14/04/2024 — Quarto appello

Nome e Cognome: ________________________ Matricola: ______________

Indicazioni Importati: Siamo liberi di utilizzare appunti scritti o stampati. **Non possiamo però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di noi o con l'esterno, né passarci del materiale tra di noi**.
A meno che non venga esplicitamente detto il contrario, non è necessario calcolare il valore numerico delle soluzioni. A parte questo fatto, **è sempre importante mostrare il ragionamento e le formule usate, ed arrivare ad una risposta esatta**, anche se espressa in funzione di altri operatori (per esempio coefficienti binomiali, radici quadrate, esponenti, ecc). Un esempio: se arriviamo a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, possiamo lasciare questa come risposta senza ulteriori semplificazioni, oppure possiamo fare i calcoli ed arrivare al valore numerico 252. Invece scrivere solo "252" senza che sia chiaro da dove viene quel numero, **sarà considerata una risposta invalida.**
NOTA BENE: In queste soluzioni si riporta il valore numerico delle risposte solo per completezza. Il calcolo di tali valori infatti non è stato oggetto di valutazione in sede di correzione.

1 Calcolo combinatorio

1. Un barman ha a disposizione 6 liquori base, quanti cocktails può ottenere mescolandone 4 alla volta? (2 pt)
2. Un test a risposta multipla ha 20 domande. Ogni domanda ha 3 possibili risposte. Quanti modi possibili ci sono di rispondere al test? (2 pt)
3. Un gruppo di studenti vuole formare un motto con le lettere della frase "AMIAM STATISTICA". In quanti modi diversi possono disporre le lettere per creare un anagramma? (3 pt) (Non contiamo lo spazio tra le due parole).
4. Il consiglio studenti deve selezionare **1** nuovo coordinatore, **1** segretario e **1** tesoriere (i ruoli principali del consiglio). Deve inoltre assegnare **4** posti vacanti nel suo gruppo di consiglieri. Ci sono **10** persone qualificate disponibili. Una persona può ricoprire sia il ruolo di consigliere e allo stesso tempo ricoprire uno dei tre ruoli principali (coordinatore, segretario oppure tesoriere), ma non sono ammessi altri casi in cui una persona ricopre due ruoli. In quanti modi possono essere assegnate queste posizioni? (3 pt)

1 Soluzione

1. Per fare un qualsiasi cocktail, il barman deve scegliere 4 liquori dall'insieme dei 6 liquori base. Il cocktail ottenuto non dipende dall'ordine in cui si mischiano i liquori, quindi stiamo parlando del numero di combinazioni (senza ripetizione).

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

2. Usiamo la formula delle possibili disposizioni di 20 oggetti presi da un insieme di 3 oggetti con ripetizione, perché ad ogni domanda possiamo fare sempre 3 scelte:

$$D^{ripetizione}_{3,20} = 3^{20}$$

(Per la cronaca, il calcolo fa 3486784401. Cioè c'è una probabilità di $1/3486784401$ di prendere pieni voti rispondendo a caso...)

3. Per calcolare il numero di anagrammi della frase "AMIAM STATISTICA", dobbiamo considerare il numero totale di permutazioni delle lettere, tenendo conto delle lettere che si ripetono.

   Iniziamo contando il numero di occorrenze di ciascuna lettera nella frase:

   "AMIAM STATISTICA"

   Le lettere nella frase sono:

   A: 4, M: 2, I: 3, S: 2, T: 3, C: 1

   La formula per il calcolo delle permutazioni di un insieme con ripetizioni è:

   $$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

   dove: - n è il numero totale di lettere, - $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sono le occorrenze delle lettere ripetute.

   Nel nostro caso, il numero totale di lettere n è 15. Quindi, il numero totale di anagrammi è:

   $$\frac{15!}{4! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{15!}{4! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!}$$

4. Per selezionare il coordinatore, il segretario e il tesoriere, possiamo procedere usando la formula delle disposizioni di 3 elementi presi da un insieme di 10 senza reinserimento:

   $$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

   Dopo aver selezionato questi ruoli, possiamo scegliere i 4 consiglieri tra le persone disponibili, che, data la formulazione del problema, sono ancora disponibili. Questa volta usiamo la formula delle combinazioni semplici, dato che l'ordine non conta (sono tutti consiglieri).

   $$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = 5 \times 3 \times 2 \times 7 = 210$$

   Il numero totale di modi in cui possiamo selezionare tutte le posizioni è quindi:

   $$D_{10,3} \times C_{10,4} = \frac{10!}{(10-3)!} \times \binom{10}{4} = 720 \times 210 = 151200$$

   Quindi, le posizioni possono essere occupate in **151200** modi diversi.

2 Variabili aleatorie

1. Una variabile aleatoria **discreta** X prende valori in $\mathbb{N}$ ed ha la distribuzione di probabilità:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 4/18 & \text{se} \quad x <= 3 \\ 2/18 & \text{se} \quad x > 3 \\ 0 & \text{se} \quad x > 6 \end{cases}$$

   Calcolare il valore atteso di questa distribuzione (2pt)

2. Qual è il valore atteso della var. aleatoria S_{10} che indica la somma di 10 lanci del dado modellato da X? (2pt)

3. Tramite il teorema del limite centrale, con quale distribuzione possiamo approssimare la variabile aleatoria $\frac{S_{10}}{10}$? Indicate il valore atteso e deviazione standard di questa variabile in funzione di $\mathbb{E}[X]$ e $Std[X]$ (2pt)

4. Assumendo che $\frac{Std[X]}{\sqrt{10}} = 0.5$, approssimare la probabilità che $\frac{S_{10}}{10}$ sia compresa nell'intervallo

$$[\mathbb{E}[X] - 0.5, \mathbb{E}[X] + 0.5]$$

   Specificare il valore numerico. (4pt)

2 Soluzione

1. Se usiamo la definizione di valore atteso:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \{1,2,\ldots,6\}} x \cdot P(X = x) \\ &= 1 \cdot \frac{4}{18} + 2 \cdot \frac{4}{18} + 3 \cdot \frac{4}{18} + 4 \cdot \frac{2}{18} + 5 \cdot \frac{2}{18} + 6 \cdot \frac{2}{18} \\ &= \frac{4}{18} + \frac{8}{18} + \frac{12}{18} + \frac{8}{18} + \frac{10}{18} + \frac{12}{18} \\ &= \frac{54}{18} = \frac{27}{9} = 3 \end{aligned}$$

2. Per il Teorema del Limite Centrale io so che la variabile $S_{10} = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$, che somma il valore di 10 valori presi dalla variabile X -i.e., 10 lanci del dado rappresentato da X- ha una media pari a $10 \cdot \mathbb{E}[X] = 10 \cdot \mathbb{E}[X] = 10 \cdot 3 = 30$

3. Sempre per il TLC, sappiamo che $\frac{S_{10}}{10} \sim \mathcal{N}(\mu = \mathbb{E}[X], \sigma = \frac{Std[X]}{\sqrt{10}})$.

4. Ci viene chiesta la seguente probabilità:

$$P(\frac{S_{10}}{10} > \mathbb{E}[X] - 0.5, \frac{S_{10}}{10} < \mathbb{E}[X] + 0.5)$$

   che è equivalente a:

$$P(-0.5 < \frac{S_{10}}{10} - \mathbb{E}[X] < 0.5)$$

   L'espressione in mezzo alla disequazione può essere ricondotta ad una v.a. Gaussiana Standard dividendo per la deviazione standard di $\frac{S_{10}}{10}$:

$$\frac{\frac{S_{10}}{10} - \mathbb{E}[X]}{\frac{Std[X]}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$P(\frac{-0.5}{\frac{Std[X]}{\sqrt{n}}} < \frac{\frac{S_{10}}{10} - \mathbb{E}[X]}{\frac{Std[X]}{\sqrt{n}}} < \frac{0.5}{\frac{Std[X]}{\sqrt{n}}}) = \mathbf{\Phi}(\frac{0.5}{\frac{Std[X]}{\sqrt{n}}}) - \mathbf{\Phi}(\frac{-0.5}{\frac{Std[X]}{\sqrt{n}}})$$

Assumendo, poi, che $\frac{Std[X]}{\sqrt{10}} = 0.5$, abbiamo:

$$\mathbf{\Phi}(\frac{0.5}{0.5}) - \mathbf{\Phi}(\frac{-0.5}{0.5}) = \mathbf{\Phi}(1) - \mathbf{\Phi}(-1)$$

E ciò equivale a:

$$2\mathbf{\Phi}(1) - 1 = 2 \cdot 0.84 - 1 \approx 0.68$$

3 Trizio

Un campione contiene 30 atomi radioattivi di Trizio. Si supponga che il decadimento di ciascun atomo è indipendente da quello degli altri. La vita media di ciascun atomo di Trizio (in anni) è una variabile aleatoria distribuita esponenzialmente. Si assuma che la vita media di questi atomi sia di 12 anni:

1. Qual è il parametro λ di questa distribuzione? (cioè il tasso di decadimento) (2pt)
2. Qual è la probabilità che in **12** anni non decada nessun atomo? (3pt)
3. Supponendo di avere solo **3** atomi, qual'è la probabilità che in **36** anni decada al massimo uno di questi **3** atomi? (3pt)
4. Si prende in esame un particolare atomo e si osserva che questo **non** è decaduto negli ultimi **5** anni. Qual è la probabilità che tale atomo non decada nei prossimi **10** anni? (3pt)

3 Soluzione

Denotiamo con $\mathcal{X}$ la v.a. che indica il tempo di decadimento di un atomo di Trizio in anni.

1. Abbiamo, dalla traccia, che $\mathcal{X}$ segue una distributione esponenziale, e che $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = 12$. Quindi la risposta la otteniamo sapendo che, fissando un intervallo temporale, per le v.a. esponenziali, la frequenza di occorrenza dell'evento modellato, λ, è in relazione con il tempo medio di inter-occorrenza di tale evento tramite l'equazione:
$$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\lambda}$$
e perciò:
$$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\lambda} = 12$$
$$\lambda = \frac{1}{12} \approx 0,08$$

2. Denotiamo con $\mathcal{E}$ l'evento "in 12 anni non decade nessun atomo di Trizio". **Ci viene chiesta la probabilità: $P(\mathcal{E})$.**

   Utilizzando la funzione cumulativa della distribuzione esponenziale, sappiamo che ogni atomo ha una probabilità di decadimento entro i prossimi dodici anni pari a:

   $$P(\mathcal{X} \leq 12) = 1 - e^{-\lambda \cdot 12} = 1 - e^{-\frac{12}{12}} = e^{-1} \approx 1 - 0.37 = 0.63$$

   Ora, dato che il decadimento di ogni atomo è indipendente, possiamo modellare il numero di atomi decaduti nei prossimi dodici anni con una v.a. $\mathcal{Y}$ tale che:

   $$\mathcal{Y} \sim \text{Binomiale}(n = 30, p = 1 - e^{-1})$$

   dove abbiamo scelto l'evento "decadimento di un atomo di Trizio" come successo.

   La probabilità richiesta quindi è:

   $$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{Y} = 0) = \binom{30}{0}(1 - e^{-1})^0 \cdot (e^{-1})^{30} = e^{-30} \approx 9.36e - 14$$

3. Ragionando in modo simile al punto precedente, creiamo una v.a. $\hat{\mathcal{Y}}$ che indichi il numero di atomi decaduti nei prossimi 36 anni. Dato che:

   $$P(\mathcal{X} \leq 36) = 1 - e^{-\lambda \cdot 36} = 1 - e^{-\frac{36}{12}} = 1 - e^{-3} \approx 0.95$$

   Se scegliamo il decadimento come successo, avremmo che :

   $$\hat{\mathcal{Y}} \sim \text{Binomiale}(n = 3, p = 1 - e^{-3})$$

   Ci viene chiesta trovare la probabilità $P(\hat{\mathcal{Y}} \leq 1)$ E cioè:

   $$P(\hat{Y} \leq 1) = P(\hat{Y} = 0) + P(\hat{Y} = 1)$$

   $$P(\hat{Y} \leq 1) = \binom{3}{0}(1 - e^{-3})^0 \cdot (e^{-3})^3 + \binom{3}{1}(1 - e^{-3}) \cdot (e^{-3})^2$$

   $$P(\hat{Y} \leq 1) = (e^{-3})^3 + 3 \cdot (1 - e^{-3}) \cdot (e^{-3})^2 \approx 0.007$$

4. Ci viene chiesta la probabilità condizionata: $P(\mathcal{X} > 30|\mathcal{X} > 10)$

   Per la proprietà di **mancanza di memoria** della distribuzione esponenziale, sappiamo che:

   $$P(\mathcal{X} > 15|\mathcal{X} > 5) = \frac{P(\mathcal{X} > 10 + 5)}{P(\mathcal{X} > 5)} = P(\mathcal{X} > 10) = e^{-10 \cdot \lambda} = e^{-\frac{10}{12}} \approx 0.43$$