Esame di Algebra e Geometria del 13/1/2020

Nome Cognome.. **Matricola**.................................. A

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../6] 1. Siano $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2\}$ e sia $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 2), (2, b)\}$ una relazione su $A \cup B$.

(a) Quanti elementi ha $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))$? E quanti elementi ha $\mathcal{P}(A \times (A \cap B))$?

(b) Scrivere la più piccola relazione d'equivalenza che contenga $\mathcal{R}$ e determinare le sue classi d'equivalenza.

(c) Dire se la funzione $f : A \times B \to A \cup B$ tale che

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ 2 & \text{se } x = a, y = 2 \\ 1 & \text{se } x = b, y = 2. \end{cases}$$

è iniettiva e/o suriettiva e motivare la risposta.

[.../3] 2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2 .$$

[.../3] 3. Scrivere la tabella moltiplicativa di $\mathbb{Z}_4$ e determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_4$. Che struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$? E $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]_4\}, \cdot)$?

[.../5] 4. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: $U_1 = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $U_3 = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

- Dire se U_1, U_2 e U_3 sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$, motivando la risposta.
- Data la funzione $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, 2y) \in \mathbb{R}^2$, provare che f è una applicazione lineare e calcolare l'immagine $f(U_2)$ di U_2.
- Rappresentare graficamente nel piano cartesiano sia U_2 che $f(U_2)$ e scrivere una base di U_2 e di $f(U_2)$.

[.../4] 5. Utilizzando il metodo di Gauss dire quante e quali soluzioni ha il seguente sistema di 3 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x + y + 2h = 1 \\ 2x + 2z = 0 \\ y + z + h = 1 \end{cases}$$

[.../7] 6. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + y, -2x + 4y, 2x + z) .$$

- Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$.
- Trovare gli autovalori di f, e per ogni autovalore calcolare la molteplicità algebrica e geometrica e l'autospazio corrispondente.
- Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.