Esame di Logica

26 Giugno 2023

Questo è un esame **a libro aperto**: gli studenti possono portare e usare liberamente libri, appunti, fogli stampati e così via, ma non possono usare dispositivi elettronici come tablet o cellulari (o comunicare).

1 Logica Sillogistica

- Scrivete una teoria in logica sillogistica che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Tutte le balene vivono nel mare;
  - Tutti i pesci vivono nell'acqua;
  - Tutti quelli che vivono nel mare vivono nell'acqua;
  - Qualche pesce vive nel mare;
  - Qualche pesce non vive nel mare;
  - Nessuna rana vive nel mare;
  - Qualche rana vive nell'acqua.
- Per ognuna di queste affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria. Se lo è, scrivetene una dimostrazione nel sistema di deduzione visto a lezione (usando dimostrazioni dirette o indirette); se non lo è, descrivete un modello che soddisfa tutte le formule della vostra teoria ma non l'affermazione data.
  1. Qualche balena non è un pesce;
  2. Qualche pesce non è una balena;
  3. Nessuna rana è una balena;
  4. Qualche pesce non è una rana.

SOLUZIONE:

- **b** = balena, **m** = vive nel mare, **p** = pesce, **a** = vive nell'acqua, **r** = rana.

- Le affermazioni sono rappresentabili come

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(b,m);\\&\mathbf{A}(p,a);\\&\mathbf{A}(m,a);\\&\mathbf{I}(p,m);\\&\mathbf{O}(p,m);\\&\mathbf{E}(r,m);\\&\mathbf{I}(r,a)\end{aligned}$$

- Consideriamo le quattro affermazioni:
  - La prima ($\mathbf{O}(b,p)$) non è una consequenza della teoria. Infatti. possiamo considerare un modello con dominio $\Delta = \{1,2,3\}$ e con $\iota(b) = \{1\}$, $\iota(m) = \{1\}$, $\iota(p) = \{1,2\}$, $\iota(a) = \{1,2,3\}$, $\iota(r) = \{3\}$. Allora tutti gli assiomi della teoria sono soddisfatti:
    - $\iota(b) \subseteq \iota(m)$, quindi $\mathbf{A}(b,m)$ è soddisfatta;
    - $\iota(p) \subseteq \iota(a)$, quindi $\mathbf{A}(p,a)$ è soddisfatta;
    - $\iota(m) \subseteq \iota(a)$, quindi $\mathbf{A}(m,a)$ è soddisfatta;
    - $\iota(p) \cap \iota(m) = \{1\} \neq \emptyset$, quindi $\mathbf{I}(p,m)$ è soddisfatta;
    - $\iota(p) \backslash \iota(m) = \{2\} \neq \emptyset$, quindi $\mathbf{O}(p,m)$ è soddisfatta;
    - $\iota(r) \cap \iota(m) = \emptyset$, quindi $\mathbf{E}(r,m)$ è soddisfatta;
    - $\iota(r) \cap \iota(a) = \{3\} \neq \emptyset$, quindi $\mathbf{I}(r,a)$ è soddisfatta

    ma $\mathbf{O}(b,p)$ non è soddisfatta, perchè $\iota(b) \backslash \iota(p) = \emptyset$.
  - $\mathbf{O}(p,b)$ è una conseguenza della teoria, dimostrabile per dimostrazione indiretta come segue:

(1)	A(b,m)	Ipotesi
(2)	O(p,m)	Ipotesi
(3)	A(p,b)	Contraddizione di O(p,b)
(4)	A(p,m)	PS1, da (1) e (3)

    e A(p,m) e O(p,m) sono in contraddizione.
  - $\mathbf{E}(r,b)$ è una conseguenza della teoria, come segue dalla seguente dimostrazione diretta:

(1)	A(b,m)	Ipotesi
(2)	E(r,m)	Ipotesi
(3)	E(m,r)	C1, da (2)
(4)	E(b,r)	PS2, da (3) e (1)
(5)	E(r,b)	C1, da (4).

  - $\mathbf{O}(p,r)$ è una conseguenza della teoria per dimostrazione diretta:

(1)	I(p,m)	Ipotesi
(2)	E(r,m)	Ipotesi
(3)	E(m,r)	C1, da (2)
(4)	O(p, r)	PS4, da (3) e (1).

2 Logica Proposizionale

- Scrivete una teoria di logica proposizionale che descriva il seguente scenario:
  - Se sono in vacanza, vado al mare o vado in montagna;
  - Se non è estate, non vado al mare;
  - Non è vero che vado sia al mare che in montagna.
- Usando una tabella di verità, trovate tutti gli assegnamenti di valori di verità che soddisfano la teoria;
- Per ognuna delle seguenti affermazioni, verificate se è una conseguenza della vostra teoria oppure no, usando le tavole di verità:
  - Se sono in vacanza e non è estate, vado in montagna.
  - Se è estate, vado al mare.
- Verificate se la teoria ha "Se sono in vacanza, è estate o vado in montagna" come conseguenza logica oppure no usando il metodo dei tableau (potete chiudere un ramo non appena trovate due letterali in contraddizione, senza espandere gli altri).

SOLUZIONE:

- V = sono in vacanza, A = vado al mare, O = vado in montagna, E = è estate. La teoria è

$$V \to A \vee O;$$
$$\neg E \to \neg A;$$
$$\neg(A \wedge O).$$

- La tabella di verità è:

V	A	O	E	$A \lor O$	$V \to A \lor O$	$\neg E \to \neg A$	$A \land O$	$\neg(A \land O)$
0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0

E quindi gli assegnamenti che soddisfano la teoria sono quelli che assegnano a V, A, O e E i valori $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,1,1)$, o $(1,1,0,1)$.

- Le affermazioni da verificare sono $(V \land \neg E) \to O$ e $E \to A$.

V	A	O	E	$V \land \neg E$	$(V \land \neg E) \to O$	$E \to A$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1

Quindi la prima è una conseguenza della teoria, ma la seconda non lo è.

- L'affermazione che stiamo cercando di verificare essere una conseguenza è $V \to E \lor O$. Quindi:

$$\{V \to A \vee O, \neg E \to \neg A, \neg(A \wedge O), \underline{\neg(V \to (E \vee O)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{V \to A \vee O, \neg E \to \neg A, \neg(A \wedge O), V, \underline{\neg(E \vee O)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\underline{V \to A \vee O}, \neg E \to \neg A, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{\neg V, \neg E \to \neg A, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

Chiuso: $\neg V$, V

$$\{A \vee O, \underline{\neg E \to \neg A}, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

$$\swarrow \qquad \downarrow$$

$$\{A \vee O, \underline{\neg\neg E}, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

$$\downarrow$$

$$\{A \vee O, E, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

Chiuso: E, $\neg E$

$$\{\underline{A \vee O}, \neg A, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{A, \neg A, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

Chiuso: A, $\neg A$

$$\{O, \neg A, \neg(A \wedge O), V, \neg E, \neg O\}$$

Chiuso: O, $\neg O$

Il tableaux è chiuso, e quindi $V \to E \vee O$ è conseguenza della teoria.

3 Logica dei Predicati

- Scrivete una teoria in logica dei predicati che rappresenti le seguenti affermazioni:
  - Ogni gatto teme qualche cane;
  - Qualche cane non teme nessun gatto;
  - Fido è un cane che teme tutti i gatti che non lo temono;
  - Fuffi è un gatto che teme Fido.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e contiene soltanto un gatto? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.
- Esiste una struttura che soddisfa la teoria descritta sopra e contiene soltanto un cane? Se no, spiegate perchè non può esistere; se sì, presentatela.

SOLUZIONE:

- G e C sono predicati unari ("gatto" e "cane"), T è un predicato binario ("teme"), `fido` e `fuffi` sono costanti. La teoria è quindi

  - $\forall x(G(x) \to \exists y(C(y) \wedge T(x, y)))$;
  - $\exists y(C(y) \wedge \forall x(G(x) \to \neg T(y, x)))$;
  - $C(\texttt{fido}) \wedge \forall x(G(x) \wedge \neg T(x, \texttt{fido}) \to T(\texttt{fido}, x))$;
  - $G(\texttt{fuffi}) \wedge T(\texttt{fuffi}, \texttt{fido})$.

- Esiste una struttura che soddisfa la teoria e contiene solo un gatto. Il suo dominio è $\{1, 2\}$, dove $I(G) = \{1\}$, $I(C) = \{2\}$, $I(T) = \{(1, 2)\}$, $I(\texttt{fuffi}) = 1$ e $I(\texttt{fido}) = 2$.

- La struttura sopra descritta contiene anche solo un cane.