Lezione 23/11/2022

Variabile uniforme

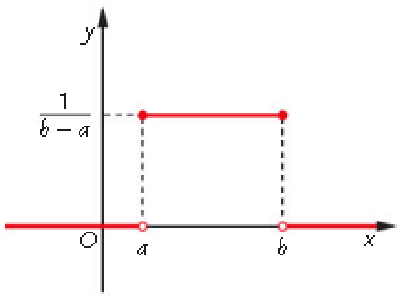
La variabile uniferme è la più semplice delle variabili continue e generalizza il concetto di variabile discreta. Possiamo pensare, ad esempio, al lancio di un dado il cui risultato è un numero dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pensiamo poi ad un dado con infinite facce, ognuna delle quali è un numero dell'intervallo $[1, 6]$. In questo caso, il lancio di un dado si può assimilare alle scelta casuale di un numero nell'intervallo $[1, 6]$. La scelta casuale di un elemento dell'intervallo $[1, 6]$ è descritta da una variabile uniforme di parametri 1 e 6.

Definizione. *Una variabile aleatoria continua si dice avere distribuzione uniforme sull'intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, se la sua densità è la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \textit{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Per indicare che una variabile aleatoria X è uniforme sull'intervallo $[a, b]$ si utilizza la scrittura $X \sim U(a, b)$.

Il grafico della densità di $X \sim U(a, b)$ è il seguente:



Teorema. *Media e varianza di una variabile aleatoria uniformeLa media e la varianza di una variabile aleatoria X uniforme sull'intervallo $[a, b]$ sono espresse dalle formule:*

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad e \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Il modello uniforme si applica a tutti quei fenomeni casuali che si possono assimilare alla scelta di un numero a caso in un intervallo (o equivalentemente alla scelta di un punto a caso su un segmento).

Esercizio 1. *Una linea di bus prevede una data fer-mata la prima volta alle 7.15 del mattino e successivamente ogni quindici minuti. Paolo tutti i giorni si presenta a quella fermata in un istante a caso tra le 7 e le 7.30 e prende il primo bus che passa. Qual è la probabilità che debba attendere più di cinque minuti?*

Svolgimento. ***Costruiamo il modello del problema***:

Poiché l'arrivo di Paolo tra le 7 e le 7.30 alla fermata del bus è del tutto casuale, possiamo assimilare l'ora di arrivo di Paolo alla scelta a caso di un numero nell'intervallo [0, 30] (Paolo arriva nell'arco di 30 minuti). Indichiamo con X la variabile aleatoria che rappresenta tale numero scelto a caso. Allora X è una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo [0, 30]. L'evento E: "Paolo deve attendere più di cinque minuti" si realizza se e solo se Paolo arriva tra le 7 e le 7.10 oppure se arriva tra le 7.15 e le 7.25. Dunque dobbiamo calcolare la probabilità che sia $0 < X < 10$ *o* $15 < X < 25$.

Svolgiamo i calcoli:

$P(E) = P(0 < X < 10) + P(15 < X < 25) = \int_0^{10} \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{25} \frac{1}{30} dx = (10 - 0) + \frac{1}{30}(25 - 15) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

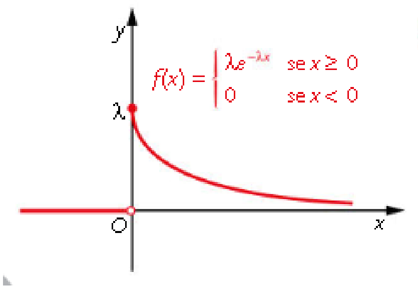
Variabile esponenziale

Definizione. *Una variabile aleatoria continua si dice avere distribuzione esponenziale di parametro reale* λ, *con* $\lambda > 0$, *se la sua densità è la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Per indicare che una variabile aleatoria X è esponenziale di parametro λ si utilizza la scrittura $X \sim E(\lambda)$.

Il grafico della densità di $X \sim E(\lambda)$ è il seguente:



Le variabili aleatorie esponenziali sono utilizzate come modelli per descrivere il tempo di attesa di un accadimento; in particolare giocano un ruolo importante nella descrizione del tempo di vita (cioè del tempo di attesa prima che si verifichi un guasto) di componenti elettronici; per capire il motivo di ciò, dobbiamo mettere in evidenza un'importante proprietà della distribuzione esponenziale. Consideriamo una variabile aleatoria X, che rappresenti il tempo di attesa prima che si verifichi il primo guasto di un apparecchio. Sapendo che è già trascorso un tempo t senza che si sia verificato alcun guasto (cioè che $X > t$), qual è la probabilità che trascorra ulteriormente un tempo superiore ad h prima che si verifichi un guasto (cioè che $X > t + h$)? Si dimostra che questa probabilità (cioè la probabilità dell'evento $X > t$ condizionato all'evento $X > t$) è uguale alla probabilità dell'evento $X > h$ (cioè è uguale alla probabilità che si aveva inizialmente di dovere attendere più di h), se X ha distribuzione esponenziale. Questa proprietà può essere interpretata come se in ogni istante una variabile aleatoria esponenziale azzerasse la propria "memoria del passato". È questo il motivo per cui si parla di "assenza di memoria" della distribuzione esponenziale.

Teorema. *Proprietà di assenza di memoria Se X è una variabile aleatoria esponenziale, vale la seguente proprietà:*

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h) \text{ per ogni } t > 0, h > 0.$$

L'assenza di memoria si può interpretare, in termini di tempo di vita di un'apparecchiatura, come mancanza di usura; infatti la precedente formula esprime quanto segue:

$P(X > t + h | X > t) = P(X > h)$ la probabilità che il tempo di vita di un'apparecchiatura vecchia, di età t, sia superiore a $t + h$ è uguale alla probabilità che il tempo di vita di un apparecchio nuovo sia superiore ad h.

Un ulteriore fatto notevole è che l'assenza di memoria caratterizza la distribuzione esponenziale, nel senso che è l'unica distribuzione continua che soddisfa questa proprietà. Le variabili aleatorie esponenziali quindi sono l'unico modello adeguato a descrivere il tempo di vita di componenti (come i transistor) che non si usurano nel tempo e il cui guasto è da attribuirsi a eventi puramente accidentali.

Esercizio 2. *Il tempo di vita (in ore) di un componente elettronico è ben interpretato da una variabile aleatoria esponenziale X di parametro $\lambda =$* $0,0005$*. Determiniamo:*

(a) la probabilità che il tempo di vita del componente sia inferiore alle 1000 ore;

(b) il tempo di vita medio del componente.

Svolgimento. *(a) Poiché X segue una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 0,0005$, la sua densità sarà la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 0,0005e^{-0,0005x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

Dunque la probabilità richiesta è uguale a: $P(X < 1000) = \int_{-\infty}^{1000} = \int_0^{1000} 0,0005e^{-0,0005x}dx = [-e^{-0,0005x}]_0^{1000} = 0,3935$

(b) Il tempo di vita medio del componente è uguale alla media di X, che è uguale a: $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0.0005} = 2000$, *quindi la durata di vita media del componente è 2000 ore.*