Esame di Logica

4 Settembre 2024

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutte le carote sono tuberi;
  - Nessuna carota è una patata;
  - Tutte le patate sono tuberi;
  - Tutti i tuberi sono vegetali;
  - Qualche vegetale non è un tubero;
  - Nessuna farfalla è un tubero.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Qualche carota non è una farfalla;
  2. Qualche patata è un vegetale;
  3. Qualche tubero non è una patata;
  4. Nessuna farfalla è un vegetale.

SOLUZIONE:

- Siano c = carota, t = tubero, p = patata, v = vegetale, f = farfalla.

Allora la teoria è

  - $\mathbf{A}(c, t)$;
  - $\mathbf{E}(c, p)$;
  - $\mathbf{A}(p, t)$;
  - $\mathbf{A}(t, v)$;
  - $\mathbf{O}(v, t)$;
  - $\mathbf{E}(f, t)$.

- Consideriamo le quattro affermazioni:

  1. $\mathbf{O}(c, f)$ segue per dimostrazione indiretta:

  $$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{A}(c,t) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{E}(f,t) & \underline{\text{Ipotesi}} \\ (3) & \mathbf{A}(c,f) & \mathbf{O}(c,f) \\ (4) & \mathbf{E}(c,t) & \text{PS2, da (2) e (3)} \\ (5) & \mathbf{I}(c,t) & \text{C2, da (1)} \end{array}$$

  e visto che $\mathbf{I}(c, t)$ è la contraddizione di $\mathbf{E}(c, t)$, la formula è dimostrata.

  2. $\mathbf{I}(p, v)$ segue per dimostrazione diretta:

  $$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{A}(p,t) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{A}(t,v) & \text{Ipotesi} \\ (3) & \mathbf{A}(p,v) & \text{PS1, da (2) e (1)} \\ (4) & \mathbf{I}(p,v) & \text{C2, da (3)} \end{array}$$

  3. $\mathbf{O}(t, p)$ segue per dimostrazione diretta:

  $$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{A}(c,t) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{E}(c,p) & \text{Ipotesi} \\ (3) & \mathbf{I}(c,t) & \text{C2, da (1)} \\ (4) & \mathbf{I}(t,c) & \text{C3, da (3)} \\ (5) & \mathbf{O}(t,p) & \text{PS4, da (2) e (4)} \end{array}$$

  4. $\mathbf{E}(f, v)$ non segue dalla teoria. Infatti, consideriamo il modello $M = (\Delta, \iota)$ dove

     - $\Delta = \{1, 2, 3\}$;
     - $\iota(c) = \{1\}$;
     - $\iota(t) = \{1, 2\}$;
     - $\iota(p) = \{2\}$;
     - $\iota(v) = \{1, 2, 3\}$;
     - $\iota(f) = \{3\}$.

Allora $\mathbf{A}(c,t)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \subseteq \iota(t)$; $\mathbf{E}(c,p)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \cap \iota(p) = \emptyset$; $\mathbf{A}(p,t)$ è soddisfatta, perchè $\iota(p) \subseteq \iota(t)$; $\mathbf{A}(t,v)$ è soddisfatta, perchè $\iota(t) \subseteq \iota(v)$; $\mathbf{O}(v,t)$ è soddisfatta, perchè $3 \in \iota(v)$ ma $3 \notin \iota(t)$; $\mathbf{E}(f,t)$ è soddisfatta, perchè $\iota(f) \cap \iota(t) = \emptyset$.

Quindi il modello soddisfa la teoria; ma non soddisfa $\mathbf{E}(f,v)$, perchè $\iota(f) \cap \iota(v) = \{3\} \neq \emptyset$, e quindi $\mathbf{E}(f,v)$ non è una conseguenza della teoria.

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Se sono a Pavia, non sono a Bologna;
  - Se non sono nè a Pavia nè a Bologna, sono a Roma;
  - Se sono a Roma, non sono a Pavia.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se sono a Bologna, non sono a Roma;
  - Non sono a Bologna o non sono a Pavia.
- Verificate se la teoria ha "Se non sono a Bologna, sono a Pavia o sono a Roma" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere gli altri).

  ATTENZIONE: Non è consentito applicare trasformazioni per semplificare formule prima di applicare il metodo del tableau (non porterebbe a conclusioni sbagliate, ma non è parte della procedura). Per esempio, se una delle formule iniziali del tableau fosse un'espressione del tipo $\neg(X \vee (Y \vee Z))$, non potete riscriverla come $\neg X \wedge (\neg Y \wedge \neg Z)$ (anche se le due formule sono logicamente equivalenti).

SOLUZIONE:

- Siano $X =$ "Sono a Pavia", "$Y =$ "Sono a Bologna" e $Z =$ "Sono a Roma". Allora la teoria è

$$
\begin{aligned}
&X \rightarrow \neg Y;\\
&(\neg X \wedge \neg Y) \rightarrow Z\\
&Z \rightarrow \neg X.
\end{aligned}
$$

- La tabella di verità è

X	Y	Z	$X \to \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$(\neg X \wedge \neg Y) \to Z$	$Z \to \neg X$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0

  Quindi le valutazioni che soddisfano la teoria sono quelle che assegnano a X, Y e Z i valori $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ o $(1,0,0)$.

- Le due affermazioni corrispondono a $Y \to \neg Z$ e a $\neg Y \vee \neg X$.

X	Y	Z	$Y \to \neg Z$	$\neg Y \vee \neg X$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

  Quindi la prima formula non segue dalla teoria, ma la seconda sì.

- La formula $(\neg Y) \to (X \vee Z)$ segue dalla teoria secondo il seguente tableau chiuso:

$$\{X \to \neg Y, (\neg X \wedge \neg Y) \to Z, Z \to \neg X, \underline{\neg((\neg Y) \to (X \vee Z))}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{X \to \neg Y, (\neg X \wedge \neg Y) \to Z, Z \to \neg X, \neg Y, \underline{\neg(X \vee Z)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{X \to \neg Y, \underline{(\neg X \wedge \neg Y) \to Z}, Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z\}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \to \neg Y, \underline{\neg(\neg X \wedge \neg Y)}, \\ Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z \end{array} \right\} \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} X \to \neg Y, Z, \\ Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z \end{array} \right\}$$

Chiuso: Z, $\neg Z$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \to \neg Y, \underline{\neg\neg X}, \\ Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z \end{array} \right\} \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} X \to \neg Y, \underline{\neg\neg Y}, \\ Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z \end{array} \right\}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \to \neg Y, X, \\ Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z \end{array} \right\} \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} X \to \neg Y, Y, \\ Z \to \neg X, \neg Y, \neg X, \neg Z \end{array} \right\}$$

Chiuso: X, $\neg X$ — Chiuso: Y, $\neg Y$

3 Risoluzione Proposizionale

Considerate la teoria proposizionale

$$\Gamma := \{(X \wedge (Y \vee Z)) \to \neg W, Y \to (Z \vee \neg W)\}.$$

- Convertite tutte le formule della teoria in formule equivalenti in Forma Normale Congiuntiva;
- Utilizzando la Procedura di Davis-Putnam, verificate se Γ ha come conseguenza $(X \wedge W) \to \neg Y$.

SOLUZIONE:

- Abbiamo che

$$\begin{aligned}(X \wedge (Y \vee Z)) \rightarrow \neg W &\equiv \neg(X \wedge (Y \vee Z)) \vee \neg W \\ &\equiv \neg X \vee \neg(Y \vee Z) \vee \neg W \\ &\equiv \neg X \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \vee \neg W \\ &\equiv ((\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Z)) \vee \neg W \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee \neg W) \wedge (\neg X \vee \neg Z \vee \neg W)\end{aligned}$$

  e che

$$Y \rightarrow (Z \vee \neg W) \equiv \neg Y \vee Z \vee \neg W$$

- Convertiamo in CNF anche la negazione di $(X \wedge W) \rightarrow \neg Y$:

$$\begin{aligned}\neg((X \wedge W) \rightarrow \neg Y) &\equiv \neg(\neg(X \wedge W) \vee \neg Y) \\ &\equiv \neg\neg(X \wedge W) \wedge \neg\neg Y \\ &\equiv X \wedge W \wedge Y\end{aligned}$$

  Quindi, la formula segue dalla teoria se e solo se l'insieme di clausole

$$S = \{\{\neg X, \neg Y, \neg W\}, \{\neg X, \neg Z, \neg W\}, \{\neg Y, Z, \neg W\}, \{X\}, \{W\}, \{Y\}\}$$

  è insoddisfacibile. Applichiamo la procedura di Davis-Putnam:

  1. $\{\{\neg X, \neg Y, \neg W\}, \{\neg X, \neg Z, \neg W\}, \{\neg Y, Z, \neg W\}, \{X\}, \{W\}, \{Y\}\}$:
     Non ci sono tautologie o formule sussunte. Scegliamo come pivot X.
  2. $\{\{\neg Y, Z, \neg W\}, \{W\}, \{Y\}, \{\neg Y, \neg W\}, \{\neg Z, \neg W\}\}$:
     $\{\neg Y, Z, \neg W\}$ è sussunta da $\{\neg Y, \neg W\}$, quindi eliminiamola.
  3. $\{\{W\}, \{Y\}, \{\neg Y, \neg W\}, \{\neg Z, \neg W\}\}$:
     Scegliamo come pivot Y.
  4. $\{\{W\}, \{\neg Z, \neg W\}, \{\neg W\}\}$.
     $\{Z, \neg W\}$ è sussunta da $\{\neg W\}$, quindi eliminiamola.
  5. $\{\{W\}, \{\neg W\}\}$. Scegliamo come pivot W.
  6. $\{\square\}$

  Visto che aabbiamo trovato la clausola vuota $\square$, l'insieme di clausole iniziale è insoddisfacibile e quindi la formula segue dalla teoria.