Esame di Algebra e Geometria del 19/12/2017 - II Prova Intercorso

Nome Cognome... **Matricola....................................**

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune.

[.../6] 1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcoli A^{-1} e il prodotto righe per colonne $A^{-1} \cdot B$.

Svolgimento. Per trovare l'inversa di una matrice possiamo procedere in due modi, o tramite la matrice aggiunta o con la riduzione a matrice diagonale.

Primo metodo. Notiamo che il determinante della matrice A è uguale a 1 (si può per esempio usare il metodo di Laplace considerando l'ultima riga). La matrice inversa A^{-1} sarà allora data dall'espressione

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(A_{ji}) = (A_{ji})$$

dove i valori A_{ij} sono ottenuti considerando il determinante della matrice che si ottiene cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima e moltiplicando per $(-1)^{i+1}$. Si ha quindi:

$$A_{11} = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad A_{12} = -det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad A_{13} = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$
$$A_{21} = -det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad A_{22} = det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$A_{31} = det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \quad A_{32} = -det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \quad A_{33} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Secondo metodo. Scriviamo la matrice A seguita dalla matrice identica e con le operazioni elementari trasformiamo le prime tre colonne nella matrice identica:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) r_3 \leftrightarrow r_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) r_3 \to r_3 - r_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$r_3 \to -r_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) r_2 \to r_2 - 2r_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le ultime tre colonne sono l'inversa della matrice A.

Se $A^{-1} = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ allora il prodotto righe per colonne $A^{-1} \cdot B$ è dato dalla matrice (c_{ij}) dove

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}.$$

Quindi si ha

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[.../7] 2. Che cos'è una base di uno spazio vettoriale? Che cos'è un insieme di generatori? Mostrare che l'insieme

$$V = \{(2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Determinare la dimensione di V, scrivere una sua base e rappresentare graficamente V nel piano cartesiano. Sia f l'applicazione lineare definita da:

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-y, x) \in \mathbb{R}^2 .$$

Determinare lo spazio $f(V)$ e rappresentarlo graficamente. Trovare una base di $f(V)$ e calcolare il prodotto *scalare* tra un elemento della base di V e un elemento della base di $f(V)$.

Svolgimento. Una base per uno spazio vettoriale V è un insieme di vettori di V che sono linearmente indipendenti e che generano tutto lo spazio V. Un insieme di generatori per V è un insieme di vettori tali che ogni vettore di V è combinazione lineare di essi.

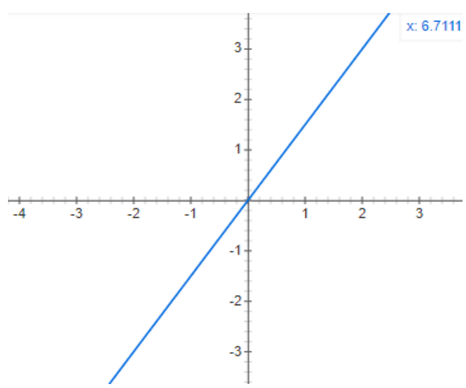
Per mostrare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ bisogna controllare che sia chiuso rispetto alla somma e al prodotto esterno. Consideriamo due vettori di V e controlliamo che la somma sia ancora un vettore di V. Due vettori di V saranno del tipo $(2x_1, 3x_1)$ e $(2x_2, 3x_2)$. La loro somma è

$$(2x_1, 3x_1) + (2x_2, 3x_2) = (2(x_1 + x_2), 3(x_1 + x_2))$$

e quindi è ancora un elemento di V. Se faccio il prodotto esterno di uno scalare $r \in \mathbb{R}$ per un vettore di V ottengo

$$r \cdot (2x, 3x) = (2rx, 3rx)$$

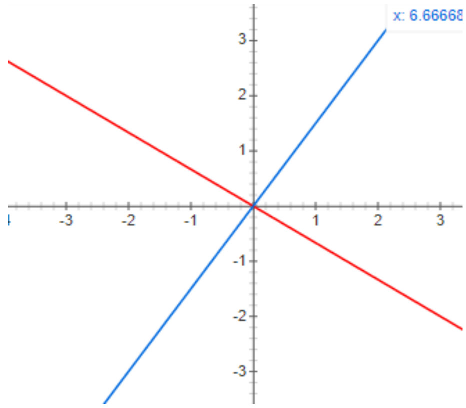
che è ancora un vettore di V. Quindi V è un sottospazio vettoriale. Una sua base è $\{(2, 3)\}$ quindi V ha dimensione 1. Nota infatti che ogni vettore di V è una combinazione lineare di $(2, 3)$. La sua rappresentazione grafica è:



Lo spazio $f(V)$ è l'immagine di V tramite f, quindi è dato da:

$$f(V) = \{f(2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(-3x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

La sua rappresentazione grafica è la retta in rosso:



Una base di $f(V)$ è $\{(-3,2)\}$, quindi anche $f(V)$ ha dimensione 1. Il prodotto scalare tra elementi della base di V e della base di $f(V)$ è:

$$(2,3)\cdot(-3,2) = -6+6 = 0$$

quindi i due vettori (e le due rette) sono ortogonali tra di loro.

[.../6] 3. Enunciare il teorema di Rouché-Capelli. Dire se il seguente sistema ha soluzioni, e in caso affermativo calcolarle (con qualsiasi metodo):

$$\begin{cases} x & & +z & = & 3 \\ x & +3y & -2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Svolgimento. Il teorema di Rouchè-Capelli afferma che un sistema lineare di m equazioni con n incognite ha soluzione se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. In questo caso, detto r tale rango, si hanno ∞^{n-r} soluzioni, cioè infinite soluzioni che dipendono da $n-r$ parametri. In particolare, se $r=n$ allora si ha un'unica soluzione.

Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x & & +z & = & 3 \\ x & +3y & -2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 1 \end{cases}$$

consideriamo la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice completa

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dato che $det(A) = 6 \neq 0$ allora il rango di A è 3 e anche il rango di $A|B$ è 3, dato che $A|B$ è una matrice 3×4 che contiene una sottomatrice 3×3 con determinante diverso da 0. Quindi c'è una soluzione, dato che il rango è uguale al numero di incognite. In questo caso, dato che la matrice A è quadrata, posso usare il metodo di Cramer.

$$det(A_x) = det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 12$$

$$det(A_y) = det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$det(A_z) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

La soluzione del sistema è quindi $(12/6, 0/6, 6/6) = (2, 0, 1)$.

[.../9] 4. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + y - 4z, 2x + 2y + 2z, 3z)\,.$$

Trovare la dimensione di $Im\, f$ e $Ker\, f$. Trovare inoltre gli autovalori di f e, per ogni autovalore, la sua molteplicità algebrica e geometrica, lo spazio degli autovettori e una sua base. Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori di f.

Svolgimento. La matrice associata ad f nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Quindi $\dim Imf = 2$ e $\dim Kerf = 1$. Per trovare gli autovalori si calcola il determinante di

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -4 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Usando la terza riga si ottiene che il polinomio caratteristico è

$$(3-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2) = (3-\lambda)(2+\lambda^2-3\lambda-2) = (3-\lambda)\lambda(\lambda-3)\,.$$

Ci sono quindi gli autovalori $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 3$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x & +y & -4z & = & 3x \\ 2x & +2y & +2z & = & 3y \\ & & 3z & = & 3z \end{array} \right. \quad \text{e cioè} \quad \left\{ \begin{array}{lllll} -2x & +y & -4z & = & 0 \\ 2x & -y & +2z & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \end{array} \right.$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{llll} -2x & +y & -4z & = 0 \\ 2x & -y & +2z & = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lll} y & = & 2x+4z \\ 2x-2x-4z & = & -2z \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lll} y & = & 2x \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Quindi $V_3 = \{(x, 2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_3 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ è 1 e non è un autovalore regolare.

Calcoliamo l'autospazio relativo a $\lambda = 0$ (che poi coincide con $Kerf$). Dobbiamo risolvere il sistema

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & +y & -4z & = & 0 \\ 2x & +2y & +2z & = & 0 \\ & & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

che ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che già sappiamo avere rango 2. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x & +y & -4z & = 0 \\ & 3z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z & = & 0 \\ x & = & -y \end{cases}$$

Quindi $V_0 = \{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $\dim V_0 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è 1 ed è un autovalore regolare.

Dato che non tutti gli autovalori sono regolari, non è possibile trovare una base di autovettori, e la matrice associata ad f non è diagonalizzabile.

Totale: [.../28]