

Esame di Algebra e Geometria del 5/9/2019

Nome Cognome.....

Matricola.....

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../6] 1. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{e, f, g\}$.

- Quanti elementi ha l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times Y)$?
- Si consideri la funzione $g : X \rightarrow (X \cup Y)$ definita nel seguente modo:

$$g(a) = e \quad g(b) = a \quad g(c) = c \quad g(d) = g.$$

La funzione g è iniettiva e/o suriettiva? Perché?

- Si scriva un esempio di relazione d'equivalenza su X , e le relative classi d'equivalenza.

[.../4] 2. Scrivere la tabella moltiplicativa di \mathbb{Z}_6 e determinare gli elementi invertibili di \mathbb{Z}_6 . Che struttura algebrica è (\mathbb{Z}_6, \cdot) ?

[.../4] 3. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcoli il rango di A e di B , il prodotto righe per colonne $A \cdot B$ e il rango del prodotto $A \cdot B$.

[.../4] 4. Dare la definizione di combinazione lineare, di sottospazio vettoriale e di base.

[.../4] 5. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli. Dire se il seguente sistema ha soluzioni e quante ne ha, e calcolarle nel caso in cui esistano:

$$\begin{cases} x & -2y & -z & = & 1 \\ -2x & +4y & +2z & = & -2 \end{cases}$$

[.../6] 6. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, y + 2z, z).$$

Trovare la dimensione di $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$. Trovare inoltre gli autovalori di f , e per ogni autovalore la sua molteplicità algebrica e geometrica e l'autospazio corrispondente. Dire se esiste una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f .