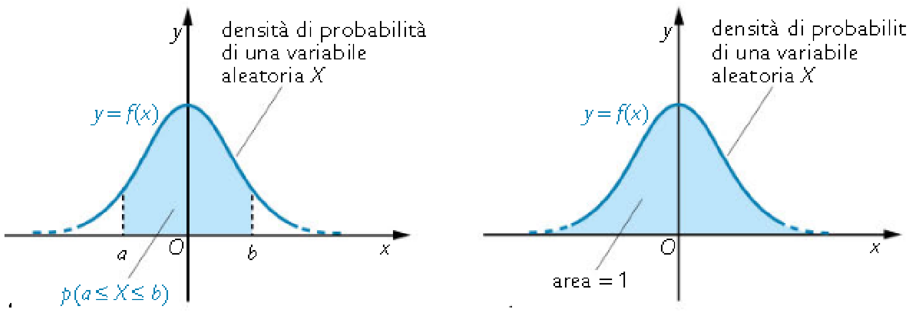
Lezione 22/11/2022

Variabili aleatorie continue

Definizione (Densità di probabilità). *La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria continua X viene definita assegnando una funzione f, detta* densità (di probabilità) di X, *tale che:*

1. $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Le probabilità che X assuma valori in un dato intervallo $[a, b]$ è data dall'integrale della sua densità sull'intervallo $[a, b]$ considerato ($P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$).



Osservazione:

1. il fatto che una la densità f è non negativa assicura che, comunque sia scelto $[a, b]$, la probabilità dell 'evento $X \in [a, b]$ è non negativa;
2. il fatto che l'integrale della densità f sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ valga 1 assicura che la probabilità dell'evento certo è 1.

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

determiniamo per quale valore di k essa definisce la densità di una variabile aleatoria X;

Svolgimento. *Affinché la funzione f definisca una densità di probabilità devono essere soddisfatte le due condizioni*

1. *$f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;*

2. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$*

Affinché la funzione sia sempre non negativa deve essere $kx^2 \geq 0$, che equivale a $k \geq 0$.

Poiché la funzione f è nulla al di fuori dell'intervallo $0 \leq x \leq 3$ la condizione $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ equivale alla seguente equazione, che risolviamo:

$$\int_0^3 kx^2 = 1 \Rightarrow k \int_0^3 x^2 = 1 \Rightarrow k \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}.$$

Questo valore di k è accettabile perché è positivo.

È importante fare alcune osservazioni

- Se l'intervallo $[a, b]$ si riduce a un punto, cioè se $a = b$, risulta:

$$P(a \leq X \leq a) = P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

  Perciò, se X è una variabile aleatoria continua, la probabilità che essa assuma un qualsivoglia valore reale prefissato è sempre nulla; in simboli: $P(X = a) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Conseguenza di questo fatto è che aggiungere o togliere un numero finito di punti a un intervallo non altera la sua probabilità; per esempio:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

- Data la densità di probabilità f di una variabile aleatoria continua X, il valore $f(a)$ da essa assunto quando $x = a$ non ha (come invece accade nel caso discreto) il significato di probabilità dell'evento $X = a$: infatti questa probabilità è sempre uguale a zero, mentre il valore assunto da f in $x = a$, in generale, è un numero positivo, eventualmente maggiore di 1. Nel continuo solo l'integrale della densità su unintervallo ha il significato di probabilità di un evento.

Media e Varianza di una variabile aleatoria continua

Le definizioni di media e varianza di una variabile aleatoria discreta si estendono al caso continuo sostituendo semplicemente la sommatoria con l'integrale.

Definizione (Media di una variabile aleatoria continua)**.** *Data una variabile aleatoria continua X, di densità f, si dice* media *(o* valore medio *o* valore atteso *o* speranza matematica*) di X e si indica con il simbolo $E(X)$ (o con la lettera μ) il numero, se esiste, così definito:*

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Definizione. *Varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria continua Data una variabile aleatoria continua X, di densità f e media μ, si dice* varianza *di X e si indica con il simbolo $Var(X)$ (o con σ^2) il numero, se esiste, così definito:*

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx.$$

Anche nel caso continuo, per il calcolo della varianza vale una formula abbreviata simile a quella vista nel caso discreto:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

Si definisce deviazione standard di X (e si indica con σ) la radice quadrata della varianza:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

Esercizio 2. *Calcoliamo media e varianza della variabile aleatoria X di densità*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & se\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Svolgimento. *Osserviamo che nell'esercizio precedente abbiamo già verificato che f è la densità di probabilità di una variabile aleatoria X.*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{9} x^2 dx =$$

(la densità è nulla al di fuori dell'intervallo $[0,3]$, quindi sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(3, +\infty)$ anche l'integrale della densità è nullo.

$$= \frac{1}{9} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{4} = \frac{9}{4}.$$

Per calcolare la varianza, utilizziamo la formula abbreviata

$$Var(X) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{9}x^2 dx - \mu^2 = \frac{1}{9}\int_0^3 x^4 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}.$$

Definizione (Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua)**.** *Sia X una variabile aleatoria continua, avente come densità la funzione f; si chiama* funzione di ripartizione di X *la funzione che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è così definita:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Esercizio 3. *Determinare la funzione di ripartizione della variabile continua X di densità:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & se\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Svolgimento. *Determiniamo $F(x)$ nei seguenti casi: $x < 0$, $0 \leq x \leq 2$ e $x > 2$.*

- *Se $x < 0$, allora*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

- *Se $0 \leq x \leq 2$, allora*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4}x^2.$$

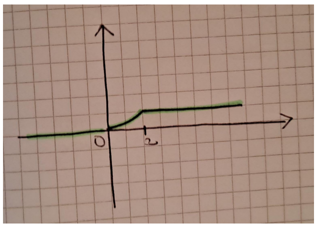
- *Se $x > 2$, allora*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt = 0+1+0 = 1.$$

Dunque,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & se\ 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & se\ x > 2 \end{cases}$$

Il grafico di $F(x)$ è il seguente:



Si può dimostrare che la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua:

- è crescente;
- tende a 0 per $x \to -\infty$;
- tende a 1 per $x \to +\infty$.

Inoltre, poiché la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua è la funzione integrale della sua densità, segue che:

- la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua è sempre una funzione continua;
- se la densità $f(x)$ di X è una funzione continua, la funzione di ripartizione $F(x)$ di X è derivabile e la sua derivata è la densità:

  $$F'(x) = f(x)$$

  (per il primo teorema forndamentale del calcolo integrale). $P(a \leq X \leq b)$ può essere calcolato mediante F, infatti per il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

  $$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$$