Esame di Logica

4 Settembre 2023

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutte le lumache sono molluschi;
  - Tutti i molluschi sono invertebrati;
  - Nessuna lumaca vola;
  - Tutti gli insetti sono invertebrati;
  - Qualche insetto vola.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Qualche invertebrato non è una lumaca;
  2. Qualche invertebrato non è un mollusco;
  3. Qualche lumaca è un invertebrato;
  4. Qualche insetto non è una lumaca.

SOLUZIONE:

- Siano **l** = lumaca, **m** = mollusco, **i** = invertebrato, **v** = vola, **n** = insetto. Allora la teoria è
  - $\mathbf{A}(l, m)$;
  - $\mathbf{A}(m, i)$;
  - $\mathbf{E}(l, v)$;
  - $\mathbf{A}(n, i)$;
  - $\mathbf{I}(n, v)$.
- Consideriamo le quattro affermazioni:
  1. $\mathbf{O}(i, l)$ ha la seguente dimostrazione diretta:

(1)	E(l,v)	Ipotesi
(2)	A(n,i)	Ipotesi
(3)	I(n,v)	Ipotesi
(4)	I(v,n)	C3, da (3)
(5)	I(v,i)	PS3, da (2), (4)
(6)	I(i,v)	C3, da (5)
(7)	E(v,l)	C1, da (1)
(8)	O(i,l)	PS4, da (6) e (7)

  2. $\mathbf{O}(i, m)$ non è una conseguenza della teoria.
     Infatti, consideriamo il modello con dominio $\Delta = \{1, 2\}$, dove $\iota(l) = \{1\}$, $\iota(m) = \{1, 2\}$, $\iota(i) = \{1, 2\}$, $\iota(v) = \{2\}$ e $\iota(n) = \{2\}$. Allora
     - $\mathbf{A}(l, m)$ è soddisfatta, perchè $\iota(l) \subseteq \iota(m)$;
     - $\mathbf{A}(m, i)$ è soddisfatta, perchè $\iota(m) \subseteq \iota(i)$;
     - $\mathbf{E}(l, v)$ è soddisfatta, perchè $\iota(l) \cap \iota(v) = \emptyset$;
     - $\mathbf{A}(n, i)$ è soddisfatta, perchè $\iota(n) \subseteq \iota(i)$;
     - $\mathbf{I}(n, v)$ è soddisfatta, perchè $\iota(n) \cap \iota(v) \neq \emptyset$.

     Ma $\mathbf{O}(i, m)$ non è soddisfatta, perchè $\iota(i) = \iota(m)$.
  3. $\mathbf{I}(l, i)$ ha la seguente dimostrazione diretta:

(1)	**A**(l,m)	Ipotesi
(2)	**A**(m,i)	Ipotesi
(3)	**A**(l,i)	PS1, da (2) e (1)
(5)	I(l,i)	C2, da (3).

  4. $\mathbf{O}(n, l)$ ha la seguente dimostrazione diretta:

(1)	**E**(l,v)	Ipotesi
(2)	**I**(n,v)	Ipotesi
(3)	**E**(v,l)	C1, da (1)
(4)	**O**(n,l)	PS4, da (3) e (2).

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Domani pioverà oppure domani ci sarà il sole;
  - Non è vero che domani pioverà e ci sarà il sole;
  - Se oggi non piove, domani pioverà.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se domani ci sarà il sole, oggi piove.
  - Se domani pioverà, oggi non piove.
- Verificate se la teoria ha "Non è vero che (oggi non piove e domani ci sarà il sole)" (**NOTA:** attenzione alla parentesi!) come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere le altre formule del ramo).

SOLUZIONE:

- Siano **O** = "oggi piove", **P** = "domani pioverà" e **S** = "domani ci sarà il sole". Allora la teoria può essere scritta come
  1. $P \vee S$;
  2. $\neg(P \wedge S)$;
  3. $(\neg O) \rightarrow P$.
- La tabella di verità è

O	P	S	$P \vee S$	$P \wedge S$	$\neg(P \wedge S)$	$\neg O$	$(\neg O) \rightarrow P$
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1

E quindi gli assegnamenti che soddisfano la teoria sono quelli che assegnano a O, P e S i valori $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ o $(1, 1, 0)$.

- Le affermazioni da verificare sono $S \to O$ e $P \to \neg O$.

O	P	S	$S \to O$	$\neg O$	$P \to (\neg O)$
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0

  e quindi la prima affermazione segue dalla teoria, ma la seconda no.

- L'affermazione che stiamo cercando di verificare essere una conseguenza è $\neg(\neg O \wedge S)$. Quindi:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \{P \vee S, \neg(P \wedge S), (\neg O) \to P, \underline{\neg\neg(\neg O \wedge S)}\} \arrow[d] & & \\
 & & \{P \vee S, \neg(P \wedge S), (\neg O) \to P, \underline{\neg O \wedge S}\} \arrow[d] & & \\
 & & \{P \vee S, \neg(P \wedge S), \underline{(\neg O) \to P}, \neg O, S\} \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
\{P \vee S, \neg(P \wedge S), \underline{\neg\neg O}, \neg O, S\} \arrow[d] & & & \{P \vee S, \underline{\neg(P \wedge S)}, P, \neg O, S\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\{P \vee S, \neg(P \wedge S), O, \neg O, S\} & & \{P \vee S, \neg P, P, \neg O, S\} & & \{P \vee S, \neg S, P, \neg O, S\}
\end{tikzcd}
$$

Chiuso: O, $\neg O$ — Chiuso: $\neg P$, P — Chiuso: $\neg S$, S

3 Logica dei Predicati

- Scrivete una teoria in logica dei predicati che rappresenti le seguenti affermazioni, usando quattro predicati unari `S` (scarpa), `R` (destra), `L` (sinistra), `P` (persona), un predicato binario `H` (ha), e due costanti `u` e `b` (Ugo e Ubaldo):
  - Tutte le scarpe sono destre oppure sinistre;
  - Nessuna scarpa è sia destra che sinistra;
  - Ogni persona ha (almeno) una scarpa destra e ha (almeno) una scarpa sinistra;
  - Nessuna persona è una scarpa;
  - Ugo è una persona;
  - Ubaldo è una persona.

- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e in cui Ugo e Ubaldo sono la stessa persona (vale a dire, sono rappresentati da due costanti che corrispondono allo stesso elemento della struttura)? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta e in cui ci sono meno di due scarpe (vale a dire, meno di due elementi che hanno la proprietà di essere scarpe)? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.

SOLUZIONE:

- La teoria è
  - $\forall x(S(x) \to R(x) \vee L(x))$;
  - $\neg\exists x(S(x) \wedge R(x) \wedge L(x))$;
  - $\forall x(P(x) \to \exists yz(H(x,y) \wedge H(x,z) \wedge S(y) \wedge S(z) \wedge R(y) \wedge L(z)))$;
  - $\neg\exists x(P(x) \wedge S(x))$;
  - P(u);
  - P(b).
- Una tale struttura esiste. Per esempio, potremmo fissare il dominio $D = \{0, 1, 2\}$, dire che 0 è l'unica persona che è sia Ugo che Ubaldo (quindi $I(P) = \{0\}$, $I(u) = I(b) = 0$), e dire che 1 e 2 sono scarpe destre e sinistre di questo individuo (quindi $I(H) = \{(0,1),(0,2)\}$, $I(S) = \{1,2\}$, $I(R) = \{1\}$ e $I(L) = \{2\}$).
- Una tale struttura non esiste. Infatti, la costante `u` (Ugo) va interpretata in una persona, e secondo la teoria una persona deve avere una destra e una scarpa sinistra (e non possono esistere scarpe sia destre che sinistre). Quindi, ogni modello che soddisfa la teoria deve contenere almeno due individui distinti che sono scarpe.