Esame di Algebra e Geometria - ESEMPIO II Prova Intercorso con SVOLGIMENTO

Nome Cognome.. **Matricola...................................**

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune.

1. Che cos'è il rango di una matrice? Studiare il rango della seguente matrice al variare del parametro k: [.../4]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ k & 2 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Il rango di una matrice è il massimo ordine di una sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero. Rappresenta il numero di righe della matrice che sono linearmente indipendenti. Per studiare il rango della matrice, dato che la matrice è quadrata iniziamo a calcolarne il determinante:

$$det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ k & 2 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(2k-2).$$

Per $k \neq 1$ il determinante è diverso da zero, quindi il rango della matrice è 3.

Nel caso $k = 1$ il determinante è zero e la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che cancellando la prima riga e la prima colonna si ottiene una sottomatrice 2x2 con determinante diverso da zero, il rango della matrice per $k = 1$ è uguale a 2.

Quindi riassumendo:
- per $k \neq 1$ il rango è 3;
- per $k = 1$ il rango è 2.

2. Dire se i seguenti sistemi hanno soluzioni, e in caso affermativo calcolarle (con qualsiasi metodo): [.../5]

$$\begin{cases} x \quad +z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z = -2 \\ -2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 2y + 4z = -4 \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice completa associata al primo sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa è uguale a 2. Proviamolo con la riduzione a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad r_2 \to r_2 - 3r_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$r_3 \to r_3 - 4r_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) r_3 \to r_3 - r_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(si poteva anche notare che la terza riga è la somma della prima e della seconda). Quindi ci sono ∞^1 soluzioni, che possiamo trovare risolvendo il sistema associato alla matrice ridotta a scala, considerando z come parametro:

$$\begin{cases} x \quad\quad +z = 3 \\ \quad +y \ -4z = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -7 + 4z \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $\{(3 - z, 4z - 4, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

La matrice completa associata al secondo sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right).$$

Il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa è uguale a 1. Proviamolo con il metodo degli orlati di Kroneker. Partiamo dall'elemento in posizione 1,1 che è diverso da zero e cerchiamo una matrice 2x2 che lo orli e che abbia determinante diverso da zero. Dobbiamo cioè considerare tutte le matrici 2x2 che si ottengono cancellando una riga diversa dalla prima e due colonne diverse dalla prima. Dato che non si trova una matrice 2x2 con determinante diverso da zero, si ha che il rango della matrice è 1.

Quindi ci sono ∞^2 soluzioni che si ottengono considerando solo una riga, per esempio la prima, e considerando due variabili come parametri.

$$2x - y + 2z = -2 \text{ diventa } y = -2 - 2x - 2z.$$

Quindi le soluzioni sono $\{(x, -2 - 2x - 2z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$.

3. Dare la definizione di sottospazio. Mostrare che l'insieme [.../5]

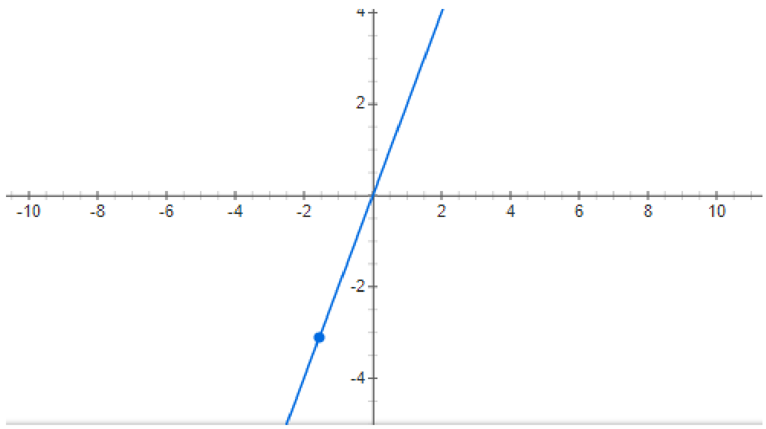
$$V = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Determinare la dimensione di V e scrivere una base. Rappresentare graficamente V nel piano cartesiano. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tale che $f(x, y) = (\frac{1}{2}y, x)$. Provare che f è un'applicazione lineare e determinare graficamente lo spazio $f(V)$.

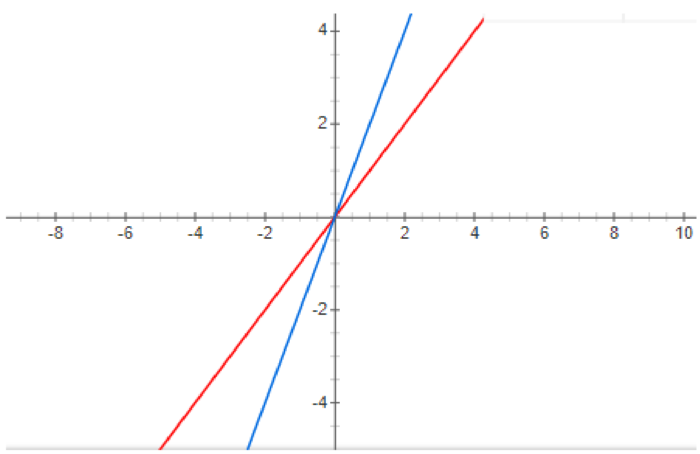
Svolgimento. Un sottospazio U di uno spazio W è un sottoinsieme tale che se $u_1, u_2 \in U$ allora $u_1 + u_2 \in U$ e se $u \in U$ allora $r \cdot u \in U$ per ogni $r \in \mathbb{R}$. Nell'esercizio V è un sottospazio perché se $(x_1, 2x_1), (x_2, 2x_2) \in V$ allora anche $(x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) \in V$ e $r \cdot (x_1, 2x_1) = (rx, 2rx) \in V$. Dato che dipende da un solo parametro, si ha $\dim V = 1$ e una sua base è $\{(1, 2)\}$. Il suo grafico è



La funzione f è un'applicazione lineare perché:

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\frac{1}{2}(y_1 + y_2), x_1 + x_2) = \\ &= (\frac{1}{2}y_1, x_1) + (\frac{1}{2}y_2 x_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\ c \cdot f(x, y) &= c(\frac{1}{2}y, x) = (\frac{1}{2}cy, cx) = f(cx, cy) = f(c \cdot (x, y)). \end{aligned}$$

Se $(x, 2x) \in V$ allora $f(x, 2x) = (x, x)$, quindi f trasforma la retta $y = 2x$ (in blu) nella retta $y = x$ (in rosso):



4. Si considerino i tre vettori di $u = (1, 0, 2)$, $v = (0, 0, 1)$, $w = (0, 1, 1)$. Si calcoli il prodotto scalare e vettoriale di u e v e il prodotto misto di u, v e w. Si provi che l'insieme $B = \{u, v, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, Si calcoli la matrice A del cambiamento di base tale che [.../6]

$$\langle (x, y, z) \rangle_B = A \cdot (x, y, z)$$

per ogni vettore $(x, y, z) \in R^3$. (sugg. La matrice A ha come colonne le componenti dei vettori di E come combinazione lineare dei vettori di B).

Svolgimento. Il prodotto scalare $u \cdot v$ è:

$$u \cdot v = (1,0,2) \cdot (0,0,1) = (0,0,2)\,.$$

Il prodotto vettoriale si può calcolare usando la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è il vettore $(0,-1,0)$. Il prodotto misto $(u \cdot v) \times w$ è il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è quindi uguale a -1. Quest'ultima verifica ci assicura anche che i tre vettori formano una base, dato che sono linearmente indipendenti. Per calcolare la matrice del cambiamento di base bisogna scrivere i tre vettori della base canonica nella base B risolvendo tre sistemi:

$$(1,0,0) = a(1,0,2) + b(0,0,1) + c(0,1,1) = (a, c, 2a + b + c)$$

quindi $a = 1, c = 0$ e $b = -2$, quindi $\langle (1,0,0) \rangle_B = (1,-2,0)$. Analogamente

$$(0,1,0) = a(1,0,2) + b(0,0,1) + c(0,1,1) = (a, c, 2a + b + c)$$

quindi $a = 0, c = 1$ e $b = -1$, quindi $\langle (0,1,0) \rangle_B = (0,-1,1)$ e

$$(0,0,1) = a(1,0,2) + b(0,0,1) + c(0,1,1) = (a, c, 2a + b + c)$$

quindi $a = 0, c = 0$ e $b = 1$, quindi $\langle (0,0,1) \rangle_B = (0,1,0)$. Quindi la matrice A del passaggio di base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da [.../8]

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 3y, x + 2y + 2z)\,.$$

Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$. Trovare inoltre gli autovalori di f e, per ogni autovalore, la sua molteplicità algebrica e geometrica, lo spazio degli autovettori e una sua base.

Svolgimento. La matrice associata ad f nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Quindi $\dim Imf = 2$ e $\dim Kerf = 1$. Per trovare gli autovalori si calcola il determinante di

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Usando la seconda riga si ottiene che il polinomio caratteristico è

$$(3-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2) = (3-\lambda)(2+\lambda^2-3\lambda-2) = (3-\lambda)\lambda(\lambda-3)\,.$$

Ci sono quindi gli autovalori $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 3$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +2z & = & 3x \\ & 3y & & = & 3y \\ x & +2y & +2z & = & 3z \end{array}\right. \quad \text{e cioè} \quad \left\{\begin{array}{llllll} -2x & +y & +2z & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\left\{\begin{array}{llll} -2x & +y & = & -2z \\ x & +2y & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} y & = & 2x-2z \\ x+4x-4z & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Quindi $V_3 = \{(z,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_3 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ è 1 e non è un autovalore regolare.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 0$ (che poi coincide con $Kerf$). Dobbiamo risolvere il sistema

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +2z & = & 0 \\ & 3y & & = & 0 \\ x & +2y & +2z & = & 0 \end{array}\right.$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che già sappiamo avere rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & = & -2z \\ & 3y & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} y & = & 0 \\ x & = & -2z \end{array}\right.$$

Quindi $V_0 = \{(-2z,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_0 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è 1 ed è un autovalore regolare.

Dato che non tutti gli autovalori sono regolari, non è possibile trovare una base di autovettori, e la matrice associata ad f non è diagonalizzabile.

Totale [28/28]