Esame 10/01/2024

Questo esame è a libro aperto: siete completamente liberi di utilizzare appunti scritti, libri, o qualsiasi altro tipo di materiale scritto o stampato. Non potete però utilizzare dispositivi elettronici, comunicare tra di voi o con altri, o passare materiale tra di voi.

I tre esercizi hanno un peso complessivo di 10 punti l'uno, per un totale di 30 punti.

Non ha importanza che calcoliate il valore numerico preciso delle soluzioni; è invece importante mostrare il vostro ragionamento e le formule usate, arrivando a una risposta che *potrebbe* essere calcolata. Per esempio, se arrivate a una espressione del tipo $\binom{10}{5}$, potete scrivere questa come risposta senza perdere tempo a fare moltiplicazioni e divisioni per arrivare al numero 252; ma se invece scrivete solo "252" senza che sia chiaro da dove viene, sarà considerato un errore.

1 Re, Regine e Fanti

Si prendono i re, le regine, e i fanti di tutti i quattro semi delle carte, per un totale di dodici carte (4 re, 4 regine, 4 fanti).
Queste dodici carte vengono mescolate, e quattro sono estratte casualmente da esse.

1. Quanti modi ci sono di estrarre queste quattro carte (senza tenere conto dell'ordine di estrazione, e considerando che ogni carta è distinguibile dalle altre)?

Scriviamo *Kings* per il numero di re tra le quattro carte estratte e *Queens* per il numero di regine tra le quattro carte estratte.

2. Qual è la probabilità che tutte e quattro le carte siano re, cioè $P(\textit{Kings} = 4)$?

3. Qual è la probabilità che ci siano *esattamente* due re tra le quattro carte, cioè $P(\textit{Kings} = 2)$?

4. Qual è la probabilità che ci siano *almeno* due re tra le quattro carte, cioè $P(\textit{Kings} \geq 2)$?

5. Qual è la probabilità che ci siano almeno due regine tra le quattro carte supponendo che almeno due re siano estratti, cioè $P(\textit{Queens} \geq 2 \mid \textit{Kings} \geq 2)$?

1 Soluzione

1. Il numero di modi di estrarre quattro carte da dodici è

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancelto{5}{10} \cdot 9}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

2. C'è esattamente un modo di estrarre quattro re. Dato che ci sono 495 modi di estrarre 4 carte da 12, la probabilità di estrarre i 4 re è

$$\frac{1}{495}.$$

3. Per estrarre 4 carte in maniera tale che otteniamo esattamente 2 re dobbiamo estrarre 2 dei 4 re, e 2 delle rimanenti 8 carte. Quindi il numero di modi in cui possiamo farlo è

$$\binom{4}{2}\binom{8}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \frac{\cancelto{2}{4} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{\cancelto{4}{8} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7.$$

E quindi la probabilità richiesta è

$$P[\mathit{Kings} = 2] = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}{11 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{168}{495} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 7}{11 \cdot 5 \cdot \cancelto{3}{9}} = \frac{56}{165}.$$

4. Se ci sono almeno due re tra le quattro carte allora ce ne sono due, tre, o quattro. Poichè questi scenari sono due a due incompatibili possiamo sommare le probabilità:

$$P[\mathit{Kings} \geq 2] = P[\mathit{Kings} = 2] + P[\mathit{Kings} = 3] + P[\mathit{Kings} = 4].$$

Abbiamo già P[*Kings*= 2] e P[*Kings*= 4] dalle soluzioni dei punti precedenti, e rimane solo da calcolare P[*Kings*= 3].

Per farlo, calcoliamo prima il numero di modi di estrarre tre re e un non-re da quattro carte, che è

$$\binom{4}{3}\binom{8}{1} = \binom{4}{1}\binom{8}{1} = 4 \cdot 8 = 32.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} P[\mathit{Kings} \geq 2] &= P[\mathit{Kings} = 2] + P[\mathit{Kings} = 3] + P[\mathit{Kings} = 4] \\ &= \frac{168 + 32 + 1}{495} \\ &= \frac{201}{495} = \frac{\cancelto{67}{201}}{\cancelto{165}{495}} = \frac{67}{165}. \end{aligned}$$

5. Per calcolare la probabilità condizionata $P[\mathit{Queens} \geq 2 \mid \mathit{Kings} \geq 2]$, riscriviamola come una frazione:

$$P[\mathit{Queens} \geq 2 \mid \mathit{Kings} \geq 2] = \frac{P[\mathit{Queens} \geq 2 \text{ e } \mathit{Kings} \geq 2]}{P[\mathit{Kings} \geq 2]}.$$

Poichè stiamo estraendo 4 carte in tutto, se estraiamo *almeno* due re e *almeno* due regine allora dobbiamo estrarre *esattamente* due re e due regine. Quindi,

$$P[\textit{Queens} \geq 2 \text{ e } \textit{Kings} \geq 2] = P[\textit{Queens} = 2 \text{ e } \textit{Kings} = 2].$$

Il numero di modi in cui estrarre due re e due regine è

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{\cancelto{2}{4} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{\cancelto{2}{4} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 6 = 36.$$

E quindi

$$P[\textit{Queens} \geq 2 \text{ and } \textit{Kings} \geq 2] = \frac{36}{495} = \frac{4}{55}.$$

Abbiamo già determinato $P[\textit{Kings} \geq 2]$ in una risposta precedente, e quindi

$$\begin{aligned} P[\textit{Queens} \geq 2 \mid \textit{Kings} \geq 2] &= \frac{P[\textit{Queens} \geq 2 \text{ e } \textit{Kings} \geq 2]}{P[\textit{Kings} \geq 2]} \\ &= \frac{P[\textit{Queens} = 2 \text{ e } \textit{Kings} = 2]}{P[\textit{Kings} \geq 2]} \\ &= \frac{\frac{4}{55}}{\frac{67}{165}} = \frac{4}{55} \cdot \frac{165}{67} = \frac{4}{\cancel{55}} \cdot \frac{\cancelto{3}{165}}{67} = \frac{12}{67}. \end{aligned}$$

2 Costo di riparazione di un cellulare

Il tempo necessario, in ore, per riparare un cellulare è una variabile casuale $\mathcal{X}$ che segue una distribuzione continua uniforme tra i valori 0 e 2.
Il costo della riparazione (in euro) dipende dal tempo, e è dato da $40 + 30x$ dove x è il tempo in ore che la riparazione ha effettivamente richiesto.

1. Scrivete la funzione di densità di $\mathcal{X}$.
2. Calcolate $P(\mathcal{X} > 1.5)$.
3. Calcolate il valore atteso e la varianza del costo della riparazione.
4. Qual è la probabilità che la riparazione costerà più di cinquanta euro?

2 Soluzione

1.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. $$P(\mathcal{X} > 1.5) = \int_{1.5}^{+\infty} f(x) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}[x]_{1.5}^{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

3. Se $\mathcal{Y}$ è il costo della riparazione, abbiamo che $\mathcal{Y} = 40 + 30\mathcal{X}$; e sappiamo (dalle proprietà della distribuzione uniforme) che $\mathcal{X}$ ha valore atteso $E[X] = (2+0)/2 = 1$ e varianza $\mathbf{Var}[X] = 1/12 \cdot (2-0)^2 = 4/12 = 1/3$.

   Quindi, per le proprietà del valore atteso,
   $$E(\mathcal{Y}) = 40 + 30E[X] = 40 + 30 = 70$$
   e
   $$\mathbf{Var}[\mathcal{Y}] = 30^2 \cdot \mathbf{Var}(\mathcal{X}) = 900 \cdot 1/3 = 300.$$

4. $P[\mathcal{Y} > 50] = P[40 + 30\mathcal{X} > 50] = P[\mathcal{X} > 1/3] = \int_{1/3}^{2} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot(2-1/3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{6}$: ci sono cinque possibilità su sei che la riparazione costerà più di cinquanta euro.

3 Animali

Ci sono due specie molto simili di animali, che chiameremo specie A e specie B.
La specie A tende a essere più pesante e più rara della specie B: più precisamente, sappiamo che

- Il peso degli esemplari della specie A ha un valore atteso di 100 kg, con una deviazione standard di 10kg;
- Il peso degli esemplari della specie B ha un valore atteso di 85kg, con una deviazione standard di 15kg;
- Si stima che la frequenza degli esemplari della specie B nell'ecosistema sia il doppio della frequenza degli esemplari della specie A.

Possiamo inoltre supporre che i pesi degli esemplari delle due specie seguano una distribuzione normale (con i rispettivi valori attesi e deviazioni standard).

Un esemplare, che potrebbe essere della specie A o della specie B, è brevemente catturato e poi liberato. Non è stato possibile esaminarlo abbastanza precisamente per stabilire a quale specie appartenga; ma si è riusciti a osservare che pesa più di 100 kg.

Qual è la probabilità che appartenga alla specie A?

Scrivete la risposta in termini della funzione $\Phi(z) = P(\mathcal{Z} \leq z)$, dove $\mathcal{Z}$ è una variabile che segue una distribuzione normale standard (cioè con valore atteso 0 e deviazione standard 1). Non è necessario trovare il valore numerico esatto usando una tavola o una calcolatrice, basta che arriviate a un'espressione da cui potreste calcolarlo se le aveste.

SUGGERIMENTI: Sia $\mathcal{E}$ l'evento "l'esemplare è della specie A" (senza supporre niente riguardo al suo peso), e sia $\mathcal{F}$ l'evento "l'esemplare pesa più di 100 kg". Dovete trovare la probabilità condizionata $P(\mathcal{E}|\mathcal{F})$.

Iniziate esprimendo questa probabilità in termini di $P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$, $P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})$, $P(\mathcal{E})$ e $P(\overline{\mathcal{E}})$.
Di queste, $P(\mathcal{E})$ e $P(\overline{\mathcal{E}})$ sono facili da ricavare dai dati del problema.
$P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$ e $P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})$ possono essere espresse in termini della funzione Φ utilizzando le proprietà della distribuzione normale (in particolare, il fatto che se $\mathcal{X}$ è una distribuzione normale con valore atteso μ e deviazione standard σ allora $(\mathcal{X}-\mu)/\sigma$ è una distribuzione normale standard, e quindi $P((\mathcal{X}-\mu)/\sigma \leq z) = \Phi(z)$).

3 Soluzione

Sia $\mathcal{E}$ l'evento "l'esemplare è della specie A", e sia $\mathcal{F}$ l'evento "l'esemplare pesa più di 100 kg".
Dobbiamo calcolare $P(\mathcal{E}|\mathcal{F})$; e, usando il Teorema di Bayes, possiamo osservare che

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})}.$$

Ora, sappiamo che $P(\mathcal{E}) = 1/3$ e $P(\overline{\mathcal{E}}) = 2/3$, visto che due esemplari su tre non appartengono alla specie A.
Se possiamo calcolare $P(\mathcal{F}|\mathcal{E})$ e $P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})$, abbiamo finito.
Ora, il peso $\mathcal{X}$ di un esemplare della specie A segue una distribuzione normale con valore atteso $\mu = 100$ e deviazione standard $\sigma = 10$; quindi, la variabile $(\mathcal{X}-100)/10$ segue una distribuzione normale standard. Dato un esemplare della specie A, la probabilità che abbia un peso maggiore di 100 kg è pertanto

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) &= P(\mathcal{X} > 100) = 1 - P(\mathcal{X} \leq 100) = 1 - P((\mathcal{X}-100)/10 \leq (100-100)/10) = \\ &= 1 - P((\mathcal{X}-100)/10 \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5 : \end{aligned}$$

un esemplare della specie A ha il 50% di probabilità di pesare più di 100 kg (questo si sarebbe potuto vedere direttamente osservando che la distribuzione normale è simmetrica rispetto al suo valore atteso, che in questo caso è appunto 100 kg).
Similmente, il peso $\mathcal{Y}$ di un esemplare della specie B segue una distribuzione normale con valore atteso $\mu = 85$ e deviazione standard $\sigma = 15$. Quindi $(\mathcal{Y}-85)/15$ segue una distribuzione normale standard, e

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}|\overline{E}) &= P(\mathcal{Y} > 100) = 1 - P(\mathcal{Y} \leq 100) = 1 - P((\mathcal{Y}-85)/15 \leq (100-85)/15) = \\ &= 1 - P((\mathcal{Y}-85)/15 \leq 1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 : \end{aligned}$$

un esemplare della specie B ha circa il 15.87% di probabilità di pesare più di 100 kg.
Ora abbiamo tutto il necessario per calcolare la soluzione:

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F}|\mathcal{E})P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}|\overline{\mathcal{E}})P(\overline{\mathcal{E}})} = \frac{0.5 \cdot 1/3}{0.5 \cdot 1/3 + (1-\Phi(1)) \cdot 2/3} \approx 0.6117 :$$

c'è all'incirca il 61.17% di probabilità che l'esemplare appartenga alla specie A.