Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienze Teoriche e Applicate

Architettura degli elaboratori

Il Livello Logico-Digitale:

Metodo di Karnaugh

Un'ottimizzazione ricorrente

- Consideriamo due «mintermini» (addendi di una SP) che condividono TUTTE LE VARIABILI ECCETTO UNA
  - es:
    A B **/C** + **A** /B **/C** (condividono A e /C, ma non B)
  - Allora, ottimizzando:
    A B **/C** + **A** /B **/C** = **A /C** (B + /B) = **A /C** 1= **A /C**
  - (1° mettiamo in evidenza i termini in comune, 2° il resto si annulla!)
- Generalizzando:

  F(X1, X2, …, Xn) Y + F(X1, X2, …, Xn) /Y =

  F(X1, X2, …, Xn) (Y + /Y) = F(X1, X2, …, Xn)
- Chiamiamo tali min-termini: "**adiacenti**"
  - (la variabile che *non* condividono, necessariamente, appare in un mintermine naturale, e nell'altro negata)

Un'ottimizzazione ricorrente

- Va ancora meglio quando **QUATTRO** min-termini diversi condividono TUTTE LE VARIABILI ECCETTO **DUE** !
  - es:
    A **/B** C + A **/B** /C + /A **/B** C + /A **/B** /C (/B condiviso, ma non A e C)
  - Allora, ottimizzando:

A **/B** C + A **/B** /C + /A **/B** C + /A **/B** /C =

/B (A C + A /C + /A C + /A /C) =

=

…

=

/B

Fa 1! (sempre vero)
Sono tutte le quattro combinazioni possibili di A e C: esattamente una è sempre verificata.
Dim:

A C + A /C + /A C + /A /C =
= A (/C + C) + /A (C + /C)
= A 1 + /A 1
= A + /A = 1

Generalizzando

- In una funzione booleana a ***k*** variabili…
- Quando **2^*n*** min-termini condividono tutte le variabili eccetto ***n***:
  - 1) si mettono in evidenza le ***k – n*** variabili condivise
  - 2) il resto diventa una costante e scompare
  - 3) rimane un solo min-termine con le ***k – n*** variabili condivise

- Es: con una funzione a ***k*** = 4 variabili
  - **2** min-termini condividono **3** variabili (tutto eccetto 1 var)
    → diventano un solo min-termine a 3 variabili
  - **4** min-termini condividono **2** variabili (tutto eccetto 2 vars)
    → diventano un solo min-termine a 2 variabili
  - **8** min-termini condividono **1** variabile (tutto eccetto 3 vars)
    → diventano un solo min-termine a 1 variabile

- Più sono, più si semplifica!!!

Mappe di Karnaugh

- Idea: *redisporre le righe della tabella di veritá in modo che l'adiacenza (logica) corrisponda all'adiacienza (fisica)*
  - scopo: rendere facile trovare i gruppi di min-termini «che condividono tutte le var eccetto N»
- Queste tabelle di verità redisposte opportunamente si chiamano Mappe di Karnaugh
  - dal loro ideatore

  - Sintesi + semplificazione:

Funz. boolana come Tavola di verità (riscritta come Mappa di Karnaugh) → **Espressione booleana** già molto ottimizzata

Nota:

- **L'adiacenza fisica** non è rispettata se scriviamo le tabelle nel modo banale…
  - cioè come abbiamo fatto finora →
  - Ogni riga riguarda una configurazione di bit anche molto diversa dalla riga precedente
  - Qui:
    in **rosso** i bit di input che cambiano valore rispetto alla riga precedente

a	b	c	F(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	**1**	0
0	**1**	**0**	0
0	1	**1**	1
1	**0**	**0**	0
1	0	**1**	1
1	**1**	**0**	1
1	1	**1**	1

Mappe di Karnaugh **per due variabili**

Tab di veritá

a	b	F(a,b)
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Mappa di Karnaugh

a	b	F(a,b)
0	0	**0**
0	1	**0**
1	1	**1**
1	0	**0**

Scambio due righe!

- In rosso i bit che cambiano rispetto alla riga precedente
- NB: la prima riga è preceduta dall'ultima. La mappa "gira"

Mappe di Karnaugh **per due variabili**

- Coppie di righe successive corrispondono sempre a min-termini adiacenti

a	b	F
0	0	X
0	1	X
1	1	X
1	0	X

differiscono solo per **b** (condividono **a = 0**)

a	b	F
0	0	X
0	1	X
1	1	X
1	0	X

differiscono solo per **a** (condividono **b = 1**)

a	b	F
0	0	X
0	1	X
1	1	X
1	0	X

differiscono solo per **b** (condividono **a = 1**)

a	b	F
0	0	X
0	1	X
1	1	X
1	0	X

differiscono solo per **a** (condividono **b = 0**)

Mappe di Karnaugh per tre variabili

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabella di verità classica

nota l'ordine

BC \ A	0	1
0 0	0	0
0 1	1	0
1 1	0	0
1 0	1	1

Mappa di Karnaugh (corrispondente)

Mappe di Karnaugh per tre variabili

- Elementi adiacenti corrispondono sempre a min-termini adiacenti
- Esempi:

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **c** (condividono **a = 0** e **b = 0**)

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **b** (condividono **a = 1** e **c = 1**)

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **a** (condividono **b = 0** e **c = 1**)

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **a** (condividono **b = 1** e **c = 1**)

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

differiscono solo per **b** (condividono **a = 1** e **c = 0**)

Mappe di Karnaugh per tre variabili

- Gruppi di 2x2 o 1x4 elementi condividono 1 (tutti meno 2) elementi!

- Esempi:

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

condividono
b = 0
(differiscono
per **a** e **c**)

BC \ A	0	1
0 0	X	X
0 **1**	X	X
1 **1**	X	X
1 0	X	X

condividono
c = 1
(differiscono
per **a** e **b**)

BC \ A	0	1
0 **0**	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 **0**	X	X

condividono
c = 0
(differiscono
per **a** e **b**)

BC \ A	**0**	1
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

condividono
a = 0
(differiscono
per **b** e **c**)

BC \ A	0	**1**
0 0	X	X
0 1	X	X
1 1	X	X
1 0	X	X

condividono
a = 1
(differiscono
per **b** e **c**)

Mappe di Karnaugh: esempio

- Esempio per la funzione di tre variabili A, B, C
  F(A, B, C) = **/A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C**

Mappe di Karnaugh: esempio

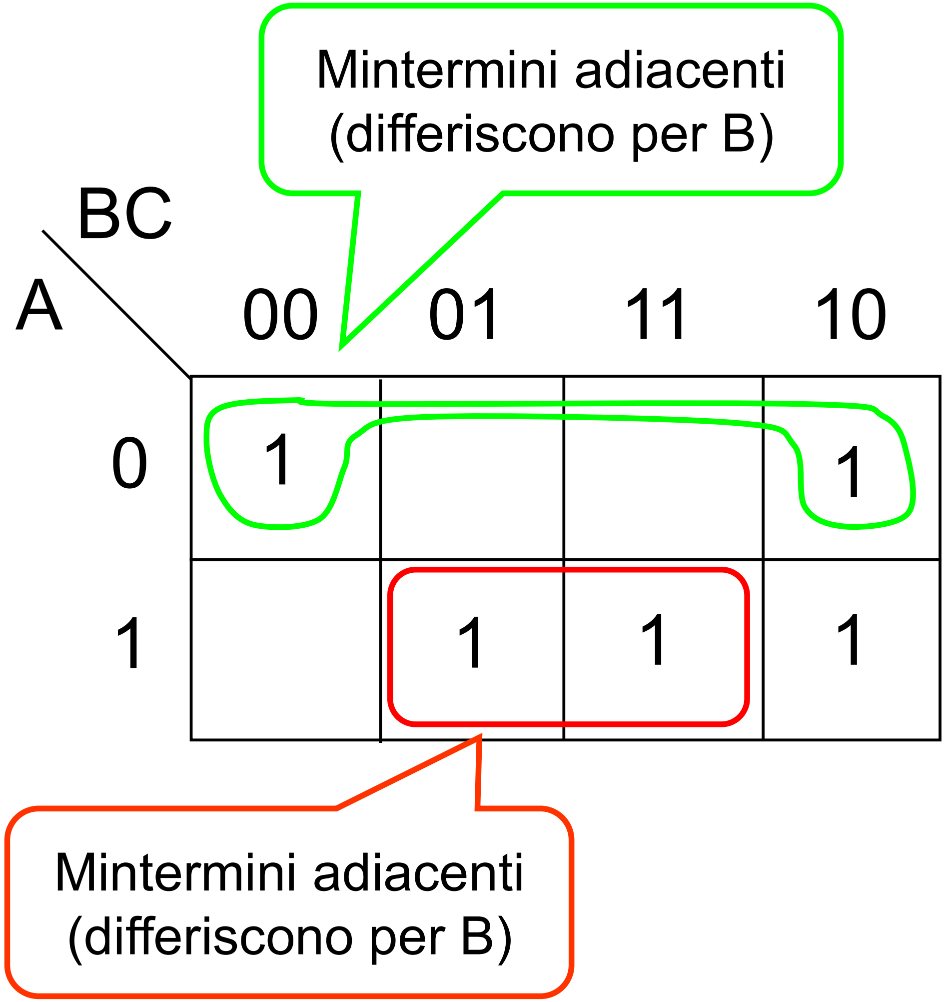
- Esempio per la funzione di tre variabili A, B, C
  F(A, B, C) = **/A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C**

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	1

A/BC e ABC sono mintermini adiacenti
(differiscono solo per B)

Mappe di Karnaugh: esempio

- Esempio per la funzione di tre variabili A, B, C
  F(A, B, C) = **/A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C**



Mappe di Karnaugh: esempio

- Esempio per la funzione di tre variabili A, B, C
  F(A, B, C) = **/A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C**

Mintermini adiacenti (differiscono per B)

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	1

Mintermini adiacenti (differiscono per A)

Mintermini adiacenti (differiscono per B)

Semplificazioni possibili

/A/B/C + /AB/C = /A/C

/AB/C + AB/C = B/C

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1

A/BC + ABC = AC

Per ogni gruppo di mintermini adiacenti c'è una semplificazione possibile

- F(A, B, C) = /A/B/C + /AB/C + A/BC + ABC + AB/C =
  /A/C + B/C + AC

Semplificazioni possibili

Mintermini che differiscono per A e B

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

/A/BC + /ABC + A/BC + ABC =
/AC (/B + B) + AC (/B + B) =
/AC + AC = (/A + A) C = C

Procedura: passo 1

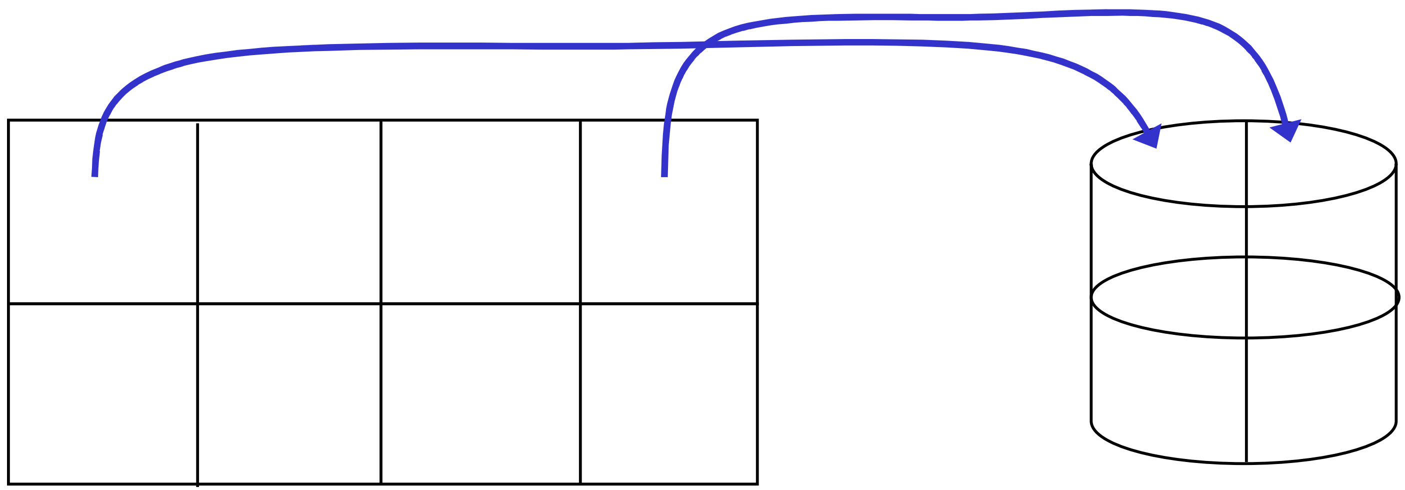
- Riscrivere tabella delle verità data come mappa di Karnaugh

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Procedura: passo 2

- Identificare un insieme di gruppi adiacenti ***di 2^n celle***
  di tutti 1 in modo che tutti gli 1 appartengano ad almeno un gruppo (**SP**)
- oppure, di tutti 0 in modo che tutti gli 0 appartengano… (**PS**)
- Criteri per trovare i gruppi:
  - I gruppi devono essere rettangolari (o quadrati) di dimensione 2^n
  - Più i gruppi sono grandi e più letterali verranno eliminati
  - Meno gruppi danno luogo a meno termini
  - Lo stesso 1 o 0 può essere incluso in più gruppi
  - Ricordarsi che le mappe sono circolari:



Procedura: passo 2

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Procedura: passo 3

- Ogni gruppo corrisponde a un mintermine contenente solo le variabili che non cambiano.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

- **BC + AC + AB**

Ogni gruppo corrisponde a un mintermine contenente solo le variabili che non cambiano.

Uso degli zeri

- Si ricava l'espressione in forma di prodotto di somme

> Ogni gruppo corrisponde a un mintermine contenente solo le variabili che non cambiano.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

(A+B)(B+C)(A+C)

riprova:

= (AB+B+AC+BC)(A+C) = (B+AC)(A+C)=AB+AC+BC+AC

= AB+AC+BC ← la soluz. precedente

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
A=0 B=0 C=0
differiscono
solo per D

condividono
B=1 C=1 D=0
differiscono
solo per A

condividono
A=1 B=0 D=0
differiscono
solo per C

- esempi di gruppi da 2

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
0 0	X	X	X	X
0 1	X	X	X	X
1 1	X	X	X	X
1 0	X	X	X	X

condividono
A=0 B=0
differiscono
per C e D

condividono
B=1 C=1
differiscono
per A e D

condividono
C=0 D=0
differiscono
per A e B

- esempi di gruppi da 4

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
B=1 D=0
differiscono
per A e C

- altro esempio di gruppo da 4

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
B=0 D=0
differiscono
per A e C

- altro esempio di gruppo da 4

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono
A=1
differiscono
per B D C

- esempio di gruppo da 8

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	X	X	X
01	X	X	X	X
11	X	X	X	X
10	X	X	X	X

condividono D=0
differiscono per A B C

- esempio di gruppo da 8

Mappe di Karnaugh per quattro variabili

Esempio

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	0	1

Esempio

/CD

/B/D

ABD

/A/C

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	0	1

F = **/A/C + /CD + /B/D + ABD**

Limiti del metodo di Karnaugh

- I risultati dell'applicazione del metodo di Karnaugh sono normalmente meglio della semplice derivazione dell'espressione in prima forma normale, ma non sono necessariamente ottimi.
  - sono sempre e comunque somme di prodotti (o prodotti di somme)
  - è un vantaggio (semplicità e velocità della rete risultante)
  - è uno svantaggio (escludo altre ottimizzazioni logiche)
- Ad es. con Karnough posso dedurre che **F = AB+BC**
  - F richiede <u>tre</u> porte
- Ma noi sappiamo che F = AB+BC = **B (A+C)**
  - che richiede <u>due</u> porte