Definizione Classica di Probabilità

(Probabilità uniforme)

Consideriamo uno spazio campionario finito Ω e supponiamo che gli eventi elementari siano equiprobabili (hanno la stessa probabilità di verificarsi).
La probabilità dell'evento A relativo a Ω è

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Definizione Classica di Probabilità

(Probabilità uniforme)

Consideriamo uno spazio campionario finito Ω e supponiamo che gli eventi elementari siano equiprobabili (hanno la stessa probabilità di verificarsi).
La probabilità dell'evento A relativo a Ω è

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Problemi:

1. $\#A$ e $\#\Omega$ non sempre si conoscono;
2. Ω finito;
3. eventi elementari equiprobabili.

1) $\#A$ e $\#\Omega$ non sempre si conoscono

Esempio: Un'urna contiene delle palline e ne estraggo una. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?

Sia A : "esce una pallina rossa".

1) $\#A$ e $\#\Omega$ non sempre si conoscono

Esempio: Un'urna contiene delle palline e ne estraggo una. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?

Sia A : "esce una pallina rossa".
$\Omega = ?$

1) $\#A$ e $\#\Omega$ non sempre si conoscono

Esempio: Un'urna contiene delle palline e ne estraggo una. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?

Sia A : "esce una pallina rossa".
$\Omega = ?$
$\#\Omega = ?, \;\; \#A = ?$

1) $\#A$ e $\#\Omega$ non sempre si conoscono

Esempio: Un'urna contiene delle palline e ne estraggo una. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?

Sia A : "esce una pallina rossa".
$\Omega = ?$
$\#\Omega = ?, \ \ \#A = ?$

Con queste sole informazioni non posso calcolare la probabilità di A usando la formula $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$

2) Spazio Campionario Finito

Esempio: Calcola la probabilità che domani a Varese ci sia una temperatura di 25 gradi.

Sia A : "temperatura misura 25 gradi".

2) Spazio Campionario Finito

Esempio: Calcola la probabilità che domani a Varese ci sia una temperatura di 25 gradi.

Sia A : "temperatura misura 25 gradi".
Se $\Omega = [15, 30] \subset R$ allora $\#\Omega$ è infinito.
Non posso calcolare la probabilità di A usando la formula
$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

3) Eventi elementari equiprobabili

Esempio: Decidiamo di fare un picnic domani, ma dobbiamo essere certi che non piova.

Individuiamo due eventi A : "piove", B : "non piove".
Secondo la definizion classica A e B devono essere equiprobabili, quindi hanno entrambi probabilità di verificarsi uguale a $\frac{1}{2}$.

3) Eventi elementari equiprobabili

Esempio: Decidiamo di fare un picnic domani, ma dobbiamo essere certi che non piova.

Individuiamo due eventi A : "piove", B : "non piove".
Secondo la definizion classica A e B devono essere equiprobabili, quindi hanno entrambi probabilità di verificarsi uguale a $\frac{1}{2}$.

Se guardiamo le previsioni del tempo e vediamo che c'è una perturbazione in arrivo allora $P(A) > \frac{1}{2}$.

3) Eventi elementari equiprobabili

Perchè non posso applicare la definizione classica si probabilità in presenza di non equiprobabilità?

Esempio: Lanciamo un dado truccato dove $P(\mathit{esce}\ 6)$ è maggiore della probabilità che escano altre facce.

Consideriamo gli eventi A :" esce un numero pari" e B :" esce un numero dispari".

$$A = \{2, 4, 6\} \textbf{ e } B = \{1, 3, 5\}$$

3) Eventi elementari equiprobabili

Perchè non posso applicare la definizione classica si probabilità in presenza di non equiprobabilità?

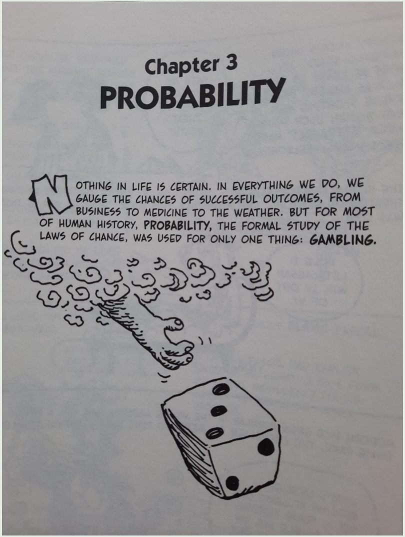
Esempio: Lanciamo un dado truccato dove $P(esce\ 6)$ è maggiore della probabilità che escano altre facce.

Consideriamo gli eventi A :" esce un numero pari" e B :" esce un numero dispari".

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ e } B = \{1, 3, 5\}$$

Secondo la definizione classica $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, ma noi ci aspettiamo che $P(A) > P(B)$.

Nuove definizioni di probabilità



Problemi:

1. $\#A$ e $\#\Omega$ non sempre si conoscono;
2. Ω finito;
3. eventi elementari equiprobabili.

Definizione Frequentista di Probabilità

Esempio: Un'urna contiene delle palline e ne estraggo una. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?

Sia A : "esce una pallina rossa".

- Voglio calcolare $P(A)$;

costruisco A e Ω:

- Estraggo 100 palline;
- Tra queste 18 sono rosse;
- deduco che $P(A) = \frac{18}{100}$.

Definizione: Quando si osserva una serie di prove e si assume che le prove siano ripetizioni identiche condizioni di un certo esperimento aleatorio, la probabilità di A è calcolata come

$$P(A) = \frac{\text{numero di prove in cui si è verificato } A}{\text{Numero totale di prove}}.$$

Definizione Frequentista di Probabilità

Definizione: Quando si osserva una serie di prove e si assume che le prove siano effettuate in identiche condizioni di un certo esperimento aleatorio, la probabilità di A è calcolata come

$$P(A) = \frac{\text{numero di prove in cui si è verificato } A}{\text{Numero totale di prove}}.$$

Problemi:

1. Quante volte devo ripetere l'esperimento? Un gran numero di volte, ma non sempre è possibile (Esempio: partita di calcio);
2. la probabilità può differire in base al numero di prove effettuate (Esempio: $P(A) = \frac{18}{101}$ se estraggo una nuova pallina).

Definizione soggettiva di probabilità (De Finetti)

Esempio: Chiedo a uno studente quale siano le probabilità che prenda 30 e Lode all'esame di Analisi Matematica.
Non posso applicare la definizione classica o frequentista.
Se lo studente risponde che le probabilita' di prendere 30 e lode siano del 1% (molto improbabile, secondo lui) vuol dire che è disposto a puntare 1 euro su questo evento per riceverne 100 nel caso in cui si verifichi, e perdere un euro nel caso in cui non si verifichi.

Lo studente punta solo un euro perchè è "abbastanza sicuro" di perderlo!

Esempio: Chiedo a uno studente quale siano le probabilità che prenda 30 e Lode all'esame di Analisi Matematica.

Se lo studente risponde che le probabilita' di prendere 30 e lode siano del 90% (molto probabile, secondo lui) vuol dire che è disposto a puntare 90 euro su questo evento per riceverne 100 nel caso in cui si verifichi, e perdere 90 euro nel caso in cui non si verifichi.

Lo studente è disposto a puntare 90 euro perchè è "abbastanza sicuro" di non perderli (e quindi di vincere 100-90 euro)!

Perchè lo scommettitore punta 90 euro e non 1 euro dato che è abbastanza sicuro di vincere? Cioè perchè accontentarsi di guadagnare 10 euro invece di 99 euro?

Chiamiamo Alice la scommettitrice e Bob il banco.
Alice pensa che la probabilità di superare l'esame con 30 e Lode (evento A) sia molto alta.
Per guadagnare il più possibile dalla sua scommessa, Alice punta solo un euro. In questo modo è molto sicura di guadagnare 99 euro (fin qui tutto bene).
Allo stesso tempo, per definire la probabilità secondo la definizione soggettiva, "deve" verificarsi il **principio di coerenza**, cioè Alice deve accettare di fare la stessa scommessa al contrario: Bob punta un solo euro e lei gliene dà 100 nel caso in cui l'evento A si verifichi (è ovvio che non lo farebbe mai!)
Per definire dunque la probabilità soggettiva, il puntatore deve essere "coerente" ovvero deve essere fare una puntata che sia tanto conveniente per lui quanto per il banco.
In altre parole il puntatore deve fornire una "stima onesta" e non finalizzata a guadagnare quanto più possibile.

Principio di coerenza

Alice deve ritenere **giusto** dare 100 euro a chi ne punta 90 nel caso in cui si verifichi l'evento. Non a chi punta meno di 90 (coverrebbe di più al puntatore) e non a chi ne punta più di 90 (converrebbe di più ad Alice).

Definizione soggettiva di probabilità (De Finetti)

Definizione: La probabilità è la misura del grado di fiducia (compreso tra 0 e 1) che un individuo coerente assegna al verificarsi di un dato evento in base alle sue conoscenze. Sia A un evento, allora

$$P(A) = \frac{\text{somma che un individuo è disposto a pagare}}{\text{somma che l'individuo riceve in compenso se A si verifica}}.$$

(Principio di coerenza: l'individuo è disposto a scambiare il suo ruolo con il banco)

Definizione soggettiva di probabilità

La probabilità soggettiva non è in contrasto con gli altri due approcci, ma li contiene come casi particolari. Non richiede simmetria tra gli eventi, né ripetizione dell'evento. È universale, si applica a qualsiasi problema, si accorda bene ai problemi in contesto economico, sociale, biologico ed è particolarmente adatta a prendere decisioni in condizioni di incertezza.

Problema:

- Se individui diversi hanno informazioni di partenza diverve allora potrebbero attribuire allo stesso evento probabilità diverse.

Le definizioni di probabilità

Approccio Classico, Pierre Simon Laplace (1749-1827).

La genesi di questa idea risiede nei giochi d'azzardo: dadi, carte, 13 monete.

Le critiche a questo approccio sono ben note: la "definizione" non è una definizione perché è circolare: i "casi possibili" devono essere equiprobabili. Questo approccio funziona solo se i casi possibili hanno tutti la stessa probabilità e, quindi, al di là della circolarità definitoria, funziona solo quando le nostre conoscenze sul fenomeno sono assai elevate (tanto da poter supporre che i casi possibili siano equiprobabili) o, specularmente, talmente basse da essere indotti a considerare equiprobabili i casi elementari in assenza di altre informazioni.

Se i casi possibili sono infiniti, anche problemi banali diventano inaccessibili: qual è la probabilità che un numero naturale sia pari?

Anche nel caso finito, se si perde la simmetria (equiprobabilità) si possono ottenere risultati insensati: qual è la probabilità che io sia vivo domani a quest'ora? C'è un caso "favorevole" (molto favorevole: sarò vivo) e due casi possibili (sarò vivo oppure no), dunque la probabilità che domani a quest'ora sia vivo è 1/2?

L'approccio classico lascia intendere che la probabilità sia oggettiva e viva nelle cose; a noi resta il compito di scovarla e di calcolarla. È davvero così?

Qual è la probabilità che quest'anno io non provochi incidenti con la mia auto? Qual è la probabilità che io sia in vita tra 10 anni? Qual è la probabilità che il titolo ENI oggi aumenti il proprio valore? Qual è la probabilità che un giovane trovi lavoro entro un anno dalla fine degli studi? Qual è la probabilità che l'Italia raggiunga il pareggio di bilancio entro il prossimo anno?

L'approccio classico non ha strumenti di alcun tipo per problemi di questo genere; interi settori della vita economica reale (la gestione pensionistica ed assicurativa, per esempio) presentano problemi per i quali l'approccio classico è impotente.

Approccio frequentista, Richard Von Mises, (1883-1953).

La genesi di questa idea è naturalmente quella statistica, viene dal Mondo delle assicurazioni, ma anche dalla biologia, dalle scienze sociali, dall'economia.

Anche questa "definizione" non è una definizione: chi ha tempo di fare "tanti" esperimenti? Chi garantisce che gli esperimenti siano eseguiti nelle stesse condizioni? Questo sembra un atto di fede, al solo scopo di mascherare da definizione ciò che altro non è che una stima empirica.

Ci sono casi in cui la ripetizione dell'esperimento non è possibile: qual è la probabilità che la nazionale italiana vinca il prossimo Sei Nazioni di rugby?

Qual è la probabilità che un terremoto distrugga San Francisco entro il 2020? E ancora: qual è la probabilità che io sia vivo domani a quest'ora? Qual è la probabilità che lo studente di fronte a me prenda 30 e lode nell'esame di Matematica? L'approccio classico prevederebbe 15 casi possibili bocciato, 18, 19, ..., 30, 30 e lode e 1 solo caso favorevole; l'approccio statistico vorrebbe che il povero malcapitato ripetesse l'esame un gran numero di volte, e alla fine contasse il numero di volte in cui ha preso 30 e lode.

Approccio soggettivo, Bruno de Finetti (1906-1985)

La probabilità è il grado di fiducia (degree of belief) di un osservatore nel verificarsi di un evento, ed è misurabile attraverso la seguente richiesta:

qual è l'importo p che si ritiene equo puntare in una scommessa in cui se

- l'evento si verifica si riceve 1 (e dunque si guadagna 1-p);
- se l'evento non si verifica si perde la posta p.

In una formulazione equivalente più generale, ipotizzando indifferenza al rischio dei giocatori, lo scambio di p contro 1 diventa lo scambio di una qualunque somma pS contro la somma S.

Per esempio, dire che la probabilità di pioggia domani è del 70% significa ritenere equa una scommessa in cui si punta 70 (= 0.7S) e si riceve 100 (= S) in caso che l'evento si verifichi.

Esempio

Una persona è disposta a pagare 45 euri in cambio di 120 se la squadra di calcio di cui è tifosa vincerà lo scudetto. Quale è la probabilità che questa persona attribuisce all'evento? Si applica la definizione di probabilità soggettiva: $P(A) = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$.

"Ritenere equo" (oppure coerente) significa in sostanza considerare indifferente ricoprire il ruolo di scommettitore oppure di banco, e cioè ritenere indifferenti le due posizioni seguenti: pagare pS il diritto a riscuotere S nel caso che l'evento si verifichi (ruolo dello scommettitore), oppure accettare una scommessa di importo pS e impegnarsi a pagare S nel caso che l'evento si verifichi (ruolo del banco). Dunque il numero p deve essere consistente con entrambi i ruoli e costringe a mettere in campo correttamente tutte le informazioni di cui si dispone.

La valutazione di p deve essere coerente nel senso che non deve consentire sistemi di puntate che conducano a vincite sicure oppure perdite sicure.

La probabilità è dentro di noi, non fuori di noi.

In questo quadro accade un grande cambiamento di prospettiva: la probabilità non vive nell'evento, ma vive nell'osservatore; la probabilità è soggettiva. Valutatori differenti sono disposti a puntare somme diverse sullo stesso evento, ragionevolmente perché dispongono di diverse informazioni. Ecco dunque, dopo tre secoli di storia della probabilità, una rivoluzione copernicana: la probabilità non è una proprietà della realtà, che devo scoprire o calcolare, è invece una proprietà del soggetto che la valuta ed esprime lo stato attuale delle informazioni che possiede; non solo può cambiare da persona a persona, ma per uno stesso valutatore può cambiare se cambia lo stato di informazioni che possiede. In questo senso de Finetti arriva a dire "la probabilità non esiste": non esiste al di fuori dell'osservatore. Quando estraggo una carta da un mazzo dico che la probabilità di pescare una carta di cuori è $1/4$; ma se mentre la sto estraendo dal mazzo vedo, riflesso sul tavolo di vetro, una vaga luce rossa, allora la probabilità cambia e diventa $1/2$. La probabilità classica ipotizza in sostanza una situazione statica, in cui la simmetria degli eventi elementari non muta, né muta lo stato delle informazioni del valutatore. La probabilità soggettiva non è in contrasto con gli altri due approcci, ma li contiene come casi particolari. Non richiede simmetria tra gli eventi, né ripetizione dell'evento. È universale, si applica a qualsiasi problema, si accorda bene ai problemi in contesto economico, sociale, biologico ed è particolarmente adatta a prendere decisioni in condizioni di incertezza.

Un esempio, dovuto a de Finetti, chiarisce bene la differenza tra i tre approcci.

Immaginiamo che ci sia una partita di calcio e che lo spazio dei tre eventi siano: la vittoria della squadra di casa, la vittoria della squadra ospite e il pareggio. Vediamo cosa accade con i tre approcci:

- secondo la teoria classica esiste 1 probabilità su 3 che avvenga il primo evento,
- secondo la teoria frequentista ci si può dotare di un almanacco e controllare tutte le partite precedenti e calcolare la frequenza di un evento,
- secondo la teoria soggettiva ci si può documentare sullo stato di forma dei calciatori, sul terreno di gioco e così via fino ad emettere una probabilità soggettiva.

Definizione assiomatica di Probabilità

Definizione (Definizione assiomatica di probabilità (Kolmogorov, 1933)). *Sia Ω uno spazio campionario. $P \to \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty[$ è una* funzione di probabilità *se verifica le seguenti proprietà:*

1. *Se $A \subseteq \Omega$, allora $P(A) \geq 0$;*

2. *$P(\Omega) = 1$;*

3. *Se $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ sono mutuamente disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$), allora $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.*

Osservazione: l'assioma (1) è ridondante, perchè se $P(A) \in [0, +\infty[$ allora vale necessariamente che $P(A) \geq 0$.

Esempio. *Esperimento: Lancio una moneta. $\Omega = \{T, C\}$. Considero la funzione $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty[$ definita dalla seguente tabella.*

A	$\emptyset$	Ω	$\{T\}$	$\{C\}$
$P(A)$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Si può verificare che P è una funzione di probabilità:

1. *La proprietà 1 della definizione assiomatica di probabilità è verificata, infatti $P(\emptyset), P(\Omega), P(\{T\}), P(\{c\}) \geq 0$.*

2. *La proprietà 2 è verificata perchè $P(\Omega) = 1$;*

3. *La proprietà 3 è verificata:*

$$P(\{T\} \cup \{C\}) = P(\Omega) = 1 \text{ e } P(\{T\}) + P(\{C\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1;$$

$$P(\{T\} \cup \emptyset) = P(\{T\}) = \frac{1}{3} \text{ e } P(\{T\}) + P(\emptyset) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3};$$

$$P(\{C\} \cup \emptyset) = P(\{C\}) = \frac{2}{3} \text{ e } P(\{C\}) + P(\emptyset) = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3};$$

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1 \text{ e } P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + 0 = 1.$$

Esempio. *Esperimento: Lancio una moneta.* $\Omega = \{T, C\}$. *Considero la funzione* $P' : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty[$ *definita dalla seguente tabella.*

A	$\emptyset$	Ω	$\{T\}$	$\{C\}$
$P'(A)$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Nonostante le proprietà 1 e 2 sono verificate, P' *NON è una funzione di probabilità. La proprietà 3 infatti non vale per* P'*:*

$$P'(\{T\} \cup \{C\}) = P'(\Omega) = 1 \text{ e } P'(\{T\}) + P'(\{C\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

quindi $P'(\{T\} \cup \{C\}) \neq P'(\{T\}) + P'(\{C\})$.

La definizione assiomatica elenca solo le proprietà che si devono verificare quando assegnamo la probabilità agli eventi, ma non indica come assegnare la probabilità agli eventi.

Si può dimostrare che le probabilità calcolata con la definizione classica, frequentista e soggettiva verifica le proprietà (1), (2) e (3) della definizione assiomatica.

Teorema. *La probabilità uniforme (definizione classica) è una funzione di probabilità.*

Dimostrazione.

Proprietà 1 *Sia* $A \subseteq \Omega$. $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} \geq 0$ *(il quoziente tra due numeri positivi è sempre un numero positivo).*

Proprietà 2 $P(\Omega) = \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$.

Proprietà 3 *Siano* $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ *eventi mutuamente disgiunti.*

Dato che $A_1, \ldots, A_n$ *sono mutuamente disgiunti,*

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \#A_1 + \ldots + \#A_n.$$

Allora,

$$P(\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n)) = \frac{\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n)}{\#\Omega} = \frac{\#A_1 + \ldots + \#A_n}{\#\Omega} = \frac{\#A_1}{\#\Omega} + \ldots + \frac{\#A_n}{\#\Omega} = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

Proprietà della funzioni di probabilità

Definizione. *Chiamiamo* spazio di probabilità *la terna* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$*, dove* Ω *è uno spazio campionario,* $P(\Omega)$ *è il rispettivo spazio degli eventi e* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty[$ *è una funzione di probabilità.*

Proprietá 1 (Proprietà della probabilità dell' evento contrario)**.** *Sia* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *uno spazio di probabilità. Se* $A \subseteq \Omega$ *allora*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

dove $\bar{A}$ *è l'evento contrario di* A*.*

Esempio. *Considero lo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$*, dove* Ω *è l'insieme dei risultati del lancio di un dado (*$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*) e* P *è la probabilità uniforme. Sia* A *l'evento* esce un numero pari*, allora* $P(A) = \dfrac{\#\{2, 4, 6\}}{\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

$P(A)$ *si puà anche calcolare utilizzando la propeirtà 1:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\#\{1, 3, 5\}}{\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 1. *Un individuo su 1000 è allergico ad un determinato vaccino. Qual è la probabilità di assumere quel vaccino senza manifestare fenomeni di allergia?*

Svolgimento. *Dobbiamo calcolare* $P(A)$ *dove* A *è l'evento* "un individuo assume il vaccino senza manifestare fenomeni di allergia"*, ovvero* "un individuo non è allergico al vaccino"*. Il suo complementare è* $\bar{A}$: " un individuo è allergico al vaccino". *Dalla traccia,* $P(\bar{A}) = \frac{1}{1000}$*; quindi per la proprietà 1,*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{1000} = 0,99.$$

Proprietá 2. *Sia* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *uno spazio di probabilità. Se* $A, B \subseteq \Omega$ *allora*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}).$$

Esempio. *Considero lo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$*, dove* Ω *è l'insieme dei risultati del lancio di un dado (*$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*) e* P *è la probabilità uniforme. Considero gli eventi* A *e* B*:*

A : *"esce un numero* > 3*";*

B : *"esce un numero dispari"*

$P(B) = P(\{1,3,5\}) = \frac{1}{2}$;
$P(B \cap A) = P(\{1,3,5\} \cap \{4,5,6\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$;
$P(B \cap \bar{A}) = P(\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\}) = P(\{1,3\}) = \frac{2}{6}$;
Allora, $P(B)$ *e* $P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$ *coincidono perchè sono entrambi uguali a* $\frac{1}{2}$.