Lab 8

In tutti gli esercizi che seguono, non è essenziale calcolare il valore numerico preciso della risposta. Invece, è necessario mostrare il ragionamento e le formule usate.

8.1 Antenne

Ogni anno, un'antenna ha una probabilità fissa del 5% di guastarsi. Sia $\mathcal{X}$ il numero di anni di funzionamento dell'antenna (compreso l'anno in cui si guasterà).

1. Che tipo di distribuzione segue la variabile casuale $\mathcal{X}$? Scrivete un'espressione generale per $P(\mathcal{X} = k), \ \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Calcolate il valore atteso e la varianza per $\mathcal{X}$.
3. Per ogni anno di funzionamento (non contando l'anno in cui si guasterà), si stima che l'antenna porterà a un ricavato di a euro; e nel momento in cui si guasterà, i costi di riparazione ammonteranno a centomila euro. Quanto dev' essere il minimo valore di a affinché il profitto atteso dall'antenna sia non negativo?

8.1 Soluzione

1. $\mathcal{X}$ è un tipico esempio di variabile che segue una distribuzione geometrica, con $p = 0.05$; quindi:

   $$P(\mathcal{X} = k) = (0.95)^{k-1} \cdot 0.05$$

2. Una variabile che segue una distribuzione geometrica con parametro p ha valore atteso $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = 1/p$ e varianza *Var*$(\mathcal{X}) = (1-p)/p^2$. Quindi:

   $$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \frac{1}{0.05} = 20$$

   e

   $$Var(\mathcal{X}) = \frac{1-0.05}{0.05^2} = 380.$$

3. Dato che c'è della stocasticità in $\mathcal{X}$, allora il profitto ricavato dall'antenna si può modellare con un altra v.a., $\mathcal{Y}$. Se per ogni anno di funzionamento si ottiene un profitto di a, e, nell'anno in cui si guasta l'antenna, si perdono centomila euro, avremo che:

   $$\mathcal{Y} = a(\mathcal{X} - 1) - 100000$$

   e quindi, per le **proprietà del valore atteso**, abbiamo:

   $$\mathbb{E}(\mathcal{Y}) = a(\mathbb{E}(X) - 1) - 100000 = 19a - 100000.$$

   Quindi, affiché $\mathbb{E}(\mathcal{Y})$ sia ≥ 0, dovrà verificardi:

   $$a \geq \frac{100000}{19} \approx 5263.16$$

   Quindi, l'antenna avrà un profitto atteso solo se il ricavato per ogni anno di funzionamento sarà di almeno € 5263.16.

8.2 Urne

Un'urna (detta urna **A**) contiene quattro biglie rosse e quattro biglie bianche, mentre una seconda urna (detta urna **B**) contiene due biglie rosse e otto biglie bianche.
Si sceglie un'urna a caso, con uguale probabilità, e da essa si estraggono due biglie (senza reinserimento).
Calcolare la probabilità che l'urna scelta sia l'urna **A** se le due biglie sono:

1. Entrambe rosse;
2. Entrambe bianche;
3. Una rossa e una bianca (non necessariamente in quest'ordine).

8.2 Soluzione

1. Sia $\mathcal{E}_A$ l'evento "L'urna scelta è la A", sia $\mathcal{E}_B$ l'evento "L'urna scelta è la B", e sia $\mathcal{F}_{RR}$ l'evento "entrambe le biglie estratte sono rosse".

   Dobbiamo calcolare $P(\mathcal{E}_A|\mathcal{F}_{RR})$; e sappiamo che $P(\mathcal{E}_A) = P(\mathcal{E}_B) = 0.5$, visto che le urne sono scelte con uguale probabilità.

   Inoltre, possiamo calcolare $P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_A)$ e $P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_B)$.

   Infatti, se l'urna estratta è la A, abbiamo $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ modi di estrarre due biglie, se non teniamo conto dell'ordine; e di questi, $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ contengono solo biglie rosse, e quindi

   $$P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_A) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}.$$

Potremmo arrivare a questo risultato anche in modo più semplice: Dato che l'estrazione è senza reinserimento, la probabilità della prima biglia rossa è $\frac{4}{8}$ e la probabilità della seconda è $\frac{3}{7}$ (dato che la prima biglia è stata estratta), quindi avremmo:

$$P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_A) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}.$$

Ragionando in maniera simile, se l'urna estratta è la B abbiamo $\binom{10}{2} = 45$ modi di estrarre due biglie, e di questi solo $\binom{2}{2} = 1$ contiene due biglie rosse (infatti, l'urna contiene solo due biglie rosse). Quindi

$$P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_B) = \frac{1}{45}.$$

Ora abbiamo tutto quello che ci serve per usare il Teorema di Bayes per calcolare $P(\mathcal{E}_A|\mathcal{F}_{RR})$:

$$P(\mathcal{E}_A|\mathcal{F}_{RR}) = \frac{P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A)}{P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A) + P(\mathcal{F}_{RR}|\mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_B)} = \frac{3/14 \cdot 1/2}{3/14 \cdot 1/2 + 1/45 \cdot 1/2} \approx 0.91$$

Ovvero, se estraiamo due biglie rosse c'è circa il 91% di possibilità che l'urna scelta sia la A.

2. Ragioniamo come nel punto precedente, usando $\mathcal{F}_{BB}$ per l'evento "Entrambe le biglie estratte sono bianche".

   Abbiamo che

$$P(\mathcal{F}_{BB}|\mathcal{E}_A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

   e che

$$P(\mathcal{F}_{BB}|\mathcal{E}_B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45},$$

   e quindi

$$P(\mathcal{E}_A|\mathcal{F}_{BB}) = \frac{P(\mathcal{F}_{BB}|\mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A)}{P(\mathcal{F}_{BB}|\mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A) + P(\mathcal{F}_{BB}|\mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_B)} = \frac{3/14 \cdot 0.5}{3/14 \cdot 0.5 + 28/45 \cdot 0.5} \approx 0.26 :$$

   se estraiamo due biglie bianche c'è il 26% di probabilità di avere scelto l'urna A.

3. Applichiamo ancora una volta il teorema di Bayes. Sia $\mathcal{F}_{RB}$ l'evento "Estraiamo una pallina rossa e una bianca (non necessariamente in quest'ordine)".

   Se abbiamo scelto l'urna A, il numero di modi in cui possiamo estrarre una biglia rossa e una bianca (senza tenere conto dell'ordine) è dato da $4 \cdot 4 = 16$ (scegliamo una biglia rossa tra le quattro disponibili e una biglia bianca tra le quattro disponibili). Come nei casi precedenti, ci sono $\binom{8}{2} = 28$ modi di estrarre due biglie dall'urna A, se non teniamo conto dell'ordine; quindi,

$$P(\mathcal{F}_{RB}|\mathcal{E}_A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

Se invece abbiamo scelto l'urna B, il numero di modi in cui possiamo estrarre una biglia rossa e una bianca è sempre $2 \cdot 8 = 16$ (estraiamo una biglia rossa tra le due disponibili, e una bianca tra le otto disponibili), ma il numero di modi di estrarre due biglie dall'urna B è $\binom{10}{2} = 45$. Quindi,

$$P(\mathcal{F}_{RB}|\mathcal{E}_B) = \frac{16}{45}.$$

Infine, di nuovo per il Teorema di Bayes,

$$P(\mathcal{E}_A|\mathcal{F}_{RB}) = \frac{P(\mathcal{F}_{RB}|\mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A)}{P(\mathcal{F}_{RB}|\mathcal{E}_A)P(\mathcal{E}_A) + P(\mathcal{F}_{RB}|\mathcal{E}_B)P(\mathcal{E}_B)} = \frac{4/7 \cdot 0.5}{4/7 \cdot 0.5 + 16/45 \cdot 0.5} \approx 0.62 :$$

se estraiamo una biglia rossa e una bianca, c'è il 62% che l'urna scelta sia l'urna A.

8.3 Altezze

L'altezza media degli appartenenti a una popolazione è di 170 cm, e la varianza è di 9 cm^2.
Sia $\mathcal{X}$ l'altezza di una persona estratta da questa popolazione.

1. Stimate la probabilità che $\mathcal{X}$ sia tra 164 cm e 176 cm (non compresi), supponendo di non poter ipotizzare niente altro riguardo alla distribuzione della variabile casuale $\mathcal{X}$;

2. Stimate la stessa probabilità, supponendo che $\mathcal{X}$ possa essere approssimata con una variabile che segue una distribuzione normale (con lo stesso valore atteso e deviazione standard). Esprimete la risposta in termini della funzione $\Phi(z)$

   Hint: $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile normale standard (cioè con valore atteso 0 e deviazione standard 1).

8.3 Soluzione

1. Applichiamo la diseguaglianza di Chebyshev. La variabile $\mathcal{X}$ ha deviazione standard $\sigma = \sqrt{9} = 3$ cm e valore atteso $E(X) = 170$ cm, e quindi

   $$P(164 < \mathcal{X} < 176) = P(|X - 170| < 6) = 1 - P(|X - 170| \geq 6) = \\ = 1 - P(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} :$$

   c'è una probabilità almeno del 75% che un individuo estratto casualmente da questa popolazione abbia un'altezza tra 164cm e 176 cm.

2. Se $\mathcal{X}$ è approssimabile con una distribuzione normale con valore atteso 170 cm e deviazione standard 3 cm, allora la variabile aleatoria:

   $$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{X} - 170}{3}$$

segue una distribuzione normale standard (e cioè, con valore atteso 0 e deviazione standard 1). Quindi:

$$
\begin{aligned}
P(164 < \mathcal{X} < 176) &= P((164-170)/3 < \mathcal{Z} < (176-170)/3) = \\
&= P(-2 \leq \mathcal{Z} \leq 2) = \\
&= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx \\
&\approx 0.97725 - 0.02275 = 0.9545 :
\end{aligned}
$$

con quest'ipotesi aggiuntiva, possiamo dire che c'è una probabilità approssimativamente del 95.45% che un individuo appartenente a questa popolazione abbia un'altezza tra 164 cm e 176 cm.