Logica Proposizionale - Parte 1

Corso di Logica

Brunella Gerla

Università dell'Insubria, Varese
brunella.gerla@uninsubria.it

Pagina web del sito dell'elearning:

http://elearning.uninsubria.it - Logica (2017/2018)

Libro di testo:

- Slide sul sito di elearning (aggiornate dopo le lezioni)
- A. Asperti - A. Ciabattoni: Logica a Informatica. McGraw-Hill
- appunti online.

Approfondimenti:

- D. Mundici - Logica: metodo breve. Springer.
- D. e C. Palladino - Logiche non-classiche. Carrocci editore.
- Slide e appunti sul sito.

Prerequisiti

- Matematica discreta:
  - Insiemi e funzioni
  - Relazioni d'equivalenza
  - Proprietà dei numeri interi
- Cenni di informatica teorica (computabilità)
- Ragionamento matematico

Programma

- Logica proposizionale:
  - Tavole di verità
  - Forme normali
  - Metodi di dimostrazione
- Logica dei predicati
  - Quantificatori e variabili
  - Semantica
  - Metodi di dimostrazione
- Logiche non classiche
- Cenni alla verifica dei programmi e/o logica descrittiva.

Logica Matematica

Lo studio della logica matematica come manipolazione algebrica (simbolica) dei gradi di verità è iniziato con Boole (1815 - 1864) (e sviluppato poi da Frege (1848 - 1945)) con l'utilizzo dei simboli 0 e 1, che si sono poi rivelati fondamentali per gli inizi dello studio dell'informatica.

La logica, intesa come studio del ragionamento umano, invece ha origini molto più antiche. Di solito si fanno risalire i primi studi su questo argomento ad Aristotele (384 a.C.), che si occupò di formalizzare il ragionamento attraverso i sillogismi.

Ma l'utilizzo di una notazione più sintetica e matematica è stato il passo decisivo che ha portato alla formalizzazione del linguaggio logico e alla distinzione tra la logica come disciplina filosofica e la logica matematica (che è quella che studieremo durante questo corso).

Schemi di ragionamento - sillogismi

Uno dei primi schemi di ragionamento studiati (fin dai tempi di Aristotele) è il *sillogismo*:

Tutti i carnivori hanno i denti affilati
Il T-rex è un carnivoro

QUINDI il T-rex ha i denti affilati

Tale ragionamento può essere schematizzato nel seguente modo (vedremo dopo una formalizzazione più precisa): Se $C(x)$ vuol dire x è un carnivoro, $D(x)$ vuol dire x ha i denti affilati, allora vale che

$$\frac{C(\text{T-rex}) \qquad \forall x[C(x) \to D(x)]}{D(\text{T-rex})}$$

Usiamo una linea orizzontale proprio come per le operazioni, per sottolineare che stiamo cercando di capire se ci sono delle regole per ragionare che valgano per le affermazioni così come le operazioni aritmetiche valgono per i numeri.
Esempi invece di ragionamento *sbagliato* (ma purtroppo molto comune) sono i seguenti:

Tutti i gatti di Forlimpopoli sono bianchi
Fido è bianco
QUINDI Fido è un gatto

C'è sicuramente uno studente che copia
Enea è uno studente
QUINDI Enea copia

Non è vero...

Tre diversi tipi di ragionamento scientifico (è una esemplificazione...)

Deduzione

La matematica usa la **deduzione**: se sono sicuro che vale A e se dimostro che ogni volta che vale A allora vale B , allora deve valere anche B. Rappresentiamo schematicamente questo tipo di ragionamento nel seguente modo:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}.$$

Induzione

Le scienze sperimentali (quali la fisica e la chimica) usano invece un altro tipo di ragionamento, l'**induzione**: se osservo che tutte le volte che ho un fenomeno A poi si verifica anche un fenomeno B allora posso dedurre che vale la regola $A \to B$:

$$\frac{A \qquad B}{A \to B}.$$

Abduzione

Infine se siamo nell'ambito delle diagnosi, quindi per esempio in medicina, usiamo ancora un altro tipo di ragionamento, l'**abduzione**: se ho imparato che ad una certa malattia A corrispondono dei sintomi B e osservo i sintomi B allora diagnostico la malattia A:

$$\frac{A \to B \qquad B}{A}.$$

Vedremo che la differenza maggiore tra i tre tipi di ragionamento risiede nel fatto che solo la deduzione permette di ottenere formule vere a partire da formule vere.

Logica proposizionale

La logica proposizionale si occupa di studiare il grado di verità delle *proposizioni* o *asserzioni*.
Una proposizione è una frase alla quale può essere assegnato un valore di verità , cioè della quale si può dire se è vera o falsa.
Sono esempi di asserzioni le frasi

> *'questa mela è rossa'*

oppure

> *'il mare è giallo'*

o

anche frasi composte come

> *'ogni numero intero o è pari o è dispari'*

Esempi di frasi che non sono asserzioni sono tutte le domande, le esclamazioni ('stai bene?', 'mangi quella mela?', 'vattene!') e in generale le frasi per le quali non ha senso dire se sono vere o false. Questa chiaramente non è una definizione molto formale, ma può bastare per farsi un'idea del nostro contesto.

Una asserzione complessa è formata da più asserzioni semplici composte tra di loro tramite delle paroline speciali che chiameremo *connettivi*.
A questo livello di studio siamo interessati solo ad alcuni connettivi, in particolare

- alla *negazione* ('non è vero che questa mela è rossa'),
- alla *congiunzione* ('questa mela è rossa e il mare è blu'),
- alla *disgiunzione* ('questa mela è rossa oppure è gialla') e
- all'*implicazione* ('se questa mela è rossa allora me la mangio').

Nella nostra formalizzazione useremo un simbolo per ogni asserzione che non è composta da altre asserzioni (cioè per ogni asserzione *atomica*), e poi utilizzeremo dei simboli per i connettivi. Le asserzioni atomiche saranno denotate con dei simboli che chiameremo *variabili proposizionali* perché il loro valore di verità potrà variare tra vero e falso.

Una proposizione può essere vera o falsa, a seconda del contesto.
Per ora ci occupiamo di logica con DUE valori di verità : VERO (o V o 1) e FALSO (o F o 0).

Consideriamo le seguenti proposizioni:

La mela è rossa

n è un numero pari

Entrambe possono essere vere o false, la prima dipende da quale mela stiamo considerando, la seconda dipende dal valore di n.
Ma le seguenti proposizioni sono sempre vere:

Se la mela è rossa allora non è verde

n è un numero pari oppure è un numero dispari

Proposizioni di questo ultimo tipo, che sono sempre vere, si chiamano **tautologie**.

Linguaggio

Definizione

Il linguaggio della logica proposizionale è formato dai seguenti insiemi

- *Var insieme delle variabili proposizionali:* X, Y, ...
- *connettivi* $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
- *parentesi* (,)

I connettivi $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ (rispettivamente chiamati congiunzione, disgiunzione e implicazione) sono connettivi *binari* che hanno cioè due argomenti. Invece la negazione $\neg$ è un connettivo unario, con un solo argomento.

Formule

Definizione

L'insieme Form delle formule è definito nel seguente modo:

- *Ogni variabile è una formula* $Var \subseteq Form$;
- *Se* P *è una formula allora* $(\neg P)$ *è una formula;*
- *Se* P_1, P_2 *sono formule allora* $(P_1 \wedge P_2)$, $(P_1 \vee P_2)$, $(P_1 \rightarrow P_2)$ *sono formule.*

Diremo che i connettivi $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ sono rispettivamente i connettivi *principali* delle formule $(P_1 \wedge P_2)$, $(P_1 \vee P_2)$, $(P_1 \rightarrow P_2)$ e che $\neg$ è il connettivo principale della formula $(\neg P)$.

Gerarchia dei connettivi

Nella definizione delle formule, le parentesi sono utilizzate per evitare ambiguità .
La definizione data però ci obbliga ad usare tante parentesi: per esempio $X \wedge Y$ non è una formula perchè non ha le parentesi.
Cerchiamo quindi un compromesso tra la praticità di scrittura e la precisione sintattica.

La prima regola è quella di evitare di scrivere le parentesi che racchiudono tutta la formula. Poi diamo una gerarchia ai connettivi, in modo da risparmiare sulle parentesi.

Gerarchia dei connettivi

Stabiliamo che, in mancanza di parentesi che chiariscano la situazione, la negazione viene applicata prima degli altri connettivi: quindi per esempio la formula $\neg X \to Y$ va intesa come $(\neg X) \to Y$.
In secondo luogo stabiliamo che la congiunzione e la disgiunzione si applicano prima dell'implicazione (ma dopo la negazione): per esempio $\neg X \wedge Y \to \neg Z$ va letta come $((\neg X) \wedge Y) \to (\neg Z)$. In questo modo potremmo utilizzare una scrittura più veloce senza perdere in precisione.

Esempio

La formula

$$X \vee \neg Y \to X \wedge \neg Z$$

si legge come

$$(X \vee \neg Y) \to (X \wedge \neg Z)$$

Induzione strutturale

L'insieme delle formule è definito per induzione strutturale, cioè si parte con la definizione delle formule più piccole, quelle atomiche, e poi si dice come comporre formule più complesse. Questa definizione è molto comoda per esprimere concetti validi per tutte le formule. Di seguito ne vedremo alcuni.

Sottoformule

Definizione

L'insieme $Sub(P)$ *delle sottoformule di una formula* P *è definito nel seguente modo:*

- *Se* P *è una variabile proposizionale allora* $Sub(P) = \{P\}$*;*
- *Se* $P = P_1 \wedge P_2$*,* $P = P_1 \vee P_2$*, o* $P = P_1 \rightarrow P_2$ *allora* $Sub(P) = Sub(P_1) \cup Sub(P_2) \cup \{P\}$*; in questo caso diremo che* P_1 *e* P_2 *sono le sottoformule principali di* P*.*
- *Se* $P = \neg P_1$ *allora* $Sub(P) = Sub(P_1) \cup \{P\}$*; in questo caso* P_1 *è la sottoformula principale di* P*.*

Esempio. Sia $P = (X \to Z) \wedge (Y \vee \neg X)$. Allora

$$\begin{aligned}
Sub(P) &= Sub(X \to Z) \cup Sub(Y \vee \neg X) \cup \{P\} = \\
&= Sub(X) \cup Sub(Z) \cup \{X \to Z\} \cup \\
&\quad\; Sub(Y) \cup Sub(\neg X) \cup \{Y \vee \neg X\} \cup \{P\} = \\
&= \{X, Z, X \to Z\} \cup \{Y\} \cup Sub(X) \cup \{\neg X\} \cup \{Y \vee \neg X, P\} \\
&= \{X, Z, X \to Z, Y, \neg X, Y \vee \neg X, P\}
\end{aligned}$$

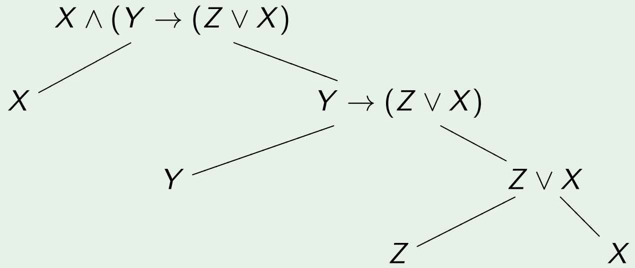
Albero di Parsing

La struttura di una formula P può essere resa esplicita disegnando il suo *albero di parsing*, che è un albero costruito nel seguente modo:

- la radice dell'albero è P.
- se in un nodo c'è una formula Q il cui connettivo principale è binario, allora questo nodo avrà due successori etichettati dalle sottoformule principali di Q.
- se in un nodo c'è una formula Q il cui connettivo principale è unario, allora questo nodo avrà un successore etichettato dalla sottoformula principale di Q.
- i nodi contenenti variabili proposizionali sono le foglie dell'albero.

Esempio

Questo è l'albero della formula $X \wedge (Y \to (Z \vee X))$:



$Sub(P)$ è l'insieme di tutti i nodi dell'albero di parsing.

Esercizio. Definire (usando l'induzione strutturale) l'altezza dell'albero di parsing di una formula P.

Una formula può quindi contenere più volte una variabile come sottoformula. Per indicare una variabile in una posizione particolare della formula, parliamo di *occorrenza* della variabile. Questo concetto può essere spiegato dalla prossima definizione.

Definizione

Il numero di occorrenze di una variabile X in una formula P è il numero $\#(X, P)$ definito nel seguente modo:

- *Se P è una variabile proposizionale allora $\#(X, P) = 1$ se $P = X$ mentre $\#(X, P) = 0$ se $X \neq P$;*
- *Se $P = P_1 \wedge P_2$, $P = P_1 \vee P_2$, o $P = P_1 \to P_2$ allora $\#(X, P) = \#(X, P_1) + \#(X, P_2)$*
- *Se $P = \neg P_1$ allora $\#(X, P) = \#(X, P_1)$.*

Definizione

La lunghezza $|P|$ di una formula P è il numero di connettivi che compaiono in P ed è definita per induzione da:

- *Se P è una variabile proposizionale allora $|P| = 0$;*
- *Se $P = P_1 \wedge P_2$, $P = P_1 \vee P_2$, o $P = P_1 \to P_2$ allora $|P| = |P_1| + |P_2| + 1$*
- *Se $P = \neg P_1$ allora $|P| = |P_1| + 1$.*

A volte la lunghezza di una formula è definita come il numero totale di variabili. Quale rapporto c'è tra queste due lunghezze? (Provare a definirle entrambe per induzione strutturale).

Valutazioni

Come abbiamo detto, alle variabili proposizionali possiamo assegnare sia il valore vero che il valore falso. Non è un compito della logica proposizionale stabilire quale è il valore di verità di una variabile proposizionale (cioè di una formula atomica). Compito della logica proposizionale è invece quello di stabilire il valore di una formula per ogni possibile assegnamento dei valori di verità alle formule atomiche.

Definizione (Interpretazione delle formule)

Una valutazione delle variabili è una qualsiasi funzione $v : Var \to \{0, 1\}$*. Ogni valutazione* v *si estende ad una valutazione* $v^* : Form \to \{0, 1\}$ *nel seguente modo:*

- *se* $P \in Var$ *allora* $v^*(P) = v(P)$;
- *se* $P = \neg Q$ *allora* $v^*(P) = 1 - v^*(Q)$;
- *se* $P = Q_1 \wedge Q_2$ *allora* $v^*(P) = \min(v^*(Q_1), v^*(Q_2))$;
- *se* $P = Q_1 \vee Q_2$ *allora* $v^*(P) = \max(v^*(Q_1), v^*(Q_2))$;
- *se* $P = Q_1 \to Q_2$ *allora* $v^*(P) = \max(1 - v^*(Q_1), v^*(Q_2))$;

Tavole di verità

Le valutazioni dei connettivi possono essere riassunte con delle tabelle nelle quali si riportano le interpretazioni delle formule al variare delle valutazioni delle variabili:

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

X	$\neg X$
0	1
1	0

Quindi una valutazione permette di associare un valore di verità ad una formula a partire dal valore di verità delle variabili proposizionali che vi compaiono.
Nel seguito utilizzeremo i simboli di connettivi anche come simboli di operazioni tra 0 e 1 o tra V e F. Quindi scriveremo $0 \wedge 1$ oppure $F \to V$, considerando che l'interpretazione di tali espressioni sia chiara dal contesto.

Esempio

Sia $P = (X \vee \neg Y) \to (Y \wedge (Y \to X))$. Consideriamo la valutazione v tale che $v(X) = 1$ e $v(Y) = 0$. Allora sarà
$v^*(P) = (1 \vee 1) \to (0 \wedge (0 \to 1)) = 1 \to 0 = 0$.

Useremo v al posto di v^*.

Implicazione

Concentriamoci sulla tavola di verità dell'implicazione:

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In una implicazione $X \to Y$, la formula X che è scritta a sinistra del simbolo $\to$ è chiamata *antecedente* mentre l'altra è il *conseguente*.

Il significato dell'implicazione deve essere ben chiaro: una implicazione è falsa solo quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Consideriamo per esempio la frase *Se piove allora apro l'ombrello* che posso anche scrivere come *piove implica apro l'ombrello*. Qual è l'unico modo per accorgersi che questa implicazione è falsa? Quando piove ma io non apro l'ombrello. In tutti gli altri casi non ci sono motivi per dire che la formula è falsa. In particolare, quando non piove la formula non è falsa. Questo esempio sarà ripreso più avanti.

Per rappresentare tutte le possibili valutazioni della formula P al variare delle valutazioni delle variabili X e Y possiamo utilizzare una tabella, che chiameremo *tavola di verità* della formula.
Per comodità possiamo rappresentare nella tabella non solo le variabili e la formula da studiare, ma anche tutte (o alcune) le sue sottoformule.
Scriviamo la tabella della formula dell'esempio precedente
$P = (X \vee \neg Y) \to (Y \wedge (Y \to X))$:

X	Y	$\neg Y$	$X \vee \neg Y$	$Y \to X$	$Y \wedge (Y \to X)$	P
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ogni riga della tabella corrisponde ad una valutazione delle variabili.
Quindi per una formula con n variabili si dovrà scrivere una tabella con 2^n righe.
Esercizio: Scrivere la tavola di verità di $(X \to \neg Z) \vee (Y \wedge \neg X)$.

Definizione

Una formula P è **soddisfacibile** *se esiste una valutazione della variabili v tale che $v(P) = 1$, cioè se esiste una riga della sua tavola di verità nella quale la formula ha valore 1. In questo caso si dice che la valutazione v soddisfa la formula P e si scrive anche $v \vDash P$.*

Una formula è una **tautologia** *se per ogni valutazione delle variabili v si ha $v(P) = 1$, cioè se in ogni riga della tavola di verità di P la formula ha valore 1. In questo caso si scrive anche $\vDash P$.*

Una formula è una **contraddizione** *o* insoddisfacibile *se per ogni valutazione delle variabili v si ha $v(P) = 0$, cioè se in ogni riga della tavola di verità di P la formula ha valore 0.*

Esempio

Sono tautologie:

- Tertium non datur: $A \vee \neg A$; ($A \wedge \neg A$ è invece una contraddizione);
- Ex falso quodlibet: $(A \wedge \neg A) \to A$
- Consequentia Mirabilis: $(\neg A \to A) \to A$;
- Modus ponens: $((A \to B) \wedge A) \to B$;
- Legge di Dummett: $(A \to B) \vee (B \to A)$
- Prefisso: $A \to (B \to A)$
- Contrapposizione: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Proposizione

P è una tautologia se e solo se $\neg P$ è una contraddizione. Se P è una tautologia allora P è soddisfacibile.

Proposizione

Se la formula A contiene le variabili $X_1, \ldots, X_n$ e se v e v' sono due valutazioni tali che

$$v(X_i) = v'(X_i)$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora si ha che $v(A) = v'(A)$. (Quindi il valore $V(A)$ è determinato unicamente dal valore delle variabili).

La dimostrazione segue facilmente per induzione strutturale.
Consideriamo per esempio la formula $(X \wedge Y) \to Z$: le valutazioni della sottoformula $X \wedge Y$ saranno indipendenti dalla valutazione di Z, quindi nella tavola di verità si ripeteranno uguali sia per $Z = 0$ che per $Z = 1$:

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \to Z$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Diamo un'altra definizione per induzione strutturale:

Definizione

Siano A e B delle formule e X una variabile. Allora la formula $A[B/X]$ è definita induttivamente (su A) nel seguente modo:

- se $A = X$ allora $A[B/X] = B$;
- se $A = Y$ (con Y variabile diversa da X) allora $A[B/X] = A$;
- se $A = \neg A_1$ allora $A[B/X] = \neg(A_1[B/X])$;
- se $A = A_1 * A_2$ (con $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$) allora $A[B/X] = A_1[B/X] * A_2[B/X]$.

Questa definizione coincide con l'idea che $A[B/X]$ si ottiene scrivendo B al posto di ogni occorrenza di X nella formula A.

Per esempio, se $A = X \to (\neg X \vee (Y \wedge X))$ e $B = Z \vee \neg Y$ allora

$$A[B/X] = (Z \vee \neg Y) \to (\neg(Z \vee \neg Y) \vee (Y \wedge (Z \vee \neg Y))).$$

Proposizione

Sia A una tautologia contenente la variabile proposizionale X e sia B un'altra formula. Allora anche $A[B/X]$ è una tautologia.

Esempio

Legge di Dummett: sia $A = (X \to Y) \vee (Y \to X)$. A è una tautologia. Allora anche $A[(X \wedge Y)/Y] =$

$$(X \to (X \wedge Y)) \vee ((X \wedge Y) \to X)$$

è una tautologia (provare).

Definizione

Un insieme di formule Δ è **soddisfacibile** se esiste una valutazione v che soddisfa tutte le formule di Δ. In questo caso si scrive $v \models \Delta$ oppure $v(\Delta) = 1$.

Esempio

Sia $\Delta = \{X \wedge Y, Y\}$. Δ è soddisfacibile?
Si, perché esiste una valutazione v, per esempio $v(X) = 1$ e $v(Y) = 1$ che soddisfa entrambe le formule di Δ.
E l'insieme $\Delta' = \{X \wedge Y, \neg Y, \neg X\}$?
Tale insieme non è soddisfacibile perché se $v(X \wedge Y) = 1$ allora deve essere necessariamente $v(X) = 1$ e quindi $v(\neg X) = 0$, quindi non può esistere una valutazione che soddisfa tutte le formule di Δ'.

Nota che è molto diverso dire che un insieme è soddisfacibile e che tutte le sue formule sono soddisfacibili. Per esempio Δ' non è soddisfacibile ma tutte le sue formule lo sono.

Esempio

Consideriamo i seguenti fatti:
Ci sono tre amiche, Anna, Beatrice e Carla che devono decidere se uscire per andare al cinema. Se Anna esce allora anche Beatrice e Carla escono. Se Beatrice esce anche Carla esce, ma Beatrice decide di non uscire. C'è una soluzione per questa situazione?
Possiamo rappresentare con delle variabili proposizionali i seguenti fatti:
A per "Anna esce"
B per "Beatrice esce"
C per "Carla esce".
Allora la situazione totale è descritta dall'insieme di formule

$$\{A \to B \land C,\ B \to C,\ \neg B\}$$

che è soddisfacibile: le valutazioni $A = B = C = 0$ (cioè le tre ragazze restano a casa) e $A = B = 0$, $C = 1$ (cioè esce solo Carla) soddisfano entrambe le condizioni iniziali.

Definizione

Sia Δ un insieme di formula e A una formula. Allora diciamo che Δ implica logicamente A (o che A è una conseguenza logica di Δ) e si scrive $\Delta \models A$, se per ogni valutazione v tale che $v \models \Delta$, si ha $v(A) = 1$. Se $\Delta = \{P\}$ è formato solo da un elemento (cioè è un singleton) allora scriviamo $P \models A$ invece di $\{P\} \models A$.

Esempio

Sia $\Delta = \{X \to Y, X\}$. Allora $\Delta \models Y$. Infatti andando a scrivere la tavola di verità si ha:

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

e l'unica valutazione che soddisfa l'insieme Δ (cioè l'ultima) soddisfa anche Y.

$\Delta_1 = \{A \vee B, C \vee \neg A\} \models B \vee C$.

$\Delta_2 = \{A \vee B, B \to C\} \not\models C$ ma $\Delta_2 \models A \vee C$.

Esempio

Consideriamo vera la frase "Se piove apro l'ombrello". Posso dedurre che se apro l'ombrello allora sta piovendo? E che se non apro l'ombrello vuol dire che non sta piovendo?
Proviamo a formalizzare nella logica proposizionale considerando una variabile proposizionale P per dire "piove" e una variabile proposizionale "O" per dire che apro l'ombrello.
I due problemi quindi corrispondono a chiedersi se:

(i) $P \to O \models O \to P$;

(ii) $P \to O \models \neg O \to \neg P$.

Si verifica che (i) è falsa mentre (ii) è vera.

Teorema

$\Delta \models A$ *se e solo se* $\Delta \cup \{\neg A\}$ *è insoddisfacibile.*

Dimostrazione.

Cominciamo con l'assumere che $\Delta \models A$, vogliamo dimostrare che per ogni valutazione v c'è una formula di $\Delta \cup \{\neg A\}$ che non è soddisfatta da v. Se v è una valutazione tale che $v \not\models \Delta$ allora ci sarà una formula di Δ non soddisfatta da v e quindi v non soddisfa neanche $\Delta \cup \{\neg A\}$. Se invece $v \models \Delta$ allora dato che A è una conseguenza logica di Δ si avrà $v(A) = 1$ e quindi $v(\neg A) = 0$. Anche in questo caso allora v non soddisfa l'insieme $\Delta \cup \{\neg A\}$ che risulta quindi insoddisfacibile.
Viceversa, supponiamo che $\Delta \cup \{\neg A\}$ sia insoddisfacibile. Sia v una valutazione che soddisfa Δ. Se fosse $v(A) = 0$ allora sarebbe $v(\neg A) = 1$ e quindi v soddisfarebbe l'insieme $\Delta \cup \{\neg A\}$ che abbiamo detto essere insoddisfacibile. Deve quindi necessariamente essere $v(A) = 1$ e quindi A è una conseguenza logica di Δ. $\square$

Teorema (di Deduzione)

$A \models B$ se e solo se $\models A \to B$.

Dimostrazione.

Se $A \models B$ allora per ogni interpretazione v, se $v(A) = 1$ si ha per ipotesi che anche $v(B) = 1$ e quindi $v(A \to B) = 1$ mentre se $v(A) = 0$ allora ancora $v(A \to B) = 1$ e quindi $A \to B$ è una tautologia.
Viceversa, se per ogni valutazione v si ha che $v(A \to B) = 1$, allora se $v(A) = 1$ deve essere necessariamente (per come è definita l'implicazione) $v(B) = 1$. $\square$

In generale, se Γ è un insieme finito di formule, si ha che

$$\Gamma \models B \text{ se e solo se } \models \bigwedge_{A \in \Gamma} A \to B$$

Equivalenza logica

Definizione

Due formule A e B sono *logicamente equivalenti* (e scriviamo $A \equiv B$) se per ogni valutazione v si ha $v(A) = v(B)$.

Due formule logicamente equivalenti hanno la stessa tavola di verità (considerando lo stesso ordine di valutazione delle variabili, cioè lo stesso ordine delle righe).

Esempio

Primi esempi di equivalenze logiche molto semplici da verificare sono la legge commutativa e associativa di $\wedge$ e $\vee$:

$$\begin{array}{rr} A \wedge B \equiv B \wedge A & \qquad A \vee B \equiv B \vee A \\ A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C & \qquad A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C\,. \end{array}$$

Nota che la legge associativa ci permette di scrivere congiunzioni e disgiunzioni di più di due formule, senza usare le parentesi (si scriverà quindi $A \vee B \vee C$ per indicare $(A \vee B) \vee C$ o equivalentemente $A \vee (B \vee C)$).

Esempio

L'implicazione invece non è commutativa $A \to B \not\equiv B \to A$ e neanche associativa $A \to (B \to C) \not\equiv (A \to B) \to C$.

Contronominale: $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$. Questa equivalenza si usa spesso nelle dimostrazioni: se voglio dimostrare che da A segue B posso provare a ipotizzare la negazione di B e concludere che da tale ipotesi segue la negazione di A. Se poi aggiungo che $A \wedge \neg A \equiv \bot$ ottengo le dimostrazioni per assurdo.

Implicazione materiale: le formule $A \to B$ e $\neg A \vee B$ sono logicamente equivalenti:

A	B	$A \to B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Esempio

Doppia negazione: $\neg\neg A \equiv A$.

Leggi di De Morgan: Le formule $\neg(A \vee B)$ e $\neg A \wedge \neg B$ sono logicamente equivalenti.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Analogamente si ha che $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$. Inoltre vale

$$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \vee B &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B). \end{aligned}$$

Esempio

Assorbimento:

$$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$$
$$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$$

Legge distributiva: Vale la distributività di $\wedge$ rispetto a $\vee$ e anche il viceversa.

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$
$$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

Generalizzando si ha che vale:

$$(X_1 \vee X_2) \wedge (Y_1 \vee Y_2) \equiv (X_1 \wedge Y_1) \vee (X_1 \wedge Y_2) \vee (X_2 \wedge Y_1) \vee (X_2 \wedge Y_2)$$
$$(X_1 \wedge X_2) \vee (Y_1 \wedge Y_2) \equiv (X_1 \vee Y_1) \wedge (X_1 \vee Y_2) \wedge (X_2 \vee Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2)$$

Posso usare l'equivalenza logica anche per definire nuovi connettivi:
Per esempio

$$\bot \equiv \neg X \wedge X \qquad\qquad \top \equiv X \vee \neg X$$

denotano rispettivamente la formula sempre falsa e la formula vera.

Proposizione

Se P è una tautologia allora $P \equiv \top$.
Se P è una contraddizione allora $P \equiv \bot$.

Teorema (di sostituzione)

Sia v una valutazione tale che $v(P) = v(Q)$: allora per ogni formula R e variabile proposizionale X si ha

$$v(R[P/X]) = v(R[Q/X]) .$$

In particolare, se $P \equiv Q$ allora $R[P/X] \equiv R[Q/X]$.

Dimostrazione.

Procediamo per induzione strutturale su R.

- Se $R = X$ variabile proposizionale, allora $R[P/X] = P$ e $R[Q/X] = Q$, quindi banalmente $v(R[P/X]) = v(P) = v(Q) = v(R[Q/X])$;
- se $R = Y$ variabile proposizionale diversa da X, allora $R[P/X] = R$ e $R[Q/X] = R$, quindi banalmente $v(R[P/X]) = v(R) = v(R[Q/X])$;
- se $R = R_1 * R_2$ con $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$ allora $R[P/X] = R_1[P/X] * R_2[P/X]$ e $R[Q/X] = R_1[Q/X] * R_2[Q/X]$, quindi, per ipotesi di induzione, $v(R_1[P/X]) = v(R_1[Q/X])$ e $v(R_2[P/X]) = v(R_2[Q/X])$ e quindi $v(R[P/X]) = v(R[Q/X])$;
- se $R = \neg R_1$ è analogo.

Esempio

Sia $P = X \to Y$ e $Q = X \vee Y$. Se $v(X) = 0$ e $v(Y) = 1$ allora $v(X \to Y) = 1$ e $v(X \vee Y) = 1$. Sia $R = \neg(X \to Y)$. Allora

$$\begin{aligned} R[P/Y] &= \neg(X \to (X \to Y)) \\ R[Q/Y] &= \neg(X \to (X \vee Y)) \end{aligned}$$

e $v(R[P/Y]) = 0$ e $v(R[Q/Y]) = 0$. Nota che per una valutazione v' tale che $v'(X) = 1$ e $v'(Y) = 0$ si ha $v(R[P/Y]) = 1$ e $v(R[Q/Y]) = 0$, e infatti $v'(X \to Y) = 0$ e $v'(X \vee Y) = 1$.

Il teorema di sostituzione ci permette di sostituire una parte di una formula con una ad essa equivalente, e ottenere una formula equivalente a quella di partenza.