Logica proposizionale - parte 2

Corso di Logica

Brunella Gerla

Università dell'Insubria, Varese
brunella.gerla@uninsubria.it

Abbiamo introdotto i seguenti concetti:

- Linguaggio proposizionale e formule;
- Valutazione di una formula, tavole di verità ;
- Formule soddisfacibili e tautologie;
- Conseguenza logica;
- Equivalenza logica.

Consideriamo un nuovo connettivo $\leftrightarrow$ definito da

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\,.$$

La tavola di verità di questo connettivo sarà :

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nota che $\models A \leftrightarrow B$ se e solo se $A \equiv B$. Che differenza c'è tra $\leftrightarrow$ e $\equiv$?

$\leftrightarrow$ è un connettivo, cioè un simbolo del linguaggio. Invece $\equiv$ è un simbolo che usiamo per parlare delle formule, è quindi un simbolo del *metalinguaggio*.

Forma normale disgiuntiva

Definizione

Un **letterale** è una variabile o la negazione di una variabile.

Una formula è in **forma normale disgiuntiva (DNF)** se è della forma

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right)$$

dove per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m_i$ (con $n \geq 1$ e $m_i \geq 1$) gli l_{ij} sono letterali.

Esempio

$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg Z \wedge X \wedge Y)$ è una formula in DNF (dove $n = 2$, $m_1 = 2$ e $m_2 = 3$) .

DNF

Se $n = 1$ allora la disgiunzione ha un solo disgiunto che deve essere una congiunzione di letterali. Quindi per esempio la formula $\neg Z \wedge X \wedge Y$ è un caso particolare di DNF.

Analogamente, se $m_i = 1$ allora l'i-esimo disgiunto è costituito solo da un congiunto. Quindi per esempio la formula $X \vee (Y \wedge \neg X) \vee (\neg Y \wedge X \wedge Z)$ è in DNF ($m_1 = 1$).

Se $m_i = 1$ per ogni i, allora si hanno formule che sono disgiunzioni di letterali, che sono quindi ancora in DNF (per esempio $\neg X \vee Y \vee \neg X$).

Se $n = 1$ e $m_1 = 1$ allora si ha un solo letterale, che è un caso speciale di DNF.

CNF

Definizione

Analogamente diciamo che una formula è in **forma normale congiuntiva** se è una congiunzione di disgiunzioni di letterali.

Esempio

La formula $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg Y \vee Z)$ è in CNF.

La formula $\neg Y \wedge (X \vee Z)$ è in CNF.

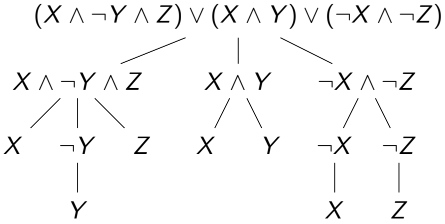
Le formule $\neg Y \wedge X \wedge Z$ e $\neg Y \vee Z \vee \neg Z$ sono in CNF (e anche in DNF).

Albero di parsing di una DNF

Che forma ha l'albero di parsing di una DNF?
Abbiamo detto che per la proprietà associativa i connettivi $\wedge$ and $\vee$ possono essere considerati di arità variabile, quindi modifichiamo anche la definizione di albero di parsing per permettere ad un nodo di avere più di due successori. Procediamo con un esempio: la formula in DNF

$$(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z)$$

ha il seguente albero di parsing:



Trasformazione tramite equivalenze logiche

C'è un metodo algebrico per trasformare una formula in forma normale congiuntiva o disgiuntiva:
Trasformiamo una formula P in formule ad essa equivalenti nel seguente modo (le leggi commutative e associative e della doppia negazione sono applicate quando necessario):

- Togliere tutte le occorrenze di $\rightarrow$ usando l'equivalenza logica $X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$;
- Usando le leggi di De Morgan, portare la negazione vicino alle variabili;
- usando la distributività , trasformare in CNF o DNF.

Esempio

- Sia
$$P = \neg Y \wedge (Z \rightarrow \neg X)$$
Allora $P \equiv \neg Y \wedge (\neg Z \vee \neg X) \equiv (\neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \wedge \neg X)$ che è in DNF.
- Sia
$$\begin{aligned} P = (\neg Y \wedge (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (X \vee (Z \rightarrow Y)) &\equiv \\ (\neg Y \wedge (\neg Z \vee \neg X)) \rightarrow (X \vee (\neg Z \vee Y)) &\equiv \\ \neg(\neg Y \wedge (\neg Z \vee \neg X)) \vee (X \vee (\neg Z \vee Y)) &\equiv \\ (Y \vee \neg(\neg Z \vee \neg X)) \vee (X \vee \neg Z \vee Y) &\equiv \\ Y \vee (Z \wedge X) \vee X \vee \neg Z \vee Y & \end{aligned}$$

$Form/\equiv$

La relazione $\equiv$ è una relazione d'equivalenza sull'insieme *Form* di tutte le formule proposizionali. Infatti:

- è riflessiva, ogni formula è equivalente a se stessa;
- è simmetrica, se P è equivalente a Q allora Q è equivalente a P;
- è transitiva, se P è equivalente a Q e Q è equivalente a R allora P è equivalente a R.

La classe d'equivalenza $[P]$ di una formula P è l'insieme di tutte le formule che hanno la stessa tavola di verità di P. Quanti elementi avrà allora l'insieme quoziente $Form/\equiv$, cioè l'insieme di tutte le classi d'equivalenza?

Questo equivale a contare quante diverse tavole di verità ci sono.

Consideriamo le tavole di verità delle formule che si possono scrivere con una sola variabile X. Tali tavole di verità avranno due righe, quindi le possibili tavole di verità diverse tra di loro sono 4:

X			
0	1	0	1
1	0	0	1

che sono le tavole di verità delle formule X, $\neg X$, $X \wedge \neg X$, $X \vee \neg X$ (ma anche di altre). Non si possono scrivere altre tavole di verità .

Una tavola di verità si può considerare come una funzione

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\};$$

le n-uple $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ sono le valutazioni delle variabili proposizionali $X_1, \ldots, X_n$ e $f(x_1, \ldots, x_n)$ è il valore assegnato alla formula. Tutte le formule di una classe d'equivalenza hanno la stessa tavola di verità . Ci chiediamo adesso se per ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ c'è una formula che ha f come tavola di verità .

Teorema (Completezza funzionale)

Per ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ esiste una formula A con n variabili tale che f è la tavola di verità di A.

Teorema (Completezza funzionale)

Per ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ esiste una formula A con n variabili in forma normale disgiuntiva tale che f è la tavola di verità di A.

Dimostrazione.

Sia $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Consideriamo la formula

$$A = \bigvee_{(x_1,\dots,x_n)\in f^{-1}(1)} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} X_i^* \right)$$

dove

$$X_i^* = \begin{cases} X_i & \text{se } x_i = 1 \\ \neg X_i & \text{se } x_i = 0 \end{cases} .$$

In altre parole, consideriamo tutte le n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ di elementi di $\{0,1\}$ tali che $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ e in corrispondenza di ogni x_i prendiamo una variabile con lo stesso indice che è negata oppure no a seconda se $x_i = 0$ oppure $x_i = 1$. Facciamo quindi la congiunzione di queste variabili e poi la disgiunzione per tutte le n-uple.

Dimostrazione.

[Continua]

$$A = \bigvee_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(1)} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} X_i^* \right)$$

Perché questa è la formula che cerchiamo?
Perché essendo una disgiunzione, questa formula sarà vera quando almeno uno dei disgiunti è vero, cioè per quelle valutazioni v tali che per un $(x_1, \ldots, x_n) \in f^{-1}(1)$ si ha che $v(\bigwedge X_i^*) = 1$.
Ma questa cosa vale quando tutti i congiunti sono veri, cioè quando $v(X_i^*) = 1$ per ogni $i_1, \ldots, n$, che è equivalente a dire che $v(X_i) = x_i$.
Ricapitolando, la formula A è vera per quelle valutazioni $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ delle variabili tali che $v(X_i) = x_i$, che è proprio la definizione di tavola di verità .

Esempio

Consideriamo la seguente funzione, rappresentata in forma di tabella:

x_1	x_2	f	
0	0	1	$\leftarrow$
0	1	0	
1	0	1	$\leftarrow$
1	1	0	

Consideriamo la prima e la terza riga che corrispondono ad un valore 1 della funzione: in corrispondenza della prima riga consideriamo i letterali $\neg X_1$ e $\neg X_2$, mentre in corrispondenza della terza consideriamo X_1 e $\neg X_2$. La formula finale è quindi:

$$(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)$$

A partire da una funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ posso anche scrivere una formula in CNF:

$$\bigwedge_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(0)} \left(\bigvee_{i=1}^{m_i} X_i^{**} \right)$$

dove

$$X_i^{**} = \begin{cases} \neg X_i & \text{se } x_i = 1 \\ X_i & \text{se } x_i = 0 \end{cases} .$$

Esempio

x_1	x_2	f	
0	0	1	
0	1	0	$\leftarrow$
1	0	1	
1	1	0	$\leftarrow$

La formula che si ottiene è

$$(X_1 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

Teorema

Ogni formula è equivalente ad una formula in DNF e ad una formula in CNF.

Dimostrazione.

Data una formula P, si può scrivere la sua tavola di verità che sarà una funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e quindi ricavare la CNF e la DNF come spiegato in precedenza.

Esempio

Trasformare la formula

$$P = X \to (Y \wedge \neg X)$$

in forma normale congiuntiva.
Bisogna scrivere prima la tavola di verità di P:

X	Y	$(Y \wedge \neg X)$	$X \to (Y \wedge \neg X)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

Quindi calcolare la DNF:

$$(\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$$

e la CNF:

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y).$$

Definizione

Un insieme di connettivi C è **funzionalmente completo** se ogni formula è equivalente ad una formula scritta utilizzando unicamente i connettivi di C.

Per i teoremi precedenti, possiamo dire che l'insieme dei connettivi $\{\vee, \wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo.
(Abbiamo anche visto che le formule $A \to B$ e $\neg A \vee B$ sono logicamente equivalenti: questo ci permette di dire che il connettivo di implicazione può essere definito a partire dalla negazione e dalla disgiunzione.)
Ci sono insiemi funzionalmente completi più piccoli?
Considerando che

$$
\begin{aligned}
X \wedge Y &\equiv \neg(\neg X \vee \neg Y) \\
X \to Y &\equiv \neg X \vee Y \\
\perp &\equiv X \wedge \neg X \,,
\end{aligned}
$$

abbiamo che $\{\neg, \vee\}$ è **funzionalmente completo**, così come $\{\neg, \wedge\}$.
E' possibile trovare un insieme di connettivi funzionalmente completo che consiste di un solo connettivo?

NOR

Consideriamo il connettivo NOR avente la seguente tavole di verità:

X	Y	$X \mathtt{NOR} Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(è cioè la negazione dell'OR). Questo connettivo può essere utilizzato per definire tutti gli altri. Infatti (provare scrivendo le tavole di verità):

$$
\begin{aligned}
\neg X &\equiv X \mathtt{NOR} X \\
X \vee Y &\equiv (X \mathtt{NOR} Y) \mathtt{NOR} (X \mathtt{NOR} Y) \equiv \neg (X \mathtt{NOR} Y) \\
X \vee Y &\equiv (X \mathtt{NOR} X) \mathtt{NOR} (Y \mathtt{NOR} Y)
\end{aligned}
$$

In maniera analoga anche il NAND è funzionalmente completo.

Contare le tavole di verità

Ci eravamo posti il problema di contare gli elementi di $Form/\equiv$.

Consideriamo l'insieme $Form_n$ delle formule che contengono n variabili $X_1, \dots, X_n$. Quanti elementi ci sono in $Form_n/\equiv$?

Gli elementi di $Form_n/\equiv$ sono in corrispondenza biunivoca con le tavole di verità delle formule con n variabili $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Ci sono

$$|\{0,1\}|^{|\{0,1\}^n|} = 2^{2^n}$$

tavole di verità con n variabili e quindi questo è anche il numero di elementi di $Form_n/\equiv$.

L'insieme $Form/\equiv$ (dove non mettiamo un limite al numero di variabili) è invece ancora infinito (numerabile).

Algebre di Boole

Un'algebra di Boole è una struttura $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ dove:

- $\wedge$ e $\vee$ sono operazioni binarie associative e commutative e $'$ è un'operazione unaria;
- per ogni $x \in B$, si ha $x \wedge x = x$ e $x \vee x = x$;
- per ogni $x \in B$ si ha $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x$ e $x \wedge 1 = x$;
- valgono le proprietà distributive di $\wedge$ rispetto a $\vee$ e di $\vee$ rispetto a $\wedge$;
- per ogni $x, y \in B$ si ha $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \vee y) = x$;
- per ogni $x \in B$, $(x')' = x$;
- valgono le leggi di De Morgan: $(x' \wedge y') = (x \vee y)'$ e $(x' \vee y') = (x \wedge y)'$;
- $x \wedge x' = 0$ e $x \vee x' = 1$.

Esempio

Un esempio tipico di algebra di Boole è l'algebra formata dall'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ di un insieme A con le operazioni di unione e intersezione, e dove il complemento è da intendersi come complemento rispetto all'insieme A. In questo caso $0 = \emptyset$ e $1 = A$.

Un altro esempio fondamentale è l'insieme $\{0, 1\}$ con le operazioni determinate dai connettivi.

Anche il prodotto cartesiano $\{0, 1\}^n = \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$ n-volte è un'algebra di Boole, dove le operazioni sono definite componente per componente, cioè per esempio
$(x_1, \ldots, x_n) \vee (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n)$.

In ogni algebra di Boole è possibile definire una relazione d'ordine ponendo

$$x \leq y \qquad \text{se e solo se} \qquad x \wedge y = x\,.$$

Con questa relazione d'ordine, l'elemento 0 viene ad essere il minimo dell'algebra, mentre 1 è il massimo.

Dati $x, y \in B$ si ha che $x \wedge y$ è l'estremo inferiore di $\{x, y\}$ rispetto alla relazione d'ordine, mentre $x \vee y$ è l'estremo superiore.

Nell'algebra $\mathcal{P}(A)$ l'ordine coincide con l'inclusione tra insiemi.

Nell'algebra $\{0, 1\}$ l'ordine è quello che si può immaginare: $0 \leq 1$.

Sia $Form_n$ l'insieme delle formule che contengono solo le variabili $X_1, \ldots, X_n$.

Per il teorema di completezza funzionale abbiamo che l'insieme $Form_n / \equiv$ delle classi d'equivalenza delle formule che usano n variabili coincide con l'insieme di tutte le funzioni $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ quindi ha 2^{2^n} elementi.

Elenchiamo per $n = 2$ tutti gli elementi di $Form_2 / \equiv$ (ne sono $2^{2^2} = 16$).

Per poterli rappresentare, possiamo considerare le tavole di verità $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ considerando solo i quattro valori

$$(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1)).$$

Quindi per esempio la classe della formula $\perp$, quando considerata come tavola di verità con quattro righe, sarà rappresentata con $(0,0,0,0)$.

$\perp$	$(0,0,0,0)$	$\top$	$(1,1,1,1)$
$X \wedge Y$	$(0,0,0,1)$	$\neg X \wedge \neg Y$	$(1,0,0,0)$
$\neg X \wedge Y$	$(0,1,0,0)$	$X \wedge \neg Y$	$(0,0,1,0)$
X	$(0,0,1,1)$	Y	$(0,1,0,1)$
$\neg X$	$(1,1,0,0)$	$\neg Y$	$(1,0,1,0)$
$X \leftrightarrow Y$	$(1,0,0,1)$	$X \leftrightarrow \neg Y$	$(0,1,1,0)$
$X \vee Y$	$(0,1,1,1)$	$\neg X \vee \neg Y$	$(1,1,1,0)$
$Y \to X$	$(1,0,1,1)$	$X \to Y$	$(1,1,0,1)$

La relazione $\equiv$ non solo è una relazione d'equivalenza, ma è anche una **congruenza** rispetto alle operazioni determinate dai connettivi, nel seguente senso:

Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$ allora $P \wedge Q \equiv R \wedge S$.

Possiamo quindi definire l'operazione $\wedge$ in $Form/\equiv$ come

$$[P] \wedge [Q] = [P \wedge Q] .$$

Analogamente per gli altri connettivi.
La struttura $(Form/\equiv, \wedge, \vee, \neg, [\perp], [\top])$ è un'algebra di Boole.
Questo vuol dire che questa algebra verifica molte delle proprietà soddisfatte per esempio da $\mathcal{P}(A)$ e da $\{0, 1\}$.

Consideriamo per esempio la relazione definita in precedenza in ogni algebra di Boole:

$$x \leq y \text{ se e solo se } x \wedge y = x\,.$$

Nell'algebra $Form/\equiv$ si ha che

$$[P] \leq [Q] \text{ se e solo se } [P \wedge Q] = [P]\,,$$

cioè se $P \wedge Q \equiv P$. Vediamo la tavola di verità :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \to Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Quindi $[P] \leq [Q]$ se e solo se $P \to Q$ è una tautologia se e solo se $P \models Q$ se e solo se per ogni valutazione v si ha che $v(P) \leq v(Q)$.

Questa relazione d'ordine non è totale, cioè ci sono coppie di formule che non sono confrontabili.
Per esempio se X e Y sono variabili proposizionali non vale né $X \models Y$ né $Y \models X$.

Consideriamo l'algebra $Form_2/\equiv$, che abbiamo visto si può rappresentare come le quadruple di elementi di $\{0, 1\}$.
La relazione d'ordine che abbiamo definito nelle algebre di Boole funziona in questo modo:

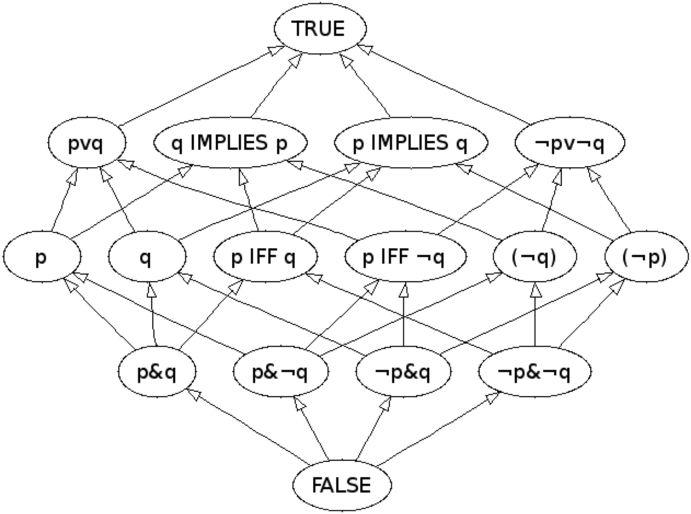
$$\bot < X \wedge Y < X < X \vee Y < \top$$

ma anche

$$\bot < X \wedge Y < Y < X \vee Y < \top\,.$$

Invece X e Y non sono confrontabili, così come non lo sono $\neg X \vee \neg Y$ e $X \vee Y$.

Se vogliamo rappresentare tutte le relazioni possiamo considerare questo diagramma di Hasse (nota che coincide con il diagramma dell'insieme delle parti di 4 elementi, ordinato con la relazione di inclusione).



Un **isomorfismo** tra strutture algebriche è un omomorfismo biettivo.
Se $(A, \wedge_A, \vee_A, \neg_A, 0_A, 1_A)$ e $(B, \wedge_B, \vee_B, \neg_B, 0_B, 1_B)$ sono due algebre di Boole, un isomorfismo tra A e B è una funzione biettiva $f : A \to B$ tale che per ogni $a_1, a_2 \in A$ si ha:

- $f(a_1 \vee_A a_2) = f(a_1) \vee_B f(a_2)$
- $f(a_1 \wedge_A a_2) = f(a_1) \wedge_B f(a_2)$
- $f(\neg_A a_1) = \neg_B f(a_1)$.
- $f(0_A) = 0_B$
- $f(1_A) = 1_B$.

Se esiste un isomorfismo tra due algebre di Boole A e B si dice che le algebre sono **isomorfe**.

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ dei sottoinsiemi di un insieme di 4 elementi.
Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) \; = \; & \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ & \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ & \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}\end{aligned}$$

Chiaramente si ha che $S \subseteq T$ se e solo se $S \cap T = S$.

$(\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}), \cup, \cap, ', \emptyset, \{a, b, c, d\})$ è un'algebra di Boole.

Teorema

Le algebre di Boole $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ e $Form_2/\equiv$ sono isomorfe.

Per dimostrare il teorema precedente, dobbiamo rappresentare gli elementi di $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ con le funzioni caratteristiche:
per ogni insieme $S \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ poniamo

$$\chi_S : x \in \{a, b, c, d\} \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Ogni funzione caratteristica si può vedere come una quadrupla di valori:

$$\chi_S = (\chi_S(a), \chi_S(b), \chi_S(c), \chi_S(d)).$$

Per esempio se $S = \{a, c\}$ allora $\chi_S = (1, 0, 1, 0)$.

Ma ricordiamo che una quadrupla di valori può essere anche considerata come la tavola di verità di una formula...

La funzione

$$F : S \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) \to [\phi_S] \in Form_2/\equiv$$

dove ϕ_S è una delle formule che ha $(\chi_S(a), \chi_S(b), \chi_S(c), \chi_S(d))$ come tavola di verità , è un **isomorfismo** tra algebre di Boole.

Per esempio se $S = \{a, c\}$ e $T = \{c, d\}$, allora $\chi_S = (1, 0, 1, 0)$, $\chi_T = (0, 0, 1, 1)$ e quindi $\phi_S = \neg Y$ e $\phi_T = X$. La funzione F è un isomorfismo, infatti per esempio

$$S \cup T = \{a, c, d\} \text{ con } \chi_{S\cup T} = (1, 0, 1, 1)$$

$$\phi_{S\cup T} = Y \to X \equiv \neg Y \vee X = \phi_S \vee \phi_T$$

In genere, per ogni n si ha un isomorfismo tra $Form_n/\equiv$ e $\{0, 1\}^{2^n}$ e tra $\{0, 1\}^{2^n}$ e $P(X)$ dove X è un qualsiasi insieme con 2^n elementi.

Teorema di compattezza

Teorema

Un insieme è soddisfacibile se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

Chiaramente l'importanza del teorema si evidenzia quando l'insieme di partenza è infinito, altrimenti l'asserto è banale.

Dal teorema di compattezza possiamo anche dedurre che

Teorema

Un insieme non è soddisfacibile se e solo se esiste un suo sottoinsieme finito che non è soddisfacibile.

Per dimostrare il teorema di compattezza utilizziamo una definizione e due lemmi preparatori.

Definizione

Un albero ha rami di lunghezza arbitraria (cioè *qualsiasi*) se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un ramo di lunghezza n.

Nota che dire che un albero non ha rami di lunghezza arbitraria significa che esiste un numero n tale che l'albero non ha rami più lunghi di n, cioè n è la lunghezza massima dei rami dell'albero.

Lemma di König

Lemma

Un albero binario con rami di lunghezza arbitraria ha almeno un ramo di lunghezza infinita.

Dimostrazione del Lemma di König

Sia a la radice dell'albero. Poichè l'albero è binario ed ha rami di lunghezza arbitraria, allora a o ha un figlio o ne ha due. Infatti se non avesse figli allora l'albero avrebbe solo un ramo di lunghezza 1.
Se a ha un solo figlio a_1, allora anche a_1 è la radice di un (sotto)albero con rami di lunghezza arbitraria: infatti se così non fosse, allora detta n la lunghezza massima dei rami che partono da a_1 si avrebbe che $n+1$ è la lunghezza massima dei rami che partono da a, il che è contrario alla nostra ipotesi.

Continua la dimostrazione del Lemma di König

Se invece a ha due figli a_1 e a_2, allora se ci fosse un massimo n_1 per la lunghezza dei rami che partono da a_1 e un massimo n_2 per la lunghezza dei rami che partono da a_2 si avrebbe che $max(n_1, n_2) + 1$ è la lunghezza massima dei rami dell'albero con radice in a, che è contrario alla nostra ipotesi. Quindi almeno da uno dei due nodi a_1 e a_2 partono rami di lunghezza arbitraria, supponiamo che sia a_1.

Possiamo allora ripetere questo ragionamento a partire dall'albero con radice in a_1 e così via, trovando che per ogni livello dell'albero c'è un nodo dal quale partono rami di lunghezza arbitraria. Ripetendo questo procedimento otteniamo il ramo infinito cercato.

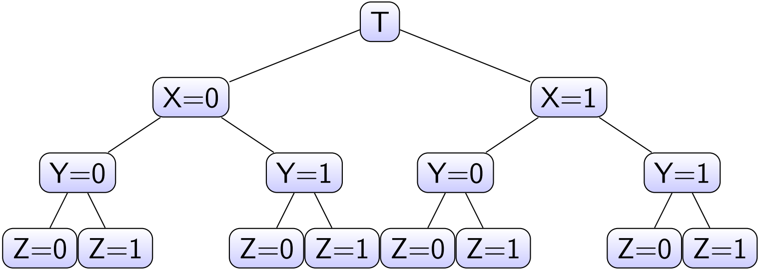
Ancora sul lemma di König

Nota che l'ipotesi che l'albero sia binario può essere sostituita con ternario o quaternario, etc.

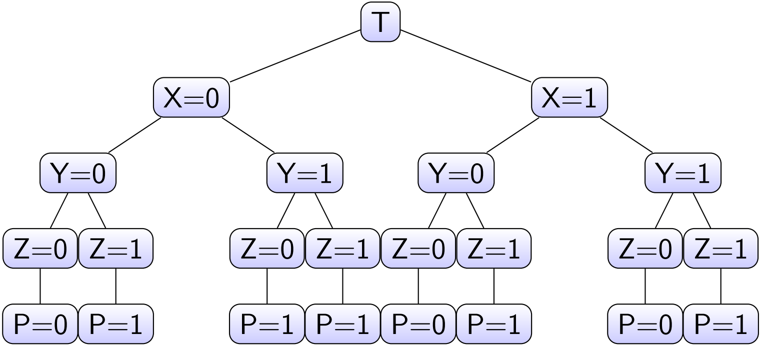
E' però fondamentale imporre che ogni nodo abbia al più un numero fissato di figli. Infatti se non ci fosse questa condizione potremmo considerare un albero costituito da una radice il cui primo figlio ha lunghezza 1, il secondo ha lunghezza 2, il terzo ha lunghezza 3, e così via: avremmo un albero con rami di lunghezza arbitraria senza avere però un ramo di lunghezza infinita.

Perché gli alberi

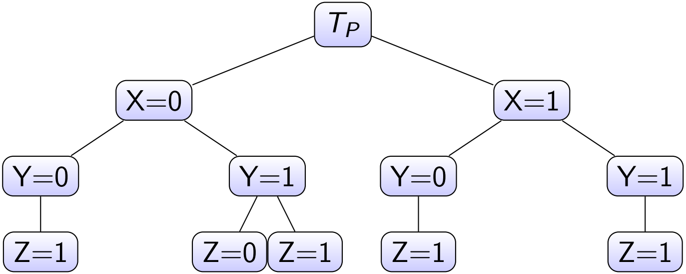
Possiamo rappresentare le valutazioni di una formula usando un albero. Le 8 valutazioni delle tre variabili X, Y e Z si possono rappresentare come gli 8 cammini sul seguente albero:



Consideriamo la formula $P = (X \vee \neg Y) \to Z$. Le 8 valutazioni possibili di questa formula corrispondenti agli 8 rami sono scritte nelle foglie:



Posso considerare l'albero costituito solo dai rami che soddisfano la formula $P = (X \vee \neg Y) \to Z$:



Lemma

Sia Γ un insieme di formule. Allora esiste un sottoinsieme $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tale che Γ' non contiene formule logicamente equivalenti e Γ è soddisfacibile se e solo se Γ' è soddisfacibile.

Dimostrazione.

Basta scegliere una formula in ogni classe d'equivalenza di $\Gamma / \equiv$.

Dimostrazione del teorema di compattezza

Se Γ è soddisfacibile allora banalmente ogni suo sottoinsieme è soddisfacibile.
Viceversa, supponiamo che ogni sottoinsieme finito di Γ sia soddisfacibile, e supponiamo anche che in Γ non ci siano formule logicamente equivalenti. Abbiamo due casi: se le formule di Γ utilizzano solo un numero finito di variabili $X_1, \ldots, X_n$, allora dato che Γ non contiene formule logicamente equivalenti, vuol dire che Γ avrà al massimo 2^{2^n} formule, quindi è un insieme finito. Quindi è soddisfacibile per ipotesi.

Se invece ci sono infinite variabili allora l'insieme Γ è infinito. Dobbiamo mostrare che esiste una valutazione che soddisfa tutte le formule di Γ. Per ogni n sia Γ_n l'insieme delle formule di Γ che utilizzano solo le variabili $X_1, \ldots, X_n$. Per quanto abbiamo detto prima, Γ_n è finito e quindi soddisfacibile.

Consideriamo un albero binario T che abbia su ogni ramo una valutazione delle variabili: al primo livello ci saranno le due possibili valutazioni della variabile X_1, al secondo le due possibili valutazioni di X_2 per ognuno dei due valori di X_1, quindi quattro valutazioni in tutto, e così via.

Sia T_Γ il sottoalbero di T formato da tutti i cammini $ra_1 \cdots a_n$ che sono valutazioni delle variabili $X_1, \ldots, X_n$ che soddisfano Γ_n. L'albero T_Γ ha quindi rami di lunghezza arbitraria, perchè per ogni n ci sono valutazioni che soddisfano Γ_n. Quindi per il lemma di König, T_Γ ha un ramo infinito $ra_1 a_2 \cdots$.
Consideriamo allora l'interpretazione $e(X_i) = a_i$. Dato che per ogni i si ha $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$, allora le valutazioni che soddisfano Γ_{i+1} soddisfano anche Γ_i. Quindi la valutazione e soddisfa tutte le formule dell'insieme Γ.

Esempio 1

Consideriamo l'insieme

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{X_1, X_3, X_5, \ldots, X_{2i-1}, \ldots, \\ &\quad X_1 \to \neg X_4, X_3 \to \neg X_8, X_5 \to \neg X_{12}, \ldots, X_{2i-1} \to \neg X_{4i}, \ldots\}. \end{aligned}$$

Per controllare se l'insieme Γ è soddisfacibile dovremmo trovare una valutazione che soddisfi tutte le infinite formule di Γ.

Nota che ogni variabile e ogni formula del tipo $X \to Y$ è soddisfacibile.

Per il teorema di compattezza possiamo considerare i sottoinsiemi finiti:

- Tutti i sottoinsiemi finiti di Γ che contengono solo variabili o solo implicazioni sono soddisfacibili (non ci sono formule con le stesse variabili);
- I sottoinsiemi finiti di Γ che contengono alcune variabili e implicazioni che non contengono tali variabili, anche sono soddisfacibili (anche in questo caso non ci sono formule con le stesse variabili);
- Se un sottoinsieme finito contiene qualche variabile X_{2j-1} per $j \in J$ e qualche implicazione che contiene queste variabili quindi del tipo $X_{2j-1} \to X_{4j}$, allora è soddisfatto dalla valutazione v tale che $v(X_{2j-1}) = 1$ e $v(X_{4j}) = 0$.

Quindi, tutti i sottoinsiemi finiti sono soddisfacibili e quindi l'insieme Γ è soddisfacibile.

Vediamo il teorema applicato all'esempio

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{X_1, X_3, X_5, \ldots, X_{2i-1}, \ldots,\\ &\quad X_1 \to \neg X_4, X_3 \to \neg X_8, X_5 \to \neg X_{12}, \ldots, X_{2i-1} \to \neg X_{4i}, \ldots\}.\end{aligned}$$

Consideriamo i seguenti insiemi finiti:
$\Gamma_1 = \{X_1\}$
$\Gamma_2 = \{X_1\}$
$\Gamma_3 = \{X_1, X_3\}$
$\Gamma_4 = \{X_1, X_3, X_1 \to \neg X_4\}$
...

Tutti questi insiemi sono soddisfacibili. Inoltre una valutazione che soddisfa Γ_i soddisfa anche Γ_{i-1}. Possiamo quindi costruire l'albero di tutte le valutazioni dei Γ_i che avrà un ramo infinito. Tale ramo infinito sarà la valutazione che soddisfa Γ.

Esempio 2

Consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots, X_1 \to \neg X_2, X_2 \to \neg X_3, \ldots, X_i \to \neg X_{i+1}, \ldots\}.$$

Per controllare se l'insieme Γ è soddisfacibile dovremmo trovare una valutazione che soddisfi tutte le infinite formule di Γ.
Ma per il teorema di compattezza possiamo considerare i sottoinsiemi finiti:

- $\{X_1\}$ è soddisfacibile;
- $\{X_1, X_1 \to \neg X_2\}$ è soddisfacibile (per esempio con $v(X_1) = 1$ e $v(X_2) = 0$);
- $\{X_1, X_2, X_1 \to \neg X_2\}$ non è soddisfacibile.

Quindi, avendo trovato un sottoinsieme finito non soddisfacibile, l'insieme Γ non è soddisfacibile.

Corollario

Γ *è insoddisfacibile se e solo se esiste un sottoinsieme finito di* Γ *che è insoddisfacibile.*

Corollario

$\Gamma \models P$ *se e solo se esiste un sottoinsieme finito* Δ *di* Γ *tale che* $\Delta \models P$.