Esame di Logica Risolto

5 Giugno 2024

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Nessuna pianta è un animale;
  - Qualche animale è mobile;
  - Tutte le piante hanno radici;
  - Niente che è mobile ha radici;
  - Tutti gli alberi sono piante;
  - Tutte le formiche sono animali.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Nessuna formica è un albero;
  2. Tutti gli alberi hanno radici;
  3. Qualche formica è mobile;
  4. Qualche pianta è un albero.

SOLUZIONE:

- Siano **p** = pianta, **a** = animale, **m** = mobile, **r** = ha radici, **l** = albero, **f** = formica. Allora la teoria è
  - $\mathbf{E}(p, a)$;

  - $\mathbf{I}(a, m)$;
  - $\mathbf{A}(p, r)$;
  - $\mathbf{E}(m, r)$;
  - $\mathbf{A}(l, p)$;
  - $\mathbf{A}(f, a)$.

- Consideriamo le quattro affermazioni:
  - $\mathbf{E}(f, l)$ segue per dimostrazione diretta:

$$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{E}(p,a) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{A}(f,a) & \text{Ipotesi} \\ (3) & \mathbf{A}(l,p) & \text{Ipotesi} \\ (4) & \mathbf{E}(l,a) & \text{PS2, da (1) e (3)} \\ (5) & \mathbf{E}(a,l) & \text{C1, da (4)} \\ (6) & \mathbf{E}(f,l) & \text{PS2, da (5) e (2).} \end{array}$$

  - $\mathbf{A}(l, r)$ segue per dimostrazione diretta:

$$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{A}(l,p) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{A}(p,r) & \text{Ipotesi} \\ (3) & \mathbf{A}(l,r) & \text{PS1, da (2) e (1).} \end{array}$$

  - $\mathbf{I}(f, m)$ non segue dalla teoria. Infatti, consideriamo il modello (Δ, ι) dove
    * $\Delta = \{1, 2, 3\}$;
    * $\iota(p) = \{3\}$;
    * $\iota(a) = \{1, 2\}$;
    * $\iota(m) = \{2\}$;
    * $\iota(r) = \{3\}$;
    * $\iota(l) = \{3\}$;
    * $\iota(f) = \{1\}$.

    Allora
    * $\mathbf{E}(p, a)$ è soddifatta, perchè $\iota(p) \cap \iota(a) = \emptyset$;
    * $\mathbf{I}(a, m)$ è soddisfatta, perchè $\iota(a) \cap \iota(m) = \{2\} \neq \emptyset$;
    * $\mathbf{A}(p, r)$ è soddisfatta, perchè $\iota(p) \subseteq \iota(r)$;
    * $\mathbf{E}(m, r)$ è soddisfatta, perchè $\iota(m) \cap \iota(r) = \emptyset$;
    * $\mathbf{A}(l, p)$ è soddisfatta, perchè $\iota(l) \subseteq \iota(r)$;
    * $\mathbf{A}(f, a)$ è soddisfatta, perchè $\iota(f) \subseteq \iota(a)$;

    Ma $\mathbf{I}(f, m)$ non è soddifatta, perchè $\iota(f) \cap \iota(m) = \emptyset$.

- $\mathbf{I}(p, l)$ segue per dimostrazione diretta:

$$\begin{array}{r|ll} (1) & \mathbf{A}(l,p) & \text{Ipotesi} \\ (2) & \mathbf{I}(l,p) & \text{C2, da (1)} \\ (3) & \mathbf{I}(p,l) & \text{C3, da (2).} \end{array}$$

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Anna viaggia in treno o Anna viaggia in aereo;
  - Non è vero che Anna viaggia in treno e Anna viaggia in aereo (cioè, non è possibile che Anna viaggi sia in treno che in aereo).
  - Carla viaggia in macchina o Carla viaggia in aereo;
  - Non è vero che Carla viaggia in macchina e Carla viaggia in aereo (cioè, non è possibile che Carla viaggi sia in macchina che in aereo).
  - Se Anna viaggia in aereo, Carla viaggia in aereo.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se Anna viaggia in treno, Carla viaggia in macchina;
  - Se Carla viaggia in macchina, Anna viaggia in treno.
- Verificate se la teoria ha "Se Anna non viaggia in treno, Carla non viaggia in macchina" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere gli altri).

SOLUZIONE:

- Siano X = "Anna viaggia in treno", Y = "Anna viaggia in aereo", Z = "Carla viaggia in macchina" e W = "Carla viaggia in aereo". Allora lo scenario corrisponde alla teoria

$$X \vee Y;$$
$$\neg(X \wedge Y);$$
$$Z \vee W;$$
$$\neg(Z \wedge W);$$
$$Y \rightarrow W,$$

- La tabella di verità è:

X	Y	Z	W	$X \vee Y$	$X \wedge Y$	$\neg(X \wedge Y)$	$Z \vee W$	$Z \wedge W$	$\neg(Z \wedge W)$	$Y \to W$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1

Quindi, le valutazioni che verificano tutte le formule della teoria sono

X	Y	Z	W
0	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0

- Le due affermazioni corrispondono alle formule $X \to Z$ e $Z \to X$. Esaminandone il valore di verità per le valutazioni che verificano la teoria, abbiamo che

X	Y	Z	W	$X \to Z$	$Z \to X$
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1

  Quindi la seconda affermazione segue dalla teoria, ma la prima no.

- La formula $\neg X \to \neg Z$ segue dalla teoria secondo il seguente tableau chiuso:

$$\{X \vee Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg(Z \wedge W), Y \to W, \underline{\neg(\neg X \to \neg Z)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{X \vee Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg(Z \wedge W), Y \to W, \neg X, \underline{\neg\neg Z}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\underline{X \vee Y}, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg(Z \wedge W), Y \to W, \neg X, Z\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{X, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg(Z \wedge W), Y \to W, \neg X, Z\} \qquad \{Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg(Z \wedge W), \underline{Y \to W}, \neg X, Z\}$$

Chiuso: X, $\neg X$

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$\{Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg(Z \wedge W), \neg Y, \neg X, Z\} \qquad \{Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \underline{\neg(Z \wedge W)}, W, \neg X, Z\}$$

Chiuso: Y, $\neg Y$

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$\{Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg Z, W, \neg X, Z\} \qquad \{Y, \neg(X \wedge Y), Z \vee W, \neg W, W, \neg X, Z\}$$

Chiuso: $\neg Z$, Z — Chiuso: $\neg W$, W

3 Risoluzione Proposizionale

Considerate la teoria proposizionale

$$\Gamma := \{\neg X \to (Y \vee Z), (Y \wedge Z) \to W, (W \wedge \neg X) \to X\}.$$

- Convertite tutte le formule della teoria in formule equivalenti in Forma Normale Congiuntiva;
- Utilizzando la Procedura di Davis-Putnam, verificate se Γ ha come conseguenza $\neg X \to (\neg Y \vee \neg Z)$.

SOLUZIONE:

- Convertiamo le tre formule in Γ:

$$\begin{aligned} \neg X \to (Y \vee Z) &\equiv \neg\neg X \vee Y \vee Z \\ &\equiv X \vee Y \vee Z; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(Y \wedge Z) \to W &\equiv \neg(Y \wedge Z) \vee W \\
&\equiv \neg Y \vee \neg Z \vee W;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(W \wedge \neg X) \to X &\equiv \neg(W \wedge \neg X) \vee X \\
&\equiv \neg W \vee \neg\neg X \vee X \\
&\equiv \neg W \vee X \vee X \equiv \neg W \vee X
\end{aligned}
$$

- Per applicare la procedura di Davis-Putnam, convertiamo anche $\neg(\neg X \to (\neg Y \vee \neg Z))$ (la negazione della conclusione) in forma normale congiuntiva:

  $$
  \begin{aligned}
  \neg(\neg X \to (\neg Y \vee \neg Z)) &\equiv \neg(\neg\neg X \vee (\neg Y \vee \neg Z)) \\
  &\equiv \neg(X \vee (\neg Y \vee \neg Z)) \\
  &\equiv \neg X \wedge \neg\neg Y \wedge \neg\neg Z \equiv \neg X \wedge Y \wedge Z
  \end{aligned}
  $$

  Quindi, la formula segue dalla teoria se e solo se l'insieme di clausole

  $$S = \{\{X, Y, Z\}, \{\neg Y, \neg Z, W\}, \{\neg W, X\}, \{\neg X\}, \{Y\}, \{Z\}\}$$

  è insoddisfacibile.

  Verifichiamolo se è così con la procedura di Davis-Putnam:

  1. $\{\{X, Y, Z\}, \{\neg Y, \neg Z, W\}, \{\neg W, X\}, \{\neg X\}, \{Y\}, \{Z\}\}$:

     $\{X, Y, Z\}$ è sussunta da $\{Y\}$ (o, equivalentemente, da $\{Z\}$), e quindi possiamo rimuoverla.
  2. $\{\{\neg Y, \neg Z, W\}, \{\neg W, X\}, \{\neg X\}, \{Y\}, \{Z\}\}$:
     Scelgo X come pivot.
  3. $\{\{\neg Y, \neg Z, W\}, \{Y\}, \{Z\}, \{\neg W\}\}$:
     Scelgo Y come pivot.
  4. $\{\{Z\}, \{\neg W\}, \{\neg Z, W\}\}$:
     Scelgo Z come pivot.
  5. $\{\{\neg W\}, \{W\}\}$:
     Scelgo W come pivot.
  6. $\{\Box\}$.

  Quindi l'insieme di clausole è insoddisfacibile, e quindi la formula è una conseguenza della teoria.