Questo esame è a libro aperto: siete completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non potete però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di voi o con altri, o passare materiale tra di voi.

I tre esercizi hanno un peso complessivo di 10 punti l'uno, per un totale di 30 punti.

Non ha importanza che calcoliate il valore numerico preciso delle soluzioni; è invece importante mostrare il vostro ragionamento e le formule usate, arrivando a una risposta che *potrebbe* essere calcolata meccanicamente utilizzando una normale calcolatrice. Per esempio, se arrivate a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, potete fermarvi lì oppure potete continuare fino a arrivare al numero 252 (questo non sarà considerato un errore, ma non darà punti aggiuntivi). Ma se invece scrivete solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, la risposta non sarà considerata valida.

1 Cavalli

Ci sono sette cavalli bianchi e quattro cavalli neri. Tra questi, cinque cavalli vengono scelti casualmente e fatti gareggiare lungo un percorso. Possiamo supporre che sia impossibile che due cavalli finiscano a pari merito (quindi un cavallo arriverà per primo, uno per secondo, eccetera, uno per quinto) e che tutti i cavalli che partecipano abbiano uguali probabilità di finire in qualsiasi posizione.

1. Sia $\mathcal{X}$ il numero di cavalli bianchi che partecipano alla gara. Calcolate la probabilità $P(\mathcal{X} = n)$ per tutti i possibili valori di n.

2. Qual è la probabilità che il cavallo che arriva primo nella gara sia bianco?

3. Sia $\mathcal{E}$ l'evento "Il cavallo che arriva primo nella gara è nero, ma il secondo e il terzo cavallo a arrivare sono entrambi bianchi". Come sopra, sia $\mathcal{X}$ il numero di cavalli bianchi che partecipano alla gara. Calcolate $P(\mathcal{X} = n \mid \mathcal{E})$, di nuovo per tutti i valori possibili di n.

1 Soluzione

1. Ci sono $\binom{11}{5}$ modi di scegliere 5 cavalli dagli 11 che abbiamo. Il numero $\mathcal{X}$ di cavalli bianchi nella gara sarà tra 1 e 5: non possiamo avere meno di un cavallo bianco, perchè ci sono al massimo quattro cavalli neri tra quelli scelti, e non possiamo averne più di 5 perchè estraiamo in tutto 5 cavalli. Inoltre, ci sono $\binom{7}{n}$ modi di estrarre n cavalli bianchi tra i 7 che abbiamo e ci sono $\binom{4}{5-n}$ modi di estrarre i rimanenti $5 - n$ cavalli neri.

   Quindi,

   - $P(\mathcal{X} = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{4}{4}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{66} \approx 0.0152.$

- $P(\mathcal{X}=2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{4}{3}}{\binom{11}{5}} = \frac{2}{11} \approx 0.182.$
- $P(\mathcal{X}=3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{5}{11} \approx 0.455.$
- $P(\mathcal{X}=4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{4}{1}}{\binom{11}{5}} = \frac{10}{33} \approx 0.303.$
- $P(\mathcal{X}=5) = \frac{\binom{7}{5}\binom{4}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{22} \approx 0.0455.$

2. Ogni cavallo ha uguali probabilità di partecipare alla gara, e ogni cavallo che partecipa alla gara ha uguali probabilità di arrivare primo. Quindi, ogni cavallo ha uguali probabilità di arrivare primo, e quindi la probabilità che il primo cavallo sia bianco è

$$\frac{\#\text{ Cavalli bianchi}}{\#\text{ Cavalli}} = \frac{7}{11} \approx 0.636$$

3. Per calcolare $P(\mathcal{X}=n \mid \mathcal{E})$ per $n = 1 \dots 5$, sfruttiamo il Teorema di Bayes:

$$P(\mathcal{X}=n \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=n)P(\mathcal{X}=n)}{P(\mathcal{E})} = \frac{P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=n)P(\mathcal{X}=n)}{\sum_{n'=1}^{5} P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=n')P(\mathcal{X}=n')}$$

Come sopra, abbiamo già calcolato le probabilità che $\mathcal{X}$ prenda i valori $1, 2, \dots 5$; l'unica altra cosa di cui abbiamo bisogno sono le probabilità $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=n)$ (sempre per $n = 1 \dots 5$).

Prima di tutto ci sono due casi facili: se $\mathcal{X}=1$, cioè c'è solo un cavallo bianco in gara, è impossibile che il secondo e il terzo cavallo siano entrambi bianchi e quindi $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=1) = 0$. Similmente, se $\mathcal{X}=5$, cioè se tutti i cavalli in gara sono bianchi, è impossibile che il primo cavallo sia nero e quindi $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=5) = 0$.

Per $n = 2 \dots 4$, possiamo calcolare $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=n)$ in questo modo: dati 5 cavalli ci sono $5!$ possibili ordini di arrivo. Di questi, quelli che soddisfano $\mathcal{E}$ sono quelli per cui

- Il primo cavallo è nero, e visto che ci sono $5-n$ cavalli neri ci sono $5-n$ modi di sceglierlo;
- I successivi due cavalli bianchi, e visto che ci sono n cavalli bianchi ci sono $\binom{n}{2}$ modi di sceglierli;
- I restanti due cavalli possono essere indifferentemente bianchi o neri, e ci sono $2! = 2$ modi di sceglierli (l'unica cosa da scegliere è quale di essi è il quarto e quale è il quinto, ma $\mathcal{E}$ è comunque soddisfatto).

Quindi,

- $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=2) = \frac{3\cdot\binom{2}{2}\cdot 2}{5!} = \frac{1}{20} = 0.05;$
- $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=3) = \frac{2\cdot\binom{3}{2}\cdot 2}{5!} = \frac{1}{10} = 0.1;$
- $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X}=4) = \frac{1\cdot\binom{4}{2}\cdot 2}{5!} = \frac{1}{10} = 0.1.$

Quindi,

$$\sum_{n'=1}^{5} P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X} = n')P(\mathcal{X} = n') = 0 \cdot \frac{1}{66} + 0.05 \cdot \frac{2}{11} + 0.1 \cdot \frac{5}{11} + 0.1 \cdot \frac{10}{33} + 0 \cdot \frac{1}{22} \approx 0.0848$$

e quindi

- $P(\mathcal{X} = 1 \mid \mathcal{E}) = 0$;
- $P(\mathcal{X} = 2 \mid \mathcal{E}) = \frac{0.05 \cdot \frac{2}{11}}{0.0848} \approx 0.107$;
- $P(\mathcal{X} = 3 \mid \mathcal{E}) = \frac{0.1 \cdot \frac{5}{11}}{0.0848} \approx 0.536$;
- $P(\mathcal{X} = 4 \mid \mathcal{E}) = \frac{0.1 \cdot \frac{10}{33}}{0.0848} \approx 0.357$;
- $P(\mathcal{X} = 5 \mid \mathcal{E}) = 0$.

2 Materiali Radioattivi

Un kg di un certo materiale radioattivo emette in media 10 raggi ogni ora. Possiamo supporre che le emissioni di raggi siano indipendenti tra di loro, e che in particolare non ci sia un limite massimo al numero di raggi che possono essere emessi in un'ora.

1. Sia $\mathcal{X}$ il numero di raggi che un kg del materiale effettivamente emette in un'ora e sia $\mathcal{Y}$ il tempo, in ore, tra due emissioni successive di raggi da un kg di materiale. Usando le distribuzioni viste a lezione, scrivete una formula per $P(\mathcal{X} = k)$, corretta per tutti i numeri interi non negativi k, e scrivete una formula per $P(a \leq \mathcal{Y} \leq b)$, corretta per tutti i numeri reali non negativi a, b tali che $a \leq b$.

   SUGGERIMENTO: Per la seconda risposta, trovate la funzione cumulativa di $\mathcal{Y}$. Una volta che l'avete fatto, potete scrivere $P(a \leq \mathcal{Y} \leq b)$ come una differenza tra due valori.

2. C'è un kg di sostanza che, si ritiene, ha il 70% di probabilità di essere del materiale radioattivo di cui sopra e il 30% di probabilità di non essere radioattivo per niente (e quindi non emetterà mai raggi).

   Per verificare se è composto del materiale radioattivo oppure no, viene esaminato con un detector di raggi (che è perfettamente affidabile: se il materiale emette un raggio, il detector lo rileverà, e se non lo emette non lo rileverà).

   Qual è la probabilità condizionata che la sostanza sia radioattiva supponendo che, dopo venti minuti, il detector non abbia ancora rilevato nessun raggio?

   SUGGERIMENTO: Sia $\mathcal{E}$ l'evento 'il materiale è radioattivo' e sia $\mathcal{F}$ l'evento 'dopo venti minuti, nessun raggio è stato rilevato'. Dal testo avete già $P(\mathcal{E})$ e $P(\overline{\mathcal{E}})$, e $P(\mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{E}})$ è facile da trovare. Per calcolare $P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})$ potete sfruttare quello che avete trovato riguardo a $\mathcal{Y}$ nel punto precedente, e poi basta applicare il Teorema di Bayes per trovare $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})$.

3. Supponiamo che ora il detector abbia solo il 50% di probabilità di essere affidabile, e che abbia il 50% di probabilità di essere invece difettoso (e se è così, non rileverà mai niente sia che il materiale sia radioattivo sia che non lo sia).

Se, come nel caso precedente, riteniamo inizialmente che il materiale abbia il 70% di probabilità di essere radioattivo, qual è la probabilità condizionata che sia effettivamente radioattivo dato che in venti minuti il rilevatore (che però ora potrebbe essere guasto) non ha rilevato niente?

SUGGERIMENTO: Potete procedere in modo molto simile al punto precedente: l'unica difficoltà aggiuntiva è trovare il modo di calcolare $P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})$ considerando che il detector ha il 50% di probabilità di essere difettoso. Può essere utile considerare l'evento $\mathcal{G}$ = 'il detector è affidabile' e ragionare per casi.

2 Soluzione

1. $\mathcal{X}$ segue una distribuzione di Poisson con valore atteso $\lambda = 10$: quindi,

$$P(\mathcal{X} = k) = \frac{10^k e^{-10}}{k!}$$

$\mathcal{Y}$ invece segue una distribuzione esponenziale, visto che è il tempo che passa tra due eventi dove il numero di eventi in un certo periodo segue una distribuzione di Poisson; e il parametro λ è lo stesso (vedete gli appunti per la ragione). Quindi $P(\mathcal{Y} \leq y) = 1 - e^{-10y}$ e

$$P(a \leq \mathcal{Y} \leq b) = (1 - e^{-10b}) - (1 - e^{-10a}) = e^{-10a} - e^{-10b}.$$

2. Sia $\mathcal{E}$ l'evento 'il materiale è radioattivo' e sia $\mathcal{F}$ l'evento 'dopo venti minuti, ancora nessun raggio radioattivo è stato rilevato'. Usando la stessa variabile casuale $\mathcal{Y}$ del punto precedente, la probabilità che non sia emesso nessun raggio dopo venti minuti (cioè un terzo di ora) è

$$P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E}) = P(\mathcal{Y} \geq 1/3) = 1 - P(\mathcal{Y} \leq 1/3) = 1 - (1 - e^{-10/3}) = e^{-10/3} \approx 0.0357$$

D'altro canto, se il materiale non è radioattivo allora non emetterà mai nessun raggio, quindi $P(\mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{E}}) = 1$; e dal testo abbiamo che $P(\mathcal{E}) = 0.7$ e $P(\overline{\mathcal{E}}) = 0.3$. Quindi, usando il Teorema di Bayes,

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} = \frac{e^{-10/3} \cdot 0.7}{e^{-10/3} \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3} \approx 0.0768$$

Cioè, c'è circa il 7.68% di probabilità che il materiale sia radioattivo.

3. Sia $\mathcal{E}$ l'evento 'il materiale è radioattivo', $\mathcal{F}$ l'evento 'dopo venti minuti, nessun raggio è stato emesso', e $\mathcal{G}$ l'evento 'il detector funziona'. Come prima, sappiamo che $P(\mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{E}}) = 1$, $P(\mathcal{E}) = 0.7$ e $P(\overline{\mathcal{E}}) = 0.3$. Per calcolare $P(\mathcal{F} \mid E)$, questa volta dobbiamo considerare sia lo scenario in cui il detector è guasto sia lo scenario in cui non lo è. Ora,

$$P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E}) = P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{G})P(\mathcal{G}) + P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{G}})P(\overline{\mathcal{G}})$$

Ora, dal testo abbiamo che $P(\mathcal{G}) = P(\overline{\mathcal{G}}) = 0.5$; e inoltre, se il detector funziona abbiamo come nel caso precedente che

$$P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{G}) = P(\mathcal{Y} \geq 1/3) = e^{-10/3}$$

mentre se il detector non funziona allora non rileverà mai niente e quindi

$$P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{G}}) = 1.$$

Pertanto,

$$P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E}) = e^{-10/3} \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = (1 + e^{-10/3})/2 \approx 0.518$$

A questo punto possiamo procedere come nel caso precedente:

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} = \frac{(1 + e^{-10/3})/2 \cdot 0.7}{(1 + e^{-10/3})/2 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3} \approx 0.547.$$

3 Farfalle

Ci sono tre varietà di farfalle, distinguibili solo per la lunghezza dell'apertura alare. La prima varietà (chiamiamola varietà **A**) ha un'apertura alare media di 1.5 cm, con una deviazione standard di 0.1 cm; la seconda varietà (chiamiamola varietà **B**) ha un'apertura alare media di 2 cm, con una deviazione standard di 0.25 cm; e la terza varietà (chiamiamola varietà **C**) ha un'apertura alare media di 2.5 cm, con una deviazione standard di 0.1 cm. Tutte e tre le varietà appaiono e vengono catturate con la stessa frequenza (quindi una farfalla scelta a caso ha uguali probabilità di essere di tipo **A**, di tipo **B** o di tipo **C**).

Una farfalla scelta a caso ha un'apertura alare tra 1.75 cm e 2.25 cm. Data questa osservazione, quali sono le probabilità condizionate che sia della varietà **A**, della varietà **B** e della varietà **C**? (Potete scrivere la risposta in termini della funzione $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile che segue una distribuzione normale standard; non è necessario trovare il valore numerico).
SUGGERIMENTO: Sia $\mathcal{X}$ l'apertura alare della farfalla catturata, e siano $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_B$ e $\mathcal{F}_C$ gli eventi 'La farfalla è di tipo **A**', 'La farfalla è di tipo **B**' e 'La farfalla è di tipo **C**' rispettivamente. Cominciate calcolando $P(1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25 \mid \mathcal{F}_A)$, $P(1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25 \mid \mathcal{F}_B)$ e $P(1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25 \mid \mathcal{F}_C)$; poi applicate il Teorema di Bayes.

3 Soluzione

Sia $\mathcal{X}$ l'apertura alare della farfalla catturata, e siano $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_B$ e $\mathcal{F}_C$ gli eventi 'La farfalla è di tipo **A**', 'La farfalla è di tipo **B**' e 'La farfalla è di tipo **C**' rispettivamente.
Ora, se la farfalla è di tipo **A** allora $\mathcal{X}$ segue una distribuzione normale con valore atteso di 1.5 cm e deviazione standard di 0.1cm, quindi (scrivendo $\mathcal{Z}$ per una variabile casuale che segua una distribuzione normale standard)

$$\begin{aligned} P(1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25 \mid \mathcal{F}_A) &= P((1.75 - 1.5)/0.1 \leq \mathcal{Z} \leq (2.25 - 1.5)/0.1) \\ &= P(2.5 \leq \mathcal{Z} \leq 7.5) = \Phi(7.5) - \Phi(2.5) \approx 0.0062. \end{aligned}$$

Ragionando in maniera simile, se la farfalla è di tipo **B** allora $\mathcal{X}$ segue una distribuzione normale con valore atteso di 2 cm e deviazione standard 0.25 cm, quindi

$$\begin{aligned} P(1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25 \mid \mathcal{F}_B) &= P((1.75 - 2)/0.25 \leq \mathcal{Z} \leq (2.25 - 2)/0.25) \\ &= P(-1 \leq \mathcal{Z} \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.6827. \end{aligned}$$

e se la farfalla è di tipo **C** allora $\mathcal{X}$ segue una distribuzione normale con valore atteso di 2.5 cm e deviazione standard 0.1 cm, e quindi

$$\begin{aligned} P(1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25 \mid \mathcal{F}_C) &= P((1.75 - 2.5)/0.1 \leq \mathcal{Z} \leq (2.25 - 2.5)/0.1) \\ &= P(-7.5 \leq \mathcal{Z} \leq -2.5) = \Phi(-2.5) - \Phi(-7.5) \approx 0.0062. \end{aligned}$$

(notate che è uguale alla probabilità nel caso che la farfalla sia di tipo **A** - questo è in definitva una conseguenza del fatto che la distribuzione normale è simmetrica rispetto all'asse delle y)
Ora, sapendo che $P(\mathcal{F}_A) = P(\mathcal{F}_B) = P(\mathcal{F}_C) = 1/3$ e scrivendo $\mathcal{G}$ per l'evento $1.75 \leq \mathcal{X} \leq 2.25$', basta applicare il Teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}_A \mid \mathcal{G}) &= \frac{P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_A) \cdot P(\mathcal{F}_A)}{P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_A) \cdot P(\mathcal{F}_A) + P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_B) \cdot P(\mathcal{F}_B) + P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_C) \cdot P(\mathcal{F}_C)} \\ &= \frac{1/3(\Phi(7.5) - \Phi(2.5))}{1/3(\Phi(7.5) - \Phi(2.5)) + 1/3(\Phi(1) - \Phi(-1)) + 1/3(\Phi(-2.5) - \Phi(-7.5))} \\ &\approx 0.0089; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}_B \mid \mathcal{G}) &= \frac{P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_B) \cdot P(\mathcal{F}_B)}{P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_A) \cdot P(\mathcal{F}_A) + P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_B) \cdot P(\mathcal{F}_B) + P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_C) \cdot P(\mathcal{F}_C)} \\ &= \frac{1/3(\Phi(1) - \Phi(-1))}{1/3(\Phi(7.5) - \Phi(2.5)) + 1/3(\Phi(1) - \Phi(-1)) + 1/3(\Phi(-2.5) - \Phi(-7.5))} \\ &\approx 0.9821; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}_C \mid \mathcal{G}) &= \frac{P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_C) \cdot P(\mathcal{F}_C)}{P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_A) \cdot P(\mathcal{F}_A) + P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_B) \cdot P(\mathcal{F}_B) + P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}_C) \cdot P(\mathcal{F}_C)} \\ &= \frac{1/3(\Phi(-2.5) - \Phi(-7.5))}{1/3(\Phi(7.5) - \Phi(2.5)) + 1/3(\Phi(1) - \Phi(-1)) + 1/3(\Phi(-2.5) - \Phi(-7.5))} \\ &\approx 0.0089 \end{aligned}$$

(ovviamente avremmo potuto semplificare tutti gli 1/3 tra di loro).