Tableaux per la logica dei Predicati

Logica Matematica

Brunella Gerla

Università dell'Insubria, Varese
brunella.gerla@uninsubria.it

Richiamiamo la classificazione delle formule della logica proposizionale:

$\alpha -$ formula	ridotti	
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \to B)$	A	$\neg B$

$\beta -$ formula	ridotti	
$A \vee B$	A	B
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \to B$	$\neg A$	B

Consideriamo, per semplicità , linguaggi predicativi in cui non ci sono simboli di funzione.

Definizione

Una formula P è una γ-**formula** se ha la forma $\forall x \psi$ oppure $\neg \exists x \psi$. I ridotti di una γ-formula sono definiti dalla seguente tabella:

	ridotti
$\forall x \psi$	$\psi[a/x]$
$\neg \exists x \psi$	$\neg \psi[a/x]$

dove a è una qualsiasi costante. I ridotti in questo caso sono **istanze** della formula relative alla costante a.

Definizione

Una formula P è una δ-**formula** se ha la forma $\exists x \psi$ oppure $\neg \forall x \psi$. I ridotti (istanze) di una δ-formula sono definiti dalla seguente tabella:

	ridotti
$\exists x \psi$	$\psi[a/x]$
$\neg \forall x \psi$	$\neg \psi[a/x]$

dove a è una qualsiasi costante.

Lemma

Se φ è una γ-formula e φ_1 è una sua istanza, allora $\varphi \models \varphi_1$.

Dimostrazione.

Supponiamo, per semplicità , che $\varphi = \forall x \psi$ sia una formula chiusa e che $\psi_1 = \psi[a/x]$ sia una istanza di ψ.
Sia $\mathcal{A} = (D, I)$ un modello di φ. Si ha quindi che per ogni $d \in D$

$$v^{\mathcal{A}, e(d/x)}(\psi) = 1$$

quindi in particolare

$$v^{\mathcal{A}, e(I(a)/x)}(\psi) = 1$$

dato che $I(a) \in D$. Quindi $(\mathcal{A}, e) \models \psi[a/x]$. $\square$

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(P(x) \vee D(x))$. La formula φ è soddisfatta dalla struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove $I(P) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $I(D) = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Una sua istanza è la formula $P(a) \vee D(a)$ con a costante che è una conseguenza logica di φ. Infatti la formula $P(a) \vee D(a)$ è soddisfatta da qualsaisi interpretazione $I(a)$ di a.

Lemma

Sia Γ un insieme di formule, φ una δ-formula e φ_1 una istanza di φ relativa ad una costante che non compare né in Γ né in φ. Allora $\Gamma \cup \{\varphi\}$ è soddisfacibile se e solo se $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$ è soddisfacibile.

Dimostrazione.

Sia $\varphi = \exists x \psi$ e $\psi_1 = \psi[a/x]$ dove la costante a non compare né in Γ né in φ. Per ipotesi $\Gamma \cup \{\varphi\}$ è soddisfacibile, quindi esiste $\mathcal{A} = (D, I)$ tale che

$$(\mathcal{A}, e) \models \Gamma \cup \{\varphi\}$$

e quindi in particolare $(\mathcal{A}, e) \models \varphi$. Quindi esiste $d \in D$ tale che

$$v^{\mathcal{A}, e(d/x)}(\psi) = 1\,.$$

Dato che a non compare in Γ, φ, l'interpretazione I non si esprime sul significato di a. Estendiamo quindi I ad una interpretazione I' tale che $I'(a) = d$ e sia $\mathcal{A}' = (D, I')$. Sia ha quindi che $(\mathcal{A}', e) \models \Gamma$ e inoltre $(\mathcal{A}', e(d/x)) \models \psi_1$. Quindi Γ, ψ_1 è soddisfacibile. $\square$

Esempio

Sia $\Gamma = \{\neg P(a)\}$ e $\varphi = \exists x P(x)$. L'insieme

$$\{\neg P(a), \exists x P(x)\}$$

è soddisfacibile. Se però considero l'istanza di $\exists x P(x)$ relativa alla costante a, ottengo l'insieme

$$\{\neg P(a), P(a)\}$$

che chiaramente è insoddisfacibile. Se invece considero una nuova costante b ottengo un insieme ancora soddisfacibile.

Lemma

Ogni formula della logica dei predicati è di uno dei seguenti tipi:

- *Letterale (formula atomica o negazione di formula atomica);*
- *doppia negazione;*
- α*-formula;*
- β*-formula;*
- γ*-formula;*
- δ*-formula.*

Dobbiamo quindi specificare le regole per le γ e δ formule.

$E(n)$ è l'insieme delle formule che formano l'etichetta del nodo n.

- Se $\varphi \in E(n)$ con φ γ-formula, e se a è una costante qualsiasi allora si aggiunge un nodo n' successore di n con

$$E(n') = E(n) \cup \{\varphi_1\}$$

  dove φ_1 è una istanza di φ relativa ad a.

- Se $\varphi \in E(n)$ con φ δ-formula, e se a è una costante che NON compare nell'etichetta $E(n)$ allora si aggiunge un nodo n' successore di n con

$$E(n') = (E(n) \setminus \{\varphi\}) \cup \{\varphi_1\}$$

  dove φ_1 è una istanza di φ relativa ad a.

Nota che nella regola per le γ formule la formula φ a cui si applica la regola viene ricopiata nel nuovo nodo.

$$\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x P(x))$$

$$|$$

$$\forall x \neg P(x), \exists x P(x)$$

$$|$$

$$\forall x \neg P(x), \exists x P(x), \neg P(a)$$

$$|$$

$$\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b)$$

$$|$$

$$\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b), \neg P(b)$$

$$\times$$

Definizione

Una coppia complementare è composta da una formula atomica e dalla sua negazione.

Esempio

$$\neg(\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)))$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)), \neg(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x)$$

$$P(a) \vee Q(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x)$$

$$\begin{array}{cc} P(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x) & Q(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x) \\ | & | \\ P(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x), \neg P(a) & Q(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x), \neg Q(a) \end{array}$$

Esempio

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y)$$

$$\exists y\, P(a,y),\ \forall x\, \exists y\, P(x,y)$$

$$P(a,b),\ \forall x\, \exists y\, P(x,y)$$

$$P(a,b),\ \underline{\exists y\, P(b,y)},\ \forall x\, \exists y\, P(x,y)$$

$$P(a,b),\ P(b,c),\ \underline{\forall x\, \exists y\, P(x,y)}$$

$$P(a,b),\ P(b,c),\ \exists y\, P(c,y),\ \forall x\, \exists y\, P(x,y)$$

Il procedimento continua all'infinito senza mai generare una coppia complementare.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x \exists y P(x, y)$. Ci chiediamo se φ è soddisfacibile.

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(P) = \{(n, m) \mid n < m\}$.

$\mathcal{A} \models \varphi$ perché è vero che per ogni numero n ne esiste uno più grande.

Nota che il dominio di questa interpretazione è infinito.
Però φ è anche soddisfatta da una interpretazione finita: $\mathcal{A}' = (\{1\}, I')$ con $I'(P) = \{(n, n)\}$ (cioè P è intepretata come l'uguaglianza).

$$\neg((\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)) \to \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)))$$

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\exists x\, P(x),\ \exists x\, Q(x),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$P(a),\ \exists x\, Q(x),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$P(a),\ Q(b),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$P(a),\ Q(b),\ \neg(P(a) \wedge Q(a)),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

Ramo sinistro:

$$P(a),\ Q(b),\ \neg P(a),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\times$$

Ramo destro:

$$P(a),\ Q(b),\ \neg Q(a),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$P(a),\ Q(b),\ \neg Q(a),\ \neg(P(b) \wedge Q(b)),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$P(a),\ Q(b),\ \neg Q(a),\ \neg P(b),\ \neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \qquad\qquad P(a),\ Q(b),\ \neg Q(a),\ \neg Q(b)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times$$

C'è un ramo che non si chiude mai.

Definizione

Un tableau è **chiuso** se non ha rami infiniti e tutte le etichette delle foglie contengono una coppia complementare.

Teorema

Se T_φ è chiuso allora φ è insoddisfacibile (quindi $\neg\varphi$ è valida).

Dimostrazione

Dimostriamo che per ogni n l'etichetta $E(n)$ è un insieme insoddisfacibile. Si procede per induzione sull'altezza $h(n)$ del nodo n dell'albero, considerata come distanza dalle foglie (cioè $h(n) = 0$ se e solo se n è una foglia). Quindi si procede dal basso verso l'alto.

- Se $h(n) = 0$ allora $E(n)$ è l'etichetta di una foglia e quindi contiene una coppia complementare e quindi è insoddisfacibile.

Se $h(n) > 0$ consideriamo i seguenti casi:

- Se in $E(n)$ c'è una α o una β-formula si procede come per la dimostrazione del calcolo proposizionale.
- Se in $E(n)$ c'è una γ-formula φ allora

$$E(n') = E(n) \cup \{\varphi_1\}$$

  con φ_1 istanza di φ relativa ad una costante già presente. Per ipotesi di induzione, $E(n')$ è insoddisfacibile. Se per assurdo $E(n)$ fosse soddisfacibile, allora esisterebbe $(\mathcal{A}, e) \models E(n)$. Per il Lemma 1, si ha $\varphi \models \varphi_1$, ma $\varphi \in E(n)$ e quindi sarebbe anche $(\mathcal{A}, e) \models E(n')$.

- Se in $E(n)$ c'è una δ-formula φ, e a è una nuova costante allora

$$E(n') = (E(n) \setminus \{\varphi\}) \cup \{\varphi_1\}$$

  con φ_1 istanza di φ relativa ad a. Se $E(n)$ fosse soddisfacibile, allora esisterebbe $(\mathcal{A}, e) \models E(n)$. Sia $\Gamma = E(n) \setminus \{\varphi\}$. Per il Lemma 2, dato che $\Gamma \cup \{\varphi\} = E(n)$ è soddisfacibile anche $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$ è soddisfacibile. Quindi $E(n')$ è soddisfacibile, ma questo è contrario all'ipotesi di induzione.

Esempio

Sia $H = \exists x R(a,x)$, $F = \forall x(\exists y R(y,x) \to \neg P(x))$ e $G = \exists x \neg P(x)$ e dimostriamo che $H \wedge F \to G$ è una formula valida:

$$\underline{\neg(H \wedge F \to G)}$$

$$\underline{H \wedge F}, \neg G$$

$$\underline{H}, F, \neg G$$

$$R(a,b), \underline{F}, \neg G$$

$$R(a,b), F, \neg G, \underline{\exists y R(y,b) \to \neg P(b)}$$

$$\begin{array}{cc}
R(a,b), F, \neg G, \neg\underline{\exists y R(y,b)} & R(a,b), F, \underline{\neg G}, \neg P(b) \\
| & | \\
\underline{R(a,b)}, F, \neg G, \neg\exists y R(y,b), \underline{\neg R(a,b)} & R(a,b), F, \neg G, \underline{\neg P(b)}, \underline{\neg\neg P(b)} \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}$$

Teorema di completezza

Teorema

Se φ è insoddisfacibile allora esiste un tableau chiuso che ha φ nell'etichetta della radice.

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di modificare leggermente la definizione di tableau per poter meglio gestire le costanti introdotte dalle regole per γ e δ-formule.

Introduciamo quindi i **Tableaux sistematici**.

Tableaux sistematici

- Per ogni etichetta $E(n)$ e per ogni γ-formula $\varphi \in E(n)$ considero anche un insieme di costanti $C_n(\varphi)$.
- Si dice che una foglia n è **finale** se $E(n)$ contiene una coppia complementare OPPURE contiene solo letterali e γ-formule φ con $C_n(\varphi) = \emptyset$.
- Si dice che un nodo n è un γ-**nodo** se è una foglia non finale, cioè se contiene solo letterali e γ-formule φ con $C_n(\varphi) \neq \emptyset$.
- Un nodo invece è **ordinario** se non è né una foglia finale né un γ-nodo.

Vediamo come si costruisce $C_n(\varphi)$. Supponiamo di applicare le regole alle γ-formule solo quando non ci sono altre regole da applicare:

- Se la radice è una γ-formula φ allora $C(\varphi)$ è l'insieme delle costanti che compaiono in φ. Eventualmente, se in φ non ci sono costanti, si considera una nuova costante a e si pone $C_n(\varphi) = \{a\}$.
- Se in $E(n)$ c'è una α-formula ψ con ridotti ψ_1 e ψ_2 allora sappiamo che n ha un successore n' e

$$E(n') = (E(n) \setminus \{\psi\}) \cup \{\psi_1, \psi_2\}.$$

  - Se φ è una γ-formula in $E(n)$ allora poniamo $C_{n'}(\varphi) = C_n(\varphi)$.
  - Se ψ_1 o ψ_2 sono γ-formule allora

$$C_{n'}(\psi_1) \text{ è l'insieme di tutte le costanti in } E(n')$$

(eventualmente si aggiunge una costante se non ce ne sono).

Analogamente per le β-formule.

- Se in $E(n)$ c'è una δ-formula ψ allora

$$E(n') = (E(n) \setminus \{\psi\}) \cup \{\psi_1\}$$

con ψ_1 istanza di ψ relativa ad una nuova costante b.

  - Se φ è una γ-formula di $E(n)$ allora

$$C_{n'}(\varphi) = C_n(\varphi) \cup \{b\}\,.$$

  - Se ψ_1 è una γ-formula allora

$$C_{n'}(\psi_1) \text{ è l'insieme di tutte le costanti in } E(n') \cup \{b\}\,.$$

- Se n è un γ-nodo, consideriamo l'insieme Γ formato da tutte le istanze di tutte le γ-formule φ di $E(n)$ rispetto alle costanti presenti in $C_n(\varphi)$. Poniamo allora

$$E(n') = E(n) \cup \Gamma\,.$$

  Per ogni γ-formula $\varphi \in E(n)$ si pone $C_{n'}(\varphi) = \emptyset$.
  Per le γ-formule $\psi \in E(n') \setminus E(n)$, si pone $C_{n'}(\psi)$ uguale all'insieme delle costanti in $E(n')$.

Diciamo che il tableau è **completo** se le foglie sono tutte foglie finali.

$$\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x P(x))$$

$$|$$

$$\underbrace{\forall x \neg P(x)}_{\varphi}, \ \underline{\exists x P(x)} \qquad C_1(\varphi) = \{a\}$$

$$|$$

$$\underline{\forall x \neg P(x)}, \ P(b) \qquad C_2(\varphi) = \{a, b\}$$

È un γ-nodo $\quad \Gamma = \{\neg P(a), \neg P(b)\}$

$$|$$

$$C(\varphi) = \emptyset \quad \forall x \neg P(x), \ \neg P(a), \ \underbrace{\neg P(b), \ P(b)}_{}$$

$$\times$$

Esempio

Sia $\varphi = \forall x \exists y P(x, y)$ e consideriamo il tableau che ha questa formula come etichetta della radice. Si ha $C_1(\varphi) = \{a_1\}$.

Dato che la radice è un γ-nodo, si pone $\Gamma_1 = \{\exists y P(a_1, y)\}$ (istanza di φ relativa alle costanti di $C_1(\varphi)$). Quindi il nodo successore avrà etichetta

$$E(2) = \{\varphi, \exists y P(a_1, y)\}$$

dove però $C_2(\varphi) = \emptyset$.

Applicando la regola alla δ formula, si ottiene un nodo successore con etichetta

$$E(3) = \{\varphi, P(a_1, a_2)\}$$

e $C_3(\varphi) = \{a_2\}$. Questo è un γ-nodo, quindi pongo $\Gamma_3 = \{\exists y P(a_2, y)\}$, $C_4(\varphi) = \emptyset$ e

$$E(4) = \{\varphi, P(a_1, a_2), \exists y P(a_2, y)\}.$$

Continuando in questo modo, si costruisce un ramo infinito dato che ogni nodo non è finale.

$H = \exists x R(a,x)$

$F = \forall x (\exists y R(y,x) \to \neg P(x))$

$G = \exists x \neg P(x)$

$$\neg(H \wedge F \to G)$$

$\underline{H}, F, \neg G \qquad C_1(F) = \{a\} \quad C_1(\neg G) = \{a\}$

$R(a,b), F, \neg G \qquad C_2(F) = \{a,b\} = C_2(\neg G)$

è un γ-nodo

$\Gamma = \{ \underline{\exists y R(y,a) \to \neg P(a)},$
$\exists y R(y,b) \to \neg P(b), P(a), P(b) \}$

$R(a,b), \Gamma, F, \neg G \qquad C_3(F) = \phi = C_3(\neg G)$

$R(a,b), \underline{\neg \exists y R(y,a)}, \underline{\exists y R(y,b) \to \neg P(b)},$
$P(a), P(b), F, \neg G$

$R(a,b), \underline{\neg P(a)}, \ldots, \underline{P(a)}, P(b)$
$F, \neg G$
$\times$

$C_4(\neg \exists y R(y,a)) = \{a\}$

Scrivere il tableau sistematico per

$$(\exists x \forall y R(x,y) \wedge \forall x \forall y (R(y,x) \to R(x,y))) \to \exists x R(x,a)$$

Definizione

Un insieme di formule chiuse H nel quale compare almeno un simbolo di costante, è un **Hintikka** set (o H-set) se:

1. H non contiene coppie complementari;
2. Se $\neg\neg\varphi \in H$ allora $\varphi \in H$;
3. se $\varphi \in H$ e φ è una α formula con ridotti φ_1 e φ_2 allora $\varphi_1, \varphi_2 \in H$;
4. se $\varphi \in H$ e φ è una β formula con ridotti φ_1 e φ_2 allora o $\varphi_1 \in H$ oppure $\varphi_2 \in H$.
5. se $\varphi \in H$ e φ è una γ formula allora H contiene anche tutte le istanze di φ relative a costanti che si trovano in H.
6. se $\varphi \in H$ e φ è una δ formula allora H contiene almeno una istanza di φ.

Esempio

$H = \{\forall x(P(a) \rightarrow Q(a,x))\, , P(b) \wedge Q(a,b)\, , P(b)\, , Q(a,b)\, , P(a) \rightarrow Q(a,b)\, , P(a) \rightarrow Q(a,a)\, , \neg P(a)\}$ è un H-set.

Lemma 1

Ogni H-set è soddisfacibile.

Proof.

Sia H un H-set e C l'insieme (non vuoto) delle costanti presenti in H. Costruiamo una struttura $\mathcal{A} = (D, I)$ dove $D = C$ e

$$I(c) = c \qquad \text{per ogni costante } c$$

$$I(P) = \{(c_1, \ldots, c_n) \in C^n \mid P(c_1, \ldots, c_n) \in H\}$$

dove P è un predicati n-ario.

Adattiamo la definizione di rango di una formula considerando, oltre alle condizioni definite per le formule proposizionali, il fatto che il rango di una γ-formula (o di una δ-formula) è uguale al rango di una sua istanza più 1.

Per dimostrare che $\mathcal{A} \models H$ consideriamo una formula $\varphi \in H$ e dimostriamo per induzione sul rango di φ che $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$.

Se $\varphi \in H$ ha rango 0 allora o è una formula atomica o una sua negazione. Ricordando che stiamo considerando in questo capitolo il caso in cui non ci sono funzioni, se $\varphi \in H$ è una formula atomica allora sarà $\varphi = P(a_1, \ldots, a_n)$ dove $a_1, \ldots, a_n$ sono costanti. Dato che per definizione $I(P) = \{(c_1, \ldots, c_n) \in C^n \mid P(c_1, \ldots, c_n) \in H\}$ allora $(a_1, \ldots, a_n) \in I(P)$ e quindi

$$v^{\mathcal{A}}(P(a_1, \ldots, a_n)) = 1$$

e quindi $\mathcal{A} \vDash \varphi$. D'altra parte, se $\varphi = \neg P(a_1, \ldots, a_n)$ allora $P(a_1, \ldots, a_n) \notin H$ e quindi $(a_1, \ldots, a_n) \notin I(P)$ e $v^{\mathcal{A}}(\neg\varphi) = 0$ e $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$.

Se $\varphi \in H$ è una α formula con ridotti ψ_1 e ψ_2, allora $\psi_1, \psi_2 \in H$ e per ipotesi di induzione $v^{\mathcal{A}}(\psi_1) = v^{\mathcal{A}}(\psi_2) = 1$ quindi $v^{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$. Analogamente per le β-formule.

Se $\varphi \in H$ è una γ-formula $\forall x \psi$, allora per ogni $a \in D$, tutte le istanze $\psi(a|x)$ appartengono ad H (per definizione di H-set) e quindi, dato che hanno un rango più piccolo del rango di φ,

$$v^{(\mathcal{A}, e(a|x))}(\psi) = 1$$

per ogni $a \in D$ e quindi $v^{\mathcal{A}}(\forall x \psi) = 1$.

Se $\varphi \in H$ è una β-formula $\exists x \psi$, allora esiste $a \in D$ tale che $\psi(a) \in H$. Quindi dato che $\psi(a)$ ha rango minore del rango di φ, si ha $v^{\mathcal{A}}(\psi(a|x)) = 1$ e quindi $v^{\mathcal{A}}(\exists x \psi) = 1$.

Esempio

Sia $H = \{\forall x(P(a) \to Q(a,x)), P(b) \wedge Q(a,b), P(b), Q(a,b), P(a) \to Q(a,b), P(a) \to Q(a,a), \neg P(a)\}$. Allora ponendo $D = \{a, b\}$ e $I(P) = \{b\}$, $I(Q) = \{(a,b)\}$, si può notare che $(D, I) \models H$.

Lemma 2

Se r è un ramo aperto di un tableau sistematico, allora

$$\bigcup_{n \in r} E(n)$$

è un H-set.

Dimostrazione.

Sia

$$H = \bigcup_{n \in r} E(n) .$$

Le proprietà $1 - 4$ della definizione di H-set si dimostrano come nel caso proposizionale.

Se $\varphi \in H$ e φ è una γ-formula, allora per la definizione di tableau sistematico ci sarà un nodo n in r in cui ci sono tutte le istanze di φ.

Quindi le istanze di φ appartengono a H e quindi il punto 5 è verificato.

Il punto 6 (δ-formule) è analogo. □

Teorema (completezza)

Se T_φ non è chiuso allora φ è soddisfacibile.

Dimostrazione.

Se T_φ è aperto allora c'è un ramo r aperto (eventualmente infinito).

per il Lemma 2, $\bigcup_{n \in r} E(n)$ è un H-set

per il Lemma 1, $\bigcup_{n \in r} E(n)$ è soddisfacibile

in particolare $\varphi \in \bigcup_{n \in r} E(n)$ è soddisfacibile.

□

Quindi se φ è insoddisfacibile il tableau T_φ è chiuso.

Linguaggi con simboli di funzione

Quello che abbiamo detto finora vale per linguaggio dove NON ci sono simboli di funzione.

Per considerare anche le funzioni, bisogna fare qualche piccola modifica: le istanze di una γ-formula devono essere fatte rispetto a tutti i termini (chiusi) che si possono scrivere usando le funzioni e le costanti presenti.

Anche le regole per i tableau sistematici sono molto più complicate perché devono considerare l'insieme di tutti i termini chiusi che può essere infinito. Questo porta a generare alberi in cui un nodo può avere una etichetta infinita, con problemi di decidibilità .

Vedremo un argomento simile nel prossimo capitolo.

Tableaux per la conseguenza logica

Esattamente come accade per la logica proposizionale, si possono usare i tableaux anche per studiare la conseguenza logica.

$$\Gamma \vDash \varphi \qquad \text{se e solo se} \qquad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ è insoddisfacibile}$$

$$\text{se e solo se} \qquad T_{\Gamma \cup \{\neg\varphi\}} \text{ è chiuso.}$$

Esempio

Provare che

$$\forall x P(x), \forall x(\forall z R(x,z) \to \neg P(x)) \vDash \forall y \exists x \neg R(y,x)$$

utilizzando i tableaux.