Analisi Matematica
B

Docente: Federica Andreano

22 giugno 2021

Esercizio 1

a) Calcolare il seguente limite di funzione $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(2^x - 2^{-x})}{3^x + 3^{-x}}$

2.5

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} = 0$$

per la gerarchia degli infiniti

b) Calcolare l'ordine di infinito della seguente funzione $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\log(x^3)}{\log x + 1}$ per $x \to +\infty$

2.5

$$f(x) \sim \frac{3\sqrt{x}\cancel{\log x}}{\cancel{\log x}} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2
Studiare la seguente funzione e disegnarne un grafico qualitativo

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\right)$$

1 1 2
a) Dominio, segno, limiti agli estremi del dominio e asintoti

Dominio: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x+1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \iff x > 1$

$\Rightarrow D = (1, +\infty)$

Segno: $f(x) \geq 0 \iff \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \geq 1 \iff \sqrt{x-1} \geq x+1$, in D

$\iff x-1 \geq x^2+2x+1 \iff x^2+x+2 \leq 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow x^2+x+2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \in D$

Limiti e asintoti: $\lim_{x \to 1^+} \log \frac{\overset{\to 0^+}{\sqrt{x-1}}}{\underset{\to 2}{x+1}} = -\infty$

$\Rightarrow x = 1$ asintoto verticale

$\lim_{x \to +\infty} \log \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log \underset{\to 0^+}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = -\infty$

$\Rightarrow \nexists$ asintoto orizz.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}}{x} = 0 \Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo

1 1

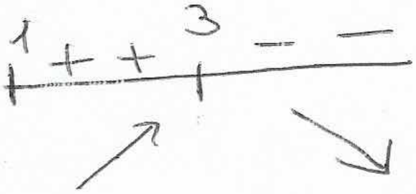
b) Derivata prima, monotonia, eventuali massimi e minimi

$$f'(x) = \frac{\cancel{x+1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x+1) - \sqrt{x-1}}{(x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{x+1-2(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{-x+3}{2(x^2-1)}$$

$f'(x) > 0 \iff -x+3>0$, in D

$\iff x<3$.



f crescente in $(1,3)$ e decrescente in $(3,+\infty)$

In $x=3$ f ha un punto di max.

con $f(3) = \log \frac{\sqrt{2}}{4}$

1 1

c) Derivata seconda, concavità, eventuali punti di flesso

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)-(-x+3)\cdot 4x}{4(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2+2+4x^2-12x}{4(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-12x+2}{4(x^2-1)^2} = \frac{x^2-6x+1}{2(x^2-1)^2}$$

$$f''(x)>0 \iff x^2-6x+1>0$$

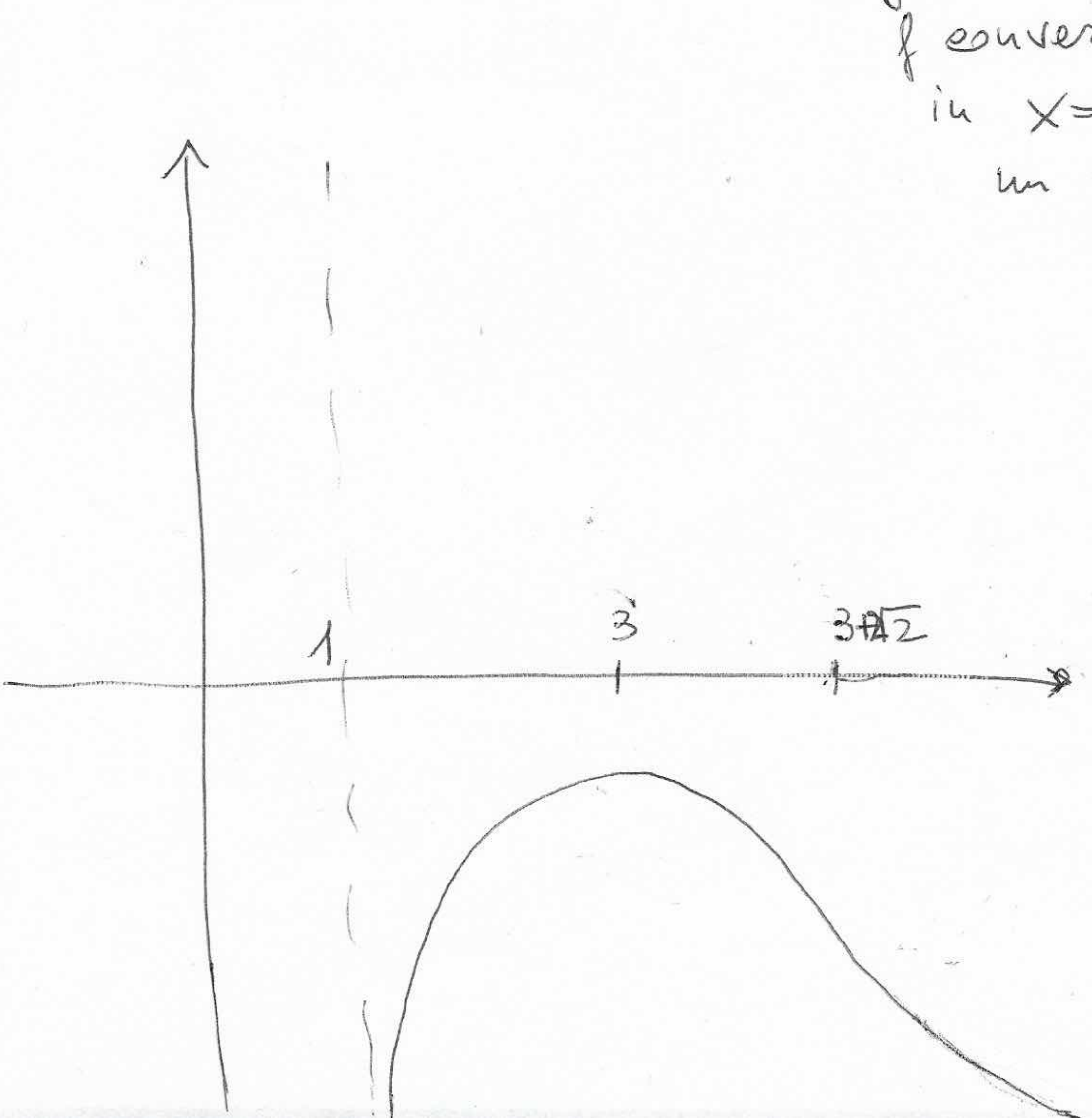
$$x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2} = \frac{6\pm 4\sqrt{2}}{2} = 3\pm 2\sqrt{2}$$

1 $- - -$ $3+2\sqrt{2}$ $+ + + +$

$\cap$ $\cup$

f concava in $(1, 3+2\sqrt{2})$
f convessa in $(3+2\sqrt{2}, +\infty)$
in $x=3+2\sqrt{2}$ f ha un punto di flesso

d) Grafico 1



Esercizio 3
Studiare la convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+\sin n)$

3.5

$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n(n+\sin n) = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n n \not\exists$, dato che

$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}2n = +\infty$ e

$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1}(2n+1) = -\infty$

$\Rightarrow$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza $\Rightarrow$ la serie non converge nè assolutam. nè semplicem.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{e^{\frac{1}{n^\alpha}}-1}}{n+1}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}^+$

3.5

È una serie a termini positivi.

$$\frac{\sqrt{e^{\frac{1}{n^\alpha}}-1}}{n+1} \sim \frac{\sqrt{\frac{1}{n^\alpha}}}{n} = \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$ converge $\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{2}>1$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}>0$

$\Leftrightarrow \alpha>0$

Esercizio 4
Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int e^{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$$

5

Sostituzione : $t = 1-\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1-t$
$\Rightarrow x = (1-t)^3 \Rightarrow dx = -3(1-t)^2 dt$

$$-3\int \underbrace{(1-t)^2}_{f}\underbrace{e^t}_{g'}dt = -3(1-t)^2 e^t + 3\int -2(1-t)e^t\,dt$$

$$= -3(1-t)^2 e^t - 6\int \underbrace{(1-t)}_{f}\underbrace{e^t}_{g'} = -3(1-t)^2 e^t - 6(1-t)e^t - 6\int e^t dt$$

$$= -3(1-t)^2 e^t - 6(1-t)e^t - 6e^t + c = e^t(-3+6t-3t^2-6+6t-6) + c$$

$$= e^t(-3t^2+12t-15) + c = e^{1-\sqrt[3]{x}}\left[-3(1-\sqrt[3]{x})^2 + 12(1-\sqrt[3]{x}) - 15\right] + c$$

Esercizio 5
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$(z + 2\bar{z})z = 1$$

4

$z = x+iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

$(x+iy+2x-2iy)(x+iy)-1=0$

$(3x-iy)(x+iy)-1=0$

$3x^2+3ixy-ixy+y^2-1=0$

$3x^2+y^2-1+2ixy=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2-1=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x^2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ y=0 \end{cases}$$

Soluzioni :
$z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad z_4 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$