato 1 oppure 2. Poichè $1/5 \neq 1/6$, questi due eventi non sono indipendenti.
Il caso "$D_2 = 6$" è diverso, perchè è impossibile che la somma dei due dadi sia 6 se il secondo risultato è già 6.
Quindi

$$P(\text{“}D_2 = 6\text{”}|\mathcal{F}) = 0,$$

che è diverso dalla probabilità non condizionata $P(\text{“}D_2 = 6\text{”}) = 1/6$. Pertanto, anche $\mathcal{F}$ e "$D_1 = 2$" non sono indipendenti.

1.3 Classifiche di esami

Quattro uomini e tre donne sono classificati in un esame. Supponiamo che non ci siano pari classificati e che tutte le classifiche siano ugualmente probabili.
Se $\mathcal{X}$ denota la posizione *più bassa* ottenuta da una donna (contando dalla posizione più bassa a quella più alta: se $\mathcal{X} = 1$, l'ultima posizione in classifica è una donna, se $\mathcal{X} = 2$ l'ultima posizione è un uomo e la penultima è una donna, e così via), calcolate $P[\mathcal{X} = i], 1 \leq i \leq 7$ e poi calcolate il valore atteso $E[\mathcal{X}]$.

1.3 Soluzione

Ci sono 7! possibili classifiche. Il numero di classifiche in cui una donna ha l'ultimo posto è $3 \cdot 6!$, perchè dobbiamo scegliere una delle tre donne per l'ultimo posto e poi restano 6 persone da classificare. Quindi

$$P[\mathcal{X} = 1] = \frac{3 \cdot 6!}{7!} = \frac{3}{7}.$$

Se la donna con il punteggio più basso è al secondo posto partendo dal basso, ci sono tre possibilità per lei. All'ultimo posto, ci deve essere un uomo, e ci sono 4 possibilità. Per le posizioni dalla 3 to 7 (partendo dal basso), le restanti 5 people possono essere classificate in $5!$ maniere diverse.

Quindi

$$P[\mathcal{X} = 2] = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5!}{7!} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7}.$$

Se la donna con il punteggio più basso + in terza posizione, ci sono 3 possibilità per lei. Allora due uomini devono essere messi nelle posizioni 1 e 2, e per essi ci sono $4 \cdot 3$ possibilità; e per le posizioni da 4 a 7, le restanti 4 persone possono essere ordinate in $4!$ maniere diverse. Quindi,

$$P[\mathcal{X} = 3] = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4!}{7!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{6}{35}.$$

Perchè la donna ultima classificata sia in quarta posizione, abbiamo tre possibilità per la donna; e per i tre uomini in posizioni 1, 2 e 3 abbiamo $4 \cdot 3 \cdot 2$ scelte possibili.

Le tre restanti persone possono essere classificate nelle posizioni 5,6, e 7 in $3!$ maniere diverse. Quindi

$$P[\mathcal{X} = 4] = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3!}{7!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{35}.$$

Se la donna ultima classificata è nella terza posizione, le tre donne hanno le tre posizioni più alte (5,6, e 7) e i quattro uomini hanno le quattro posizioni più basse (da 1 a 4).

Quindi ci sono $3!$ possibili ordinamenti per le donne e $4!$ possibili ordinamenti per gli uomini, e

$$P[\mathcal{X} = 5] = \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{35}.$$

Non è possibile che la donna con la posizione più bassa sia in posizione 6 o 7, perchè ci sono tre donne e 7 possibili posizioni.

In conclusione,

$$P[\mathcal{X} = i] = \begin{cases} 3/7 & i = 1 \\ 2/7 & i = 2 \\ 6/35 & i = 3 \\ 3/35 & i = 4 \\ 1/35 & i = 5 \\ 0 & i > 6 \end{cases}$$

E quindi il valore atteso di $\mathcal{X}$ è

$$\begin{aligned} E[\mathcal{X}] &= 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{6}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{1}{35} \\ &= \frac{1}{35}(1 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1) = \frac{70}{35} = 2. \end{aligned}$$