Questo esame è a libro aperto: siete completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non potete però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di voi o con altri, o passare materiale tra di voi.

I tre esercizi hanno un peso complessivo di 10 punti l'uno, per un totale di 30 punti.

Non ha importanza che calcoliate il valore numerico preciso delle soluzioni; è invece importante mostrare il vostro ragionamento e le formule usate, arrivando a una risposta che *potrebbe* essere calcolata meccanicamente utilizzando una normale calcolatrice. Per esempio, se arrivate a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, potete fermarvi lì oppure potete continuare fino a arrivare al numero 252 (questo non sarà considerato un errore, ma non darà punti aggiuntivi). Ma se invece scrivete solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, la risposta non sarà considerata valida.

1 Biglie

Ci sono tre urne **A**, **B** e **C**. L'urna **A** contiene una biglia nera e nove biglie bianche; l'urna **B** contiene tre biglie nere e sette biglie bianche; e l'urna **C** contiene sei biglie nere e quattro biglie bianche.

1. Scegliamo un'urna a caso e estraiamo una biglia da essa. Se è nera, ci fermiamo; altrimenti, reinseriamo la biglia e scegliamo nuovamente un'urna a caso, ripetendo la procedura fino a quando non abbiamo estratto una biglia nera. Sia $\mathcal{X}$ il numero di biglie bianche che abbiamo estratto prima di avere ottenuto una biglia nera. Scrivete un'espressione per le probabilità $P(\mathcal{X} = k)$ e poi trovate il valore atteso di $\mathcal{X}$.

2. Scegliamo un'urna a caso e estraiamo biglie da essa (reinserendole dopo ogni estrazione, ma usando sempre la stessa urna – a differenza del caso precedente, una volta che abbiamo scelto un'urna all'inizio non la cambiamo più) fino a quando non estraiamo una biglia nera. Sia $\mathcal{Y}$ il numero di biglie bianche che abbiamo estratto prima di avere ottenuto una biglia nera. Scrivete un'espressione per le probabilità $P(\mathcal{Y} = k)$ e poi trovate il valore atteso di $\mathcal{Y}$.

   SUGGERIMENTO: Può essere utile iniziare calcolando la funzione di probabilità e il valore atteso delle variabili $\mathcal{Y}_A, \mathcal{Y}_B$ e $\mathcal{Y}_C$ definite come il numero di biglie bianche che estraiamo (con reinserimento) prima di una nera supponendo di stare usando l'urna **A**, **B** o **C**. Poi trovate un modo di calcolare probabilità e valore atteso di $\mathcal{Y}$ in termini di probabilità e valori attesi di $\mathcal{Y}_A$, $\mathcal{Y}_B$ e $\mathcal{Y}_C$.

3. Siano $\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_B$ e $\mathcal{E}_C$ gli eventi "stiamo usando l'urna **A**", "stiamo usando l'urna **B**" e "stiamo usando l'urna **C**" rispettivamente. Scrivete espressioni per le probabilità condizionate $P(\mathcal{E}_A \mid \mathcal{Y} = k)$, $P(\mathcal{E}_B \mid \mathcal{Y} = k)$ e $P(\mathcal{E}_C \mid \mathcal{Y} = k)$, dove $\mathcal{Y}$ è definita come nel punto precedente.

1 Soluzione

1. In totale, abbiamo 30 biglie di cui 10 (1 + 3 + 6) sono nere. Ogni biglia ha uguali probabilità di essere scelta: infatti, ogni urna ha uguali probabilità di essere scelta, e ogni biglia dentro un'urna ha uguali probabilità di essere estratta tra quelle di quell'urna.

   Quindi, se $\mathcal{N}$ è l'evento "In quest'estrazione otteniamo una biglia nera", possiamo vedere subito che
   $$P(\mathcal{N}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$
   Ogni estrazione è indipendente dalle altre, visto che reinseriamo la biglia e scegliamo nuovamente un'urna e una biglia a caso. Quindi il numero $\mathcal{X}$ di biglie bianche che estraiamo prima di estrarre una biglia nera segue una distribuzione geometrica (nella versione che conta il numero di fallimenti prima del primo successo), e quindi
   $$P(\mathcal{X} = k) = (2/3)^k(1/3)$$
   e
   $$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = 1/(1/3) - 1 = 2.$$

2. Siano $\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_B$ e $\mathcal{E}_C$ gli eventi "stiamo usando l'urna **A/B/C**" rispettivamente. Allora chiaramente $P(\mathcal{E}_A) = P(\mathcal{E}_B) = P(\mathcal{E}_C) = 1/3$.

   Per ogni urna, il numero di biglie bianche che estraiamo prima di estrarre una biglia nera segue una distribuzione geometrica con $p = 1/10$, $p = 3/10$ e $p = 6/10$ rispettivamente. Quindi, se $\mathcal{Y}_A$, $\mathcal{Y}_B$ e $\mathcal{Y}_C$ sono il numero di biglie bianche che estrarremmo prima di una biglia nera usando l'urna $\mathbf{A}/\mathbf{B}/\mathbf{C}$ rispettivamente,
   $$P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_A) = (9/10)^k(1/10)$$
   $$P(\mathcal{Y}_A = k) = (9/10)^k(1/10) \qquad \mathbb{E}(\mathcal{Y}_A) = \frac{1}{1/10} - 1 = 9;$$
   $$P(\mathcal{Y}_B = k) = (7/10)^k(3/10) \qquad \mathbb{E}(\mathcal{Y}_B) = \frac{1}{3/10} - 1 = \frac{7}{3};$$
   $$P(\mathcal{Y}_C = k) = (4/10)^k(6/10) \qquad \mathbb{E}(\mathcal{Y}_C) = \frac{1}{6/10} - 1 = \frac{2}{3}.$$
   Quindi,
   $$\begin{aligned} P(\mathcal{Y} = k) &= P(\mathcal{E}_A)P(\mathcal{Y}_A = k) + P(\mathcal{E}_B)P(\mathcal{Y}_B = k) + P(\mathcal{E}_C)P(\mathcal{Y}_C = k) \\ &= \frac{1}{3}(9/10)^k(1/10) + \frac{1}{3}(7/10)^k(3/10) + \frac{1}{3}(4/10)^k(6/10). \end{aligned}$$
   Quindi,
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{Y}) &= \sum_k kP(\mathcal{Y} = k) = \sum_k k(1/3P(\mathcal{Y}_A = k) + 1/3P(\mathcal{Y}_B = k) + 1/3P(\mathcal{Y}_C = k)) \\ &= 1/3\sum_k kP(\mathcal{Y}_A = k) + 1/3\sum_k P(\mathcal{Y}_B = k) + 1/3\sum_k P(\mathcal{Y}_C = k) \\ &= 1/3\mathbb{E}(\mathcal{Y}_A) + 1/3\mathbb{E}(\mathcal{Y}_B) + 1/3\mathbb{E}(\mathcal{Y}_C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4. \end{aligned}$$

3. Abbiamo già calcolato $P(\mathcal{Y}_A = k) = P(\mathcal{Y} \mid \mathcal{E}_A)$, $P(\mathcal{Y}_B = k) = P(\mathcal{Y} \mid \mathcal{E}_B)$ e $P(\mathcal{Y}_C = k) = P(\mathcal{Y} \mid \mathcal{E}_C)$ nel punto precedente; e sappiamo anche che $P(\mathcal{E}_A) = P(\mathcal{E}_B) = P(\mathcal{E}_C) = 1/3$.

   Quindi basta applicare il Teorema di Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{E}_A \mid \mathcal{Y} = k) &= \frac{P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A)}{P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A) + P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_B) + P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_C)P(\mathcal{E}_C)} \\
&= \frac{(9/10)^k(1/10)}{(9/10)^k(1/10) + (7/10)^k(3/10) + (4/10)^k(6/10)}
\end{aligned}
$$

   (abbiamo semplificato gli $1/3$ a numeratore e denominatore).

   Similmente,

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{E}_B \mid \mathcal{Y} = k) &= \frac{P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_A)}{P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A) + P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_B) + P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_C)P(\mathcal{E}_C)} \\
&= \frac{(7/10)^k(3/10)}{(9/10)^k(1/10) + (7/10)^k(3/10) + (4/10)^k(6/10)}
\end{aligned}
$$

   e

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{E}_C \mid \mathcal{Y} = k) &= \frac{P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_A)}{P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A) + P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_B) + P(\mathcal{Y} = k \mid \mathcal{E}_C)P(\mathcal{E}_C)} \\
&= \frac{(4/10)^k(6/10)}{(9/10)^k(1/10) + (7/10)^k(3/10) + (4/10)^k(6/10)}.
\end{aligned}
$$

2 Variabili continue

C'è una variabile casuale $\mathcal{X}$ che prende solo valori reali non negativi.

1. Supponiamo di sapere solo che $\mathcal{X}$ ha valore atteso 10. Senza sapere altro, qual è il valore minimo possibile che può avere la probabilità $P(\mathcal{X} < 50)$? Qual è il valore massimo possibile di questa probabilità, suppondendo sempre che $\mathcal{X}$ abbia valore atteso 10?

2. Supponiamo di sapere inoltre che la varianza di $\mathcal{X}$ è 100. Utilizzando anche questa informazione, oltre al valore atteso (che è sempre 10, come nel punto precedente), qual è ora il valore minimo possibile della probabilità $P(\mathcal{X} < 50)$?

3. Supponiamo ora di sapere (in aggiunta alle informazioni dei punti precedenti) che $\mathcal{X}$ segue una distribuzione esponenziale. Qual è ora la probabilità $P(\mathcal{X} < 50)$?

4. Infine, qual è la probabilità condizionata $P(\mathcal{X} < 50 \mid \mathcal{X} < 100)$ (supponendo che $\mathcal{X}$ sia la variabile casuale descritta nei punti precedenti, cioè una che segue una distribuzione esponenziale, ha valore atteso 10 e ha varianza 100)?

2 Soluzione

1. Dato il fatto che la distribuzione non ha valori negativi e che il fatto che il suo valore atteso è 10, possiamo applicare la diseguaglianza di Markov:

   $$P(\mathcal{X} < 50) = 1 - P(\mathcal{X} \geq 50) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\mathcal{X})}{50} = 1 - 1/5 = 4/5.$$

   Quindi, $\mathcal{X}$ è minore di 50 con probabilità almeno $4/5$ (potrebbe essere più alta, ma non può essere più bassa).

   Il valore massimo che $P(\mathcal{X} < 50)$ può prendere dato che il suo valore atteso è 10, invece, è invece 1. Infatti, una probabilità non può mai avere un valore maggiore di uno, e una qualsiasi distribuzione con valore atteso 10 che non prenda mai valori maggiori di 50 (per esempio, la distribuzione secondo cui $\mathcal{X}$ prende il valore 10 con probabilità uno) è tale che $P(\mathcal{X} < 50) = 1$.

2. Se la varianza di $\mathcal{X}$ è 100, la sua deviazione standard è $\sigma = \sqrt{100} = 10$. Inoltre, sappiamo che il suo valore atteso è $\mu = 10$. Quindi, applicando la diseguaglianza di Chebyshev,

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{X} < 50) &= 1 - P(\mathcal{X} \geq 50) = 1 - P(\mathcal{X} - 10 \geq 40) \\ &= 1 - P(\mathcal{X} - \mu \geq 4\sigma) \geq 1 - P(|\mathcal{X} - \mu| \geq 4\sigma) \\ &= 1 - 1/4^2 = 1 - 1/16 = 15/16. \end{aligned}$$

   Quindi, la probabilità che $\mathcal{X}$ sia minore di 50 deve essere almeno $15/16$ (che è più grande di $4/5$, quindi abbiamo migliorato la nostra stima usando la diseguaglianza di Chebyshev e l'informazione sulla varianza).

3. Una distribuzione esponenziale con parametro λ ha valore atteso $1/\lambda$; quindi, dato che $\mathcal{X}$ ha valore atteso 10, deve seguire una distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1/10$. La sua varianza è quindi $1/\lambda^2 = 1/(1/100) = 100$ (questo non era necessario da calcolare, ma conferma che la varianza è quella descritta nel punto precedente).

   Quindi, usando la funzione cumulativa della distribuzione esponenziale e la sua continuità,

$$P(\mathcal{X} < 50) = P(\mathcal{X} \leq 50) = 1 - e^{-\lambda \cdot 50} = 1 - e^{-5} \approx 0.99326.$$

4. Usando la definizione di probabilità condizionata e la funzione cumulativa della distribuzione esponenziale,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{X} < 50 \mid \mathcal{X} < 100) &= \frac{P(\mathcal{X} < 50 \cap \mathcal{X} < 100}{P(\mathcal{X} < 100)} \\ &= \frac{P(\mathcal{X} < 50)}{P(\mathcal{X} < 100)} = \frac{1 - e^{-5}}{1 - e^{-10}} \approx 0.99331 \end{aligned}$$

   (Numericamente è molto vicino al valore calcolato nel punto precedente, perchè è molto improbabile che $\mathcal{X}$ sia maggiore o uguale a 100)

3 Patate

Le patate di una certa varietà hanno un peso medio di 200 grammi, con una deviazione standard di 30 grammi. Possiamo supporre che il peso di una patata scelta a caso segua una distribuzione normale.

1. Supponendo che sacco di patate contenga N patate e che il sacco vuoto pesi 300 grammi, calcolate il valore atteso e la deviazione standard del peso del sacco pieno.
2. Una fabbrica produce sacchi da 100 patate e sacchi da 81 patate (il sacco vuoto pesa sempre 300 grammi, come nel punto precedente), in proporzione uno a due (cioè, in media la fabbrica produce due sacchi da 81 patate per ogni sacco da 100 patate).

   Un certo sacco, scelto a caso, ha un peso compreso tra 17 kg e 20 kg. Qual è la probabilità che il sacco sia uno di quelli da 100 patate? (Potete scrivere la risposta in termini della funzione $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile che segue una distribuzione normale standard; non è necessario trovare il valore numerico).

3 Soluzione

1. La somma di N variabili casuali indipendenti che seguono distribuzioni normali è una variabile casuale il cui valore atteso e la cui varianza sono la somma dei valori attesi / delle varianze delle componenti. Quindi, il peso in grammi $\mathcal{X}$ di un insieme di N patate ha valore atteso $200N$ e varianza 30^2N, cioè deviazione standard $30\sqrt{N}$. Il sacco però pesa 300 grammi in più; quindi, il peso in grammi $\mathcal{Y} = \mathcal{X} + 300$ di un sacco di N patate quindi è una variabile che segue una distribuzione normale con valore atteso $200N + 300$ e deviazione standard $30\sqrt{N}$.

2. Sia $\mathcal{X}_{81}$ il peso di un sacco di 81 patate. Come calcolato nel punto precedente, $\mathcal{X}_{81}$ segue una distribuzione normale con valore atteso

$$\mu_{81} = 200g * 81 + 300g = 16.5kg$$

e deviazione standard

$$\sigma_{81} = 30g * \sqrt{81} = 270g = 0.27kg.$$

Similmente, il peso $\mathcal{X}_{100}$ di un sacco di 100 patate segue una distribuzione normale con valore atteso

$$\mu_{100} = 200g * 100 + 300g = 20.3kg$$

e deviazione standard

$$\sigma_{100} = 30 * \sqrt{100} = 300g = 0.3kg.$$

Quindi, se $\mathcal{E}$ è l'evento "Il sacco contiene 100 patate", $\mathcal{X}$ è il peso del sacco e $\mathcal{Z}$ è una distribuzione normale standard, abbiamo che $P(\mathcal{E}) = 1/3$, $P(\overline{\mathcal{E}}) = 2/3$, che

$$\begin{aligned} P(17kg \leq \mathcal{X} \leq 20kg \mid \overline{\mathcal{E}}) &= P(17kg \leq \mathcal{X}_{81} \leq 20kg) \\ &= P((17 - 16.5)/0.27 \leq \mathcal{Z} \leq (20 - 16.5)/0.27) \\ &= \Phi((20 - 16.5)/0.27) - \Phi((17 - 16.5)/0.27) \\ &\approx \Phi(12.96) - \Phi(1.85) \approx 0.032 \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} P(17kg \leq \mathcal{X} \leq 20kg \mid \mathcal{E}) &= P(17kg \leq \mathcal{X}_{100} \leq 20kg) \\ &= P((17 - 20.3)/0.3 \leq \mathcal{Z} \leq (20 - 20.3)/0.3) \\ &= \Phi((20 - 20.3)/0.3) - \Phi((17 - 20.3)/0.3) \\ &\approx \Phi(-11) - \Phi(-1) \\ &\approx 0.1586. \end{aligned}$$

Quindi, applicando il Teorema di Bayes,

$$\begin{aligned} &P(\mathcal{E} \mid 17kg \leq \mathcal{X} \leq 20kg) \\ &= \frac{P(17kg \leq \mathcal{X} \leq 20kg \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(17kg \leq \mathcal{X} \leq 20kg \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(17kg \leq \mathcal{X} \leq 20kg \mid \overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} \\ &\approx \frac{0.1586 \cdot 1/3}{0.032 \cdot 2/3 + 0.1586 \cdot 1/3} \approx 0.712 \end{aligned}$$

cioè c'è circa il 71.2% di probabilità che il sacco contenga 100 patate.