Corso di Logica

Parte 0: Introduzione, Sillogismi

Pietro Galliani

Università dell'Insubria

Pagina web del sito dell'elearning:

`http://elearning.uninsubria.it` - Logica (2022/2023)

Libro di testo:

- Slide sul sito di elearning (aggiornate dopo le lezioni)
- A. Asperti - A. Ciabattoni: Logica a Informatica. McGraw-Hill
- appunti online.

Approfondimenti:

- D. Mundici - Logica: metodo breve. Springer.
- D. e C. Palladino - Logiche non-classiche. Carrocci editore.
- Slide e appunti sul sito.

Informazioni sul corso

- Questo è un corso *di teoria*: accennerò brevemente a qualche applicazione, ma fondamentalmente è un corso di matematica.
- Alcuni dei risultati che vedremo avranno dimostrazioni piuttosto lunghe e laboriose. Non è essenziale che le mandiate a memoria; ma è importante che capiate cosa viene dimostrato, perchè, e che leggendo passo passo la dimostrazione vi sia chiaro perchè funziona.
- Se c'è qualcosa che non è chiaro, **interrompetemi!** Se vi sembra che ci sia un errore da qualche parte, **ditemelo** (potete avere ragionissima!)
  Se preferite, scrivetemi per email (`pietro.galliani@uninsubria.it`).

Dettagli Valutazione

- Esame sarà *solo scritto*. Niente esercitazioni durante l'anno, niente orale.
- A *libro aperto*: libri, appunti, testi stampati saranno permessi (per studenti che fanno l'esame di quest'anno).
- Verso la fine del corso, vedremo un paio di esempi di esame con soluzioni. Potete anche stamparveli e portarli all'esame, se volete.
- Questo non vuole dire che sarà facile anche se non avete studiato il materiale!

- Dal greco **logos** (λόγος), che può avere molti significati:
  - Imparentato con il latino **lex, leges** (legge) e anche **legō** (raccolgo, scelgo); probabilmente dal PIE *leǵ (raccogliere)
  - Parola, discorso, spiegazione, ragione
  - Spesso in termini composti per descrivere aree di studio: geo-logia = ragionamento (logia) sulla terra (geo), eccetera.
  - In filosofia stoica/neoplatonica, il principio razionale alla base della realtà.
  - Successivamente prende anche risvolti religiosi, e.g. Gv. 1: Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος ("En arkhêi ên ho lógos", generalmente tradotto con "In principio era il verbo").

Logica = studio del **ragionamento**

- Dal greco **logos** (λόγος), che può avere molti significati:
  - Imparentato con il latino **lex, leges** (legge) e anche **legō** (raccolgo, scelgo); probabilmente dal PIE *leǵ (raccogliere)
  - **Parola, discorso, spiegazione, ragione**
  - Spesso in termini composti per descrivere aree di studio: geo-logia = ragionamento (logia) sulla terra (geo), eccetera.
  - In filosofia stoica/neoplatonica, il principio razionale alla base della realtà.
  - Successivamente prende anche risvolti religiosi, e.g. Gv. 1: Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος ("En arkhêi ên ho lógos", generalmente tradotto con "In principio era il verbo").

Logica = studio del **ragionamento**

Logica Informale e Formale

Logica Informale

- Argomento importante in filosofia;
- Studia le forme di ragionamento e argomentazione nel linguaggio ordinario, possibili fallacie, eccetera.
- In questo corso non ne parleremo.

Logica Formale

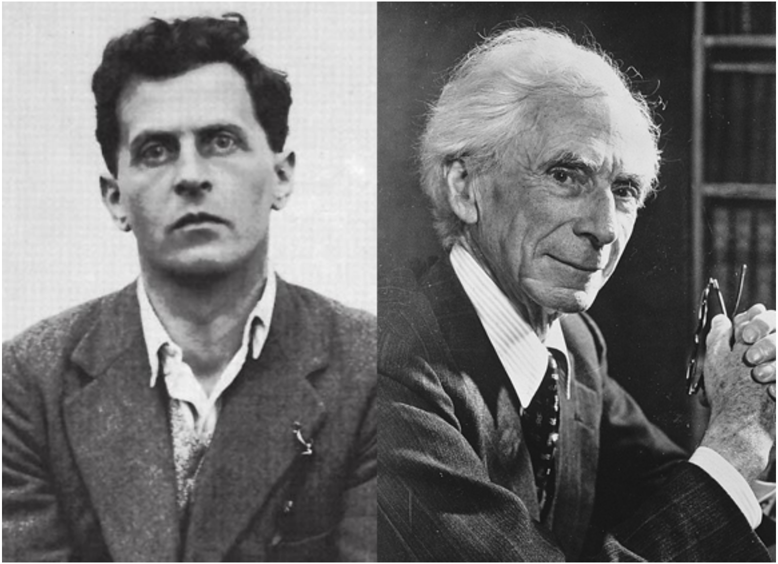
- Lavora con (sotto)linguaggi più limitati del linguaggio ordinario ma definiti in maniera precisa;
- Ne studia le capacità espressive e le modalità di argomentazione/ragionamento;
- Tradeoff: più espressiva è una logica formale (più cose sa dire) e più difficile è il ragionamento (più difficile è stabilire se una conclusione è corretta o no).

Il Positivismo Logico

Il Positivismo Logico

- Corrente filosofica e scientifica della prima metà del 1900.
- Idea di base: molti problemi in scienza e filosofia sono causati dall'uso di *linguaggio impreciso*. Definire in maniera formale il significato preciso di tutte le affermazioni (e in particolare sotto quali condizioni sarebbero vere e false) è necessario (e, spesso, sufficiente) per risolvere in maniera definitiva problemi in scienza e in filosofia.
- Enorme influenza sul pensiero successivo, anche se perlomeno in parte non è riuscito nel suo intento.

Il Positivismo Logico



Secondo Wittgeinstein *non esistono veri problemi filosofici, solo confusioni linguistiche*.

Wittgenstein e Russell

Ricordai quindi i problemi morali e il problema della validità delle norme morali. A questo punto Wittgenstein, il quale sedeva vicino al caminetto e giocava nervosamente con l' attizzatoio che talvolta usava come bacchetta da direttore d' orchestra per sottolineare le sue affermazioni, mi lanciò la sfida: "Dai un esempio di una regola morale!". Io replicai: "Non minacci i conferenzieri ospiti con gli attizzatoi". Dopo di che Wittgenstein, infuriato, gettò giù l'attizzatoio e se ne andò adirato dalla stanza, sbattendo dietro di sé la porta

Perchè Logica a Informatica?

1. Le fondamenta dell'informatica sono definite in termini di logica formale.
2. Paralleli tra logiche e linguaggi di programmazione:
   - Linguaggi senza ambiguità per definire verità/comportamenti in maniera esatta.
   - Connessione molto stretta per linguaggi di programmazione funzionali (e.g. Scala, Lisp) o logici (e.g. Prolog).
   - Una differenza: Church-Turing – (quasi) tutti i linguaggi di programmazione sono essenzialmente equivalenti. Questo non è vero per le logiche.
3. Verifica automatica di programmi: bisogna specificare precisamente cosa un programma deve fare per controllare che lo faccia. C'è bisogno di un linguaggio formale con proprietà adatte (logica).

4. Applicazioni in AI (a)

Ragionamento Automatico

Se possiamo definire precisamente le regole del ragionamento corretto, nel linguaggio ordinario o anche in un sottolinguaggio adatto, possiamo anche controllare automaticamente se un ragionamento è corretto o anche creare artificialmente ragionamenti e dimostrazioni.

Ragionamento Automatico

Se possiamo definire precisamente le regole del ragionamento corretto, nel linguaggio ordinario o anche in un sottolinguaggio adatto, possiamo anche controllare automaticamente se un ragionamento è corretto o anche creare artificialmente ragionamenti e dimostrazioni.

Esempio: **abc conjecture**.

- Importante problema aperto in matematica.
- In 2012, Shinichi Mochizuki (importante matematico giapponese) ha pubblicato una dimostrazione, lunga più di 500 pagine.
- Anche per gli esperti nel settore non è banale decidere se la dimostrazione è corretta oppure no: alcuni sostengono di avere trovato problemi, altri (incluso Mochizuki) dicono che non abbiano capito bene l'argomento, e il dibattito sta andando avanti da anni.

4. Applicazioni in AI (a)

Ragionamento Automatico

Se possiamo definire precisamente le regole del ragionamento corretto, nel linguaggio ordinario o anche in un sottolinguaggio adatto, possiamo anche controllare automaticamente se un ragionamento è corretto o anche creare artificialmente ragionamenti e dimostrazioni.

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716

4. Applicazioni in AI (a)

Ragionamento Automatico

Se possiamo definire precisamente le regole del ragionamento corretto, nel linguaggio ordinario o anche in un sottolinguaggio adatto, possiamo anche controllare automaticamente se un ragionamento è corretto o anche creare artificialmente ragionamenti e dimostrazioni.

Quando sorga una controversia, non ci sarà più necessità di discussione tra due filosofi di quella che c'è tra due calcolatori. Sarà sufficiente prendere una penna, sedersi al tavolo e dirsi l'un l'altro: calcoliamo!

4. Applicazioni in AI (b)

Knowledge Representation

Gene Ontology: base di conoscenza che descrive le interazioni tra $\sim$ 1.500.000 proteine attraverso assiomi come

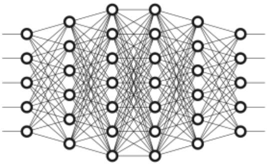
La proteina AiMR è coinvolta nella latenza di replicazione di virus in una cellula infetta, che regola il processo attraverso cui un virus inizia a riprodursi dentro una cellula dopo l'infezione

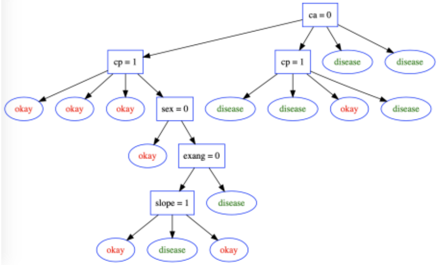
rappresentati in una logica appropriata (una varietà di Description Logic).

Un utente può controllare automaticamente se una certa conclusione segue dai fatti noti, o estrarre quello che si sa riguardo a una specifica proteina, o così via.

Explainability

Supponiamo di estrarre un modello complesso (e.g. rete neurale) da dati. A volte vogliamo non soltanto usarlo per previsioni/decisioni, ma ottenere anche *spiegazioni* (in un linguaggio formale) su perchè una certa previsione è stata fatta, o più in generale una descrizione comprensibile del comportamento del modello.





Aristotele ($\sim$ 384 BCE – 322 BCE)

- Studente di Platone, immensa influenza sulla filosofia
- Padre della logica occidentale
- Sillogismi (Analitici Primi)

(P1)	Tutti gli uomini sono mortali
(P2)	Socrate è un uomo
(C)	Socrate è mortale

Un Sillogismo

(P1)	Tutti gli uomini sono mortali
(P2)	Socrate è un uomo
(C)	Socrate è mortale

1. Composto di **enunciati dichiarativi** (proposizioni), non domande o istruzioni.
2. Ogni volta che le premesse sono vere, lo sono anche le conclusioni, indipendentemente dal significato dei **termini**.

Un Sillogismo

(P1)	Tutti gli uomini sono mortali
(P2)	Socrate è un uomo
(C)	Socrate è mortale

1. Composto di **enunciati dichiarativi** (proposizioni), non domande o istruzioni.
2. Ogni volta che le premesse sono vere, lo sono anche le conclusioni, indipendentemente dal significato dei **termini**.

Un Sillogismo

(P1)	Tutte le anatre sono uccelli
(P2)	Paperino è un'anatra
(C)	Paperino è un uccello

1. Composto di **enunciati dichiarativi** (proposizioni), non domande o istruzioni.
2. Ogni volta che le premesse sono vere, lo sono anche le conclusioni, indipendentemente dal significato dei **termini**.

Un Sillogismo

(P1)	Tutte le lumache sono molluschi
(P2)	Aristotele è una lumaca
(C)	Aristotele è un mollusco

1. Composto di **enunciati dichiarativi** (proposizioni), non domande o istruzioni.
2. Ogni volta che le premesse sono vere, lo sono anche le conclusioni, indipendentemente dal significato dei **termini**.
3. La conclusione di un ragionamento corretto può essere falsa, se una (o entrambe) delle premesse è falsa; ma in ogni scenario in cui le premesse sono vere, lo è anche la conclusione.

Un Sillogismo

(P1)	Tutti gli A sono B
(P2)	X è A [Tutti gli X sono A]
(C)	X è B [Tutti gli X sono B].

1. Composto di **enunciati dichiarativi** (proposizioni), non domande o istruzioni.
2. Ogni volta che le premesse sono vere, lo sono anche le conclusioni, indipendentemente dal significato dei **termini**.
3. La conclusione di un ragionamento corretto può essere falsa, se una (o entrambe) delle premesse è falsa; ma in ogni scenario in cui le premesse sono vere, lo è anche la conclusione.

Un Sillogismo Corretto

(P1)	Tutti gli A sono B
(P2)	Tutti gli X sono A
(C)	Tutti gli X sono B.

Un Sillogismo Sbagliato

(P1)	**Qualche** A è B
(P2)	**Qualche** X è A
(C)	**Qualche** X è B.

Un Sillogismo Sbagliato

(P1)	Qualche animale è alato
(P2)	Qualche gatto è un animale
(C)	Qualche gatto è alato.

- Cambiare (in maniera uniforme) termini come "uomo", "mortale", "Socrate", eccettera in un ragionamento preserva la validità del ragionamento;
- Cambiare "tutti" con "qualche", invece, può trasformare un ragionamento corretto in uno sbagliato.

Un Sillogismo Sbagliato

(P1)	Qualche animale è alato
(P2)	Qualche gatto è un animale
(C)	Qualche gatto è alato.

- Cambiare (in maniera uniforme) termini come "uomo", "mortale", "Socrate", eccettera in un ragionamento preserva la validità del ragionamento; **TERMINI NON LOGICI**
- Cambiare "tutti" con "qualche", invece, può trasformare un ragionamento corretto in uno sbagliato. **TERMINI LOGICI**

Un Sillogismo Sbagliato

(P1)	Qualche animale è alato
(P2)	Qualche piccione è un animale
(C)	Qualche piccione è alato.

- Le premesse sono corrette: è vero che qualche animale ha le ali, e è vero che qualche piccione è un animale.
- La conclusione è corretta: è vero che qualche piccione ha le ali.
- Il ragionamento però è sbagliato: la conclusione **non segue** dalle premesse.
- E' possibile che un ragionamento sia sbagliato **anche se** raggiunge una conclusione vera da premesse vere.

Aristotele si interessò particolarmente di ragionamenti tra proposizioni nelle seguenti forme:

- $\mathbf{A}(x, y)$: Tutti gli x sono y.
- $\mathbf{E}(x, y)$: Nessun x è y.
- $\mathbf{I}(x, y)$: Qualche x è y.
- $\mathbf{O}(x, y)$: Qualche x non è y.

Cerchiamo di rappresentare il suo sistema in un formalismo più moderno, per avere un esempio semplice di come si può costruire e studiare una logica (Corcoran, John. "Completeness of an ancient logic." The journal of symbolic logic 37.4 (1972): 696-702)

Definire la sintassi di una logica significa definire quali sono le *espressioni ben formate* del suo linguaggio.

- Abbiamo quattro **termini logici A** (tutti), **E** (nessuno), **I** (qualche), **O** (non tutti).
- Abbiamo un insieme finito (vocabolario) V di **termini non logici** (e.g. "uomo", "mortale", eccetera) e tale che **A**, **E**, **I**, **O** non sono in V.

L'insieme delle espressioni ϕ della logica sillogistica è dato da

$$\phi ::= \mathbf{A}(x, y) \mid \mathbf{E}(x, y) \mid \mathbf{I}(x, y) \mid \mathbf{O}(x, y)$$

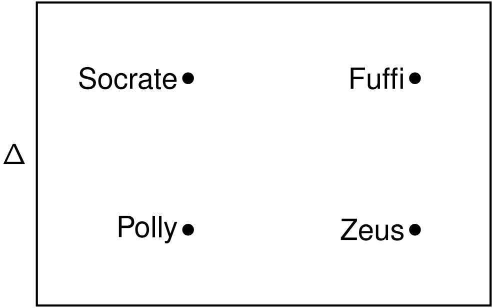
dove $x, y \in V$ e $x \neq y$ (questo sistema non considera espressioni come $\mathbf{A}xx$ o "tutti gli uomini sono uomini").

Definire la **semantica** di una logica significa definire il significato delle sue espressioni: in quali scenari ("modelli", "interpretazioni") una formula è vera, e in quali scenari è falsa?

Un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per un vocabolario V è dato da:

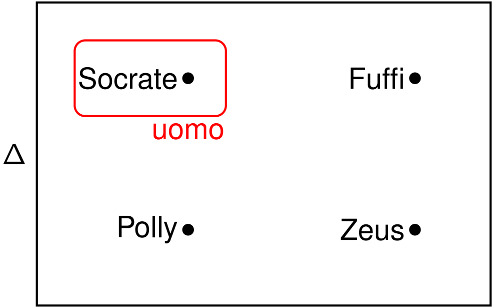
1. Un insieme non vuoto Δ di individui ("dominio del discorso");
2. Una funzione ι che associa ogni termine non logico $x \in V$ a un insieme **non vuoto** $\iota(x) \subseteq \Delta$, $\iota(x) \neq \emptyset$.

- Sia $V = \{\text{uomo}, \text{mortale}, \text{mammifero}, \text{dio}\}$.
- Un possibile modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per V può essere costruito come:
    - $\Delta = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}, \text{Zeus}\}$;
    - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$;
    - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}\}$;
    - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Zeus}\}$;
    - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$.

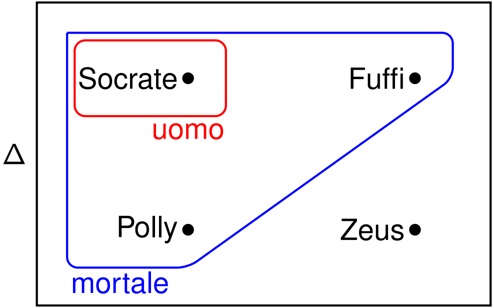


Logica Sillogistica: Semantica (Esempio di Modello)

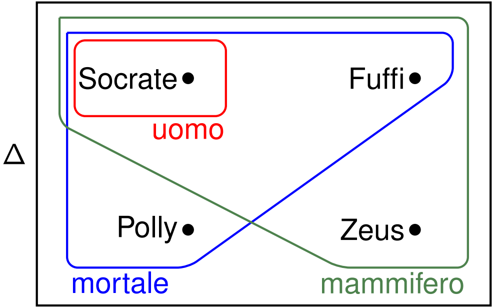
- Sia $V = \{\text{uomo}, \text{mortale}, \text{mammifero}, \text{dio}\}$.
- Un possibile modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per V può essere costruito come:
  - $\Delta = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$;
  - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}\}$;
  - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$.



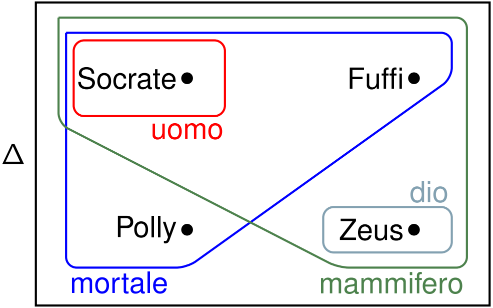
- Sia $V = \{\text{uomo}, \text{mortale}, \text{mammifero}, \text{dio}\}$.
- Un possibile modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per V può essere costruito come:
  - $\Delta = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$;
  - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}\}$;
  - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$.



- Sia $V = \{\text{uomo}, \text{mortale}, \text{mammifero}, \text{dio}\}$.
- Un possibile modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per V può essere costruito come:
  - $\Delta = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$;
  - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}\}$;
  - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$.



- Sia $V = \{\text{uomo}, \text{mortale}, \text{mammifero}, \text{dio}\}$.
- Un possibile modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per V può essere costruito come:
  - $\Delta = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$;
  - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}\}$;
  - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$.



Dato un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ e una formula ϕ della nostra logica, diciamo che $\mathfrak{M}$ soddisfa ϕ (e scriviamo $\mathfrak{M} \models \phi$) se ϕ è vera in $\mathfrak{M}$. Più precisamente, per $x, y \in V$, $x \neq y$:

- $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ (tutti gli x sono y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$ (nessun x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$ (qualche x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$ (qualche x non è y).

Se Σ è un insieme di formule, scriviamo $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$.

Logica Sillogistica: Semantica (Soddisfazione)

Dato un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ e una formula ϕ della nostra logica, diciamo che $\mathfrak{M}$ soddisfa ϕ (e scriviamo $\mathfrak{M} \models \phi$) se ϕ è vera in $\mathfrak{M}$. Più precisamente, per $x, y \in V$, $x \neq y$:

- $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ (tutti gli x sono y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$ (nessun x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$ (qualche x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$ (qualche x non è y).

Se Σ è un insieme di formule, scriviamo $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$.

Logica Sillogistica: Semantica (Soddisfazione)

Dato un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ e una formula ϕ della nostra logica, diciamo che $\mathfrak{M}$ soddisfa ϕ (e scriviamo $\mathfrak{M} \models \phi$) se ϕ è vera in $\mathfrak{M}$. Più precisamente, per $x, y \in V$, $x \neq y$:

- $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ (tutti gli x sono y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$ (nessun x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$ (qualche x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$ (qualche x non è y).

Se Σ è un insieme di formule, scriviamo $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$.

Dato un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ e una formula ϕ della nostra logica, diciamo che $\mathfrak{M}$ soddisfa ϕ (e scriviamo $\mathfrak{M} \models \phi$) se ϕ è vera in $\mathfrak{M}$. Più precisamente, per $x, y \in V$, $x \neq y$:

- $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ (tutti gli x sono y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$ (nessun x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$ (qualche x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$ (qualche x non è y).

Se Σ è un insieme di formule, scriviamo $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$.

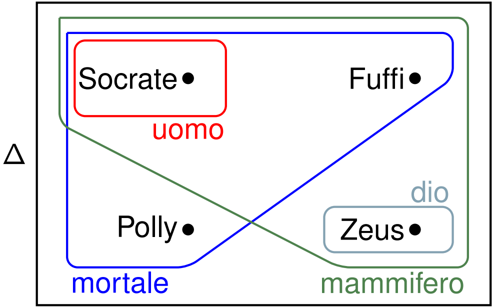
Logica Sillogistica: Semantica (Soddisfazione)

Dato un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ e una formula ϕ della nostra logica, diciamo che $\mathfrak{M}$ soddisfa ϕ (e scriviamo $\mathfrak{M} \models \phi$) se ϕ è vera in $\mathfrak{M}$. Più precisamente, per $x, y \in V$, $x \neq y$:

- $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ (tutti gli x sono y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$ (nessun x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$ (qualche x è y);
- $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$ (qualche x non è y).

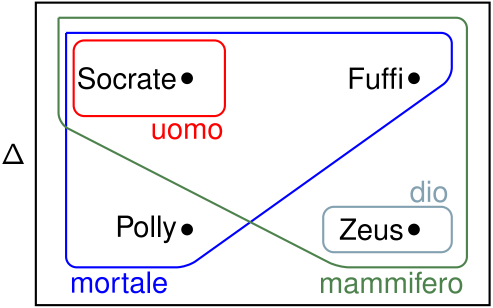
Se Σ è un insieme di formule, scriviamo $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$.

Sia $\mathfrak{M}$ il modello che abbiamo visto prima:



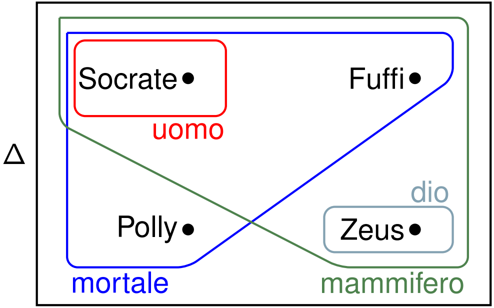
- $\mathfrak{M} \models$ **A**(uomo, mammifero), perchè $\iota(\text{uomo}) \subseteq \iota(\text{mammifero})$;
- $\mathfrak{M} \not\models$ **A**(mortale, mammifero), perchè $\iota(\text{mortale}) \not\subseteq \iota(\text{mammifero})$;

Sia $\mathfrak{M}$ il modello che abbiamo visto prima:



- $\mathfrak{M} \models$ **E**(dio, mortale), perchè $\iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{dio}) = \emptyset$;
- $\mathfrak{M} \not\models$ **E**(mortale, mammifero), perchè Fuffi $\in \iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{mammifero})$;

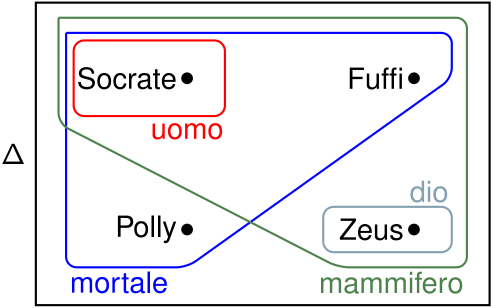
Sia $\mathfrak{M}$ il modello che abbiamo visto prima:



- $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(\text{mortale}, \text{mammifero})$, perchè Socrate $\in \iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{mammifero})$;
- $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(\text{mortale}, \text{dio})$, perchè $\iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{dio}) = \emptyset$;

Logica Sillogistica: Semantica (Esempi)

Sia $\mathfrak{M}$ il modello che abbiamo visto prima:



- $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(\text{mammifero}, \text{mortale})$, perchè $\text{Zeus} \in \iota(\text{mammifero}), \text{Zeus} \not\in \iota(\text{mortale})$;
- $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(\text{dio}, \text{mammifero})$, perchè $\iota(\text{dio}) \subseteq \iota(\text{mammifero})$.

Abbiamo definito un semplice linguaggio logico con la massima precisione possibile: ora sappiamo esattamente quali espressioni sono o non sono parte del linguaggio, abbiamo definito i tipi di modelli che le espressioni della nostra logica possono descrivere, e abbiamo definito con assoluta precisione sotto quali condizioni una formula della nostra logica è o non è soddisfatta in un modello.

Non sarà il linguaggio più ricco e complicato del mondo, ma non ci sono ambiguità possibili sul significato delle sue espressioni.

Ma è davvero così?

Abbiamo definito un semplice linguaggio logico con la massima precisione possibile: ora sappiamo esattamente quali espressioni sono o non sono parte del linguaggio, abbiamo definito i tipi di modelli che le espressioni della nostra logica possono descrivere, e abbiamo definito con assoluta precisione sotto quali condizioni una formula della nostra logica è o non è soddisfatta in un modello.

Non sarà il linguaggio più ricco e complicato del mondo, ma non ci sono ambiguità possibili sul significato delle sue espressioni.

Ma è davvero così?

Un problema: Per descrivere la nostra logica abbiamo usato espressioni di linguaggio ordinario e semplici concetti di matematica ("sia V un insieme finito", "$\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$", eccetera).

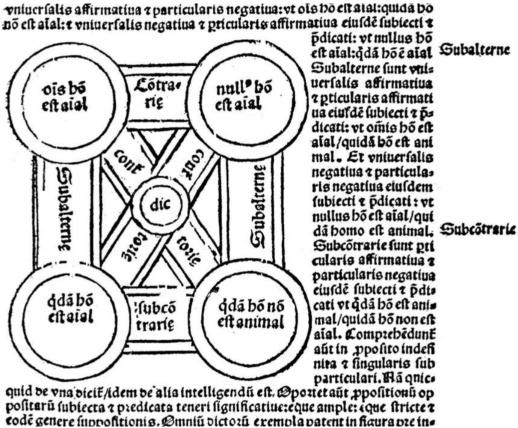
Se questi concetti non sono ambigui, tutto OK; ma come facciamo a essere sicuri? Non possiamo certamente definirli nella logica sillogistica che stiamo studiando; potremmo farlo in una logica più complicata, ma non sarebbe per niente banale (soprattutto vogliamo definire concetti come "finito" e "infinito"), e comunque poi dovremmo definire i concetti necessari per quella logica in termini di qualcos'altro (cosa?).

Linguaggio e Metalinguaggio

- Per definire e studiare un linguaggio formale, si deve necessariamente usare un altro linguaggio.

- Metalinguaggio = linguaggio usato per parlare di un altro linguaggio: nel nostro caso, che è quello tipico, il metalinguaggio che usiamo è una combinazione di lingua italiana e linguaggio matematico. Aristotele ha usato il greco del suo tempo, e a volte il significato (dal nostro punto di vista) è ambiguo: per esempio, è possibile che un termine non sia vero di nessun individuo (e.g. "unicorno")? Nel nostro modello abbiamo deciso di no, ma se cerchiamo di interpretare direttamente Aristotele non è chiaro se intendeva così. Forse in futuro qualcuno troverà ambiguità anche nelle nostre definizioni?

- In definitiva, quindi, la logica formale è "appoggiata" sulla logica informale!



(Agostino Nifo, 1521, *Dialectica Ludicra*)

Il Quadrato delle Opposizioni

A(x, y)
(Tutti gli x sono y)

E(x, y)
(Nessun x è y)

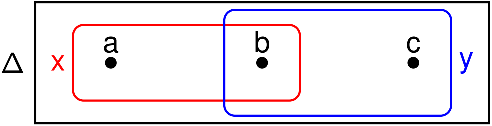
I(x, y)
(Qualche x è y)

O(x, y)
(Qualche x non è y);

$\mathbf{A}(x, y)$ (Tutti gli x sono y)	contrari $\longleftrightarrow$	$\mathbf{E}(x, y)$ (Nessun x è y)
$\mathbf{I}(x, y)$ (Qualche x è y)		$\mathbf{O}(x, y)$ (Qualche x non è y);

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora

- $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ possono essere entrambe false in $\mathfrak{M}$:

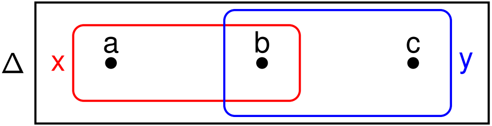


  - $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$, perchè $a \in \iota(x)$ ma $a \notin \iota(y)$;
  - $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$, perchè $b \in \iota(x)$ e $b \in \iota(y)$.
- **A(x,y)** e **E(x,y)** non possono essere entrambi veri in $\mathfrak{M}$: infatti, se $\mathfrak{M} \models$ **A(x,y)** allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ora, prendi un qualsiasi $a \in \iota(x)$ (che esiste perchè $\iota(x) \neq \emptyset$): chiaramente abbiamo che $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$.
- $\mathbf{A}(x, y)$ può essere vera e $\mathbf{E}(x, y)$ può essere falsa, o vice versa: *esercizio*.

Il Quadrato delle Opposizioni: Contrari

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora

- $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ possono essere entrambe false in $\mathfrak{M}$:



  - $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$, perchè $a \in \iota(x)$ ma $a \notin \iota(y)$;
  - $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$, perchè $b \in \iota(x)$ e $b \in \iota(y)$.
- **A(x,y)** e **E(x,y)** non possono essere entrambi veri in $\mathfrak{M}$: infatti, se $\mathfrak{M} \models$ **A(x,y)** allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ora, prendi un qualsiasi $a \in \iota(x)$ (che esiste perchè $\iota(x) \neq \emptyset$): chiaramente abbiamo che $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$.
- $\mathbf{A}(x, y)$ può essere vera e $\mathbf{E}(x, y)$ può essere falsa, o vice versa: *esercizio*.

$$\mathbf{A}(x, y) \text{ (Tutti gli } x \text{ sono } y) \xleftrightarrow{\text{contrari}} \mathbf{E}(x, y) \text{ (Nessun } x \text{ è } y)$$

$\mathbf{I}(x, y)$
(Qualche x è y)

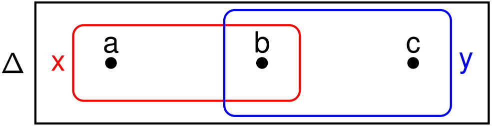
$\mathbf{O}(x, y)$
(Qualche x non è y);

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(x,y) & \xleftrightarrow{\text{contrari}} & \mathbf{E}(x,y) \\ \text{(Tutti gli } x \text{ sono } y\text{)} & & \text{(Nessun } x \text{ è } y\text{)} \\ & & \\ \mathbf{I}(x,y) & \xleftrightarrow{\text{subcontrari}} & \mathbf{O}(x,y) \\ \text{(Qualche } x \text{ è } y\text{)} & & \text{(Qualche } x \text{ non è } y\text{);} \end{array}$$

Il Quadrato delle Opposizioni: Subcontrari

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora

- $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ possono essere entrambe vere in $\mathfrak{M}$:



  - $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$, perchè $b \in \iota(x)$ e $b \in \iota(y)$;
  - $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$, perchè $a \in \iota(x)$ ma $a \notin \iota(y)$.

- $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ non possono essere entrambe false in $\mathfrak{M}$: Supponi che $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$. Allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Ora, prendi un qualsiasi $a \in \iota(x)$ (che esiste perchè $\iota(x) \neq \emptyset$). Dobbiamo avere che $a \notin \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$.
- $\mathbf{I}(x, y)$ può essere vera e $\mathbf{O}(x, y)$ può essere falsa, o vice versa: *esercizio*

Il Quadrato delle Opposizioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(x,y) & \xleftrightarrow{\text{contrari}} & \mathbf{E}(x,y) \\ \text{(Tutti gli } x \text{ sono } y\text{)} & & \text{(Nessun } x \text{ è } y\text{)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I}(x,y) & \xleftrightarrow{\text{subcontrari}} & \mathbf{O}(x,y) \\ \text{(Qualche } x \text{ è } y\text{)} & & \text{(Qualche } x \text{ non è } y\text{);} \end{array}$$

Il Quadrato delle Opposizioni

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c}\mathbf{A}(x,y)\\ \text{(Tutti gli } x \text{ sono } y\text{)}\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{contrari}"] \arrow[d, "\text{subalterni}"'] & \begin{array}{c}\mathbf{E}(x,y)\\ \text{(Nessun } x \text{ è } y\text{)}\end{array} \arrow[d, "\text{subalterni}"] \\
\begin{array}{c}\mathbf{I}(x,y)\\ \text{(Qualche } x \text{ è } y\text{)}\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{subcontrari}"] & \begin{array}{c}\mathbf{O}(x,y)\\ \text{(Qualche } x \text{ non è } y\text{);}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Il Quadrato Delle Opposizioni: Subalterni (1)

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$.
  Infatti, supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$. Allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ora, prendi un qualsiasi $a \in \iota(x)$ (che esiste perchè $\iota(x) \neq \emptyset$). Allora abbiamo anche che $a \in \iota(y)$, e quindi $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$.
- Invece, è possibile che $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ ma $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$, e è anche possibile che $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$ e $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$: *esercizio*.

Il Quadrato delle Opposizioni: Subalterni (2)

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora

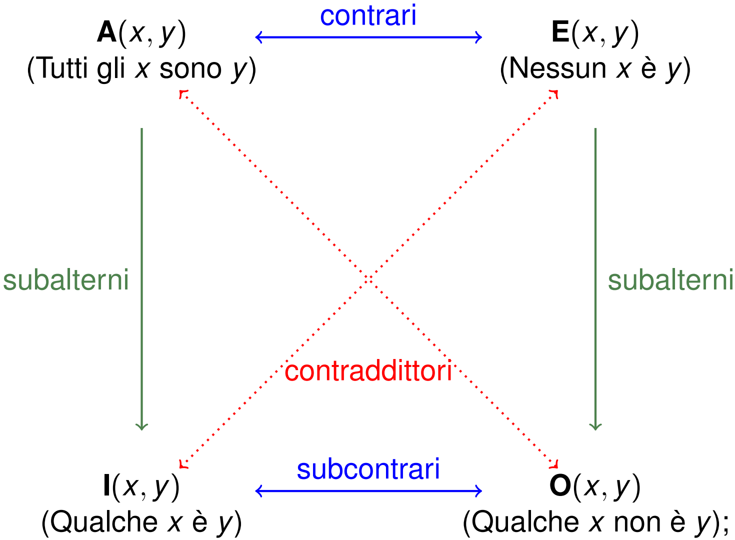
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$.
  Infatti, supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$. Allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$.
  Ora prendi un qualsiasi $a \in \iota(x)$. Chiaramente dobbiamo avere che $a \notin \iota(y)$. Quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$.

- Invece, è possibile che $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ ma $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$, o che $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$ e che $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$: *esercizio*.

Il Quadrato delle Opposizioni

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c}\mathbf{A}(x,y)\\ \text{(Tutti gli } x \text{ sono } y\text{)}\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{contrari}"] \arrow[d, "\text{subalterni}"'] & \begin{array}{c}\mathbf{E}(x,y)\\ \text{(Nessun } x \text{ è } y\text{)}\end{array} \arrow[d, "\text{subalterni}"] \\
\begin{array}{c}\mathbf{I}(x,y)\\ \text{(Qualche } x \text{ è } y\text{)}\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{subcontrari}"] & \begin{array}{c}\mathbf{O}(x,y)\\ \text{(Qualche } x \text{ non è } y\text{);}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Il Quadrato delle Opposizioni



Il Quadrato delle Opposizioni: Contraddittori

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora,

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ma allora non esiste nessun elemento che è in $\iota(x)$ ma non in $\iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x)$ tale che $a \notin \iota(y)$. Ma allora $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Ma allora non esiste nessun elemento $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$: Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$. Quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$.

Il Quadrato delle Opposizioni: Contraddittori

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora,

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ma allora non esiste nessun elemento che è in $\iota(x)$ ma non in $\iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x)$ tale che $a \notin \iota(y)$. Ma allora $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Ma allora non esiste nessun elemento $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$: Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$. Quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$.

Il Quadrato delle Opposizioni: Contraddittori

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora,

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ma allora non esiste nessun elemento che è in $\iota(x)$ ma non in $\iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x)$ tale che $a \notin \iota(y)$. Ma allora $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Ma allora non esiste nessun elemento $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$: Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$. Quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$.

Il Quadrato delle Opposizioni: Contraddittori

Sia $\mathfrak{M}$ un qualsiasi modello con $x, y \in V$. Allora,

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ma allora non esiste nessun elemento che è in $\iota(x)$ ma non in $\iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x)$ tale che $a \notin \iota(y)$. Ma allora $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$:
  Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Ma allora non esiste nessun elemento $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$.
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$: Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$ allora esiste some $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$. Quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$.

Il Quadrato delle Opposizioni: Compatibilità tra Formule

		allora…			
		$\mathbf{A}(x, y)$	$\mathbf{E}(x, y)$	$\mathbf{I}(x, y)$	$\mathbf{O}(x, y)$
Se…	$\mathbf{A}(x, y)$	Nec	Imp	Nec	Imp
	$\mathbf{E}(x, y)$	Imp	Nec	Imp	Nec
	$\mathbf{I}(x, y)$	Poss	Imp	Nec	Poss
	$\mathbf{O}(x, y)$	Imp	Poss	Poss	Nec

(Nec = necessario, Imp = impossibile, Poss = possibile)

Logica Sillogistica: perchè portata esistenziale?

- Nella nostra definizione di un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$, abbiamo richiesto che $\iota(x) \neq \emptyset$ per tutti gli $x \in V$: ogni proprietà x deve essere vera di almeno un individuo.

- Questa sembra essere l'interpretazione che intendeva Aristotele; ma perchè? Che c'è di male a parlare di proprietà false?

- Supponiamo che $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset$ e $\iota(\text{cornuto}) = \{a, b, c \ldots\}$. Allora $\mathbf{A}(\text{unicorno}, \text{cornuto})$, perchè $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset \subseteq \iota(\text{cornuto})$: sembra avere senso!

- Però abbiamo anche che $\mathbf{E}(\text{unicorno}, \text{cornuto}) = \emptyset$, perchè $\iota(\text{unicorno}) \cap \iota(\text{cornuto}) = \emptyset \cap \{a, b, c \ldots\} = \emptyset$: tutti gli unicorni sono cornuti **e** nessun unicorno è cornuto…

Logica Sillogistica: perchè portata esistenziale?

- Nella nostra definizione di un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$, abbiamo richiesto che $\iota(x) \neq \emptyset$ per tutti gli $x \in V$: ogni proprietà x deve essere vera di almeno un individuo.
- Questa sembra essere l'interpretazione che intendeva Aristotele; ma perchè? Che c'è di male a parlare di proprietà false?
- Supponiamo che $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset$ e $\iota(\text{cornuto}) = \{a, b, c \ldots\}$. Allora $\mathbf{A}(\text{unicorno}, \text{cornuto})$, perchè $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset \subseteq \iota(\text{cornuto})$: sembra avere senso!
- Però abbiamo anche che $\mathbf{E}(\text{unicorno}, \text{cornuto}) = \emptyset$, perchè $\iota(\text{unicorno}) \cap \iota(\text{cornuto}) = \emptyset \cap \{a, b, c \ldots\} = \emptyset$: tutti gli unicorni sono cornuti **e** nessun unicorno è cornuto...

Logica Sillogistica: perchè portata esistenziale?

- Inoltre, supponi che $\iota(\text{alato}) = \{a', b', c' \ldots\}$: allo stesso modo, $\mathbf{A}(\text{unicorno}, \text{alato})$ e $\mathbf{E}(\text{unicorno}, \text{alato})$
- Più in generale, se $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset$ avremmo che $\mathbf{A}(\text{unicorno}, x)$ e $\mathbf{E}(\text{unicorno}, x)$ per tutti gli $x \in V$, il che sembra irragionevole.
- In futuro, vedremo logiche che accettano proprietà vuote e questi fatti poco intuitivi; ma esistono anche logiche (**free logics**) che permettono di parlare di proprietà impossibili senza causare questi fenomeni.

- Inoltre, supponi che $\iota(\text{alato}) = \{a', b', c' \ldots\}$: allo stesso modo, $\mathbf{A}(\text{unicorno}, \text{alato})$ e $\mathbf{E}(\text{unicorno}, \text{alato})$
- Più in generale, se $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset$ avremmo che $\mathbf{A}(\text{unicorno}, x)$ e $\mathbf{E}(\text{unicorno}, x)$ per tutti gli $x \in V$, il che sembra irragionevole.
- In futuro, vedremo logiche che accettano proprietà vuote e questi fatti poco intuitivi; ma esistono anche logiche (**free logics**) che permettono di parlare di proprietà impossibili senza causare questi fenomeni.

Logica Sillogistica: perchè portata esistenziale?

- Inoltre, supponi che $\iota(\text{alato}) = \{a', b', c' \dots\}$: allo stesso modo, $\mathbf{A}(\text{unicorno}, \text{alato})$ e $\mathbf{E}(\text{unicorno}, \text{alato})$
- Più in generale, se $\iota(\text{unicorno}) = \emptyset$ avremmo che $\mathbf{A}(\text{unicorno}, x)$ e $\mathbf{E}(\text{unicorno}, x)$ per tutti gli $x \in V$, il che sembra irragionevole.
- In futuro, vedremo logiche che accettano proprietà vuote e questi fatti poco intuitivi; ma esistono anche logiche (**free logics**) che permettono di parlare di proprietà impossibili senza causare questi fenomeni.

1. La logica sillogistica non è in grado di combinare espressioni attraverso *disgiunzioni*: "Tutti i teoremi sono banali **oppure** incomprensibili".
2. La logica sillogistica non è in grado di parlare di *relazioni* tra individui: "Se a è figlio di b e b è figlio di c allora a è nipote di c".
3. La logica sillogistica non è capace di contare: "Ci sono **tanti** gatti **quanti** cani".

Logica Sillogistica: Limiti

1. La logica sillogistica non è in grado di combinare espressioni attraverso *disgiunzioni*: "Tutti i teoremi sono banali **oppure** incomprensibili".
2. La logica sillogistica non è in grado di parlare di *relazioni* tra individui: "Se *a* è figlio di *b* e *b* è figlio di *c* allora *a* è nipote di *c*".
3. La logica sillogistica non è capace di contare: "Ci sono **tanti** gatti **quanti** cani".

Logica Sillogistica: Limiti

1. La logica sillogistica non è in grado di combinare espressioni attraverso *disgiunzioni*: "Tutti i teoremi sono banali **oppure** incomprensibili".
2. La logica sillogistica non è in grado di parlare di *relazioni* tra individui: "Se a è figlio di b e b è figlio di c allora a è nipote di c".
3. La logica sillogistica non è capace di contare: "Ci sono **tanti** gatti **quanti** cani".

Modelli Equivalenti

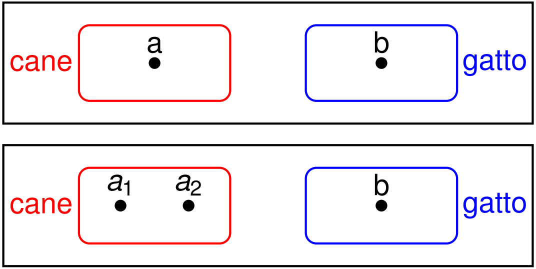
Diciamo che due modelli $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ sono **equivalenti** (rispetto a una logica L) se, per tutte le formule ϕ di questa logica,

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}_2 \models \phi$$

In questo caso, scriviamo che $\mathfrak{M}_1 \equiv_L \mathfrak{M}_2$ (o $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$ se la scelta di L è chiara): la logica L **non è capace** di distinguere tra $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$, perchè $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ soddisfano *esattamente le stesse formule* di L.

Consideriamo i due seguenti modelli per $V = \{\text{cane}, \text{gatto}\}$:

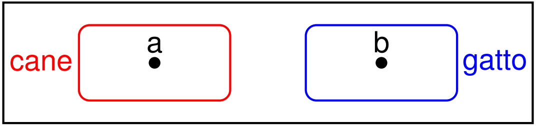
$\mathfrak{M}_1 =$, $\mathfrak{M}_2 =$

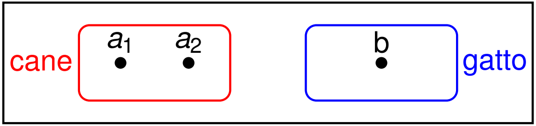


Ci sono solo *otto* formule per questo V, e $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ soddisfano le stesse:

ϕ	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	ϕ	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$
A(cane, gatto)	NO	NO	**A**(gatto, cane)	NO	NO
E(cane, gatto)	SI	SI	**E**(gatto, cane)	SI	SI
I(cane, gatto)	NO	NO	**I**(gatto, cane)	NO	NO
O(cane, gatto)	SI	SI	**O**(gatto, cane)	SI	SI

Consideriamo i due seguenti modelli per $V = \{\text{cane}, \text{gatto}\}$:

$\mathfrak{M}_1 =$ 

$\mathfrak{M}_2 =$ 

Ci sono solo *otto* formule per questo V, e $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ soddisfano le stesse:

ϕ	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	ϕ	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$
A(cane, gatto)	NO	NO	**A**(gatto, cane)	NO	NO
E(cane, gatto)	SI	SI	**E**(gatto, cane)	SI	SI
I(cane, gatto)	NO	NO	**I**(gatto, cane)	NO	NO
O(cane, gatto)	SI	SI	**O**(gatto, cane)	SI	SI

Forse se aggiungiamo altro a V potremmo poter distinguere $\mathfrak{M}_1$ da $\mathfrak{M}_2$?

$\mathfrak{M}[a^n]$

Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un vocabolario V, sia $a \in \Delta$, e sia $n \in \mathbb{N}$ un numero intero positivo. Allora definiamo $\mathfrak{M}[a^n]$ come il modello (Δ', ι'), dove

- $\Delta' = \Delta \backslash \{a\} \cup \{a_1 \ldots a_n\}$;
- Per tutti gli $x \in V$,

$$\iota'(x) = \begin{cases} \iota(x) & \text{se } a \notin \iota(x); \\ \iota(x) \backslash \{a\} \cup \{a_1 \ldots a_n\} & \text{se } a \in \iota(x). \end{cases}$$

Forse se aggiungiamo altro a V potremmo poter distinguere $\mathfrak{M}_1$ da $\mathfrak{M}_2$?

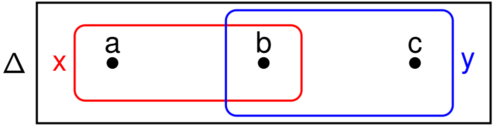
$\mathfrak{M}[a^n]$

Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un vocabolario V, sia $a \in \Delta$, e sia $n \in \mathbb{N}$ un numero intero positivo. Allora definiamo $\mathfrak{M}[a^n]$ come il modello (Δ', ι'), dove

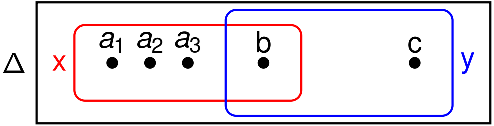
- $\Delta' = \Delta \backslash \{a\} \cup \{a_1 \ldots a_n\}$;
- Per tutti gli $x \in V$,

$$\iota'(x) = \begin{cases} \iota(x) & \text{se } a \notin \iota(x); \\ \iota(x) \backslash \{a\} \cup \{a_1 \ldots a_n\} & \text{se } a \in \iota(x). \end{cases}$$

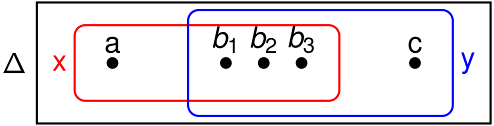
Per esempio: sia $\mathfrak{M}$ il modello



Allora $\mathfrak{M}[a^3]$ è il modello



e $\mathfrak{M}[b^3]$ è il modello



Teorema: Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un qualche vocabolario V, sia $a \in \Delta$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, per tutte le formule ϕ di logica sillogistica (su vocabolario V),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}[a^n] \models \phi.$$

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{M}[a^n] = (\Delta', \iota')$.
ϕ deve essere della forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$ oppure $\mathbf{O}(x, y)$ per $x, y \in V$. Consideriamo questi quattro casi separatamente:

1. Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$. Allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Se $a \notin \iota(x)$ allora $\iota'(x) = \iota(x) \subseteq \iota(y)$, e visto che $a \notin \iota(x)$ dobbiamo anche avere che $\iota'(x) \subseteq \iota'(y)$ e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{A}(x, y)$. Se invece $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$ allora esiste un qualche $b \in \iota(x) \backslash \iota(y)$. Se $b \neq a$, $b \in \iota'(x) \backslash \iota'(y)$, e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{A}(x, y)$; e se $b = a$, allora in particolare $a_1 \in \iota'(x) \backslash \iota'(y)$ e quindi di nuovo $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{A}(x, y)$.

Teorema: Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un qualche vocabolario V, sia $a \in \Delta$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, per tutte le formule ϕ di logica sillogistica (su vocabolario V),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}[a^n] \models \phi.$$

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{M}[a^n] = (\Delta', \iota')$.
ϕ deve essere della forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$ oppure $\mathbf{O}(x, y)$ per $x, y \in V$. Consideriamo questi quattro casi separatamente:

1. Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$. Allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Se $a \notin \iota(x)$ allora $\iota'(x) = \iota(x) \subseteq \iota(y)$, e visto che $a \notin \iota(x)$ dobbiamo anche avere che $\iota'(x) \subseteq \iota'(y)$ e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{A}(x, y)$. Se invece $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$ allora esiste un qualche $b \in \iota(x) \backslash \iota(y)$. Se $b \neq a$, $b \in \iota'(x) \backslash \iota'(y)$, e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{A}(x, y)$; e se $b = a$, allora in particolare $a_1 \in \iota'(x) \backslash \iota'(y)$ e quindi di nuovo $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{A}(x, y)$.

Teorema: Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un qualche vocabolario V, sia $a \in \Delta$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, per tutte le formule ϕ di logica sillogistica (su vocabolario V),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}[a^n] \models \phi.$$

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{M}[a^n] = (\Delta', \iota')$.
ϕ deve essere della forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$ oppure $\mathbf{O}(x, y)$ per $x, y \in V$. Consideriamo questi quattro casi separatamente:

2. Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$. Allora $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Se $a \notin \iota(x)$, allora $\iota'(x) = \iota(x)$; e visto che $\iota'(y)$ è $\iota(y)$ oppure $\iota(y) \cup \{a_1 \dots a_n\}$, in un caso o nell'altro abbiamo che $\iota'(x) \cap \iota'(y) = \emptyset$ e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{E}(x, y)$. Se invece $a \in \iota(x)$ allora $a \notin \iota(y)$, $\iota'(x) = \iota(x) \backslash \{a\} \cup \{a_1 \dots a_n\}$ e $\iota'(y) = \iota(y)$, e quindi di nuovo $\iota'(x) \cap \iota'(y) = \emptyset$ e $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{E}(x, y)$.

Teorema: Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un qualche vocabolario V, sia $a \in \Delta$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, per tutte le formule ϕ di logica sillogistica (su vocabolario V),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}[a^n] \models \phi.$$

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{M}[a^n] = (\Delta', \iota')$.
ϕ deve essere della forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$ oppure $\mathbf{O}(x, y)$ per $x, y \in V$. Consideriamo questi quattro casi separatamente:

2. Supponi che $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$. Allora $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$: esiste un qualche $b \in \iota(x) \cap \iota(y)$. Se $b \neq a$, allora $b \in \iota'(x) \cap \iota'(y)$ e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{E}(x, y)$. Se invece $b = a$, allora $a^1 \in \iota'(x) \cap \iota'(y)$ e quindi di nuovo $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{E}(x, y)$.

Teorema: Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un qualche vocabolario V, sia $a \in \Delta$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, per tutte le formule ϕ di logica sillogistica (su vocabolario V),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}[a^n] \models \phi.$$

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{M}[a^n] = (\Delta', \iota')$.
ϕ deve essere della forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$ oppure $\mathbf{O}(x, y)$ per $x, y \in V$. Consideriamo questi quattro casi separatamente:

3. Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$. Allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{E}(x, y)$ (contraddittorio), e quindi come abbiamo già visto $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{E}(x, y)$, e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{I}(x, y)$. Similmente, se $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{I}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$, e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{E}(x, y)$, e finalmente $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{I}(x, y)$.

Teorema: Sia $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ un modello di logica sillogistica su un qualche vocabolario V, sia $a \in \Delta$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, per tutte le formule ϕ di logica sillogistica (su vocabolario V),

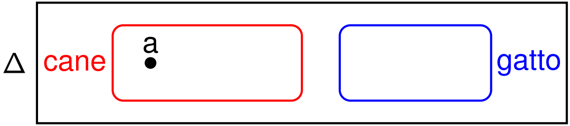
$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M}[a^n] \models \phi.$$

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{M}[a^n] = (\Delta', \iota')$.
ϕ deve essere della forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$ oppure $\mathbf{O}(x, y)$ per $x, y \in V$. Consideriamo questi quattro casi separatamente:

3. Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$. Allora $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{A}(x, y)$ (contradditorio), e quindi come abbiamo già visto $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{A}(x, y)$, e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{O}(x, y)$. Similmente, se $\mathfrak{M} \not\models \mathbf{O}(x, y)$ allora $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$, e quindi $\mathfrak{M}[a^n] \models \mathbf{A}(x, y)$, e finalmente $\mathfrak{M}[a^n] \not\models \mathbf{O}(x, y)$.

Logica Sillogistica e incapacità di contare

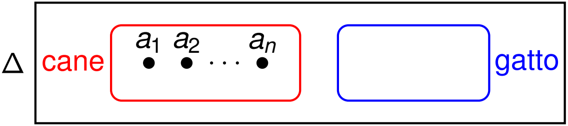
Supponi che $V = \{\text{cane}, \text{gatto}, \ldots\}$ e che Σ sia un insieme di formule sillogistiche tali che $\mathbf{E}(\text{cane}, \text{gatto}) \in \Sigma$. Allora, se $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ è tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ (vale a dire, $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$) e $a \in \iota(\text{cane})$ or $a \in \iota(\text{gatto})$, allora $\mathfrak{M}[a^n] \models \Sigma$.



In altre parole, posso aumentare il numero di cani a piacere lasciando il numero di gatti invariato, o vice versa; e quindi non esiste modo di esigere che il numero di cani e di gatti sia uguale.

Logica Sillogistica e incapacità di contare

Supponi che $V = \{\text{cane}, \text{gatto}, \ldots\}$ e che Σ sia un insieme di formule sillogistiche tali che $\mathbf{E}(\text{cane}, \text{gatto}) \in \Sigma$. Allora, se $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ è tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ (vale a dire, $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$) e $a \in \iota(\text{cane})$ o $a \in \iota(\text{gatto})$, allora $\mathfrak{M}[a^n] \models \Sigma$.



In altre parole, posso aumentare il numero di cani a piacere lasciando il numero di gatti invariato, o vice versa; e quindi non esiste modo nella logica sillogistica di esigere che il numero di cani e di gatti sia uguale.

Non-Categoricità della Logica Sillogistica

- In generale, nella logica moderna, una teoria Σ di una qualche logica $\mathcal{L}$ si dice *categorica* se descrive precisamente uno e un solo modello: $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se e solo se $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$, per un qualche modello fisso $\mathfrak{M}_0$.
- Una teoria categorica dice "tutto quello che si può dire" riguardo all'unico modello che lo soddisfa.
- Una conseguenza di quello che abbiamo già visto è che nella logica sillogistica **nessuna teoria è categorica**: se $\mathfrak{M} \models \Sigma$, è sempre possibile "gonfiare" $\mathfrak{M}$ aggiungendo più elementi in maniera tale che Σ resti soddisfatto.

Logica Sillogistica: Limiti all'espressività

- Il fatto che la logica sillogistica sia incapace di esprimere varie proprietà potenzialmente interessanti **non** vuole dire che sia una cattiva logica.
- In futuro, vedremo altre logiche, alcune delle quali hanno capacità espressive molto maggiori, altre per certi aspetti minori.
- In generale, la capacità espressiva di una logica non è gratis: più è espressiva una logica, più è difficile (anche computazionalmente) decidere se un certo ragionamento in una logica è corretto oppure no.
- La questione di quale sia la "logica migliore" in generale non ha senso, è come chiedere quale sia il "linguaggio di programmazione migliore" o "il martello migliore": *dipende da quello che ci vuoi fare!*

Un **argomento** può essere visto come una coppia (Σ, ϕ), dove Σ è un insieme di formule di logica sillogistica (rispetto a un certo vocabolario V) e ϕ è la *conclusione* dell'argomento. L'argomento (Σ, ϕ) è **valido** se per tutti i modelli $\mathfrak{M}$ **tali che** $\mathfrak{M} \models \Sigma$, abbiamo anche che $\mathfrak{M} \models \phi$. In questo caso, scriviamo anche $\Sigma \models \phi$.

Esempio di Argomento Valido

$$\mathbf{A}(x, y), \mathbf{A}(y, z) \models \mathbf{A}(x, z)$$

Infatti: se $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota) \models \mathbf{A}(x, y)$ e $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(y, z)$ allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ e $\iota(y) \subseteq \iota(z)$. Ma allora $\iota(x) \subseteq \iota(z)$ e quindi $\mathbf{A}(x, z)$.

("Tutti i Greci sono uomini e tutti gli uomini sono mortali, quindi tutti i Greci sono mortali").

Argomenti validi

Un **argomento** può essere visto come una coppia (Σ, ϕ), dove Σ è un insieme di formule di logica sillogistica (rispetto a un certo vocabolario V) e ϕ è la *conclusione* dell'argomento. L'argomento (Σ, ϕ) è **valido** se per tutti i modelli $\mathfrak{M}$ **tali che** $\mathfrak{M} \models \Sigma$, abbiamo anche che $\mathfrak{M} \models \phi$. In questo caso, scriviamo anche $\Sigma \models \phi$.

Esempio di Argomento Valido

$$\mathbf{A}(x, y), \mathbf{A}(y, z) \models \mathbf{A}(x, z)$$

Infatti: se $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota) \models \mathbf{A}(x, y)$ e $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(y, z)$ allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ e $\iota(y) \subseteq \iota(z)$. Ma allora $\iota(x) \subseteq \iota(z)$ e quindi $\mathbf{A}(x, z)$.

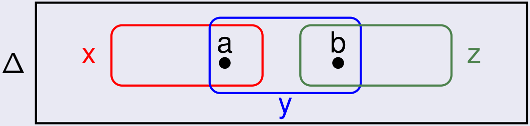
("Tutti i Greci sono uomini e tutti gli uomini sono mortali, quindi tutti i Greci sono mortali").

Un **argomento** può essere visto come una coppia (Σ, ϕ), dove Σ è un insieme di formule di logica sillogistica (rispetto a un certo vocabolario V) e ϕ è la *conclusione* dell'argomento. L'argomento (Σ, ϕ) è **valido** se per tutti i modelli $\mathfrak{M}$ **tali che** $\mathfrak{M} \models \Sigma$ (cioè, $\mathfrak{M} \models \psi$ per tutti gli $\psi \in \Sigma$), abbiamo anche che $\mathfrak{M} \models \phi$. In questo caso, scriviamo anche $\Sigma \models \phi$.

Esempio di Argomento non Valido

$$\mathbf{I}(x, y), \mathbf{I}(y, z) \not\models \mathbf{I}(x, z)$$

Controesempio:

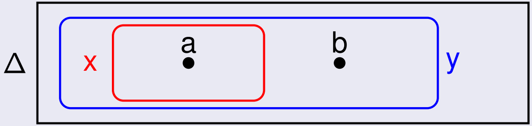


Soddisfacibilità

Una formula ϕ [un insieme di formule Σ] è *soddisfacibile* se esiste un qualche $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ [$\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti i $\phi \in \Sigma$]; altrimenti, ϕ [Σ] è *insoddisfacibile*.

Esempio

$\{\mathbf{A}(x, y), \mathbf{O}(y, x)\}$ è soddisfacibile, come mostrato dal modello



Invece, $\{\mathbf{A}(x, y), \mathbf{O}(x, y)\}$ non è soddisfacibile, come già visto.

Soddisfacibilità

Una formula ϕ [un insieme di formule Σ] è *soddisfacibile* se esiste un qualche $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ [$\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti i $\phi \in \Sigma$]; altrimenti, ϕ [Σ] è *insoddisfacibile*.

Teorema

$\Sigma \models \phi$ se e solo se $\Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$ è insoddisfacibile, dove $\overline{\phi}$ è la contraddizione di ϕ.

Dimostrazione:

- Se $\Sigma \models \phi$, ogni $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è tale che $\mathfrak{M} \models \phi$, e quindi tale che $\mathfrak{M} \not\models \overline{\phi}$; e quindi, $\mathfrak{M} \not\models \Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$.
- Se $\Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$ è insoddisfacibile e $\mathfrak{M} \models \Sigma$ allora dobbiamo avere che $\mathfrak{M} \not\models \overline{\phi}$. Ma allora $\mathfrak{M} \models \phi$. Quindi ogni volta che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche vero che $\mathfrak{M} \models \phi$: in altre parole, $\Sigma \models \phi$.

Soddisfacibilità e Tautologie

Tautologie

Una formula ϕ è una *tautologia* se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti i modelli $\mathfrak{M}$ il cui vocabolario è sufficiente per interpretare ϕ.

Osservazione

ϕ è una tautologia se e solo se $\emptyset \models \phi$ (posso concludere che ϕ senza dover assumere nessuna ipotesi).

Niente Tautologie in Logica Sillogistica

Non esiste nessuna formula ϕ della logica sillogistica tale che ϕ sia una tautologia. Infatti, ϕ dovrebbe essere nella forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$, o $\mathbf{O}(x, y)$, e per ognuna di queste espressioni è facile trovare un controesempio (esercizio!).

Nota: Alcune delle logiche più complesse che studieremo più avanti avranno molte tautologie.

Soddisfacibilità e Tautologie

Tautologie

Una formula ϕ è una *tautologia* se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti i modelli $\mathfrak{M}$ il cui vocabolario è sufficiente per interpretare ϕ.

Osservazione

ϕ è una tautologia se e solo se $\emptyset \models \phi$ (posso concludere che ϕ senza dover assumere nessuna ipotesi).

Niente Tautologie in Logica Sillogistica

Non esiste nessuna formula ϕ della logica sillogistica tale che ϕ sia una tautologia. Infatti, ϕ dovrebbe essere nella forma $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{I}(x, y)$, o $\mathbf{O}(x, y)$, e per ognuna di queste espressioni è facile trovare un controesempio (esercizio!).

Nota: Alcune delle logiche più complesse che studieremo più avanti avranno molte tautologie.

Aristotele e i logici che hanno seguito la sua tradizione si sono interessati particolarmente a argomenti della forma

- $Q_1(x, y), Q_2(y, z) \models Q_3(x, z)$;
- $Q_1(y, x), Q_2(y, z) \models Q_3(x, z)$:
- $Q_1(x, y), Q_2(z, y) \models Q_3(x, z)$;
- $Q_1(y, x), Q_2(z, y) \models Q_3(x, z)$

dove $Q_1, Q_2, Q_3 \in \{\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{I}, \mathbf{O}\}$.

In totale, ci sono **256** combinazioni ($4 \times 4 \times 4 \times 4$); ma solo **24** sono valide, e queste sono state elencate e classificate in base ai simboli logici che appaiono e allo posizione del "termine medio" (quello che appare in entrambe le premesse, y nel nostro caso).

Però Aristotele ha anche osservato che tutte le combinazioni valide, e anche argomenti di forma più generale, possono essere derivate in base a un *piccolo numero di semplici regole*.

Il sistema **D** elenca regole per estendere una lista di espressioni (preservando la soddisfazione in un modello):

Leggi di Conversione

Per tutti gli $x, y \in V$,

- C1: Se hai già **E**(x, y), puoi aggiungere **E**(y, x);
- C2: Se hai già **A**(x, y), puoi aggiungere **I**(x, y);
- C3: Se hai già **I**(x, y), puoi aggiungere **I**(y, x).

Il sistema **D**: Sillogismi Perfetti

Il sistema **D** elenca regole per estendere una lista di espressioni (preservando la soddisfazione in un modello):

Sillogismi Perfetti

Per tutti gli $x, y, z \in V$,

- PS1: Se hai già $\mathbf{A}(y, z)$ e $\mathbf{A}(x, y)$, puoi aggiungere $\mathbf{A}(x, z)$;
- PS2: Se hai già $\mathbf{E}(y, z)$ e $\mathbf{A}(x, y)$, puoi aggiungere $\mathbf{E}(x, z)$;
- PS3: Se hai già $\mathbf{A}(y, z)$ e $\mathbf{I}(x, y)$, puoi aggiungere $\mathbf{I}(x, z)$;
- PS4: Se hai già $\mathbf{E}(y, z)$ e $\mathbf{I}(x, y)$, puoi concludere $\mathbf{O}(x, z)$.

Un problema

Primo Sillogismo Perfetto

PS1: Se hai già $\mathbf{A}(y,z)$ e $\mathbf{A}(x,y)$, puoi aggiungere $\mathbf{A}(x,z)$.

- Applicando questa regola a $\mathbf{A}(y,x)$ (tutti gli y sono x) e $\mathbf{A}(x,y)$ (tutti gli x sono y) otterremmo $\mathbf{A}(x,x)$ (tutti gli x sono x).
- Ma abbiamo detto che le espressioni ben formate della logica sillogistica devono essere della forma $\mathbf{Q}(x,y)$ per $\mathbf{Q} \in \{\mathbf{A},\mathbf{E},\mathbf{I},\mathbf{O}\}$ e $x \neq y$!
- $\mathbf{A}(x,x)$ non è neanche parte del nostro linguaggio. . .
- Stesso problema anche con le altre regole sillogistiche.

Il sistema **D**: Sillogismi Perfetti

Il sistema **D** elenca regole per estendere una lista di espressioni (preservando la soddisfazione in un modello):

Sillogismi Perfetti

Per tutti gli $x, y, z \in V$ con $x \neq z$,

- PS1: Se hai già $\mathbf{A}(y, z)$ e $\mathbf{A}(x, y)$, puoi aggiungere $\mathbf{A}(x, z)$;
- PS2: Se hai già $\mathbf{E}(y, z)$ e $\mathbf{A}(x, y)$, puoi aggiungere $\mathbf{E}(x, z)$;
- PS3: Se hai già $\mathbf{A}(y, z)$ e $\mathbf{I}(x, y)$, puoi aggiungere $\mathbf{I}(x, z)$;
- PS4: Se hai già $\mathbf{E}(y, z)$ e $\mathbf{I}(x, y)$, puoi concludere $\mathbf{O}(x, z)$.

Una **dimostrazione diretta** per un argumento (Σ, ϕ) ("ϕ è una conseguenza di Σ) è una lista di espressioni che

- Inizia con le formule di Σ (in qualsiasi ordine);
- Ogni altra formula segue dalle precedenti attraverso una delle regole C1 ... C3, PS1 ... PS4;
- L'ultima formula è ϕ.

Dimostrazioni Dirette: Esempio

Supponi che nessun N sia M
E che tutti gli X siano M.
Allora nessun M è N.
E quindi nessun X è N.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{E}(n, m)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{A}(x, m)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{E}(m, n)$	C1, *da (1)*
(4)	$\mathbf{E}(x, n)$	PS2, *da (3) e (2)*.

Dimostrazione diretta di $\mathbf{E}(x, n)$ da $\mathbf{E}(n, m)$ e $\mathbf{A}(x, n)$.

		Formula	Spiegazione
Supponi che nessun N sia M	(1)	$\mathbf{E}(n, m)$	*ipotesi*
E che tutti gli X siano M.	(2)	$\mathbf{A}(x, m)$	*ipotesi*
Allora nessun M è N.	(3)	$\mathbf{E}(m, n)$	C1, *da (1)*
E quindi nessun X è N.	(4)	$\mathbf{E}(x, n)$	PS2, *da (3) e (2)*.

Dimostrazione diretta di $\mathbf{E}(x, n)$ da $\mathbf{E}(n, m)$ e $\mathbf{A}(x, n)$.

Dimostrazioni Dirette: Esempio 2

Supponi che tutti gli N siano M
E che nessun X sia M.
Allora nessun M è X.
E quindi nessun N è X.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(n, m)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, m)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{E}(m, x)$	C1, *da (2)*
(4)	$\mathbf{E}(n, x)$	PS2, *da (3) e (1)*.

Dimostrazione diretta di $\mathbf{E}(n, x)$ da $\mathbf{A}(n, m)$ e $\mathbf{E}(x, m)$.

Dimostrazioni Dirette: Esempio 2

Supponi che tutti gli N siano M
E che nessun X sia M.
Allora nessun M è X.
E quindi nessun N è X.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(n, m)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, m)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{E}(m, x)$	C1, *da (2)*
(4)	$\mathbf{E}(n, x)$	PS2, *da (3) e (1)*.

Dimostrazione diretta di $\mathbf{E}(n, x)$ da $\mathbf{A}(n, m)$ e $\mathbf{E}(x, m)$.

Dimostrazioni Dirette: esempio 3

Finora abbiamo visto dimostrazioni di conclusioni da due ipotesi; ma niente impedisce di considerare dimostrazioni con più di due ipotesi.

Per esempio, $\mathbf{E}(w, x)$ segue da $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{A}(y, z), \mathbf{E}(z, w)$:

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{A}(y, z)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{E}(z, w)$	*ipotesi*
(4)	$\mathbf{A}(x, z)$	PS1, *da (2) e (1)*
(5)	$\mathbf{E}(x, w)$	PS2, *da (3) e (4)*
(6)	$\mathbf{E}(w, x)$	C1, *da (5).*

Se $\phi \in \Sigma$, esiste sempre una dimostrazione diretta di ϕ da Σ: elenchiamo semplicemente Σ con ϕ per ultimo.

Per esempio, $\mathbf{A}(x, y)$ segue da $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{E}(y, z), \mathbf{O}(x, z)$;

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{E}(x, z)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{O}(x, z)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*

In questo caso, per sempicità possiamo anche elencare solo ϕ:

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*

Dimostrazioni Dirette: esempio 4

Se $\phi \in \Sigma$, esiste sempre una dimostrazione diretta di ϕ da Σ: elenchiamo semplicemente Σ con ϕ per ultimo.

Per esempio, $\mathbf{A}(x, y)$ segue da $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{E}(y, z), \mathbf{O}(x, z)$;

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{E}(x, z)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{O}(x, z)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*

In questo caso, per sempicità possiamo anche elencare solo ϕ:

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*

Le Dimostrazioni Dirette Non Bastano

Consideriamo il seguente sillogismo:

A(s, r)	Tutti gli S sono R	Tutti i mammiferi sono animali
O(s, p)	Qualche S non è P	Qualche mammifero non è alato
O(r, p)	Qualche S non è P	Qualche animale non è alato.

Questo è un sillogismo **corretto**. Infatti,

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(s, r)$, $\iota(s) \subseteq \iota(r)$;
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(s, p)$, c'è un $a \in \iota(s)$ tale che $a \notin \iota(p)$;
- Ma allora, $a \in \iota(r)$ e $a \notin \iota(p)$, e quindi $a \notin \iota(p)$;
- E quindi, $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(r, p)$.

Le Dimostrazioni Dirette Non Bastano

Consideriamo il seguente sillogismo:

A(s, r)	Tutti gli S sono R	Tutti i mammiferi sono animali
O(s, p)	Qualche S non è P	Qualche mammifero non è alato
O(r, p)	Qualche S non è P	Qualche animale non è alato.

Questo è un sillogismo **corretto**. Infatti,

- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(s, r)$, $\iota(s) \subseteq \iota(r)$;
- Se $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(s, p)$, c'è un $a \in \iota(s)$ tale che $a \notin \iota(p)$;
- Ma allora, $a \in \iota(r)$ e $a \notin \iota(p)$, e quindi $a \notin \iota(p)$;
- E quindi, $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(r, p)$.

Però, nel sistema **D**, non esiste un modo di concludere **O**(r, p) da **A**(s, r) e **O**(s, p):

	Formula	Spiegazione
(1)	**A**(s, r)	ipotesi
(2)	**O**(s, p)	ipotesi
(3)	**I**(s, r)	C2, *da (1)*
(4)	**I**(r, s)	C3, *da (3)*

…e non possiamo dimostrare nient'altro applicando le regole C1…C3, PS1 …PS4…

Però, nel sistema **D**, non esiste un modo di concludere $\mathbf{O}(r, p)$ da $\mathbf{A}(s, r)$ e $\mathbf{O}(s, p)$:

	Formula	Spiegazione
(1)	**A**(s, r)	ipotesi
(2)	**O**(s, p)	ipotesi
(3)	**I**(s, r)	C2, *da (1)*
(4)	**I**(r, s)	C3, *da (3)*

…e non possiamo dimostrare nient'altro applicando le regole C1…C3, PS1 …PS4…

Le Dimostrazioni Dirette Non Bastano

Però, nel sistema **D**, non esiste un modo di concludere **O**(r, p) da **A**(s, r) e **O**(s, p):

	Formula	Spiegazione
(1)	**A**(s, r)	ipotesi
(2)	**O**(s, p)	ipotesi
(3)	**I**(s, r)	C2, *da (1)*
(4)	**I**(r, s)	C3, *da (3)*

…e non possiamo dimostrare nient'altro applicando le regole C1…C3, PS1 …PS4…

Le Dimostrazioni Dirette Non Bastano

Però, nel sistema **D**, non esiste un modo di concludere $\mathbf{O}(r, p)$ da $\mathbf{A}(s, r)$ e $\mathbf{O}(s, p)$:

	Formula	Spiegazione
(1)	**A**(s, r)	ipotesi
(2)	**O**(s, p)	ipotesi
(3)	**I**(s, r)	C2, *da (1)*
(4)	**I**(r, s)	C3, *da (3)*

. . . e non possiamo dimostrare nient'altro applicando le regole C1. . . C3, PS1 . . . PS4. . .

Il Sistema **D**: Dimostrazioni Indirette

Le dimostrazioni dirette non bastano per derivare tutti i 24 sillogismi dal sistema **D**. Aristotele ha quindi considerato anche *dimostrazioni per contraddizione* (dimostrazioni indirette).

Contraddittori

Per ogni formula ϕ, scriviamo $\overline{\phi}$ per il suo contraddittorio:

- $\overline{\mathbf{A}(x,y)} = \mathbf{O}(x,y)$;
- $\overline{\mathbf{E}(x,y)} = \mathbf{I}(x,y)$;
- $\overline{\mathbf{I}(x,y)} = \mathbf{E}(x,y)$;
- $\overline{\mathbf{O}(x,y)} = \mathbf{A}(x,y)$.

Chiaramente, $\overline{\overline{\phi}} = \phi$.
Come abbiamo già visto, per ogni $\mathfrak{M}$ (con vocabolario V contenente i termini non logici di ϕ),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M} \not\models \overline{\phi}.$$

Il Sistema D: Dimostrazioni Indirette

Le dimostrazioni dirette non bastano per derivare tutti i 24 sillogismi dal sistema **D**. Aristotele ha quindi considerato anche *dimostrazioni per contraddizione* (dimostrazioni indirette).

Contraddittori

Per ogni formula ϕ, scriviamo $\overline{\phi}$ per il suo contraddittorio:

- $\overline{\mathbf{A}(x,y)} = \mathbf{O}(x,y)$;
- $\overline{\mathbf{E}(x,y)} = \mathbf{I}(x,y)$;
- $\overline{\mathbf{I}(x,y)} = \mathbf{E}(x,y)$;
- $\overline{\mathbf{O}(x,y)} = \mathbf{A}(x,y)$.

Chiaramente, $\overline{\overline{\phi}} = \phi$.
Come abbiamo già visto, per ogni $\mathfrak{M}$ (con vocabolario V contenente i termini non logici di ϕ),

$$\mathfrak{M} \models \phi \text{ se e solo se } \mathfrak{M} \not\models \overline{\phi}.$$

Una **dimostrazione indiretta** per un argomento (Σ, ϕ) ("ϕ è una conseguenza di Σ) è una lista di espressioni che

- Inizia con le formule di Σ e con $\overline{\phi}$ (in qualsiasi ordine);
- Ogni altra formula segue dalle precedenti attraverso una delle regole C1 ... C3, PS1 ... PS4;
- Contiene sia una formula ψ che il suo contradditorio $\overline{\psi}$.

Intuizione: per dimostrare ϕ, supponiamo che invece sia $\overline{\phi}$ e cerchiamo dimostrare qualcosa di impossibile.

Il sistema **D**: Dimostrazioni Indirette

Una **dimostrazione indiretta** per un argomento (Σ, ϕ) ("ϕ è una conseguenza di Σ) è una lista di espressioni che

- Inizia con le formule di Σ e con $\overline{\phi}$ (in qualsiasi ordine);
- Ogni altra formula segue dalle precedenti attraverso una delle regole C1 . . . C3, PS1 . . . PS4;
- Contiene sia una formula ψ che il suo contraddittorio $\overline{\psi}$.

Intuizione: per dimostrare ϕ, supponiamo che invece sia $\overline{\phi}$ e cerchiamo dimostrare qualcosa di impossibile.

Dimostrazione Indiretta: Esempio

Supponi che tutti gli S siano R
E che qualche S non sia P.
Se tutti gli R fossero P,
Allora tutti gli S sarebbero P;
Ma questo è impossibile,
Quindi qualche R non è P.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(s, r)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{O}(s, p)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{A}(r, p)$	$\overline{\mathbf{O}(r, p)}$
(4)	$\mathbf{A}(s, p)$	PS1, *da (3) e (1)*
(5)	$\mathbf{O}(r, p)$	$(4) = \overline{(2)}$

Dimostrazione indiretta di $\mathbf{O}(r, p)$ da $\mathbf{A}(s, r)$ e $\mathbf{O}(s, p)$.

Ex Falso Sequitur Quodlibet

- L'idea della dimostrazione indiretta è questa: invece di suppore che Σ e cercare di dimostrare che ϕ, supponi che Σ sia vero e ϕ sia **falso** (vale a dire, $\overline{\phi}$ sia vero).
- Se otteniamo qualcosa di impossibile, cioè sia ψ che $\overline{\psi}$ per un qualche ψ, allora deve esserci un errore nelle nostre ipotesi: ϕ non può essere falso, quindi deve essere vero!
- Ma cosa succede se Σ è **già** impossibile, anche senza $\overline{\psi}$?

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	$(4) = \overline{(2)}$

Ex Falso Sequitur Quodlibet

- L'idea della dimostrazione indiretta è questa: invece di suppore che Σ e cercare di dimostrare che ϕ, supponi che Σ sia vero e ϕ sia **falso** (vale a dire, $\overline{\phi}$ sia vero).
- Se otteniamo qualcosa di impossibile, cioè sia ψ che $\overline{\psi}$ per un qualche ψ, allora deve esserci un errore nelle nostre ipotesi: ϕ non può essere falso, quindi deve essere vero!
- Ma cosa succede se Σ è **già** impossibile, anche senza $\overline{\psi}$?

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	**A**(x, y)	*ipotesi*
(2)	**E**(x, y)	*ipotesi*
(3)	**I**(z, w)	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	**I**(x, y)	C2, *da (1)*
(5)	**E**(z, w)	$(4) = \overline{(2)}$

- L'idea della dimostrazione indiretta è questa: invece di suppore che Σ e cercare di dimostrare che ϕ, supponi che Σ sia vero e ϕ sia **falso** (vale a dire, $\overline{\phi}$ sia vero).
- Se otteniamo qualcosa di impossibile, cioè sia ψ che $\overline{\psi}$ per un qualche ψ, allora deve esserci un errore nelle nostre ipotesi: ϕ non può essere falso, quindi deve essere vero!
- Ma cosa succede se Σ è **già** impossibile, anche senza $\overline{\psi}$?

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	$(4) = \overline{(2)}$

- L'idea della dimostrazione indiretta è questa: invece di suppore che Σ e cercare di dimostrare che ϕ, supponi che Σ sia vero e ϕ sia **falso** (vale a dire, $\overline{\phi}$ sia vero).
- Se otteniamo qualcosa di impossibile, cioè sia ψ che $\overline{\psi}$ per un qualche ψ, allora deve esserci un errore nelle nostre ipotesi: ϕ non può essere falso, quindi deve essere vero!
- Ma cosa succede se Σ è **già** impossibile, anche senza $\overline{\psi}$?

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	(4) = $\overline{(2)}$

Ex Falso Sequitur Quodlibet

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	$(4) = \overline{(2)}$

- Formalmente, questa è una dimostrazione corretta.
- Ma sembra strana: abbiamo dimostrato $\mathbf{E}(z, w)$ (nessun z è w) da $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$, *che non parlano di z o di w*!
- Però è un argomento valido, data la nostra definizione di un argomento valido:

  $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{E}(x, y) \models \mathbf{E}(z, w)$ se e solo se, per tutti i modelli $\mathfrak{M}$, *se* $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ *e* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ *allora* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(z, w)$.
- **Non esiste nessun** $\mathfrak{M}$ che soddisfa sia $\mathbf{A}(x, y)$ che $\mathbf{E}(x, y)$; e quindi, trivialmente, tutti questi modelli (non ne esiste nessuno) soddisfano anche $\mathbf{E}(z, w)$.

Ex Falso Sequitur Quodlibet

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	(4) = $\overline{(2)}$

- Formalmente, questa è una dimostrazione corretta.
- Ma sembra strana: abbiamo dimostrato $\mathbf{E}(z, w)$ (nessun z è w) da $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$, *che non parlano di z o di w*!
- Però è un argomento valido, data la nostra definizione di un argomento valido:

  $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{E}(x, y) \models \mathbf{E}(z, w)$ se e solo se, per tutti i modelli $\mathfrak{M}$, *se* $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ *e* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ *allora* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(z, w)$.
- **Non esiste nessun** $\mathfrak{M}$ che soddisfa sia $\mathbf{A}(x, y)$ che $\mathbf{E}(x, y)$; e quindi, trivialmente, tutti questi modelli (non ne esiste nessuno) soddisfano anche $\mathbf{E}(z, w)$.

Ex Falso Sequitur Quodlibet

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	$(4) = \overline{(2)}$

- Formalmente, questa è una dimostrazione corretta.
- Ma sembra strana: abbiamo dimostrato $\mathbf{E}(z, w)$ (nessun z è w) da $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$, *che non parlano di z o di w*!
- Però è un argomento valido, data la nostra definizione di un argomento valido:

  $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{E}(x, y) \models \mathbf{E}(z, w)$ se e solo se, per tutti i modelli $\mathfrak{M}$, *se* $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ *e* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ *allora* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(z, w)$.
- **Non esiste nessun** $\mathfrak{M}$ che soddisfa sia $\mathbf{A}(x, y)$ che $\mathbf{E}(x, y)$; e quindi, trivialmente, tutti questi modelli (non ne esiste nessuno) soddisfano anche $\mathbf{E}(z, w)$.

Ex Falso Sequitur Quodlibet

Supponi che tutti gli X siano Y
E che nessun X non sia Y.
Se qualche Z fosse W
Allora qualche X sarebbe Y;
Ma questo è impossibile,
Quindi nessun Z è W.

	Formula	Spiegazione
(1)	$\mathbf{A}(x, y)$	*ipotesi*
(2)	$\mathbf{E}(x, y)$	*ipotesi*
(3)	$\mathbf{I}(z, w)$	$\overline{\mathbf{E}(z, w)}$
(4)	$\mathbf{I}(x, y)$	C2, *da (1)*
(5)	$\mathbf{E}(z, w)$	$(4) = \overline{(2)}$

- Formalmente, questa è una dimostrazione corretta.
- Ma sembra strana: abbiamo dimostrato $\mathbf{E}(z, w)$ (nessun z è w) da $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$, *che non parlano di z o di w*!
- Però è un argomento valido, data la nostra definizione di un argomento valido:

  $\mathbf{A}(x, y), \mathbf{E}(x, y) \models \mathbf{E}(z, w)$ se e solo se, per tutti i modelli $\mathfrak{M}$, *se* $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$ *e* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$ *allora* $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(z, w)$.
- **Non esiste nessun** $\mathfrak{M}$ che soddisfa sia $\mathbf{A}(x, y)$ che $\mathbf{E}(x, y)$; e quindi, trivialmente, tutti questi modelli (non ne esiste nessuno) soddisfano anche $\mathbf{E}(z, w)$.

Principio di Esplosione

Se qualcosa di impossibile è vero, allora tutto è vero

- Osservato da *William di Soissons* nel dodicesimo secolo (secondo il *Metalogicon* di John di Salisbury).
- Funziona non solo per la logica sillogistica, ma per gran parte delle logiche (e per tutte quelle che vedremo in questo corso).
- Esistono però alcune logiche (dette *paraconsistenti*) in cui questo principio non funziona: possono accettare contraddizioni senza "rompersi".
- Applicazioni in Knowledge Representation: data un'enorme quantità di fatti inseriti in una base di conoscenza da persone diverse, è inevitabile che salitno fuori contraddizioni. Sarebbe meglio isolarle e (se possibile) risolverle, piuttosto che "arrendersi" e dire "vabbè, allora tutto sarà vero **e** falso".

Principio di Esplosione

Se qualcosa di impossibile è vero, allora tutto è vero

- Osservato da *William di Soissons* nel dodicesimo secolo (secondo il *Metalogicon* di John di Salisbury).
- Funziona non solo per la logica sillogistica, ma per gran parte delle logiche (e per tutte quelle che vedremo in questo corso).
- Esistono però alcune logiche (dette *paraconsistenti*) in cui questo principio non funziona: possono accettare contraddizioni senza "rompersi".
- Applicazioni in Knowledge Representation: data un'enorme quantità di fatti inseriti in una base di conoscenza da persone diverse, è inevitabile che salitno fuori contraddizioni. Sarebbe meglio isolarle e (se possibile) risolverle, piuttosto che "arrendersi" e dire "vabbè, allora tutto sarà vero **e** falso".

Principio di Esplosione

Se qualcosa di impossibile è vero, allora tutto è vero

- Osservato da *William di Soissons* nel dodicesimo secolo (secondo il *Metalogicon* di John di Salisbury).
- Funziona non solo per la logica sillogistica, ma per gran parte delle logiche (e per tutte quelle che vedremo in questo corso).
- Esistono però alcune logiche (dette *paraconsistenti*) in cui questo principio non funziona: possono accettare contraddizioni senza "rompersi".
- Applicazioni in Knowledge Representation: data un'enorme quantità di fatti inseriti in una base di conoscenza da persone diverse, è inevitabile che salitno fuori contraddizioni. Sarebbe meglio isolarle e (se possibile) risolverle, piuttosto che "arrendersi" e dire "vabbè, allora tutto sarà vero **e** falso".

Ex Falso Sequitur Quodlibet

Principio di Esplosione

Se qualcosa di impossibile è vero, allora tutto è vero

- Osservato da *William di Soissons* nel dodicesimo secolo (secondo il *Metalogicon* di John di Salisbury).
- Funziona non solo per la logica sillogistica, ma per gran parte delle logiche (e per tutte quelle che vedremo in questo corso).
- Esistono però alcune logiche (dette *paraconsistenti*) in cui questo principio non funziona: possono accettare contraddizioni senza "rompersi".
- Applicazioni in Knowledge Representation: data un'enorme quantità di fatti inseriti in una base di conoscenza da persone diverse, è inevitabile che salitno fuori contraddizioni. Sarebbe meglio isolarle e (se possibile) risolverle, piuttosto che "arrendersi" e dire "vabbè, allora tutto sarà vero **e** falso".

Principio di Esplosione

Se qualcosa di impossibile è vero, allora tutto è vero

- Osservato da *William di Soissons* nel dodicesimo secolo (secondo il *Metalogicon* di John di Salisbury).
- Funziona non solo per la logica sillogistica, ma per gran parte delle logiche (e per tutte quelle che vedremo in questo corso).
- Esistono però alcune logiche (dette *paraconsistenti*) in cui questo principio non funziona: possono accettare contraddizioni senza "rompersi".
- Applicazioni in Knowledge Representation: data un'enorme quantità di fatti inseriti in una base di conoscenza da persone diverse, è inevitabile che salitno fuori contraddizioni. Sarebbe meglio isolarle e (se possibile) risolverle, piuttosto che "arrendersi" e dire "vabbè, allora tutto sarà vero **e** falso".

Dimostrazioni dirette e indirette

Osservazione

Se c'è una dimostrazione diretta di ϕ da Σ, esiste anche una dimostrazione indiretta di ϕ da Σ, con soli due passi in più.

	Formula	Spiegazione
$\ldots$	Σ	*ipotesi*
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	ϕ	$\ldots$

	Formula	Spiegazione
$\ldots$	Σ	*ipotesi*
j	$\overline{\phi}$	$\overline{\phi}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(n+1)$	ϕ	$\ldots$
$(n+2)$	ϕ	$(k+1) = \overline{(j)}$

Il contrario non vale

Come abbiamo visto, esistono dimostrazioni indirette che non possono essere dimostrate in maniera diretta.

Osservazione

Se c'è una dimostrazione diretta di ϕ da Σ, esiste anche una dimostrazione indiretta di ϕ da Σ, con soli due passi in più.

	Formula	Spiegazione
$\ldots$	Σ	*ipotesi*
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	ϕ	$\ldots$

	Formula	Spiegazione
$\ldots$	Σ	*ipotesi*
j	$\overline{\phi}$	$\overline{\phi}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(n+1)$	ϕ	$\ldots$
$(n+2)$	ϕ	$(k+1) = \overline{(j)}$

Il contrario non vale

Come abbiamo visto, esistono dimostrazioni indirette che non possono essere dimostrate in maniera diretta.

Dimostrazioni dirette e indirette

Osservazione

Se c'è una dimostrazione diretta di ϕ da Σ, esiste anche una dimostrazione indiretta di ϕ da Σ, con soli due passi in più.

	Formula	Spiegazione
...	Σ	*ipotesi*
...	...	...
n	ϕ	...

	Formula	Spiegazione
...	Σ	*ipotesi*
j	$\overline{\phi}$	$\overline{\phi}$
...	...	...
$(n+1)$	ϕ	...
$(n+2)$	ϕ	$(k+1) = \overline{(j)}$

Il contrario non vale

Come abbiamo visto, esistono dimostrazioni indirette che non possono essere dimostrate in maniera diretta.

Il sistema D: Deduzioni

$\Sigma \vdash \phi$

Dato un argomento (Σ, ϕ), diciamo che ϕ è **dimostrabile** da Σ (rispetto al sistema **D**) se esiste una dimostrazione, diretta o indiretta, di ϕ da Σ. In questo caso, scriviamo $\Sigma \vdash \phi$.

- Abbiamo costruito delle regole del tutto meccaniche per decidere se ϕ è deducibile da Σ oppure no: per esempio, potremmo scrivere un programma che lo verifica automaticamente (applica tutte le regole finchè non hai raggiunto la conclusione che vuoi o non puoi più ottenere niente di nuovo).
- **D** è un *sistema deduttivo* ("proof system") per la logica sillogistica.

Tre problemi per il sistema **D**

Dato un qualsiasi sistema deduttivo ("proof system"), ci sono tre proprietà importanti che tipicamente si cercano di garantire:

1. **Effectiveness:** Esiste un modo pratico per stabilire se $\Sigma \vdash \phi$.
   Esistono gradazioni di effectiveness: un sistema deduttivo può essere decidibile, semidecidibile, completamente indecidibile, decidibile ma computazionalmente molto costoso ...
2. **Soundness:** Se $\Sigma \vdash \phi$ allora $\Sigma \models \phi$.
   Se un sistema deduttivo manca di soundness, può essere usato per raggiungere conclusioni che non seguono dalle premesse (rispetto alle regole semantiche della logica in esame). Questo lo rende generalmente del tutto inutile.
3. **Completeness:** Se $\Sigma \models \phi$ allora $\Sigma \vdash \phi$.
   Se un sistema deduttivo manca di completeness, esistono argomenti validi (rispetto alla logica in esame) che non sono dimostrabili attraverso il sistema deduttivo.

Tre problemi per il sistema **D**

Dato un qualsiasi sistema deduttivo ("proof system"), ci sono tre proprietà importanti che tipicamente si cercano di garantire:

1. **Effectiveness:** Esiste un modo pratico per stabilire se $\Sigma \vdash \phi$.
   Esistono gradazioni di effectiveness: un sistema deduttivo può essere decidibile, semidecidibile, completamente indecidibile, decidibile ma computazionalmente molto costoso ...
2. **Soundness:** Se $\Sigma \vdash \phi$ allora $\Sigma \models \phi$.
   Se un sistema deduttivo manca di soundness, può essere usato per raggiungere conclusioni che non seguono dalle premesse (rispetto alle regole semantiche della logica in esame). Questo lo rende generalmente del tutto inutile.
3. **Completeness:** Se $\Sigma \models \phi$ allora $\Sigma \vdash \phi$.
   Se un sistema deduttivo manca di completeness, esistono argomenti validi (rispetto alla logica in esame) che non sono dimostrabili attraverso il sistema deduttivo.

Dato un qualsiasi sistema deduttivo ("proof system"), ci sono tre proprietà importanti che tipicamente si cercano di garantire:

1. **Effectiveness:** Esiste un modo pratico per stabilire se $\Sigma \vdash \phi$.
   Esistono gradazioni di effectiveness: un sistema deduttivo può essere decidibile, semidecidibile, completamente indecidibile, decidibile ma computazionalmente molto costoso . . .
2. **Soundness:** Se $\Sigma \vdash \phi$ allora $\Sigma \models \phi$.
   Se un sistema deduttivo manca di soundness, può essere usato per raggiungere conclusioni che non seguono dalle premesse (rispetto alle regole semantiche della logica in esame). Questo lo rende generalmente del tutto inutile.
3. **Completeness:** Se $\Sigma \models \phi$ allora $\Sigma \vdash \phi$.
   Se un sistema deduttivo manca di completeness, esistono argomenti validi (rispetto alla logica in esame) che non sono dimostrabili attraverso il sistema deduttivo.

- In una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ possono apparire solo simboli non logici che appaiono in Σ o in ϕ;
- In un insieme Σ di k ipotesi e in una possibile conclusione ϕ appaiono al massimo $2(k+1)$ simboli non logici diversi (per ognuna delle $k+1$ formule appaiono al massimo due simboli non logici);
- Dato un vocabolario V con n simboli non logici x, y, ..., esistono solo $4n(n-1)$ formule di logica sillogistica;
- Quindi, una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ conterrà al massimo

$$4 \cdot 2(k+1) \cdot (2(k+1)-1) = O(k^2)$$

passi, dove $k = |\Sigma|$.

Il sistema **D**: effectiveness

- In una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ possono apparire solo simboli non logici che appaiono in Σ o in ϕ;
- In un insieme Σ di k ipotesi e in una possibile conclusione ϕ appaiono al massimo $2(k+1)$ simboli non logici diversi (per ognuna delle $k+1$ formule appaiono al massimo due simboli non logici);
- Dato un vocabolario V con n simboli non logici $x, y, \ldots,$ esistono solo $4n(n-1)$ formule di logica sillogistica;
- Quindi, una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ conterrà al massimo

$$4 \cdot 2(k+1) \cdot (2(k+1)-1) = O(k^2)$$

passi, dove $k = |\Sigma|$.

Il sistema **D**: effectiveness

- In una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ possono apparire solo simboli non logici che appaiono in Σ o in ϕ;
- In un insieme Σ di k ipotesi e in una possibile conclusione ϕ appaiono al massimo $2(k+1)$ simboli non logici diversi (per ognuna delle $k+1$ formule appaiono al massimo due simboli non logici);
- Dato un vocabolario V con n simboli non logici $x, y, \ldots,$ esistono solo $4n(n-1)$ formule di logica sillogistica;
- Quindi, una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ conterrà al massimo

$$4 \cdot 2(k+1) \cdot (2(k+1)-1) = O(k^2)$$

passi, dove $k = |\Sigma|$.

Il sistema **D**: effectiveness

- In una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ possono apparire solo simboli non logici che appaiono in Σ o in ϕ;
- In un insieme Σ di k ipotesi e in una possibile conclusione ϕ appaiono al massimo $2(k+1)$ simboli non logici diversi (per ognuna delle $k+1$ formule appaiono al massimo due simboli non logici);
- Dato un vocabolario V con n simboli non logici $x, y, \ldots,$ esistono solo $4n(n-1)$ formule di logica sillogistica;
- Quindi, una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ conterrà al massimo

$$4 \cdot 2(k+1) \cdot (2(k+1)-1) = O(k^2)$$

passi, dove $k = |\Sigma|$.

Teorema

Una dimostrazione (diretta o indiretta) di ϕ da Σ conterrà al massimo

$$4 \cdot 2(k+1) \cdot (2(k+1)-1) = O(k^2)$$

passi, dove $k = |\Sigma|$.

- Quindi, se cerchiamo di dimostrare una formula ϕ dato Σ, possiamo trovare la dimostrazione (o concludere che non esiste) dopo un numero di passi che cresce al più **quadraticamente** con la dimensione di Σ.
- Il problema di trovare una dimostrazione nel sistema **D** è in **PTIME**: tempo polinomiale, anzi quadratico!
- Quindi, il sistema **D** è *altamente effettivo*. Studieremo in futuro logiche che non ammettono sistemi di deduzione tanto effettivi (probabilmente).

Il sistema **D** è sound: se $\Sigma \vdash \phi$, è anche vero che $\Sigma \vdash \phi$ (vale a dire, se $\mathfrak{M} \models \Sigma$ allora $\mathfrak{M} \models \phi$).

Dimostrare soundness solitamente non è difficile ma può essere laborioso (bisogna verificare che tutte le regole del sistema deduttivo siano corrette rispetto alla semantica). Abbiamo già fatto buona parte del lavoro necessario, bisogna ricapitolare.

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

C1: Se $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{E}(y, x)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \Sigma$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora in particolare $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, y)$, e quindi $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$. Ma allora $\iota(y) \cap \iota(x) = \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(y, x)$.

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

C2: Se $\mathbf{A}(x, y)$ è in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{I}(x, y)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ora, prendi un qualsiasi $a \in \iota(x)$ (che esiste perchè $\iota(x) \neq \emptyset$). Chiaramente $a \in \iota(y)$, e quindi $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$.

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

C3: Se $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{I}(y, x)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$. Ma allora $\iota(y) \cap \iota(x) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(y, x)$.

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

PS1: Se $\mathbf{A}(y, z)$ e $\mathbf{A}(x, y)$ sono in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{A}(x, z)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(y, z)$ e $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora $\iota(y) \subseteq \iota(z)$ e $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ma allora $\iota(x) \subseteq \iota(y) \subseteq \iota(z)$, e quindi $\iota(x) \subseteq \iota(z)$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, z)$.

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

PS2: Se $\mathbf{E}(y, z)$ e $\mathbf{A}(x, y)$ sono in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{E}(x, z)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(y, z)$ e $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(x, y)$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora $\iota(y) \cap \iota(z) = \emptyset$ e $\iota(x) \subseteq \iota(y)$. Ma allora $\iota(x) \cap \iota(z) \subseteq \iota(y) \cap \iota(z) = \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(x, z)$.

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

PS3: Se $\mathbf{A}(y, z)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ sono in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{I}(x, z)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{A}(y, z)$ e $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora $\iota(y) \subseteq \iota(z)$ e $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$. Ma allora $\iota(x) \cap \iota(z) \supseteq \iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, z)$.

Il sistema **D**: soundness

Prima di tutto, dimostriamo che tutte le regole di **D** soddisfano la seguente condizione: se Σ è una lista di formule e possiamo aggiungere ϕ a Σ secondo il sistema **D**, allora ogni modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ è anche tale che $\mathfrak{M} \models \phi$ ($\Sigma \models \phi$).

PS4: Se $\mathbf{E}(y, z)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ sono in Σ, puoi aggiungere $\mathbf{I}(x, z)$.

Supponi che $\mathfrak{M} \models \mathbf{E}(y, z)$ e $\mathfrak{M} \models \mathbf{I}(x, y)$, dove $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$. Allora $\iota(y) \cap \iota(z) = \emptyset$ e $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$. Ora, prendi un qualsiasi $a \in \iota(x) \cap \iota(y)$. Chiaramente $a \in \iota(x)$; inoltre, visto che $a \in \iota(y)$ e $\iota(y) \cap \iota(z) = \emptyset$, $a \notin \iota(z)$. Quindi esiste un qualche elemento in $\iota(x)$ ma non in $\iota(z)$, e quindi $\mathfrak{M} \models \mathbf{O}(x, y)$.

Il sistema **D**: soundness

A questo punto, possiamo dimostrare facilmente la soundness per argomenti diretti.

Supponi che $\Sigma \vdash \phi$ e che ci sia una dimostrazione per argomento diretto che parte da Σ e arriva a ϕ.
Allora partendo da $\Sigma = \Sigma_0$ otteniamo $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\psi_1\}$, $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\psi_1, \psi_2\}, \ldots, \Sigma_n = \Sigma \cup \{\psi_1 \ldots \psi_n\}$, dove $\psi_n = \phi$ e dove ogni ψ_i è derivabile da Σ_{i-1} attraverso una regola di (C1 ... C3, PS1 ... PS4).
Ma allora, come abbiamo visto, se $\mathfrak{M} \models \Sigma$ allora $\mathfrak{M} \models \Sigma_1$ allora $\mathfrak{M} \models \Sigma_2$ ... allora $\mathfrak{M} \models \Sigma_n$, e quindi in particolare (visto che $\phi \in \Sigma_n$) $\mathfrak{M} \models \phi$.
Quindi $\mathfrak{M} \models \phi$, come volevamo.

Il sistema **D**: soundness

Per dimostrare che la soundness vale anche per argomenti indiretti ci appoggiamo a questo risultato (già dimostrato):

Teorema

$\Sigma \models \phi$ se e solo se $\Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$ è insoddisfacibile.

Se dimostriamo che $\Sigma \vdash \phi$ usando un argomento indiretto, partiamo da $\Sigma_0 = \Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$ e applichiamo le regole C1 ... C3, PS1 ... PS4 fino a raggiungere un Σ_n tale che $\psi, \overline{\psi} \in \Sigma_n$ per un qualche ψ.
Ragioniamo come nel caso diretto, vediamo che se $\mathfrak{M} \models \Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$ allora $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \overline{\psi}$. Ma non è possibile che un modello soddisfi una formula e la sua contraddizione: quindi, non esistono modelli $\mathfrak{M}$ che soddisfano $\mathfrak{M} \models \Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$.
Quindi $\Sigma \cup \{\overline{\phi}\}$ è insoddisfacibile, e quindi (per il teorema citato sopra) $\Sigma \models \phi$.

Il sistema **D**: soundness

Soundness: conclusione

Questo conclude la dimostrazione della soundness di D: se $\Sigma \vdash \phi$, non importa se attraverso un argomento diretto o indiretto, allora $\Sigma \models \phi$: ogni volta che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ (rispetto alla nostra semantica), abbiamo anche che $\mathfrak{M} \models \phi$.

- Per verificare (strong) completeness, dobbiamo dimostrare: se $\Sigma \models \phi$, allora $\Sigma \vdash \phi$: se ϕ segue da Σ semanticamente (in ogni modello in cui Σ è vero, ϕ è anche vero), allora esiste un modo in **D** di dimostrare ϕ da Σ.
- Aristotele afferma che il suo sistema è completo (*Analitici Primi, Libro I, Capitolo 1*):

  > *Che ogni ragionamento, indistintamente, possa essere trattato in questo modo sarà tra poco chiaro, quando mostreremo che ogni deduzione può essere formata attraverso una o l'altra di queste figure [regole].*

- Però non definisce il concetto o il suo sistema in maniera abbastanza precisa per dare una vera dimostrazione.

Il sistema **D**: completeness

- Comunque, **Aristotele aveva ragione**: il suo sistema (almeno interpretato come abbiamo visto qui) **è** completo (Corcoran, John. "Completeness of an ancient logic." The journal of symbolic logic 37.4 (1972): 696-702.)
- La dimostrazione non è difficilissima; ma ha alcuni passaggi un po' delicati e macchinosi, e quindi non la vedremo in maniera completa.
- Se siete curiosi, potete dare un'occhiata all'articolo di Corcoran (caricato online), oppure scrivetemi e possiamo esaminare la dimostrazione completa.
- Qui, vedremo solo l'idea generale della dimostrazione (che è simile al modo in cui tipicamente la completeness viene dimostrata per molte logiche e sistemi deduttivi)

Il sistema **D**: completeness

- Dobbiamo dimostrare: Se $\Sigma \models \phi$, allora $\Sigma \vdash \phi$.
- Supponiamo invece che non sia vero che $\Sigma \vdash \phi$: non esiste un modo di concludere ϕ da Σ nel sistema **D**.
- Se riusciamo a dimostrare che $\Sigma \not\models \phi$, allora abbiamo finito (*dimostrazione per contrapposizione:* per dimostrare "Se A allora B", dimostriamo invece "Se non B allora non A").
- Cosa vuole dire che $\Sigma \not\models \phi$? Vuole dire che **non è vero che** ogni $\mathfrak{M}$ che soddisfa Σ soddisfa anche ϕ.
- In altre parole, supponendo che $\Sigma \nvdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.

- Supponendo che $\Sigma \nvdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.
- Visto che $\Sigma \nvdash \phi$, chiaramente $\phi \notin \Sigma$ (altrimenti, potremmo avremmo una dimostrazione diretta di ϕ da Σ che lo elenca semplicemente come ultimo).
- Se $\Sigma \nvdash \phi$, allora possiamo estendere Σ a un insieme *massimamente consistente* Σ' tale che
  - Per tutti gli ψ, $\Sigma' \vdash \psi$ se e solo se $\psi \in \Sigma'$;
  - Per tutti gli $x, y \in V$ con $x \neq y$,
    1. Esattamente uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
    2. Esattamente uno tra $\mathbf{E}(x, y)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ';
    3. Non più d'uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ';
    4. Almeno uno tra $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
  - $\phi \notin \Sigma'$.

Il sistema **D**: completeness

- Supponendo che $\Sigma \nvdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.

- Visto che $\Sigma \nvdash \phi$, chiaramente $\phi \notin \Sigma$ (altrimenti, potremmo avremmo una dimostrazione diretta di ϕ da Σ che lo elenca semplicemente come ultimo).

- Se $\Sigma \nvdash \phi$, allora possiamo estendere Σ a un insieme *massimamente consistente* Σ' tale che
  - Per tutti gli ψ, $\Sigma' \vdash \psi$ se e solo se $\psi \in \Sigma'$;
  - Per tutti gli $x, y \in V$ con $x \neq y$,
    1. Esattamente uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
    2. Esattamente uno tra $\mathbf{E}(x, y)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ';
    3. Non più d'uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ';
    4. Almeno uno tra $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
  - $\phi \notin \Sigma'$.

Il sistema $\mathbf{D}$: completeness

- Supponendo che $\Sigma \nvdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.

- Visto che $\Sigma \nvdash \phi$, chiaramente $\phi \notin \Sigma$ (altrimenti, potremmo avremmo una dimostrazione diretta di ϕ da Σ che lo elenca semplicemente come ultimo).

- Se $\Sigma \nvdash \phi$, allora possiamo estendere Σ a un insieme *massimamente consistente* Σ' tale che
  - Per tutti gli ψ, $\Sigma' \vdash \psi$ se e solo se $\psi \in \Sigma'$;
  - Per tutti gli $x, y \in V$ con $x \neq y$,
    1. Esattamente uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
    2. Esattamente uno tra $\mathbf{E}(x, y)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ';
    3. Non più d'uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ';
    4. Almeno uno tra $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
  - $\phi \notin \Sigma'$.

Il sistema **D**: completeness

- Supponendo che $\Sigma \nvdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.

- Visto che $\Sigma \nvdash \phi$, chiaramente $\phi \notin \Sigma$ (altrimenti, potremmo avremmo una dimostrazione diretta di ϕ da Σ che lo elenca semplicemente come ultimo).

- Se $\Sigma \nvdash \phi$, allora possiamo estendere Σ a un insieme *massimamente consistente* Σ' tale che
  - Per tutti gli ψ, $\Sigma' \vdash \psi$ se e solo se $\psi \in \Sigma'$;
  - Per tutti gli $x, y \in V$ con $x \neq y$,
    1. Esattamente uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
    2. Esattamente uno tra $\mathbf{E}(x, y)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ';
    3. Non più d'uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ';
    4. Almeno uno tra $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
  - $\phi \notin \Sigma'$.

- Supponendo che $\Sigma \nvdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.

- Visto che $\Sigma \nvdash \phi$, chiaramente $\phi \notin \Sigma$ (altrimenti, potremmo avremmo una dimostrazione diretta di ϕ da Σ che lo elenca semplicemente come ultimo).

- Se $\Sigma \nvdash \phi$, allora possiamo estendere Σ a un insieme *massimamente consistente* Σ' tale che
  - Per tutti gli ψ, $\Sigma' \vdash \psi$ se e solo se $\psi \in \Sigma'$;
  - Per tutti gli $x, y \in V$ con $x \neq y$,
    1. Esattamente uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
    2. Esattamente uno tra $\mathbf{E}(x, y)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ';
    3. Non più d'uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ';
    4. Almeno uno tra $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
  - $\phi \notin \Sigma'$.

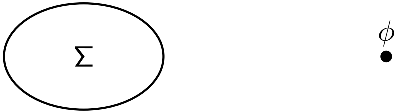
Il sistema **D**: completeness

- Supponendo che $\Sigma \not\vdash \phi$, dobbiamo trovare/costruire un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models \Sigma$ ma $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Se ci riusciamo, abbiamo finito.

- Visto che $\Sigma \not\vdash \phi$, chiaramente $\phi \notin \Sigma$ (altrimenti, potremmo avremmo una dimostrazione diretta di ϕ da Σ che lo elenca semplicemente come ultimo).

- Se $\Sigma \not\vdash \phi$, allora possiamo estendere Σ a un insieme *massimamente consistente* Σ' tale che
  - Per tutti gli ψ, $\Sigma' \vdash \psi$ se e solo se $\psi \in \Sigma'$;
  - Per tutti gli $x, y \in V$ con $x \neq y$,
    1. Esattamente uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
    2. Esattamente uno tra $\mathbf{E}(x, y)$ e $\mathbf{I}(x, y)$ è in Σ';
    3. Non più d'uno tra $\mathbf{A}(x, y)$ e $\mathbf{E}(x, y)$ è in Σ';
    4. Almeno uno tra $\mathbf{I}(x, y)$ e $\mathbf{O}(x, y)$ è in Σ';
  - $\phi \notin \Sigma'$.

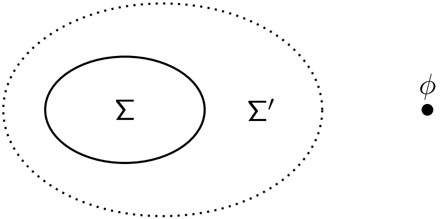
Il sistema **D**: completeness



- Σ' contiene Σ, ma non contiene ϕ;
- Σ' **specifica esattamente**, per ogni due termini $x, y \in V$, la relazione tra x e y: dice **tutto quello che c'è da dire.**
- Ora, dato Σ', possiamo costruire un modello $\mathfrak{M}_{\Sigma'}$ tale che

$$\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \psi \text{ se e solo se } \psi \in \Sigma'$$

  per tutte le formule ψ con vocabolario in V;
- In particolare $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \Sigma$, perchè $\Sigma \subseteq \Sigma'$;
- Inoltre, $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \not\models \phi$, perchè $\phi \notin \Sigma'$.
- Quindi abbiamo costruito un modello che soddisfa Σ ma non ϕ: in altre parole, $\Sigma \not\models \phi$, come volevamo.

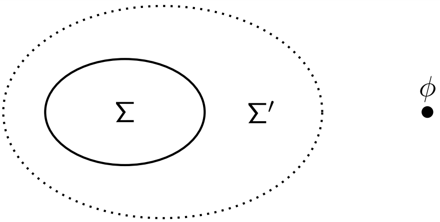


- Σ' contiene Σ, ma non contiene ϕ;
- Σ' **specifica esattamente**, per ogni due termini $x, y \in V$, la relazione tra x e y: dice **tutto quello che c'è da dire.**
- Ora, dato Σ', possiamo costruire un modello $\mathfrak{M}_{\Sigma'}$ tale che

$$\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \psi \text{ se e solo se } \psi \in \Sigma'$$

  per tutte le formule ψ con vocabolario in V;
- In particolare $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \Sigma$, perchè $\Sigma \subseteq \Sigma'$;
- Inoltre, $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \not\models \phi$, perchè $\phi \notin \Sigma'$.
- Quindi abbiamo costruito un modello che soddisfa Σ ma non ϕ: in altre parole, $\Sigma \not\models \phi$, come volevamo.

Il sistema **D**: completeness

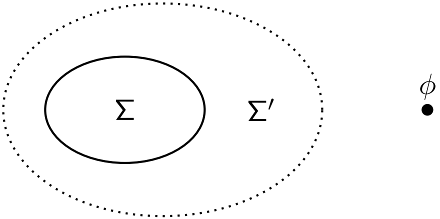


- Σ' contiene Σ, ma non contiene ϕ;
- Σ' **specifica esattamente**, per ogni due termini $x, y \in V$, la relazione tra x e y: dice **tutto quello che c'è da dire.**
- Ora, dato Σ', possiamo costruire un modello $\mathfrak{M}_{\Sigma'}$ tale che

$$\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \psi \text{ se e solo se } \psi \in \Sigma'$$

  per tutte le formule ψ con vocabolario in V;
- In particolare $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \Sigma$, perchè $\Sigma \subseteq \Sigma'$;
- Inoltre, $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \not\models \phi$, perchè $\phi \notin \Sigma'$.
- Quindi abbiamo costruito un modello che soddisfa Σ ma non ϕ: in altre parole, $\Sigma \not\models \phi$, come volevamo.

Il sistema **D**: completeness



- Σ' contiene Σ, ma non contiene ϕ;
- Σ' **specifica esattamente**, per ogni due termini $x, y \in V$, la relazione tra x e y: dice **tutto quello che c'è da dire.**
- Ora, dato Σ', possiamo costruire un modello $\mathfrak{M}_{\Sigma'}$ tale che

$$\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \psi \text{ se e solo se } \psi \in \Sigma'$$

  per tutte le formule ψ con vocabolario in V;
- In particolare $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \models \Sigma$, perchè $\Sigma \subseteq \Sigma'$;
- Inoltre, $\mathfrak{M}_{\Sigma'} \not\models \phi$, perchè $\phi \notin \Sigma'$.
- Quindi abbiamo costruito un modello che soddisfa Σ ma non ϕ: in altre parole, $\Sigma \not\models \phi$, come volevamo.

1. In conclusione: supponendo che non esista una dimostrazione di ϕ da Σ, siamo riusciti a costruire un modello che soddisfa Σ ma non ϕ.

2. Quindi, se invece $\Sigma \models \phi$ (e quindi un tale modello non può esistere), deve necessariamente esistere una dimostrazione di ϕ da Σ in **D**: **D** è completo!

3. Questo conclude il nostro studio della logica sillogistica. Nella prossima lezione inizieremo a vedere una logica più recente, più complicata sotto alcuni aspetti e più semplice sotto altri: la **logica proposizionale**.