Esame di Logica

26 Giugno 2023

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutte le ciambelle sono dolciumi;
  - Nessun dolciume è salato;
  - Qualche torta è un dolciume;
  - Qualche torta è salata;
  - Nessuna pizza è un dolciume.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Nessuna ciambella è salata;
  2. Qualche pizza non è una ciambella;
  3. Qualche torta non è una ciambella;
  4. Tutte le pizze sono salate.

SOLUZIONE:

- **c** = ciambella, **d** = dolciume, **t** = torta, **s** = salato, **p** = pizza.

- Le affermazioni sono rappresentabili come

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(c,d);\\&\mathbf{E}(d,s);\\&\mathbf{I}(t,d);\\&\mathbf{I}(t,s);\\&\mathbf{E}(p,d)\end{aligned}$$

- Consideriamo le quattro affermazioni:
  - La prima ($\mathbf{E}(c,s)$) segue dalla teoria per dimostrazione diretta:

(1)	A(c,d)	Ipotesi
(2)	E(d,s)	Ipotesi
(3)	E(c,s)	PS2, da (2) e (1).

  - La seconda ($\mathbf{O}(p,c)$) è una conseguenza della teoria, dimostrabile per dimostrazione indiretta come segue:

(1)	A(c,d)	Ipotesi
(2)	E(p,d)	Ipotesi
(3)	A(p,c)	Contraddizione di O(p,c)
(4)	A(p,d)	PS1, da (1) e (3)
(5)	I(p,d)	C2, da (4)

    e I(p,d) e E(p,d) sono in contraddizione.
  - La terza ($\mathbf{O}(t,c)$) è una conseguenza della teoria, come segue dalla seguente dimostrazione diretta:

(1)	A(c,d)	Ipotesi
(2)	E(d,s)	Ipotesi
(3)	I(t,s)	Ipotesi
(4)	E(c,s)	PS2, da (2) e (1)
(5)	E(s,c)	C1, da (4)
(6)	O(t,c)	PS4. da (5) e (3).

  - La quarta ($\mathbf{A}(p,s)$) non è una conseguenza della teoria.
    Infatti, consideriamo il modello con dominio $\Delta = \{1,2,3,4\}$, dove $\iota(c) = \{1\}$, $\iota(d) = \{1,2\}$, $\iota(t) = \{2,3\}$, $\iota(s) = \{3\}$ e $\iota(p) = \{4\}$.
    Allora
    * $\mathbf{A}(c,d)$ è soddisfatta, perchè $\iota(c) \subseteq \iota(d)$;
    * $\mathbf{E}(d,s)$ è soddisfatta, perchè $\iota(d) \cap \iota(s) = \emptyset$;
    * $\mathbf{I}(t,d)$ è soddisfatta, perchè $\iota(t) \cap \iota(d) = \{2\} \neq \emptyset$;
    * $\mathbf{I}(t,s)$ è soddisfatta, perchè $\iota(t) \cap \iota(s) = \{3\} \neq \emptyset$;
    * $\mathbf{E}(p,d)$ è soddisfatta, perchè $\iota(p) \cap \iota(d) = \emptyset$

    ma $\mathbf{A}(p,s)$ non è soddisfatta, perchè $\iota(p) = \{4\} \not\subseteq \iota(s) = \{3\}$.

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Se il cane abbaia, allora è sveglio;
  - Il cane è sveglio oppure dorme;
  - Non è vero che il cane è sveglio e dorme.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se il cane non dorme, allora il cane abbaia.
  - Se il cane non dorme, allora il cane è sveglio.
- Verificate se la teoria ha "Se il cane abbaia allora non dorme" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere le altre formule del ramo).

SOLUZIONE:

- X = il cane abbaia, Y = il cane è sveglio, Z = il cane dorme. La teoria è

$$X \to Y;$$
$$Y \vee Z;$$
$$\neg(Y \wedge Z).$$

- La tabella di verità è:

X	Y	Z	$X \to Y$	$Y \vee Z$	$Y \wedge Z$	$\neg(Y \wedge Z)$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

  E quindi gli assegnamenti che soddisfano la teoria sono quelli che assegnano a X, Y, e Z i valori $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ o $(1, 1, 0)$.

- Le affermazioni da verificare sono $\neg Z \to X$ e $\neg Z \to Y$.

X	Y	Z	$\neg Z$	$\neg Z \to X$	$\neg Z \to Y$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1

Quindi la prima non è una conseguenza della teoria, ma la seconda lo è.

- L'affermazione che stiamo cercando di verificare essere una conseguenza è $X \to \neg Z$. Quindi:

$$\{X \to Y, Y \vee Z, \neg(Y \wedge Z), \underline{\neg(X \to \neg Z)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{X \to Y, Y \vee Z, \neg(Y \wedge Z), X, \underline{\neg\neg Z}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\underline{X \to Y}, Y \vee Z, \neg(Y \wedge Z), X, Z\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{\neg X, Y \vee Z, \neg(Y \wedge Z), X, Z\}$$

Chiuso: $\neg X$, X

$$\{Y, Y \vee Z, \underline{\neg(Y \wedge Z)}, X, Z\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{Y, Y \vee Z, \neg Y, X, Z\}$$

Chiuso: Y, $\neg Y$

$$\{Y, Y \vee Z, \neg Z, X, Z\}$$

Chiuso: $\neg Z$, Z

Il tableaux è chiuso, e quindi $X \to \neg Z$ è conseguenza della teoria.

3 Logica dei Predicati

- Scrivete una teoria in logica dei predicati che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutte le persone sono destre oppure mancine;
  - Una persona è ambidestra se e solo se è sia destra che mancina;
  - Se una persona mancina gioca a tennis contro una persona non mancina, la persona mancina vince.
  - Anna è ambidestra e non vince a tennis contro nessuno.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e in cui Anna gioca a tennis con qualcuno? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.

- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta e in cui Anna gioca a tennis con una persona non mancina? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.

SOLUZIONE:

- D, M e A sono predicati unari ("destra", "mancina" e "ambidestra), G e V sono predicati binari ("gioca contro" e "vince contro"), e $\mathtt{a}$ è una costante ("Anna"). La teoria è quindi
  - $\forall x(D(x) \vee M(x))$;
  - $\forall x(A(x) \leftrightarrow D(x) \wedge M(x))$;
  - $\forall x \forall y(M(x) \wedge \neg M(y) \wedge G(x,y) \rightarrow V(x,y))$;
  - $A(\mathtt{a}) \wedge \forall y \neg V(\mathtt{a}, y)$.
- Una tale struttura esiste. Per esempio, potremmo supporre che ci sia un unico individuo, che è Anna e che gioca contro sè stesso (la teoria non dice che questo non può succedere): Il dominio è quindi $\{1\}$, dove $I(D) = I(M) = I(A) = \{1\}$, $I(G) = \{(1,1)\}$, $I(V) = \emptyset$, e $I(\mathtt{a}) = 1$.
- Una tale struttura non può esistere: visto che Anna è ambidestra deve essere mancina, e quindi se giocasse a tennis con una persona non mancina vincerebbe lei.