Esame di Analisi Matematica

1 febbraio 2019

Docente Federica Andreano

1.

(a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1 + 5x}{\sqrt{1+2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{3x + 5x}{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8x}{x} = 8$$

2.5

(b) Calcolare l'ordine di infinitesimo, per $n \to +\infty$, della successione

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{1}{n^2} + 1\right) - 3\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^5}$$

Per $n \to +\infty$

2.5

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n}}{n^5} = \frac{1}{n^7} - \frac{3}{n^6} \sim -\frac{3}{n^6}$$

$$\Rightarrow \alpha = 6$$

2. Disegnare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{\log^2(x) - \log(x)}{x}$$

0.5 0.5 1

(a) Insieme di definizione, segno, limiti e asintoti:

$D = (0, +\infty)$

$f(x) > 0 \iff \log^2 x - \log x > 0 \iff \log x(\log x - 1) > 0$

$\iff x \in (0,1) \cup (e, +\infty)$

	0		1		e	
$\log x$		$-$		$+$		$+$
$\log x - 1$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$		$+$		$-$		$+$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2 x - \log x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\log^2 x}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x - \log x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x}{x} = 0$$

Asintoti:
$x = 0$ vert.
$y = 0$ orizz.

1 1

(b) Derivata prima, monotonia, eventuali massimi e minimi:

$$f'(x) = \frac{\left(2\log x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)x - (\log^2 x - \log x)}{x^2}$$

$$= \frac{2\log x - 1 - \log^2 x + \log x}{x^2} = \frac{-\log^2 x + 3\log x - 1}{x^2}$$

$f'(x) > 0 \iff \log^2 x - 3\log x + 1 < 0 \qquad t = \log x$

$\iff t^2 - 3t + 1 < 0 \qquad t^2 - 3t + 1 = 0 \iff t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$f'(x) > 0 \iff \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \log x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\iff e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

	0		1		$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	
f'		$-$		$-$		$+ \quad ++$		$- \quad -$
		$\searrow$				$\nearrow$		$\searrow$

f decresce in $(0, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}})$ e in $(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty)$ e cresce in $(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$

In $x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ f ha un punto di minimo assoluto

e in $x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ f ha un punto di max. relativo

1 1

(c) Derivata seconda, concavità, eventuali punti di flesso

$$f''(x) = \frac{\left(-2\log x \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x}\right) \cancel{x^2} - (-\log^2 x + 3\log x - 1)\, 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2\log x + 3 + 2\log^2 x - 6\log x + 2}{x^3} = \frac{2\log^2 x - 8\log x + 5}{x^3}$$

$$f''(x) > 0 \iff 2\log^2 x - 8\log x + 5 > 0 \qquad t = \log x$$

$$2t^2 - 8t + 5 > 0 \;; \quad 2t^2 - 8t + 5 = 0 \iff t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-40}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$f''(x) > 0 \iff \log x < \frac{4-\sqrt{6}}{2} \ \vee\ \log x > \frac{4+\sqrt{6}}{2}$$

$$\iff x < e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}} \ \vee\ x > e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}$$

f'': 0 ($+$ | $e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}$ | $-$ $-$ | $e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}$ | $+$

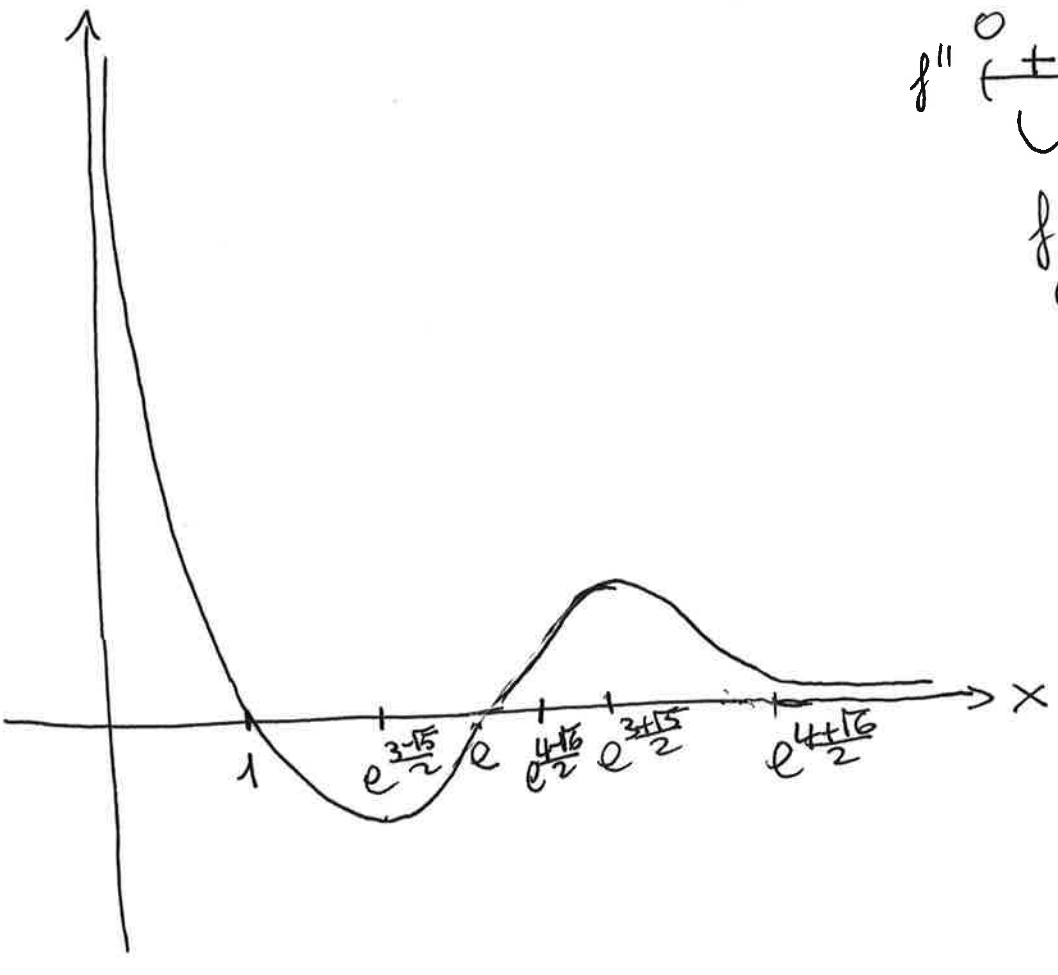
∪ ∩ ∪

f è convessa in $\left(0, e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}\right)$ e in $\left(e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}, +\infty\right)$ ed è concava in $\left(e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}, e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}\right)$

in $x = e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}$ e in $x = e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}$ f ha due punti di flesso

(d) grafico qualitativo:

1



indefinito: 6

3. Calcolare l'integrale ~~definito~~

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^2\log^2(x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2(1-\log^2 x)}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx \quad (\text{supponiamo } x>0)$$

Poniamo $t = \log x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \arcsin t + c = \arcsin(\log x) + c$$

4. Studiare la convergenza assoluta e semplice delle serie:

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin(n)\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

3.5

Convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n|\sin n|\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

Per $n \to +\infty$

$$n\log\left(\frac{1}{n^3}+1\right) \sim n\cdot\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ converge e quindi, per il criterio del confronto, la serie in considerazione converge assolutamente e semplicemente

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+3)^n}{n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Convergenza assoluta:

3.5

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x+3|^n}{n}$$

Criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|x+3|^n}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x+3|}{\sqrt[n]{n}} = |x+3|$$

Se $|x+3|<1$ la serie converge assolutam. e semplicem.

Se $|x+3|>1$ " " non converge

Se $x+3=1$: $\sum\frac{1}{n}$ diverge

Se $x+3=-1$: $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ diverge assolutam., ma converge semplicem. per Leibniz

Quindi la serie converge assolutam. e semplicem. se $x\in(-4,-2)$ e converge semplicem. in $x=-4$

5. Trovare due numeri a, $b \in \mathbb{R}$ tali che la seguente funzione sia un $o(x)$ per $x \to 0$

$$f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{3}} + ax + bx^2 - e^{2x}$$

5

Per $x \to 0$

$$f(x) \sim \frac{1}{3}x^2 + ax + bx^2 - 2x$$

$f(x) = o(x)$ per $x \to 0 \iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{3}+b\right)x^2 + (a-2)x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{1}{3}+b\right)x + a - 2\right] = 0$$

$$\iff a = 2$$

Quindi $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

$$\iff a = 2$$

$$\forall b \in \mathbb{R}$$