08/07/2024 — Quinto appello

Nome e Cognome: ________________________ Matricola: ______________

Indicazioni Importati: Siamo liberi di utilizzare appunti scritti o stampati. **Non possiamo però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di noi o con l'esterno, né passarci del materiale tra di noi**.
A meno che non venga esplicitamente detto il contrario, non è necessario calcolare il valore numerico delle soluzioni. A parte questo fatto, **è sempre importante mostrare il ragionamento e le formule usate, ed arrivare ad una risposta esatta**, anche se espressa in funzione di altri operatori (per esempio coefficienti binomiali, radici quadrate, esponenti, ecc). Un esempio: se arriviamo a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, possiamo lasciare questa come risposta senza ulteriori semplificazioni, oppure possiamo fare i calcoli ed arrivare al valore numerico 252. Invece scrivere solo "252" senza che sia chiaro da dove viene quel numero, **sarà considerata una risposta invalida.**
NOTA BENE: In alcune di queste soluzioni si riporta il valore numerico delle risposte solo per completezza. Il calcolo di tali valori infatti non è stato oggetto di valutazione in sede di correzione, a meno che non sia stato detto esplicitamente il contrario sulla traccia dell'esercizio corrispondente.

1 Train Control and Management System

Un *Train Control and Management System* (TCMS) presenta su schermo due tipi di alert di diagnostica: (a) anomalie e (b) messaggi generici. Ci sono **20** alert diversi, di cui **8** fanno riferimento ad anomalie e **12** hanno a che fare con messaggi generici. Un informatico viene ingaggiato per analizzare i dati raccolti dal log di questo treno.

1. Per prima cosa si vuole studiare se ci sono correlazioni tra messaggi generici e anomalie. Quanti tipi di *combinazioni* messaggio generico/anomalia ci sono? (2 pt.)

2. Dalle combinazioni totali calcolate al punto precendente, soltanto 32 di esse sono significative in termini di correlazioni esistenti. Se l'analista sceglie a caso due combinazioni diverse da analizzare, quale è la probabilità che esse siano significative? (2 pt.)

3. Ci si concentra d'ora in poi su due eventi precisi che sono gli unici a verificarsi nelle vicinanze delle stazioni: ($\mathcal{E}_1$) "freno pneumatico inserito" e ($\mathcal{E}_2$) "freno elettrico inserito".

   Si sà che sempre si verifica uno di questi due eventi e $P(\mathcal{E}_1) = 0.1$. Si sà inoltre che le due uniche anomalie *possibili* in questo caso sono ($\mathcal{A}_1$) "pressione insufficiente in frenatura" e ($\mathcal{A}_2$) "alta tensione non presente in carrozza". Si verificano anomalie il 60% delle volte, e ($\mathcal{A}_1$) si verifica il doppio delle volte rispetto ad ($\mathcal{A}_2$).

   Trovare la probabilità di riscontrare $\mathcal{A}_2$ sapendo che si è verificato $\mathcal{E}_2$ assumendo che le anomalie siano eventi indipendenti rispetto ai messaggi generici. (3 pt.)

4. Risolvere il punto precedente assumendo questa volta che le anomalie non siano indipendenti rispetto ai messaggi generici e che $P(\mathcal{E}_2|\mathcal{A}_2) = 0.4$ (3 pt.)

1 Soluzione

1. Per capire quante combinazioni ci sono, devo contare in quanti modi posso scegliere un messaggio generico e un'anomalia. Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio, sappiamo che sono $8 \times 12 = 96$ combinazioni possibili messaggio/anomalia.

2. Sapendo che abbiamo scelto 2 combinazioni, denotiamo con $\mathcal{E}$ l'evento "vengono scelti esattamente 2 combinazioni significative". Ci viene chiesto $P(\mathcal{E})$.

   Per la definizione classica di probabilità, abbiamo che

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\text{modi in cui possiamo scegliere 2 combinazioni significative}}{\text{di modi in cui possiamo scegliere 2 combinazioni}}$$

   Il numero di modi possibili in cui possiamo scegliere due delle 96 combinazioni è: $\binom{96}{2} = \frac{96\times95}{2}$. Invece il numero di modi in cui possiamo scegliere due combinazioni significative dall'insieme di 32 è $\binom{32}{2} = \frac{32\times31}{2}$.

   Per cui la probabilità richiesta è

$$\frac{\frac{32\times31}{2}}{\frac{96\times95}{2}} = \frac{32\times31}{96\times95} \approx 0.1$$

   Si noti che la risoluzione tramite la distribuzione ipergeometrica è valida e ci avrebbe restituito lo stesso risultato, dato che il numero di modi in cui possiamo scegliere 0 combinazioni non significative dall'insieme di 64 è $\binom{64}{0} = 1$.

3. Dall'enunciato abbiamo che $P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\hat{\mathcal{A}}) = 1$ dove $\hat{\mathcal{A}}$ rappresenta l'evento "non si sono verificate anomalie" e $P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) = 0.6$. Anche sappiamo che $P(\mathcal{A}_1) = 2P(\mathcal{A}_2)$, e perciò $P(\mathcal{A}_1) = 0.4$ e $P(\mathcal{A}_2) = 0.2$

   Ci viene chiesto $P(\mathcal{A}_2|\mathcal{E}_2)$. Per la definizione di probabilità condizionata sappiamo che:

$$P(\mathcal{A}_2|\mathcal{E}_2) = \frac{P(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{A}_2)}{P(\mathcal{E}_2)}$$

   Ora, se le anomalie sono indipendenti, avremmo per definizione di eventi indipendenti che:

   $P(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{A}_2) = P(\mathcal{E}_2)P(\mathcal{A}_2) = 0.2$

   e quindi:

$$P(\mathcal{A}_2|\mathcal{E}_2) = \frac{P(\mathcal{E}_2)P(\mathcal{A}_2)}{P(\mathcal{E}_2)} = P(\mathcal{A}_2) = 0.2$$

4. Dall'enunciato sappiamo che: $P(\mathcal{E}_1)+P(\mathcal{E}_2) = 1$, e che $P(\mathcal{E}_1) = 0.1$, per cui ricaviamo $P(\mathcal{E}_2) = 0.9$.

   In questo caso, per trovare $P(\mathcal{A}_2|\mathcal{E}_2)$ usiamo il teorema di Bayes:

$$P(\mathcal{A}_2|\mathcal{E}_2) = \frac{P(\mathcal{E}_2|\mathcal{A}_2)P(\mathcal{A}_2)}{P(\mathcal{E}_2)}$$

$$P(\mathcal{A}_2|\mathcal{E}_2) = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.9} \approx 0.07$$

2 Programmable Accelerators

Un'azienda vuole acquisire acceleratori programmabili (PAC) per rendere più efficenti i loro servizi basati su IA generativa. Si supponga che al mercato ci sono nove tipi diversi di PAC, ciascuno ha un costo 10K, 20K, 30K, e così via, fino ad arrivare ai PAC del costo di 90K[1].

1. Supponendo che l'azienda abbia comprato 3 PAC di 3 tipi diversi, quale è la probabilità che l'azienda abbia speso esattamente 60K? (2 pt.)

[1] 30K vuol dire € 30000 in gergo aziendale

2. Trovare la probabilità che l'azienda abbia speso la stessa quantità avendo comprato due PAC di tipo diverso. (1 pt)

3. L'azienda a comprato una, due, *oppure* tre PAC di tipo diverso, con uguale probabilità (cioè, ha comprato una sola PAC con probabilità 1/3, ne ha comprato due con probabilità 1/3, oppure ne ha comprato tre con probabilità 1/3). Sappiamo però che la spesa totale è stata di 60K. Usando quest'informazione, qual è la probabilità che si sia comprata una PAC? (4pt.)

4. Si assuma ora che l'azienda può comprare più di una PAC dello stesso tipo. Quale è la probabilità di aver speso 60K sapendo che si sono comprate esattamente 3 PAC? (3 pt)

2 Soluzione

1. Se non si possono comprate PAC di uno stesso tipo più volte, allora tutte le combinazioni di PAC che è possibile acquistare sono equiprobabili (anche se possiamo comprare le PAC in ordini diverse, tutte avranno lo stesso numero possibile di modi in cui possono essere acquisite). Questo ci permette di risolvere il problema in due modi diversi:

   a) senza tenere conto dell'ordine:

   Ci sono $\binom{9}{3} = 84$ combinazioni di 3 PAC di tipo diverso. (Dato che non si possono comprare PAC di uno stesso tipo più volte, stiamo parlando del numero di combinazioni semplici di 3 elementi presi da un insieme di 9).

   Non è difficile rendersi conto che l'unica combinazione di 3 PAC che risulta in una spessa di esattamente 60K e quella corrispondente alle PAC di prezzo 10K, 20K e 30K. (Se si compra una PAC di prezzo 40K o 50K non possiamo spendere 60K prendendone altre due di tipo diverso, per non parlare dell'impossibilità evidente di spendere 60K quando una delle PAC comprate ha prezzi maggiori o uguali a 60K!)

   Quindi, la probabilità che la somma delle tre PAC comprate sia 6 è, usando la definizione classica di probabilità: $\frac{1}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$.

   b) tenendo conto dell'ordine:

   Ci sono $\frac{9!}{(9-3)!} = 504$ modi di comprare 3 PAC di tipo diverso (stiamo parlando del numero di disposizioni semplici di 3 elem. presi da un insieme di 9). Di queste, sappiamo che 6 sono le possibili disposizioni che portano ad una spessa di 60K. E cioè sono le disposizioni di 3 elementi precisi (le PAC di prezzo 10K, 20K e 30K), che, sono, appunto $3! = 6$.

   Se utilizziamo ora la definizione classica di probabilità giungiamo allo stesso risultato:

   $$\frac{6}{504} = \frac{1}{84}$$

   Ambedue le soluzioni sono quindi considerate corrette in principio.

2. In modo simile all'esercizio precedente, possiamo calcolare la probabilità sapendo che il numero di combinazioni di due elementi diversi che portano ad una spesa di 60K sono 2, $(10K, 50K)$ e $(20K, 40K)$, mentre il numero di combinazioni semplici di due elementi presi da un insieme di 9 è $\frac{9!}{2! \times 7!} = 36$. Quindi la probabilità richiesta è:

   $$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

3. Siano E_1, E_2 e E_3 gli eventi "è stata acquistata una PAC", "sono state acquistate due PAC" e "sono state acquistate tre PAC". Per ipotesi, $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$.

Ora, sia F l'evento "la spesa totale è stata di 60K". Nel punto 1 abbiamo già visto che $P(F|E_3) = \frac{1}{84}$, e nel punto 2 abbiamo visto che $P(F|E_2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Infine, chiaramente ci sono 9 modi di comprare una sola PAC dove l'insieme delle scelte ha cardinalità 9, e l'unico di questi modi in cui la spesa è di 60K è quello in cui l'unica PAC acquistata è quella corrispondente a quello stesso prezzo. Quindi, $P(F|E_1) = \frac{1}{9}$.

Applicando il Teorema di Bayes,

$$P(E_1|F) = \frac{P(F|E_1)P(E_1)}{P(F)}$$

e cioè

$$P(E_1|F) = \frac{P(F|E_1)P(E_1)}{P(F|E_1)P(E_1) + P(F|E_2)P(E_2) + P(F|E_3)P(E_3)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{84} \cdot \frac{1}{3}} \approx 0.62,$$

cioè, con le informazioni a disposizioni, c'è una probabilità del 62% che solo una PAC sia stata comprata se la spesa totale è stata di 60K.

4. Per risolvere i punti precedenti non abbiamo tenuto conto dell'ordine, perché, potendo comprare le PAC di un certo tipo una sola volta, avevamo che tutte le combinazioni erano equiprobabili. Se però ora possiamo comprare PAC di tipo diverso, dobbiamo renderci conto che non tutte le combinazioni sono equiprobabili!

   Per esempio, c'è soltanto un modo di comprare 3 PAC tutte di costo 20K, ma ci sono sei modi di comprare le PAC di costo 10K, 20K, e 30K. Perciò, è molto più pratico risolvere l'esericizio dividendo le *disposizioni* di 3 PAC che risultano in una spessa di 60K per il numero di disposizioni di 3 elementi presi da un insieme di 9, dato che ogni disposizione è equiprobabile.

   Faciamo prima un conteggio "a mano" di tutte le disposizioni di 3 PAC -anche ripetute- che risultano in una spesa di 60K. Innanzitutto, sappiamo che queste disposizioni -o modi di effettuare la spesa- si possono ottenere a partire da 3 combinazioni di PAC: 1. Comprando due PAC, una da 10K e una da 40K, 2. Comprando tre PAC da 20K, e 3. Comprando le 3 PAC di prezzo diverso viste nel primo punto di questo esercizio.

   Ora, la prima opzione si può verificare in 3 modi diversi: {10K, 10K, 40K}, {10K, 40K, 10K}, oppure {40K, 10K, 10K}. La seconda opzione in un'unico modo, e la terza, in 6 modi diversi: {10K, 20K, 30K}, {10K, 30K, 20K}, , {20K, 10K, 30K}, {20K, 30K, 10K}, {30K, 10K, 20K}, {30K, 20K, 10K}.

   In tutto, 10 disposizioni ci portano ad una spesa esatta di 60K. (Avremmo potuto usare le formule per calcolare il numero di disposizioni, tenendo conto che però in due casi avevamo classi di elementi diversi).

   Sapendo poi che il numero di disposizioni con reinserimento di 3 elementi presi da un insieme di 9 è pari a $9^3 = 729$, la probabilità che la spesa delle 3 PAC acquisite sia di 60K è pari a $\frac{10}{729}$.

3 Terminator

La nuova azienda del signor Sutskever promette di sviluppare degli LLM (large language models) basati su un'architettura *Terminator*, capaci di essere servita su dispositivi mobili. Le risposte che questi modelli danno sono comunque stocastiche, perché basate su sampling. Quando si misura il punteggio di questo modello in un test ARC, il punteggio che si ottiene è, **in media**, 10. Si supponga che il punteggio non possa essere mai negativo.

1. Senza ipotizzare niente altro riguardo alla distribuzione di probabilità del punteggio ARC di questi modelli, stimate il *valore massimo* della probabilità che in un test eseguito, un modello terminator ottenga *almeno* 12 punti. (2 pt.)

2. Supponiamo di sapere anche che la deviazione standard del punteggio dei modelli è di 1 punto. In questo caso, quale è la minima probabilità che il modello ottenga un punteggio tra gli 8 e i 12 punti? (2 pt.)

3. Supponiamo che il punteggio dei terminator sul test ARC possa essere approssimato con una distribuzione normale (con valore atteso 10 e deviazione standard 1). Utilizzando questa ipotesi, calcolare la probabilità esatta che, in una determinata esecuzione del test, si ottengano *almeno* 12 punti. Trovare il valore numerico (3 pt.)

4. Usando le stesse assunzioni del punto precedente, quanti test dobbiamo eseguire affinché la media campionaria del punteggio ottenuto calcolata sui test eseguiti sia compresa tra 9 e 11 punti con una probabilità del 95%? (3 pt.)

3 Soluzione

1. Applichiamo la diseguaglianza di Markov (possiamo farlo perchè il punteggio ARC avrà sicuramente un valore non negativo e sappiamo il valore atteso). In altre parole, se X è la v.a. che indica il punteggio del modello in un esecuzione generica del test ARC, sappiamo dalla traccia che $\mathbb{E}[X] = 10$ e quindi, dalla disuguaglianza menzionata sappiamo che:

$$P\left(X \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}, \ \forall \alpha > 0$$

Sostituendo in questo caso α per 12, abbiamo che:

$$P\left(X \geq 12\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{12} = \frac{10}{12} \approx 0.83$$

Quindi la probabilità che il risultato del test sia maggiore di 12 è *al massimo* del 83%.

2. Sapendo anche la deviazione standard $\sigma = 1$, possiamo applicare la diseguaglianza di Chebyshev. Dato il problema ci chiede $P(8 \leq X \leq 12)$, stiamo parlando di un intervallo simmetrico attorno al valore atteso. Perciò possiamo esprimere questa probabilità come:

$$P(8 \leq X \leq 12) = P(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 2)$$

che sappiamo essere, per la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 2) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - 0.25 = 0.75$$

e cioè c'è una probabilità di almeno 75% che il modello ottenga un punteggio tra gli 8 ei 12 punti.

3. L'enunciato ci dice che possiamo assumere: $X \sim \mathcal{N}(\mu = 10, \sigma = 1)$ e ci viene chiesto $P(X \geq 12)$. Per trovare tale probabilità possiamo avvalerci della normalizzazione di X, e cioè creare un'opportuna v.a. $\hat{X} = \frac{X-\mu}{\sigma}$ che sapremo essere standardizzata, cioè $\hat{X} \sim \mathcal{N}(1, 0)$.

Con quest'accortezza, la probabilità richiesta in funzione di $\hat{X}$ diventa:

$$P(X \geq 12) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{12 - \mu}{\sigma}) = P(\hat{X} \geq \frac{12 - \mu}{\sigma}) = P(\hat{X} \geq 2)$$

che sappiamo essere uguale a:

$$1 - \mathbf{\Phi}(2) = 1 - 0.97 = 0.03$$

e cioè, sotto le nuove assunzioni, solo nel 3% dei casi, i terminator otterranno più di 12 punti nel test ARC.

4. Utilizzando S_n per indicare la v.a. che corrisponde alla somma dei punteggi ottenuti in n test eseguiti, dal teorema del limite centrale sappiamo che la deviazione standard di $\frac{S_n}{n}$ sarà $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$, dove $\sigma = 1$ è la dev. standard di X. Sappiamo anche che il valore atteso di $\frac{S_n}{n}$ lo stesso di X, e cioè μ.
La domanda ci sta chiedendo il valore di n tale che: $P(-1 < \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X] < 1) = 0.95$
Con lo stesso ragionamento del punto precedente, possiamo standardizzare $\frac{S_n}{n}$ e avremmo che la probabilità richiesta si può calcolare usando la distribuzione normale standard:

$$P(\frac{-1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}) = \mathbf{\Phi}(\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}) - \mathbf{\Phi}(\frac{-1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}) = \mathbf{\Phi}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}) - \mathbf{\Phi}(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{n}}})$$

Dobbiamo perciò risolvere l'equazione:

$$\mathbf{\Phi}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}) - \mathbf{\Phi}(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}) = 0.95$$

Che è equivalente a:

$$2\mathbf{\Phi}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}) - 1 = 0.95$$

E quindi:

$$\mathbf{\Phi}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}) = 0.975$$

Da cui, facendo un lookup inverso sulla tabella $\mathbf{\Phi}$ avrò:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = 1.96$$

e cioè:

$$\frac{1}{1.96} = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad \rightarrow \quad (\frac{1}{1.96})^2 = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{(\frac{1}{1.96})^2} \approx 3,84$$

E cioè, serve eseguire il test 4 volte per avere una media campionaria tra i 9 e gli 11 punti con una probabilità o confidenza del (leggermente maggiore) del 95%.