Esercizi

1. Un magazzino di una casa editrice ha in giacenza 10 titoli di libri. In quanti modi possibili quel magazzino può ricevere un 'ordine di 15 volumi? [1307504]

2. Supponiamo che i pezzi prodotti da una certa macchina possono avere due tipi di difetti. E' noto che la probabilità che un pezzo presenti il primo difetto è 0.1, la probabilità che non presenti il secondo difetto è 0.8, la probabilità che li presenti entrambi è 0.01. Calcolare la probabilità che un pezzo non abbia alcun difetto. [0.71]

3. In media vengono estratte 3 particelle α al secondo da un dato materiale radioattitvo. Qual è la probabilità che in un secondo vengono emesse al massimo 3 particelle α di quel materiale radioattivo? [$13e^{-3} \sim 0,65$]

   Svolgimento: Il numero medio di particelle α emesso da un materiale radioattivo è descritto dalla variabile di Poisson, quindi

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \\ e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{3^2}{2!}e^{-3} + \frac{3^3}{3!}e^{-3} = 13e^{-3} \sim 0.65.$$

4. La durata di vita di un componenete elettronico è una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. La probabilità che la durata di vita del componenete elettronico sia inferiore a 100 è uguale al 5%. Quanto vale λ? [$-\frac{1}{100} ln\left(\frac{95}{100}\right)$]

   Svolgimento:

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} f(x)dx = \int_{-\infty}^{100} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{5}{100}.$$

   Da cui la soluzione.

5. In numero settimanale di clienti che frequentano la palestra *MyWorld* è una variabile aleatoria X con media $\mu = 200$ e varianza $\sigma^2 = 10$. Con quale valore minimo di probabilità si può asserire che il numero di clienti sia compreso tra 180 e 220? [0.975]

6. I prelievi effettuati dai clienti al bancomat di una banca sono distribuiti secondo una distribuzione normale di deviazione standard uguale a 82,50 euro. Su un campione di 150 operazioni di prelievo, è risultato

un prelievo medio di 185 euro. Determina un intervallo di confidenza al 90% per l'ammontare del prelievo medio μ dei clienti della banca. [valore critico $k = 1,645$, sol: $[173.92, 196.08]$]

7. Un'azienda ha commissionato un sondaggio per sapere se i propri clienti sono o meno soddisfatti. La società incaricata del sondaggio ha intervistato un campione casuale di 100 clienti: 25 rispondono di essere insoddisfatti e 75 di essere soddisfatti. Determina un intervallo di confidenza al 95% per la percentuale p di clienti dell'azienda che sono insoddisfatti [Sol: $[16,5\%, 33,5\%]$]. Determina la dimensione n de campione che si deve scegliere per ottenere un intervallo di confidenza di ampiezza 1.

8. Determinare la probabilità che in una famiglia con 4 figli ci sia

   (a) almeno un maschio,

   (b) almeno un maschio e una femmina.

   (c) Su 2000 famiglie con 4 figli ciascuna, quante famiglie hanno in media almeno un figlio maschio? E quante famiglie hanno in media due maschi?

   Si supponga che le probabilità di nascita di un maschio e di una femmina siano uguali. [a: $\frac{15}{16}$, b: $\frac{7}{8}$, c: $N_1 = 1875$, $N_2 = 750$].

9. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla: ci sono 4 risposte possibili per ogni domanda, di cui una sola esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 8 domande. Rispondendo a caso alle domande, qual è la probabilità di superare il test? [0.0004158]

10. Un' urna contiene 60 palline, di cui 9 rosse e le rimanenti nere. Un giocatore pesca una pallina dall'urna, ne osserva il colore, quindi rimette la pallina estratta nell'urna e pesca una seconda pallina. In ciascuna delle due estrazioni, il giocatore guadagna n euro, con $n \in N$ se estrae una pallina rossa e perde 2 euro se estrae una pallina nera. Indica con X la variabile aleatoria che esprime la cifra complessiva guadagnata o persa dal giocatore dopo le due estrazioni.

    (a) Determina la distribuzione di probabilità di X.

    (b) Determina il valore medio di X.

    (c) Stabilisci per quali valori di n il gioco è favorevole al giocatore.

[Sol: a : X può assumere i valori $2n, n-2, -4$, rispettivamente con probabilità $\dfrac{9}{400}, \dfrac{51}{200}, \dfrac{289}{400}$, b : $\frac{3}{10}n - \frac{17}{5}$, c : $n \geq 12$.]

11. Il cavaliere de Méré pose nel 1654 a Blaise Pascal il seguente problema: "È più probabile ottenere almeno un '6' lanciando quattro volte un dado, oppure un doppio '6' lanciando due dadi 24 volte?"

    (a) Lanciamo un dado quattro volte. Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero complessivo di "6" ottenuto nei quattro lanci, qual è la distribuzione di probabilità di X? Qual è la probabilità che esca almeno un "6", cioè che sia $X \geq 1$?

    (b) Lanciamo due dadi ventiquattro volte. Indicata con Y la variabile aleatoria che conta il numero complessivo didoppi "6" ottenuti nei ventiquattro lanci, qual è la distribuzione di probabilità di Y? Qual è la probabilità che esca almeno un doppio "6", cioè che sia $Y \geq 1$?

    (c) Dai risultati ottenuti ai due punti precedenti deduci la risposta al problema del cavaliere de Méré.

    Sol: a. $X \sim B(4, \frac{1}{6})$, $1 - (\frac{5}{6})^4$; b. $Y \sim B(24, \frac{1}{36})$, $1 - (\frac{35}{36})^{24}$; c. è più probabile ottenere almeno un 6 lanciando un dado quattro volte.

12. Verifica che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

    è una densità di probabilità. Sia X una variabile aleatoria avente come densità la funzione $f(x)$. Calcola la probabilità che sia $X \geq 1$. $[e^{-3}]$

13. Una fabbrica di auto ha progettato delle modifiche da effettuare a un motore che dovrebbero consentire un minor consumo di carburante. I motori, in assenza di modifiche, presentano un consumo che segue una distribuzione normale, di media 7 litri per 100 km e deviazione standard uguale a 0,5 litri. Un campione di 20 motorimodificati viene testato e si registra un consumo medio di 6,8 litri per 100 km. A un livello di significatività del 5%, la fabbrica può concludere che le modifiche progettate portano a una diminuzione dei consumi? Rappresenta la zona critica e la zona di accettazione graficamente. [Sol: rifiutiamo l'ipotesi nulla, ovvero concludiamo (al 5% di significativita'), che le modifiche progettate portanoeffettivamente a una diminuzionedei consumi.]

14. Ci sono tre carte, delle quali la prima (X) è rossa su entrambi i lati, la seconda (Y) su un lato è rossa e sull'altro è bianca e la terza (Z) è bianca su entrambi i lati. Ponendo su un tavolo una delle tre carte, scelta a caso, ottengo che il lato visibile è di colore rosso. Qual è la probabilità che anche il lato non visibile sia di colore rosso? [$\frac{2}{3}$]

15. Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} .$$

Determina per quale valore di k definisce una densità di probabilità. [$k = \frac{3}{16}$]

16. In un'urna ci sono 3 biglie, numerate 1,2,3. Si estraggono due biglie con rimpiazzo.

    (a) Costruire lo spazio di probabilità.

    (b) Calcolare la probabilità dell'evento *la somma dei due numeri è 5.*

    [Sol: a. $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3\}\}$, b. $\frac{2}{9}$.]

17. Da una popolazione di media μ e varianza σ^2 estraiamo un campione casuale (bernoulliano) di dimensione 3: X_1, X_2, X_3

    (a) Determina k in modo che $T = \dfrac{2}{5}X_1 + kX_2 - \dfrac{3}{5}X_3$ risulti uno stimatore corretto per μ.

    (b) In corrispondenza del valore di k trovato al punto a, determina la deviazione standard di T.

    [Sol: a. $k = \frac{6}{5}$, b. $\frac{7}{5}\sigma$]

18. Nel progettare una cabina di pilotaggio di un aereo, occorre tenere conto dei valori antropometrici medi dei piloti. Si sa da precedenti studi statistici che la statura dei piloti può essere considerata una variabile aleatoria avente distribuzione normale, di media incognita e deviazione standard 6,2 cm. Su di un campione di 100 piloti, si rileva che la statura media è uguale a 179,4 cm.

    (a) Determina l'intervallo di confidenza al 95% per la statura media dei piloti.

(b) Quale deve essere l'ampiezza minima n del campione affinchè l'intervallo di confidenza (al 95%) abbia ampiezza al massimo uguale a 1 cm?

[Sol: a. $178,18cm \leq \mu \leq 180,62cm$; b. $n = 591$]

19. Un intervallo di confidenza al livello del 95% per la media di una popolazione normale è uguale a $[8,20, 9,40]$. Determina:

    (a) la media campionaria delle osservazioni;

    (b) la dimensione del campione, se la varianza della popolazione è 4.

    [Sol: a. $8,8$; b. $n = 43$]

20. Si è svolto un sondaggio per stabilire se gli abitanti di una città sono o meno favorevoli a chiudere una via del centro al traffico. Il sondaggio è stato svolto su un campione e, in seguito ai risultati del sondaggio, si è stabilito l' intervallo di confidenza della percentuale p di abitanti favorevoli alla chiusura della via, trovando l'intervallo: [42%, 48%]

    (a) Sapendo che sono state intervistate 1000 persone, qual è approssimativamente il livello di confidenza?

    (b) Sapendo che il livello di confidenza del sondaggio è il 90%, quante persone approssimativamente sono state intervistate?

    [a. Circa il 94%; b.circa 744]

21. Un' azienda che produce delle pile dichiara una durata media di 25 ore, con una variabilità (misurata in termini di deviazione standard) uguale a 3 ore. Dieci pile vengono esaminate e si accerta una durata media di 23 ore. Supponendo che la durata delle pile abbia unadistribuzione normale, verifica al livello di significatività dell' 1% la validità di quanto dichiarato dall' azienda, esaminando:

    (a) l' ipotesi nulla $H_0 : \mu = 25$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu \neq 25$;

    (b) l' ipotesi nulla $H_0 : \mu = 25$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu < 25$.

    [Sol: a. $u \sim 2,11$, $k \sim 2,58$, si accetta H_0; b. $k \sim -2,33$, si accetta H_0]

22. Un' azienda vuole studiare se le polveri respirate dagli operai hanno effetti dannosi sulla salute. Su un campione casuale di 250 operai, 28 affermano di avere problemi respiratori. E' noto che l' 8% della popolazione soffre dei medesimi disturbi. Sulla base dei dati campionari si

può affermare, a un livello di significatività dell' 1%, che la proporzione di operai che accusano disturbi respiratori è maggiore di quella della popolazione? E al livello del 5%?

[Sol: al livello di significatività dell' 1% non possiamo affermare che la proporzione di operai che accusano disturbi sia superiore a quella della popolazione. Al livello del 5% dobbiamo rifiutare l' ipotesi nulla, ovvero ritenere che la proporzione di operai che accusano disturbi sia superiore a quella della popolazione.]

23. Alle ultime elezioni un dato partito ha ottenuto il 28% dei voti. In previsione di nuove elezioni, una società effettuaun sondaggio su un campione di 500 elettori; per il campione analizzato è risultato che 158 voteranno il partito. A un livello di confidenza del 5% è possibile concludere che ci sia stato nella popolazione un aumento di consensi nei confrontidel partito? E al livello dell' 1%?

    [$H_0 : p = 28\%$ e $H_1 : p > 28\%$; $u \sim 1.79, k \sim 1.64$ (con $\alpha = 5\%$),quindi si rifiuta H_0; invece se $\alpha = 1\%$, $k \sim 2.33$, quindi si accetta H_0]

24. Sia $Y \sim Bin(n = 1000, p = \frac{1}{3})$. Stimare la probabilità che Y sia maggiore di 350. [Sol: circa 0.12507]

25. Si sa che una scatola contiene 7 palline, ma non se ne conosce esattamente il colore: si sa che sono *o 6 rosse e una blu (evento A)*, *o 6 blu e una rossa*, e si assegna $P(A) = 1/2$. Si effettuano $n \geq 1$ estrazioni con rimpiazzo e si indica con X_n il numero di palline ROSSE osservate.

    (a) Calcolare $P(X_n = n)$, con $n \geq 1$,

    (b) Calcola la probabilità che l' urna contenga 6 palline blu e una rossa sapendo che in n estrazioni sono state ottenute esattamente n palline rosse.

    (c) Calcola $P(-1.2 \leq X_n \leq 1.5)$ e $P(X_n > 2n)$.

    (d) Supponiamo di sapere che la scatola contenga 6 palline rosse e una blu, calcola la probabilità di ottenere la prima pallina rossa al più dopo 4 estrazioni.

    [a.] X_n è una binomiale. Si sa che A="6 rosse e una blu" e A^C ="1 rossa e 6 blu" soddisfano le ipotesi del teorema delle probabilità totali. $P(X_n = n) = P(X_n|A)P(A) + P(X_n|A^C)P(A^C) = \binom{n}{n}(\frac{6}{7})^n(\frac{1}{7})^0(\frac{1}{2}) + \binom{n}{n}(\frac{1}{7})^n(\frac{6}{7})^0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{6}{7})^n + \frac{1}{2}(\frac{1}{7})^n$

[b.] $P(A^C|X_n = n) = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{7})^n}{\frac{1}{2}(\frac{6}{7})^n + \frac{1}{2}(\frac{1}{7})^n}$

[c.] $P(-1.2 \leq X_n \leq 1.5) = P(X_n = 1) = \binom{n}{1}(\frac{6}{7})^1(\frac{1}{7})^{n-1}(\frac{1}{2}) + \binom{n}{1}(\frac{1}{7})^1(\frac{6}{7})^{n-1}\frac{1}{2}$

$P(X_n > 2n) = 0$ (evento impossibile)

[d.] Limitandoci all'urna A, bisogna trovare $P(X \leq 4)$ dove X è una geometrica. Quindi $P(X \leq 4) = 1 - P(X \geq 3) = 1 - (1 - \frac{6}{7})^{3-1} = 1 - \frac{1}{7}^2 = \frac{48}{49}$.