Esame di Algebra e Geometria del 2/2/2018 con SVOLGIMENTO

Nome Cognome.. **Matricola..................................**A

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../6] 1. Siano $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Si consideri l'insieme $X^{(4)}$ delle parole di lunghezza al massimo 4 sull'alfabeto X. Cioè, $X^{(4)}$ contiene tutte le sequenze di lunghezza 0, 1, 2, 3 e 4 scritte usando le lettere a, b e c.

(a) Quanti elementi ha l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y))$?

(b) Quanti elementi ha $X^{(4)}$?

(c) Si consideri la funzione $g : X^{(4)} \to Y$ che associa ad ogni elemento di $X^{(4)}$ la sua lunghezza La funzione g è iniettiva e/o suriettiva? Perché?

(d) Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su $X^{(4)}$ tale che due elementi di $X^{(4)}$ sono in relazione se contengono lo stesso numero di lettere b. La relazione $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza? Perché? Quante classi d'equivalenza determina?

Svolgimento.

(a) $|\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) = 2^3 2^5$ quindi $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y))| = 2^{2^8}$.

(b) Ci sono 3^0 parole di lunghezza 0; 3^1 parole di lunghezza 1; 3^2 parole di lunghezza 2; 3^3 parole di lunghezza 3; 3^4 parole di lunghezza 4. Quindi in totale $|X^{(4)}| = 121$.

(c) La funzione non è iniettiva perché ci sono parole diverse che hanno la stessa lunghezza, per esempio $g(aab) = g(aba) = 3$. La funzione però è suriettiva perché ci sono parole di lunghezza da 0 a 4 e quindi tutti gli elementi di Y sono immagine di qualche elemento di $X^{(4)}$.

(d) La relazione $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza perché è riflessiva (ogni parola ha lo stesso numero di b di se stessa), è simmetrica (se u ha lo stesso numero di b di v allora anche v ha lo stesso numero di b di u) ed è transitiva (se u e v hanno lo stesso numero di b e v e w hanno lo stesso numero di b allora anche u e v hanno lo stesso numero di b). Le classi d'equivalenza sono 5:
$[a] = \{$ parole che non contengono la lettera $b\}$
$[ab] = \{$ parole che contengono una lettera $b\}$
$[abb] = \{$ parole che contengono due lettere $b\}$
$[abbb] = \{$ parole che contengono tre lettere $b\}$
$[bbbb] = \{$ parole che contengono quattro lettere $b\} = \{bbbb\}$.

[.../4] 2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)\,.$$

Svolgimento. Base di induzione $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2$$

e

$$2(2^1 - 1) = 2$$

quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che il risultato valga per n, cioè che vale (base di induzione):

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$$

e dimostriamolo per $n+1$, cioè dimostriamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2(2^{n+1} - 1).$$

Si ha:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} =$$

per ipotesi di induzione

$$= 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2(2^{n+1} - 1),$$

come volevasi dimostrare.

[.../4] 3. Trovare $d = MCD(192, 54)$ usando l'algoritmo delle divisioni successive e scrivere d come combinazione lineare di 192 e 54.

Svolgimento.

$192 = 54 \cdot 3 + 30$
$54 = 30 + 24$
$30 = 24 + 6$
$24 = 6 \cdot 4 + 0$

Quindi $d = MCD(192, 54) = 6$. Scrivo 6 come combinazione lineare di 192 e 54:

$6 = 30 - 24$
$24 = 54 - 30$
$30 = 192 - 54 \cdot 3$
quindi:
$6 = 192 - 54 \cdot 3 - 54 + 192 - 54 \cdot 3 = 2 \cdot 192 - 7 \cdot 54.$

[.../4] 4. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli. Discutere le soluzioni del seguente sistema di due equazioni in due incognite dipendente da un parametro reale k:

$$\begin{cases} 2x & + & ky & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Il teorema di Rouchè-Capelli afferma che un sistema di equazioni lineari $Ax = B$ ha soluzioni se e solo se rango della matrice A è uguale al rango della matrice $A|B$. In particolare, se tale rango è uguale al numero di incognite, allora il sistema ha una sola soluzione, altrimenti il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri, dove n è il numero di incognite e r è il rango delle matrici A e $A|B$.

La matrice dei coefficienti associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 2 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha rango 2 per $k \neq 1$ e ha rango 1 per $k = 1$. Nel caso $k = 2$ anche la matrice completa ha rango 2 e quindi c'è una sola soluzione. Nel caso $k = 1$ la matrice completa ha rango 1 e quindi ci sono ∞^1 soluzioni.

[.../4] 5. Dare la definizione di sottospazio vettoriale, di base, di insieme di generatori e di applicazione lineare tra spazi vettoriali.

Svolgimento. Un sottospazio vettoriale U di uno spazio V è un sottoinsieme di V che è chiuso per somma e per prodotto esterno. Cioè se $u_1, u_2 \in U$ allora anche $u_1 + u_2 \in U$ e $r \cdot u_1 \in U$ (per ogni r). Una base per uno spazio V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio V. Un insieme di generatori G per V è un insieme di vettori tali che ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare di vettori di G.

Una applicazione lineare tra due spazi vettoriali è una funzione tra i due spazi tale che $f(u_1+u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ e $f(r \cdot u) = r \cdot f(u)$.

[.../6] 6. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (3x + y - z, y + 2z, z)\,.$$

Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$. Trovare inoltre gli autovalori di f, la loro molteplicità algebrica e geometrica, e lo spazio degli autovettori con relativa base.

Svolgimento. La matrice associata ad f nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Quindi $\dim Imf = 3$ e $\dim Kerf = 0$. Per trovare gli autovalori si calcola il determinante di

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Usando la prima colonna si ottiene che il polinomio caratteristico è

$$(3-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda)) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2\,.$$

Ci sono quindi gli autovalori $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 2.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 3$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3x & +y & -z & = 3x \\ & y & +2z & = 3y \\ & & z & = 3z \end{array} \right. \quad \text{e cioè} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} y & -z & = 0 \\ -2y & +2z & = 0 \\ & -2z & = 0 \end{array} \right.$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & z \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Quindi $V_3 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_2 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ è 1.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 1$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x & +y & -z & = & 0 \\ & & 2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x & +y & = & 0 \\ & 2z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y & = & -2x \\ z & = & 0 \end{cases}$$

Quindi $V_0 = \{(x, -2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_0 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è 1. Quindi questo autovalore non è regolare e non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.