Lab 7

In tutti gli esercizi che seguono, non è essenziale calcolare il valore numerico preciso della risposta. Invece, è necessario mostrare il ragionamento e le formule usate.

7.1 Dispositivi

Un dispositivo viene costruito assemblando tre componenti, chiamati rispettivamente A, B, e C.
Il componente A è difettoso con probabilità del 2%; il componente B è difettoso con probabilità del 3%; il componente C è difettoso con probabilità del 4%; e queste probabilità sono indipendenti.
Un dispositivo assemblato è difettoso se almeno uno dei componenti lo è.

1. Calcolate la probabilità che un dispositivo assemblato in questo modo sia difettoso.
2. Supponendo che un dispositivo assemblato in questo modo sia difettoso, calcolate la probabilità che **almeno** il componente B sia difettoso.
3. Supponendo che un dispositivo assemblato in questo modo sia difettoso, calcolate la probabilità che **solo** il componente B sia difettoso.
4. Quanti dispositivi di questo tipo è necessario assemblare perchè ci sia una probabilità del 10% che almeno uno di essi sia difettoso solo per causa del componente B (vale a dire, se riparassimo il componente B il dispositivo funzionerebbe)?

7.1 Soluzione

1. Scriviamo $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_B$ e $\mathcal{E}_C$ per gli eventi "Il componente A non è difettoso", "Il componente B non è difettoso" e "Il componente C non è difettoso". Allora abbiamo che:

   $$P(\mathcal{E}_A) = 1 - 0.02 = 0.98;$$
   $$P(\mathcal{E}_B) = 1 - 0.03 = 0.97;$$
   $$P(\mathcal{E}_C) = 1 - 0.04 = 0.96.$$

   Ora, sia $\mathcal{E}$ l'evento "Il dispositivo nel suo complesso non è difettoso". Visto che il dispositivo non è difettoso se e solo se tutti i suoi componenti non sono difettosi, abbiamo che $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B \cap \mathcal{E}_C$; e visto che gli eventi $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_B$ e $\mathcal{E}_C$ sono indipendenti,

   $$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3) = P(\mathcal{E}_1) \cdot P(\mathcal{E}_2) \cdot P(\mathcal{E}_3) = 0.98 \cdot 0.97 \cdot 0.96 \approx 0.913.$$

Quindi il dispositivo non è difettoso con probabilità del 91.3%, e è difettoso con probabilità

$$P(\overline{\mathcal{E}}) = 1 - P(\mathcal{E}) = 1 - 0.913 = 0.087 :$$

un dispositivo assemblato in questo modo sarà difettoso con probabilità dell'8.7%.

2. Scriviamo $\mathcal{F}$ per l'evento "il dispositivo è difettoso" e $\mathcal{F}_B$ è l'evento "il componente B è difettoso", e quello che dobbiamo calcolare è $P(\mathcal{F}_B|\mathcal{F}) = P(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F})/P(\mathcal{F})$.

   Ora, $\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F} = \mathcal{F}_B$ (se il componente B è difettoso, il dispositivo nel suo complesso è difettoso), e sappiamo dal testo che $P(\mathcal{F}_B) = 0.03$; e abbiamo visto nel punto precedente che $P(\mathcal{F}) = 0.087$.

   Quindi,

   $$P(\mathcal{F}_B|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{F}_B \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})} = \frac{0.03}{0.087} \approx 0.345 :$$

   se il dispositivo è difettoso, c'è una probabilità del 34.5% che il componente B sia difettoso.

3. Come prima, scriviamo $\mathcal{F}$ per l'evento "Il dispositivo è difettoso" e osserviamo che sappiamo già che $P(\mathcal{F}) = 0.087$.

   Stavolta però scriviamo $\mathcal{G}_B$ per l'evento "solo il componente B è difettoso".

   Se scriviamo $\mathcal{E}_A$ per "Il componente A **non** è difettoso", $\mathcal{F}_B$ per "Il componente B è difettoso", e $\mathcal{E}_C$" per "Il componente C **non** è difettoso", usando l'indipendenza tra questi eventi abbiamo che

   $$P(\mathcal{G}_B) = P(\mathcal{E}_A \cap \mathcal{F}_B \cap \mathcal{E}_C) = P(\mathcal{E}_A)P(\mathcal{F}_B)P(\mathcal{E}_C) = 0.98 \cdot 0.03 \cdot 0.96 = 0.028$$

   e quindi il dispositivo ha una probabilità del 2.8% di essere guasto solo a causa del componente B.

   Infine,

   $$P(\mathcal{G}_B|\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{G}_B \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(\mathcal{G}_B)}{P(\mathcal{F})} = \frac{0.028}{0.087} = 0.322$$

   dove abbiamo usato il fatto che $\mathcal{G}_B \cap \mathcal{F} = \mathcal{G}_B$ (se il dispositivo ha solo il componente B che è difettoso, necessariamente è difettoso): se il dispositivo è difettoso, è difettoso solo a causa del componente B con probabilità del 32.2%.

4. Abbiamo visto nel punto precedente che un dispositivo assemblato in questo modo sarà difettoso solo per causa del componente B con probabilità $P(\mathcal{G}_B) = 0.028$. Quindi, se assembliamo n dispositivi in questo modo, il numero $\mathcal{X}$ di componenti in cui solo il componente B è guasto seguirà una distribuzione binomiale con $p = P(\mathcal{G}_B) = 0.028$ e $n = n$. Quindi, la probabilità che nessuno di essi sia difettoso solo a causa del componente B sarà (usando la distribuzione Binomiale):

   $$P(\mathcal{X} = 0) = \binom{n}{0}(0.028)^0(1 - 0.028)^n = 0.972^n.$$

Quindi il numero di componenti da assemblare in maniera tale che questa probabilità sia ≤ 0.9 (vale a dire, che ci sia almeno il 10% di probabilità che uno di essi sia guasto solo per il componente B) è il più piccolo n tale che

$$0.972^n \leq 0.9$$

ovvero, applicando il logaritmo in base 0.972 a destra e a sinistra (ricordiamoci che un logaritmo in base < 1 è decrescente, quindi bisogna cambiare il segno della diseguaglianza)

$$n \geq \log_{0.972}(0.9) = 3.71$$

Quindi, visto che n deve essere intero, bisogna assemblare almeno 4 componenti perchè almeno uno di essi sia difettoso solo per il componente B.

Infatti, se n fosse 3 avremmo che questo avverrebbe con probabilità $1 - (1 - 0.028)^3 = 0.082$, che è minore del 10%; ma per $n = 4$, la probabilità $1 - (1 - 0.028)^4 = 0.011$ è maggiore del 10%.

7.2 Biglie

Un'urna contiene 5 biglie numerate da 1 a 5. Le biglie il cui numero è pari sono rosse, mentre le biglie il cui numero è dispari sono nere.

1. Supponiamo di estrarre due biglie dall'urna, **senza reinserimento**. Qual è la probabilità che la loro somma sia 2? E qual è la probabilità che la loro somma sia 3?
2. Supponiamo di estrarre due biglie dall'urna, **reinserendole dopo ogni estrazione**. Qual è la probabilità che la loro somma sia 2? E qual è la probabilità che la loro somma sia 3?
3. Supponiamo di avere estratto due biglie dall'urna senza reinserimento e di avere osservato che hanno lo stesso colore. Qual è la probabilità che siano entrambe rosse?

7.2 Soluzione

1. La probabilità che due biglie estratte dall'urna, senza reinserimento, abbiano somma 2 è zero. Infatti, almeno una di queste biglie avrà un numero > 1, e quindi al loro somma sarà sicuramente maggiore di due. Invece, la loro somma sarà 3 se le due biglie (in ordine di estrazione) hanno i numeri $(1, 2)$ o $(2, 1)$. Il numero di possibili estrazioni di due biglie da un'urna che ne contiene cinque, senza reinserimento e tenendo conto dell'ordine, è $5 \cdot 4 = 20$ (abbiamo cinque possibilità per la prima biglia, quattro per la seconda); quindi, la probabilità che cerchiamo è $2/20 = 0.1$, ovvero c'è un 10% di probabilità che la somma sia 3.

2. Se reinseriamo le biglie dopo ogni estrazione, ci sono (tenendo conto dell'ordine) $5^2 = 25$ possibili estrazioni di due biglie.

   Di queste, l'unica per cui la somma è due è quella in cui la biglia numerata 1 è estratta entrambe le volte. Quindi la probabilità che questo avvenga è $1/25 = 0.04$, cioè del 4%.

   Similmente, gli unici casi possibili in cui la somma è 3 sono quelli in cui le due biglie hanno numeri $(2, 1)$ o $(1, 2)$; quindi, la probabilità che questo avvenga è $2/25 = 0.08$, cioè dell'8%.

3. Delle nostre 5 biglie, tre sono nere (corrispondenti ai numeri 1, 3, e 5) e due sono rosse (2 e 4).

   Quindi, se $\mathcal{E}_R$ è l'evento "entrambe le biglie sono rosse", perchè $\mathcal{E}_R$ si verifichi è necessario che prima estraiamo una delle due biglie rosse dalle cinque disponibili, e poi l'unica biglia rossa rimanente dalle quattro rimanenti, e quindi

   $$P(\mathcal{E}_R) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$$

   .

   Ragionando in maniera simile, se $\mathcal{E}_N$ è l'evento "entrambe le biglie estratte sono nere" abbiamo che

   $$P(\mathcal{E}_N) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.3$$

   E dato che gli questi due eventi sono incompatibili, l'evento $\mathcal{E}$ = "entrambe le biglie hanno lo stesso colore" ha probabilità

   $$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}_R) + P(\mathcal{E}_N) = 0.1 + 0.3 = 0.4.$$

   Infine, la probabilità che entrambe le biglie siano rosse – supponendo che abbiano lo stesso colore – è

   $$P(\mathcal{E}_R|\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}_R \cap \mathcal{E})}{P(\mathcal{E})} = \frac{P(\mathcal{E}_R)}{P(\mathcal{E})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 :$$

   se entrambe le biglie hanno lo stesso colore, sono rosse con probabilità del 25%.

7.3 Chiamate Notturne

Una centralina è attiva per otto ore al giorno, e riceve in media 4 chiamate al giorno. Associando una distribuzione di probabilità adatta, stimate la probabilità che

1. La centralina non riceva nessuna chiamata per tre ore;

2. La centralina riceva più di quattro chiamate in una giornata.

7.3 Soluzione

1. Se $\mathcal{X}$ è il numero di chiamate ricevute dalla centralina in tre ore, è ragionevole supporre che $\mathcal{X}$ segua una distribuzione di Poisson con valore atteso $\lambda = 4 \cdot 3/8 = 1.5$ (una media di 4 chiamate ogni 8 ore, ma stiamo considerando un periodo di solo tre ore).

   Quindi

   $$P(\mathcal{X} = 0) = \frac{1.5^0 e^{-1.5}}{0!} = e^{-1.5} = 0.223 :$$

   c'è una probabilità del 22.3% che non arrivi nessuna chiamata in tre ore.

2. Se $\mathcal{Y}$ è il numero di chiamate ricevute in una giornata, possiamo supporre che $\mathcal{Y}$ segua una distribuzione di Poisson con valore atteso $\lambda = 4$.

   Quindi, $P(\mathcal{Y} = k) = \frac{4^k e^{-4}}{4!}$ per tutti gli interi k: in particolare,

   $$P(\mathcal{Y} \leq 4) = P(\mathcal{Y} = 0) + P(\mathcal{Y} = 1) + P(\mathcal{Y} = 2) + P(\mathcal{Y} = 3) + P(\mathcal{Y} = 4) \approx 0.63$$

   e quindi

   $$P(\mathcal{Y} > 4) = 1 - P(\mathcal{Y} \leq 4) = 1 - 0.63 = 0.37 :$$

   c'è il 37% di probabilità che ci siano più di quattro chiamate al giorno.

7.4 Variabile Casuale Continua

$\mathcal{X}$ è una variabile casuale continua con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} c/x & \text{se } 1 \leq x \leq e^3; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per un qualche valore della costante $c \in \mathbb{R}$.

1. Che valore deve avere c perchè questa $f(x)$ sia una funzione di densità ben definita?
2. Considerando la soluzione del punto 1, qual è la probabilità che $\mathcal{X} > e$?
3. Considerando la soluzione del punto 1, qual è la probabilità che $e < \mathcal{X} < e^2$?

7.4 Soluzione

1. Bisogna che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

   Ora,

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = c \int_1^{e^3} \frac{1}{x}\, dx = c[\ln(x)]_1^{e^3} = c \cdot (3 - 0) = 3c$$

   e quindi dobbiamo avere $c = 1/3$ e

   $$f(x) = \begin{cases} 1/(3x) & \text{se } 1 \leq x \leq e^3; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. Abbiamo che

$$P(\mathcal{X} > e) = \int_e^{+\infty} f(x)\,dx = \int_e^{e^3} 1/(3x)\,dx = 1/3[\ln(x)]_e^{e^3} = 1/3(3-1) = 2/3.$$

3. Abbiamo che

$$P(e < \mathcal{X} < e^2) = \int_e^{e^2} f(x)\,dx = \int_e^{e^2} 1/(3x)\,dx = 1/3[\ln(x)]_e^{e^2} = 1/3(2-1) = 1/3.$$