Probabilità e Statistica per l'Informatica **Fall-Winter 2023/24**

Esercizi svolti (credits: prof. Pietro Galliani)

6.1 Scarpe

Un uomo ha 8 paia di scarpe, ogni paio è diverso dagli altri, e le scarpe sono messe tutte assieme in una scatola dalla quale poi l'uomo estrae casualmente 4 scarpe.
Qual è la probabilità che, tra queste quattro scarpe,

1. Non ci sia nessun paio completo di scarpe;
2. Ci sia esattamente un paio completo di scarpe;
3. Ci siano esattamente due paia complete di scarpe;
4. Ci siano soltanto scarpe sinistre?

Fornire una spiegazione per ogni risposta.

6.1 Soluzione

Lo spazio Ω dei risultati dell'estrazione consiste in tutti i sottoinsiemi di quattro elementi dall'insieme delle 16 scarpe possedute. Quindi il numero di risultati è $\binom{16}{4}$.

1. *Nessun paio completo di scarpe.* Esaminiamo in quanti modi possiamo scegliere quattro scarpe senza nessun paio completo.

   Perché questo possa avvenire, le quattro scarpe devono appartenere a quattro "paia di scarpe" diverse tra loro. Quindi dobbiamo considerare che abbiamo l'opzione di scegliere prima quattro paia di scarpe dalle otto esistenti, e abbiamo $\binom{8}{4}$ possibilità; e poi per ognuna di queste paia possiamo scegliere la scarpa sinistra o la scarpa destra, e quindi abbiamo 2^4 possibilità.

   Quindi in totale il numero di modi è $\binom{8}{4} \cdot 2^4$ e quindi la probabilità richiesta è:

$$\frac{\binom{8}{4} \cdot 2^4}{\binom{16}{4}} = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13)}$$

$$= \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{15}^{3} \cdot \cancel{14} \cdot 13}$$

$$= \frac{24}{39}.$$

2. *Esattamente un paio completo di scarpe.* Esaminiamo in quanti modi possiamo scegliere quattro scarpe con esattamente un paio completo.

   Prima di tutto dobbiamo scegliere un paio (da 8 disponibili) di cui prendere entrambe le scarpe.

   Poi, visto che le due scarpe rimanenti non possono appartenere allo stesso paio, dobbiamo scegliere due paia diverse dalle 7 restanti, per $\binom{7}{2}$ possibilità; e infine dobbiamo scegliere se estrarre la scarpa sinistra o destra per queste due paia, per 2^2 possibilità.

   Quindi il numero di risultati che soddisfano la nostra condizione è $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot 2^2$, e la probabilità corrispondente è

$$\begin{aligned}\frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot 2^2}{\binom{16}{4}} &= \frac{8 \cdot (7 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{1 \cdot (2 \cdot 1) \cdot (16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13)} \\ &= \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot 6 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{16} \cdot \overset{5}{\cancel{15}} \cdot \cancel{14} \cdot 13} \\ &= \frac{24}{65}.\end{aligned}$$

3. *Due paia complete.* Per ottenere due paia complete di scarpe, è sufficiente scegliere due delle 8 paia (e estrarre sia la scarpa destra che quella sinistra di entrambe). Quindi ci sono $\binom{8}{2}$ possibilità, e la probabilità è

$$\begin{aligned}\frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{4}} &= \frac{(8 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(2 \cdot 1) \cdot (16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13)} \\ &= \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{16} \cdot \overset{5}{\cancel{15}} \cdot \cancel{14} \cdot 13} \\ &= \frac{1}{65}.\end{aligned}$$

4. *Solo scarpe sinistre.* Per estrarre un insieme di quattro scarpe sinistre, è sufficiente selezionare le 4 paia (dalle 8 disponibili) a cui appartengono. Quindi ci sono $\binom{8}{4}$ possibilità, e la probabilità richiesta è

$$\begin{aligned}\frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}} &= \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13)} \\ &= \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{15} \cdot \overset{2}{\cancel{14}} \cdot 13} \\ &= \frac{1}{26}.\end{aligned}$$

6.2 Durata di un ingranaggio

Supponete che la durata in giorni di un tipo di ingranaggio (prima della sua rottura) sia una variabile casuale con una funzione di densità nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 60 \\ \frac{c}{x^2} & x > 60, \end{cases}$$

Dove $c \in \mathbb{R}$ è una qualche costante.

1. Determinate il valore della costante c per cui questa f è una densità di probabilità.
2. Considerando la soluzione al punto precendente, qual è la probabilità che, di 5 ingranaggi di questo tipo, esattamente 2 si rompano entro 90 giorni? Possiamo supporre che la possibile rottura di un ingranaggio sia indipendente dalla possibile rottura di un altro.

6.2 Soluzione

1. Perchè f sia una densità, è necessario che

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{60}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{60}^{\infty} \frac{c}{x^2}\,dx \\ &= c \int_{60}^{\infty} x^{-2}\,dx = c\,\left[-x^{-1}\right]_{60}^{\infty} \\ &= c\,\left[-x^{-1}\right]_{60}^{\infty} = c\left(0 + \frac{1}{60})\right) = \frac{c}{60}. \end{aligned}$$

   e quindi che $c = 60$.

2. Se $\mathcal{X}_i$ è la durata dell'ingranaggio i, per $i \in \{1 \dots 5\}$,

$$\begin{aligned} P[\mathcal{X}_i \leq 90] &= \int_{60}^{90} 60x^{-2}dx \\ &= \left[-\frac{60}{x}\right]_{60}^{90} \\ &= -2/3 + 1 = 1/3. \end{aligned}$$

Quindi, il numero $\mathcal{Y}$ di ingranaggi che si romperanno nel periodo seguirà una distribuzione binomiale con $n = 5$ (cinque ingranaggi totali) e $p = 1/3$ (ogni ingranaggio ha probabilità $1/3$ di rompersi), e in particolare

$$P(\mathcal{Y} = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{2^3}{3^5} = \frac{80}{243}.$$

6.3 Ritardi di Treni

Ogni giorno Alice arriva in università in treno, cambiando treni una volta per ogni percorso.
Sappaimo che:

- Metà dei treni che prende inizialmente siano in ritardo.
- I ritardi dei treni che non sono puntuali hanno un valore atteso di 5 minuti.
- I ritardi dei treni (che sono in ritardo) seguono una distribuzione esponenziale.
- Il tempo tra l'arrivo previsto del primo treno e la partenza prevista del secondo treno è di 5 minuti.
- Il secondo treno che Alice deve prendere parte sempre all'orario di partenza previsto, senza aspettare il primo treno.

Qual è la probabilità che perderà la coincidenza?

6.3 Soluzione

Alice perderà la coincidenza se (i) il suo primo treno è in ritardo, e (ii) il ritardo è superiore a 5 minuti. Il ritardo del primo treno è una variabile casuale che denoteremo $\mathcal{D}$.
Per rispondere alla domanda, esprimiamo questa probabilità in termini della probabilità che il ritardo sia superiore a cinque minuti **se** c'è un ritardo, utilizzando la definizione di probabilità condizionata:

$$P[\textit{Ritardo},\ \mathcal{D} > 5] = P[\mathcal{D} > 5 \mid \textit{Ritardo}] \cdot P[\textit{Ritardo}]$$

Per ipotesi, abbiamo che $P[\textit{Ritardo}] = 1/2$.
Quindi dobbiamo solo calcolare

$$P[\mathcal{D} > 5 \mid \textit{Ritardo}].$$

Sappiamo che i ritardi dei treni ritardatari seguono una distribuzione esponenziale con valore atteso $E[\mathcal{D}] =$ 5 minuti.
Quindi, supponendo che il primo treno sia in ritardo, la funzione di ripartizione o densità di probabilità *cumulativa* di $\mathcal{D}$ sarà:

$$F_{\mathcal{D}}(t) = P(\mathcal{D} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

dove il parametro λ deve soddisfare $\frac{1}{\lambda} = E[\mathcal{D}] =$ 5 min, e quindi $\lambda = \frac{1}{5}$ min^{-1}. Pertanto,

$$P[\mathcal{D} > 5 \mid \textit{Ritardo}] = 1 - F_{\mathcal{D}}(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda 5}) = e^{-\frac{1}{5}5} = e^{-1} = 1/e = 0.3678794.$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo:

$$\begin{aligned} P[\textit{Ritardo},\ \mathcal{D} > 5] &= P[\mathcal{D} > 5 \mid \textit{Ritardo}] \cdot P[\textit{Ritardo}] \\ &= 0.3678794 \cdot 0.5 = 0.1839397. \end{aligned}$$

Alice perderà la coincidenza con probabilità approssimativamente del 18%.