Lab 5

5.1 Mazzo da Poker

Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano a caso 5 carte. Si calcoli la probabilità che:

1. nelle 5 carte ci sia almeno una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);
2. nelle 5 carte ci sia esattamente una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris, ecc...)

5.1 Soluzione

Costruiamo lo spazio campionario:

- Sia S l'insieme delle 52 carte. Allora lo spazio campione per l'estrazione di 5 carte a caso può essere denotato così:
$$\Omega := \{A \subset S : |A| = 5\}$$
- Denotiamo con $\mathcal{E}$: l'evento "nelle cinque carte estratte c'è almeno una coppia".
- Sia $\mathcal{F}$ l'evento "nelle cinque carte estratte c'è esattamente una coppia"

1. **Cosa mi viene chiesto? $P(\mathcal{E})$.**

   Per trovare questa probabilità, può essere più facile trovare la probabilità dell'evento complementare $\mathcal{E}^C$, e cioè dell'evento "nelle cinque carte estratte non c'è nemmeno una coppia".

   Secondo la **definizione classica della probabilità**, $P(\mathcal{E}^C)$ sarà uguale al rapporto tra il numero di modi possibili in cui si può verificare $\mathcal{E}^C$ (casi favorevoli) e la cardinalità di Ω (casi totali).

   In quanti modi quindi si può verificare $\mathcal{E}^C$? Posso costruire una sequenza di decisioni che mi porti a questo evento per verificare la sua cardinalità. (Un insieme di scelte che mi porti a "comporre" i possibili casi di $\mathcal{E}^C$, avendo cura di coprirli tutti, e di non contarne nessuno più di una volta).

   - Scelgo 5 *tipi* (ossia numeri o figure) *distinti* dall'insieme di tipi. Questo si può fare in $\binom{13}{5}$ modi diversi. (L'ordine non conta, quindi uso la formula delle combinazioni semplici, che non è altro che il coeff. binomiale).

- Per quanto riguarda i semi, abbiamo possibilità di scegliere qualsiasi dei 4 semi per ogni carta dall'insieme di 5 carte, visto che la coppia non si fa con i semi, ma con il numero... Quindi, fissata una sequenza di 5 tipi, per capire in quanti modi possibili questi tipi possono essere "dotati" dei corrispondenti semi, usiamo la formula delle disposizioni con ripetizioni, perchè ad ogni passo, scegliamo sempre tra 4 semi diversi, quindi 5^4.

Quindi la cardinalità di $\mathcal{E}^C$ è:

$$|\mathcal{E}^C| = \binom{13}{5} \times 5^4$$

Invece la cardinalità di Ω sappiamo essere $\binom{52}{5}$. Quindi la probabilità richiesta sarà:

$$P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{E}^C) = 1 - \frac{\binom{13}{5} \times 5^4}{\binom{52}{5}}$$

Possiamo lasciare all'esame scritta così la risposta...

2. **Cosa mi viene chiesto?** $P(\mathcal{F})$ Ragioniamo in modo analogo per trovare la cardinalità di $\mathcal{F}$:

   - Scegliamo il tipo della coppia, e questo si può fare in 13 modi diversi.
   - Avendo scelto il tipo della coppia, scegliamo i semi della coppia. Questo si può fare in $\binom{4}{2}$ modi diversi, cioè usiamo la formula delle combinazioni. (Se ussassimo la formula delle disposizioni, suporremmo che l'ordine contasse, ma implicherebbe contare due volte le possibili coppie, e la cardinalità di $\mathcal{F}$ ci verrebbe più grande di quel che è).
   - Avendo fissato la coppia, possiamo ripetere il completo ragionamento del punto 1, per capire che le restanti tre carte si possono scegliere in $\binom{12}{3} \times 4^3$ modi possibili...

   Quindi, la cardinalità di $\mathcal{F}$ è:

$$|\mathcal{F}| = \frac{13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3}{\binom{52}{5}}$$

   E l'esercizio si può considerare completo.

5.2 Test a crocette.

Uno studente deve rispondere a una domanda a risposta multipla con 5 possibili risposte. Lo studente conosce (e fornisce) la risposta corretta con probabilità p, mentre se non la conosce sceglie una delle 5 possibilità "a caso".

1. Qual è la probabilità che lo studente fornisca la risposta corretta?

2. Se la risposta data dallo studente è corretta, con quale grado l'esaminatore può ritenere che lo studente conosca effettivamente la risposta corretta?

5.2 Soluzione

Creiamo gli eventi:

- $\mathcal{A}$ corrisponde all'evento "lo studente fornisce la risposta corretta"
- $\mathcal{B}$ corrisponde all'evento "lo studente conosce la risposta corretta"

1. Cosa ci viene chiesto? $\boldsymbol{P(\mathcal{A})}$ Questo evento si può dare in due modi diversi, come

   l'enunciato del problema ci ha aiutato a vedere. Per cui, ancora una volta, possiamo avvalerci del **teorema della probabilità totale**:

   $$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{A}|\mathcal{B}^C)P(\mathcal{B}^C)$$

   L'enunciato ci dice: "lo studente conosce (e fornisce) la risposta corretta con probabilità p". Quindi possiamo desumere che:

   $$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{A}, \mathcal{B})}{P(\mathcal{B})} = \frac{p}{p} = 1$$

   In altre parole, se lo studente conosce la risposta corretta, usa le sue conoscenze con probabilità pari ad 1. La conseguenza di questa semplice e logica assunzione ci porta a dire, più intuitivamente anche, che:

   $$P(\mathcal{B}) = p, \text{ e } P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = 1, \text{ quindi } P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) = p$$

   Poi sappiamo anche che $P(\mathcal{B}^C) = 1 - p$. E, dall'ennunciato, non è difficile notare che: $P(\mathcal{A}|\mathcal{B}^C) = \frac{1}{5}$. Quindi:

   $$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{A}|\mathcal{B}^C)P(\mathcal{B}^C)$$
   $$P(\mathcal{A}) = p + (1-p)\frac{1}{5} = \frac{4p+1}{5}$$

2. Cosa ci viene chiesto? $\boldsymbol{P(\mathcal{B}|\mathcal{A})}$.

   Dalla **definizione della probabilità condizionata** abbiamo:

   $$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{B}, \mathcal{A})}{P(\mathcal{A})}$$

   Il denominatore lo abbiamo appena calcolato, mentre il numeratore è p, come abbiamo visto prima. Quindi:

   $$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{p}{\frac{4p+1}{5}} = \frac{5p}{4p+1}$$