Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica (CPS 269AA)

Marta Leocata, Dario Trevisan

6 febbraio 2018

Convenzione 1. Negli gli esercizi proposti, *ogni volta* che appare una probabilità $P(A \mid B)$, possiamo (potete) supporre che A, B siano eventi in un certo spazio di probabilità di Kolmogorov $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot \mid \Omega))$ (non preoccupatevi di costruire tali spazi. . .). Inoltre, supponiamo che $P(B \mid \Omega) > 0$, altrimenti la *definizione* di probabilità condizionata sarebbe problematica.

Convenzione 2. In tutti gli esercizi, usiamo la notazione *insiemistica* per le operazioni tra eventi (perché negli assiomi di Kolmogorov gli eventi sono in effetti insiemi). Ricordate però che c'è una perfetta corrispondenza tra operazioni tra insiemi e operazioni logiche tra le "proposizioni" che essi rappresentano:

$$A \cap B \Leftrightarrow \text{'A' e 'B'}, \quad A \cup B \Leftrightarrow \text{'A' o 'B'}, \quad A^c = \Omega \setminus A \Leftrightarrow \text{non 'A'}.$$

$$\Omega \Leftrightarrow \text{'Vero'} \quad \emptyset \Leftrightarrow \text{'Falso'}.$$

Un buon esercizio è di provare sempre ad interpretare (anche facendo esempi) le identità tra insiemi/eventi come uguaglianze tra i valori di verità delle proposizioni (ad esempio $A \cup A^c = \Omega$ diventa: è sempre vero che $'A'$ oppure "non A").

Problema 1

Mostrare che, dati eventi A, B, I (non necessariamente incompatibili) allora

$$P(A \cup B \mid I) = P(A \mid I) + P(B \mid I) - P(A \cap B \mid I).$$

Una soluzione:

Usiamo il fatto che $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ sono a due a due incompatibili con unione uguale a $A \cup B$ e quindi

$$\begin{aligned} P(A \cup B \mid I) &= P(A \setminus B \mid I) + P(B \setminus A \mid I) + P(A \cap B \mid I) \\ &= P(A \mid I) + P(B \setminus A \mid I) \\ &= P(A \mid I) + P(B \setminus A \mid I) + P(A \cap B \mid I) - P(A \cap B \mid I) \\ &= P(A \mid I) + P(B \mid I) - P(A \cap B \mid I). \end{aligned}$$

Problema 2

Mostrare che, dati A, I, J, se vale

$$P(A \mid I) \geq P(A \mid J) \quad \text{allora vale} \quad P(A^c \mid I) \leq P(A^c \mid J).$$

Una soluzione:

Sappiamo che $1 = P(\Omega \mid I) = P(\Omega \mid J)$. Inoltre A e A^c sono due eventi incompatibili con unione $A \cup A^c = \Omega$, quindi abbiamo la disuguaglianza

$$P(A^c \mid I) = 1 - P(A \mid I) \leq 1 - P(A \mid J) = P(A^c \mid J),$$

Problema 3

Mostrare che, dati A, B, I, J, se vale

$$P(A|I) \geq P(A|J) \quad \text{e inoltre} \quad P(B|I \cap A) \geq P(B|J \cap A),$$

allora

$$P(A \cap B|I) \geq P(A \cap B|J).$$

Problema 4

Sapreste dare un esempio di una situazione (reale) in cui

$$P(A|I) \geq P(A|J) \quad \text{e inoltre} \quad P(B|I) \geq P(B|J),$$

ma non è vero che $P(A \cap B|I) \geq P(A \cap B|J)$?

Problema 5

Partendo dalla *definizione* di Kolmogorov di probabilità condizionata

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F \mid \Omega)}{P(F \mid \Omega)},$$

mostrare che, dati A, B, I eventi (ricordare la nostra Convenzione 1)

$$P(A \cap B|I) = P(A|I)P(B|I \cap A).$$

Mostrare anche la generalizzazione a tre eventi: dati A, B, C, I

$$P(A \cap B \cap C|I) = P(A|I)P(B|I \cap A)P(C|I \cap A \cap B).$$

Problema 6

Supponiamo che

$$P(A|I) \geq P(A|J) \quad \text{e} \quad P(B|I) \geq P(B|J).$$

Ne segue che

$$P(A \cup B|I) \geq P(A \cup B|J)?$$

e se invece supponiamo che

$$P(A|I) \geq P(A|J) \quad \text{e} \quad P(B|A^c \cap I) \geq P(B|A^c \cap J),$$

la conclusione stavolta vale?

Problema 7

Supponiamo che di avere 3 eventi A, B, C tali che

$$P(B|A \cap I) \geq P(B|I) \quad \text{e} \quad P(C|B \cap I) \geq P(C|I).$$

Ne segue necessariamente che

$$P(C|A \cap I) \geq P(C|I)?$$

Problema 8

Supponiamo di sapere che

$$P(B|A \cap I) \geq P(B|I).$$

Ne segue necessariamente che

$$P(A|B \cap I) \geq P(A|I)?$$

Problema 9

Provate a giustificare se in queste situazioni si può invocare il "principio di indifferenza" di Laplace e ricondurci a probabilità uniformi su eventi che costituiscono un sistema di alternative. Ragionate sulla informazione che state (o non state) usando per applicare (o meno) il principio.

1. "I possibili esiti dell'esame di CPS sono due: o lo supero o non lo supero"
2. "Domani il sole sorgerà oppure non sorgerà"
3. "Estraggo bendato una carta da un mazzo di 52"
4. "Bendato, apro una pagina di un vocabolario di italiano e guardo la lettera iniziale cui si riferisce"
5. "Bendato, apro una pagina dell'elenco telefonico e guardo l'ultima cifra (a destra) del primo numero di telefono in alto a sinistra."
6. "Chiedo il mese di nascita della prima persona (che non conosco) che incontro per strada"
7. "Chiedo ad un amico di pensare ad un numero da 1 a 10 e provo ad indovinarlo"
8. "Il numero di e-mail che riceverò nella prossima ora sarà (quasi) sicuramente un numero tra 0 e 100"
9. "Una password di un utente è formata da 4 cifre, quindi sarà una tra le 10^4 possibili password"

Provate a costruire da voi altre situazioni (realistiche) e ragionate sulla validità del "principio di indifferenza".

Problema 10

Una madre ha due figli. Qual è la probabilità che siano entrambi maschi? Quali informazioni "implicite" state usando? Come cambia tale probabilità se ci mettiamo nei panni della madre?

Problema 11

La probabilità di un parto gemellare omozigote (gemelli identici) è 10^{-3} (accettiamo per vera questa informazione). Una madre ha due figli. Qual è la probabilità che siano entrambi maschi?

Problema 12

Una madre ha due figli. Ne incontriamo uno per strada e scopriamo che è maschio. Qual è la probabilità che abbia una sorella? *(Questo problema può essere difficile per via della ambiguità linguistica con cui è formulato. Ragionateci un po', vedete anche https://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_dei_due_bambini)*

Problema 13

(Variante di Baron, Esercizio 2.1) Una scatola contiene 6 chip all'apparenza identici. Però sappiamo che esattamente 2 tra questi sono difettosi. Qual è la probabilità che prendendone

due (in una volta) risultino entrambi difettosi? Qual è la probabilità che, se ne prendiamo prima uno, lo controlliamo, poi lo mettiamo di nuovo nella scatola e agitiamo e poi ne prendiamo di nuovo uno e lo controlliamo, allora entrambi siano difettosi?

Problema 14

Una scatola contiene 100 chip all'apparenza identici. Però sappiamo che esattamente 30 tra questi sono difettosi. Qual è la probabilità che prendendone quattro (uno alla volta, senza reimmissione) risultino due difettosi e due funzionanti? *(Calcolate la probabilità analizzando tutte le possibili combinazioni ordinate che possono prentarsi, e poi confrontate con la formula data dalla distribuzione ipergeometrica)*

Problema 15

Nella situazione dell'esercizio precendete, come cambia la probabilità dello stesso evento se i quattro chip vengono estratti uno alla volta con reimmissione?

Problema 16

Davanti a noi abbiamo due urne all'esterno identiche, entrambe non vuote, di cui una contiene solo palline bianche e l'altra contiene metà palline bianche e metà palline nere. Scegliamo un'urna ed estraiamo (bendati) una pallina da essa. Qual è la probabilità che sia bianca? *(Riflettete sul fatto che non è necessario conoscere il numero di palline effettivamente contenute nelle urne. In quali "punti" del vostro ragionamento avete usato il principio di indifferenza di Laplace?)*

Una soluzione:

Sia Ω l'informazione del testo (quindi non sappiamo quale delle due urne abbiamo scelto) A l'evento "abbiamo scelto l'urna con solo palline bianche", per per indifferenza $P(A|\Omega) = P(A^c|\Omega) = 1/2$, sia B l'evento "estraggo una pallina bianca". Si ha

$$P(B|A \cap \Omega) = 1 \quad \text{e} \quad P(B|A^c \cap \Omega) = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza,

$$P(B|\Omega) = P(B|A \cap \Omega)P(A|\Omega) + P(B|A^c \cap \Omega)P(A^c|\Omega) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Problema 17

C'è un'urna contenente 5 palline bianche e 3 nere. Una persona bendata estrae da essa 2 palline e le pone (noi non guardiamo) in un'altra urna vuota. Dopo questa operazione, qual è la probabilità che estraendo una pallina dalla seconda urna questa sia bianca?

Una soluzione:

Consideriamo i tre eventi BB = "due palline bianche estratte", BN = "una pallina bianca e una nera (in qualunque ordine)" e NN ="due palline nere". Abbiamo

$$P(BB|\Omega) = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} \quad P(BN|\Omega) = 2\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 7} \quad P(NN|\Omega) = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7}.$$

Posto B = "pallina estratta dalla seconda urna è bianca", abbiamo

$$P(B|\Omega \cap BB) = 1 \quad P(B|\Omega \cap BN) = \frac{1}{2} \quad P(B|\Omega \cap NN) = 0,$$

quindi (costruite un grafo) concludiamo che

$$P(B|\Omega) = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} \cdot 1 + 2\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

che è pure la probabilità di estrarre una pallina bianca dall'urna iniziale!

Problema 18

C'è un'urna contenente 8 palline bianche e 4 nere. Una persona bendata estrae da essa 6 palline e le pone (noi non guardiamo) in un'altra urna vuota, identica all'esterno alla prima. Dopo questa operazione, abbiamo davanti a noi due urne, ne scegliamo una ed estraiamo da essa una pallina. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

Una soluzione:

Poniamo $X \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ la variabile aleatoria uguale al numero delle palline estratte bianche dalla persona (con cui costruiamo il primo sistema di alternative). Dopo che la persona ha riempito l'urna, quindi per ciascuna alternativa $\{X = b\}$, introduciamo il sistema di alternative $S =$ "scelgo l'urna svuotata" e $R = S^c =$ "scelgo l'urna riempita": siccome le urne sono indistinguibili (e non abbiamo visto cosa ha fatto la persona), avremo che

$$P(R|X = b) = P(S|X = b) = 1/2$$

qualunque sia $b \in \{0, 1, \ldots 6\}$. Infine poniamo $B =$ "estraggo una pallina bianca" (disegnate il grafo corrispondente alla descrizione fatta finora). Per ogni $b \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ calcoliamo

$$\begin{aligned} P(B|X = b) &= P(B|\{X = b\} \cap S)P(S|X = b) + P(B|\{X = b\} \cap R)P(R|X = b) \\ &= \frac{8-b}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{6} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{perché tutte e due le urne hanno 6 palline} \\ &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

In particolare, questa probabilità non dipende da b, quindi concludiamo che

$$P(B|\Omega) = \sum_{b=0}^{6} P(B|X = b)P(X = b|\Omega) = \frac{2}{3}\sum_{b=0}^{6} P(X = b|\Omega) = \frac{2}{3}.$$

Con questa soluzione non serve conoscere la legge di X, che tuttavia sappiamo essere ipergeometrica ($n = 6$ estrazioni senza reimmissione da un'urna con $N = 12$ palline totali di cui $B = 8$ bianche e $N = 4$ nere). Abbiamo infatti

$$P(X = b|I(12, 8, 4)) = \frac{\binom{8}{b}\binom{4}{6-b}}{\binom{12}{6}}.$$

Notiamo anche che per $b = 0, 1$ si ha $P(X = b|I) = 0$ (quindi le alternative $\{X = 0\}$ e $\{X = 1\}$ sono trascurabili).

Problema 19

(Paradosso delle tre carte.) Ci sono tre carte, delle quali una è rossa su entrambi i lati,

un'altra su un lato è rossa e sull'altro è bianca e la terza è bianca su entrambi i lati. Ponendo su un tavolo una delle tre carte, scelta a caso, ottengo che il lato visibile è di colore rosso. Qual è la probabilità che anche il lato non visibile sia di colore rosso? *Sugg: calcolate la probabilità di estrarre la carta rossa su entrambi i lati, senza l'informazione relativa all'estrazione, poi usate la formula di Bayes.*

Problema 20

Un'urna contiene una pallina blu ed R palline rosse, di cui però non sappiamo esattamente il numero. Sappiamo solamente che $R \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

1. Basandoci sull'informazione sopra, quale probabilità possiamo attribuire all'evento R_i = "nell'urna sono presenti i palline rosse"?
2. Supponiamo che qualcuno effettui una prima estrazione dall'urna, e che la palline estratta risulti blu. Come cambia la probabilità degli eventi R_i?
3. Supponiamo invece qualcuno effettui una prima estrazione dall'urna, e che la pallina estratta risulti rossa. Come cambia la probabilità degli eventi R_i?
4. Supponiamo che qualcuno effettui due estrazioni dall'urna, con reimmissione, e che entrambe le palline estratte risultino blu. Come cambia la probabilità degli eventi R_i?
5. Supponiamo che qualcuno effettui $n \geq 1$ estrazioni dall'urna, con reimmissione, e tutte le palline estratte risultino blu. Come cambia la probabilità degli eventi R_i?

Una soluzione:

1. Attribuiamo inizialmente probablilità uniforme agli eventi R_i: $P(R_i|\Omega) = \frac{1}{11}$.

2. Usiamo la formula di Bayes, posto B_1 = "prima palline estratta è blu". Troviamo

$$P(R_i|\Omega \cap B_1) = \frac{P(B_1|\Omega \cap R_i)P(R_i|\Omega)}{P(B_1|\Omega)} = \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{P(B_1|\Omega)}$$

e

$$P(B_1|\Omega) = \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{j+1} \cdot \frac{1}{11} \approx 3,02 \cdot \frac{1}{11},$$

quindi $P(R_i|\Omega \cap B_1) \approx \frac{1}{3{,}02 \cdot (i+1)}$.

3. Ragioniamo in modo simile con l'evento $(B_1)^c$ = "prima pallina estratta è rossa". Troviamo

$$P(R_i|\Omega \cap (B_1)^c) = \frac{P(B_1|\Omega \cap R_i)P(R_i|\Omega)}{P(B_1|\Omega)} = \frac{i}{c(i+1)},$$

dove $c = \sum_{j=0}^{10} \frac{i}{i+1} \approx 7,98$.

4. Stavolta introduciamo l'evento $B_1 \cap B_2$. Poiché le estrazioni sono con reimmissione, avremo

$$P(B_1 \cap B_2|\Omega \cap R_i) = \left(\frac{1}{i+1}\right)^2.$$

e quindi

$$P(R_i|\Omega \cap B_1 \cap B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2|\Omega \cap R_i)P(R_i|\Omega)}{P(B_1 \cap B_2|\Omega)} = \frac{1}{c(i+1)^2},$$

dove $c = \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(j+1)^2} \approx 1,56$.

5. Consideriamo l'evento $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$. Abbiamo

$$P(B_1 \cap B_2 | \Omega \cap R_i) = \left(\frac{1}{i+1}\right)^n,$$

e per il resto procediamo similmente, trovando che

$$P(R_i | \Omega \cap B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = \frac{1}{c(i+1)^n},$$

dove $c = \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(j+i)^n}$.

Problema 21

(Paradosso di Monty hall) https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Monty_Hall
Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere fra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre. Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra. Quindi ti domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?" Ti conviene cambiare la tua scelta originale?

Una soluzione:

Sia $X \in \{1, 2, 3\}$ il numero della porta dietro alla quale si trova l'automobile, poniamo $S \in \{1, 2, 3\}$ la scelta del giocatore e $C \in \{1, 2, 3\}$ la porta aperta dal conduttore. L'informazione iniziale Ω consiste nel fatto che ci siano le tre porte il cui contenuto non è distinguibile dall'esterno e il giocatore fa la sua scelta. Seguendo il testo, dobbiamo capire quale tra le probabilità

$$P(X = 2| \{C = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) \quad \text{e} \quad P(X = 1| \{C = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)$$

è maggiore.

Osserviamo intanto che X è una variabile aleatoria con legge uniforme (per il principio di indifferenza), quindi $P(X = i|\Omega) = \frac{1}{3}$, per $i \in \{1, 2, 3\}$, mentre $S \in \{1, 2, 3\}$ può essere considerata una variabile aleatoria oppure, seguendo il testo, si potrebbe supporre $S = 1$ costante: in entrambi i casi, supponiamo che S sia indipendente da X rispetto ad Ω (questo può sembrare controintuitivo, ma è più chiaro se si ragiona da un punto di vista esterno al giocatore). In particolare, avremo

$$P(X = i| \{S = 1\} \cap \Omega) = \frac{1}{3} \quad \text{per } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Veniamo ora al comportamento del conduttore. Abbiamo

$$P(C = 1| \{S = 1\} \cap \Omega) = 0,$$

mentre, per calcolare le probabilità degli eventi $P(C = 2| \{S = 1\} \cap \Omega)$ e $P(C = 3| \{S = 1\} \cap \Omega)$ conviene introdurre il sistema di alternative associato ad X. Se $\{X = 1\}$, allora deve pure lui fare una scelta tra aprire la 2 o la 3 e quindi (per indifferenza) poniamo

$$P(C = 2| \{X = 1\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) = P(C = 3| \{X = 1\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) = \frac{1}{2}.$$

Invece, se $\{X = 2\}$, aprirà certamente la 3,

$$P(C = 2|\,\{X = 2\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) = 0 \quad P(C = 3|\,\{X = 2\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) = 1$$

e viceversa se $\{X = 3\}$,

$$P(C = 2|\,\{X = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) = 1 \quad P(C = 3|\,\{X = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) = 0.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} P(C = 3|\,\{S = 1\} \cap \Omega) &= P(C = 3|\,\{X = 1\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 1|\,\{S = 1\} \cap \Omega) \\ &\quad P(C = 3|\,\{X = 2\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 2|\,\{S = 1\} \cap \Omega) \\ &\quad P(C = 3|\,\{X = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 3|\,\{S = 1\} \cap \Omega) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando la formula di Bayes (rispetto all'informazione $I = \{S = 1\} \cap \Omega$, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P(X = 2|\,\{C = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) &= \frac{P(C = 3|\,\{X = 2\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 2|\,\{S = 1\} \cap \Omega)}{P(C = 3|\,\{S = 1\} \cap \Omega)} \\ &= \frac{P(C = 3|\,\{X = 2\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 2|\,\{S = 1\} \cap \Omega)}{P(C = 3|\,\{S = 1\} \cap \Omega)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Analogamente si trova

$$\begin{aligned} P(X = 1|\,\{C = 3\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega) &= \frac{P(C = 3|\,\{X = 1\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 1|\,\{S = 1\} \cap \Omega)}{P(C = 3|\,\{S = 1\} \cap \Omega)} \\ &= \frac{P(C = 3|\,\{X = 1\} \cap \{S = 1\} \cap \Omega)P(X = 1|\,\{S = 1\} \cap \Omega)}{P(C = 3|\,\{S = 1\} \cap \Omega)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

quindi conviene la porta numero 2.

Problema 22

(Paradosso di Monty hall – modello dell'urna) Se il problema precedente risultasse troppo difficile, si consideri la seguente versione. Un'urna contiene una pallina bianca e due nere. Inizialmente, estraiamo una pallina e, senza guardare, la mettiamo da parte. Un'altra persona effettua poi una seconda estrazione di una pallina, ma con le seguenti modalità. Prima apre l'urna e se vede il contenuto: se l'urna contiene due palline nere allora ne estrae una nera, ma se contiene una bianca e una nera, estrae nera con probabilità x e bianca con probabilità $1 - x$, dove $x \in [0, 1]$ è un parametro fissato, e la tiene con sé (non ce la mostra).

1. Rispetto all'informazione iniziale, qual è la probabilità di aver estratto una pallina bianca nella prima estrazione? qual è la probabilità che dopo la seconda estrazione l'urna contenga una pallina bianca? Quale probabilità è maggiore?
2. Supponiamo di vedere che la pallina estratta alla seconda estrazione è nera. Qual è la probabilità di aver estratto una pallina bianca nella prima estrazione? qual è la probabilità che dopo la seconda estrazione l'urna contenga una pallina bianca? Quale probabilità è maggiore?

Problema 23

Due urne identiche contengono entrambe una pallina bianca e una nera. Si estrae una pallina da un'urna (che chiamiamo la *prima*), la si mette da parte (senza guardarla), poi si estrae una pallina dall'altra urna (la *seconda*) e la si pone (senza guardarla) nella prima urna. Poi si pone nella seconda urna la pallina messa da parte. A questo punto abbiamo ancora due urne contenenti estrambe due palline.

1. Qual è la probabilità che un'urna contenga solo palline nere e l'altra solo palline bianche?
2. Supponiamo di fare una (ulteriore) estrazione da ciascuna urna. Gli eventi "dalla prima urna estraggo una pallina bianca", "dalla seconda urna estraggo una pallina nera" sono indipendenti?
3. Qual è la probabilità che un'urna contenga solo palline nere e l'altra solo palline bianche, sapendo che dopo l'ulteriore estrazione otteniamo una pallina bianca e una nera?

Problema 24

Dire come cambiano le risposte del problema precedente se lo "scambio" tra le due urne è effettuato nel seguente modo alternativo: si estrae una pallina da un'urna, la si mette dentro l'altra urna, poi da questa si estrae una pallina e la si pone nella prima urna.

Problema 25

Un'urna contiene 3 palline, blu oppure rosse, di cui però non sappiamo esattamente il numero R, $B = 3 - R$ (sappiamo quindi solamente che $R, B \in \{0, 1, \ldots, 3\}$, $B + R = 3$).

1. Basandoci sull'informazione sopra, possiamo attribuire agli eventi

$$R_i = \text{"nell'urna sono presenti } i \text{ palline rosse"} \quad i \in \{0, \ldots, 3\}.$$

   probabilità uniforme?
2. Effettuiamo un'estrazione, il cui esito è una pallina blu. Come si aggiorna la probabilità degli eventi R_i?
3. Effettuiamo una seconda estrazione, con rimpiazzo, il cui esito è ancora una pallina blu. Come si aggiorna la probabilità degli eventi R_i (tenendo conto degli esiti di entrambe le estrazioni)? Come cambia la risposta se l'estrazione invece è senza rimpiazzo?
4. Supponiamo di effettuare $n \geq 1$ estrazioni con rimpiazzo, e che l'esito sia sempre blu. Tenendo conto di questa informazione, accade mai che la probabilità di R_0 sia 1?

Una soluzione:

1. Non sapendo altro, attribuiamo probabilità uniforme, per cui

$$P(R_i|\Omega) = \frac{1}{4} \quad \text{per } i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

2. Posta $X_1 \in \{r, b\}$ la variabile aleatoria che indica l'esito della prima estrazione, notiamo che
$$P(X_1 = b|R_i) = \frac{3-i}{3}.$$
Usiamo la formula di Bayes:
$$\begin{aligned}
P(R_i|X_1 = b) &= \frac{P(X_1 = b|R_i)P(R_i|\Omega)}{P(X_1 = b|\Omega)} \\
&= \frac{\frac{3-i}{3}\frac{1}{4}}{\sum_{j=0}^{3} \frac{3-j}{3} \cdot \frac{1}{4}} \\
&= \frac{3-i}{6}.
\end{aligned}$$
Notiamo che l'evento R_3 ha (giustamente) probabilità nulla.

3. Posta $X_2 \in \{r, b\}$ la variabile aleatoria che indica l'esito della prima estrazione, notiamo che
$$P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = b|R_i) = \left(\frac{3-i}{3}\right)^2.$$
Usando la formula di Bayes,
$$\begin{aligned}
P(R_i|X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = b) &= \frac{P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = b|R_i)P(R_i|\Omega)}{P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = b|\Omega)} \\
&= \frac{\left(\frac{3-i}{3}\right)^2 \frac{1}{4}}{\sum_{j=0}^{3} \left(\frac{3-j}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}} \\
&= \frac{(3-i)^2}{14}.
\end{aligned}$$
Se invece la seconda pallina estratta è rossa, notiamo prima che (essendo estrazioni senza rimpiazzo)
$$P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = r|R_i) = \frac{3-i}{3} \cdot \frac{i}{3},$$
da cui
$$\begin{aligned}
P(R_i|X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = r) &= \frac{P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = r|R_i)P(R_i|\Omega)}{P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = r|\Omega)} \\
&= \frac{\frac{(3-i)i}{9}\frac{1}{4}}{\sum_{j=0}^{3} \frac{(3-j)j}{9} \cdot \frac{1}{4}} \\
&= \frac{(3-i)i}{4}.
\end{aligned}$$
Notiamo che gli eventi R_0 ed R_3 hanno probabilità nulla.

Se l'estrazione è senza rimpiazzo, abbiamo diversamente
$$P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = b|R_i \quad \text{“senza rimpiazzo”}) = \frac{3-i}{3}\frac{2-i}{2}.$$
da cui usando Bayes come sopra stavolta troviamo
$$P(R_i|X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = b \quad \text{“senza rimpiazzo”}) = \frac{(3-i)(2-i)}{8}.$$

Notiamo stavolta che gli eventi R_2 ed R_3 hanno probabilità nulla.

Infine,

$$P(X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = r | R_i \quad \text{“senza rimpiazzo”}) = \frac{3-i}{3}\frac{i}{2}.$$

da cui

$$P(R_i | X_1 = b \,\mathrm{e}\, X_2 = r \quad \text{“senza rimpiazzo”}) = \frac{(3-i)i}{4}.$$

Osserviamo che in questo caso non c'è differenza tra il caso con rimpiazzo e senza.

4. Analogamente, poniamo $X_k \in \{r, b\}$ la variabile che indica l'esito della k-esima estrazione. Per indipendenza, troviamo

$$P(X_1 = X_2 = \ldots = X_n = b | R_i) = \left(\frac{3-i}{3}\right)^n.$$

Per cui usando Bayes

$$\begin{aligned} P(R_i | X_1 = X_2 = \ldots = X_n = b) &= \frac{\left(\frac{3-i}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{4}}{\sum_{j=0}^{4} \left(\frac{3-j}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} \\ &= \frac{(3-i)^n}{1 + 2^n + 3^n}. \end{aligned}$$

In particolare, la probabilità di R_0 è $3^n/(1+2^n+3^n) < 1$ per ogni n (anche se al tendere di n all'infinito questa tende ad 1).

Problema 26

Un amico ci mostra una moneta su cui un lato vediamo il simbolo “testa”, ma non riusciamo a vedere l'altro lato.

1. Sembra lecito attribuire probabilità uniforme, rispetto all'informazione iniziale, agli eventi “l'amico vi sta ingannando” e “l'amico non vi sta ingannando”? Poniamo $x \in (0, 1)$ la probabilità che ci stia ingannando.
2. Effettuato un lancio, vediamo che l'esito è testa. Qual è la probabilità che la moneta abbia in realtà due “teste”?
3. Effettuati $n \geq 1$ lanci, l'esito è sempre testa. Tenendo conto di questa informazione, qual è la probabilità che la moneta abbia in realtà due “teste”?

Una soluzione:

1. Dipende da molti fattori, essendo un'amico, forse è più naturale porre la probabilità che non ci stia ingannando piuttosto alta...

2. Poniamo $T1$ l'evento “esce testa al primo lancio” e I l'evento “l'amico ci sta ingannando”, per cui $P(I|\Omega) = x$. Abbiamo allora $P(T1|I) = 1$, mentre $P(T1|I^c) = \frac{1}{2}$. Si ha

$$P(T1|\Omega) = P(T1|I)P(I|\Omega) + P(T1|I)P(I^c|\Omega) = x + \frac{1}{2}(1-x) = \frac{x+1}{2}.$$

Per Bayes

$$P(I|T1) = \frac{P(T1|I)P(I|\Omega)}{P(T1|\Omega)} = \frac{1 \cdot x}{\frac{x+1}{2}} = \frac{2x}{x+1}.$$

3. Ripetiamo lo stesso ragionamento con l'evento T_n, per cui $P(T_n|I) = 1$, mentre $P(T_n|I^c) = \frac{1}{2^n}$. Troviamo

$$P(T_n|\Omega) = P(T_n|I)P(I|\Omega) + P(T_n|I)P(I^c|\Omega) = x + \frac{1}{2^n}(1-x).$$

Per Bayes

$$P(I|T_n) = \frac{P(T_n|I)P(I|\Omega)}{P(T_n|\Omega)} = \frac{1 \cdot x}{x + \frac{1}{2^n}(1-x)}.$$

Notiamo che, se $x < 1$, al tendere di n all'infinito troviamo che $P(I|T_n) \to 1$, in linea con l'intuizione.

Problema 27

Si consideri un test per una certa infezione virale (può trattarsi di un virus attack al computer o di un'infezione umana). Il test è affidabile al 95% per i pazienti infetti e al 99% per i pazienti sani. Se la probabilità che un soggetto sia infetto è 4%, qual è il grado di affidabilità del test? In altri termini, se il test da esito positivo, qual è la probabilità che il soggetto sia davvero infetto?

Problema 28

Il 90% dei voli parte in tempo. L'80% dei voli arriva in tempo. Il 75% parte in tempo e arriva in tempo.

1. Attendi un volo che è partito in tempo. Qual è la probabilità che arriverà in tempo?
2. Attendi un volo che è arrivato in tempo. Qual è la probabilità che è partito in tempo?
3. Sono tali eventi, cioè arrivare e partire in tempo, indipendenti?

Problema 29

Un nuovo programma per computers consiste in due moduli. Il primo modulo contiene un errore con probabilità 0.2. Il secondo modulo è più complesso: contiene un errore con probabilità 0.4, indipendentemente dal primo modulo. Un errore nel primo modulo da solo, provoca un crash con probabilità 0.5, mentre il secondo modulo è più rischioso, provoca un crash con probabilità 0.8. Se c'è un errore in entrambi i moduli, avviene un crash con probabilità 0.9. Se il programma si rompe, qual è la probabilità che ci sia errore in entrambi i moduli?

Problema 30

Si eseguono 3 estrazioni senza rimpiazzo da un'urna contenente 2 palline rosse e 3 palline blu. Si considerino gli eventi

$$A_i = \{\text{al termine delle 3 estrazioni nell'urna sono rimaste } i \text{ palline rosse}\};\ i \in \{0,1,2\}$$
$$B = \{\text{la pallina estratta nella terza estrazione è rossa}\}$$

Calcolare per $i = 0, 1, 2$:

1. $P(A_i|\Omega)$;
2. $P(B|\Omega \cap A_i)$;
3. $P(A_i|\Omega \cap B)$.

Una soluzione:

1. L'evento A_i coincide con l'evento "si estraggono $2-i$ palline rosse e $3-(2-i)=1+i$ blu", di cui possiamo calcolare la probabilità usando la legge ipergeometrica.

$$P(A_i|\Omega)=\frac{\binom{2}{2-i}\cdot\binom{3}{1+i}}{\binom{5}{3}}.$$

Esplicitamente si trova

$$P(A_0|\Omega)=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{3}{10}$$
$$P(A_1|\Omega)=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{3}{5}$$
$$P(A_2|\Omega)=\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{10}.$$

2. Avendo già calcolato $P(A_i|\Omega)$ conviene calcolare $P(A_i\cap B|\Omega)$ e poi dividere

$$P(B|\Omega\cap A_i)=\frac{P(A_i\cap B|\Omega)}{P(A_i|\Omega)}.$$

Per calcolare $P(A_i\cap B|\Omega)$ notiamo intanto che possiamo subito dire che $P(A_2\cap B|\Omega)=0$ perché l'evento A_2 coincide con "si estraggono solo palline blu", che è incompatibile con B. Per calcolare $P(A_0\cap B|\Omega)$, possiamo ad esempio enumerare le sequenze di estrazioni che realizzano tale evento: siccome dobbiamo estrarre 2 palline rosse e 1 blu, saranno RBR e BRR (la terza estrazione deve essere rossa). Troviamo quindi

$$P(A_0\cap B|\Omega)=2\frac{2\cdot 1\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{5}.$$

Invece, l'unica sequenza che realizza $A_1\cap B$ è BBR, quindi

$$P(A_1\cap B|\Omega)=\frac{3\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{5}.$$

Concludiamo che

$$P(B|\Omega\cap A_0)=\frac{10}{3\cdot 5}=\frac{2}{3},\quad P(B|\Omega\cap A_1)=\frac{5}{3\cdot 5}=\frac{1}{3},\quad P(B|\Omega\cap A_2)=0.$$

3. Intanto calcoliamo (o ricordiamo) che $P(B|\Omega)=\frac{2}{5}$. Quindi avremo

$$P(A_i|\Omega\cap B)=\frac{P(B\cap A_i|\Omega)}{P(B|\Omega)}$$

da cui troviamo esplicitamente che

$$P(A_0|\Omega\cap B)=\frac{1}{2}=P(A_1|\Omega\cap B)\quad \text{e}\quad P(A_2|\Omega)=0.$$

Problema 31

Un canale di trasmissione in cui è presente del rumore trasmette i simboli 0 e 1 rispettivamente il 60% e il 40% delle volte. Alla ricezione, il simbolo trasmesso può risultare distorto, e ciò accade con una probabilità $p = 1\%$.

1. Calcolare la probabilità di ricevere un simbolo 1.
2. Se si è ricevuto un simbolo 1, quanto vale la probabilità che fosse stato trasmesso uno 0?
3. Supponiamo ora che i simboli 0 e 1 siano trasmessi rispettivamente il $100q\%$ e il $100(1-q)\%$ delle volte e che la probabilità di distorsione del simbolo trasmesso sia ancora $p = 1\%$. Quanto deve valere il parametro $q \in [0,1]$ affinchè il simbolo 1 sia ricevuto con una probabilità non inferiore al 35%?

Una soluzione:

1. Si tratta di trasformare l'informazione "il 40% delle volte viene trasmesso 1" in una probabilità. A questo scopo sia $X \in \{0,1\}$ la variabile aleatoria "simbolo trasmesso" ed R la variabile aleatoria "simbolo ricevuto". Abbiamo quindi

$$P(X = 1|\Omega) = 40\%, \quad P(X = 0|\Omega) = 60\%.$$

Posto D = "simbolo ricevuto è distorto". Dal testo si legge che la probabilità di ricevere un simbolo distorto non dipende dal simbolo inviato (si tratta di una ipotesi di indipendenza). Avremo allora

$$P(D|X = 1 \cap \Omega) = P(D|X = 0 \cap \Omega) = 1\% = P(D|\Omega).$$

e per simmetria dell'indipendenza tra eventi

$$P(X = 1|D \cap \Omega) = P(X = 1|\Omega) = 40\%, \quad P(X = 0|D \cap \Omega) = P(X = 0|\Omega) = 60\%.$$

Infine, abbiamo $R = 1 - X$ se vale D, $R = X$ se vale D^c (suggerimento: disegnare un grafo ad albero corrispondente alla destrizione fatta finora). Calcoliamo

$$\begin{aligned}
P(R = 1|\Omega) &= P(R = 1|\Omega \cap D)P(D|\Omega) + P(R = 1|\Omega \cap D^c)P(D^c|\Omega) \\
&= P(1 - X = 1|\Omega \cap D)P(D|\Omega) + (X = 1|\Omega \cap D^c)P(D^c|\Omega) \\
&= P(X = 0|\Omega)P(D|\Omega) + P(X = 1|\Omega)P(D^c|\Omega) \\
&= \frac{(40 \cdot 1 + 60 \cdot 99)}{10^4} = 0,598
\end{aligned}$$

2. Calcoliamo $P(X = 0|\{R = 1\} \cap \Omega) = P(R = 1|\Omega \cap \{X = 0\})P(X = 0|\Omega)/P(R = 1|\Omega)$. Per calcolare l'unico termine che non conosciamo, ossia $P(R = 1|\Omega \cap \{X = 0\})$, usiamo il sistema di alternative D, D^c e troviamo

$$\begin{aligned}
P(R = 1|\Omega \cap \{X = 0\}) &= P(R = 1|\Omega \cap \{X = 0\} \cap D)P(D|X = 0 \cap \Omega) \\
&\quad + P(R = 1|\Omega \cap \{X = 0\} \cap D^c)P(D^c|X = 0 \cap \Omega) \\
&= P(1 = 1|\Omega \cap \{X = 0\} \cap D)P(D|\Omega) = 1\%.
\end{aligned}$$

concludiamo che

$$P(X = 0|\{R = 1\} \cap \Omega) = \frac{1\% \cdot 60\%}{0,598} = 0,01003344 \approx 1\%.$$

3. Ripetiamo il calcolo del punto 1, stavolta usando il parametro q. Troviamo

$$P(R = 1|\Omega) = \frac{(1-q) \cdot 1 + q \cdot 99)}{10^2}$$

che imponiamo $\geq 35\%$. Concludiamo che deve essere $q \geq \frac{34}{98}$.

Problema 32

Date variabili aleatorie (discrete) reali, X, Y, Z, dire se le seguenti uguaglianze o contenimenti tra eventi sono vere

1. $\{X \leq 2\} \cap \{X^2 > 1\} = \{X < -1 \text{ e } X \in (-1, 2]\}$.
2. $\{0 \leq X + Y \leq 1\} = \{0 \leq X \leq 1\} \cap \{0 \leq Y \leq 1\}$.
3. $\{X \leq Y \leq Z\}^c = \{X > Y\} \cup \{Y > Z\}$.
4. $\{X^2 \leq 2X - 1\} = \{X = 1\}$.

Problema 33

Una compagnia decide di applicare la seguente strategia: al 20% dei clienti che richiede un servizio, viene offerta una promozione. Un gruppo di 10 persone richiede il servizio: qual è la probabilità che almeno 4 di loro riceva la speciale promozione? [0.1209]

Problema 34

Viene lanciato sul mercato un nuovo gioco per computers. Il 60% dei giocatori completa tutti i livelli. IL 30% di questi, comprerà una versione avanzata del gioco. Tra 15 utenti del gioco, qual è la probabilità che almeno due persone compreranno la versione avanzata del gioco? [0.7813]

Una soluzione:

Poniamo $N_1 \in \{0, 1, \ldots, 15\}$ il numero di giocatori che finisce il gioco, che quindi ha legge Binomiale di parametri $B(15, 6/10)$ (rispetto alla informazione iniziale Ω), e $N_2 \in \{0, 1, \ldots, 15\}$ il numero di giocatori che compra la versione avanzata. Sapendo che $N_1 = n$, la legge di N_2 è Binomiale di parametri $B(n, 3/10)$. Perciò, per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, 15\}$, otteniamo

$$\begin{aligned} P(N_2 = k|\Omega) &= \sum_{n=0}^{15} P(N_2 = k|N_1 = n) P(N_1 = n|\Omega) \\ &= \sum_{n=0}^{15} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k} \binom{15}{n} \left(\frac{6}{10}\right)^n \left(\frac{4}{10}\right)^{15-n}. \end{aligned}$$

Per trovare la probabilità richiesta $P(N_2 \geq 2|\Omega)$, conviene calcolare

$$P(N_2 < 2|\Omega) = P(N_2 = 0|\Omega) + P(N_2 = 1|\Omega)$$

usando la formula trovata sopra (se risulta troppo difficile per via analitica, si può utilizzare un calcolatore). Per via analitica, un metodo possibile (utile anche in altri casi) è di ricondursi ad una distribuzione binomiale nota (eventualmente con parametri diversi). Ad esempio,

$$\begin{aligned} P(N_2 = 0|\Omega) &= \sum_{n=0}^{15} \left(\frac{7}{10}\right)^n \binom{15}{n} \left(\frac{6}{10}\right)^n \left(\frac{4}{10}\right)^{15-n} \\ &= \sum_{n=0}^{15} \binom{15}{n} \left(\frac{6 \cdot 7}{10^2}\right)^n \left(\frac{4}{10}\right)^{15-n} \\ &= \left(\frac{4}{10}\right)^{15} \sum_{n=0}^{15} \binom{15}{n} \left(\frac{6 \cdot 7 \cdot 10}{4 \cdot 10^2}\right)^n \\ &= \left(\frac{4}{10}\right)^{15} \sum_{n=0}^{15} \binom{15}{n} \left(\frac{21}{20}\right)^n. \end{aligned}$$

Cerchiamo poi $p \in (0,1)$ in modo tale che

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n = cp^n(1-p)^{15-n} \quad \text{per } n \in \{0,1,\dots,15\},$$

dove c è una opportuna costante. Ponendo $n=0$ troviamo che deve essere $c = (1-p)^{-15}$ e poi che deve valere

$$\frac{21}{20} = \frac{p}{1-p}$$

da cui $p = 21/41$, $c = (41/20)^{15}$. Quindi possiamo riscrivere

$$P(N_2 = 0|\Omega) = \left(\frac{4}{10}\right)^{15}\left(\frac{41}{20}\right)^{15}\sum_{n=0}^{15}\binom{15}{n}p^n(1-p)^n = \left(\frac{4\cdot 41}{10\cdot 20}\right)^{15} = \left(\frac{82}{100}\right)^{15}$$

In modo analogo troviamo che

$$\begin{aligned}
P(N_2 = 1|\Omega) &= \sum_{n=0}^{15} n\frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\binom{15}{n}\left(\frac{6}{10}\right)^n\left(\frac{4}{10}\right)^{15-n} = \sum_{n=0}^{15}\binom{15}{n}\left(\frac{6\cdot 7}{10^2}\right)^n\left(\frac{4}{10}\right)^{15-n} \\
&= \left(\frac{4}{10}\right)^{15}\frac{3}{7}\sum_{n=0}^{15} n\binom{15}{n}\left(\frac{6\cdot 7\cdot 10}{4\cdot 10^2}\right)^n = \frac{3}{7}\cdot\left(\frac{82}{100}\right)^{15}\sum_{n=0}^{15} n\binom{15}{n}p^n(1-p)^{15-n} \\
&= \frac{3}{7}\cdot\left(\frac{82}{100}\right)^{15} 15\cdot\frac{21}{41} = \left(\frac{82}{100}\right)^{15}\cdot\frac{15\cdot 9}{41}.
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula per il valore atteso della binomiale. In conclusione, troviamo

$$P(N_2 < 2|\Omega) = \left(\frac{82}{100}\right)^{15}\left(1 + \frac{15\cdot 9}{41}\right) \approx 0,2187$$

e quindi $P(N_2 \geq 2|\Omega) \approx 1 - 0,2187 = 0.7813$.

Problema 35

In un dato giorno di vacanza, due amici, Andrea e Carlo, vanno a pesca. La probabilità che Andrea prenda almeno un pesce è p, mentre la stessa probabilità per Carlo è q. *(provate a giustificare se sia lecito assumere che gli eventi relativi a Carlo e Andrea sono indipendenti.)* Calcolare la probabilità che

1. entrambi tornino a casa a mani vuote;
2. solo Carlo torni a casa a mani vuote;
3. Sapendo che uno solo tra loro è riuscito a prendere qualcosa, quanto vale la probabilità che si tratti di Andrea?

Una soluzione:

Poniamo A = "Andrea pesca qualcosa", C = "Carlo pesca qualcosa". Supponiamo quindi che $P(A|\Omega) = p$, $P(C|\Omega) = q$ e che A e C siano indipendenti (rispetto all'informazione Ω data sopra). Ricordiamo anche (esercizio) che se A e C sono indipendenti, lo sono anche A e C^c e pure A^c e C^c.

1. Per indipendenza $P(A^c \cap C^c|\Omega) = P(A^c|C^c \cap \Omega)P(C^c|\Omega) = (1-p)(1-q)$.
2. Similmente $P(A \cap C^c|\Omega) = p(1-q)$.
3. Calcoliamo, usando la definizione di probabilità condizionata:

$$\begin{aligned} P(A|(A \cap C^c) \cup (A^c \cap C)) &= \frac{P(((A \cap C^c) \cup (A^c \cap C)) \cap A|\Omega)}{P((A \cap C^c) \cup (A^c \cap C)|\Omega)} \\ &= \frac{P(A \cap C^c|\Omega)}{P(A \cap C^c|\Omega) + P(A^c \cap C|\Omega)} \\ &= \frac{p(1-q)}{p(1-q) + q(1-p)} \end{aligned}$$

Problema 36

Andrea deve andare a lezione tutte le mattine all'Università, ma talvolta arriva in ritardo. La probabilità che questo accada (cioè la probabilità che in una generica mattina Andrea sia in ritardo) è $p = 0.2$. Si suppone che quel che accade in una data mattina sia indipendente da ciò che accade nelle altre. Vogliamo studiare la situazione in una data settimana (in cui i giorni di lezione sono 5, dal lunedì al venerdì).

1. Calcolare la probabilità che Andrea arrivi a lezione in orario almeno 3 volte nella settimana sotto indagine.
2. Sapendo che Andrea è arrivato in tempo almeno 3 volte, quanto vale la probabilità che lunedì fosse in ritardo?
3. Sapendo che lunedì Andrea é arrivato in tempo e martedì in ritardo, quanto vale la probabilità che i giorni di ritardo siano stati almeno 3?

(Binomiale)

Una soluzione:

Posta $X \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui arriva in orario durante la settimana, le ipotesi di indipendenza ci permettono di affermare che X ha legge $\mathrm{Bin}(5, 0, 8)$ (rispetto all'informazione iniziale Ω).

1. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} P(X \geq 3|\Omega) &= \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} (0,8)^k \cdot (0,2)^{5-k} \\ &= 10 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 + 5 \cdot (0,8)^4 \cdot (0,2) + (0,8)^5 = 0.94208. \end{aligned}$$

2. Posto $L =$ "lunedì arriva in ritardo", dobbiamo calcolare

$$P(L|X \geq 3) = \frac{P(X \geq 3|L)P(L|\Omega)}{P(X \geq 3|\Omega)}.$$

Ora, rispetto all'informazione L la variabile X conta il numero di volte in cui arriva in orario durante i 4 giorni rimanenti (perché sappiamo del ritardo lunedì, ma ciò che accade negli altri giorni è indipendente da ciò che accade lunedì). Pertanto possiamo affermare che X ha legge $\mathrm{Bin}(4, 0, 8)$, rispetto all'informazione L e quindi

$$P(X \geq 3|L) = \sum_{k=3}^{4} \binom{4}{k} (0,8)^k \cdot (0,2)^{4-k} = 4 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2) + (0,8)^4 = 0,8192.$$

D'altra parte abbiamo $P(L|\Omega) = 0,2$ e concludiamo che

$$\begin{aligned} P(L|X \geq 3) &= \frac{4 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 + (0,8)^4 \cdot 0,2}{10 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 + 5 \cdot (0,8)^4 \cdot (0,2) + (0,8)^5} \\ &= 0,8192 \cdot 0,2/0,94208 = 0,173913. \end{aligned}$$

3. Posto M = "martedì è arrivato in orario", ragioniamo come al punto sopra: rispetto all'informazione $L \cap M$ abbiamo che $X - 1$ (bisogna sottrarre il martedì) conta il numero di volte in cui arriva in orario durante i 3 giorni rimanenti, e quindi ha legge $\mathrm{Bin}(3, 0, 8)$. Ne segue che l'evento "è arrivato in ritardo almeno 3 giorni" $= \{5 - X \geq 3\} = \{X - 1 \leq 1\}$, e quindi

$$\begin{aligned} P(5 - X \geq 3|L \cap M) = P((X-1) \leq 1|L \cap M) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{3}{k} (0,8)^k \cdot (0,2)^{3-k} \\ &= (0,2)^3 + 3 \cdot (0,8) \cdot (0,2)^2 = 0.104. \end{aligned}$$

Problema 37

Da un'urna contenente 5 palline rosse, 4 palline verdi e 6 palline gialle vengono eseguite 5 estrazioni senza reimbussolamento. Sia X il numero di palline verdi estratte. Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $Var(X)$, $\mathbb{E}[(X+1)^2]$. Supponiamo di procedere ad estrazioni con reimbussolamento dalla stessa urna, e denotiamo con T il numero di estrazioni necessarie all'estrazione di una pallina verde. Calcolare $\mathbb{E}[T]$, $Var(T)$.

Problema 38

Clienti di un ISP (internet service provider) iniziano un nuovo account con una media di 10 accounts per giorno.

1. Qual è la probabilità che più di 8 accounts vengano iniziati in un giorno?
2. Qual è la probabilità che più di 16 accounts vengano iniziati in due giorni?

Una soluzione:

Possiamo immaginare che ci sia un gran numero n di potenziali clienti di cui però la probabilità che un singolo attivi in un dato giorno un account è molto bassa (p) in modo tale che $np \approx 10$. Quindi siamo in una situazione in cui possiamo supporre che il numero di accounts attivati in un giorno X_1 sia una variabile aleatoria con legge Poisson di parametro 10. Similmente, il numero di accounts in due giorni sarà X_2 una variabile con legge Poisson di parametro 20. Perciò rispondiamo ai punti 1 e 2 nel seguente modo:

$$P(X_1 > 8|\Omega) = 1 - P(X_1 \leq 8|\Omega) = 1 - \sum_{k=0}^{8} e^{-10} \frac{10^k}{k!} \approx 1 - 0,333 = 0,667.$$

$$P(X_2 > 16|\Omega) = 1 - P(X_2 \leq 16|\Omega) = 1 - \sum_{k=0}^{16} e^{-20} \frac{20^k}{k!} \approx 1 - 0,221 = 0,779.$$

Problema 39

Recentemente nella rete delle farmacie italiane è stata introdotta una novità a scopo promozionale: è possibile che, all'atto del pagamento, il cliente riceva (in modo casuale) uno scontrino particolare, che gli da accesso ad una lotteria a premi. Supponiamo che sia p la probabilità che un cliente riceva lo scontrino partecipante alla lotteria e che sia q la probabilità che lo scontrino medesimo sia vincente. Supponiamo inoltre che, per clienti diversi, tali eventualità siano tra loro indipendenti.

1. Supponiamo che in un dato giorno nella farmacia F si presentino 20 clienti, e consideriamo le variabili aleatorie

$$X = \{\text{numero di clienti che riceve uno scontrino che da accesso alla lotteria}\};$$

$$Y = \{\text{il numero di clienti che riceve uno scontrino vincente}\}.$$

   Calcolare la legge di X e la legge di Y.

2. Supponiamo che ora che il numero di clienti che si presenta nella farmacia F nel giorno considerato sia una v.a. N avente legge di Poisson di parametro $\lambda > 0$ (noto). Per ogni $h \in \mathbb{N}$ calcolare $P(X = h \,\mathrm{e}\, N = 20|\Omega)$ e $P(Y = h \,\mathrm{e}\, N = 20|\Omega)$ (dove Ω è l'informazione sopra).

Una soluzione:

1. Si tratta di due variabili aleatorie che contano il numero di successi in 20 tentativi, dove nel primo caso la probabilità di successo è p, mentre nel secondo è pq, perché si deve realizzare l'intersezione tra i due eventi indipendenti "accesso alla lotteria" e "biglietto vincente". Concludiamo che X ha legge $\mathrm{Bin}(20, p)$, mentre Y ha legge $\mathrm{Bin}(20, pq)$ (rispetto alla informazione data).

2. Abbiamo visto sopra che X, sapendo $N = 20$ è una variabile aleatoria $\mathrm{Bin}(20, p)$, mentre Y ha legge $\mathrm{Bin}(20, pq)$. Perciò usiamo la regola del prodotto per calcolare

$$\begin{aligned} P(X = h \,\mathrm{e}\, N = 20|\Omega) &= P(X = h| \{N = 20\} \cap \Omega)P(N = 20|\Omega) \\ &= \binom{20}{h} p^h (1-p)^{20-h} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{20}}{20!}. \end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned} P(Y = h \,\mathrm{e}\, N = 20|\Omega) &= P(Y = h| \{N = 20\} \cap \Omega)P(N = 20|\Omega) \\ &= \binom{20}{h} (pq)^h (1-pq)^{20-h} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{20}}{20!}. \end{aligned}$$

Problema 40

Un'urna contiene N palline, di cui R rosse e B blu ($R + B = N$). Si effettuano n estrazioni con reimmisione.

1. Qual è la probabilità che tutte le palline estratte siano rosse?
2. Qual'è la probabibilità che la prima volta che vediamo una pallina *rossa*[1] sia esattamente alla estrazione k ($1 \le k \le n$)? (*ammettendo $n = \infty$, otteniamo la distribuzione geometrica di parametro $p = R/N$*)

[1] c'era scritto blu in una versione precedente, in quel caso erano sbagliati i ruoli di R e B

3. Qual è la probabilità che almeno due tra le palline estratte siano blu?

Una soluzione:

1. Essendo estrazioni con rimpiazzo gli eventi relativi ad estrazioni diverse sono indipendenti (rispetto all'informazione Ω precedente ad ogni estrazione). Essendo la probabilità di trovare una pallina rossa R/N, avremo

$$P(\text{“tutte rosse in } n \text{ estrazioni”}|\Omega) = P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n|\Omega) = (\frac{R}{N})^n.$$

2. Possiamo introdurre la variabile aleatoria $T \in \{1, 2, \ldots, n\} \cup \{\infty\}$ che indica la prima estrazione in cui troviamo una pallina rossa e ∞ se non accade mai di estrarre una rossa. Di conseguenza abbiamo che $\{T = k\}$ per $k \in \{1, \ldots, n\}$ coincide con l'evento

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap R_k,$$

e quindi per indipendenza (oppure il risultato generale sull'estrazione di una specifica sequenza) troviamo

$$P(T = k|\Omega) = \left(\frac{B}{N}\right)^{k-1} \frac{R}{N} = (1-p)^{k-1}\, p,$$

dove $p = \frac{R}{N}$ è la probabilità di estrarre una pallina rossa.

3. Poniamo $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$ la variabile che conta il numero di palline blu estratte. L'evento che ci interessa è $\{X \geq 2\}$. Essendo X una variabile con legge $\mathrm{Bin}(n, \frac{B}{N})$, troviamo

$$\begin{aligned} P(X \geq 2|\Omega) &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{B}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{R}{N}\right)^{n-k} \\ &= 1 - P(X < 2|\Omega) = 1 - \left(\frac{R}{N}\right)^n - n \cdot \frac{B}{N} \cdot \left(\frac{R}{N}\right)^n \end{aligned}$$

Problema 41

Un'urna contiene N palline, di cui R rosse e B blu ($R + B = N$). Si effettuano n estrazioni senza reimmisione.

1. Qual è la probabilità che tutte le palline estratte siano rosse?
2. Qual'è la probabilità che la prima volta che vediamo una pallina *rossa* sia esattamente alla estrazione k ($1 \leq k \leq n$)?

Una soluzione:

Osserviamo che necessariamente deve essere $n \leq N$.

1. In tal caso deve essere pure $n \leq R$, altrimenti la probabilità è 0. Si tratta allora di calcolare la probabilità di estrarre la specifica sequenza costituita da n rosse consecutive.

Troviamo

$$
\begin{aligned}
P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n | I(N,R,B)) &= \frac{R \cdot (R-1) \cdot \ldots \cdot (R-n+1)}{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)} \\
&= \frac{\binom{R}{n}}{\binom{N}{n}},
\end{aligned}
$$

dove l'ultima espressione si ricava anche come caso particolare della legge ipergeometrica.

2. Come nel problema precedente possiamo introdurre $T \in \{1, \ldots, n\} \cup \infty$. Notiamo che se $k > B+1$, necessariamente dobbiamo aver estratto almeno una pallina rossa prima dell'estrazione k, quindi $P(T = k|\Omega) = 0$ in tal caso. Altrimenti, troviamo

$$
\begin{aligned}
P(T = k | I(N,R,B)) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap R_k | I(N,R,B)) \\
&= \frac{B \cdot (B-1) \cdot \ldots \cdot (B-(k-1)+1) \cdot R}{N(N-1)\ldots(N-k+1)}.
\end{aligned}
$$

Problema 42

Calcolare (o trovare in letteratura) media (valore atteso) e varianza di una variabile aleatoria X, nel caso in cui

1. X abbia legge Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$,
2. X abbia legge binomiale di parametri $n \geq 1$, $p \in [0,1]$,
3. X abbia legge uniforme discreta sui valori $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 1$.
4. X abbia legge Poisson di parametro $\lambda > 0$,
5. X abbia legge geometrica di parametro $p \in (0,1]$.

Problema 43

Esprimere valore atteso, varianza e covarianza di variabili indicatrici X, Y, in termini dei due eventi $A = \{X = 1\}$, $B = \{Y = 1\}$.

Una soluzione:

Poiché X e Y sono Bernoulli di parametri rispettivamente $P(A|\Omega)$, $P(B|\Omega)$, troviamo

$$
\mathbb{E}[X|\Omega] = P(A|\Omega) \quad \text{e} \quad \operatorname{Var}(X|\Omega) = P(A|\Omega)(1 - P(A|\Omega)),
$$

e similmente per Y. Per la covarianza, ricordiamo che

$$
\operatorname{Cov}(X, Y|\Omega) = \mathbb{E}[XY|\Omega] - \mathbb{E}[X|\Omega]\,\mathbb{E}[Y|\Omega] = P(A \cap B|\Omega) - P(A|\Omega)P(B|\Omega).
$$

Notiamo che questa ultima espressione ci permette di affermare che X e Y Bernoulli sono indipendenti se e solo se sono non-correlate.

Problema 44

Un'urna contiene N palline, di cui R rosse e B blu ($R + B = N$). Si effettuano n estrazioni senza reimmisione. Qual è il valore atteso della variabile "numero di palline rosse estratte"? Come cambia la risposta se le estrazioni sono senza reimmissione?

Una soluzione:

Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, introduciamo la variabile aleatoria $X_i \in \{0, 1\}$ indicatrice dell'estrazione di una pallina rossa all'estrazione i. Si ha che il numero di palline rosse estratte è

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Ciascuna variabile X_i ha legge Bernoulli di parametro R/N (sia nel caso con rimpiazzo che nel caso senza rimpiazzo). Di conseguenza in entrambi i casi

$$\mathbb{E}[X|\Omega] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i|\Omega] = n \cdot \frac{R}{N}.$$

La differenza tra i due casi (senza o con rimpiazzo) si vedrebbe invece calcolando la varianza di X.

Problema 45

Una password che non conosciamo è composta di 4 cifre (da 0 a 9 ciascuna), e quindi si rappresenta come un numero tra 0 e 9999. Supponiamo di tentarle tutte in sequenza crescente (partendo da $0 = 0000$ fino a 9999) e poniamo $X = i$ se indoviniamo la password al tentativo i-esimo ($i \in \{1, \ldots, 10000\}$). Qual è il valore atteso di X? Supponiamo di tentare in sequenza inversa, partendo da 9999 e arrivando a 0000, qual è il valore atteso del numero del tentativo vincente?

Problema 46

Una password che non conosciamo è composta di 4 cifre (da 0 a 9) ciascuna, e quindi si rappresenta come un numero tra 0 e 9999. Il sistema di gestione delle password però è costruito in modo tale che, se forniamo una password di 1, 2 o 3 cifre, ma corrette, ci fornisce la risposta "password incompleta" (ad esempio, se la vera password è 1234 e digitiamo 1, 12 o 123 otteniamo la risposta "password incompleta"). Negli altri casi, eccetto quello in cui troviamo la password, la risposta è "password errata". Sapreste trovare una strategia per cui il valore atteso del numero dei tentativi per ottenere la password corretta è molto più basso di quello del problema precedente?

Problema 47

In un concorso vengono assegnate le idoneità per un dato servizio. Ogni partecipante ha probabilità 1/3 di ottenere l'idoneità (indipendentemente dagli altri). Al termine del concorso a 10 fra gli idonei viene assegnato un posto di lavoro (e se gli idonei sono meno di 10 vengono assegnati tanti posto di lavoro quanti sono gli idonei). Supponiamo che al concorso partecipino 15 persone, sia X il numero dei partecipanti che ottengono l'idoneità e Y il numero di partecipanti che ottengono il posto di lavoro.

1. Determinare la legge di X, calcolarne valore atteso e varianza.
2. Determinare la legge di Y, calcolarne valore atteso e varianza.
3. Sapendo che $Y = 10$, come cambia la legge di X?

Problema 48

Un computer ha due processori e il sistema operativo li gestisce in modo diverso: se una istruzione deve essere eseguita dal primo processore, questa impiega un tempo (in una certa unità di misura) distribuito secondo una variabile geometrica di parametro $p_1 = 1/2$; se invece deve essere eseguita dal secondo, impiega un tempo con legge geometrica di parametro $p_2 = 1/4$. Supponiamo che il sistema mandi, in media, due terzi delle istruzioni al primo processore, ed un terzo al secondo processore.

1. Qual è il valore atteso del tempo impiegato per eseguire una istruzione? Qual è la sua varianza?
2. Qual è la legge del tempo impiegato per eseguire una istruzione?
3. Sapendo che il tempo impiegato per eseguire una certa istruzione è stato k (unità di tempo), qual è la probabilità che il comando sia stato eseguito dal processore 2?

Problema 49

Un'urna contiene 4 palline, di cui X bianche e le rimanenti $4-X$ nere, dove $X \in \{0, 1, \dots, 4\}$ è una variabile aleatoria. *(Sulla base di questa informazione, attribuiamo probabilità uniforme alle alternative $\{X = i\}$, $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$.)* Si effettuano 2 estrazioni con reimmissione, e poniamo Y il numero di palline bianche osservate.

1. Calcolare il valore atteso di X e la sua varianza.
2. Calcolare il valore atteso di Y e la sua varianza.
3. Sapendo che $Y = 2$, calcolare il valore atteso di X e la sua varianza.

Problema 50

Da un'urna A che contiene 7 palline bianche e 3 palline nere si estraggono 5 palline senza rimpiazzo; sia X il numero di palline bianche estratte da A. Successivamente, in una seconda urna B, inizialmente vuota, si mettono X palline bianche e $5-X$ palline nere; infine si esegue da B un'estrazione.

1. Calcolare la densità di X e il suo valore atteso.
2. Calcolare la probabilità di estrarre da B una pallina bianca, sapendo che $X = 3$.
3. Calcolare la densità di X sapendo che da B si è estratta una pallina bianca.

Una soluzione:

1. La densità di X si calcola usando la distribuzione ipergeometrica, infatti per trovare $P(X = k|\Omega)$ si tratta di calcolare la probabilità di estrarre esattamente k palline bianche in 5 estrazioni da un'urna senza rimpiazzo il cui contenuto è noto. Troviamo, per $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$,

$$P(X = k|\Omega) = \frac{\binom{7}{k}\binom{3}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

   In particolare, notiamo che $P(X \in \{0, 1\} |\Omega) = 0$, mentre

$$P(X = 2|\Omega) = P(X = 5|\Omega) = \frac{1}{12}, \quad P(X = 3|\Omega) = P(X = 4|\Omega) = \frac{5}{12}.$$

   Da cui

$$\mathbb{E}[X|\Omega] = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{12} = 5 \cdot \frac{7}{10}.$$

   In effetti si può dimostrare che il valore atteso di una ipergeometrica è uguale a quello di una corrispondente binomiale (cioè come se fossero estrazioni con rimpiazzo). Attenzione: questo non vale per la varianza!

2. Sapendo che $X = 3$, l'urna B contiene esattamente 3 palline bianche e 2 nere, quindi non avendo ulteriore informazione la probabilità richiesta è $3/5$.

3. Posto $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, dobbiamo calcolare

$$P(X = k|\text{estratta da B è bianca}) = \frac{P(\text{estratta da B è bianca}|X = k)P(X = k|\Omega)}{P(\text{estratta da B è bianca}|\Omega)},$$

avendo usato la formula di Bayes. Poiché

$$P(\text{estratta da B è bianca}|X = k) = \frac{k}{5}$$

e abbiamo già trovato $P(X = k|\Omega)$, ci manca solamente

$$P(\text{estratta da B è bianca}|\Omega) = \sum_{h=0}^{5} P(\text{estratta da B è bianca}|X = h)P(X = h|\Omega)$$

$$= \sum_{h=0}^{5} \frac{h}{5} P(X = h|\Omega) = \frac{1}{5}\sum_{h=0}^{5} hP(X = h|\Omega) = \frac{1}{5}\mathbb{E}\left[X|\Omega\right] = \frac{7}{10}.$$

In conclusione troviamo i valori $P(X \in \{0,1\}\,|\text{estratta da B è bianca}) = 0$,

$$P(X = 2|\text{estratta da B è bianca}) = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{12}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{21},$$

$$P(X = 3|\text{estratta da B è bianca}) = \frac{\frac{3}{5}\frac{5}{12}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{14},$$

$$P(X = 4|\text{estratta da B è bianca}) = \frac{\frac{4}{5}\frac{5}{12}}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{21},$$

$$P(X = 5|\text{estratta da B è bianca}) = \frac{\frac{5}{5}\frac{1}{12}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{42}.$$

Problema 51

Un social network comprende $n \geq 100$ utenti e ciascun utente può essere collegato (amico) o meno a ciascun altro. La probabilità che due utenti siano collegati tra loro è $20/n$ (*assumiamo infine che il comportamento di ogni coppia di utenti sia indipendente da tutte le altre*). Sia X il numero di amicizie di un utente (preso a caso tra gli n utenti).

1. Calcolare la legge, la media (valore atteso) e la varianza di X.
2. Nel limite $n \to +\infty$ (approssimazione Poisson) calcolare la probabilità che $X = 15$.

Una soluzione:

1. Preso un utente a caso, il numero di amicizie X è una variabile aleatoria $\mathrm{Bin}(n-1, 20/n)$ (bisogna rimuovere l'utente stesso). Perciò si ha $\mathbb{E}\left[X|\Omega\right] = (n-1)\cdot 20/n = 20\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ e $\mathrm{Var}\left(X|\Omega\right) = 20\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)(1-20/n)$.

2. Nell'approssimazione richiesta, abbiamo che X è una variabile Posson di parametro $\lambda = \lim_{n\to\infty} 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 20$. Di conseguenza

$$P(X = 15|\Omega) = e^{-20}\frac{20^{15}}{15!} \approx 5\%.$$

Problema 52

Un social network comprende n utenti di cui metà sono maschi e metà femmine (n è molto grande). Ciascun utente può essere collegato (amico) o meno a ciascun altro, indipendentemente dagli altri. Se un utente è maschio, il numero medio di amicizie è 30, mentre se un utente è femmina tale numero sale a 40. Posto X il numero di amicizie di un utente preso a caso,

1. calcolare densità discreta, valore atteso e varianza di X (rispetto all'informazione iniziale descritta sopra), nell'approssimazione Poisson.
2. Sapendo che $X = 35$, qual è la probabilità che l'utente sia maschio?

Una soluzione:

Introduciamo i due eventi M =“l'utente è maschio” e F =“l'utente è femmina”. Nell'approssimazione Poisson, abbiamo che, sapendo M, X è Poisson di parametro 30; sapendo F, X è Poisson di parametro 40. Inoltre abbiamo $P(M|\Omega) = P(F|\Omega) = \frac{1}{2}$.

1. Per calcolare la densità discreta di X rispetto, scriviamo prima

$$P(X = k|M) = e^{-30}\frac{30^k}{k!} \quad \text{e} \quad P(X = k|M) = e^{-40}\frac{40^k}{k!},$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} P(X = k|\Omega) &= P(X = k|M)P(M|\Omega) + P(X = k|F)P(F|\Omega) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-30}\frac{30^k}{k!} + e^{-40}\frac{40^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

Per calcolare il valore atteso, decomponiamo secondo il sistema di alternative M, F,

$$\mathbb{E}\left[X|\Omega\right] = \mathbb{E}\left[X|M\right] P(M|\Omega) + \mathbb{E}\left[X|F\right] P(F|\Omega) = \frac{1}{2}(30 + 40) = 35.$$

Per la varianza, calcoliamo prima il valore atteso di X^2,

$$\mathbb{E}\left[X^2|\Omega\right] = \mathbb{E}\left[X^2|M\right] P(M|\Omega) + \mathbb{E}\left[X^2|F\right] P(F|\Omega) = \frac{1}{2}\left(30 + 30^2 + 40 + 40^2\right) = 1285,$$

avendo usato l'identità generale

$$\mathrm{Var}\left(X|I\right) + \mathbb{E}\left[X|I\right]^2 = \mathbb{E}\left[X^2|I\right]$$

nel caso delle due Poisson.

2. Per Bayes

$$
\begin{aligned}
P(M|X=35) &= \frac{P(X=35|M)P(M|\Omega)}{P(X=35)} \\
&= \frac{e^{-30}\frac{30^{35}}{35!}\cdot\frac{1}{2}}{e^{-30}\frac{30^{35}}{35!}\cdot\frac{1}{2}+e^{-40}\frac{40^{35}}{35!}\cdot\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-10}\left(\frac{4}{3}\right)^{35}} \approx 48\%
\end{aligned}
$$

Problema 53

Siano $X \in E$, $Y \in E'$ variabili aleatorie discrete a valori in $\mathbb{R}$.

1. Mostrare che vale la formula di *convoluzione*
$$P(X+Y=k|I) = \sum_{e\in E} P(Y=k-e|I\cap\{X=e\})P(X=e|I).$$
2. Calcolare la legge della somma degli esiti di due lanci di dadi a sei facce.
3. Se X ha legge $\mathrm{Bin}(n,p)$, Y ha legge $\mathrm{Bin}(m,p)$ e sono indipendenti, allora $X+Y$ ha legge $\mathrm{Bin}(n+m,p)$.
4. Se X ha legge $\mathrm{Poisson}(\lambda)$, Y ha legge $\mathrm{Poisson}(\lambda')$ e sono indipendenti, allora $X+Y$ ha legge $\mathrm{Poisson}(\lambda+\lambda')$.

Problema 54

Si lancia 5 volte un dado simmetrico (a sei facce) e sia X il numero di volte in cui esce la faccia numero 4.

1. Determinare l'insieme dei valori possibili e la distribuzione di probabilità di X.
2. Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

[X ha legge $\mathrm{Bin}(5,1/6)$, $\mathbb{E}[X|\Omega]=5/6$, $\mathrm{Var}(X|\Omega)=(5/6)^2$.]

Problema 55

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi ed esegue con esso 5 lanci, comunicandoci alla fine il numero di volte che la cifra 3 appare come risultato. Poniamo X la variabile che rappresenta tale numero.

1. Qual è la legge di X? calcolarne il valore atteso e la varianza. [$X \in \{0,\dots,5\}$. $P(X=k|\Omega)=\frac{1}{2}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^{5-k}+\frac{1}{2}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$, $\mathbb{E}[X|\Omega]=\frac{1}{2}\cdot 5\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)$.]
2. Dopo 5 lanci, ci comunica che la cifra 3 è apparsa 3 volte. Qual è la probabilità che il dado scelto sia quello a 4 facce? [$P($ "dado a 4 scelto"$|\Omega\cap\{X=3\})=3^2/(4^5(3^2/4^5+5^2/6^5)\sim 0.73$]
3. Dopo 5 lanci, ci comunica che la cifra 3 è apparsa 3 volte. Qual è la probabilità che lanciando ulteriormente il dado scelto il risultato sia 3? [$\frac{1}{4}\cdot 3^2/(4^5(3^2/4^5+5^2/6^5)+\frac{1}{6}\cdot(1-3^2/(4^5(3^2/4^5+5^2/6^5))\sim 0.23$]

Problema 56

Un'urna contiene 5 palline bianche e 1 nera. Estraiamo ripetutamente due palline, le osserviamo, e poi le rimettiamo nell'urna, finché non vediamo due palline bianche. Qual è la probabilità di fare esattamente n estrazioni? [Legge geometrica di parametro $p=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{3}$]

Problema 57

Davanti a noi abbiamo due urne, una contenente 5 palline bianche e 2 nere, mentre un'altra contenente 3 palline bianche e una nera. Scegliamo a caso un'urna e da essa estraiamo ripetutamente due palline, le osserviamo, e poi le rimettiamo nell'urna, finché non vediamo due palline bianche. Contemporaneamente (ossia in corrispondenza di ogni nostra estrazione) un nostro amico estrae una pallina alla volta dall'altra urna, finché non vede una pallina nera.

1. Sapendo di aver scelto l'urna con 7 palline, qual è la probabilità che saremo i primi ad interrompere le estrazioni?
2. È più probabile che saremo noi ad interrompere le estrazioni per primi o il nostro amico? Sapete quantificare la vostra risposta?
3. Sapendo che abbiamo terminato per primi le estrazioni, qual è la probabilità di aver scelto l'urna con 7 palline?

Una soluzione:

Osserviamo che potrebbe accadere che il "gioco" potrebbe terminare in parità con il nostro amico, ossia allo stesso tentativo noi estraiamo per la prima volta due palline bianche e il nostro amico una pallina nera.

1. Posto A l'evento in cui abbiamo scelto l'urna con 7 palline (e quindi il nostro amico l'urna con 4 palline), per cui la probabilità (sapendo A) che noi estraiamo due bianche è $p_1 = (5 \cdot 4)/(7 \cdot 6) = \frac{10}{21}$ e che l'amico estragga una nera è $p_2 = 1/4$. Rispetto all'informazione A, stiamo estraendo da due urne diverse, di cui conosciamo perfettamente il contenuto e quindi possiamo ritenere le variaibili relative alle due urne indipendenti tra loro. Perciò la probabilità che un dato "turno" (ossia le due estrazioni nostre e quella dell'amico) si risolva in nulla di fatto è

$$(1 - p_1)(1 - p_2)$$

mentre la probabilità che in dato "turno" siamo noi ad estrarre le due bianche e il nostro amico una nera è

$$p_1(1 - p_2).$$

Dato $k \geq 1$ poniamo V_k l'evento "vinciamo al tentativo k". Ragionando come nel caso della legge geometrica, ossia in termini di estrazioni, significa che le prime $k-1$ estrazioni sono state "fallimenti" per tutti e due i giocatori, e al tentativo k abbiamo estratto due bianche mentre il nostro amico una pallina bianca (altrimenti sarebbe "parità"). Per indipendenza tra le varie estrazioni otteniamo che

$$P(V_k|A) = (1 - p_1)^{k-1}(1 - p_2)^{k-1} p_1(1 - p_2) = (1 - (p_1 + p_2 - p_1p_2))^{k-1} p_1(1 - p_2).$$

Per ottenere la probabilità di "vittoria" dobbiamo sommare su tutti i possibili $k \geq 1$. Possiamo ricavare il risultato riconoscendo i termini che definiscono una legge geometrica, di parametro $p := p_1 + p_2 - p_1p_2$:

$$\begin{aligned}
P(\text{“vittoria” } |A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(V_k|A) \\
&= \sum_{k=1} \infty \, (1 - (p_1 + p_2 - p_1p_2))^{k-1} p_1(1 - p_2) \\
&= \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1p_2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p \\
&= \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1p_2} \approx 0,588.
\end{aligned}$$

2. Ragiorando similmente, sapendo però A^c troviamo (con le stesse notazioni) $p_1 = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{3}{5}$, $p_2 = \frac{2}{7}$. Siccome in entrambi i casi le nostre probabilità di successo sono maggiori di quelle del nostro amico, l'intuizione ci spinge ad affermare che siamo favoriti in questo gioco. Per rendere preciso il risultati, calcoliamo intanto come al punto precedente

$$P(\text{“vittoria”}|A^c) = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2} = 0,6.$$

Di conseguenza

$$P(\text{“vittoria”}|\Omega) \approx \frac{1}{2}(0,588+0,6) = 0,594.$$

3. Usiamo Bayes $P(A|\text{“vittoria”}) = P(\text{“vittoria”}|A) \cdot P(A|\Omega)/P(\text{“vittoria”}|\Omega)$, da cui

$$P(A|\text{“vittoria”}) \approx 0,588 \cdot \frac{1}{2}/0,594 = 0,494.$$

Anche se di poco, troviamo che è più probabile che abbiamo scelto l'urna con 4 palline.

Problema 58

Due sorelle, Anna e Barbara giocano al seguente gioco: ciarcuna pesca una carta dallo stesso mazzo di 40 carte (prima Anna e poi Barbara), le due carte vengono confrontate, e vince la sorella che ha pescato la carta con numero più grande. In caso di parità le due carte vengono rimesse nel mazzo, che viene mescolato, e il gioco si ripete (si compie un altro turno di gioco).

- Qual è la probabilità che Anna vinca al primo turno?
- Qual è la probabilità che il gioco duri più di 5 turni? Qual è la legge del numero di turni effettuati?
- Sapendo che il gioco è durato meno di 10 turni, qual è è la probabilità che il gioco duri più di 5 turni?

Una soluzione:

1. Anna vince al primo turno se pesca una carta con un numero più grande di Barbara. Sia $A \in \{1,\dots,10\}$ il numero della carta pescata da Anna, e $B \in \{1,\dots,10\}$ quello della carta pescata da Barbara. La variabile A ha legge uniforme, mentre, sapendo che $A = k$, la legge di B si trova facilmente considerando i casi favorevoli (3 o 4) sui casi possibili (39)

$$P(B=\ell|A=k) = \begin{cases} \frac{4}{39} & \text{se } \ell \neq k, \\ \frac{3}{39} & \text{se } \ell = k. \end{cases}$$

In particolare, abbiamo $P(B < k|A=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} P(B=\ell|A=k) = (k-1)\cdot\frac{4}{39}$. Perciò si trova

$$\begin{aligned} P(A > B|\Omega) &= \sum_{k=1}^{10} P(k > B|A=k)P(A=k|\Omega) \\ &= \sum_{k=1}^{10} P(k>B|A=k)\frac{1}{1}0 = \frac{4}{39}\sum_{k=1}^{10}\frac{(k-1)}{10} \\ &= \frac{4}{39}\left(\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{10} - 1\right) \\ &= \frac{4}{39}\cdot 4,5 \approx 0,461. \end{aligned}$$

2. Calcoliamo prima la probabilità che un turno finisca in "parità". Si tratta di calcolare

$$P(A = B|\Omega) = \sum_{k=1}^{10} P(B = k|A = k)P(A = k|\Omega)$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{3}{39}\frac{1}{10} = \frac{1}{13}.$$

Affinché il gioco duri più di 5 turni, tali turni devono essere tutte "parità", e per via dell'indipendenza dovuta al "mescolamento" del mazzo tra i singoli turni, troviamo (posta T la variabile che indica il numero di turni totali)

$$P(T > 5|\Omega) = \frac{1}{13^5}.$$

La variabile T è una variabile aleatoria con legge geometrica di parametro $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

3. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} P(T > 5|T < 10) &= \frac{P(T > 5 \cap T < 10|\Omega)}{P(T < 10)} \\ &= \frac{P(T = 6|\Omega) + P(T = 7|\Omega) + P(T = 8|\Omega) + P(T = 9|\Omega)}{1 - P(T > 9|\Omega)} \\ &= \left(\frac{12}{13^6} + \frac{12}{13^7} + \frac{12}{13^8} + \frac{12}{13^9}\right) / \left(1 - \frac{1}{13^9}\right). \end{aligned}$$

Problema 59

Il numero chiamate telefoniche che arrivano ad un centralino durante ogni periodo di 10 minuti è distribuito come una variabile con legge Poisson di parametro $\lambda = 2$.

- Calcolare la probabilità che più di tre chiamate arrivino in un periodo di 10 minuti. [$P(X > 3|\Omega) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-2}2^k/k! \sim 0.14$]
- Calcolare la probabilità che non arrivino chiamate durante un periodo di 20 minuti. [X = "chiamate nei primi 10 minuti", Y = "chiamate nei secondi 10 minuti". Supponiamo X, Y indipendenti, allora [$P(X + Y = 0|\Omega) = e^{-4} \sim 0.02$]
- Sapendo che in 20 minuti sono arrivate 4 chiamate, qual è la probabilità che siano arrivate tutte nei primi 10 minuti? [$X + Y$ ha legge Poisson(4). $P(X = 4|X + Y = 4) = 1/2^4$]

Problema 60

(Baron 3.9) Per scaricare un file un sistema impiega tipicamente circa 40 secondi, con una deviazione standard di 5 secondi. Usando la diseguaglianza di Chebyshev, stimare la probabilità di impiegare più di un minuto per il download. Supponendo di scaricare 60 file in modo "indipendente", stimate la la probabilità di impiegare più di un'ora per il download.

Una soluzione:

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq 60|\Omega) = {} & P(T_1 \geq 60|\Omega \cap \{|T_1 - 40| \geq \lambda\})P(\{|T_1 - 40| \geq \lambda\}|\Omega) \\ & + P(T_1 \geq 60|\Omega \cap \{|T_1 - 40| < \lambda\})P(\{|T_1 - 40| < \lambda\}|\Omega). \end{aligned}$$

Se $\lambda \leq 20$, $P(T_1 \geq 60|\Omega \cap \{|T_1 - 40| < \lambda\}) = 0$, e Chebychev $P(T_1 \geq 60|\Omega) \leq \frac{5^2}{\lambda^2}$. Conviene quindi porre $\lambda = 20$, da cui

$$P(T_1 \geq 60|\Omega) \leq P(T_1 \geq 60|\Omega \cap \{|T_1 - 40| \geq \lambda\})P(\{|T_1 - 40| \geq \lambda\}|\Omega) \leq \frac{\sigma^2}{20^2} \sim 0.0625.$$

Per la seconda domanda, poniamo $T = \sum_{i=1}^{6} 0 T_i$, con T_i indipendenti. Si può usare la legge debole dei grandi numeri. Altrimenti, ripetiamo l'argomento. Vale

$$\mathbb{E}[T|\Omega] = 60 * 40, \quad \mathrm{Var}(T) = \sum_{i=1}^{6} 0 \, \mathrm{Var}(() \, T_i|\Omega) = 60\sigma^2.$$

Similmente al caso precedente, ricordando che un'ora sono $60 * 60 = 3600$ secondi,

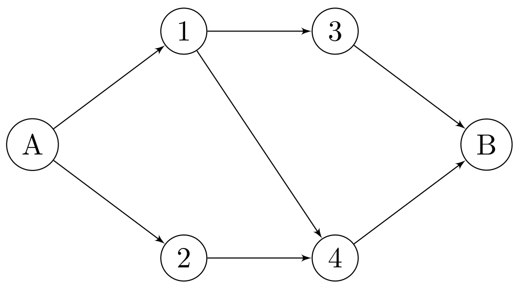
$$\begin{aligned} P(T \geq 60 * 60|\Omega) = & P(T \geq 60^2|\Omega \cap \{|T - 60 * 40| \geq \lambda\})P(\{|T - 60 * 40| \geq \lambda\}|\Omega) \\ & + P(T \geq 60^2|\Omega \cap \{|T - 60 * 40| < \lambda\})P(\{|T - 60 * 40| < \lambda\}|\Omega). \end{aligned}$$

Stavolta se $\lambda \leq 60^2 - 60 * 40 = 60 * 20$ vale $P(T \geq 60^2|\Omega \cap \{|T - 60 * 40| < \lambda\}) = 0$, quindi ponendo $\lambda = 60 * 20$,

$$P(T \geq 60^2|\Omega) \leq P(\{|T - 60 * 40| \geq \lambda\}|\Omega) \leq \frac{\mathrm{Var}(() \, T|\Omega)}{\lambda^2} = \frac{60\sigma^2}{60^2 * 20^2} \sim \frac{0.0625}{60}.$$

Problema 61

Una rete di comunicazione è schematizzata nel seguente modo, dove A, B sono due utenti e 1, 2, 3, 4 sono antenne ripetitrici: le frecce in figura rappresentano la possibilità di comunicare (se le antenne funzionano).



L'utente A vuole mandare un messaggio a B, e deve necessariamente appoggiarsi ad alcune delle antenne: ad esempio, il messaggio può essere trasmesso via $A \to 1 \to 3 \to B$, ma non via $A \to 2 \to 3 \to B$. Le antenne, tuttavia, non sono sempre operative. Per ciascun $i = 1, 2, 3, 4$ sia X_i una variabile aleatoria a valori in $\{0, 1\}$ che rappresenta lo stato dell'antenna i-esima, ossia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'antenna } i\text{-esima è operativa} \\ 0 & \text{in caso contrario.} \end{cases}$$

Supporremo che le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 siano tra loro indipendenti e tutte con legge $\mathcal{B}(1, p)$, con $p \in (0, 1)$ assegnato. Perché A riesca a trasmettere il messaggio a B, occorre e basta che almeno un cammino colleghi A con B attraverso antenne operative.