Lezione 04/10/2022

La probabilità condizionata

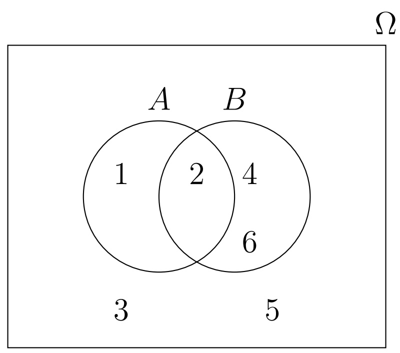
Alice lancia un dado, vede il risultato ma non lo dice a Bob.

Bob stima la probabilità dell'evento A :"esce 6" utilizzando la definizione classica: $P(A) = \dfrac{\#\{6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \dfrac{1}{6}$. Consideriamo i seguenti casi:

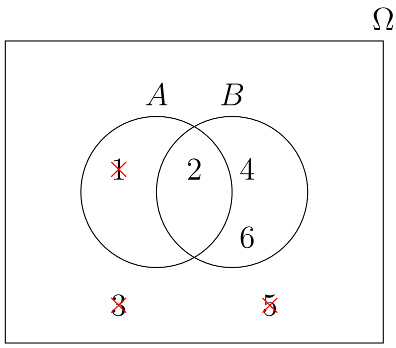
- Alice, conoscendo il risultato, dice a Bob: "è uscito un numero dispari". La probabilità di A, sapendo che è uscito un numero dispari, cambia e diventa 0. Bob infatti capisce che "è uscito 6" è un evento impossibile.
- Alice, conoscendo il risultato, dice a Bob: "è uscito un numero pari". La probabilità di A, sapendo che è uscito un numero pari, cambia e diventa $\dfrac{1}{3}$. Bob infatti capisce che i casi possibili (che erano $\{1,2,3,4,5,6\}$) diventano $\{2,4,6\}$ (dato che è uscito un numero pari), quindi la probabilità che esca 6 diventa $\dfrac{\#\{6\}}{\#\{2,4,6\}} = \dfrac{1}{3}$.

Osservazione: dato un evento A, la probabilità che si verifichi A può cambiare se un altro evento B si è verificato. Questo perchè se si verifica B, lo spazio degli eventi possibili (spazio campionario) diventa B (prima era Ω). Inoltre, A si verifica se e solo se si verifica $A \cap B$ (l'evento A diventa $A \cap B$).

Esempio. *Consideriamo il lancio di un dado e gli eventi A :"esce un numero minore di 3" e B :"esce un numero pari". Consideriamo la loro rappresentazione grafica.*



Se B si verifica 1, *3 e 5 non fanno più parte dei casi possibili, quindi:*



- *L'insieme dei risultati possibili è* $\{2,4,6\}$*;*
- A *si verifica se e solo se* $A \cap B$ *si verifica.*

La probabilità diventa $\dfrac{\#(A \cap B)}{\#B} = \dfrac{\#\{2\}}{\#\{2,4,6\}} = \dfrac{1}{3}$.

Come riscrivere $\dfrac{\#(A \cap B)}{\#B}$ **?**

Divido numeratore e denominatore per $\#\Omega$:

$$\frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

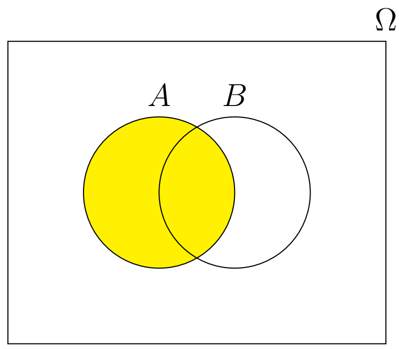
Definizione (Probabilità condizionata)**.** *Siano* A *e* B *eventi e* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *uno spazio di probabilità. Si definisce* probabilità condizionata *dell'evento* A *dato* B*, e si indica con* $P(A|B)$*, il rapporto tra* $P(A \cap B)$ *e* $P(B)$*:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

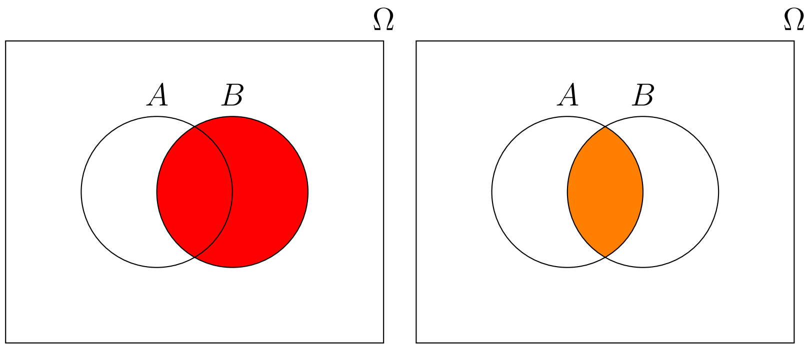
Rappresentazione grafica della probabilità condizionata:

Graficamente le probabilità sono le aree delle figure che rappresentano gli eventi, quindi $P(\Omega) = 1$ (l'area del rettangolo è 1) e

$$P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} \quad \text{(l'area gialla fratto 1).}$$



Se B si verifica $\Omega \to B$ e $A \to A \cap B$.



Questo vuol dire che

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{(area arancione fratto area rossa).}$$

Esercizio 1. *Lancio una moneta due volte. Voglio calcolare la probabilità che venga testa in entrabi i lanci, sapendo che*

(a) nel primo lancio è uscito TESTA;

(b) esce testa in almeno un lancio.

Svolgimento. *(a) Se A : "esce testa in entrambi i lanci" e B : "nel primo lancio è uscito TESTA", dobbiamo calcolare $P(A|B)$.*

$$\Omega = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\};$$

$A = \{(T,T)\}$;
$B = \{(T,T),(T,C)\}$;
$A \cap B = \{(T,T)\}$.

Le probabilità da utilizzare per calcolare $P(A|B)$ *sono*

$$P(A \cap B) = \frac{\#\{(T,T)\}}{\#\Omega} = \frac{1}{4} \quad e \quad P(B) = \frac{\#\{(T,T),(T,C)\}}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dunque, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

(b) Sia C *l'evento "esce testa in almeno un lancio"* ($C = \{(T,T),(T,C),(C,T)\}$)*, allora*

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{\#\{(T,T)\}}{\#\Omega}}{\frac{\#\{(T,T),(T,C),(C,T)\}}{\#\Omega}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Teorema (Teorema della probabilità composta)**.** *Sia* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *uno spazio di probabilità e siano* A *e* B *eventi. Si dimostra che*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B);$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Dimostrazione. *Dimostro che* $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.
Per la definizione di probabilità condizionata $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$*, cioè* $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$. *Moltiplico entrambi i membri per* $P(B)$:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} P(B) = P(A|B)P(B).$$

Semplifico $P(B)$ *al primo membro:*

$$\frac{P(A \cap B)}{\cancel{P(B)}} \cancel{P(B)} = P(A|B)P(B).$$

Infine, ottengo $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ *come volevo dimostrare.*

Analogamente si dimostra $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Esercizio 2. *Un'urna contiene 3 palline rosse e 2 blu. Qual è la probabilità che in una serie di estrazioni vengano estratte successivamente prima una pallina rossa e poi una blu.*

Svolgimento. *Considero gli eventi:*

R_1*:esce una pallina rossa alla prima estrazione;*

B_2*: esce una pallina blu alla seconda estrazione.*

Dobbiamo calcolare $P(R_1 \cap B_2)$.

Per il teorema della probabilità composta: $P(R_1 \cap B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1)$.

Calcolo $P(B_2|R_1)$. *Se ho già estratto una pallina rossa allora l'urna contiene 2 palline blu (casi favorevoli) e due palline rosse, quindi* $P(B_2|R_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Calcolo $P(R_1)$. *Dato che alla prima estrazione ci sono 2 palline blu e 3 palline rosse (casi favorevoli),* $P(R_1) = \frac{3}{5}$.

Infine, $P(R_1 \cap B_2) = P(B_2|R_1)P(R_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{10}$.

Eventi indipendenti

Due eventi A e B sono indipendenti se e solo se il verificarsi di A non modifica la probabilità di B e viceversa.

Esempio. *Gli eventi* A *:"domani piove" e* B *:"domani supero l'esame di analisi matematica" sono indipendenti.*

Esempio. *Tiro un dado e una moneta. Gli eventi* A *:"esce 6" e* B *:"esce testa" sono indipendenti.*

Esempio. *Tiro un dado. Gli eventi* A *:"esce 6" e* B *:"esce un numero pari" sono dipendenti. Nei primi esempi abbiamo osservato che se* B *si verifica allora la probabilità di* A *cambia.*

Definizione. *Due eventi* A *e* B *sono indipendenti se e solo se* $P(A|B) = P(A)$ *e* $P(B|A) = P(B)$.

Teorema (Teorema del prodotto di eventi indipendenti)**.** *Gli eventi* A *e* B *sono indipendenti se e solo se* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Dimostrazione. *Supponiamo che* A *e* B *siano indipendenti e dimostriamo che* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *(dalla definizione di prob. condizionata);*

$P(A|B) = P(A)$ *(perchè* A *e* B *sono indipendenti).*

Dalle precedenti uguaglianze, $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$*. Moltiplico entrambi i membri per* $P(B)$*:*

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}P(B) = P(A)P(B).$$

Semplifico $P(B)$ *al primo membro e ottengo* $P(A\cap B) = P(A)P(B)$*.*

Supponiamo che $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ *e dimostriamo che* A *e* B *sono indipendenti (quindi* $P(A|B) = P(A)$*).*

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ *(per ipotesi);*

$P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$ *(dal teorema della probabilità composta);*

quindi $P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$*. Divido entrambi i membri per* $P(B)$ *e lo semplifico al primo membro, in modo da ottenere* $P(A|B) = P(A)$*.*

Esercizio (Probabilità e calcolo combinatorio)

Sette amici, 4 ragazzie e 3 ragazze, si recano al cinema e si siedono vicini, sulle poltrone di una stessa fila. Calcolare la probabilità che

(a) I ragazzi sono tutti vicini tra loro;

(b) le ragazze sono tutte vicine tra loro;

(c) i ragazzi sono tutti vicini tra loro e le ragazze sono tutte vicine tra loro.

Svolgimento. *(a) Se* A *è l'evento "I ragazzi sono tutti vicini tra loro", devo calcolare* $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$*. Chiamo* M_1, M_2, M_3, M_4 *i 4 ragazzi e* F_1, F_2, F_3 *le 3 ragazze, allora*

$$\Omega = \{M_1M_2M_3M_4F_1F_2F_3, \quad M_1F_1M_2F_3M_4F_3M_3, \ldots\},$$

quindi $\#\Omega = 7!$ *(permutazioni semplici di 7 oggetti).*
Calcoliamo $\#A$*. Ci sono 4 possibilità*

- *tutti i maschi a sinistra e tutte le femmine a destra, ad esempio* $M_1M_2M_3M_4F_1F_2F_3$*. In questo caso, tutte le possibilità si ottengono permutando in tutti i modi possibili* $M_1M_2M_3M_4$ *(4!), permutando in tutti i modi possibili* $F_1F_2F_3$*(3!) e combinando tra loro le permutazioni dei due gruppi in tutti i modi possibili (4!3!); ad esempio combino la permutazione* $M_4M_2M_3M_1$ *con la permutazione* $F_2F_1F_3$ *per ottenere* $M_4M_2M_3M_1F_2F_1F_3$*.*

- *una femmina a sinistra - tutti i maschi - le altre due femmine a destra, ad esempio* $F_1M_1M_2M_3M_4F_2F_3$. *Ragionando come prima, tutte le possibilità sono 4!3!.*
- *due femmine a sinistra - tutti i maschi - una femmina a destra, ad esempio* $F_1F_2M_1M_2M_3M_4F_3$. *Ragionando come prima, tutte le possibilità sono 4!3!.*
- *tutte le femmine a sinistra - tutti i maschi a destra, ad esempio* $F_1F_2F_3M_1M_2M_3M_4$. *Ragionando come prima, tutte le possibilità sono 4!3!.*

Quindi $\#A = 4!3!+4!3!+4!3!+4!3! = 4\cdot 4!\cdot 3!$ *e* $P(A) = \dfrac{4\cdot 4!\cdot 3!}{7!} = \dfrac{2}{35}$.

(b) *Soluzione:* $\frac{1}{7}$.

(c) *Analogamente al punto A, ho 2 possibilità:*

- *tutti i maschi a sinistra e tutte le femmine a destra, ad esempio* $M_1M_2M_3M_4F_1F_2F_3$. *In questo caso ho 4!3! possibilità.*
- *tutte le femmine a sinistra e tutti i maschi a destra, ad esempio* $F_1F_2F_3M_1M_2M_3M_4$. *In questo caso ho 4!3! possibilità.*

$P(tutti\ i\ maschi\ vicini\ e\ tutte\ le\ femmine\ vicine) = \dfrac{4!3!+4!3!}{7!} = \dfrac{2}{35}$.