Esercizi Capitolo 7 - Soluzioni

1. Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi. In caso affermativo, determinare la dimensione e scrivere una base: *(Viene indicata una soluzione dettagliata solo per un alcuni esercizi, per gli altri si riporta solo la soluzione abbreviata)*

   (a) $\{(2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. SI, $dim = 1$, $B = \{(2, 3)\}$

   (b) $\{(2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. SI, $dim = 1$, $B = \{(2, 0)\}$

   (c) $\{(x + 1, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. NO

   (d) $\{(2, 3), (0, 0), (1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. NO

   (e) $\{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. NO

   (f) $\{(2x, x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. SI, $dim = 1$, $B = \{(2, 1, 2)\}$

   (g) $\{(x, x - z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. SI, $dim = 2$, $B = \{(1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$

   (h) $\{(2x, 1, 2z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. NO

   (i) $\{(x, y, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$. SI, $dim = 2$, $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$

   (j) $\{(1, 0, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$. NO

   Svolgimento.

   (c) $\{(x + 1, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, per esempio $u = (a + 1, a + 1)$ e $v = (b + 1, b + 1)$. Allora

   $$u + v = (a + 1, a + 1) + (b + 1, b + 1) = (a + b + 2, a + b + 2)$$

   che non appartiene a $\{(x + 1, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ il quale quindi non è un sottospazio.

   (e) Consideriamo due elementi u, v di $\{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, per esempio $u = (0, n)$ e $v = (0, m)$. Allora

   $$u + v = (0, n + m) \in \{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

   ma se considero $r = 1/2$ e $u = (0, 3) \in \{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, allora $ru = (0, 3/2) \notin \{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e quindi $\{(0, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ non è un sottospazio.

   (g) Consideriamo due elementi $u, v \in \{(x, x - z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, per esempio $u = (a_1, a_1 - b_1, b_1)$ e $v = (a_2, a_2 - b_2, b_2)$. Allora

   $$u+v = (a_1+b_1, (a_1+a_2)-(b_1+b_2), b_1+b_2) \in \{(x, x-z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

   e per ogni $r \in \mathbb{R}$,

   $$ru = (ra_1, ra_1 - rb_1, rb_1) \in \{(x, x - z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$$

   Quindi $\{(x, x - z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio. L'insieme $B = \{(1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ è formato da due vettori linearmente indipendenti e genera lo spazio $\{(x, x - z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, quindi è una sua base. Quindi la dimensione di $\{(x, x - z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ è uguale a 2 (perché una sua base ha 2 elementi).

2. Verificare che i seguenti insiemi B sono basi dei relativi spazi vettoriali e trovare le coordinate $[u]_B$ in B dei vettori u:

   (a) $B = \{(1,2),(1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $u = (3,-1)$;
   (b) $B = \{(1,2),(2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $u = (-1,-1)$;
   (c) $B = \{(1,2,0),(0,1,1),(1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $u = (3,-1,0)$;
   (d) $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $u = (0,-1,3)$;
   (e) $B = \{(0,1,2),(1,1,0),(1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $u = (1,1,1)$.

   Svolgimento.

   (a) $B = \{(1,2),(1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ perché è formata da due vettori linearmente indipendenti. Infatti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 2. Per scrivere il vettore $u = (3,-1)$ come combinazione lineare degli elementi di B bisogna risolvere il sistema

   $$(3,-1) = a(1,2) + b(1,1)$$

   nelle incognite a e b, cioè

   $$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

   e cioè $a = -4$ e $b = 7$.

   (b) $B = \{(1,2),(2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ perché $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango uguale a 2.

   $$(-1,-1) = -\frac{1}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(2,1)\,.$$

   (c) $B = \{(1,2,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a 3.

   $$u = (3,-1,0) = 2/3(1,2,0) - 7/3(0,1,1) + 7/3(1,0,1)\,.$$

   (d) $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a 3.

   $$u = (0,-1,3) = 4(1,0,0) - 4(1,1,0) + 3(0,1,1)\,.$$

   (e) $B = \{(0,1,2),(1,1,0),(1,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a 3.

   $$u = (1,1,1) = 1/3(0,1,2) + 2/3(1,1,0) + 1/3(1,0,1)\,.$$

3. Scrivere le matrici di cambiamento di base dalla base dell'esercizio $2(a)$ a quella di $2(b)$ e da quella di $2(d)$ a quella di $2(e)$.

Svolgimento. Sia $B_1 = \{(1,2),(1,1)\}$ e $B_2 = \{(1,2),(2,1)\}$. La matrice P_{12} di cambiamento di base da B_1 a B_2 ha come colonne le coordinate di dei vettori di B_1 rispetto a B_2. Si ha:

$$[(1,2)]_{B_1} = (1,0) \qquad [(1,1)]_{B_2} = (1/3,1/3)$$

e quindi $P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Sia adesso $B_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ e $B_4 = \{(0,1,2),(1,1,0),(1,0,1)\}$. Si ha

$[(1,0,0)]_{B_4} = (-1/3,1/3,2/3)$

$[(1,1,0)]_{B_4} = (0,1,0)$

$[(0,1,1)]_{B_4} = (2/3,1/3,-1/3)$

e quindi $P_{34} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

4. Calcolare lo spazio delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari omogenei, determinare la dimensione e scrivere una base.

(a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x-h=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z+h=0 \\ x+y=0 \\ x+h=0 \end{cases}$

Svolgimento.

(a) La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 quindi c'è una sola soluzione. Lo spazio delle soluzioni quindi è $\{(0,0)\}$ e ha dimensione uguale a 0.

(b) La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 quindi c'è una sola soluzione. Lo spazio delle soluzioni quindi è $\{(0,0)\}$ e ha dimensione uguale a 0.

(c) La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 quindi ci sono ∞^1 soluzioni. Lo spazio delle soluzioni è $\{(2z, -3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e ha dimensione uguale a 1. Una sua base è $\{(2, -3, 1)\}$.

(d) La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 quindi ci sono ∞^1 soluzioni. Lo spazio delle soluzioni è $\{(2z, -3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e ha dimensione uguale a 1. Una sua base è $\{(2, -3, 1)\}$.

(e) La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 quindi ci sono ∞^2 soluzioni (ci sono $n = 4$ variabili). Lo spazio delle soluzioni è $\{(h, -z - 2h, z, h) \mid h, z \in \mathbb{R}\}$ e ha dimensione uguale a 2. Una sua base è $\{(0, -1, 1, 0), (1, -2, 0, 1)\}$.

(f) La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 quindi ci sono ∞^1 soluzioni (ci sono $n = 4$ variabili). Lo spazio delle soluzioni è $\{(-h, h, 0, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ e ha dimensione uguale a 1. Una sua base è $\{(-1, 1, 0, 1)\}$.

5. Dire se le seguenti funzioni sono applicazioni lineari.

(a) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3$

(b) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + 2, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x, x) \in \mathbb{R}^3$

(d) $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, z) \in \mathbb{R}^2$

(e) $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (0, x + y) \in \mathbb{R}^2$

(f) $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (z, y, x) \in \mathbb{R}^3$

Svolgimento.

(a) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3$. Considero due vettori $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ di $\mathbb{R}^2$:

$$f(u+v) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2(x_1+x_2), x_1+x_2-y_1-y_2, 2(y_1+y_2))$$

$$f(u)+f(v) = (2x_1, x_1-y_1, 2y_1)+(2x_2, x_2-y_2, 2y_2) = (2(x_1+x_2), x_1+x_2-y_1-y_2, 2(y_1+y_2))$$

e inoltre

$$r(f(u)) = (2rx_1, r(x_1 - y_1), 2ry_1) = f(ru)\,,$$

quindi f è una applicazione lineare.

(b) $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\to(x+2,y)\in\mathbb{R}^2$. Posso subito notare che $f(0,0)=(2,0)$ e quindi f non è una applicazione lineare perché l'immagine del vettore nullo non è il vettore nullo.

(c) $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\to(x,x,x)\in\mathbb{R}^3$ Considero due vettori $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$ di $\mathbb{R}^2$:

$$f(u+v)=f(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2,x_1+x_2,x_1+x_2)$$

$$f(u)+f(v)=(x_1,x_1,x_1)+(x_2,x_2,x_2)=(x_1+x_2,x_1+x_2,x_1+x_2)$$

e inoltre

$$r(f(u))=(rx_1,rx_1,rx_1)=f(ru)\,,$$

quindi f è una applicazione lineare.

(d) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to(x+y,z)\in\mathbb{R}^2$ Considero due vettori $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$ di $\mathbb{R}^2$:

$$f(u+v)=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=(x_1+x_2+y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$f(u)+f(v)=(x_1+y_1,z_1)+(x_2+y_2,z_2)=(x_1+x_2+y_1+y_2,z_1+z_2)$$

e inoltre

$$r(f(u))=(r(x_1+y_1),rz_1)=f(ru)\,,$$

quindi f è una applicazione lineare.

(e) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to(0,x+y)\in\mathbb{R}^2$ Considero due vettori $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$ di $\mathbb{R}^2$:

$$f(u+v)=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=(0,x_1+x_2+y_1+y_2)$$

$$f(u)+f(v)=(0,x_1+y_1)+(0,x_2+y_2)=(0,x_1+x_2+y_1+y_2)$$

e inoltre

$$r(f(u))=(0,r(x_1+y_1))=f(ru)\,,$$

quindi f è una applicazione lineare.

(f) $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to(z,y,x)\in\mathbb{R}^3$. Considero due vettori $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$ di $\mathbb{R}^2$:

$$f(u+v)=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=(z_1+z_2,y_1+y_2,x_1+x_2)$$

$$f(u)+f(v)=(z_1,y_1,x_1)+(z_2,y_2,x_1)=(z_1+z_2,y_1+y_2,x_1+x_2)$$

e inoltre

$$r(f(u))=(rz_1,ry_1,rx_1)=f(ru)\,,$$

quindi f è una applicazione lineare.

6. Determinare lo spazio immagine $\operatorname{Im} f$ e il kernel $\operatorname{Ker} f$ per le funzioni degli esercizi 5a, 5c, 5d, 6, 5f. Scrivere le matrici associate sia nelle basi canoniche che nelle basi $\{(0,3),(1,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\{(1,2,1),(0,1,1),(2,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Sia $B_1=\{(0,3),(1,1)\}$ e $B_2=\{(1,2,1),(0,1,1),(2,0,1)\}$.

- Consideriamo $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3$. Si ha

$$\operatorname{Im} f = \{(2x, x - y, 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

che ha come base $B = \{(2, 1, 0), (0, -1, 2)\}$ e quindi ha dimensione uguale a 2. Invece

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y) \mid (2x, x - y, 2y) = (0, 0, 0)\}$$

e cioè $\operatorname{Ker} f$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\begin{cases} 2x = 0 \\ x - y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ la cui matrice associata ha rango 2. Quindi c'è una sola soluzione e $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0)\}$. La matrice associata nella base canonica è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per trovare la matrice associata ad f rispetto a B_1 e B_2 calcoliamo

$$[f(0, 3)]_{B_2} \qquad [f(1, 1)]_{B_2}\,.$$

Si ha

$$f(0, 3) = (0, -3, 6) = a(1, 2, 1) + b(0, 1, 1) + c(2, 0, 1)$$

dove a, b, c possono essere ricavate con un sistema lineare e si ottiene $a = -6$, $b = 9$, $c = 3$. Quindi $[f(0, 3)]_{B_2} = (-6, 9, 3)$. Inoltre

$$f(1, 1) = (2, 0, 2) = a(1, 2, 1) + b(0, 1, 1) + c(2, 0, 1)$$

dove a, b, c possono essere ricavate con un sistema lineare e si ottiene $a = -2/3$, $b = 4/3$, $c = 4/3$. Quindi $[f(1, 1)]_{B_2} = (-2/3, 4/3, 4/3)$. La matrice associata ad f nelle basi B_1 e B_2 è quindi $\begin{pmatrix} -6 & -2/3 \\ 9 & 4/3 \\ 3 & 4/3 \end{pmatrix}$.

- Consideriamo $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x, x) \in \mathbb{R}^3$. Si ha

$$\operatorname{Im} f = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

che ha come base $B = \{(1, 1, 1)\}$ e quindi ha dimensione uguale a 1. Invece

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y) \mid (x, x, x) = (0, 0, 0)\}$$

e cioè $\operatorname{Ker} f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. La matrice associata nella base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dato che $f(0, 3) = (0, 0, 0) = 0(1, 2, 1) + 0(0, 1, 1) + 0(2, 0, 1)$ si ha $[f(0, 3)]_{B_2} = (0, 0, 0)$. Inoltre

$$f(1, 1) = (1, 1, 1) = a(1, 2, 1) + b(0, 1, 1) + c(2, 0, 1)$$

dove a, b, c possono essere ricavate con un sistema lineare e si ottiene $a = 1/3,\ b = 1/3,\ c = 1/3$. Quindi $[f(1,1)]_{B_2} = (1/3, 1/3, 1/3)$. La matrice associata ad f nelle basi B_1 e B_2 è quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

- Consideriamo $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, z) \in \mathbb{R}^2$. Si ha

$$\operatorname{Im} f = \{(x + y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Se consideriamo uno dei parametri uguali a 1 e gli altri uguali a zero otteniamo l'insieme $\{(1, 0), (0, 1)\}$ che è quindi una base di $\operatorname{Im} f$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$ (nota che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$). Invece

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \mid (x + y, z) = (0, 0)\}$$

e cioè $\operatorname{Ker} f$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e quindi $\operatorname{Ker} f = \{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. La matrice associata nella base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per calcolare la matrice associata nelle basi B_2 (per il dominio) e B_1 (per il codominio) considero le immagini degli elementi di B_2:

$$f(1, 2, 1) = (3, 1) = a(0, 3) + b(1, 1)$$

dove a, b possono essere ricavate con un sistema lineare e si ottiene $a = -2/3,\ b = 3$. Quindi $[f(1, 2, 1)]_{B_1} = (-2/3, 3)$.

$$f(0, 1, 1) = (1, 1) = a(0, 3) + b(1, 1)$$

con $a = 0,\ b = 1$. Quindi $[f(0, 1, 1)]_{B_1} = (0, 1)$.

$$f(2, 0, 1) = (2, 1) = a(0, 3) + b(1, 1)$$

con $a = -1/3,\ b = 2$. Quindi $[f(2, 0, 1)]_{B_1} = (-1/3, 2)$.
La matrice associata ad f nelle basi B_2 e B_1 è quindi $\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -1/3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Consideriamo $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (0, x + y) \in \mathbb{R}^2$. Si ha

$$\operatorname{Im} f = \{(0, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Se consideriamo uno dei parametri uguali a 1 e gli altri uguali a zero otteniamo l'insieme $\{((0, 1)\}$ che è quindi una base di $\operatorname{Im} f$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f = 1$. Invece

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \mid (0, x + y) = (0, 0)\}$$

e cioè $\operatorname{Ker} f$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ e quindi $\operatorname{Ker} f = \{(-y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$. La matrice associata nella base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per calcolare la matrice associata nelle basi B_2 (per il dominio) e B_1 (per il codominio) considero le immagini degli elementi di B_2:

$$f(1,2,1) = (0,3) = a(0,3) + b(1,1)$$

quindi $a = 1$ e $b = 0$ e $[f(1,2,1)]_{B_1} = (1,0)$.

$$f(0,1,1) = (0,1) = a(0,3) + b(1,1)$$

quindi $a = 1/3$, $b = 0$. Quindi $[f(0,1,1)]_{B_1} = (1/3, 0)$.

$$f(2,0,1) = (0,2) = a(0,3) + b(1,1)$$

quindi $a = 2/3$, $b = 0$. Quindi $[f(2,0,1)]_{B_1} = (2/3, 0)$.
La matrice associata ad f nelle basi B_2 e B_1 è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Consideriamo $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (z,y,x) \in \mathbb{R}^3$. Si ha

  $$\operatorname{Im} f = \{(z,y,x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

  Se consideriamo uno dei parametri uguali a 1 e gli altri uguali a zero otteniamo l'insieme $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$ che è quindi una base di $\operatorname{Im} f$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f = 3$ (quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$). Invece

  $$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \mid (z,y,x) = (0,0,0)\}$$

  e cioè $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$. La matrice associata nella base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per calcolare la matrice associata nella base B_2 (sia per il dominio che per il codominio) considero le immagini degli elementi di B_2:

  $$f(1,2,1) = (1,2,1) = a(1,2,1) + b(0,1,1) + c(2,0,1)$$

  quindi $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ e $[f(1,2,1)]_{B_1} = (1,0,0)$.

  $$f(0,1,1) = (1,1,0) = a(1,2,1) + b(0,1,1) + c(2,0,1)$$

  che implica $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Quindi $[f(0,1,1)]_{B_1} = (1,-1,0)$.

  $$f(2,0,1) = (1,0,2) = a(1,2,1) + b(0,1,1) + c(2,0,1)$$

  quindi $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$. Quindi $[f(2,0,1)]_{B_1} = (-1,2,1)$.
  La matrice associata ad f nelle basi B_2 e B_1 è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare A^{-1} e $C = A^{-1}BA$.

   (b) Trovare autovalori e autovettori della matrice C.

   (c) Esiste una base di R^3 formata da autovettori di C?

   Svolgimento. Per calcolare A^{-1} si può usare la riduzione con operazioni elementari

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   (con l'operazione $r_2 \to r_2 - 2r_3$), quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Inoltre

$$C = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Per calcolare gli autovalori di C possiamo notare che C è simile alla matrice B che è già in forma triangolare e quindi gli autovalori sono $1, 2, 3$ (gli elementi sulla diagonale). Oppure possiamo fare tutti i calcoli, cioè trovare le radici del polinomio caratteristico:

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda),.$$

   Dato che la matrice ha 3 autovalori distinti, tali autovalori sono regolari e quindi esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di C.

8. Si dica se le seguenti funzioni sono applicazioni lineari:

   f_1: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + y, x, y + 2) \in \mathbb{R}^3$

   f_2: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (y, x) \in \mathbb{R}^2$

   f_3: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + y, x, y) \in \mathbb{R}^3$

   f_4: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + z, 3) \in \mathbb{R}^2$

   f_5: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + z, z) \in \mathbb{R}^2$

f_6: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + y, x) \in \mathbb{R}^2$
f_7: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + y, x + y) \in \mathbb{R}^2$
f_8: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (z + 1, x, y) \in \mathbb{R}^3$
f_9: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, x, y + z) \in \mathbb{R}^3$

Per le applicazioni f_2, f_6 e f_7, rappresentare graficamente come vengono trasformati gli assi.

Si scriva la matrice associata nelle basi canoniche per le applicazioni lineari dell'elenco precedente, si dica se sono iniettive e/o suriettive e si calcoli Im e Ker.

Si calcolino autovalori e autovettori per le applicazioni f_6, f_7 e f_9, si calcoli la molteplicità algebrica e geometrica e si dica se esistono basi (rispettivamente di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$) formate da autovettori di tali applicazioni.

Svolgimento.

f_1: Non è una applicazione. Infatti, se (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$$f_1((x_1, y_1)+(x_2, y_2)) = f_1(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2, y_1+y_2+2)$$

mentre

$$f_1((x_1, y_1))+f_1((x_2, y_2)) = (x_1+y_1, x_1, y_1+2)+(x_2+y_2, x_2, y_2+2) =$$
$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 4)$$

e quindi $f_1((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \neq f_1((x_1, y_1)) + f_1((x_2, y_2))$.

f_2: è una applicazione lineare perchè:

$$f_2((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$$

e

$$f_2((x_1, y_1))+f_2((x_2, y_2)) = (y_1, x_1)+(y_2, x_2) = (y_1+y_2, x_1+x_2) = f_2((x_1, y_1)+(x_2, y_2)) .$$

Inoltre

$$\lambda f_2(x, y) = \lambda(y, x) = (\lambda y, \lambda x) = f_2((\lambda x, \lambda y)) = f_2(\lambda(x, y)).$$

L'applicazione f_2 scambia l'asse delle x con l'asse delle y.
La matrice associata ad f_2 nella base canonica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi $\dim \operatorname{Im} f_2 = 2$ e dato che anche il codominio $\mathbb{R}^2$ ha rango 2 si ha che $\operatorname{Im} f_2 = \mathbb{R}^2$ e quindi f_2 è suriettiva. D'altra parte, dalla relazione $\dim \operatorname{Ker} f_2 + \dim \operatorname{Im} f_2 = \dim \mathbb{R}^2$, si ottiene $\dim \operatorname{Ker} f_2 = 0$ e quindi $\ker f_2 = \{(0, 0)\}$ che vuol dire che f_2 è iniettiva.

f_3: E' una applicazione lineare.

f_4: Non è una applicazione lineare

f_5: E' una applicazione lineare.

f_6: Si verifica facilmente che è una applicazione lineare.

L'asse delle x, cioè l'insieme dei punti $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ si trasforma nell'insieme $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ che coincide con la retta che divide a metà il primo quadrante del assi.

L'asse delle y invece, cioè l'insieme dei punti $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ si trasforma nell'insieme $\{(y,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ che coincide con l'asse delle x.

La matrice associata ad f_6 è

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Ripetendo il ragionamento di prima, anche in questo caso si ha che f_6 è suriettiva e iniettiva (quindi è biettiva).

Calcoliamo gli autovalori e autovettori di A_6. Dobbiamo risolvere il polinomio caratteristico:

$$det(A_6 - \lambda I) = 0$$

e cioè

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

quindi

$$\lambda(\lambda - 1) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

che ha soluzioni $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ che sono i due autovalori. Dato che ci sono 2 autovalori distinti e il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$ che ha dimensione 2, allora esiste una base di autovettori. Per trovarla, si devono risolvere i sistemi omogenei:

$$\begin{cases} (1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2})x + y & = 0 \\ x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y & = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2})x + y & = 0 \\ x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y & = 0\,. \end{cases}$$

Entrambi i sistemi hanno la matrice associata con rango 1 e quindi ∞^1 soluzioni. Si ha

$$V_{\lambda_1} = \{(\frac{1-\sqrt{5}}{2}y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

e

$$V_{\lambda_2} = \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Quindi una base di autovettori si trova unendo una base di V_{λ_1} con una base di V_{λ_2}, quindi per esempio

$$B = \{(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1), (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)\}$$

f_7: E' una applicazione lineare, la matrice associata alla base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 1, quindi $\dim \operatorname{Im} f_8 = 1$ e $\dim \operatorname{Ker} f_8 = 1$. Gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ e

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Ker} f_8 \\ V_2 &= \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e entrambi gli autovalori sono regolari e hanno molteplicità geometrica uguale a quella algebrica uguale a 1. Quindi esiste una base formata da autovettori.

f_8: Non è una applicazione lineare.

f_9: E' una applicazione lineare, la matrice associata alla base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 3, quindi $\dim \operatorname{Im} f_9 = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} f_8 = 0$. Ci sono 3 autovalori che sono $\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ V_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} &= \{(z, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ V_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} &= \{(z, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e entrambi gli autovalori sono regolari e hanno molteplicità geometrica uguale a quella algebrica uguale a 1. Quindi esiste una base formata da autovettori.