4.4 Esercizi

(1) Entrambe le operazioni sono commutative, come si evince dalla simmetria della tabella

$*_1$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	a

$*_2$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

L'elemento neutro di $*_1$ è b perché

$$a *_1 b = a$$
$$b *_1 b = b$$
$$c *_1 b = c$$

L'elemento neutro di $*_2$ è a perché

$$a *_2 a = a$$
$$a *_2 b = b$$
$$a *_2 c = c$$

Rispetto a $*_1$ gli elementi a e b sono invertibili perché

$$a * a = b$$
$$b * b = b$$

Rispetto a $*_2$ gli elementi sono tutti invertibili e gli inversi non sono unici

$$a * a = a$$
$$b * a = a = a * b$$
$$c * b = a$$

$$b * c = a$$
$$c * b = a$$

4.4

2. L'operazione AND è commutativa e associativa.

L'elemento neutro è 1 perché

$$0 \text{ AND } 1 = 0$$
$$1 \text{ AND } 1 = 1$$

L'unico elemento invertibile è 1

$$1 \text{ AND } 1 = 1$$

$$f : B \to \mathbb{Z}_2$$
$$0 \mapsto [0]_2$$
$$1 \mapsto [1]_2$$

è un omomorfismo perché

$$f(0 \text{ AND } 1) = f(0) = [0]_2$$
$$f(0) \cdot f(1) = [0]_2 \cdot [1]_2 = [0]_2$$

$$f(0 \text{ AND } 0) = f(0) = [0]_2$$
$$f(0) \cdot f(1) = [0]_2 \cdot [0]_2 = [0]_2$$

$$f(1 \text{ AND } 0) = f(0) = [0]_2$$
$$f(1) \cdot f(0) = [1]_2 \cdot [0]_2 = [0]_2$$

$$f(1 \text{ AND } 1) = f(1) = [1]_2$$
$$f(1) \cdot f(1) = [1]_2 \cdot [1]_2 = [1]_2$$

f è biettiva quindi è un isomorfi

(3) $(n,m) * (h,k) = (n+h, mk)$

L'elemento neutro è (x,y) tale che

$$(n,m) * (x,y) = (n,m)$$

cioè $n + x = n$
$my = m$

Quindi $x = 0$ $y = 1$

e $(0,1)$ è l'elemento neutro.

L'inverso di (n,m) è un elemento (n',m') tale che

$$(n,m) * (n',m') = (0,1)$$

Quindi $n + n' = 0$
$m \cdot m' = 1$

quindi $n' = -n$
e $m' = \frac{1}{m}$

Gli elementi invertibili allora sono tutti gli elementi (n,m) con $m \neq 0$ e l'inverso è $(-n, 1/m)$

(4) $H = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$

è stabile rispetto al prodotto perché

$$2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in H$$

(5) $H = \{[0]_4, [2]_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$

è stabile risp. a + perché

$$[0]_4 + [0]_4 = [0]_4 \in H$$
$$[0]_4 + [2]_4 = [2]_4 + [0]_4 = [2]_4 \in H$$
$$[2]_4 + [2]_4 = [0]_4 \in H$$

È stabile anche rispetto a $\cdot$ perché

$$[0]_4 \cdot [0]_4 = [0]_4 \in H$$
$$[0]_4 \cdot [2]_4 = [2]_4 \cdot [0]_4 = [0]_4 \in H$$
$$[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4 \in H$$

$(H,+)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}_4,+)$ perché è stabile e contiene l'elemento neutro e gli inversi

$$[2]_4 + [2]_4 = [0]_4$$

$[2]_4$ è inverso di $[2]_4$.

$$f: [0]_4 \to [0]_2$$
$$[2]_4 \to [1]_2$$

è un omomorfismo perché

...

$f([0]_4 + [0]_4) = f([0]_4) = [0]_2$
$f([0]_4) + f([0]_4) = [0]_2 + [0]_2 = [0]_2$

$f([0]_4 + [2]_4) = f([2]_4) = [1]_2$
$f([0]_4) + f([2]_4) = [0]_2 + [1]_2 = [1]_2$

$f([2]_4 + [2]_4) = f([0]_4) = [0]_2$
$f([2]_4) + f([2]_4) = [1]_2 + [1]_2 = [0]_2$

Dato che f è biettiva
allora f è un isomorfismo.

6 · f_1 non è omomorfismo

$$f_1(n+m) = n+m$$
$$f_1(n) \cdot f_1(m) = n \cdot m$$

· f_2 non è omomorfismo

$$f_2(n+m) = n+m+1$$
$$f_2(n) + f_2(m) = n+1+m+1 = n+m+2$$

· f_3 è un omomorfismo

$$f_3([n]_4 + [m]_4) = f_3([n+m]_4) = [2(n+m)]_8$$
$$f_3([n]_4) + f_3([m]_4) = [2n]_8 + [2m]_8 = [2(n+m)]_8$$

· f_4 non è omomorfismo.

$$f_4([n]_4 \cdot [m]_4) = f_4([n \cdot m]_4) = [2nm]_8$$
$$f_4([n]_4) + f_4([m]_4) = [2n]_8 + [2m]_8 =$$
$$= [2(n+m)]_8$$

· f_5 è omomorfismo

$$f_5([n]_2 + [m]_2) = f([n+m]_2) = 2(n+m)$$
$$f_5([n]_2) + f_5([m]_2) = 2n + 2m = 2(n+m)$$

(7) B^* è stabile perché la concatenaz. di due parole di B^* è ancora una parola di B^* (senza la lettera c)

La funzione $f: u \in B^* \to uc \in A^*$ non è omomorfismo perché se $u, v \in B^*$

$$f(uv) = uvc$$
$$f(u) \cdot f(v) = ucvc$$

(per esempio se $u = abb$ e $v = ba$
$$f(uv) = f(abbba) = abbbac$$
$$f(u) f(v) = abbcbac$$
)

(8) f è un omomorfismo, perché:

$$f(uv) = \#(a, uv) = \#(a,u) + \#(a,v)$$
$$f(u) + f(v) = \#(a,u) + \#(a,v)$$

Infatti il numero di lettere a nella parola uv è uguale al numero di lettere a in u + il numero di lettere a in v.

f non è biettiva perché non è iniettiva. Per esempio
$$f(ab) = f(abc) = 1$$