Esame di Logica

15 Luglio 2024

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutti i pantaloni sono vestiti;
  - Tutte le camicie sono vestiti;
  - Qualche pantalone è giallo;
  - Qualche camicia è azzurra;
  - Nessuna camicia è gialla;
  - Nessun pantalone è azzurro;
  - Niente che è azzurro è giallo.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Qualche vestito non è una camicia;
  2. Qualche vestito è una camicia;
  3. Nessuna camicia è un pantalone;
  4. Qualche camicia non è un pantalone;

SOLUZIONE:

- Siano p = pantalone, v = vestito, c = camicia, g = giallo, a = azzurro. Allora la teoria è

- $\mathbf{A}(p, v)$;
- $\mathbf{A}(c, v)$;
- $\mathbf{I}(p, g)$;
- $\mathbf{I}(c, a)$;
- $\mathbf{E}(c, g)$;
- $\mathbf{E}(p, a)$;
- $\mathbf{E}(a, g)$.

- Consideriamo le quattro affermazioni:

  1. $\mathbf{O}(v, c)$ segue per dimostrazione diretta:

$$\begin{array}{r|ll}
(1) & \mathbf{A}(p, v) & \text{Ipotesi} \\
(2) & \mathbf{I}(p, g) & \text{Ipotesi} \\
(3) & \mathbf{E}(c, g) & \text{Ipotesi} \\
(4) & \mathbf{I}(g, p) & \text{C3, da (2)} \\
(5) & \mathbf{I}(g, v) & \text{PS3, da (1) e (4)} \\
(6) & \mathbf{I}(v, g) & \text{C3, da (5)} \\
(7) & \mathbf{E}(g, c) & \text{C1, da (3)} \\
(8) & \mathbf{O}(v, c) & \text{PS4, da (7) e (6)}
\end{array}$$

  2. $\mathbf{I}(v, c)$ segue per dimostrazione diretta:

$$\begin{array}{r|ll}
(1) & \mathbf{A}(c, v) & \text{Ipotesi} \\
(2) & \mathbf{I}(c, v) & \text{C2, da (1)} \\
(3) & \mathbf{I}(v, c) & \text{C3, da (2)}
\end{array}$$

  3. $\mathbf{E}(c, p)$ non segue dalla teoria. Infatti, consideriamo il modello $M = (\Delta, \iota)$ dove
     - $\Delta = \{1, 2, 3\}$;
     - $\iota(p) = \{1, 2\}$;
     - $\iota(v) = \{1, 2, 3\}$;
     - $\iota(g) = \{2\}$;
     - $\iota(c) = \{1, 3\}$;
     - $\iota(a) = \{3\}$.

     Allora $\mathbf{A}(p, v)$ è soddisfatta, perchè $\iota(p) \subseteq \iota(v)$; $\mathbf{A}(c, v)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \subseteq \iota(v)$; $\mathbf{I}(p, g)$ è soddisfatta, perchè $\iota(p) \cap \iota(g) = \{2\} \neq \emptyset$; $\mathbf{I}(c, a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \cap \iota(a) = \{3\} \neq \emptyset$; $\mathbf{E}(c, g)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \cap \iota(g) = \emptyset$; $\mathbf{E}(p, a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(p) \cap \iota(a) = \emptyset$; e $\mathbf{E}(a, g)$ è soddisfatta, perchè $\iota(a) \cap \iota(g) = \emptyset$. Invece $\mathbf{E}(c, p)$ non è soddisfatta, perchè $\iota(c) \cap \iota(p) = \{1\} \neq \emptyset$.

  4. $\mathbf{O}(c, p)$ segue per dimostrazione diretta:

$$\begin{array}{r|ll}
(1) & \mathbf{I}(c, a) & \text{Ipotesi} \\
(2) & \mathbf{E}(p, a) & \text{Ipotesi} \\
(3) & \mathbf{E}(a, p) & \text{C1, da (2)} \\
(4) & \mathbf{O}(c, p) & \text{PS4, da (3), (1).}
\end{array}$$

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Il concerto è oggi oppure il concerto è domani oppure il concerto è domani l'altro;
  - Se il concerto è oggi, non è domani e non è domani l'altro;
  - Se il concerto è domani, non è oggi e non è domani l'altro.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se il concerto è domani l'altro, non è oggi e non è domani;
  - Il concerto è oggi o è domani.
- Verificate se la teoria ha "Se il concerto non è oggi e non è domani l'altro, è domani" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere gli altri).

  ATTENZIONE: Ricordatevi che la disgiunzione è un'operazione binaria. Se scrivete per esempio $A \vee B \vee C$ intendendo $(A \vee B) \vee C$, ricordatevi che l'espressione è da interpretare (e il tableau va costruito) in quel senso.

SOLUZIONE:

- Siano X = "Il concerto è oggi", "Y = "Il concerto è domani" e Z = "Il concerto è domani l'altro". Allora la teoria è

$$X \vee Y \vee Z;$$
$$X \to (\neg Y \wedge \neg Z);$$
$$Y \to (\neg X \wedge \neg Z).$$

- La tabella di verità è

X	Y	Z	$X \vee Y$	$X \vee Y \vee Z$	$\neg Y \wedge \neg Z$	$X \to (\neg Y \wedge \neg Z)$	$\neg X \wedge \neg Z$	$Y \to (\neg X \wedge \neg Z)$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

Quindi le valutazioni che soddisfano la teoria sono quelle che assegnano a X, Y e Z i valori $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ o $(1,0,0)$.

- Le due affermazioni corrispondono a $Z \to (\neg X \wedge \neg Y)$ e a $X \vee Y$.

X	Y	Z	$\neg X \wedge \neg Y$	$Z \to (\neg X \wedge \neg Y)$	$X \vee Y$
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1

Quindi la prima formula segue dalla teoria, ma la seconda no.

- La formula $(\neg X \wedge \neg Z) \to Y$ segue dalla teoria secondo il seguente tableau chiuso:

$$\{(X \vee Y) \vee Z, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \underline{\neg((\neg X \wedge \neg Z) \to Y)}\}$$
$$\downarrow$$
$$\{(X \vee Y) \vee Z, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \underline{\neg X \wedge \neg Z}, \neg Y\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\underline{(X \vee Y) \vee Z}, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \neg X, \neg Z, \neg Y\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{X \vee Y}, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), \\ Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \neg X, \neg Z, \neg Y \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} Z, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), \\ Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \neg X, \neg Z, \neg Y \end{array} \right\}$$

Chiuso: Z, $\neg Z$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), \\ Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \neg X, \\ \neg Z, \neg Y \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y, X \to (\neg Y \wedge \neg Z), \\ Y \to (\neg X \wedge \neg Z), \neg X, \\ \neg Z, \neg Y \end{array} \right\}$$

Chiuso: X, $\neg X$ Chiuso: Y, $\neg Y$

3 Risoluzione Proposizionale

Considerate la teoria proposizionale

$$\Gamma := \{X \to (Y \vee \neg(Z \to W)), Y \to (X \wedge W)\}.$$

- Convertite tutte le formule della teoria in formule equivalenti in Forma Normale Congiuntiva;

- Utilizzando la Procedura di Davis-Putnam, verificate se Γ ha come conseguenza $X \to W$.

SOLUZIONE:

- Abbiamo che

$$\begin{aligned} X \to (Y \vee \neg(Z \to W)) &\equiv \neg X \vee (Y \vee \neg(\neg Z \vee W)) \\ &\equiv \neg X \vee (Y \vee (\neg\neg Z \wedge \neg W)) \\ &\equiv (\neg X \vee Y) \vee (Z \wedge \neg W) \\ &\equiv (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg W) \end{aligned}$$

  e che

$$\begin{aligned} Y \to (X \wedge W) &\equiv \neg Y \vee (X \wedge W) \\ &\equiv (\neg Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee W). \end{aligned}$$

- Convertiamo in CNF anche la negazione di $X \to W$:

$$\begin{aligned} \neg(X \to W) &\equiv \neg(\neg X \vee W) \\ &\equiv \neg\neg X \wedge \neg W \\ &\equiv X \wedge \neg W \end{aligned}$$

  Quindi, la formula segue dalla teoria se e solo se l'insieme di clausole

$$S = \{\{\neg X, Y, Z\}, \{\neg X, Y, \neg W\}, \{\neg Y, X\}, \{\neg Y, W\}, \{X\}, \{\neg W\}\}$$

  è insoddisfacibile. Applichiamo la procedura di Davis-Putnam:

  1. $\{\{\neg X, Y, Z\}, \{\neg X, Y, \neg W\}, \{\neg Y, X\}, \{\neg Y, W\}, \{X\}, \{\neg W\}\}$:
     $\{\neg X, Y, \neg W\}$ è sussunta da $\{\neg W\}$ e $\{\neg Y, X\}$ è sussunta da $\{X\}$, quindi le possiamo eliminare.
  2. $\{\{\neg X, Y, Z\}, \{\neg Y, W\}, \{X\}, \{\neg W\}\}$:
     Scegliamo come pivot X.
  3. $\{\{\neg Y, W\}, \{\neg W\}, \{W, Y, Z\}\}$:
     Scegliamo come pivot W.
  4. $\{\{\neg Y\}, \{Y, Z\}\}$:
     Scegliamo come pivot Y.
  5. $\{\{Z\}\}$:
     Scegliamo come pivot Z.
  6. $\{\}$.

  Visto che abbiamo raggiunto l'insieme vuoto di clausole senza trovare la clausola vuota $\square$, l'insieme di clausole iniziale è soddisfacibile e quindi la formula non segue dalla teoria.