Esame di Logica

Giugno 2023

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutti gli uccelli sono dinosauri;
  - Tutti gli uccelli hanno le piume;
  - Qualche uccello vola;
  - Qualche uccello non vola;
  - Nessuna tartaruga ha le piume;
  - Nessuna tartaruga è un dinosauro;
  - Qualche uccello non è estinto;
  - Qualche dinosauro è estinto.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Qualche dinosauro non è estinto;
  2. Nessuna tartaruga vola;
  3. Qualche dinosauro non vola;
  4. Nessuna tartaruga è un uccello.

SOLUZIONE:

- Sia
  - u = uccello;
  - d = dinosauro;
  - p = ha le piume;
  - v = vola;
  - t = tartaruga;
  - e = estinto.

  Allora possiamo rappresentare le affermazioni di cui sopra come
  - $A(u, d)$;
  - $A(u, p)$;
  - $I(u, v)$;
  - $O(u, v)$;
  - $E(t, p)$;
  - $E(t, d)$;
  - $O(u, e)$;
  - $I(d, e)$.

- Consideriamo le affermazioni date:

  1. "Qualche dinosauro non è estinto" corrisponde a $O(d, e)$. Può essere dimostrato in base alla teoria data per dimostrazione indiretta:

	Formula	Spiegazione
(1)	$A(u, d)$	Premessa
(2)	$O(u, e)$	Premessa
(3)	$A(d, e)$	Contraddittorio di $O(d, e)$
(4)	$A(u, e)$	PS1, da (3) e (1)
(5)	X	(2) e (4) sono in contraddizione

  2. "Nessuna tartaruga vola" è rappresentabile come $E(t, v)$. Non è una conseguenza della teoria. Infatti, consideriamo il modello $\mathfrak{M}$ con dominio $\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$ tale che
     - $\iota(u) = \{1, 2\}$;
     - $\iota(d) = \{1, 2, 3\}$;
     - $\iota(p) = \{1, 2\}$;
     - $\iota(v) = \{1, 4\}$;
     - $\iota(t) = \{4\}$;
     - $\iota(e) = \{3\}$.

     Allora

- $\mathfrak{M} \models A(u,d)$, perchè $\iota(u) = \{1,2\} \subseteq \iota(d) = \{1,2,3\}$;
- $\mathfrak{M} \models A(u,p)$, perchè $\iota(u) = \{1,2\} \subseteq \iota(p) = \{1,2\}$;
- $\mathfrak{M} \models I(u,v)$, perchè $1 \in \iota(u) \cap \iota(v)$;
- $\mathfrak{M} \models O(u,v)$, perchè $2 \in \iota(u)$ e $2 \notin \iota(v)$;
- $\mathfrak{M} \models E(t,p)$, perchè $\iota(t) \cap \iota(p) = \emptyset$;
- $\mathfrak{M} \models E(t,d)$, perchè $\iota(t) \cap \iota(d) = \emptyset$;
- $\mathfrak{M} \models O(u,e)$, perchè $1 \in \iota(u)$, $1 \notin \iota(e)$;
- $\mathfrak{M} \models I(d,e)$, perchè $3 \in \iota(d) \cap \iota(e)$.

Però $\mathfrak{M} \not\models E(t,v)$: infatti, $\iota(t) \cap \iota(v) = \{4\} \neq \emptyset$.

3. "Qualche dinosauro non vola" è rappresentabile con $O(d,v)$. Può essere dimostrato in base alla teoria data per dimostrazione indiretta:

	Formula	Spiegazione
(1)	$A(u,d)$	Premessa
(2)	$O(u,v)$	Premessa
(3)	$A(d,v)$	Contraddittorio di $O(d,v)$
(4)	$A(u,v)$	PS1, da (3) e (1)
(5)	X	(2) e (4) sono in contraddizione

4. "Nessuna tartaruga è un uccello" è rappresentabile come $E(t,u)$. Può essere dimostrato in base alla teoria per dimostrazione diretta:

	Formula	Spiegazione
(1)	$A(u,d)$	Premessa
(2)	$E(t,d)$	Premessa
(3)	$E(d,t)$	C1, da (2)
(4)	$E(u,t)$	PS2, da (3) e (1)
(5)	$E(t,u)$	C1, da (4)

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Se piove e ho l'ombrello, apro l'ombrello;
  - Se non piove, non apro l'ombrello;
  - Se piove, è nuvolo;
  - Se è nuvolo, ho l'ombrello.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se non ho l'ombrello allora non piove;

- Se ho l'ombrello allora è nuvolo.

- Verificate se la teoria ha "se piove apro l'ombrello" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau.

SOLUZIONE:

- Sia P = "piove", H = "ho l'ombrello", A = "apro l'ombrello", e N = "è nuvolo". Allora lo scenario può essere rappresentato come
  - $P \wedge H \to A$;
  - $\neg P \to \neg A$;
  - $P \to N$;
  - $N \to H$.

- Costruiamo una tabella di verità per la teoria:

P	H	A	N	$P \wedge H$	$P \wedge H \to A$	$\neg P \to \neg A$	$P \to N$	$N \to H$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

  Quindi, gli assegnamenti di valori che soddisfano la teoria sono quelli in cui le variabili P, H, A e N prendono i valori $(0,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,1,0,1)$, oppure $(1,1,1,1)$.

- "Se non ho l'ombrello allora non piove" è rappresentabile come $\neg H \to \neg P$, e "Se ho l'ombrello allora è nuvolo" è $H \to N$.

  Per i quattro assegnamenti che soddisfano la teoria, abbiamo che queste formule prendono i seguenti valori:

P	H	A	N	$\neg H \to \neg P$	$H \to N$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Quindi, la prima è una conseguenza della teoria, ma la seconda non lo è.

- "Se piove apro l'ombrello" è $P \to A$. Costruiamo il tableau per verificare se la teoria più $\neg(P \to A)$ è insoddisfacibile (per essere più brevi, chiudiamo un ramo appena troviamo due letterali in contraddizione):

$$\{P \wedge H \to A, \neg P \to \neg A, P \to N, N \to H, \underline{\neg(P \to A)}\}$$

$$\{P \wedge H \to A, \neg P \to \neg A, \underline{P \to N}, N \to H, P, \neg A\}$$

$$\{P \wedge H \to A, \neg P \to \neg A, \neg P, N \to H, P, \neg A\}$$

Chiuso: $\neg P$, P

$$\{P \wedge H \to A, \neg P \to \neg A, N, \underline{N \to H}, P, \neg A\}$$

$$\{P \wedge H \to A, \neg P \to \neg A, N, \neg N, P, \neg A\}$$

Chiuso: N, $\neg N$

$$\{\underline{P \wedge H \to A}, \neg P \to \neg A, N, H, P, \neg A\}$$

$$\{\underline{\neg(P \wedge H)}, \neg P \to \neg A, N, H, P, \neg A\}$$

$$\{\neg P, \neg P \to \neg A, N, H, P, \neg A\}$$

Chiuso: $\neg P$, $\neg P$

$$\{\neg H, \neg P \to \neg A, N, H, P, \neg A\}$$

Chiuso: $\neg H$, H

$$\{A, \neg P \to \neg A, N, H, P, \neg A\}$$

Chiuso: A, $\neg A$

Quindi $P \to A$ segue dalla teoria data.

3 Logica dei Predicati

- Scrivete una teoria in logica dei predicati che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutti i numeri sono pari o dispari;
  - Nessun numero è sia pari che dispari;
  - Se n_1 e n_2 sono entrambi numeri pari o sono entrambi numeri dispari allora $n_1 + n_2$ è pari;

- Se uno tra n_1 e n_2 è pari e l'altro è dispari allora $n_1 + n_2$ è dispari;
- 1 è un numero dispari.

- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e contiene esattamente due individui? Se no, date un argomento perchè è impossibile; se sì, presentatela.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e contiene esattamente un individuo? Se no, date un argomento perchè è impossibile; se sì, presentatela.

SOLUZIONE:

- Siano P e D predicati unari che rappresentano l'essere pari e l'essere dispari, sia s una funzione binaria che rappresenta l'operazione di somma, e sia e una costante che rappresenta il numero 1. Allora possiamo rappresentare le affermazioni date in logica dei predicati come
  - $\forall x(P(x) \lor D(x))$;
  - $\neg\exists x(P(x) \land D(x))$;
  - $\forall x\forall y(((P(x) \land P(y)) \lor (D(x) \land D(y))) \to P(s(x,y)))$;
  - $\forall x\forall y(((P(x) \land D(y)) \lor (D(x) \land P(y))) \to D(s(x,y)))$;
  - $D(e)$.
- Una struttura con due individui che soddisfa la teoria descritta è data da $A = (D, I)$, dove $D = \{0,1\}$, $I(P) = \{0\}$, $I(D) = \{1\}$, $I(s)$ è la funzione tale che $I(s)(a,b) = a + b$ modulo 2, ovvero la funzione data da

a	b	$I(s)(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  e $I(e) = 1$.

  Infatti, in questa struttura abbiamo che ogni elemento è in $I(P)$ o in $I(D)$ ma non in entrambi, se due elementi sono entrambi in $I(P)$ o entrambi in $I(D)$ allora sono entrambi 0 o entrambi 1 (e quindi la loro "somma" è 0, che è in $I(P)$), e se uno è in $I(P)$ e l'altro è in $I(D)$ allora uno è 0 e l'altro è 1, e quindi la loro "somma" è 1 che è in $I(D)$, e infine $I(e) = 1 \in I(D)$.
- Non esiste nessuna struttura che soddisfi la teoria e che contenga esattamente un individuo. Infatti, in questo caso la costante e dovrebbe essere interpretata come questo individuo (chiamiamolo "1"), che quindi dovrebbe essere dispari; ma allora necessariamente $I(s)(1,1) = 1$, perchè non ci sono altri numeri nel dominio, e quindi abbiamo due numeri dispari la cui somma è un numero dispari (il che contraddice la nostra teoria).