Esame di Algebra e Geometria del 15/01/2018

Nome Cognome.. **Con Soluzione**

Si risolvano i seguenti esercizi, <u>motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni</u> che si ritengono opportune:

[.../6] 1. Sia $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Quanti elementi ha l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times Y)$?

b) Si consideri la funzione $g : X \to Y$ definita nel seguente modo:

$$g(a) = 2 \qquad g(b) = 3 \qquad g(c) = 3\,.$$

La funzione g è iniettiva e/o suriettiva? Perché?

c) Che cos'è una relazione d'equivalenza? E un insieme quoziente? Scrivere un esempio di relazione d'equivalenza sull'insieme X.

d) La relazione $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (3, 4), (1, 4)\}$ è una relazione d'equivalenza sull'insieme Y? E' una relazione d'ordine? Disegnare il diagramma di Hasse.

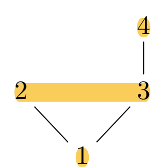
Svolgimento.

a) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times Y)| = 2^{2^3 \cdot 4} = 2^{32}$.

b) La funzione g non è iniettiva perché $g(b) = g(c)$ e non è suriettiva perché l'elemento 4 di Y non ha controimmagine.

c) Una relazione d'equivalenza è una relazione binaria che è riflessiva, simmetrica e transitiva. Un esempio di relazione d'equivalenza su X è $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$. L'insieme quoziente è l'insieme delle classi d'equivalenza, per esempio per la relazione $\mathcal{R}$ descritta prima l'insieme quoziente è $\{[a], [c]\}$ dove $[a] = \{a, b\}$ e $[c] = \{c\}$.

d) La relazione $\mathcal{S}$ non è una relazione d'equivalenza perché non è simmetrica: infatti per esempio $(1, 3) \in \mathcal{S}$ ma $(3, 1) \notin \mathcal{S}$. Però è una relazione d'ordine perché è antisimmetrica: se $x \neq y$ e $(x, y) \in \mathcal{S}$ allora $(y, x) \notin \mathcal{S}$. Il diagramma di Hasse (dove non si disegnano gli archi che esprimono la riflessività e gli archi che possono essere ricavati dalla proprietà transitiva) è:



[.../4] 2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

Svolgimento. Base di induzione $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che il risultato valga per n, cioè che vale (base di induzione):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

e dimostriamolo per $n+1$, cioè dimostriamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}\,.$$

Si ha:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

per ipotesi di induzione

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

[.../4] 3. Scrivere la tabella moltiplicativa di $\mathbb{Z}_5$ e determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_5$. Che struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$?

Svolgimento. $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$. La tabella moltiplicativa è :

	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$
$[1]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[0]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[0]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[0]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Gli elementi inveritibili sono $[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5$. La struttura $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ non è un gruppo perché $[0]_5$ non è invertibile, ma è un monoide perché l'operazione è associativa e c'è l'elemento neutro che è $[1]_5$.

[.../4] 4. Dare la definizione di sottospazio vettoriale e di base. Dire se $\{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e trovare una sua base.

Svolgimento. Un sottospazio vettoriale U di uno spazio V è un sottoinsieme di V che è chiuso per somma e per prodotto esterno. Cioè se $u_1, u_2 \in U$ allora anche $u_1 + u_2 \in U$ e $r \cdot u_1 \in U$ (per ogni r). Una base per uno spazio V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio V.

L'insieme $U = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazioni di $\mathbb{R}^2$ perché se considero due vettori $u_1 = (x_1, 3x_1)$ e $u_2 = (x_2, 3x_2)$ che appartengono a U, la loro somma è $(x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2))$ che è ancora un elemento di U. Analogamente, il prodotto esterno $r \cdot (x_1, 2x_1) = (rx_1, 3rx_1)$ è ancora un elemento di U. Una base di U è l'insieme $\{(1, 3)\}$: infatti ogni elemento di U è una combinazione lineare di $(1, 3)$.

[.../4] 5. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli. Dire se il seguente sistema ha soluzioni e quante ne ha, e calcolarle nel caso in cui esistano:

$$\begin{cases} 2x & -y & & = & 0 \\ 3x & +y & -z & = & 5 \\ x & & +z & = & 1 \end{cases}$$

Svoglimento. Il teorema di Rouchè-Capelli afferma che un sistema di equazioni lineari $Ax = B$ ha soluzioni se e solo se rango della matrice A è uguale al rango della matrice $A|B$. In particolare, se tale rango è uguale al numero di incognite, allora il sistema ha una sola soluzione, altrimenti il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri, dove n è il numero di incognite e r è il rango delle matrici A e $A|B$.

La matrice dei coefficienti associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che tale matrice ha determinante diverso da 0, allora ha rango 3. Quindi anche la matrice completa ha rango 3 e il sistema ha una sola soluzione, che può essere determinata con il metodo di Cramer. La soluzione è $(1, 2, 0)$.

[.../6] 6. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, 2y, 3x + 2y + z)\,.$$

Trovare la dimensione di $Im\,f$ e $Ker\,f$. Trovare inoltre gli autovalori di f e, per ogni autovalore, la sua molteplicità algebrica e geometrica, lo spazio degli autovettori e una sua base. Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori di f.

Svolgimento. La matrice associata ad f nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Quindi $\dim Imf = 2$ e $\dim Kerf = 1$. Per trovare gli autovalori si calcola il determinante di

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Usando la seconda riga si ottiene che il polinomio caratteristico è

$$(2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - 3) = (2-\lambda)(3 + \lambda^2 - 4\lambda - 3) = (2-\lambda)\lambda(\lambda - 4)\,.$$

Ci sono quindi gli autovalori $\lambda = 2$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 4$, tutti con molteplicità algebrica 1. Essendoci 3 autovalori, la matrice è diagonalizzabile, cioé esiste una base formata da autovettori.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 2$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x & +y & +z & = & 2x \\ & 2y & & = & 2y \\ 3x & +2y & +z & = & 2z \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \\ 3x & +2y & -z & = & 0 \end{cases}$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x & +y & = & -z \\ 3x & +2y & = & z \end{cases} \begin{cases} y & = & -x-z \\ 3x-2x-2z & = & z \end{cases} \begin{cases} x & = & 3z \\ y & = & -4z \end{cases}$$

Quindi $V_2 = \{(3z, -4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_2 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 0$ (che poi coincide con $Kerf$). Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x & +y & +z & = & 0 \\ & 2y & & = & 0 \\ 3x & +2y & +z & = & 0 \end{cases}$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che già sappiamo avere rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x & +y & = & -z \\ & 2y & = & 0 \end{cases} \begin{cases} y & = & 0 \\ x & = & -1/3z \end{cases}$$

Quindi $V_0 = \{(-1/3z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_0 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è 1.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 4$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x & +y & +z & = & 0 \\ & -2y & & = & 0 \\ 3x & +2y & -3z & = & 0 \end{cases}$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x & +y & = & -z \\ & -2y & = & 0 \end{cases} \begin{cases} y & = & 0 \\ x & = & z \end{cases}$$

Quindi $V_4 = \{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_4 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 4$ è 1.

Totale: [.../28]