Logica dei predicati - Teoria di Herbrand

Logica Matematica

Brunella Gerla

Università dell'Insubria, Varese
brunella.gerla@uninsubria.it

Ricordiamo alcune definizioni sulle formule della logica dei predicati:

- Una formula è **chiusa** o una **sentenza** se non contiene variabili libere.
- Una formula è in **forma di Skolem** se è in forma normale prenessa (cioè tutti i quantificatori sono all'inizio) e non ci sono quantificatori esistenziali.
- Il procedimento di **Skolemizzazione** permette di ottenere una formula φ^S in forma di Skolem a partire da una formula φ in forma prenessa, "*cancellando*" i quantificatori esistenziali nel seguente modo:
  - se $\exists x$ non è preceduto da $\forall$ allora si elimina $\exists x$ e si sostituisce la variabile x con una nuova costante;
  - se $\exists x$ è preceduto da $\forall x_1 \cdots \forall x_n$ allora si elimina $\exists x$ e si sostituisce x con il termine $f(x_1, \ldots, x_n)$, dove f è un nuovo simbolo di funzione.
- φ è soddisfacibile se e solo se φ^S è soddisfacibile.

Chiusura universale e esistenziale

Definizione

Data una formula φ con variabili libere $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, la **chiusura universale** di φ è la formula chiusa

$$U(\varphi) = \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi \, .$$

La **chiusura esistenziale** di φ è la formula chiusa

$$Ex(\varphi) = \exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi \, .$$

Lemma

φ è valida se e solo se $U(\varphi)$ è valida.

φ è soddisfacibile se e solo se $Ex(\varphi)$ è soddisfacibile.

Data una formula φ, la formula $Ex^S(\varphi)$ è chiusa e in forma di Skolem e si ha:

φ è soddisfacibile se e solo se $Ex^S(\varphi)$ è soddisfacibile.

Quindi ogni formula è equisoddisfacibile con una formula chiusa in forma di Skolem.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x P(x, y)$. La formula φ non è chiusa, la sua chiusura esistenziale è

$$Ex(\varphi) = \exists y \forall x P(x, y) \,.$$

Controlliamo la soddisfacibilità . Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(P) = \{(n, m) \mid n \geq m\}$. Per interpretare φ dobbiamo fissare una interpretazione delle variabili: se consideriamo $e(y) = 0$ allora $(\mathcal{A}, e) \vDash \varphi$.

Si ha $\mathcal{A} \vDash Ex(\varphi)$: infatti esiste un elemento del dominio (che è 0) tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $m \geq 0$.

Consideriamo ora $Ex^S(\varphi)$ e cioè $\forall x P(x, c)$. Anche questa formula è soddisfacibile, basta porre $I(c) = 0$.

Definizione

Un termine è **ground** (o **chiuso**) se non contiene variabili.
Una **istanza ground** di un termine $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine ground che si ottiene sostituendo le variabili di $f(t_1, \ldots, t_n)$ con termini ground.

Esempio

$t = f(x, g(c))$ non è un termine ground.

$$f(f(c, g(c)), g(c))$$

è una istanza ground di t ottenuta sostituendo x con il termine ground $f(c, g(c))$.
A sua volta, $f(c, g(c))$ è una istanza ground di t.

Universo di Herbrand

Definizione

Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. L' **universo** di Herbrand $H(\varphi)$ di φ è l'insieme dei termini ground costruibili a partire dai simboli di φ. Se φ non contiene costanti, se ne aggiunge una nuova e si costruiscono i termini ground a partire da questa.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x \forall y (A(c, x) \to B(f(y)))$. Allora

$$H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$$

è un insieme infinito.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(A(c) \to B(x))$. Allora $H(\varphi) = \{c\}$.

Si noti che se la formula non contiene simboli di funzioni, allora l'universo di Herbrand è finito, altrimenti è infinito.

Esempio

Se $\varphi = \forall x \forall y(A(f(x), g(x, y)) \to B(x, f(y)))$ allora

$$H(\varphi) = \{c, f(c), g(c, c), f(g(c, c)), g(c, f(c)), \ldots\}.$$

Definizione

Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. Una struttura $\mathcal{A} = (D, I)$ è una **struttura di Herbrand** per φ se:

- $D = H(\varphi)$;
- $I(c) = c$ per ogni costante $c \in H(\varphi)$;
- Se f è una funzione n-aria allora

$$I(f) : (t_1, \dots, t_n) \in D^n \to f(t_1, \dots, t_n) \in D$$

Ci sono diverse strutture di Herbrand per una data formula, che variano su come interpretano i predicati. Comunque per definizione deve essere $I(P) \subseteq (H(\varphi))^n$ per ogni predicati n-ario P.

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(A(x) \to B(f(x)))$, e quindi $H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$. Consideriamo la struttura $\mathcal{A} = (H(\varphi), I)$ il cui dominio è l'universo di Herbrand e

$$I(c) = c$$

$$I(f) : t \in H(\varphi) \to f(t) \in H(\varphi)\,.$$

Quindi ad esempio $[\![f(f(c))]\!] = f(f(c))$.
I predicati A e B possono essere interpretati in diversi modi. Sia per esempio

$$I(A) = \{c, f(f(c))\}\,,$$

$$I(B) = \{f(c), f(f(f(c)))\}\,.$$

Allora con questa interpretazione dei predicati, la struttura di Herbrand $\mathcal{A}$ è un modello per la formula φ. Trovare una interpretazione di A e B che non soddisfa la formula φ.

Teorema (di Herbrand (1))

Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. Allora φ è soddisfacibile se e solo se ha un modello di Herbrand (cioè una struttura di Herbrand che la soddisfa).

Dimostrazione.

Se supponiamo che φ abbia un modello di Herbrand, allora chiaramente è soddisfacibile. L'altra direzione invece è più difficile da dimostrare. Facciamo un esempio:

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(D(x) \to Q(f(x), g(x)))$ e si consideri la struttura $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I^{\mathcal{A}})$ tale che
$I^{\mathcal{A}}(D) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$
$I^{\mathcal{A}}(Q) = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n = 2m\}$.

$I^{\mathcal{A}}(f) : n \in \mathbb{N} \to n + 1 \in \mathbb{N}$
$I^{\mathcal{A}}(g) : n \in \mathbb{N} \to \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \in \mathbb{N}$

$\mathcal{A} \models \varphi$ perché per ogni numero n se n è dispari allora

$$n + 1 = 2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

Quindi φ è soddisfacibile

Esempio (continua...)

Costruiamo una interpretazione di Herbrand che soddisfa φ. Sappiamo che deve essere
$D = H(\varphi) = \{c, f(c), g(c), f(g(c)), f(f(c)), g(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\}$
$I^H(f) = f$; $I^H(g) = g$; $I^H(c) = c$.

Definiamo l'interpretazione dei predicati: poniamo

$$I^H(D) = \{t \in H(\varphi) \mid [\![t]\!]^{\mathcal{A}} \in I^{\mathcal{A}}(D)\}$$

Quindi $t \in I^H(D)$ se $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ è un numero dispari.

Analogamente,

$$I^H(Q) = \{(s, t) \in H^2(\varphi) \mid ([\![s]\!]^{\mathcal{A}}, [\![t]\!]^{\mathcal{A}}) \in I^{\mathcal{A}}(Q)\}$$

cioè $(s, t) \in I^H(Q)$ se $[\![s]\!]^{\mathcal{A}} = 2[\![t]\!]^{\mathcal{A}}$.

Esempio (continua...)

La costante c è stata introdotta per costruire l'universo di Herbrand, ma non ha una interpretazione nella precedente struttura, quindi poniamo $I^{\mathcal{A}}(c) = 2$. Si ha quindi:

- $[\![c]\!]^{\mathcal{A}} = 2$ quindi $c \notin I^H(D)$;
- $[\![f(c)]\!]^{\mathcal{A}} = 2 + 1 = 3$ quindi $f(c) \in I^H(D)$;
- $[\![g(c)]\!]^{\mathcal{A}} = 1$ quindi $g(c) \in I^H(D)$;
- $[\![f(g(c))]\!]^{\mathcal{A}} = 1 + 1 = 2$ quindi $f(g(c)) \notin I^H(D)$;

e così via.

Esempio (continua...)

Per quanto riguarda il predicato Q si ha per esempio:

- $[\![c]\!]^{\mathcal{A}} = 2$ e $[\![f(c)]\!]^{\mathcal{A}} = 2 + 1 = 3$ quindi $(c, f(c)) \notin I^H(Q)$;
- $[\![g(c)]\!]^{\mathcal{A}} = 1$ e $[\![c]\!]^{\mathcal{A}} = 2$ quindi $(g(c), c) \in I^H(Q)$;

e così via.

Si ha quindi che $(H(\varphi), I^H) \vDash \varphi$: infatti se $t \in I^H(D)$ allora $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ è dispari, quindi $[\![f(t)]\!]^{\mathcal{A}}$ è pari e

$$[\![f(t)]\!]^{\mathcal{A}} = 2\lfloor \frac{[\![t]\!]^{\mathcal{A}} + 1}{2} \rfloor = 2[\![g(t)]\!]^{\mathcal{A}}$$

e quindi $(f(t), g(t)) \in I^H(Q)$.

Esempio (continua...)

Vediamo un caso particolare: sappiamo che $f(c) \in I^H(Q)$ e ci chiediamo se

$$(f(f(c)), g(f(c))) \in I^H(Q).$$

Sappiamo che

$$[\![f(f(c))]\!]^{\mathcal{A}} = 4 \qquad\qquad [\![g(f(c))]\!]^{\mathcal{A}} = 2$$

e $(4, 2) \in I^{\mathcal{A}}(Q)$, quindi $(f(f(c)), g(f(c))) \in I^H(Q)$.

Dimostrazione.

Sia φ una formula in forma di Skolem, chiusa e soddisfacibile e sia $\mathcal{A} = (D, I^{\mathcal{A}})$ un suo modello.
Se φ non contiene costanti, allora consideriamo una nuova costante c, scegliamo arbitrariamente un elemento $d \in D$ e poniamo $I^{\mathcal{A}}(c) = d$.

Poniamo, per ogni predicato n-ario P presente nella formula φ:

$$I^H(P) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in H^n(\varphi) \mid ([\![t_1]\!]^{\mathcal{A}}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathcal{A}}) \in I^{\mathcal{A}}(P)\}\,.$$

Dimostriamo che $(H(\varphi), I^H) \vDash \varphi$ per induzione strutturale:
Caso base: φ è una formula atomica chiusa $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Allora $(H(\varphi), I^H) \vDash \varphi$ per definizione.
(si consideri l'esempio $\varphi = P(c, f(d))$ con il modello $2 \leq 4 + 1$)

Dimostrazione.

- Sia $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Poiché $\mathcal{A} \models \varphi$ allora sarà $\mathcal{A} \models \psi_1$ e $\mathcal{A} \models \psi_2$, quindi per ipotesi di induzione, $H \models \psi_1$ e $H \models \psi_2$ e quindi $H \models \varphi$. Analogamente per gli altri casi proposizionali.
- Se $\varphi = \forall x \psi$ e $\mathcal{A} \models \varphi$ allora per ogni $d \in D$ si ha

  $$v^{(\mathcal{A}, e(d/x))}(\psi) = 1\,.$$

  Però non possiamo applicare direttamente l'ipotesi di induzione perché ψ non è una formula chiusa.

  Consideriamo

  $$D^T = \{d \in D \mid d = [\![t]\!]^{\mathcal{A}} \text{ per qualche } t \in H(\varphi)\} \subseteq D\,.$$

Dimostrazione.

In particolare si ha che per ogni $d \in D^T$ vale

$$v^{(\mathcal{A}, e(d/x))}(\psi) = 1\,,$$

ma se $d \in D^T$ allora sarà $d = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ quindi vale

$$v^{(\mathcal{A}, e([\![t]\!]^{\mathcal{A}}/x))}(\psi) = 1\,,$$

per ogni $t \in H(\varphi)$.
Ma

$$v^{(\mathcal{A}, e([\![t]\!]^{\mathcal{A}}/x))}(\psi) = v^{\mathcal{A}}(\psi(t/x)) = 1\,,$$

e inoltre $\psi(t/x)$ è una formula chiusa perché t è un termine ground.
Quindi si può applicare l'ipotesi di induzione a $\psi(t/x)$ e si ottiene

$$v^H(\psi(t/x)) = 1 \qquad \text{per ogni } t \in H(\varphi) \text{ e quindi} \qquad v^H(\forall x \psi) = 1$$

$\square$

Esempio (1)

Vediamo se la formula $\varphi = \forall y \neg M(c, y)$ (chiusa e in forma di Skolem) è soddisfacibile.
Costruiamo un modello di Herbrand: $H(\varphi) = \{c\}$ quindi, poiché deve essere $I^H(M) \subseteq H^2(\varphi)$, si ha che

$$I^H(M) = \begin{cases} \emptyset \text{ oppure} \\ \{(c, c)\}. \end{cases}$$

Se $I^H(M) = \{(c, c)\}$ allora $v^H(\varphi) = 0$ perché non è vero che ogni elemento del dominio non è in relazione con c (c'è un solo elemento del dominio che è in relazione con c).

Se invece poniamo $I^H(M) = \emptyset$, allora M non è mai soddisfatto e quindi $v^H(\varphi) = 1$. Quindi la formula φ ha un modello di Herbrand, quindi è soddisfacibile.

Esempio (2)

Sia adesso $\varphi = \forall y(\neg M(c, y) \wedge M(y, c))$. Per capire se è soddisfacibile, cerchiamo di costruire un modello di Herbrand.

$H(\varphi) = \{c\}$ e anche in questo caso il predicato binario M si può interpretare o come la relazione vuota o come $\{(c, c)\}$. Il quantificatore agisce solo su c (che è l'unico elemento del dominio), quindi deve valere contemporaneamente $M(c, c)$ e $\neg M(c, c)$.

Quindi φ non ha un modello di Herbrand e quindi non è soddisfacibile (non c'è bisogno di cercare altri modelli).

Esempio (3)

Proviamo adesso che l'ipotesi che la formula sia in forma di Skolem è fondamentale.
Sia

$$\varphi = \forall y M(c, y) \wedge \exists x \forall y \neg M(x, y)$$

(non è in forma di Skolem) e mostriamo che anche se non ha un modello di Herbrand è comunque una formula soddisfacibile.

Anche in questo caso $H(\varphi) = \{c\}$ e quindi per soddisfare $\forall y M(c, y)$ deve essere $I^H(M) = \{(c, c)\}$. Ma con questa interpretazione non si soddisfa $\exists x \forall y \neg M(x, y)$.

Esempio (continua...)

Ma la formula $\forall y M(c, y) \wedge \exists x \forall y \neg M(x, y)$ è soddisfacibile. Infatti si consideri $\mathcal{A} = (D, I^{\mathcal{A}})$ con

$$D = \{c, b\} \qquad I^{\mathcal{A}}(c) = c \qquad I^{\mathcal{A}}(M) = \{(c, c), (c, b)\}\,.$$

Allora è vero che ogni elemento del dominio è in relazione con $I(c) = c$ ed è anche vero che esiste un elemento del dominio (b) tale che ogni altro non è in relazione con questo.

Quindi φ è soddisfacibile anche se non ha un modello di Herbrand. Il teorema non vale perché la formula non è in forma di Skolem.

Provare a trasformare φ in forma di Skolem e a trovare un modello di Herbrand.

Definizione

Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem:

$$\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_n \psi$$

dove in ψ non compaiono quantificatori. Allora l' **espansione di Herbrand** di φ è l'insieme

$$E(\varphi) = \left\{ \psi \left[{}^{t_1, \ldots, t_n}/_{x_1, \ldots, x_n} \right] \mid t_1, \ldots, t_n \in H(\varphi) \right\} .$$

Esempio

Sia $\varphi = \forall y (M(c, y) \wedge \neg M(d, y))$. Quindi

$$H(\varphi) = \{c, d\}$$

e

$$E(\varphi) = \{M(c, c) \wedge \neg M(d, c), M(c, d) \wedge \neg M(d, d)\} .$$

Esempio

Sia $\varphi = \forall x \forall y (A(x, f(y)) \wedge B(y, f(x)))$. Allora

$$H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$$

e

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \{A(c, f(c)) \wedge B(c, f(c)), A(c, f(f(c)) \wedge B(f(c), f(c)), \\ &\quad A(f(c), f(c)) \wedge B(c, f(f(c))), \ldots\}. \end{aligned}$$

Esempio

Sia $\varphi = \forall x (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$, allora

$$H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$$

e

$$E(\varphi) = \{P(c) \wedge \neg P(f(c)), P(f(c)) \wedge P(f(f(c)), \ldots\}.$$

L'espansione di Herbrand è formata solo da formule chiuse senza quantificatori: Se si assegna una variabile proposizionale ad ogni formula atomica, allora l'espansione di Herbrand si può vedere come insieme di formule proposizionali.

Esempio

Se $\varphi = \forall y(M(c,y) \wedge \neg M(d,y))$ allora

$$E(\varphi) = \{M(c,c) \wedge \neg M(d,c), M(c,d) \wedge \neg M(d,d)\}.$$

Ponendo $X_1 = M(c,c)$, $X_2 = M(d,c)$, $X_3 = M(c,d)$ e $X_4 = M(d,d)$ l'espansione di Herband diventa

$$E(\varphi) = \{X_1 \wedge \neg X_2, X_3 \wedge \neg X_4\}.$$

Questo insieme è soddisfacibile (nella logica proposizionale) ponendo $v(X_1) = 1$, $v(X_2) = 0$, $v(X_3) = 1$ e $v(X_4) = 0$.

Nota che l'interpretazione di Herbrand $(H(\varphi), I^H)$ tale che $I^H(M) = \{(c,c),(c,d)\}$ è un modello per φ.

Teorema (di Herbrand (2))

Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. Allora φ è soddisfacibile se e solo se $E(\varphi)$ è soddisfacibile come insieme di formule proposizionali.

Dimostrazione.

Scriviamo $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \psi$. Sappiamo che φ è soddisfacibile se e solo se ha un modello di Herbrand.

Quindi $v^H(\varphi) = 1$ se e solo se per ogni $t_1, \dots, t_n \in H(\varphi)$ si ha

$$v^{H,v\left({}^{t_1,\dots,t_n}/_{x_1,\dots,x_n}\right)}(\psi) = 1$$

se e solo se, per ogni $t_1, \dots, t_n \in H(\varphi)$

$$v^H\left(\psi\left[{}^{t_1,\dots,t_n}/_{x_1,\dots,x_n}\right]\right) = 1$$

se e solo se $v^H(\alpha) = 1$ per ogni $\alpha \in E(\varphi)$. $\square$

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(P(x) \wedge \neg P(f(x)))$. Calcolare $E(\varphi)$.

Come conseguenza del teorema di compattezza abbiamo:

Teorema

φ è soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $E(\varphi)$ è soddisfacibile.

Quindi φ soddisfacibile $\leftrightarrow$ ogni sottoinsieme finito di $E(\varphi)$ è soddisfacibile.

Supponiamo che $E(\varphi) = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$: per capire se φ soddisfacibile dobbiamo controllare
$\{\varphi_1\}$,
$\{\varphi_1, \varphi_2\}$,
$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$,
$\ldots$

Se uno di questi è insoddisfacibile allora possiamo concludere che la formula è insoddisfacibile, altrimenti dobbiamo continuare a controllare.

Capire se una formula è insoddisfacibile (o analogamente se una formula è valida) è un problema **semidecidibile**.

Ci sono però dei casi in cui la procedura termina in ogni caso:

Se $H(\varphi)$ è finito allora $E(\varphi)$ è finito e quindi si può decidere se è soddisfacibile o no in un numero finito di passi.

$H(\varphi)$ è finito quando non ci sono funzioni: quindi per le formule che *in forma di Skolem* non hanno simboli di funzione, il problema della soddisfacibilità è decidibile.

Nota che per esempio la formula

$$\forall x \exists y M(x, y)$$

non rientra in questo caso...

Esempio

Sia $\varphi = \forall x(P(x) \wedge \neg P(f(x)))$. Allora

$$H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$$

e

$$E(\varphi) = \{P(c) \wedge \neg P(f(c)), P(f(c)) \wedge \neg P(f(f(c))), \ldots\}.$$

Scrivendo l'espansione come formule proposizionali si ha:

$$E(\varphi) = \{X_1 \wedge \neg X_2, X_2 \wedge \neg X_3, \ldots\}.$$

$\{X_1 \wedge \neg X_2\}$ è soddisfacibile.

$\{X_1 \wedge \neg X_2, X_2 \wedge \neg X_3\}$ non è soddisfacibile.

Quindi φ non è soddisfacibile.