Esame di Algebra e Geometria del 12/2/2020

Nome Cognome.. **Matricola**.................................... A

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../7] 1. Siano $A = \{2,4,6,8,10,12\}$ e $B = \{3,4,5,6,7\}$ e consideriamo la funzione $f : A \to B$ definita nel seguente modo: per ogni numero $n \in A$, $f(n)$ è il numero di lettere che compongono la parola in italiano che corrisponde al numero n. Per esempio se $n = 2$ allora dato che nella parola "due" ci sono 3 lettere si ha $f(2) = 3$.

(a) Quanti elementi ha $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))$? E quanti elementi ha $\mathcal{P}(A \times (A \cap B))$?

(b) Scrivere i valori di $f(n)$ per ogni $n \in A$. La funzione f è iniettiva? E' suriettiva? Perché?

(c) Considerare la relazione di divisibilità sull'insieme A, rappresentare il diagramma di Hasse e dire se esistono minimi e massimi, elementi minimali e massimali.

[.../5] 2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \,.$$

[.../4] 3. Scrivere la tabella moltiplicativa di $\mathbb{Z}_3$ e determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_3$. Che struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$? E $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, \cdot)$?

[.../5] 4. Utilizzando il metodo di Gauss, dire se il seguente sistema di 2 equazioni in 3 incognite ha soluzioni e quante ne ha, e calcolarle nel caso in cui esistano:

$$\begin{cases} 2x & -2y & +4z & = & 1 \\ -x & +y & -2z & = & -1/2 \end{cases}$$

[.../7] 5. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,y,z) = (x+y, -2x+4y, 2x+z)\,.$$

- Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$.
- Trovare gli autovalori di f, e per ogni autovalore calcolare la molteplicità algebrica e geometrica e l'autospazio corrispondente. Scegliere un autospazio tra quelli calcolati e mostrare che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.