Lezione 27/09/2022

Proprietà delle funzioni di probabilità

Teorema. *Sia* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *uno spazio di probabilità e siano* $A, B \subseteq \Omega$*, allora le seguenti proprietà sono vere:*

Proprietà 1 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$;

Proprietà 2 $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$;

Proprietà 3 *Se* $A \subseteq B$ *allora* $P(A) \leq P(B)$ *(monotonia);*

Proprietà 4 $P(A) \in [0, 1]$;

Proprietà 5 $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$;

Proprietà 6 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Osservazione: Sia l'assioma 3 (della definizione assiomatica) che le proprietà 5 e 6 permettono di calcolare $P(A \cup B)$; ma mentre le proprietà 5 e 6 si possono sempre utilizzare, l'assioma 3 vale solo quando gli insiemi A e B sono disgiunti.

Osservazione: La proprietà 6 è più generale dell'assioma 3: se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)$.

Le proprietà sopra elencate e gli assiomi della definizione assiomatica sono utili per calcolare la probabilità in contesti dove ci sono eventi composti ($A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$):

Esercizio 1. *In una partita di calcio la probabilità che vinca la quadra di casa è 0.5 e la probabilità che vinca la squadra ospite è 0.2. Qual è la probabilità di pareggio?*

Svolgimento. *Bisogna calcolare la probabilità dell'evento* A *:"le squadre pareggiano".*
L'evento A *si può riscrivere nei seguenti modi, equivalenti al precedente:*

1. A *:"nessuna squadra vince" (non vince la squdra di casa e non vince la squadra ospite);*

2. A *:"non si verifica che vince una delle due squadre" (non si verifica che vince la squadra di casa o la squdra ospite).*

Chiamo B l'evento "vince la squadra di casa" e C l'evento "vince la squadra ospite". Dalla traccia $P(B) = 0.5$ e $P(C) = 0.2$.

In base ai punti (1) e (2) $A = \bar{B} \cap \bar{C}$ e $A = \overline{B \cup C}$ (osservo che per le leggi di De Morgan $\bar{B} \cap \bar{C} = \overline{B \cup C}$).

In questo esercizio, uso la forma di A data dal punto 2: $A = \overline{B \cup C}$.

$P(A) = P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C)$ (per la proprietà 1) $= 1 - [P(B) + P(C)]$ (applicando l'assioma 3 - osservo che B e C sono disgiunti perchè le due squadre non possono vincere contemporaneamente, ma o vince l'una o l'altra) = 1 -[0.5+0.2]=0.3.

Esercizio 2. *In un lotto di pezzi meccanici il 3% ha peso sbagliato, il 5% ha diametro sbagliato e il 2% ha sia il peso che il diametro sbagliato. Qual è la probabilità, che estratto a caso un pezzo del lotto, esso risulti difettoso?*

Svolgimento. *Devo calcolare $P(A)$ dove A : "il pezzo è difettoso". Considero due eventi:*

B : "il pezzo ha peso sbagliato";

C : "il pezzo ha diametro sbagliato".

Dalla traccia, $P(B) = \dfrac{3}{100} = 0.03$, $P(C) = \dfrac{5}{100} = 0.05$ e $P(B \cap C) = \dfrac{2}{100} = 0.02$.

$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ (per la proprietà 6)= 0.03+0.05-0.02=0.06.

Esercizio 3. *In un lotto di pezzi meccanici il 30% dei pezzi non è difettoso (non ha nè peso nè diametro sbagliato). Qual è la probabilità, che estratto a caso un pezzo del lotto, esso risulti difettoso?*

Svolgimento. *A, B e C sono gli eventi descritti nello svolgimento dell'esercizio precedente. In questo caso, dalla traccia, si conosce la probabilità dell'evento $\bar{C} \cap \bar{B}$: "il pezzo non ha difetti (nè nel peso nè nel diametro), infatti $P(\bar{C} \cap \bar{B}) = \dfrac{30}{100} = 0.3$.*

Applicando la proprietà 5, $P(A) = P(B \cup C) = 1 - P(\bar{C} \cap \bar{B}) = 1 - 0.3 = 0.7$.

Esercizio 4. *Il 60% dei clienti di una pizzeria ordina la pizza con pomodoro e formaggio. Il 20% invece ordina la pizza con pomodoro e senza formaggio. Calcola la probabilità che un cliente scelto a caso ordini una pizza con il pomodoro.*

Svolgimento. *Considero gli eventi*

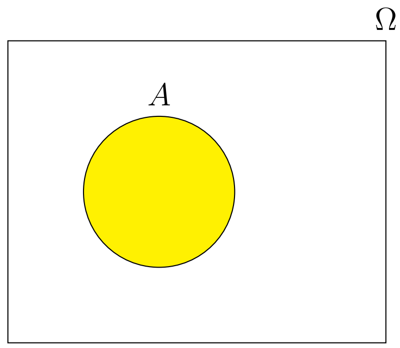
A : *"il cliente ordina la pizza con il formaggio";*

B : *"il cliente ordina la pizza con il pomodoro".*

Allora $\bar{A}$ è l'evento "il cliente ordina la pizza senza formaggio". Dalla traccia si sa che $P(B \cap A) = 0.6$ e $P(B \cap \bar{A}) = 0.2$. Calcoliamo $P(B)$ utilizzando la proprietà 2:
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0.6 + 0.2 = 0.8.$

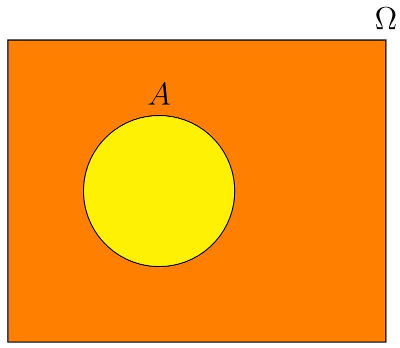
Le proprietà della probabilità con i grafici di Eulero-Venn

Se rappresentiamo gli eventi con diagrammi di Eulero-Venn, possiamo supporre che la probabilità di un evento A sia uguale all'area delimitata dalla figura che rappresenta A.



In questo caso, $P(A)$ è l'area colorata in giallo.

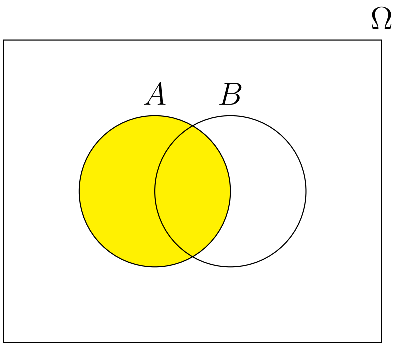
Proprietà 1: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$



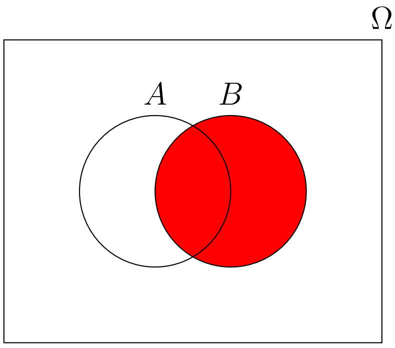
Osservo che $P(A)$ =area gialla, $P(\bar{A})$ =area arancione e $P(\Omega) = 1$ ($P(\Omega)$ è l'area del rettangolo). Di conseguenza, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Proprietà 6: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

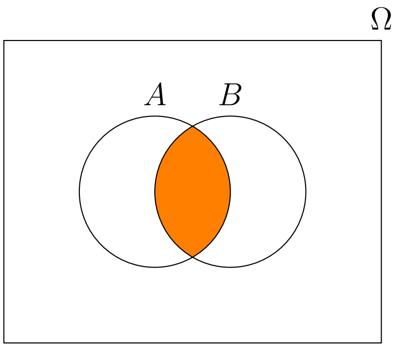
$P(A)$ =area gialla



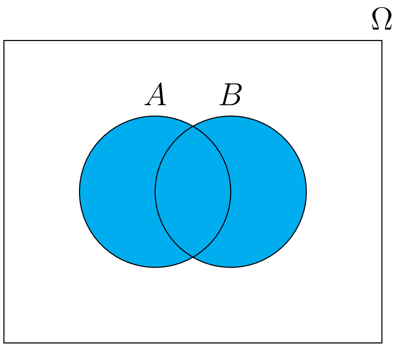
$P(B)$ =area rossa



$P(A \cap B)$ =area arancione



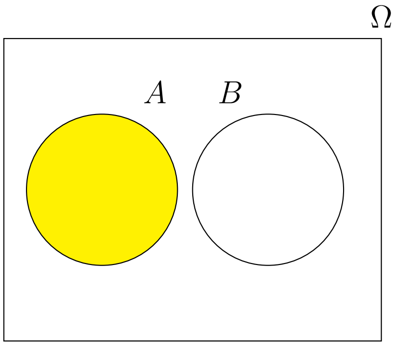
$P(A \cup B)$ =area azzurra



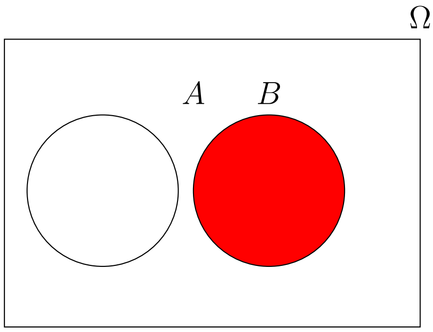
Osservo che la somma dell'area gialla e di quella rossa non è uguale a quella blu ($P(A)+P(B) \neq P(A \cup B)$), ma è uguale all'area blu più l'area arancione. L'area blu ($P(A \cup B)$) è quindi uguale all'area gialla ($P(A)$) + l'area rossa ($P(B)$) meno l'area arancione $P(A \cap B)$.

Cosa succede se A e B sono incompatibili?

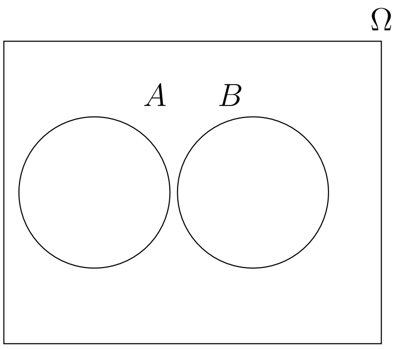
$P(A)$ =area gialla



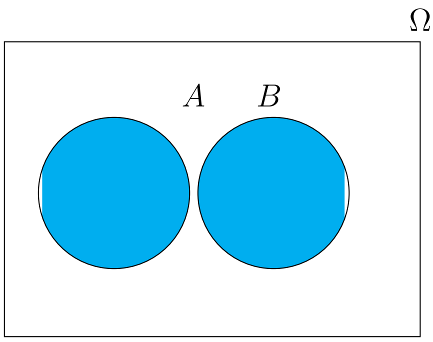
$P(B)$ =area rossa



$P(A \cap B) = 0$



$P(A \cup B)$ =area azzurra



Dalle figure, si osserva che l'area blu è esattamente uguale alla somma dell'area gialla e dell'area rossa ($P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).

Esercizio 5. *Come fatto per le proprietà 1 e 6, analizza il significato delle altre proprietà utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.*

Dimostrazione delle proprietà 1 e 6

Dimostrazione (Proprietà 1)**.** *Sia A un evento, allora $A \cup \bar{A} = \Omega$. Segue che*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega)$$

(due eventi uguali hanno la stessa probabilità). Inoltre,

- $P(\Omega) = 1$ *per l'assioma 2;*
- $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ *per l'assioma 3 (dato che A e $\bar{A}$ sono disgiunti).*

Si verifica quindi che $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ che equivale a $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Dimostrazione (Proprietà 6)**.** *Dati A e B eventi, considero $A \cup B$.*

$A \cup B = (A \cup B) \cap \Omega$ *(perchè $A \cup B \subseteq \Omega$)* $= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$ *(perchè $\Omega = A \cup \bar{A}$)*$=A \cup (B \cap \bar{A})$ *(per la proprietà distributiva di $\cup$ rispetto a $\cap$).*

Sappiamo ora che $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$, quindi

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap \bar{A})). \tag{1}$$

Dato che A e $(B \cap \bar{A})$ sono disgiunti,

$$P(A \cup (B \cap \bar{A})) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \tag{2}$$

per l'assioma 3.

Dalla (1) e dalla (2),

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}). \tag{3}$$

Utilizzando la proprietà 2 risulta che $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$. Sostituendo $P(B) - P(A \cap B)$ al posto di $P(B \cap \bar{A})$ nella (3), si ottiene che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.