Esame di Logica

12 Dicembre 2024

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Qualche gatto è un animale domestico;
  - Nessuna tigre è un animale domestico;
  - Tutti i barboncini sono animali domestici;
  - Nessun animale domestico è aggressivo;
  - Qualche gatto è aggressivo.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Nessun barboncino è aggressivo;
  2. Qualche tigre non è un barboncino;
  3. Tutte le tigri sono aggressive;
  4. Qualche gatto non è un barboncino.

SOLUZIONE:

- Siano **g** = gatto, **d** = animale domestico, **t** = tigre, **b** = barboncino, **a** = aggressivo. Allora la teoria è
  - $\mathbf{I}(g, d)$;
  - $\mathbf{E}(t, d)$;

- $\mathbf{A}(b,d)$;
- $\mathbf{E}(d,a)$;
- $\mathbf{I}(g,a)$.

- Consideriamo le quattro affermazioni:

  - $\mathbf{E}(b,a)$ segue dalla teoria per dimostrazione diretta:

(1)	A(b,d)	Ipotesi
(2)	E(d,a)	Ipotesi
(3)	E(b,a)	PS2, da (2) e (1).

  - $\mathbf{O}(t,b)$ segue dalla teoria per la seguente dimostrazione indiretta:

(1)	A(b,d)	Ipotesi
(2)	E(t,d)	Ipotesi
(3)	A(t,b)	Contraddizione di O(p,c)
(4)	A(t,d)	PS1, da (1) e (3)
(5)	I(t,d)	C2, da (4)

    e I(t,d) e E(t,d) sono in contraddizione.

  - $\mathbf{A}(t,a)$ non segue dalla teoria. Infatti, consideriamo il modello con dominio $\Delta = \{1,2,3,4\}$, dove $\iota(b) = \{1\}$, $\iota(d) = \{1,2\}$, $\iota(g) = \{2,3\}$, $\iota(a) = \{3\}$ e $\iota(t) = \{4\}$.
    Allora

    * $\mathbf{I}(g,d)$ è soddisfatta, perchè $\iota(g) \cap \iota(d) = \{2\} \neq \emptyset$;
    * $\mathbf{E}(t,d)$ è soddisfatta, perchè $\iota(t) \cap \iota(d) = \emptyset$;
    * $\mathbf{A}(b,d)$ è soddisfatta, perchè $\iota(b) \subseteq \iota(d)$;
    * $\mathbf{E}(d,a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(d) \cap \iota(a) = \emptyset$;
    * $\mathbf{I}(g,a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(g) \cap \iota(a) = \{3\} \neq \emptyset$;

    ma $\mathbf{A}(t,a)$ non è soddisfatta, perchè $\iota(t) = \{4\} \not\subseteq \iota(a) = \{3\}$.

  - $\mathbf{O}(g,b)$ segue dalla teoria per la seguente dimostrazione diretta:

(1)	A(b,d)	Ipotesi
(2)	E(d,a)	Ipotesi
(3)	I(g,a)	Ipotesi
(4)	E(b,a)	PS2, da (2) e (1)
(5)	E(a,b)	C1, da (4)
(6)	O(g,b)	PS4. da (5) e (3).

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Non è vero che piove e nevica;
  - Se è freddo, piove o nevica;
  - Se non è bagnato, non piove.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se è freddo e non è bagnato, nevica.
  - Se è bagnato, piove.
- Verificate se la teoria ha "Se è freddo, è bagnato oppure nevica" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere gli altri).

SOLUZIONE:

- **P** = piove, **N** = nevica, **F** = è freddo, **B** = è bagnato. La teoria è

$$\neg(P \wedge N);$$
$$F \to (P \vee N);$$
$$\neg B \to \neg P.$$

- La tabella di verità è

P	N	F	B	$P \wedge N$	$\neg(P \wedge N)$	$P \vee N$	$F \to (P \vee N)$	$\neg B$	$\neg P$	$\neg B \to \neg P$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1

Quindi gli assegnamenti che soddisfano la teoria sono quelli che assegnano a P, N, F e B i valori $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,1,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,0,1)$, e $(1,0,1,1)$.

- Le affermazioni da verificare sono $(F \wedge \neg B) \to N$ e $B \to P$.

P	N	F	B	$F \wedge \neg B$	$(F \wedge \neg B) \to N$	$B \to P$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1

Quindi la prima è una conseguenza della teoria, ma la seconda non lo è.

- La formula $F \to (B \vee N)$ segue dalla teoria secondo il seguente tableau chiuso:

$$\{\neg(P \wedge N), F \rightarrow (P \vee N), \neg B \rightarrow \neg P, \underline{\neg(F \rightarrow (B \vee N)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\neg(P \wedge N), F \rightarrow (P \vee N), \neg B \rightarrow \neg P, F, \underline{\neg(B \vee N)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\neg(P \wedge N), \underline{F \rightarrow (P \vee N)}, \neg B \rightarrow \neg P, F, \neg B, \neg N\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{\neg(P \wedge N), \neg F, \neg B \rightarrow \neg P, F, \neg B, \neg N\}$$

Chiuso: $\neg F$, F

$$\{\neg(P \wedge N), P \vee N, \underline{\neg B \rightarrow \neg P}, F, \neg B, \neg N\}$$

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$\{\neg(P \wedge N), P \vee N, \underline{\neg\neg B}, F, \neg B, \neg N\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\neg(P \wedge N), P \vee N, B, F, \neg B, \neg N\}$$

Chiuso: B, $\neg B$

$$\{\neg(P \wedge N), \underline{P \vee N}, \neg P, F, \neg B, \neg N\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{\neg(P \wedge N), P, \neg P, F, \neg B, \neg N\}$$

Chiuso: P, $\neg P$

$$\{\neg(P \wedge N), N, \neg P, F, \neg B, \neg N\}$$

Chiuso: N, $\neg N$

3 Logica dei Predicati

- Scrivete una teoria in logica dei predicati che rappresenti le seguenti affermazioni, usando i predicati unari $F(x)$ ("x è una formica"), $E(x)$ ("x è femmina"), $R(x)$ ("x è una regina") e $O(x)$ ("x è un'operaia"):
  - Tutte le formiche che sono femmine sono regine oppure operaie;
  - Tutte le formiche che sono regine o operaie sono femmine;
  - Nessuna formica è sia una operaia che una regina;
  - Esiste (almeno) una formica che è una regina;
  - Esiste (almeno) una formica che non è femmina.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e in cui esiste solo una formica? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta e in cui esistono esattamente tre formiche? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.

SOLUZIONE:

- La teoria è
  - $\forall x((F(x) \wedge E(x)) \rightarrow (R(x) \vee O(x)))$;
  - $\forall x((F(x) \wedge (R(x) \vee O(x))) \rightarrow E(x))$;
  - $\neg\exists x(F(x) \wedge O(x) \wedge R(x))$;
  - $\exists x(F(x) \wedge R(x))$;
  - $\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$.
- Una tale struttura non può esistere. Infatti, la teoria dice che deve esistere una formica che è regina (e quindi femmina) e una formica che non è femmina, quindi devono esistere almeno due formiche.
- Esistono strutture che soddisfano la teoria e contengono esattamente tre formiche. Per esempio, consideriamo la struttura con dominio $\{1, 2, 3\}$ dove $I(F) = \{1, 2, 3\}$, $I(E) = \{1, 2\}$, $I(R) = \{1\}$, e $I(O) = \{2\}$.