# Esercizi 4

(1)

$$(\forall x A(x) \wedge \forall y B(y)) \to \forall x \exists y (A(x) \wedge B(y))$$

$\neg(\forall x A(x) \wedge \forall y B(y))$ | $\underbrace{\forall x \exists y (A(x) \wedge B(y))}_{\varphi}$

$\neg\forall x A(x)$ | $\neg\forall y B(y)$ | $\varphi, \exists y (A(a) \wedge B(y))$

$\neg A(a)$ | $\neg B(b)$ | $\varphi, A(a) \wedge B(c)$

aperto | aperto | resta aperto

La formula è soddisfacibile

Un suo modello è $D = \{a\}$ $\quad I(A) = \emptyset$, $I(B) = \emptyset$

(dal primo ramo)

---

$$\neg((\forall x A(x) \wedge \forall y B(y)) \to \forall x \exists y (A(x) \wedge B(y)))$$

$$\forall x A(x), \forall y B(y), \neg\forall x \exists y (A(x) \wedge B(y))$$

$$\forall x A(x), \forall y B(y), \neg\exists y (A(e) \wedge B(y))$$

$$\underbrace{\forall x A(x), \forall y B(y), \neg\exists y (A(e) \wedge B(y))}, A(e), B(e), \neg(A(e) \wedge B(e))$$

$$\text{---}, A(e), B(e), \neg A(e), \neg B(e)$$

$\times$

Il ramo si chiude, quindi la formula non negata è valida

$$\varphi = \forall x\,(A(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(x,y))) \qquad \boxed{C(\varphi)=\{a\}}$$

$$\varphi,\ A(a) \to \exists y(A(y) \wedge R(a,y)) \qquad \boxed{C(\varphi)=\emptyset}$$

$$\varphi,\ \neg A(a) \qquad \boxed{C(\varphi)=\emptyset}$$

nodo finale

$$\varphi,\ \exists y(A(y) \wedge R(a,y)) \qquad \boxed{C(\varphi)=\emptyset}$$

$$\varphi,\ A(b) \wedge R(a,b) \qquad \boxed{C(\varphi)=\{b\}}$$

$$\varphi,\ A(b),\ R(a,b)$$

questo è un ramo infinito

La formula è soddisfacibile

$$\neg\varphi = \neg\forall x\,(A(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(x,y)))$$

$$\neg(A(a) \to \exists y(A(y) \wedge R(a,y)))$$

$$A(a),\ \underbrace{\neg\exists y(A(y) \wedge R(a,y))}_{\psi} \qquad \boxed{C(\psi)=\{a\}}$$

$$A(a),\ \neg(A(a) \wedge R(a,a)),\ \psi \qquad \boxed{C(\psi)=\emptyset}$$

$$\psi,\ A(a),\ \neg A(a) \qquad\qquad A(a)\ \neg R(a,a),\ \psi$$

✱          ramo aperto

anche la negazione è soddisfacibile

(2)

$\exists x \exists y\, R(x,y)$ ci sono due elementi in rel.

$\forall x \exists y\, R(x,y)$ ~~pk~~ ogni elemento è in rel. con qualcuno

$\exists x \exists y\, \neg R(x,y)$ ci sono due elem. che non sono in relaz.

$\exists x\, \forall y\, R(x,y)$ c'è un elemento che è in relaz. con tutti gli altri

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | ✓ | | | | |
| b | | | ✓ | | |
| c | | ✓ | | | |
| d | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| e | | | | ✓ | |

(3)

$$\varphi_1 = \exists x \exists y \forall z ((A(x,y) \wedge C(z)) \rightarrow B(x))$$

$$\varphi_1^S = \forall z ((A(c,d) \wedge C(z)) \rightarrow B(c))$$

$H(\varphi_1^S) = \{c, d\}$

$I^H(A) = \{(c,d)\}$

$I^H(B) = \{c\}$

$I^H(C) = \{c\}$

$$\varphi_2 = \forall x \forall y \exists z\, (A(x,y) \rightarrow C(z))$$

$$\varphi_2^S = \forall x \forall y\, (A(x,y) \rightarrow C(f(x,y)))$$

$H(\varphi_2^S) = \{c, f(c,c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c), f(c,c)), \dots\}$

$I^H(A) = \{(c,c)\}$

$I^H(C) = \{f(c,c)\}$

NOTA: Ci possono essere altre possibili soluzioni

$\varphi_3 = \exists x \forall y \exists z ((A(x,y) \wedge B(z)) \rightarrow (A(y,z) \wedge B(x)))$

$\varphi_3^S = \forall y ((A(a,y) \wedge B(f(y))) \rightarrow (A(y,f(y)) \wedge B(a)))$

$H(\varphi) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$

$I^H(A) = \{(a, a), (a, f(a))\}$

$I^H(B) = \{a, f(a)\}$

---

(4)

$$\varphi = \forall x \exists y (A(x,y) \rightarrow B(f(x)))$$

se $D = \mathbb{N}$ posso considerare

$I(f): n \rightarrow n+1$

$I(A) = \{(n,m) \mid n \leq m\}$

$I(B) = \{n \mid n \text{ è multiplo di } 4\}$

La formula diventa

"per ogni numero $x$ esiste $y$ tale che se $x \leq y$ allora $x+1$ è multiplo di 4"

---

Se $D = \{a, b, c, d\}$ posso considerare

$I(f)$: $a \rightarrow a$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow c$, $d \rightarrow a$

$I(A) = \{(b,b)\}$

$I(B) = \{c\}$

La formula diventa

...

"per ogni elemento $x \in D$ esiste $y \in D$ tale che se $A(x,y)$ è vero allora $B(f(x))$ è vero"

e quindi poiché solo $A(b,b)$ è vero bisogna controllare solo il caso $x=b$

$$\exists y\,(A(b,y) \to B(f(b)))$$
$$\exists y\,(A(b,y) \to B(c))$$

esiste un tale $y$ ed è $y=b$.

---

(5) 1. $Q(a,b)$
2. $Q(b,c)$
3. $P(x,y), \neg Q(x,z), \neg Q(z,y)$
4. $P(x,y), \neg Q(x,y)$
5. $P(x,y), \neg Q(y,x)$

Consideriamo 6. $\neg P(a,c)$

da 3 e 6 7. $\neg Q(a,z), \neg Q(z,c)$ $\quad a/x \; c/y$

da 1 e 7 8. $\neg Q(b,c)$ $\quad b/z$

da 8 e 2 9. $\square$ Quindi $P(a,c)$ è conseguenza logica

---

Consideriamo 6. $\neg P(a,a)$

da 3 e 6 7. $\neg Q(a,z), \neg Q(z,a)$

da 1 e 7 8. $\neg Q(b,a)$ non si può andare avanti

...

da 4 e 6 $\quad$ 9. $\neg Q(a,a)$ $\quad$ non si va avanti

da 5 e 6 $\quad$ 10. $\neg Q(a,a)$ $\quad$ non si va avanti

non è possibile trovare $\square$ e quindi

$P(a,a)$ non è conseguenza logica

Consideriamo $\quad$ 6. $\neg P(b,a)$

da 3 e 6 $\quad$ 7. $\neg Q(b,z), \neg Q(z,a)$

da 7 e 2 $\quad$ 8. $\neg Q(z,a)$ $\quad$ non si va avanti

da 4 e 6 $\quad$ 9. $\neg Q(b,a)$ $\quad$ non si va avanti.

da 5 e 6 $\quad$ 10. $\neg Q(a,b)$

da 1 e 10 $\quad$ 11. $\square$

Quindi $P(b,a)$ è una conseguenza logica del programma.