Soluzioni Esempio II prova Intercorso

(1) Esempio di formula

$$\varphi = \forall x \exists y \left(Q(f(x), y) \to \neg P(x) \right)$$

Struttura $\mathcal{A} = (D, I)$

$D = \{1, 2, 3\}$

$I(f):\ \begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{matrix}$

$I(Q) = \{(1,1), (2,1), (2,3), (3,1)\}$

$I(P) = \{2\}$

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

(Ci sono molte risposte possibili; se $D = \mathbb{N}$

$I(f): n \to n+1$

$I(Q) = \{(n,m) \mid n < m\}$

$I(P) = \{n \mid n \text{ è pari}\}$

In questo caso

$v^{\mathcal{A}}(\varphi) =$ "per ogni n esiste m tale che se $n+1 < m$ allora n non è pari"

e $\mathcal{A} \not\models \varphi$)

(2)

- $\forall x \exists y R(x,y)$ è falsa perché c non è in relazione con nessun elemento

- $\forall x \exists y \neg R(x,y)$ è vera perché

$a \not R b$
$b \not R c$
$c \not R d$
$d \not R c$
$e \not R b$

- $\neg \forall x \exists y R(x,y)$ è vera (vedi sopra)

- $\exists x \forall y R(x,y)$ è falsa perché non esiste un elemento che è in relazione con tutti gli altri

- $\forall x (A(x) \to \exists y R(x,y))$ è vera perché
$x=a$ $A(a)$ ed esiste y tale che $R(a,y)$
$x=d$ $A(d)$ è vera e $R(d,e)$ è vera
per gli altri valori di x $A(x)$ è falsa e quindi l'implicazione è vera

- $\forall x\, A(f(x))$ è falsa perché per $x = a$, $f(x)$ è b e $A(b)$ è falsa

- $\forall x \exists y (A(f(x)) \to R(x,y))$

$x=a$ $\quad \exists y(A(f(a)) \to R(a,y))$

$\exists y(A(b) \to R(a,y))$ VERA (perché $A(b)$ falsa

$x=b$ $\quad \exists y(A(f(b)) \to R(b,y))$

$\exists y(A(a) \to R(b,y))$ VERA con $y=b$

$x=c$ $\quad \exists y(A(f(c)) \to R(c,y))$

$\exists y(A(d) \to R(c,y))$ FALSA

perché non esiste y tale che $A(d) \to R(c,y)$ sia vera dato che $A(d)$ vera e $R(c,y)$ sempre falsa

Quindi la formula è falsa

3

$\varphi = \forall x(((A(x) \to B(x)) \to \exists y((A(y) \land B(y)) \to C((x, \ldots$

$\varphi, \; (A(a) \to B(a)) \to \exists y((A(y) \land B(y)) \to C(a,y))$

$\varphi, \neg(A(a) \to B(a))$ $\qquad$ $\varphi, \exists y((A(y) \land B(y)) \to C(a,y))$

$\varphi, A(a), \neg B(a)$ $\qquad$ $\varphi, (A(b) \land B(b)) \to C(a,b)$

$\varphi, \neg(A(b) \land B(b))$ $\qquad$ $\varphi, C(a,b)$

$\varphi, \neg A(b)$ $\circledast$ $\qquad$ $\varphi, \neg B(b)$

Tutti i rami sono aperti quindi φ è soddisf.
Per costruire il modello consideriamo il ramo contrassegnato con $\circledast$

Scegliamo $D = \{a, b\}$ costanti sul ramo

$I(A) = \emptyset$ $\qquad$ $I(B)$ e $I(C)$ possono essere qualsiasi

Infatti se A è sempre falso allora ~~ìap~~ per ogni x

$A(x) \to B(x)$ è vero

e $\exists y((\underbrace{A(y)}_{\text{FALSO}} \land B(y)) \to C(x,y))$ è vero

4

$$\varphi = \forall x \exists y (A(f(x)) \to R(c,y))$$

$$\varphi^S = \forall x (A(f(x)) \to R(c, g(x)))$$

$$H(\varphi^S) = \{c, f(c), g(c), f(g(c)), f(f(c)), g(f(c)) \dots\}$$

Se $I^H(A) = \{c, f(c), f(f(c))\}$

allora si può considerare

$$I^H(R) = \{(c, g(c)), (c, g(f(c)))\}$$

Infatti per $x = c$ si ha

$$\underset{V}{A(f(c))} \to \underset{V}{R(c, g(c))} \quad = V$$

per $x = f(c)$ si ha

$$\underset{V}{A(f(f(c)))} \to \underset{V}{R(c, g(f(c)))} \quad = V$$

e per gli altri x, $A(x)$ è falso e quindi l'implicaz. è vera