Lab 3

3.1 Un gioco d'azzardo

Considerate il seguente gioco d'azzardo: un dado a 20 facce non truccato viene tirato finchè non viene un 20. Ogni volta che viene un numero diverso da 20, il giocatore perde 1 euro; ma quando viene 20, il giocatore vince una certa somma di S euro.

1. Qual è la probabilità che il gioco termini entro tre lanci al massimo (basta scrivere l'espressione da calcolare, non è necessario calcolare il numero esatto)?
2. Qual è il valore atteso del numero di lanci di dado in una partita?
3. Cosa deve essere (almeno) S perchè il valore atteso del guadagno del giocatore non sia negativo?

3.1 Soluzione

1. Il numero di lanci $\mathcal{X}$ è una variabile che segue una distribuzione geometrica con probabilità di successo $p = 1/20$. Quindi,
   $$P(\mathcal{X} = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = (0.95)^{k-1} \cdot (0.05)$$
   per tutti i $k = 1, 2, 3, \ldots$, e
   $$P(\mathcal{X} \leq 3) = P(\mathcal{X} = 1) + P(\mathcal{X} = 2) + P(\mathcal{X} = 3) =$$
   $$= 0.05 + 0.95 \cdot 0.05 + 0.95^2 \cdot 0.05 = 0.143 :$$
   Il gioco ha approssimativamente una probabilità del 14% di terminare entro tre lanci.
2. Se $\mathcal{X}$ segue una distribuzione geometrica con probabilità di successo $p = 1/20$, il suo valore atteso è $E(X) = 1/p = 20$.
3. Se $\mathcal{X}$ è il numero di lanci in una partita, a ogni lancio tranne l'ultimo il giocatore perde 1 euro, e all'ultimo lancio il giocatore vince S euro, il guadagno $\mathcal{Y}$ del giocatore è dato da
   $$\mathcal{Y} = -(\mathcal{X} - 1) + S.$$
   quindi, per le proprietà del valore atteso,
   $$E(\mathcal{Y}) = -(E(\mathcal{X}) - 1) + S = -19 + S.$$
   Quindi, perchè il valore atteso del gioco sia non negativo, è necessario che $S \geq 19$.

3.2 Clienti dal Benzinaio

Un benzinaio riceve clienti a una frequenza media di uno ogni 10 minuti.
Suppondendo che gli arrivi dei clienti siano indipendenti, calcolate (basta scrivere l'espressione da calcolare, non è necessario calcolare il numero esatto)

1. La probabilità che arrivino esattamente 5 clienti in un periodo di un'ora;
2. La probabilità che arrivino almeno 2 clienti in un periodo di 16 minuti;
3. Supponendo che siano arrivati 5 clienti in un'ora, la probabilità che sia arrivato un cliente nella prima mezz'ora e gli altri quattro nella seconda mezz'ora.

Suggerimento: Potete rappresentare il numero di clienti che arrivano dal benzinaio in un certo periodo con una variabile X che segue una distribuzione di Poisson. Il parametro λ della distribuzione è il valore atteso del numero di clienti che arrivano in quel periodo: quindi se il periodo è di 10 minuti sappiamo che $\lambda = 1$, se il periodo è di un'ora avremo che $\lambda = 6$ e così via.
Per il punto 2, è utile ricordarsi anche che $0! = 1$.

3.2 Soluzione

1. Se $\mathcal{X}$ è il numero di clienti che arrivano in un'ora, allora $\mathcal{X}$ segue una distribuzione di Poisson con $\lambda = 6$ (sappiamo che in media arriva un cliente ogni 10 minuti, quindi 6 clienti all'ora). Quindi,

$$P(\mathcal{X} = 5) = e^{-6}\frac{6^5}{5!} = 0.161$$

2. Se $\mathcal{Y}$ è il numero di clienti che arrivano in 16 minuti, $\mathcal{Y}$ segue una distribuzione di Poisson con $\lambda = 1.6$ (in media un cliente ogni 10 minuti = in media 1.6 clienti ogni 16 minuti). Ora,

$$P(\mathcal{Y} \geq 2) = 1 - P(\mathcal{Y} = 0) - P(\mathcal{Y} = 1);$$
$$P(Y = 0) = e^{-1.6} \cdot \frac{1.6^0}{0!} = e^{-1.6};$$
$$P(Y = 1) = e^{-1.6} \cdot \frac{1.6^1}{1!} = e^{-1.6} \cdot 1.6$$

e quindi

$$P(\mathcal{Y} \geq 2) = 1 - e^{-1.6}(1 + 1.6) = 0.475.$$

3. Il numero di clienti che arrivano in mezz'ora segue una distribuzione di Poisson con $\lambda = 3$; quindi,

$$P(1 \text{ cliente nella prima mezz'ora}) = e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} = 3e^{-3}$$

e

$$P(\text{4 clienti nella seconda mezz'ora}) = e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!}$$

Similmente, il numero di clienti che arrivano in un'ora segue una distribuzione di Poisson con $\lambda = 6$, quindi

$$P(\text{5 clienti nell'intera ora}) = e^{-6} \cdot \frac{6^5}{5!}.$$

Quindi, applicando la definizione di probabilità condizionata e il fatto che il numero di clienti che arrivano nella prima mezz'ora è indipendente dal numero di clienti che arrivano nella seconda mezz'ora,

$$\begin{aligned}
&P(\text{1 cliente in 30 min, poi 4 clienti in 30 min}|\text{5 clienti in 60 min}) = \\
&= \frac{P(\text{1 cliente in 30 min, poi 4 clienti in 30 min, 5 clienti in tutti i 60 min})}{P(\text{5 clienti in 60 min})} = \\
&= \frac{P(\text{1 cliente in 30 min})P(\text{4 clienti in 30 min})}{P(\text{6 clienti in 60 min})} = \\
&= \frac{3e^{-3} \cdot e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!}}{e^{-6} \cdot \frac{6^5}{5!}} = 0.156
\end{aligned}$$

3.3 Massimo e Minimo di Variabili Casuali Continue Uniformi

Siano $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ variabili casuali continue e a due a due indipendenti aventi la stessa funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $\mathcal{M}_{ax} = \max(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)$.

1. Determinate la probabilità cumulata $F(x) = P(\mathcal{M}_{ax} \leq x)$ di $\mathcal{M}_{ax}$.

   Suggerimento: Il massimo di $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ è $\leq x$ se tutti gli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ sono $\leq x$; e se $\mathcal{X}_i$ ha distribuzione di densità $f(x)$, $P(\mathcal{X}_i \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\, dz$.

2. Qual è la funzione di densità f di $\mathcal{M}_{ax}$?

   Suggerimento: Ricordatevi che, come visto a lezione, la funzione di densità è la derivata della probabilità cumulata...

3. Qual è il valore atteso di $\mathcal{M}_{ax}$, e qual è il limite a cui questo valore atteso tende quando il numero n di variabili casuali continue tende a ∞?

   Suggerimento: Come visto a lezione, se $\mathcal{X}$ è una variabile continua con densità $f(x)$, $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$.

3.3 Soluzione

1. Calcoliamo prima le probabilità cumulate degli $\mathcal{X}_i$ presi individualmente. Per tutti gli i e per tutti gli x tra 0 e 1,

$$P(\mathcal{X}_i \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{0}^{x} 1\,dz = x.$$

Se invece $x \leq 0$,

$$P(\mathcal{X}_i \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{x} 0\,dz = 0;$$

e se $x \geq 1$,

$$P(\mathcal{X}_i \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{0}^{1} 1\,dz = 1.$$

Ora, se $F(x) = P(\mathcal{M}_{ax} \leq x)$, chiaramente $F(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $F(x) = 1$ per $x \geq 1$. Per $0 < x < 1$, applichiamo la definizione di F:

$$\begin{aligned} F(x) = P[\mathcal{M}_{ax} \leq x] &= P[\mathcal{X}_1 \leq x, \ldots, \mathcal{X}_n \leq x] \\ &= P[\mathcal{X}_1 \leq x] \cdots P[\mathcal{X}_n \leq x] = x^n \end{aligned}$$

dove abbiamo potuto moltiplicare le probabilità perchè, per ipotesi, gli $\mathcal{X}_i$ sono indipendenti.

2. La densità f è la derivata di F; quindi

$$f(x) = n\,x^{n-1}$$

per $0 < x < 1$, e $f(x) = 0$ altrove.

3. Applichiamo la definizione del valore atteso di una variabile continua:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{M}_{ax}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,n\,x^{n-1}\,dx \\ &= n \int_{0}^{1} x^n\,dx = n\,\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Infine,

$$\lim_{n\to\infty} E(\mathcal{M}_{ax}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 :$$

se il numero di variabili casuali $\mathcal{X}_i$ (ognuna delle quali è indipendente dalle altre e prende valori uniformemente tra 0 e 1) tende a infinito, il valore atteso del massimo tra i loro valori tende a 1.