Tableaux Proposizionali

Corso di Logica

Brunella Gerla

Università dell'Insubria, Varese
brunella.gerla@uninsubria.it

Per controllare se una formula P con n variabili diverse è soddisfacibile dobbiamo scrivere una tabella con 2^n righe.

Teorema di Cook

Il problema *SAT* di stabilire se una formula è soddisfacibile è un problema **NP-completo**.

Quindi controllare la soddisfacibilità è *complicato*.
Si possono comunque introdurre dei metodi per decidere la soddisfacibilità più velocemente almeno per alcuni tipi di formule.
Studiamo i **TABLEAUX** che sono un metodo per refutazione.

Definizione

Una formula P è una α-**formula** se ha la forma $A \wedge B$ oppure $\neg(A \vee B)$ oppure $\neg(A \rightarrow B)$. I ridotti di una α-formula sono definiti dalla seguente tabella:

	ridotti	
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$

Proposizione

Ogni α-formula è equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti.

Definizione

Una formula P è una β-**formula** se ha la forma $A \vee B$ oppure $\neg(A \wedge B)$ oppure $A \to B$. I ridotti di una α-formula sono definiti dalla seguente tabella:

	ridotti	
$A \vee B$	A	B
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \to B$	$\neg A$	B

Proposizione

Ogni β-formula è equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti.

Proposizione

Ogni formula P è di uno dei seguenti tipi:

- *P è un letterale;*
- *P è una doppia negazione, cioè $P = \neg\neg Q$;*
- *P è una α-formula;*
- *P è una β-formula.*

Definizione

Una coppia di letterali $X, \neg X$ si dice **complementare**.

Chiaramente una coppia complementare di letterali non è soddisfacibile. In generale vale che:

Proposizione

Un insieme di letterali è soddisfacibile se e solo se non contiene coppie complementari.

Esempio

Sia $P = (X \vee \neg Y) \wedge \neg X$. Se v è una valutazione che soddisfa P allora v deve soddisfare sia $X \vee \neg Y$ che $\neg X$.
Se v soddisfa $X \vee \neg Y$ allora v o soddisfa X oppure soddisfa $\neg Y$.
Quindi o v soddisfa sia X che $\neg X$ (che è impossibile) oppure v soddisfa $\neg X$ e $\neg Y$.
In particolare, la valutazione $v(X) = 0$ e $v(Y) = 0$ soddisfa la formula P.
Vogliamo rappresentare questo ragionamento su un albero:

$$(X \vee \neg Y) \wedge \neg X$$

$$X \vee \neg Y, \neg X$$

$$X, \neg X \qquad\qquad\qquad \neg Y, \neg X$$

Le formule nello stesso nodo le leggiamo in AND mentre le formule su nodi diversi, ma allo stesso livello le leggiamo in OR.

Nota che nelle foglie ci sono solo letterali e in una delle foglie c'è una coppia complementare.

Definizione di tableau

Definizione

Un **tableau** per una formula P è un albero T i cui nodi sono etichettati con insiemi di sottoformule di P.
Denotiamo con $E(n)$ l'etichetta del nodo n.
L'albero si costruisce per passi successivi.
Al passo 0 abbiamo un albero T_0 formato da un solo nodo con etichetta $\{P\}$.
Se al passo $i-1$ abbiamo costruito un albero T_{i-1}, al passo i costruiamo l'albero T_i guardando le foglie dell'albero T_{i-1}:

- Se nelle foglie ci sono solo letterali, allora la costruzione termina e T_{i-1} sarà l'albero finale.

- supponiamo che nell'etichetta $E(n)$ della foglia n ci sia una formula G che non è un letterale. Allora si possono avere i seguenti casi:
  - Se G è una doppia negazione $G = \neg\neg G_1$, allora l'albero T_i si costruisce aggiungendo un nodo n_1 come successore di n e ponendo
  $$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1\}.$$
  - Se G è una α formula con ridotti G_1 e G_2, allora l'albero T_i si costruisce aggiungendo un nodo n_1 come successore di n e ponendo
  $$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1, G_2\}.$$
  - Se G è una β formula con ridotti G_1 e G_2, allora l'albero T_i si costruisce aggiungendo due nod n_1 e n_2 come successori di n e ponendo
  $$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1\},$$
  $$E(n_2) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_2\}.$$

La costruzione termina sempre, perché la complessità delle formule diminuisce.
L'algoritmo presentato non è deterministico, perché ad ogni passo si possono scegliere nodi diversi e formule diverse all'interno di uno stesso nodo.
Conviene però applicare sempre prima le regole delle α formule (che non biforcano l'albero) e poi alle β formule.

Esempio

$$\neg(((X \to Y) \wedge (X \to \neg Y)) \to \neg X)$$

$$(X \to Y) \wedge (X \to \neg Y), \neg\neg X$$

$$(X \to Y) \wedge (X \to \neg Y), X$$

$$X \to Y, X \to \neg Y, X$$

$$\neg X, X \to \neg Y, X \qquad\qquad Y, X \to \neg Y, X$$

$$\neg X, \neg X, X \qquad \neg X, \neg Y, X \qquad Y, \neg X, X \qquad Y, \neg Y, X$$

In ogni foglia compare una coppia complementare.

Definizione

Un ramo di un tableau è **chiuso** se la foglia contiene una coppia complementare. Un tableau è **chiuso** se ogni ramo è chiuso.

Un ramo è **aperto** se non è chiuso. Un albero è aperto se ha almeno un ramo aperto.

Esempio

$$(\neg Y \to X) \vee \neg(Z \wedge Y \to \neg X)$$

$$\begin{array}{cc|c}
\multicolumn{2}{c|}{\neg Y \to X} & \neg(Z \wedge Y \to \neg X) \\
\neg\neg Y & X & Z \wedge Y, \neg\neg X \\
Y & & Z, Y, X
\end{array}$$

Tutti i rami di questo albero sono aperti.
Questa formula è soddisfatta se $v(Y) = 1$ oppure se $v(X) = 1$ oppure se $v(X) = v(Y) = v(Z) = 1$.

Teorema di completezza e correttezza

Una formula P è insoddisfacibile se e solo se esiste un tableau chiuso per P.

E' possibile scrivere tableaux diversi per una stessa formula, ma se esiste un tableau chiuso per P allora sono tutti chiusi. Denoteremo con T_P un tableau che ha P come radice.
Correttezza. Se T_P è un tableau chiuso allora P è insoddisfacibile.

Dimostrazione.

Se n è un nodo di T_P definiamo l'altezza di n in T come:

- Se n è una foglia allora $h(n) = 0$;
- se n ha un figlio n_1 allora $h(n) = h(n_1) + 1$.
- se n ha due figli n_1 e n_2 allora $h(n) = \max(h(n_1), h(n_2)) + 1$.

Dimostriamo per induzione su $h(n)$ che per ogni nodo n di T_P l'insieme $E(n)$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione.

Se $h(n) = 0$ allora n è una foglia e poiché T_P è chiuso allora $E(n)$ contiene una coppia complementare quindi è insoddisfacibile.
Sia $h(n) > 0$, quindi n ha 1 o 2 figli. Sia $G \in E(n)$ la formula a cui si applica la regola.

- Se $G = \neg\neg G_1$ allora n_1 è il successore di n e

  $$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1\};$$

  per ipotesi di induzione, dato che $h(n_1) < h(n)$, $E(n_1)$ è insoddisfacibile. Quindi per ogni interpretazione v esiste una formula $P \in E(n_1)$ tale che $v(P) = 0$: se $P \in E(n)$ allora anche $E(n)$ è insoddisfacibile; se $P = G_1$ allora $v(G) = v(G_1) = 0$ e quindi dato che $G \in E(n)$ ancora $E(n)$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione

- Se G è una α-formula allora c'è un figlio n_1 e

$$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1, G_2\}\,.$$

Per ipotesi di induzione $E(n_1)$ è insoddisfacibile e quindi per ogni valutazione v esiste una formula $P \in E(n_1)$ tale che $v(P) = 0$.
Se $P \in E(n)$ allora $E(n)$ è insoddisfacibile.
Se invece $P \in E(n_1) \setminus E(n)$ allora o $P = G_1$ oppure $P = G_2$, quindi o $v(G_1) = 0$ oppure $v(G_2) = 0$ e quindi $v(G) = 0$.

Dimostrazione.

- Se G è una β-formula allora ci sono due figli n_1 e n_2 e

$$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1\}.$$

$$E(n_2) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_2\}.$$

  Per ipotesi di induzione $E(n_1)$ e $E(n_2)$ sono insoddisfacibili e quindi per ogni valutazione v esistono $P_1 \in E(n_1)$ e $P_2 \in E(n_2)$ tale che $v(P_1) = v(P_2) = 0$. Se $P_1 \in E(n)$ oppure $P_2 \in E(n)$ allora $E(n)$ è insoddisfacibile.
  Altrimenti $P_1 = G_1$ e $P_2 = G_2$ e quindi $v(G_1) = 0$ e $v(G_2) = 0$ e quindi $v(G) = 0$.

Quindi l'insieme $E(n)$ è insoddisfacibile per ogni n e quindi anche la formula P che è l'unico elemento dell'etichetta della radice è insoddisfacibile.

$\square$

Completezza

Se P è insoddisfacibile allora il tableau T_P è chiuso.

Definizione

Un insieme di formule Γ è un **Hintikka** set (o H-set) se:

1. Γ non contiene coppie complementari;
2. Se $\neg\neg P \in \Gamma$ allora $P \in \Gamma$;
3. se $P \in \Gamma$ e P è una α formula con ridotti P_1 e P_2 allora $P_1, P_2 \in \Gamma$;
4. se $P \in \Gamma$ e P è una β formula con ridotti P_1 e P_2 allora o $P_1 \in \Gamma$ oppure $P_2 \in \Gamma$.

Esempio

L'insieme $\Gamma_1 = \{X \to Y, Y, Z\}$ è un Hintikka set.
$\Gamma_2 = \{Y, X \to Y, X \wedge Z, X\}$ non è un Hintikka set.
$\Gamma_3 = \{X, Y, \neg Y, X \to Y, X \wedge Z, Z\}$?

Nel seguito invece dell'induzione strutturale useremo l'induzione sul rango di una formula definito nel seguente modo:

Definizione

Il rango $rg(P)$ di una formula P è dato da:

- Se P è un letterale allora $rg(P) = 1$;
- se $P = \neg\neg P_1$ allora $rg(P) = rg(P_1) + 1$;
- se P è una α formula o una β formula con ridotti P_1 e P_2 allora $rg(P) = rg(P_1) + rg(P_2) + 1$

Lemma 1

Ogni H-set è soddisfacibile.

Dimostrazione.

Sia Γ un H-set. Definiamo una valutazione v tale che

$$v(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } X \in \Gamma \\ 0 & \text{se } X \notin \Gamma\,. \end{cases}$$

Dimostriamo per induzione su $rg(P)$ che per ogni $P \in \Gamma$ si ha $v(P) = 1$.
Se $rg(P) = 1$ allora P è un letterale: se $P = X \in \Gamma$ allora per definizione $v(P) = 1$; altrimenti se $P = \neg X \in \Gamma$ allora $X \notin \Gamma$ e quindi $v(X) = 0$ e $v(P) = 1$;
Se $rg(P) > 1$ allora

- Se $P = \neg\neg P_1 \in \Gamma$ allora poiché Γ è un Hintikka set, $P_1 \in \Gamma$. Dato che $rg(P_1) < rg(P)$ per ipotesi di induzione si ha che $v(P_1) = 1$ e quindi $v(P) = 1$.

Dimostrazione.

- Se $P \in \Gamma$ è una α formula con ridotti P_1 e P_2, allora $P_1, P_2 \in \Gamma$ e per ipotesi di induzione $v(P_1) = v(P_2) = 1$, quindi $v(P) = 1$.
- Se $P \in \Gamma$ è una β formula con ridotti P_1 e P_2, allora o $P_1 \in \Gamma$ o $P_2 \in \Gamma$ e quindi per ipotesi di induzione o $v(P_1) = 1$ oppure $v(P_2) = 1$, quindi $v(P) = 1$.

$\square$

Lemma 2

Se r è un ramo aperto di un tableau T allora l'insieme di formule

$$R = \bigcup_{n \in r} E(n)$$

è un H-set.

Dimostrazione.

1. R non contiene coppie complementari perché è aperto.
2. Se $\neg\neg P \in R$ allora P appartiene all'etichetta del nodo successivo rispetto a quello che contiene $\neg\neg P$ e quindi $P \in R$.
3. Se $P \in R$ è una α formula con ridotti P_1 e P_2 e $P \in E(n) \subseteq R$ allora n ha un successore n_1 tale che $P_1, P_2 \in E(n_1) \subseteq R$.
4. Se $P \in R$ è una β formula con ridotti P_1 e P_2 e $P \in E(n) \subseteq R$ allora n ha due successori n_1 e n_2. Se $n_1 \in r$ allora $P_1 \in E(n_1) \subseteq R$. Altrimenti $n_2 \in r$ e quindi $P_2 \in R$.

Dimostrazione della completezza

Se r è un ramo aperto di un tableau T, l'insieme

$$R = \bigcup_{n \in r} E(n)$$

è un H-set e quindi è soddisfacibile.
Quindi la radice P dell'albero è soddisfacibile.
Quindi se T_P è un tableau aperto allora P è soddisfacibile, che equivale a dire che

Se P non è soddisfacibile allora T è chiuso.

$\square$

Proposizione

P è una tautologia se e solo se $T_{\neg P}$ è un tableau chiuso.

Dimostrazione.

P è una tautologia se e solo se $\neg P$ è una contraddizione se e solo se $T_{\neg P}$ è chiuso. □

Se il tableau T_P ha un ramo aperto r la cui foglia è n, allora l'interpretazione

$$v(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } X \in E(n) \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

soddisfa la formula P.

Esempio

Sia $P = \neg(\neg(X \to \neg Y) \to (X \wedge Y))$. Un tableau per questa formula è :

$$
\begin{array}{c}
\neg(\neg(X \to \neg Y) \to (X \wedge Y)) \\
| \\
\neg(X \to \neg Y), \neg(X \wedge Y) \\
| \\
X, \neg\neg Y, \neg(X \wedge Y) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
X, Y, \neg X \qquad X, Y, \neg Y
\end{array}
$$

Entrambi i rami sono chiusi quindi P è insoddisfacibile e la formula

$$\neg P = \neg(X \to \neg Y) \to (X \wedge Y)$$

è una tautologia.

Provare che invece la formula

$$(X \to Y) \wedge ((X \to \neg Y) \to \neg X)$$

non è una tautologia e trovare una valutazione che non la soddisfa.

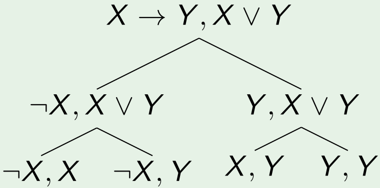
Possiamo usare i tableaux anche per trattare la conseguenza logica.
Si ha che

Proposizione

Un insieme finito di formule Γ è soddisfacibile se il tableau che ha Γ come radice è aperto.

Esempio

Sia $\Gamma = \{X \to Y, X \vee Y\}$.



Il tableau è aperto e quindi l'insieme Γ è soddisfacibile (prova).

$\Gamma_1 = \{X \vee Y, Y \to Z, \neg(X \vee Z)\}$ è insoddisfacibile.

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} \Gamma \models P \quad & \text{se e solo se} \\ \Gamma \cup \{\neg P\} \text{ è insoddisfacibile} \quad & \text{se e solo se} \\ T_{\Gamma \cup \{\neg P\}} \text{ è chiuso.} & \end{aligned}$$

Esempio

Verificare se valgono o no le seguenti conseguenze logiche:

$$\begin{aligned} \neg X \models (X \wedge \neg Y) \to (X \wedge Y) \\ X \to Y \models \neg X \to Y \\ X \to Y \models \neg Y \to \neg X. \end{aligned}$$

Un tableau aperto per una formula P permette anche di scrivere una forma normale disgiuntiva ad essa equivalente:
Se T_P ha le foglie $n_1, \ldots, n_s$ allora P è equivalente alla formula

$$\bigvee_{i=1}^{s} \left(\bigwedge_{\ell \in E(n_i)} \ell \right)$$

dove gli ℓ sono i letterali che compaiono nelle etichette $E(n_i)$.