(appello 5 giugno)

Esame logica (B)

30L

1) $\varphi = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(c, f(y)))$

$D = \mathbb{N}$ $\quad I(P) = \{ n \in D \mid n \text{ è pari} \}$

$I(Q) = \{ (n,m) \in D^2 \mid n < m \}$ $\quad I(c) = 2$

$I(f): n \in D \rightarrow n+2 \in D$

se x é dispari $\Rightarrow \varphi$ é sempre soddisfacibile

se x é pari $\Rightarrow \varphi$ é sempre soddisfacibile

es. $x = 2 \Rightarrow P(2) \Rightarrow$ OK!

$Q(2,3) \Rightarrow 2 < 3 \Rightarrow$ OK!

Una struttura $\mathcal{A}$ é una coppia (D, I) dove:

- D rappresenta il dominio
- I é una funzione di valutazione:
  - $I(c) \in D$ (c = costante)
  - $I(f): D^N \rightarrow D$ (f = funzione N-aria)
  - $I(P): D^N \rightarrow \{0,1\}$ (P = predicato N-ario)

OK!

2) $(D, I) \models \forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow$ é valido perché ogni elemento x é in relazione con almeno un elemento y: $(1,1), (2,2), (3,1), (4,2)$

~~$(\forall x \exists y$~~

$(D, I) \models \forall x \exists y \neg R(x,y) \Rightarrow$ é valida perché ogni x non é in relazione con ALMENO una y

$\cancel{R}(1,3), \cancel{R}(2,1), \cancel{R}(3,2), \cancel{R}(4,1)$

$(D, I) \models \forall x \exists y (R(x,y) \wedge A(y)) \Rightarrow$ ~~...~~ é valida

es. $x=1 \quad y=2 \Rightarrow R(1,2) \wedge A(2)$

$x=2 \quad y=2 \Rightarrow R(2,2) \wedge A(2)$

$x=3 \quad y=1 \Rightarrow R(3,1) \wedge A(3)$

$x=4 \quad y=2 \Rightarrow R(4,2) \wedge A(2)$

Ok

$(D, I) \models \exists x \exists y (A(x) \wedge A(y) \wedge R(x,y)) \Rightarrow$ é valida perché esiste almeno una valutazione delle variabili che soddisfa φ:

$x=1 \quad y=2$

3) $\neg((\forall x(A(x) \vee B(x))) \rightarrow ((\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x))))$

| α-form.

$\forall x(A(x) \vee B(x)), \neg((\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)))$

| α-form

$\forall x(A(x) \vee B(x)), \neg \forall x A(x), \neg \forall x B(x)$

| δ-form

$\forall x(A(x) \vee B(x)), \neg A(a), \neg \forall x B(x)$

| δ-form

$\forall x(A(x) \vee B(x)), \neg A(a), \neg B(b)$

| γ-form

$\forall x(A(x) \vee B(x)), \neg A(a), \neg B(b), A(a) \vee B(a)$

| γ-form

$\underbrace{\forall x(A(x) \vee B(x))}_{\varphi_1}, \neg A(a), \neg B(b), A(a) \vee B(a), A(b) \vee B(b)$

| β-form

$\varphi_1, \underline{\neg A(a)}, \neg B(b), \underline{A(a)}, A(b) \vee B(b)$ ✗

$\varphi_1, B(a), \neg A(a), \neg B(b), A(b) \vee B(b)$

$\varphi_1, B(a), \neg A(a), \neg B(b), A(b)$

$\varphi_1, B(a), \neg A(a), \underline{\neg B(b)}, \underline{B(b)}$ ✗

Il tableau é aperto (= non tutti i rami sono chiusi), quindi la formula di partenza non é valida.

Un modello é:

$D = (a, b)$

$I(B) = \{a\}$

$I(A) = \{b\}$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) = 1$ Ok

$\forall x\, A(x) = 0$ (es. per $x = a$)

$\forall x\, B(x) = 0$ (es per $x = b$)

$\Rightarrow \neg\varphi = \neg(1 \rightarrow 0) = \neg 0 = 1$

La struttura $\mathfrak{A}(D, I)$ é un modello per φ perché φ é soddisfatta per ogni valutazione delle variabili in $\mathfrak{A}$ e si scrive $\mathfrak{A} \models \varphi$

4) $\varphi = \forall x \exists y (A(f(x)) \rightarrow R(c, y))$

$\varphi^S = \forall x (A(f(x)) \rightarrow R(c, g(x))$

$H(\varphi) = \{c, f(c), g(c), g(f(c)), \ldots\}$

$I^H(A) = \{c, f(c), f(f(c))\}$ Ok

$I^H(R) = \{(c, g(c)), (c, g(f(c)))\}$

Per tutte le x che non soddisfano A, l'implicazione é sempre vera, negli altri casi bisogna verificare:

$x = c \quad A(f(c)) \rightarrow R(c, g(c)) \Rightarrow$ ~~sod~~ vera

$x = f(c) \quad A(f(f(c))) \rightarrow R(c, g(f(c))) \Rightarrow$ vera

La formula é soddisfatta dalla struttura di Herbrand

Una formula in forma di Skolem è una formula in forma prenessa ($Qx_1 \dots Qx_n (\varphi)$, dove Q è un quantificatore e φ non contiene Q) ~~...~~ contenente solo quantificatori universali

ok

Un termine è ground se non contiene variabili.
L'universo di Herbrand di φ ($H(\varphi)$) è costituito dai termini ground ricavabili da φ; se φ non contiene costanti se ne aggiunge una da cui si ricavano i termini.

5) $C_1 = \{A(f(c), f(x)), A(x, f(y)), B(x, y)\}$

$C_2 = \{\neg A(f(h), f(k)), P(h, k)\}$

$E = \{A(f(c), f(x)), A(x, f(y)), A(f(h), f(k))\}$

$k=0 \quad \sigma_0 = \varepsilon \quad |E| > 1 \quad D(E) = \{x, f(c), f(h)\}$

$k=1 \quad \sigma_1 = \{x/f(c)\}$

$E\sigma_1 = \{A(f(c), f(f(c))), A(f(c), f(y)), A(f(h), f(k))\}$

$|E\sigma_1| > 1 \quad D(E\sigma_1) = \{c, h\}$

$k=2 \quad \sigma_2 = \{c/h\}$

$(E\sigma_1)\sigma_2 = \{A(f(c), f(f(c))), A(f(c), f(y)), A(f(c), f(k))\}$

$|E\sigma_1\sigma_2| > 1 \quad D(E\sigma_1\sigma_2) = \{f(c), y, k\}$

$k=3 \quad \sigma_3 = \{f(c)/y, f(c)/k\}$

$(E\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \{A(f(c), f(f(c)))\}$

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma = \{f(c)/x, f(c)/y, f(c)/k, c/h\}$

σ è mgu

ok

$R = \{B(x, y), P(h, k)\}\sigma = \{B(f(c), f(c)), P(c, f(c))\}$

Siano insiemi di clausole C_1, C_2 ed R, con C_1 e C_2 senza variabili in comune, R è la risolvente se:

- siano $l_1, \dots, l_n \in C_1$ e $l'_1 \dots l'_m \in C_2$
  $\{l_1, \dots, l_n, \bar{l}'_1 \dots l'_m\}$ è unificabile e ha
  σ come mgu

$- R = \{C_1 \setminus \{l_1 \ldots l_N\}, C_2 \setminus \{l'_1 \ldots l'_M\}\}\sigma$

La sostituzione é definita da $\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_N/x_N\}$
Sia E un insieme di clausole, $E\sigma$ é la clausola unificata da σ, ovvero tutti gli elementi di E sono stati resi uguali da σ.

6) risoluzione tra C_1 e $\neg B(a,c)$
a/x ~~z/y~~ c/y $C_7 = \{\neg A(\cancel{y} c, a)\}$
non posso proseguire, scelgo la risoluzione tra C_2 e $\neg B(a,c)$
a/x c/y $C_7 = \{\neg A(a,z), \neg A(z,c)\}$
risoluzione tra C_7 e C_5
b/z $C_8 = \{\neg A(b,c)\}$
non posso proseguire, scelgo la risoluzione tra C_7 e C_6
c/z $C_8 = \{\neg A(c,c)\}$
ancora non posso proseguire!
Provo la risoluzione tra $\neg B(a,c)$ e C_3
a/x c/y $C_9 = \{\neg A(a,c), \neg D(a,c)\}$
risoluzione tra C_9 e C_6
$C_{10} = \{\neg D(a,c)\}$
risoluzione tra C_{10} e C_4
$C_{11} = \square$
$B(a,c)$ é una conseguenza logica del programma perché $\Pi \vdash_{\square} \neg B$

Un programma é un insieme di clausole Horn definite come regole (contenenti sia elementi ~~variabili~~ negate che la formula ~~variabile~~ non negata) e fatti (corrispondente ad un'unica formula non negata) che servono per valutare le clausole goal

(cioè l'insieme contenente solo clausole negate)

DEFINIZIONI

1) Oltre alla struttura esiste l'ambiente che è una
FUNZIONE DI
~~la~~ valutazione delle variabili:
$g: x \in Var \rightarrow e_{\mathfrak{A}}(x) \in D$

Il predicato può essere interpretato come la funzione caratteristica, inoltre $P \subseteq D$

La formula φ da me definita è ~~un~~ soddisfatta dalla struttura e dall'ambiente ($(\mathfrak{A}, e_{\mathfrak{A}}) \models \varphi$), in particolare $\mathfrak{A}$ è un modello per φ ($\mathfrak{A} \models \varphi$)
Poiché non ci sono variabili libere la soddisfacibilità coincide con il modello.

4) Una struttura di Herbrand è definita da $(H(\varphi), I^H)$:
$H(\varphi) = D$ ~~dalla struttura $\mathfrak{A}$~~, il dominio corrisponde ad $H(\varphi)$
$I^H(c) \in H(\varphi)$
$I^H(f): (t_1, \dots t_n) \longrightarrow (t_1 \dots t_n) \in H(\varphi)$

Una formula è soddisfacibile se ha un modello di Herbrand, cioè una struttura di Herbrand in cui è soddisfatta

5) σ è mgu (= unificatore universale) se, in composizione con altre sostituzioni genera altri unificatori
$\tau = \sigma \circ \theta$

Per risolvere l'esercizio ho utilizzato l'algoritmo di Robinson:

1. $K=0$ ($k=$ numero di passaggio) $\sigma_0=\varepsilon$

($\varepsilon=$ sostituzione vuota)

2. se $|E\sigma_k|=1$ $\sigma_k=$ mgu

3. se $|E\sigma_k|>1$ $\sigma_{k+1}=\sigma_k \circ \{t/x\}$ dove t é un termine e x é una variabile che non contiene t

$D(E\sigma_{k+1})=$ insieme di discordanza. Si ripete dal passaggio 2