Esame di Algebra e Geometria del 17/04/2012 - Svolgimento di alcuni esercizi

Nome Cognome... **Matricola...................................**A

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

1. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sia $\mathcal{R}$ la relazione su $\mathcal{P}(A)$ definita, per ogni $X, Y \subseteq A$, da

$$X\mathcal{R}Y \text{ se e solo se } |X| = |Y|$$

dove con $|X|$ e $|Y|$ denotiamo il numero di elementi di X e di Y. In altre parole, due sottoinsiemi di A sono nella relazione $\mathcal{R}$ se e solo se hanno lo stesso numero di elementi.

- Quanti elementi hanno gli insiemi $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?
- Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza e dire quanti elementi ha l'insieme quoziente $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R}$.
- Per ogni $X \subseteq A$ (con $X \neq \emptyset$) denotiamo con $\min X$ il più piccolo elemento di X. Consideriamo la funzione
$$f : X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to \min X \in A$$
(cioè f è la funzione che ad ogni sottoinsieme di A diverso dall'insieme vuoto associa il suo più piccolo elemento). Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

Svolgimento.

- ...
- La relazione $\mathcal{R}$ è tale che in ogni classe d'equivalenza ci sono tutti i sottoinsiemi di A che hanno lo stesso numero di elementi. Quindi ci sono 7 classi di equivalenza: quelle dei sottoinsiemi con 0 elementi (contenente solo l'insieme vuoto), quella con i sottoinsiemi con 1 elemento, con 2, 3, ..., 6 elementi.
- La funzione f non è iniettiva perchè ci sono sottoinsiemi diversi che hanno la stessa immagine (per esempio $f(\{1, 3, 4\}) = f(\{1, 5, 6\}) = 1$). La funzione f è suriettiva perchè ogni elemento di A è il minimo di qualche sottoinsieme.

2. Provare per induzione che, per $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n + 1)\,.$$

Svolgimento. Vedi la prova del 7 febbraio.

3. Sia $S = \{a, b, c, d\}$ e sia F l'insieme delle funzioni biettive di S in S.

- Dimostrare che $(F, \circ)$ è un gruppo (dove $\circ$ è l'operazione di composizione di funzioni).
- Sia $H = \{f \in F \mid f(a) = a\}$. Dimostrare che H è un sottogruppo di F.

Svolgimento. La composizione di funzioni è una operazione associativa. La funzione identità (che appartiene a F perchè è una funzione biettiva) è l'elemento neutro. Ogni funzione biettiva è invertibile. Quindi $(F, \circ)$ è un gruppo.

L'insieme H è un sottoinsieme di F, chiuso rispetto all'operazione di composizione. Inoltre H contiene la funzione identica e l'inverso di ogni elemento, quindi è un sottogruppo.

4. Trovare il MCD di 126 e 120 usando l'algoritmo delle divisioni successive. Quanti sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{126}$?

5. Stabilire, al variare di k, quante soluzioni ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x & +y & & = & 1 \\ -x & +y & +z & = & 1 \\ kx & +3y & & = & 3 \\ x & -y & -z & = & -1. \end{cases}$$

Trovare le soluzioni per $k = 1$.

Svolgimento. La matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango di A possiamo procedere con il metodo delle orlature. Consideriamo il primo elemento 2 (in prima riga e prima colonna) e la matrice quadrata $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ che lo orla. Questa matrice ha determinante diverso da 0 quindi $rango(A) \geq 2$. Per vedere se la matrice A ha rango 3, orliamo la matrice 2×2. Se prendo la prima, la seconda e la quarta riga, si ottiene una matrice che ha determinante uguale a 0 perchè la quarta riga è un multiplo della seconda. Devo quindi considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a $6 - k$. Quindi la matrice A ha rango 2 per $k = 6$ mentre ha rango 3 per $k \neq 6$.

Consideriamo adesso la matrice estesa

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché la seconda colonna è uguale alla terza, questa matrice non può avere rango 4. Ragionando come in precedenza si vede che anche questa matrice ha rango 3 se $k \neq 6$ e rango uguale a 2 altrimenti. Quindi il sistema ha sempre soluzione, per $k = 6$ ci sono ∞^1 soluzioni, mentre per $k \neq 6$ c'è una sola soluzione.

Ponendo $k = 1$ si ha una sola soluzione che è $(0, 1, 0)$ (applicare per esempio il metodo di Gauss Jordan oppure il metodo di Cramer al sistema formato dalle prime tre equazioni).

6. Si calcolino gli autovalori della seguente matrice e si dica se è diagonalizzabile (cioè se ha una base formata da autovalori). Trovare una base per l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento. Per calcolare gli autovalori si devono trovare le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda)-3] - (\lambda-2) =$$

$$= (2-\lambda)[-\lambda+\lambda^2-3] + (2-\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-3+1) = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2).$$

Gli autovalori sono quindi le soluzioni dell'equazione

$$(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = 0$$

e quindi, dato che le soluzioni di $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ sono $\lambda = -1, 2$, si ha che 2 è un autovalore con molteplicità algebrica 2 e -1 è un autovalore con molteplicità algebrica 1. Per stabilire se la matrice è diagonalizzabile, dobbiamo verificare che tali autovalori siano regolari, cioè la che loro molteplicità algebrica e geometrica coincidono.

Per calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$, andiamo a studiare il relativo autospazio. Studiamo quindi il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

che si ottiene sostituendo $\lambda = 2$ nella matrice del polinomio caratteristico. Il rango di tale matrice è 2 e quindi l'autospazio ha dimensione $3 - 2 = 1$. Questo vuol dire che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ è 1, e quindi tale autovalore non è regolare, avendo molteplicità algebrica uguale a 2.

Una base dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$ si ottiene risolvendo il sistema omogeneo relativo alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono del tipo $(2z, 0, z)$ e quindi una base è il vettore $(2, 0, 1)$.