Esame di Algebra e Geometria del 16 Settembre 2014

Nome Cognome.. **Matricola..................................**

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune.

1. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, a, b\}$.

   i) Quanti elementi ha l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \cap B))$?

   ii) Scrivere un esempio di funzione iniettiva $f : B \to A$ e di funzione suriettiva $g : A \to B$.

   iii) Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su A definita dalle coppie

   $$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, c), (a, c), (b, a), (c, b), (c, a), (d, e), (e, d)\}.$$

   Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza e si scrivano le classi d'equivalenza degli elementi di A.

2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1).$$

3. Applicando l'algoritmo delle divisioni successive calcolare

$$d = MCD(105, 6)$$

   e scrivere d come combinazione lineare di 105 e 6.

   Risolvere la congruenza lineare $105x \equiv 9(mod 6)$.

4. Discutere il rango della seguente matrice al variare del parametro k:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 2 & -k \end{pmatrix}$$

   e risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} -x & -3y & & = & 0 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ & 2y & -z & = & 0 \end{cases}$$

5. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x, -2z, x + 2y + 4z)\,,$$

la cui matrice associata è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$, autovalori e autovettori.
Suggerimento: Per trovare gli autovettori relativi ad un autovalore λ, bisogna risolvere il sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0.$$

6. (**Facoltativa**) Si dimostri che $\{(1, 0, 1),\ (0, -2, 1),\ (3, 1, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si scriva il vettore

$$(2, -3, 1)$$

come combinazione lineare di $(1, 0, 1)$, $(0, -2, 1)$ e $(3, 1, -1)$.