Formulario PSI 24/25 - Varese - Insubria University

DEFINIZIONI DI PROBABILITÀ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

CALCOLO COMBINATORIO

REINSERIMENTO	COMBINAZIONI	DISPOSIZIONI
SI	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k
NO	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$

ELEMENTI DISTINTI	PERMUTAZIONI
SI	$n!$
NO	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

MOMENTI DI CENTRALITÀ VARIABILI ALEATORIE

DEF. VALORE ATTESO

v.a. discrete:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in dom X} x \cdot P(X = x)$$

v.a. continue:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(X = x)$$

DEVIAZIONE STANDARD

$$Std[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

DEFINIZIONI FONDAMENTALI PROBABILITÀ

PROBABILITÀ DELL'UNIONE

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

PROBABILITÀ DELL'INTERSEZIONE
o probabilità *congiunta*

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

per eventi indipendenti:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se $P(B) > 0$

per eventi indipendenti:

$$P(A|B) = P(A)$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Bayes + t. prob. totale:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C)}$$

DEF. FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ (PMF)

DEF. FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (CMF/CDF)

LEGGI DI PROBABILITÀ NOTE (V.A. DISCRETE)

V.A. DI BERNOULLI *indica l'esito di un esperimento dove ci sono due possibili esiti il parametro p indica la probabilità di successo (x=1)*

$\mathcal{X} \sim \text{Bernoulli}(p), \quad 0 \le p \le 1$

$P(\mathcal{X} = x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = p \qquad Var[\mathcal{X}] = p(1-p)$

V.A. BINOMIALE *indica il numero di successi ottenuti in una serie di **n** esperimenti di Bernoulli identici e indipendenti tra loro*

$\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n,p),$

$P(\mathcal{X} = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = np \qquad Var[\mathcal{X}] = np(1-p)$

V.A. DI POISSON *modella il numero di eventi in un intervallo fisso di tempo o spazio. Il parametro **λ** indica la frequenza degli eventi in tale intervallo.*

$\mathcal{X} \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad \lambda > 0$

$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \lambda \quad Var[\mathcal{X}] = \lambda$

V.A. GEOMETRICA *indica l'istande di primo successo in una serie di **n** esperimenti di Bernoulli i.i.d*

$\mathcal{X} \sim \text{Geo}(p), \quad 0 < p \le 1 \qquad dom(\mathcal{X}) = \mathbb{N}$

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{p} \quad Var[\mathcal{X}] = \frac{1-p}{p^2}$

APPROSSIMAZIONI DELLA BINOMIALE con POISSON

*data una v.a. binomiale con **n** molto grande e **p** molto piccolo:*

$\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n,p)$

tale che $0 \le p \le 0.1, n > 20$

allora si ha

$\mathcal{X} \approx \mathcal{Y} \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$

APPROSS. DELLA BINOMIALE con v.a. GAUSSIANA

*data una v.a. binomiale con **n** molto grande e **p** vicino a 0.5:*

$\mathcal{X} \sim \text{Bin}(n,p)$

tale che $0.4 \le p \le 0.6, n > 10$

allora si ha

$\mathcal{X} \approx \mathcal{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right)$

*applicando la **correzione di continuità:***

LEGGI DI PROBABILITÀ NOTE (V.A. CONTINUE)

V.A. UNIFORME *modella una variabile aleatoria che ha uguale probabilità di assumere qualsiasi valore in un intervallo **[a,b]***

$\mathcal{X} \sim \text{Uni}(a,b)$

$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{Var}[\mathcal{X}] = \frac{(b-a)^2}{12}$

$F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$

V.A. ESPONENZIALE *modella il tempo tra eventi successivi in un processo di Poisson (il parametro λ indica la frequenza degli eventi in un intervallo di riferimento).*

$\mathcal{X} \sim \text{Exp}(\lambda)$

$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{Var}[\mathcal{X}] = \frac{1}{\lambda^2}$

$F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$

funzione di sopravivenza

$S_{\mathcal{X}}(x) = 1 - F_{\mathcal{X}}(x) = e^{-\lambda x},$

proprietà di mancanza di memoria

$P(\mathcal{X} > t + s \mid \mathcal{X} > s) = P(\mathcal{X} > t),$

V.A. GAUSSIANA *modella fenomeni naturali dove valori medi sono più probabili, con una simmetria attorno al valore atteso, che è indicato dal parametro **μ**. Il parametro **σ** indica invece la deviazione standard.*

$\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mu \qquad \text{Var}[\mathcal{X}] = \sigma^2$

$F_{\mathcal{X}}(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

la PDF Gaussiana è simmetrica, e perci $-\Phi_{\mu,\sigma}(x) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(\ x)$

TEOREMI DI CENTRALITÀ

Sia $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^{n}$ *una sequenza di variabili iid tale che:*

$\mathbb{E}[\mathcal{X}_i] = \mu$ *e* $\text{Var}[\mathcal{X}_i] = \sigma^2$ *e siano:*

$\overline{\mathcal{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$ *la v.a. "media campionaria"*

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *la v.a. "somma"*

*allora, per valori di **n**, grandi si ha:*

$\overline{\mathcal{X}}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$ *e* $S_n \sim \mathcal{N}\left(n\mu, \sqrt{n\sigma^2}\right)$

STIMATORE NON DISTORTO VARIANZA:

DISUGUAGLIANZE DI CONCENTRAZIONE

*Sia **X** una qualsiasi v.a **non negativa**, si ha:*

$\mathbb{P}(\mathcal{X} \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[\mathcal{X}]}{a}, \quad \text{per } a > 0$

(disuguaglianza di Markov)

*inoltre, se **X** ha valore atteso e varianza finite, si ha:*

$\mathbb{P}(|\mathcal{X} - \mathbb{E}[\mathcal{X}]| \ge a) \le \frac{\text{Var}[\mathcal{X}]}{a^2} \quad \text{per } a > 0$

(disuguaglianza di Chebyshev)