Esame di Algebra e Geometria del 19/01/2022

Nome Cognome... **Matricola.....................................** D

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../6] 1. Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{4, 5, 6, 7\}$.

- Quanti elementi ha l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times Y)$?
- Si consideri la funzione $g : X \to (X \times Y)$ definita nel seguente modo:

$$g(1) = (1, 4) \qquad g(2) = (3, 7) \qquad g(3) = (3, 4)\,.$$

  La funzione g è iniettiva e/o suriettiva? Perché?
- La relazione $\mathcal{S} = \{(4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (4, 5), (5, 7), (4, 7), (4, 6)\}$ è una relazione d'equivalenza sull'insieme Y? E' una relazione d'ordine? Disegnare il diagramma di Hasse.

[.../4] 2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

[.../4] 3. Scrivere la tabella moltiplicativa di $\mathbb{Z}_5$ e determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_5$. Che struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ e perché?

[.../4] 4. Dare la definizione di sottospazio vettoriale e di base. Dire se $\{(2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ e $\{(a, 2a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e trovare eventualmente una loro base.

[.../5] 5. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli. Dire se il seguente sistema ha soluzioni e quante ne ha, e calcolarle nel caso in cui esistano:

$$\begin{cases} 2x & +2y & & = & 2 \\ x & +y & +z & = & 2 \\ & 2y & +2z & = & 4 \end{cases}$$

[.../7] 6. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 3y, x + 3y + 3z)\,.$$

Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$. Trovare inoltre gli autovalori di f, le molteplicità algebriche e geometriche, gli spazi degli autovettori e una base per ogni spazio di autovettori. Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori di f.

Totale: [.../30]