Lezione 20-09-2022

Fenomeni ed esperimenti casuali

I *fenomeni casuali*, chiamati anche *aleatori* o *non deterministici*, sono quei fenomeni caratterizzati da incertezza e che non possono essere descritti con precisione. I fenomeni metereologici, ad esempio, sono fenomeni aleatori; quando si analizzano, infatti, si parla di "previsioni" del tempo e non di anticipazioni "certe".

Al contrario, i *fenomeni deterministici* posso essere descritti con precisione prima che si verifichino. Ad esempio, se lasciamo cadere una pallina, siamo sicuri, grazie alle leggi della fisica, che la pallina cadrà verso il basso, seguendo una traiettoria retta e addirittura calcolare la sua velocità in ogni punto della traiettoria.

Lo studio della probabilità è associato agli esperimenti casuali.

Un *esperimento casuale* è un esperimento il cui risultato non può essere previsto prima che l'esperimento venga eseguito. Il lancio di un dado è un esempio di esperimento casuale, perchè prima che il dado venga effettivamente lanciato non siamo in grado di prevedere con esattezza il risultato. Altri esempi sono: il lancio di una moneta, l'estrazione di una pallina in un'urna di palline di differenti colori (non posso prevedere il colore della pallina estratta) e l'estrazione di una carta da un mazzo.

Un altro esempio di esperimento casuale è il seguente: Estraggo una pallina da un' urna che contiene 999 pallina rossa e 1 pallino bianca. Prima di estrarre la pallina non posso prevedere con certezza quale sia il colore della pallina estratta. Allo stesso tempo, mi aspetto di estrarre una pallina rossa e considero l'estrazione della pallina bianca come un evento piuttosto inusuale.

La probabilità misura quanto mi aspetto che un evento si verifichi.

Spazio campionario ed eventi

Definizione. *Si chiama **spazio campionario** l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento.*

Lo spazio campionario può essere finito oppure infinito e si indica con Ω.

Esempio. *Lancio di un dado.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Esempio. *Lancio di due monete. Pongo T = testa e C = croce, e indico con una coppia (X, Y) il risultato del lancio dove X è il risultato della prima moneta e Y della seconda.*

$$\Omega = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}.$$

Osservazione: due esperimenti diversi possono avere lo stesso spazio campionario

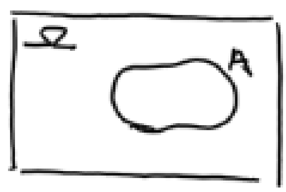
Esempio. *Considero due esperimenti.*

Esperimento 1 *Estraggo una pallina da un'urna con 2 palline bianche e 1 nera.*

Esperimento 2 *Estraggo una pallina da un'urna con 5 palline bianche e 5 palline nere.*

Se B = "pallina bianca" e T = "pallina nera", allora $\Omega_1 = \{B, N\}$ e $\Omega_2 = \{B, N\}$.

Definizione. *Dato uno spazio campionario Ω, si chiama **evento** ogni sottoinsieme di Ω. Uno spazio campionario Ω e un evento A si possono dunque rappresentare utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn:*



Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. Lo spazio campionario è $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esempi di eventi sono*

- $A = \{1\}$, A : *"esce 1";*
- $B = \{1, 3, 5\}$, B : *"esce un numero dispari".*

Esempio. *Esperimento: Lancio di due monete. Lo spazio campionario è*

$$\Omega = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}.$$

Esempi di eventi:

- $A:$ *"i risultati delle due monete sono uguali"*, $A = \{(T,T),(C,C)\}$;
- $B:$ *"esce almeno una testa"*, $B = \{(T,T),(T,C),(C,T)\}$.

Definizione. *L'insieme di tutti gli eventi di Ω si chiama* ***spazio degli eventi*** *e si indica $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Esempio. *Esperimento: Lancio di una moneta. Lo spazio campionario è $\Omega = \{T, C\}$. Lo spazio degli eventi è $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{T\},\{C\},\Omega,\emptyset\}$.*

Osserviamo che $P(\Omega)$ contiene sempre due insiemi speciali: $\emptyset$ e Ω.

Definizione. *Sia Ω uno spazio campionario e sia $A \subseteq \Omega$. Sia x il risultato dell'esperimento. Diciamo che* ***l'evento*** *A* ***si verifica*** *se e solo se $x \in A$.*

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. Consideriamo l'evento $A = \{1,3,5\}$. Se $x = 1$ allora A si verifica. Se $x = 2$ allora A non si verifica.*

Definizione. *Un evento A si dice* ***elementare*** *se e solo se $\#A = 1$ (la sua cardinalità è uguale a 1).*

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. L'evento $A = \{4\}$ è elementare, mentre l'evento $B = \{2,4,6\}$ non è elementare.*

Definizione. *Un evento è* ***impossibile*** *quando non può verificarsi.*

Un evento impossibile è rappresentato dall'insieme vuoto.

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. L'evento $A:$ "esce un numero maggiore di 7" è impossibile.*

Definizione. *Un evento è* ***certo*** *quando si verifica sempre.*

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. L'evento $A:$ "esce un numero minore di 7" è certo. L'evento $B:$ "esce un numero dispari" non è certo.*

Un evento certo si rappresenta con Ω.

Operazioni tra eventi

Definizione. *Siano $A, B \subseteq \Omega$. L'**evento unione** di A e B, e si indica con $A \cup B$, è l'evento che si verifica se e solo se si verifica A oppure si varifica B (o entrambi).*

Esempio. *Esperimento: Lancio del dado.*

Consideriamo gli eventi

- $A = \{1\}$, $A:$ "esce 1";
- $B = \{2\}$, $B =$ "esce 2",

L'unione di A e B è $A \cup B = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$.

Definizione. *Siano $A, B \subseteq \Omega$. L'**evento intersezione** di A e B, e si indica con $A \cap B$, è l'evento che si verifica se e solo se sia A che B si verificano.*

Esempio. *Esperimento: Lancio del dado. Consideriamo gli eventi A : "esce un numero pari", B : "esce un numero minore di 5". L'intesezione di A e B è $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$.*

Definizione. *Sia $A \subseteq \Omega$, l'**evento contrario** (o complementare di A), e si indica con $\bar{A}$ (o A^C), è l'evento che si varifica se e solo se A non si verifica.*

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. Consideriamo l'evento B : "esce un numero minore di 4", cioè $B = \{1, 2, 3\}$, allora il suo evento contrario è $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$.*

Osservazione: Ogni evento è l'unione di eventi elementari.

Esempio. *Se $A = \{2, 4, 6\}$ allora $A = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.*

Eventi compatibili e incompatibili

Due eventi si dicono incompatibili se e solo se non possono verificarsi insieme. La definizione matematica di eventi incompatibili è la seguente:

Definizione. *Siano $A, B \subseteq \Omega$. Gli eventi A e B sono **incompatibili** se e solo se $A \cap B = \emptyset$.*

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. Consideriamo gli eventi*

- *A : "esce un numero pari", $A = \{2, 4, 6\}$;*
- *B : "esce un numero dispari", $B = \{1, 3, 5\}$.*

Dato che $A \cap B = \emptyset$, gli eventi A e B sono incompatibili.

Anche gli eventi

- *E: "esce un numero minore di 5"*
- *D: "esce un numero maggiore di 5"*

sono incompatibili, infatti $E \cap D = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{6\} = \emptyset$.

Due eventi si dicono compatibili se e solo se possono verificarsi contemporaneamente. La definizione matematica di eventi compatibili è la seguente:

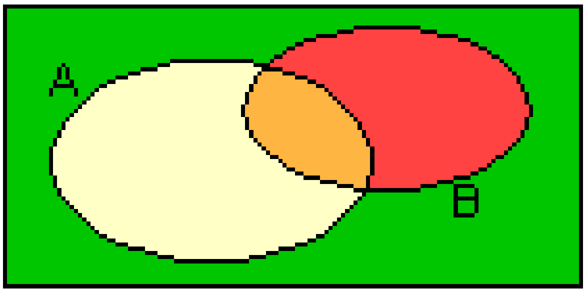
Definizione. *Siano* $A, B \subseteq \Omega$. *Gli eventi* A *e* B *sono* ***compatibili*** *se e solo se* $A \cap B \neq \emptyset$.

Esempio. *Esperimento: Lancio di un dado. Consideriamo gli eventi*

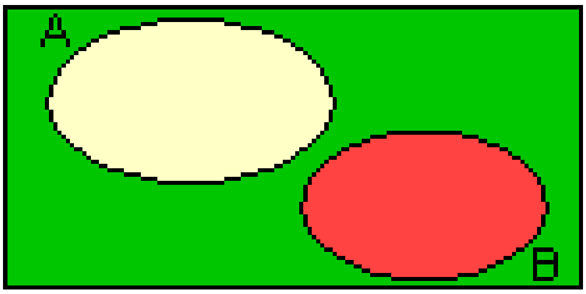
- A : *esce un numero pari,* $A = \{2, 4, 6\}$;
- E : *esce un numero maggiore di due,* $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

A *ed* E *sono compatibili.*

Rappresentazione degli eventi compatibili e incompatibili con i diagrammi di Eulero-Venn



Eventi compatibili



Eventi incompatibili

Definizione classica di probabilità

Definizione. *Consideriamo uno spazio campionario finito Ω e supponiamo che gli eventi elementari siano equiprobabili (hanno la setessa probabilità di verificarsi). La probabilità dell'evento A relativo a Ω è*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Esercizio. *Calcola la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari.*

Svolgimento. *Spazio campionario:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*;*
Evento: $A =$ *esce un numero pari.*
In forma matematica, $A = \{2, 4, 6\}$*, dunque*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

Esercizio. *Qual è la probabilità di estrarre a caso un numero naturale di due cifre e avere un quadrato perfetto?*

Svolgimento. *Spazio campionario:* $\Omega = \{10, \dots, 99\}$ *(tutti i numeri naturali di due cifre);*
Evento: $A =$ *esce un numero che è un quadrato perfetto.*
In forma matematica, $A = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$*, dunque*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$