

Nome Cognome..... Matricola..... **D**

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../4] 1. Siano $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) **Quante funzioni iniettive ci sono tra X e Y ? $Y!/1!$**

(b) **Quanti sottoinsiemi di 3 elementi ha l'insieme $X \times Y$?**

[.../3] 2. **Si scriva la definizione di relazione d'equivalenza, di classe d'equivalenza e di insieme quoziente.**

[.../4] 3. **Provare per induzione che, per $n \geq 1$:**

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

[.../4] 4. **Sull'insieme $X = \{a, b, c\}$ si consideri l'operazione $*$ determinata dalla seguente tabella:**

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Dire se esiste un elemento neutro e quali elementi sono invertibili.

Si consideri la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_3$ tale che $f(a) = [0]_3$, $f(b) = [1]_3$ e $f(c) = [2]_3$. Si dica se f è un omomorfismo tra $(X, *)$ e (\mathbb{Z}_3, \cdot) .

[.../4] 5. **Si calcoli l'inversa della matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si calcoli il prodotto righe per colonne $A^{-1} \cdot A^T$ (con A^{-1} si indica l'inversa di A e con A^T si indica la trasposta di A).

[.../4] 6. **Si consideri l'insieme $V = \{(3x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Si dimostri che V è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 , si trovi una sua base e si dia una rappresentazione nel piano cartesiano di V . Si consideri la funzione $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (2x, x+y) \in \mathbb{R}^2$, si dimostri che è un'applicazione lineare e si rappresenti graficamente $f(V)$ (cioè l'immagine di V tramite f).**

[.../5] 7. **Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da**

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y + z, 3z).$$

Trovare la dimensione di $Im f$ e $Ker f$. Trovare inoltre gli autovalori di f , la loro molteplicità algebrica e geometrica e gli autospazi relativi agli autovalori. Dire se esiste una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f .