Questo esame è a libro aperto: siete completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non potete però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di voi o con altri, o passare materiale tra di voi.

I tre esercizi hanno un peso complessivo di 10 punti l'uno, per un totale di 30 punti.

Non ha importanza che calcoliate il valore numerico preciso delle soluzioni; è invece importante mostrare il vostro ragionamento e le formule usate, arrivando a una risposta che *potrebbe* essere calcolata meccanicamente utilizzando una normale calcolatrice. Per esempio, se arrivate a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, potete fermarvi lì oppure potete continuare fino a arrivare al numero 252 (questo non sarà considerato un errore, ma non darà punti aggiuntivi). Ma se invece scrivete solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, la risposta non sarà considerata valida.

1 Galline

Un pollaio contiene tre galline bianche e tre galline nere. Ogni giorno queste galline escono in un ordine casuale: ogni ordinamento ha uguali probabilità di apparire, e l'ordine d'uscita di un giorno non ha nessuna influenza sull'ordine di uscita dei giorni successivi.

1. Qual è la probabilità che almeno due galline nere escano una immediatamente di seguito all'altra?

   SUGGERIMENTO: Per questo punto e per il successivo, può essere utile calcolare prima la probabilità che l'evento richiesto *non* si verifichi.

2. Qual è la probabilità che non più di due galline nere escano una di seguito all'altra?

3. Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ gli eventi "La prima gallina a uscire è nera" e "Escono prima tutte le galline di un colore, poi tutte quelle dell'altro". Calcolate le probabilità $P(\mathcal{E})$, $P(\mathcal{F})$, $P(\mathcal{E} \cap F)$, $P(\mathcal{E} \cup F)$ e le probabilità condizionate $P(\mathcal{E}|\mathcal{F})$ e $P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$.

   Poi rispondete alla seguente domanda: gli eventi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sono indipendenti?

4. Sia $\mathcal{X}$ il numero di giorni che passano prima che l'evento $\mathcal{F}$ del punto precedente (cioè: "escono prima tutte le galline di un colore, poi quelle dell'altro") si verifichi, incluso quel giorno stesso (per esempio, se l'ordine di uscita delle galline il primo giorno è `NNNBBB` – prima tutte le galline nere, poi tutte le galline bianche – allora $\mathcal{X}$ è uno, non zero).

   Trovate una formula per $P(\mathcal{X} = k)$ per tutti i $k \in \mathbb{N}$. Poi calcolate il valore atteso e la varianza di $\mathcal{X}$.

1 Soluzione

1. Se non teniamo conto dell'identità delle galline nere o bianche ma semplicemente del loro colore, abbiano $\binom{6}{3} = 20$ possibili ordini d'uscita (scegliamo le tre posizioni sulle 6 che contengono una gallina bianca, gli altri contengono una gallina nera).

   Di questi, ce ne sono soltanto quattro in cui nessuna coppia di galline nere è adiacente: `BNBNBN`, `NBNBNB`, `NBBNBN` e `NBNBBN`. In tutti gli altri ordinamenti, almeno due galline nere sono vicine. Quindi la probabilità cercata è $(20-4)/20 = 0.8$.

2. Visto che ci sono tre galline nere, gli ordinamenti in cui più di due galline nere sono vicine sono quelli in cui esattamente tre galline nere sono vicine, cioè `NNNBBB`, `BNNNBB`, `BBNNNB` e `BBBNNN`. Tutti gli altri ordini d'uscita hanno non più di due galline nere adiacenti; quindi, la probabilità cercata è $(20-4)/20 = 0.8$.

3. $P(\mathcal{E}) = 1/2$: ci sono tre galline bianche e tre galline nere, quindi la prima gallina a uscire ha uguali probabilità di essere nera e di essere bianca.

   Invece, $P(\mathcal{F}) = 2/20 = 0.1$: infatti, ci sono solo due ordini d'uscita che soddisfano $\mathcal{F}$, cioè `NNNBBB` e `BBBNNN`.

   L'evento $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ è soddisfatto solo dall'ordine di uscita `NNNBBB`, quindi $P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F}) = 1/20 = 0.05$.

   L'evento $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ è soddisfatto da tutti i 10 ordinamenti che soddisfano $\mathcal{E}$ (la metà dei 20 ordinamenti totali, o se preferiamo $\binom{5}{3}$ – a parte la prima posizione abbiamo 5 posizioni rimanenti, e di queste tre sono occupate da galline bianche) più l'ordinamento `BBBNNN`, che non soddisfa $\mathcal{E}$ ma soddisfa $\mathcal{F}$ (l'ordinamento `NNNBBB` è già tra i 10 che soddisfano $\mathcal{E}$). Quindi, in totale, ci sono 11 ordinamenti che soddisfano $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ e $P(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) = 11/20 = 0.55$.

   Infine, $P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})/P(\mathcal{F}) = 1/2 = 0.5$; e $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})/P(\mathcal{E}) = 1/10 = 0.1$.

   Visto che $P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = P(\mathcal{E})$ (o, ugualmente, visto che $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) = P(\mathcal{F})$, o ancora visto che $P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}) = P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})$), gli eventi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sono indipendenti.

4. Abbiamo già visto che, ogni giorno, l'evento $\mathcal{F}$ si verifica con probabilità 0.1.

   Quindi $\mathcal{X}$ segue una distribuzione geometrica (nella forma che conta anche il successo e non solo il numero di fallimenti prima del successo) con $p = 0.1$, cioè $P(\mathcal{X} = k) = 0.9^{k-1}0.1^{k}$.

   Quindi sappiamo che il valore atteso di $\mathcal{X}$ è $E(\mathcal{X}) = 1/p = 10$, e che la sua varianza è $Var(\mathcal{X}) = (1-p)/p^2 = 0.9/0.01 = 90$.

2 Raggi Cosmici

C'è un tipo di raggio cosmico che occasionalmente arriva sulla terra, con un valore atteso di 10 raggi al giorno; e il numero di raggi che arriva in un giorno può essere modellato con una distribuzione di Poisson.

Ci sono due modelli di contatori di raggi cosmici: i contatori di tipo A hanno il 50% di probabilità di attivarsi ogni volta che arriva un raggio, mentre i contatori di tipo B sono un po' più accurati e hanno il 75% di probabilità di attivarsi ogni volta che arriva un raggio.

1. Sia $\mathcal{X}$ il numero di raggi cosmici rilevati in un giorno da un contatore di tipo A, e sia $\mathcal{Y}$ il numero di raggi cosmici rilevati in un giorno da un contatore di tipo B. Calcolate il valore atteso di $\mathcal{X}$ e di $\mathcal{Y}$.

2. Trovate anche una formula per $P(\mathcal{X} = k)$ e $P(\mathcal{Y} = k)$, dove $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono come nel punto precedente e $k \in \mathbb{N}$.

   SUGGERIMENTO: Pensate a che tipo di distribuzione può essere seguito da $\mathcal{X}$ e da $\mathcal{Y}$. Poi sfruttate il fatto che nel punto precedente avete già calcolato il valore atteso di $\mathcal{X}$ e di $\mathcal{Y}$.

3. Un rilevatore ha inizialmente uguali probabilità di essere di tipo A o di tipo B.

   Se osserviamo che in un giorno non ha registrato l'arrivo di nessun raggio cosmico, qual è la probabilità che sia effettivamente di tipo A? E se invece in un giorno ha registrato l'arrivo di 10 raggi, qual è la probabilità che sia di tipo A?

2 Soluzione

Se $\mathcal{Z}$ è il numero di raggi cosmici che arrivano, allora per ipotesi $\mathcal{Z}$ segue una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 10$: quindi $P(\mathcal{Z} = k) = (10^k e^{-10})/(k!)$, e ovviamente $E(\mathcal{Z}) = 10$.
Ora, se $\mathcal{X}$ è il numero di raggi cosmici che sono rilevati da un rilevatore di tipo A, allora il valore atteso di $\mathcal{X}$ è metà del valore atteso di $\mathcal{Z}$: quale che sia il numero di raggi cosmici che effettivamente arrivano, ci attendiamo che il rilevatore ne registri la metà.
Inoltre $\mathcal{X}$ segue anch'esso una distribuzione di Poisson: le attivazioni del rilevatore sono sempre indipendenti l'una dall'altra, equiprobabili, e il loro numero può essere arbitrariamente grande. Pertanto,

$$P(\mathcal{X} = k) = \frac{5^k e^{-5}}{k!}$$

per tutti i $k \in \mathbb{N}$.
Ragionando in maniera analoga, abbiamo anche che $\mathcal{E}(\mathcal{Y}) = 3/4 \cdot \mathcal{E}(\mathcal{Z}) = 7.5$ e che

$$P(\mathcal{X} = k) = \frac{7.5^k e^{-7.5}}{k!}$$

Ora, sia $\mathcal{E}$ l'evento ”Il rilevatore scelto è di tipo A”, e sia $\mathcal{F}$ l'evento ”Il rilevatore non ha registrato nessun raggio”. Abbiamo che $P(\mathcal{E}) = 1/2$; che

$$P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) = P(\mathcal{X} = 0) = e^{-5}$$

e che

$$P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}}) = P(\mathcal{Y} = 0) = e^{-7.5}$$

Quindi,

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} = \frac{e^{-5} \cdot 0.5}{e^{-5} \cdot 0.5 + e^{-7.5} \cdot 0.5} \approx 0.924$$

cioè il rilevatore ha approssimativamente il 92.4% di probabilità di essere di tipo A.

Similmente, se $\mathcal{G}$ è l'evento "Il rilevatore ha registrato 10 raggi", abbiamo che

$$P(\mathcal{G}|\mathcal{E}) = P(\mathcal{X} = 10) = \frac{5^{10}e^{-5}}{10!}$$

e che

$$P(\mathcal{G}|\overline{\mathcal{E}}) = P(\mathcal{Y} = 10) = \frac{7.5^{10}e^{-7.5}}{10!}$$

e quindi che

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{G}) = \frac{P(\mathcal{G}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{G}|\mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{G}|\overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} = \frac{5^{10}e^{-5}}{5^{10}e^{-5} \cdot 0.5 + 7.5^{10}e^{-7.5} \cdot 0.5} \approx 0.349$$

cioè, c'è all'incirca il 34.9% di probabilità che il rilevatore sia del tipo A.

3 Semi

Esistono tre varietà di alberi i cui semi sono indistinguibili se non per il loro peso: i semi della varietà 1 hanno un peso atteso di 10 grammi, i semi della varietà 2 hanno un peso atteso di 15 grammi, e i semi della varietà 3 hanno un peso atteso di 20 grammi. Possiamo rappresentare il peso di un seme (di una qualsiasi delle tre varietà) come una variabile casuale che segue una distribuzione normale; e per tutte e tre queste varietà, possiamo supporre che la deviazione standard sia di 3 grammi. Possiamo inoltre supporre che il peso di ogni seme sia indipendente dal peso di ogni altro seme.
Un sacco contiene 100 semi, di cui la metà sono della varietà 1, un quarto sono della varietà 2, e un quarto sono della varietà 3.

1. Calcolate il valore atteso e la deviazione standard del peso del sacco.

2. Se estraiamo un seme dal sacco e osserviamo che pesa tra 16 e 17 grammi, quali sono le probabilità che esso sia della varietà 1, della varietà 2 o della varietà 3?

   Scrivete questa risposta in termini della funzione $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile che segue una distribuzione normale standard (cioè con valore atteso 0 e deviazione standard 1): non è necessario trovare il valore numerico esatto usando una tavola o una calcolatrice, basta che arriviate a un'espressione da cui potreste calcolarlo se le aveste.

   SUGGERIMENTO: se $\mathcal{X}$ segue una distribuzione normale con valore atteso μ e deviazione standard σ allora $(\mathcal{X} - \mu)/\sigma$ segue una distribuzione normale standard, e quindi

   $$P(a \leq \mathcal{X} \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \mathcal{Z} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

   Usando questo, applicate il Teorema di Bayes.

3 Soluzione

1. Se $\mathcal{X}$ è il peso del sacco allora

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{50} \mathcal{Y}_i + \sum_{i=51}^{75} \mathcal{Y}_i' + \sum_{i=76}^{100} \mathcal{Y}_i'',$$

dove ogni $\mathcal{Y}_i$ è il peso di un seme della varietà uno (con valore atteso 10 e deviazione standard 3, cioè varianza 9); ogni $\mathcal{Y}_i'$ è il peso di un seme della varietà due (con valore atteso 15 e deviazione standard 3, cioè varianza 9); e ogni $\mathcal{Y}_i''$ è il peso di un seme della varietà tre (con valore atteso 20 e deviazione standard 3, cioè varianza 9).

Quindi, per le proprietà del valore atteso,

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{50} E(\mathcal{Y}_i) + \sum_{i=51}^{75} E(\mathcal{Y}_i') + \sum_{i=76}^{100} E(\mathcal{Y}_i'') = 50 \cdot 10 + 25 \cdot 15 + 25 \cdot 20 = 1375$$

e (sfruttando anche il fatto che i pesi dei semi sono indipendenti)

$$Var(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{50} Var(\mathcal{Y}_i) + \sum_{i=51}^{75} Var(\mathcal{Y}_i') + \sum_{i=76}^{100} Var(\mathcal{Y}_i'') = 100 \cdot 9 = 900$$

e quindi

$$Std(\mathcal{X}) = \sqrt{Var(\mathcal{X})} = 30.$$

2. Siano $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$ gli eventi "Il seme è della varietà 1", "Il seme è della varietà 2" e "Il seme è della varietà 3", e sia $\mathcal{F}$ l'evento "Il seme pesa tra 16 e 17 grammi".

Allora, usando le proprietà della distribuzione normale,

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1) &= P((16-10)/3 \leq \mathcal{Z} \leq (17-10)/3) = \Phi(7/3) - \Phi(2) \approx 0.0129;\\
P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2) &= P((16-15)/3 \leq \mathcal{Z} \leq (17-15)/3) = \Phi(2/3) - \Phi(1/3) \approx 0.117;\\
P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3) &= P((16-20)/3 \leq \mathcal{Z} \leq (17-20)/3) = \Phi(-1) - \Phi(-4/3) \approx 0.0674.
\end{aligned}$$

Inoltre, per ipotesi abbiamo che $P(\mathcal{E}_1) = 0.5$, $P(\mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_3) = 0.25$. Quindi usando il Teorema di Bayes

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{E}_1|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1)}{(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + (\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} \approx 0.123;\\
P(\mathcal{E}_2|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2)}{(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + (\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} \approx 0.556;\\
P(\mathcal{E}_3|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)}{(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + (\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} \approx 0.321.
\end{aligned}$$

Quindi, c'è all'incirca il 12.3% di probabilità che il seme sia della varietà uno, il 55.6% che sia della varietà due, e il 32.1% di probabilità che sia della varietà tre.