Questo esame è a libro aperto: siete completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non potete però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di voi o con altri, o passare materiale tra di voi.

I tre esercizi hanno un peso complessivo di 10 punti l'uno, per un totale di 30 punti.

Non ha importanza che calcoliate il valore numerico preciso delle soluzioni; è invece importante mostrare il vostro ragionamento e le formule usate, arrivando a una risposta che *potrebbe* essere calcolata meccanicamente utilizzando una normale calcolatrice. Per esempio, se arrivate a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, potete fermarvi lì oppure potete continuare fino a arrivare al numero 252 (questo non sarà considerato un errore, ma non darà punti aggiuntivi). Ma se invece scrivete solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, la risposta non sarà considerata valida.

## 1 Dispositivi

Un magazzino contiene 4 dispositivi di tipo A e 6 dispositivi di tipo B. Da questo magazzino vengono estratti casualmente (senza reinserimento) e installati 5 dispositivi.
Ogni anno, un dispositivo di tipo $A$ che non si sia già guastato ha il 5% di probabilità di guastarsi, e un dispositivo di tipo $B$ che non si sia già guastato ha il 10% di probabilità di guastarsi.

1. Qual è il valore atteso e la varianza del numero di anni che un dispositivo di tipo $A$ durerà prima di guastarsi? E qual è il valore e la varianza del numero di anni che un dispositivo di tipo $A$ durerà prima di guastarsi?

2. Sia $\mathcal{X}$ il numero di dispositivi di tipo $A$ che sono stati estratti dal magazzino. Calcolate $P(\mathcal{X} = 0)$, $P(\mathcal{X} = 1)$, $P(\mathcal{X} = 2)$, $P(\mathcal{X} = 3)$, $P(\mathcal{X} = 4)$ e $P(\mathcal{X} = 5)$.

3. Sia $\mathcal{E}$ l'evento "dopo due anni, nessun dispositivo si è ancora guastato". Trovate $P(X = k \mid \mathcal{E})$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

   **NOTA:** Calcolare il valore numerico è possibile, ma richiede calcoli piuttosto lunghi e ripetitivi. Come osservato sopra basta che scriviate la formula in termini di somme, coefficienti binomiali e potenze senza arrivare a un numero.

## *1 Soluzione*

1. **NOTA:** Nel testo c'è un typo, il secondo 'A' doveva essere un 'B'. Non toglierò punti agli studenti che hanno risposto solo per 'A' (la risposta per 'B' è comunque ottenuta nello stesso modo, se uno sa come rispondere in un caso sa come rispondere anche nell'altro).

Il numero di anni che un dispositivo di tipo A durerà prima di guastarsi segue una distribuzione geometrica

$$P(\text{Il dispositivo dura } k \text{ anni}) = (1-p)^k$$

per $p = 0.05$ (sarebbe $(1-p)^{(k-1)}p$ se dovessimo includere anche l'anno in cui si guasta). Quindi il suo valore atteso è $(1-p)/p = 19$ anni e la sua varianza è $(1-p)/p^2 = 380$ anni$^2$.

Per $B$, l'unica differenza è che $p = 0.1$, Quindi, il valore atteso è $(1-p)/p = 9$ anni e la varianza è $(1-p)/p^2 = 90$ anni$^2$.

2. Ci sono $\binom{10}{5} = 252$ modi di estrarre $5$ dispositivi dal magazzino. Di questi, ce ne sono $\binom{4}{k}\binom{6}{(5-k)}$ che estraggono $k$ dispositivi di tipo $A$, per $k = 0 \dots 4$; quindi,

   - $P(\mathcal{X} = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{1 \cdot 6}{252} \approx 0.024$;
   - $P(\mathcal{X} = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{4 \cdot 15}{252} \approx 0.238$;
   - $P(\mathcal{X} = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{6 \cdot 20}{252} \approx 0.4762$;
   - $P(\mathcal{X} = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{4 \cdot 15}{252} \approx 0.2381$;
   - $P(\mathcal{X} = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{1 \cdot 6}{252} \approx 0.024$;
   - $P(\mathcal{X} = 5) = 0$ (non è possibile estrarre $5$ dispositivi di tipo $A$, perchè il magazzino ne contiene solo $4$).

3. Utilizziamo il Teorema di Bayes: per $k = 0 \dots 4$,

$$P(\mathcal{X} = k \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X} = k)P(\mathcal{X} = k)}{P(\mathcal{E})},$$

dove

$$P(\mathcal{E}) = \sum_{j=0}^{4} P(\mathcal{E}|\mathcal{X} = j)P(\mathcal{X} = j).$$

(Il caso $k = 5$ di nuovo è ovvio, perchè $P(\mathcal{X} = 5 \mid \mathcal{E}) = 0$: continuiamo a non avere più di $4$ dispositivi di tipo $A$ in magazzino).

Ora, la probabilità che un dispositivo di tipo $A$ duri almeno due anni è $0.95^2$, mentre la probabilità che un dispositivo di tipo $B$ duri almeno due anni è $0.9^2 = 0.25$.

Quindi, per $k = 0 \dots 4$.

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X} = k) = (0.95^2)^k (0.9^2)^{5-k}$$

e, usando le formule per $P(\mathcal{X} = k)$ ottenute nel punto precedente,

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{X} = k)P(\mathcal{X} = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{(5-k)}}{\binom{10}{5}} \cdot (0.95^2)^k (0.9^2)^{5-k}$$

e

$$P(\mathcal{E}) = \sum_{j=0}^{4} \frac{\binom{4}{j}\binom{6}{(5-j)}}{\binom{10}{5}} \cdot (0.95^2)^j (0.9^2)^{5-j} \approx 0.4346$$

e quindi

- $P(\mathcal{X} = 0 \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=0)P(\mathcal{X}=0)}{P(\mathcal{E})} \approx 0.0191;$
- $P(\mathcal{X} = 1 \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=1)P(\mathcal{X}=1)}{P(\mathcal{E})} \approx 0.213;$
- $P(\mathcal{X} = 2 \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=2)P(\mathcal{X}=2)}{P(\mathcal{E})} \approx 0.474;$
- $P(\mathcal{X} = 3 \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=3)P(\mathcal{X}=3)}{P(\mathcal{E})} \approx 0.264;$
- $P(\mathcal{X} = 4 \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}|\mathcal{X}=4)P(\mathcal{X}=4)}{P(\mathcal{E})} \approx 0.0294.$

**2 Distribuzioni Continue**

Sia $\mathcal{X}$ una variabile casuale che segue la distribuzione continua uniforme tra i valori $0$ e $5$ (compresi), sia $\mathcal{Y}$ una variabile casuale che segue la distribuzione continua uniforme tra i valori $3$ e $10$ (compresi). Supponiamo inoltre che $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ siano indipendenti.

1. Scrivete la funzione di densità per $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ e calcolate il valore atteso e la varianza per entrambe.

2. Sia $\mathcal{Z} = \max(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Trovate la funzione cumulativa $F(z) = P(\mathcal{Z} < z)$ e la funzione di densità per $\mathcal{Z}$, e calcolate il valore atteso di $\mathcal{Z}$.

   **SUGGERIMENTO:** Per la funzione cumulativa, osservate che $P(\mathcal{Z} \leq z) = P(\mathcal{X} \leq z \,\text{e}\, \mathcal{Y} \leq z)$, visto che $\mathcal{Z} = \max(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Poi sfruttate il fatto che, visto che $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono indipendenti, $P(\mathcal{X} \leq z \,\text{e}\, \mathcal{Y} \leq z) = P(\mathcal{X} \leq z)P(\mathcal{Y} \leq z)$. La funzione cumulativa per $\mathcal{Z}$ che otterrete così sarà definita a tratti; per i "margini" tra un tratto all'altro, non preoccupatevi se la funzione di densità corrispondente non risulta definita (sono punti isolati, quindi non ha importanza per il calcolo del valore atteso).

3. Sia $\mathcal{W}$ una variabile casuale calcolata in questo modo: lanciamo una moneta non truccata, se viene testa allora $\mathcal{W} = \mathcal{X}$, e altrimenti $\mathcal{W} = \mathcal{Y}$.

   Supponendo che il valore di $\mathcal{W}$ sia minore o uguale di $6$, qual è la probabilità che il lancio di moneta sia risultato in testa?

***2 Soluzione***

1. La funzione di densità di $\mathcal{X}$ è

   $$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{se } 0 \leq x \leq 5; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   e la funzione di densità di $\mathcal{Y}$ è

   $$g(y) = \begin{cases} 1/7 & \text{se } 3 \leq x \leq 10; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Pe le proprietà della distribuzione continua uniforme, $\mathcal{X}$ ha valore atteso $(5+0)/2 = 2.5$ e varianza $1/12(5-0)^2 = 25/12$; e $\mathcal{Y}$ ha valore atteso $(10+3)/2 = 6.5$ e varianza $1/12(10-3)^2 = 49/12$.

2. Perchè $\mathcal{Z} \leq z$, è necessario che $\mathcal{X} \leq z$ e che $\mathcal{Y} \leq z$. Ora,

   $$P(\mathcal{X} \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0; \\ z/5 & \text{se } 0 \leq z \leq 5; \\ 1 & \text{se } z > 5 \end{cases}$$

   e

   $$P(\mathcal{Y} \leq z) = \int_{-\infty}^{z} g(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 3; \\ (z-3)/7 & \text{se } 3 \leq z \leq 10; \\ 1 & \text{se } z > 10 \end{cases}$$

Ora, sfruttando il fatto che $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono indipendenti, abbiamo che

$$P(\mathcal{Z} \leq z) = P(\mathcal{X} \leq z)P(\mathcal{Y} \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 3; \\ z/5 \cdot (z-3)/7 & \text{se } 3 \leq z \leq 5; \\ (z-3)/7 & \text{se } 5 < z \leq 10; \\ 1 & \text{se } z > 10. \end{cases}$$

Visto che la funzione di densità è la derivata della funzione cumulativa, abbiamo che la funzione di densità di $\mathcal{Z}$ è

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 3; \\ (2z-3)/35 & \text{se } 3 < z < 5; \\ 1/7 & \text{se } 5 < z \leq 10; \\ 0 & \text{se } z > 10. \end{cases}$$

(nei punti $z = 3, 5, 10$ questa derivata non è definita) e quindi il valore atteso è

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} zh(z)\,dz &= \int_3^5 (2z^2 - 3z)/35\,dz + \int_5^{10} z/7\,dz \\ &= (1/35)[2z^3/3 - 3z^2/2]_3^5 + 1/7[z^2/2]_5^{10} = \\ &= 1/35(2 \cdot 125/3 - 3 \cdot 25/2 - 2 \cdot 27/3 + 3 \cdot 9/2) + 1/7(100/2 - 25/2) \\ &\approx 6.538 \end{aligned}$$

3. Sia $\mathcal{E}$ l'evento "viene testa".

   Allora abbiamo che $P(\mathcal{E}) = P(\overline{\mathcal{E}}) = 1/2$,

   $$P(\mathcal{W} \leq 6 \mid \mathcal{E}) = P(\mathcal{X} \leq 6) = 1,$$

   e

   $$P(\mathcal{W} \leq 6 \mid \overline{\mathcal{E}}) = P(\mathcal{Y} \leq 6) = 3/7$$

   e quindi, per il Teorema di Bayes,

   $$\begin{aligned} P(\mathcal{E} \mid \mathcal{W} \leq 6) &= \frac{P(\mathcal{W} \leq 6 \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{W} \leq 6 \mid \mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{W} \leq 6 \mid \overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} \\ &= \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + 3/7 \cdot 1/2} = 1/2 \cdot 14/10 = 7/10 = 0.7 \end{aligned}$$

   Cioè, c'è il 70% di probabilità che sia venuto testa.

## 3 Mangime

Una varietà di galline ha un peso medio di 1kg con una deviazione standard di 300 grammi. Possiamo suppore che il peso di queste galline segua una distribuzione normale.

1. Supponiamo di esaminare nove galline di questa varietà e calcolarne il peso medio $\overline{\mathcal{X}}$. Qual è la distribuzione seguita da $\mathcal{X}$, e qual è il suo valore atteso e la sua deviazione standard?

2. C'è un mangime che, secondo il produttore, dovrebbe solitamente aumentare il peso delle galline. Dopo avere nutrito nove galline con questo mangime, il loro peso medio risulta essere maggiore o uguale di 1100 grammi. Qual è la probabilità che questo si verifichi, supponendo che che il mangime non abbia nessun effetto? (Potete scrivere la risposta in termini della funzione $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile che segue una distribuzione normale standard; non è necessario trovare il valore numerico).

## *3 Soluzione*

1. $\overline{X}$ segue una distribuzione normale con valore atteso $1000g$ e deviazione standard $300/\sqrt{9} = 100g$.

2. $P(\overline{X} \geq 1100) = P((\overline{X} - 1000)/100 \geq (1100 - 100)/100) = P(\mathcal{Z} \geq 1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.1586$

   Cioè, supponendo che il mangime non abbia effetto, c'è circa il 15.86% che questo si verifichi comunque.