Esame di Logica

26 Giugno 2024

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutti i Greci sono Europei;
  - Tutti i Francesi sono Europei;
  - Nessun Europeo è Americano;
  - Tutti i Canadesi sono Americani;
  - Qualche Americano non è Canadese;
  - Tutti gli Ateniesi sono Greci;
  - Qualche Greco non è Ateniese.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Qualche Canadese non è Ateniese;
  2. Qualche Europeo non è Greco;
  3. Nessun Francese è Canadese;
  4. Qualche Europeo è Ateniese.

SOLUZIONE:

- Siano **g** = Greco, **e** = Europeo, **f** = Francese, **a** = Americano, **c** = Canadese, **t** = Ateniese. Allora la teoria è

- $\mathbf{A}(g,e)$;
- $\mathbf{A}(f,e)$;
- $\mathbf{E}(e,a)$;
- $\mathbf{A}(c,a)$;
- $\mathbf{O}(a,c)$;
- $\mathbf{A}(t,g)$;
- $\mathbf{O}(g,t)$.

- Consideriamo le quattro affermazioni:

  1. $\mathbf{O}(c,t)$ segue per dimostrazione indiretta:

  $$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{A}(t,g) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{A}(g,e) & \text{Ipotesi} \\ (3) & \mathbf{E}(e,a) & \text{Ipotesi} \\ (4) & \mathbf{A}(c,a) & \text{Ipotesi} \\ (5) & \mathbf{A}(c,t) & \overline{\mathbf{O}(c,t)} \\ (6) & \mathbf{A}(c,g) & \text{PS1, da (1) e (5)} \\ (7) & \mathbf{A}(c,e) & \text{PS1, da (2) e (6)} \\ (8) & \mathbf{E}(c,a) & \text{PS2, da (3) e (7)} \\ (9) & \mathbf{I}(c,a) & \text{C2, da (4)} \end{array}$$

  e visto che $\overline{\mathbf{E}(c,a)} = \mathbf{I}(c,a)$, abbiamo raggiunto una contraddizione.

  2. $\mathbf{O}(e,g)$ non segue dalla teoria. Infatti, consideriamo il modello $M = (\Delta, \iota)$ dove

     - $\Delta = \{1,2,3,4\}$;
     - $\iota(g) = \{1,2\}$;
     - $\iota(e) = \{1,2\}$;
     - $\iota(f) = \{1,2\}$;
     - $\iota(a) = \{3,4\}$;
     - $\iota(c) = \{3\}$;
     - $\iota(t) = \{1\}$.

     Allora $\mathbf{A}(g,e)$ è soddisfatta, perchè $\iota(g) \subseteq \iota(e)$; $\mathbf{A}(f,e)$ è soddisfatta, perchè $\iota(f) \subseteq \iota(e)$; $\mathbf{E}(e,a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(e) \cap \iota(a) = \emptyset$, $\mathbf{A}(c,a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \subseteq \iota(a)$; $\mathbf{O}(a,c)$ è soddisfatta, perchè $\iota(a) \not\subseteq \iota(c)$; $\mathbf{A}(t,g)$ è soddisfatta, perchè $\iota(t) \subseteq \iota(g)$; e $\mathbf{O}(g,t)$ è soddisfatta, perchè $\iota(g) \not\subseteq \iota(t)$.

     Quindi il modello soddisfa la teoria; ma non soddisfa $\mathbf{O}(e,g)$, perchè $\iota(e) \subseteq \iota(g)$.

- $\mathbf{E}(f,c)$ segue per dimostrazione diretta:

(1)	$\mathbf{A}(f,e)$	Ipotesi
(2)	$\mathbf{E}(e,a)$	Ipotesi
(3)	$\mathbf{A}(c,a)$	Ipotesi
(4)	$\mathbf{E}(f,a)$	PS2, da (2) e (1)
(5)	$\mathbf{E}(a,f)$	C1, da (4)
(6)	$\mathbf{E}(c,f)$	PS2, da (5) e (3)
(7)	$\mathbf{E}(f,c)$	C1, da (6)

- $I(e,t)$ segue per dimostrazione diretta:

(1)	$\mathbf{A}(t,g)$	Ipotesi
(2)	$\mathbf{A}(g,e)$	Ipotesi
(3)	$\mathbf{A}(t,e)$	PS1, da (2) e (1)
(4)	$\mathbf{I}(t,e)$	C2, da (3)
(5)	$\mathbf{I}(e,t)$	C3, da (4)

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Se mangio un primo piatto e mangio un secondo piatto, non mangio un dolce;
  - Mangio un primo piatto oppure mangio un secondo piatto.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se mangio un primo piatto e mangio un dolce, non mangio un secondo piatto;
  - Non mangio un dolce oppure non mangio un primo piatto.
- Verificate se la teoria ha "Se mangio un dolce, non mangio un primo piatto oppure non mangio un secondo piatto" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere gli altri).

SOLUZIONE:

- Siano $P =$ "mangio un primo", $S =$ "Mangio un secondo" e $D =$ "Mangio un dolce". Allora la teoria è

$$(P \wedge S) \rightarrow \neg D;$$
$$P \vee S.$$

- La tabella di verità è

P	S	D	$P \wedge S$	$\neg D$	$(P \wedge S) \to \neg D$	$P \vee S$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1

  Quindi le valutazioni che soddisfano la teoria sono quelle che assegnano a P, S e D i valori $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ o $(1, 1, 0)$.

- Le due affermazioni corrispondono a $(P \wedge D) \to \neg S$ e a $\neg D \vee \neg P$. Quindi:

P	S	D	$P \wedge D$	$\neg S$	$(P \wedge D) \to \neg S$	$\neg D$	$\neg P$	$\neg D \vee \neg P$
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1

  Quindi la prima affermazione segue dalla teoria, ma la seconda no.

- La formula $D \to (\neg P \vee \neg S)$ segue dalla teoria secondo il seguente tableau chiuso:

$$\{(P \wedge S) \to \neg D, P \vee S, \underline{\neg(D \to (\neg P \vee \neg S))}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{(P \wedge S) \to \neg D, P \vee S, D, \underline{\neg P \vee \neg S}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{(P \wedge S) \to \neg D, P \vee S, D, \underline{\neg\neg P}, \neg\neg S\}$$

$$\downarrow$$

$$\{(P \wedge S) \to \neg D, P \vee S, D, P, \underline{\neg\neg S}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\underline{(P \wedge S) \to \neg D}, P \vee S, D, P, S\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{\underline{\neg(P \wedge S)}, P \vee S, D, P, S\} \qquad\qquad \{\neg D, P \vee S, D, P, S\}$$

Chiuso: $\neg D$, D

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{\neg P, P \vee S, D, P, S\} \qquad\qquad \{\neg S, P \vee S, D, P, S\}$$

Chiuso: $\neg P$, P — Chiuso: $\neg S$, S

3 Risoluzione Proposizionale

Considerate la teoria proposizionale

$$\Gamma := \{\neg(X \to (Y \vee Z)), (\neg Y \vee \neg Z) \to W\}.$$

- Convertite tutte le formule della teoria in formule equivalenti in Forma Normale Congiuntiva;
- Utilizzando la Procedura di Davis-Putnam, verificate se Γ ha come conseguenza $(X \wedge \neg W) \to Y$.

SOLUZIONE:

- Abbiamo che

$$\begin{aligned} \neg(X \to (Y \vee Z)) &\equiv \neg(\neg X \vee Y \vee Z) \\ &\equiv \neg\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} (\neg Y \vee \neg Z) \to W &\equiv \neg(\neg Y \vee \neg Z) \vee W \\ &\equiv (\neg\neg Y \wedge \neg\neg Z) \vee W \\ &\equiv (Y \wedge Z) \vee W \equiv (Y \vee W) \wedge (Z \vee W) \end{aligned}$$

- Convertiamo anche la negazione della formula (quindi $\neg((X \wedge \neg W) \rightarrow Y)$ in forma normale congiuntiva:

$$\begin{aligned}\neg((X \wedge \neg W) \rightarrow Y) &\equiv \neg(\neg(X \wedge \neg W) \vee Y) \\ &\equiv \neg(\neg X \vee \neg\neg W \vee Y) \\ &\equiv \neg(\neg X \vee W \vee Y) \\ &\equiv \neg\neg X \wedge \neg W \wedge \neg Y \equiv X \wedge \neg W \wedge \neg Y\end{aligned}$$

  Quindi, la formula segue dalla teoria se e solo se l'insieme di clausole

$$S = \{\{X\}, \{\neg Y\}, \{\neg Z\}, \{Y, W\}, \{Z, W\}, \{\neg W\}\}$$

  è insoddisfacibile (non c'è bisogno di scrivere $\{X\}$ e $\{\neg Y\}$ due volte, visto che S è un insieme di clausole - una clausola è in S oppure no, il "numero di volte in cui appare" non è un concetto applicabile).

  Verifichiamolo con la procedura di Davis-Putnam:

  1. $\{\{X\}, \{\neg Y\}, \{\neg Z\}, \{Y, W\}, \{Z, W\}, \{\neg W\}\}$
     Non ci sono tautologie o formule sussunte, scelgo X come pivot. Non ci sono clausole che contengono $\neg X$, quindi otteniamo solo
  2. $\{\{\neg Y\}, \{\neg Z\}, \{Y, W\}, \{Z, W\}, \{\neg W\}\}$
     Scelgo Y come pivot.
  3. $\{\{\neg Z\}, \{Z, W\}, \{\neg W\}, \{W\}\}$
     $\{Z, W\}$ è sussunta in $\{W\}$, quindi la elimino.
  4. $\{\{\neg Z\}, \{\neg W\}, \{W\}\}$
     Scelgo Z come pivot.
  5. $\{\{\neg W\}, \{W\}\}$
     Scelgo W come pivot. Combinando $\{\neg W\}$ con $\{W\}$ ottengo la clausola vuota $\square$, quindi ottengo
  6. $\{\square\}$

  e l'insieme di clausole di partenza è insoddisfacibile (e quindi la formula segue dalla teoria).