Esame di Logica

15 gennaio 2025

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutte le seppie sono cefalopodi;
  - Tutti i cefalopodi sono molluschi;
  - Tutti i cefalopodi sono marini;
  - Qualche mollusco è terrestre;
  - Niente che è marino è terrestre.
  - Tutti i molluschi sono inverterbrati;
  - Qualche invertebrato vola.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Nessuna seppia è terrestre;
  2. Qualche mollusco non è una seppia;
  3. Qualche invertebrato non è marino;
  4. Qualche seppia non vola.

SOLUZIONE:

- Sia s = seppia, c = cefalopode, m = mollusco, a = marino, t = terrestre, i = invertebrato, v = volante. Allora la teoria è

- $\mathbf{A}(s, c)$;
- $\mathbf{A}(c, m)$;
- $\mathbf{A}(c, a)$;
- $\mathbf{I}(m, t)$;
- $\mathbf{E}(a, t)$;
- $\mathbf{A}(m, i)$;
- $\mathbf{I}(i, v)$.

- Consideriamo le quattro affermazioni

1. $\mathbf{E}(s, t)$ segue per dimostrazione diretta:

(1)	**A**(s,c)	Ipotesi
(2)	**A**(c,a)	Ipotesi
(3)	**E**(a,t)	Ipotesi
(4)	**A**(s,a)	PS1, (2), (1)
(5)	**E**(s,t)	PS2, (3), (4)

2. $\mathbf{O}(m, s)$ segue per dimostrazione diretta:

(1)	**A**(s,c)	Ipotesi
(2)	**A**(c,a)	Ipotesi
(3)	**I**(m,t)	Ipotesi
(4)	**E**(a,t)	Ipotesi
(5)	**A**(s,a)	PS1, (2), (1)
(6)	**E**(s,t)	PS2, (4), (5)
(7)	**E**(t,s)	C1, (6)
(8)	**O**(m,s)	PS4, (7), (3)

3. $\mathbf{O}(i, a)$ segue per dimostrazione indiretta:

(1)	**I**(m,t)	Ipotesi
(2)	**E**(a,t)	Ipotesi
(3)	**A**(m,i)	Ipotesi
(4)	**A**(i,a)	$\overline{\mathbf{O}(i, a)}$
(5)	**E**(i, t)	PS2, (2), (4)
(6)	**E**(m,t)	PS2, (5), (3)

   e $\mathbf{E}(m, t)$ è la contraddizione di $\mathbf{I}(m, t)$.

4. $\mathbf{O}(s, v)$ non segue dalla teoria. Infatti, consideriamo il modello $M = (\Delta, \iota)$ dove
   - $\Delta = \{1, 2\}$;
   - $\iota(s) = \{1\}$;
   - $\iota(c) = \{1\}$;
   - $\iota(m) = \{1, 2\}$;
   - $\iota(a) = \{1\}$;

- $\iota(t) = \{2\}$;
- $\iota(i) = \{1, 2\}$;
- $\iota(v) = \{1, 2\}$.

Allora $\mathbf{A}(s, c)$ è soddisfatta, perchè $\iota(s) \subseteq \iota(c)$; $\mathbf{A}(c, m)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \subseteq \iota(m)$; $\mathbf{A}(c, a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \subseteq \iota(a)$; $\mathbf{I}(m, t)$ è soddisfatta, perchè $\iota(m) \cap \iota(t) = \{2\} \neq \emptyset$; $\mathbf{E}(a, t)$ è soddisfatta, perchè $\iota(a) \cap \iota(t) = \emptyset$; $\mathbf{A}(m, i)$ è soddisfatta, perchè $\iota(m) \subseteq \iota(i)$; $\mathbf{I}(i, v)$ è soddsifatta, perchè $\iota(i) \cap \iota(v) = \{1, 2\} \neq \emptyset$; ma $\mathbf{O}(s, v)$ **non** è soddisfatta, perchè $\iota(s) \subseteq \iota(v)$.

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Se è giorno e non sono in vacanza, vado al lavoro;
  - Se vado al lavoro, non sono in vacanza.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se non è giorno, non vado al lavoro;
  - Se sono in vacanza e è giorno, non vado al lavoro.
- Verificate se la teoria ha "vado al lavoro oppure sono in vacanza" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere le altre formule del ramo).

  ATTENZIONE: Non è consentito applicare trasformazioni per semplificare formule prima di applicare il metodo del tableau (non porterebbe a conclusioni sbagliate, ma non è parte della procedura). Per esempio, se una delle formule iniziali del tableau fosse un'espressione del tipo $\neg(X \vee (Y \vee Z))$, non potete riscriverla come $\neg X \wedge (\neg Y \wedge \neg Z)$ (anche se le due formule sono logicamente equivalenti).

SOLUZIONE:

- Sia G = "è giorno", V = "sono in vacanza" e L = "vado al lavoro". Allora la teoria è

$$(G \wedge \neg V) \to L$$
$$L \to \neg V$$

- La tabella di verità è

G	V	L	$G \wedge \neg V$	$(G \wedge \neg V) \to L$	$L \to \neg V$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

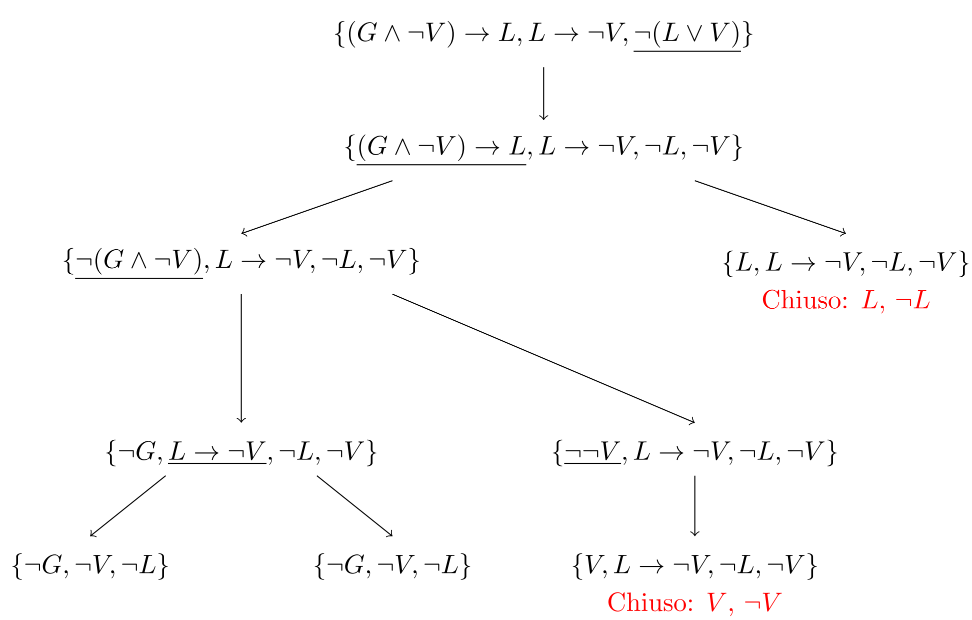
  e quindi le valutazioni che soddisfano la teoria sono quelle che assegnano a G, V, L i valori $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ o $(1,1,0)$.

- Le due affermazioni corrispondono a $\neg G \to \neg L$ e a $(V \wedge G) \to \neg L$.

G	V	L	$\neg G \to \neg L$	$V \wedge G$	$(V \wedge G) \to \neg L$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1

  Quindi la prima formula non segue dalla teoria, ma la seconda sì.

- La formula $L \vee V$ non segue dalla teoria, secondo il seguente tableau aperto:



Le due foglie non chiuse corrispondono alla valutazione ($G = 0, V = 0, L = 0$), che soddisfa tutti gli assiomi della teoria ma non soddisfa $L \vee V$.

3 Risoluzione Proposizionale

Considerate la teoria proposizionale

$$\Gamma := \{(\neg X \to \neg Z) \wedge (Y \to \neg Z), (X \to Y) \vee W\}.$$

- Convertite tutte le formule della teoria in formule equivalenti in Forma Normale Congiuntiva;
- Utilizzando la Procedura di Davis-Putnam, verificate se Γ ha come conseguenza $(W \to \neg Z) \to \neg Z$.

SOLUZIONE:

- Abbiamo che

$$\begin{aligned}(\neg X \to \neg Z) \wedge (Y \to \neg Z) &\equiv (\neg\neg X \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z)\\ &\equiv (X \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z)\end{aligned}$$

  e che

$$(X \to Y) \vee W \equiv \neg X \vee Y \vee W.$$

- Convertiamo in CNF anche la negazione di $(W \to \neg Z) \to \neg Z)$:

$$\begin{aligned}\neg((W \to \neg Z) \to \neg Z) &\equiv (W \to \neg Z) \wedge \neg\neg Z\\ &\equiv (W \to \neg Z) \wedge Z\\ &\equiv (\neg W \vee \neg Z) \wedge Z\\ &\equiv (\neg W \wedge Z) \vee (\neg Z \wedge Z)\\ &\equiv (\neg W \wedge Z) \vee \perp \equiv \neg W \wedge Z\end{aligned}$$

  (NOTA: $(\neg W \vee \neg Z) \wedge Z$ è già in CNF, ma sfruttando il fatto che $Z \wedge \neg Z$ è sempre falso e la distributività di $\vee$ e $\wedge$ possiamo trovare una CNF più semplice.)

  Quindi la formula segue dalle premesse se e solo se l'insieme di clausole

$$S = \{\{X, \neg Z\}, \{\neg Y, \neg Z\}, \{\neg X, Y, W\}, \{\neg W\}, \{Z\}\}$$

  è insoddisfacibile. Applichiamo la procedura di Davis-Putnam:

  1. $\{\{X, \neg Z\}, \{\neg Y, \neg Z\}, \{\neg X, Y, W\}, \{\neg W\}, \{Z\}\}$
     Non ci sono tautologie o clausole sussunte. Scegliamo come pivot Z:
  2. $\{\{\neg X, Y, W\}, \{\neg W\}, \{X\}, \{\neg Y\}\}$ Ancora niente tautologie o clausole sussunte. Scegliamo come pivot X:

3. $\{\{\neg W\}, \{\neg Y\}, \{Y, W\}\}$ Ancora niente tautologie o clausole sussunte. Scegliamo come pivot Y:
4. $\{\{\neg W\}, \{W\}\}$ Ancora niente tautologie o clausole sussunte. Scegliamo come pivot W:
5. $\{\square\}$

Visto che abbiamo trovato la clausola vuota $\square$, l'insieme di clausole iniziale è insoddisfacibile e quindi la formula segue dalla teoria.