

## Esercizi CAPITOLO 2

## SOLUZIONI

1

	RIFLESS.	SIM.	ANTISIM.	TRANSIT.
$R_1$	NO	NO	SI	SI
$R_2$	SI	NO	NO	NO
$R_3$	SI	SI	SI	SI
$R_4$	NO	NO	SI	SI
$R_5$	NO	NO	NO	SI
$R_6$	SI	SI	NO	SI

2 • Proprietà riflessiva: per ogni  $a \in A^3$

$$\#(a, a) + \#(b, a) = \#(a, a) + \#(a, a)$$

quindi  $a R a$

• Proprietà simmetrica: per ogni  $a, b \in A^3$   
 se  $\#(a, u) + \#(b, u) = \#(a, v) + \#(b, v)$   
 allora  $\#(a, v) + \#(b, v) = \#(a, u) + \#(b, u)$

• Proprietà transitiva: per ogni  $a, b, c \in A^3$   
 se  $\#(a, u) + \#(b, u) = \#(a, v) + \#(b, v)$   
 e  $\#(a, v) + \#(b, v) = \#(a, w) + \#(b, w)$   
 allora  $\#(a, u) + \#(b, u) = \#(a, w) + \#(b, w)$ .

In ogni classe d'equivalenza ci sono le parole che hanno lo stesso numero di lettere  $a$  e  $b$ .

Ci saranno quindi 4 classi e cioè:



- [ccc] classe delle parole che non contengono né a né b
- [acc] classe delle parole che contengono una sola a oppure una sola b
- [aac] classe delle parole che contengono 2 a oppure 2b oppure 1a e 1b.
- [cec] classe delle parole che contengono 3a oppure 3b oppure 2a e 1b oppure 2b e 1a

3

$$5 \mathbb{R}_5 0$$

$$7 \mathbb{R}_5 2$$

$$14 \mathbb{R}_5 4$$

$$6 \mathbb{R}_5 0$$

$$8 \mathbb{R}_5 2$$

$$9 \mathbb{R}_5 4$$

$\mathbb{R}_5$  è una relazione d'equivalenza perché:

È RIFLESSIVA: per ogni  $n \in \mathbb{Z}$

$$n - n = 0 \text{ è multiplo di } 5$$

È SIMMETRICA: per ogni  $n, m \in \mathbb{Z}$

se  $n - m$  multiplo di 5 allora anche  $m - n$  è multiplo di 5

È TRANSITIVA: per ogni  $n, m, h \in \mathbb{Z}$

se  $n - m$  e  $m - h$  sono multipli di 5 allora anche  $n - h$  è un multiplo di 5

Le classi sono 5, l'insieme quoziente

$$\mathbb{Z}/\mathbb{R}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$$



4

$\{ \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{e\} \}$

Non è una partizione perché

$$\{c, d\} \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$$

$\{ \{e\}, \{b\}, \{c, d, e\} \}$  è una partizione

$\{ \{c, d\}, \{a, b\}, \{e\} \}$  è una partizione

$\{ \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a\}, \{b\} \}$  è una partizione

$\{ \{e, d\}, \{c, b, a\} \}$  è una partizione

$\{ \{b, e\}, \{b, c\}, \{b, d, a\} \}$  non è una partizione perché

$$\{b, e\} \cap \{b, c\} \neq \emptyset$$

5

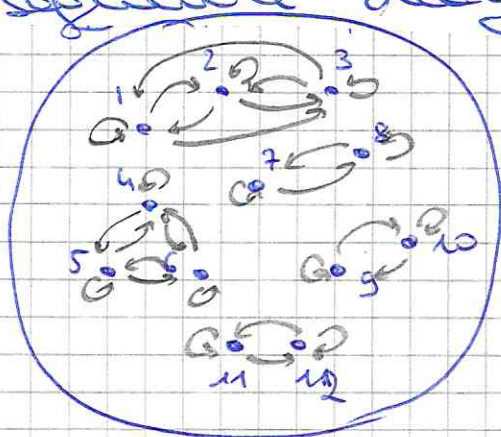
A deve avere almeno 12 elementi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Le classi devono formare una partizione

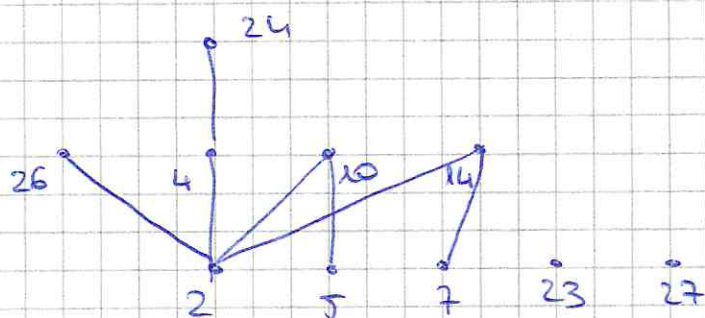
$$A/R = \{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, \{11, 12\} \}$$

la relazione R è quindi definita dal seguente diagramma





6



NON CI SONO MASSIMI E MINIMI

MASSIMALI 26, 24, 10, 14, 23, 27

MINIMALI 2, 5, 7, 23, 27

$\sup X$  NON ESISTE

$\inf X$  NON ESISTE

7

R REL. PREFISSO

RIFLESSIVA Ogni parola è prefisso di se stessa

ANTISIMMETRICA Se  $u$  è prefisso di  $v$   
e  $u \neq v$  ALLORA  $v$  non può  
essere prefisso di  $u$

TRANSITIVA

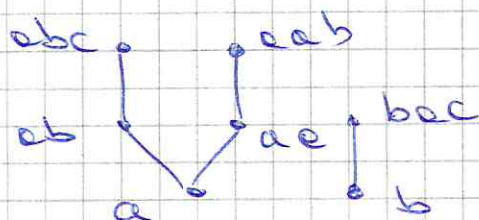
Se  $u$  è prefisso di  $v$   $v = ux$   
 $v$  è prefisso di  $w$   $w = vy$

allora

$$w = vy = uxy$$

quindi  $u$  è prefisso di  $w$

$B = \{a, b, ab, ea, ebc, eab, bac\}$



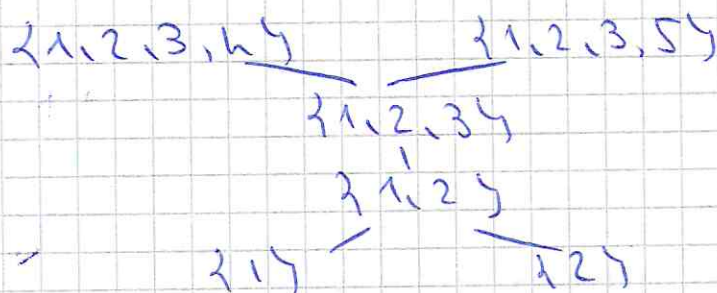


B non ha minimo e massimo  
 MINIMALI  $a, b$   
 MASSIMALI  $abc, acb, bac$

$$\inf B = \varepsilon$$

$\sup B$  non esiste

8  $\{215, 225, 212, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$



NON CI SONO MINIMO E MASSIMO  
 MINIMALI  $215, 225$   
 MASSIMALI  $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FUNZIONE	SÌ	NO	NO	NO	SÌ	SÌ	SÌ	NO	NO	SÌ
INIETTIVA	SÌ	/	/	/	NO	SÌ	NO	/	/	SÌ
SURGETTIVA	SÌ	/	/	/	NO	SÌ	NO	/	/	SÌ

10  $R$  è una funzione  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 PERCHÉ PER OGNI  $m \in \mathbb{N}$  ESISTE  
 UN UNICO  $n \in \mathbb{Z}$  TALE CHE  $m R n$   
 ED È  $n = 3 - m \Rightarrow$  È LA FUNZIONE  $f(m) = 3 - m$   
 È INIETTIVA PERCHÉ  $m_1 \neq m_2 \Rightarrow 3 - m_1 \neq 3 - m_2$



6

NON E' SURIETTIVA PERCHE' PER ESEMPLO

Se  $m = 4$  NON ESISTE  $n \in \mathbb{N}$  TALE  
CHE  $m + n = 3$ .

La relazione  $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y^2\}$   
NON E' UNA FUNZIONE PERCHE'

$$(1, -1), (1, 1) \in \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y^2\}$$

QUINDI CI SONO DUE COPPIE CON LA  
STESSA PRIMA COMPONENTE



$$f: x \in \mathbb{Z} \mapsto x^2 \in \mathbb{Z}$$

$$f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 4, 9, 16\}$$

$$f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, -1, -2\}$$

$$f(\{2, 5, 7, 9, 10\}) = \{4, 25, 49, 81, 100\}$$

$$f^{-1}(\{2, 5, 7, 9, 10\}) = \{3, -3\}$$

$$f(\mathbb{N}) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$f^{-1}(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, \dots\} = \mathbb{Z}$$

$$f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$f^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$f(\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$f^{-1}(\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}) = \{0\}$$

$$f(\{4, 9, 25\}) = \{16, 81, 625\}$$

$$f^{-1}(\{4, 9, 25\}) = \{2, 3, 5, -2, -3, -5\}$$

$f$  NON E' NE' INIETTIVA NE' SURIETTIVA



