Questo esame è a libro aperto: siete completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non potete però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di voi o con altri, o passare materiale tra di voi.

I tre esercizi hanno un peso complessivo di 10 punti l'uno, per un totale di 30 punti.

Non ha importanza che calcoliate il valore numerico preciso delle soluzioni; è invece importante mostrare il vostro ragionamento e le formule usate, arrivando a una risposta che *potrebbe* essere calcolata meccanicamente utilizzando una normale calcolatrice. Per esempio, se arrivate a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, potete fermarvi lì oppure potete continuare fino a arrivare al numero 252 (questo non sarà considerato un errore, ma non darà punti aggiuntivi). Ma se invece scrivete solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, la risposta non sarà considerata valida.

1 Biglie

Un'urna contiene nove biglie numerate da 1 a 9.

1. Se estraiamo (senza reinserirle) tre biglie dall'urna, qual è la probabilità che la loro somma sarà 6?

2. Una persona ha estratto (senza reinserimento) una, due, oppure tre biglie dall'urna, con uguale probabilità (cioè, ha estratto una sola biglia con probabilità 1/3, ha estratto due biglie con probabilità 1/3, e ha estratto tre biglie con probabilità 1/3), e poi ci ha detto che la somma di tutte le biglie che ha estratto (o il valore dell'unica biglia, se ne ha estratta solo una) è 6. Usando quest'informazione, qual è la probabilità che abbia effettivamente estratto una biglia? Qual è la probabilità che abbia estratto due biglie? Qual è la probabilità che abbia estratto tre biglie?

3. Se estraiamo tre biglie dall'urna, *reinserendo la biglia estratta dopo ogni estrazione*, qual è la probabilità che la loro somma sarà 6?

4. Una persona ha nuovamente estratto (stavolta con reinserimento) una, due, oppure tre biglie dall'urna, con uguale probabilità (cioè, ha estratto una sola biglia con probabilità 1/3, ha estratto due biglie con probabilità 1/3, e ha estratto tre biglie con probabilità 1/3), e poi ci ha detto che la somma di tutte le biglie che ha estratto (o il valore dell'unica biglia, se ne ha estratta solo una) è 6. Usando quest'informazione, qual è la probabilità che abbia effettivamente estratto una biglia? Qual è la probabilità che abbia estratto due biglie? Qual è la probabilità che abbia estratto tre biglie?

1 Soluzione

1. Ci sono $\binom{9}{3} = 84$ modi di estrarre senza reinserimento tre biglie da un'urna di 9 biglie, senza tenere conto dell'ordine.

   L'unica estrazione possibile la cui somma è 6 (senza tenere conto dell'ordine) è $1, 2, 3$: se una delle biglie è 1, la somma delle altre due biglie deve essere 5, e l'unica possibilità è che una sia 2 e l'altra sia 3, e se la biglia più piccola estratta è più grande di 1 allora la somma delle due altre biglie deve essere minore di 4 (il che non è possibile se la biglia 1 non è estratta).

   Quindi, la probabilità che la somma delle tre biglie estratte sia 6 è $\frac{1}{\binom{9}{3}} = 1/84$.

2. Siano $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ gli eventi "è stata estratta una biglia", "sono state estratte due biglie" e "sono state estratte tre biglie". Per ipotesi, $P(\mathcal{E}_1) = P(\mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_3) = 1/3$.

   Ora, sia $\mathcal{F}$ l'evento "la somma delle biglie estratte è 6". Nel punto precedente abbiamo già visto che $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3) = 1/84$.

   Per calcolare $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)$, procediamo in maniera analoga: ci sono $\binom{9}{2} = 36$ modi di estrarre due biglie da un'urna di nove, senza ripetizione e senza tenere conto dell'ordine, e le possibili estrazioni la cui somma è 6 sono $\{1, 5\}$ e $\{2, 4\}$. Quindi, $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2) = 2/36 = 1/18$.

   Infine, chiaramente ci sono 9 modi di estrarre una sola biglia da un'urna di 9 biglie, e l'unico di questi modi in cui la somma delle biglie estratte è 6 è quello in cui l'unica biglia estratta è la numero 6. Quindi, $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1) = 1/9$.

   Quindi, applicando il Teorema di Bayes,

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_1|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1)}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} = \\ &= \frac{1/9 \cdot 1/3}{1/9 \cdot 1/3 + 1/18 \cdot 1/3 + 1/84 \cdot 1/3} \approx 0.62, \end{aligned}$$

   cioè c'è una probabilità del 62% che solo una biglia sia stata estratta;

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_2|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2)}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} = \\ &= \frac{1/18 \cdot 1/3}{1/9 \cdot 1/3 + 1/18 \cdot 1/3 + 1/84 \cdot 1/3} \approx 0.31, \end{aligned}$$

   cioè c'è una probabilità del 31% che due biglie siano state estratte; e

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_3|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} = \\ &= \frac{1/84 \cdot 1/3}{1/9 \cdot 1/3 + 1/18 \cdot 1/3 + 1/84 \cdot 1/3} \approx 0.07, \end{aligned}$$

   cioè c'è una probabilità del 7% che tre biglie siano state estratte.

3. Tenendo conto dell'ordine, ci sono $9^3 = 729$ modi di estrarre tre biglie (con reinserimento).

   Di questi, quelli la cui somma è 6 sono $(1,1,4)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(1,4,1)$, $(2,1,3)$, $(2,2,2)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, e $(4,1,1)$, per un totale di 10 possibilità.

   Quindi, la probabilità che tre biglie estratte con reinserimento abbiano somma 6 è $10/729$,

4. Procedendo come nel caso 2, abbiamo già visto che $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3) = 10/729$.

   Inoltre, ci sono $9^2 = 81$ modi di estrarre due biglie con reinserimento e tenendo conto dell'ordine; e di questi, quelli la cui somma è 6 sono $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ e $(5,1)$, per un totale di 5 possibilità, quindi $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2) = 5/81$.

   Infine, dei 9 modi di estrarre una sola biglia (ovviamente in questo caso non fa differenza se con reinserimento o no), l'unico per cui la somma è 6 è quello in cui la biglia estratta è la 6. Quindi, $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1) = 1/9$.

   Quindi, applicando il Teorema di Bayes,

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_1|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1)}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} = \\ &= \frac{1/9 \cdot 1/3}{1/9 \cdot 1/3 + 5/81 \cdot 1/3 + 10/729 \cdot 1/3} \approx 0.60, \end{aligned}$$

   cioè c'è una probabilità del 60% che solo una biglia sia stata estratta;

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_2|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2)}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} = \\ &= \frac{5/81 \cdot 1/3}{1/9 \cdot 1/3 + 5/81 \cdot 1/3 + 10/729 \cdot 1/3} \approx 0.33, \end{aligned}$$

   cioè c'è una probabilità del 33% che due biglia siano state estratte; e

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_3|\mathcal{F}) &= \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2) + P(\mathcal{F}|\mathcal{E}_3)P(\mathcal{E}_3)} = \\ &= \frac{10/729 \cdot 1/3}{1/9 \cdot 1/3 + 5/81 \cdot 1/3 + 10/729 \cdot 1/3} \approx 0.07, \end{aligned}$$

   cioè c'è una probabilità del 7% che tre biglie siano estratte.

2 Lampadine

Ci sono due tipi di lampadine (chiamiamole lampadine A e lampadine B), che hanno una durata di vita media di 12 mesi e di 18 mesi rispettivamente.
In un magazzino vengono installate tre lampadine, ognuna delle quali ha uguali e indipendenti probabilità di essere del tipo A o del tipo B. Dopo due anni (24 mesi), si osserva che tutte e tre le lampadine sono ancora funzionanti.
Supponendo che la durata della vita di una lampadina di tipo A o di tipo B possa essere modellata usando una distribuzione esponenziale (con l'appropriato valore del parametro λ), calcolare la probabilità che

1. Tutte e tre le lampadine siano del tipo A;
2. Due delle lampadine siano del tipo A, ma una sia del tipo B;
3. Una delle lampadine sia del tipo A e due siano del tipo B;
4. Tutte e tre le lampadine siano del tipo B.

SUGGERIMENTO: Sia $\mathcal{X}$ il numero di lampadine di tipo A installate nel magazzino. Iniziate calcolando la probabilità che $\mathcal{X}$ sia 0, 1, 2 o 3, usando solo il fatto che ogni lampadina ha uguali probabilità di essere di tipo A o di tipo B.
Poi utilizzate le proprietà della distribuzione esponenziale per calcolare la probabilità che un lampadina di tipo A duri almeno due anni e la probabilità che una lampadina di tipo B duri almeno due anni. O considerate l'evento $\mathcal{E}$ = "dopo 24 mesi tutte e tre le lampadine sono ancora funzionanti" e calcolate $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=0)$, $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=1)$, $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=2)$ e $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=3)$.
Infine, applicate il Teorema di Bayes per trovare $P(\mathcal{X}=3|\mathcal{E})\dots P(\mathcal{X}=0|\mathcal{E})$.

2 Soluzione

Sia $\mathcal{X}$ il numero di lampadine di tipo A nel magazzino. Allora $\mathcal{X}$ segue una distribuzione binomiale con $n=3$ e $p=0.5$, cioè

- $P(\mathcal{X}=0)=\binom{3}{0}(1/2)^0(1/2)^3=1/8$;
- $P(\mathcal{X}=1)=\binom{3}{1}(1/2)^1(1/2)^2=3/8$;
- $P(\mathcal{X}=2)=\binom{3}{2}(1/2)^1(1/2)^2=3/8$;
- $P(\mathcal{X}=3)=\binom{3}{3}(1/2)^0(1/2)^3=1/8$.

Ora, la durata di vita $\mathcal{Y}$ (in mesi) di una lampadina di tipo A segue una distribuzione esponenziale con $\lambda=1/12$, cioè $P(\mathcal{Y}<24)=1-e^{-24/12}=1-e^{-2}$ e quindi $P(\mathcal{Y}\geq 24)=e^{-2}$; e similmente, la durata di vita $\mathcal{Z}$ (in mesi) di una lampadina di tipo B segue una distribuzione esponenziale con $\lambda=1/18$, cioè $P(\mathcal{Y}<24)=1-e^{-24/18}=1-e^{-4/3}$ e quindi $P(\mathcal{Y}\geq 24)=e^{-4/3}$.
Quindi, se $\mathcal{E}$ è l'evento "dopo 24 mesi tutte e tre le lampadine sono ancora funzionanti", abbiamo che

- $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=0)=e^{-4/3}\cdot e^{-4/3}\cdot e^{-4/3}=e^{-4}$;
- $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=1)=e^{-4/3}\cdot e^{-4/3}\cdot e^{-2}=e^{-14/3}$;
- $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=2)=e^{-4/3}\cdot e^{-2}\cdot e^{-2}=e^{-16/3}$;
- $P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=3)=e^{-2}\cdot e^{-2}\cdot e^{-2}=e^{-6}$.

Quindi, applicando il Teorema di Bayes,

$$\begin{aligned}P(\mathcal{X}=0|\mathcal{E}) &= \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=0)P(\mathcal{X}_0)}{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=0)P(\mathcal{X}_0)+\ldots+P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=3)P(\mathcal{X}_3)} = \\ &= \frac{e^{-4}\cdot 1/8}{e^{-4}\cdot 1/8+e^{-14/3}\cdot 3/8+e^{-16/3}\cdot 3/8+e^{-6}\cdot 1/8}\approx 0.29\end{aligned}$$

e, similmente,

$$P(\mathcal{X}=1|\mathcal{E}) = \frac{e^{-14/3}\cdot 3/8}{e^{-4}\cdot 1/8 + e^{-14/3}\cdot 3/8 + e^{-16/3}\cdot 3/8 + e^{-6}\cdot 1/8} \approx 0.44;$$
$$P(\mathcal{X}=2|\mathcal{E}) = \frac{e^{-16/3}\cdot 3/8}{e^{-4}\cdot 1/8 + e^{-14/3}\cdot 3/8 + e^{-16/3}\cdot 3/8 + e^{-6}\cdot 1/8} \approx 0.23;$$
$$P(\mathcal{X}=3|\mathcal{E}) = \frac{e^{-6}\cdot 1/8}{e^{-4}\cdot 1/8 + e^{-14/3}\cdot 3/8 + e^{-16/3}\cdot 3/8 + e^{-6}\cdot 1/8} \approx 0.04.$$

Quindi c'è una probabilità approssimativamente del 4% che tutte e tre le lampadine siano del tipo A (e nessuna del tipo B); c'è una probabilità approssimativamente del 23% che due lampadine siano del tipo A e la restante del tipo B; c'è una probabilità approssimativamente del 44% che una lampadina sia del tipo A e le restanti due siano del tipo B; e c'è una probabilità approssimativamente del 29% che nessuna lampadina sia del tipo A, ma siano tutte e tre del tipo B.

3 Sacchi di caffè

Un'azienda produce sacchi di caffè il cui peso ha un valore atteso di 10 kg.

1. Senza ipotizzare niente altro riguardo alla distribuzione di probabilità del peso dei sacchi di caffè, stimate il valore massimo della probabilità che un sacco di caffè estratto a caso tra quelli prodotti abbia un peso di almeno 10.2 kg.

2. Supponiamo di sapere anche che la deviazione standard del peso dei sacchi prodotti è di 100 g. Utilizzando questa informazione, trovate una stima più accurata della probabilità massima che un sacco di caffè estratto a caso tra quelli prodotti abbia un peso di almeno 10.2 kg.

3. Supponiamo che il peso dei sacchi di caffè possa essere approssimato con una distribuzione normale (con valore atteso 10 kg e deviazione standard 100g = 0.1 kg). Utilizzando questa ipotesi, calcolare la probabilità che un sacco di caffè estratto a caso tra quelli prodotti abbia un peso di almeno 10.2 kg. Scrivete questa risposta in termini della funzione $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile che segue una distribuzione normale standard (cioè con valore atteso 0 e deviazione standard 1): non è necessario trovare il valore numerico esatto usando una tavola o una calcolatrice, basta che arriviate a un'espressione da cui potreste calcolarlo se le aveste.

3 Soluzione

1. Applichiamo la diseguaglianza di Markov (possiamo farlo perchè il peso di un sacco di caffè avrà sicuramente un valore non negativo e sappiamo il valore atteso): se $\mathcal{X}$ è il peso (in kg) di un sacco estratto a caso, $E[\mathcal{X}] = 10$ e quindi

   $$P(\mathcal{X} \geq 10.5) \leq \frac{E[\mathcal{X}]}{10.5} = \frac{10}{10.2} \approx 0.98$$

   cioè c'è al massimo una probabilità del 98% che questo sacco pesi almeno 10.5 kg.

2. Sapendo anche la deviazione standard $\sigma = 100g = 0.1kg$ possiamo applicare la diseguaglianza di Chebyshev:

$$P(\mathcal{X} \geq 10.5) \leq P(|\mathcal{X} - \mathcal{E}(\mathcal{X})| \geq 0.2) = P(|\mathcal{X} - \mathcal{E}(\mathcal{X})| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{5^2} = \frac{1}{4} \approx 0.25$$

   cioè c'è al massimo una probabilità del 25% che un sacco estratto casualmente tra quelli prodotti pesi almeno 10.2 kg.

3. Se $\mathcal{X}$ (il peso in kg di un sacco estratto a caso) segue una distribuzione normale con valore atteso 10 e deviazione standard 0.1, allora $\mathcal{Z} = (\mathcal{X} - 10)/0.1$ segue una distribuzione normale standard. Quindi

$$P(\mathcal{X} \geq 10.2) = P(\mathcal{Z} \geq (10.2 - 10)/0.1) = P(\mathcal{Z} \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) \approx 0.023$$

   cioè, c'è solo il 2.3% di probabilità che un sacco pesi almeno 10.2 kg.