Lab 9 (Esame tipo)

Ricordiamoci che l'esame è a libro aperto: siamo completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non possiamo però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di noi o con l'esterno, né passarci del materiale tra di noi.

In questo esame-tipo ci sono tre esercizi per un totale di 31 punti. Non vuol dire questo che sempre sarà così. Ci possono essere anche più esercizi se sono più ristretti.

Non ha importanza calcolare il valore numerico delle soluzioni; **è invece importante mostrare il ragionamento e le formule usate**, arrivando comunque a una risposta esatta, anche se espressa in funzione di altri operatori. Per esempio, se arriviamo a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, possiamo lasciare questa come risposta senza ulteriori semplificazioni, oppure possiamo semplificare al massimo e arrivare al numero 252. Invece scrivere solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, **sarà considerato un errore.**

1 Re, Regine e Fanti

Si prendono i re, le regine, e i fanti di tutti i quattro semi delle carte, per un totale di dodici carte. Queste dodici carte vengono mescolate, e quattro sono estratte casualmente da esse.

1. Quanti modi ci sono di estrarre queste quattro carte (senza tenere conto dell'ordine di estrazione, e considerando che ogni carta è distinguibile dalle altre)? (2 pt)
2. Qual è la probabilità che tutte e quattro le carte siano re? (2 pt)
3. Qual è la probabilità che ci siano *esattamente* due re tra le quattro carte? (2 pt)
4. Qual è la probabilità che ci siano *almeno* due re tra le quattro carte? (3 pt)
5. Qual è la probabilità che ci siano almeno due regine tra le quattro carte *supponendo che* almeno due re siono estratti? (3 pt)

1 Soluzione

Definiamo le variabili aleatorie e gli eventi.
Scriviamo *Kings* per il numero di re tra le quattro carte estratte e *Queens* per il numero di regine tra le quattro carte estratte.

1. **Cosa mi viene chiesto?** Il numero di modi di estrarre quattro elementi (carte) da un insieme di dodici. Quindi possiamo usare la **formula delle combinazioni semplici**:

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10}^{5} \cdot 9}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

2. **Cosa mi viene chiesto?**

   $P(\mathit{Kings} = 4)$

   C'è esattamente un modo di estrarre quattro re. Dato che ci sono 495 modi di estrarre 4 carte da 12, la probabilità di estrarre i 4 re è:

$$P(\mathit{Kings} = 4) = \frac{1}{495}.$$

   Avremmo potuto esprimere la risposta anche come:

$$P(\mathit{Kings} = 4) = \frac{1}{\binom{12}{4}}$$

   oppure:

$$P(\mathit{Kings} = 4) = \frac{1}{11 \cdot 5 \cdot 9}$$

3. **Cosa mi viene chiesto?**

$$P(\mathit{Kings} = 2)$$

   Per estrarre 4 carte in maniera tale che otteniamo esattamente 2 re dobbiamo estrarre 2 dei 4 re, e 2 delle rimanenti 8 carte. Quindi il numero di modi in cui possiamo farlo è:

$$\binom{4}{2}\binom{8}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{\cancel{8}^{4} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7.$$

   E quindi la probabilità richiesta è:

$$P(\mathit{Kings} = 2) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}{11 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{168}{495} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 7}{11 \cdot 5 \cdot \cancel{9}^{3}} = \frac{56}{165}.$$

4. **Cosa mi viene chiesto?**

$$P(\mathit{Kings} \geq 2)$$

   Se ci sono "almeno due" re tra le quattro carte, allora ce ne possono essere due, tre, o quattro. Poichè questi scenari sono due a due incompatibili possiamo sommare le probabilità:

$$P(\mathit{Kings} \geq 2) = P(\mathit{Kings} = 2) + P(\mathit{Kings} = 3) + P(\mathit{Kings} = 4).$$

Abbiamo già calcolato P(*Kings*= 2) e P(*Kings*= 4) nei punti precedenti, e rimane solo da calcolare P(*Kings*= 3).

Per farlo, calcoliamo prima il numero di modi di estrarre tre re dall'insieme di quattro re, e un non-re dalle dodici carte rimanenti:

$$\binom{4}{3}\binom{8}{1} = \binom{4}{1}\binom{8}{1} = 4 \cdot 8 = 32.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} P(\textit{Kings} \geq 2) &= P(\textit{Kings} = 2) + P(\textit{Kings} = 3) + P(\textit{Kings} = 4) \\ &= \frac{168 + 32 + 1}{495} \\ &= \frac{201}{495} \text{ oppure, semplificando: } = \frac{\cancel{201}^{67}}{\cancel{495}^{165}} = \frac{67}{165} \end{aligned}$$

5. **Cosa mi viene chiesto?**

$$P(\textit{Queens} \geq 2 \mid \textit{Kings} \geq 2)$$

Per calcolare tale probabilità condizionata, riscriviamola come una frazione:

$$P(\textit{Queens} \geq 2 \mid \textit{Kings} \geq 2) = \frac{P(\textit{Queens} \geq 2, \textit{Kings} \geq 2)}{P(\textit{Kings} \geq 2)}.$$

Notiamo però che, poichè stiamo estraendo 4 carte in tutto, se estraiamo *almeno* due re e *almeno* due regine allora dobbiamo estrarre *esattamente* due re e due regine. In altre parole:

$$P(\textit{Queens} \geq 2, \textit{Kings} \geq 2) = P(\textit{Queens} = 2, \textit{Kings} = 2)$$

Poi, il numero di modi in cui estrarre due re e due regine è:

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 6 = 36.$$

E quindi abbiamo che:

$$P(\textit{Queens} \geq 2, \textit{Kings} \geq 2) = \frac{36}{495} = \frac{4}{55}$$

E infine, avevamo già determinato $P(\textit{Kings} \geq 2)$ in una risposta precedente, e quindi:

$$P(\textit{Queens} \geq 2 \mid \textit{Kings} \geq 2) = \frac{P(\textit{Queens} \geq 2, \textit{Kings} \geq 2)}{P(\textit{Kings} \geq 2)}$$

$$= \frac{\frac{4}{55}}{\frac{67}{165}} = \frac{4}{55} \cdot \frac{165}{67} \text{ oppure, semplificando:}$$

$$= \frac{4}{\cancel{55}} \cdot \frac{\cancel{165}^{3}}{67} = \frac{12}{67}$$

2 Costo di riparazione di un cellulare

Il tempo necessario, in ore, per riparare un cellulare è una variabile casuale $\mathcal{X}$ che segue una distribuzione continua uniforme tra i valori 0 e 2.
Il costo della riparazione (in euro) dipende dal tempo, e è dato da $40 + 30x$ dove x è il tempo in ore che la riparazione ha effettivamente richiesto.

1. Scrivete la funzione di densità di $\mathcal{X}$. (3 pt)
2. Calcolate $P(\mathcal{X} > 1.5)$. (3 pt)
3. Calcolate il valore atteso e la varianza del costo della riparazione. (4 pt)
4. Qual è la probabilità che la riparazione costerà più di cinquanta euro? (4 pt)

2 Soluzione

1. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. $$P(\mathcal{X}) = \int_{1.5}^{+\infty} f(x) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}[x]_{1.5}^{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

3. Se $\mathcal{Y}$ è il costo della riparazione, abbiamo che $\mathcal{Y} = 40 + 30\mathcal{X}$; e sappiamo (**dalle proprietà della distribuzione uniforme**) che $\mathcal{X}$ ha valore atteso $E[X] = (2 + 0)/2 = 1$ e varianza $\mathbf{Var}[X] = 1/12 \cdot (2 - 0)^2 = 4/12 = 1/3$.

   Quindi, **per le proprietà del valore atteso**,

   $$E(\mathcal{Y}) = 40 + 30E[X] = 40 + 30 = 70$$

   e

   $$\mathbf{Var}[\mathcal{Y}] = 30^2 \cdot \mathbf{Var}[\mathcal{X}] = 900 \cdot 1/3 = 300.$$

4. $P(\mathcal{Y} > 50) = P(40 + 30\mathcal{X} > 50) = P(\mathcal{X} > 1/3) = \int_{1/3}^{2} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot (2 - 1/3) = \frac{5}{6}$

3 Animali

Ci sono due specie molto simili di animali, che chiameremo specie A e specie B.
La specie A tende a essere più pesante e più rara della specie B: più precisamente, sappiamo che:

- Il peso degli esemplari della specie A ha un valore atteso di 100 kg, con una deviazione standard di 10kg;

- Il peso degli esemplari della specie B ha un valore atteso di 85kg, con una deviazione standard di 15kg;
- Si stima che la frequenza degli esemplari della specie B nell'ecosistema sia il doppio della frequenza degli esemplari della specie A.

Possiamo inoltre supporre che i pesi degli esemplari delle due specie seguano una distribuzione normale (con i rispettivi valori attesi e deviazioni standard).

Un esemplare, che potrebbe essere della specie A o della specie B, è brevemente catturato e poi liberato. Non si sa a quale specie appartenga; ma si è riusciti a osservare che pesa più di 100 kg.

Qual è la probabilità che appartenga alla specie A? (7pt)

3 Soluzione

Dati:
Sia $\mathcal{E}$ l'evento "l'esemplare è della specie A" (senza supporre niente riguardo al suo peso), e sia $\mathcal{F}$ l'evento "l'esemplare pesa più di 100 kg". Sappiamo dalla traccia dell'esercizio che $P(\mathcal{E}) = 1/3$ e $P(\overline{\mathcal{E}}) = 2/3$, visto che due esemplari su tre non appartengono alla specie A.

Ci viene chiesta trovare la probabilità condizionata $P(\mathcal{E}|\mathcal{F})$

Iniziamo esprimendo questa probabilità in termini di $P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$, $P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})$, visto che il **Teorema di Bayes**, ci può essere di aiuto:

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})}.$$

Ci manca quindi di calcolare $P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$ e $P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})$ e abbiamo finito.

$P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$ e $P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})$ possono essere espresse in termini della funzione $\mathbf{\Phi}$ utilizzando il **teorema del limite centrale** (in particolare, il fatto che se $\mathcal{X}$ è una distribuzione normale con valore atteso μ e deviazione standard σ, allora $(\mathcal{X}-\mu)/\sigma$ è una distribuzione **normale standard**, e quindi $P((\mathcal{X}-\mu)/\sigma \leq z) = \Phi(z)$.

Ora, il peso $\mathcal{X}$ di un esemplare della specie A segue una distribuzione normale con valore atteso $\mu = 100$ e deviazione standard $\sigma = 10$; quindi, la variabile $(\mathcal{X} - 100)/10$ segue una distribuzione normale standard. Dato un esemplare della specie A, la probabilità che abbia un peso maggiore di 100 kg è pertanto

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) &= P(\mathcal{X} > 100) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 100) = 1 - P((\mathcal{X} - 100)/10 \leq (100 - 100)/10) = \\ &= 1 - P((\mathcal{X} - 100)/10 \leq 0) = 1 - \mathbf{\Phi}(0) = 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

un esemplare della specie A ha il 50% di probabilità di pesare più di 100 kg (questo si sarebbe potuto vedere direttamente osservando che la distribuzione normale è simmetrica rispetto al suo valore atteso, che in questo caso è appunto 100 kg).

Similmente, il peso $\mathcal{Y}$ di un esemplare della specie B segue una distribuzione normale con valore atteso $\mu = 85$ e deviazione standard $\sigma = 15$. Quindi $(\mathcal{Y} - 85)/15$ segue una distribuzione normale standard, e

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}|\overline{E}) = P(\mathcal{Y} > 100) = 1 - P(\mathcal{Y} \leq 100) = 1 - P((\mathcal{Y} - 85)/15 \leq (100 - 85)/15) = \\ = 1 - P((\mathcal{Y} - 85)/15 \leq 1) = 1 - \mathbf{\Phi}(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

un esemplare della specie B ha circa il 15.87% di probabilità di pesare più di 100 kg.
Ora abbiamo tutto il necessario per calcolare la soluzione:

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} = \frac{0.5 \cdot 1/3}{0.5 \cdot 1/3 + (1 - \mathbf{\Phi}(1)) \cdot 2/3} \approx 0.6117 :$$

c'è all'incirca il 61.17% di probabilità che l'esemplare appartenga alla specie A.