Esercizi: Variabili Aleatorie continue

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & se\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(a) Verifica che f sia una densità di probabilità di una v.a. continua X; (Sol. Sì)

(b) Calcola $P(1 \leq X \leq 2)$ e $P(1 < X \leq 2)$. (Sol. $\frac{7}{27}$)

Esercizio 2. *Trova la probabilità che una variabile aleatoria continua X avente densità di probabilità*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ 0 < x < 1; \\ 2 - x & se\ 1 \leq x < 2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

assuma valori compresi tra

(a) 0.2 e 0.8;

(b) 0.6 e 1.2;

(c) maggiori di 1.8.

Per i punti (a) e (b) usa sia la funzione di ripartizione che la densità di probabilità di X.
(Sol. 0.3; 0.5; 0.02)

Svolgimento. *(Punto (a))*

Densità di probabilità.

$$P(0.2 \leq X \leq 0.8) = \int_{0.2}^{0.8} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.8} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.2}^{0.8} = \frac{0.64}{2} = 0.3.$$

Funzione di ripartizione. *Determiniamo la funzione di ripartizione di X:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- *Se $x \leq 0$, allora $F(x) = 0$ (l'integrale di una funzione nulla è sempre 0).*

- *Se* $0 < x < 1$ *allora* $f(x) = x$; *dunque* $F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$.
- *Se* $1 \leq x \leq 2$, *allora* $f(x) = 2 - x$; *dunque* $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = \frac{1}{2} + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$.
- *Se* $x \geq 2$, *allora* $F(x) = 1$ *(osserva che l'aria sottesa a* $f(x)$ *tra 0 e 2 è complessivamente uguale a 1, inoltre* $F(x)$ *include quest'area quando* $x \geq 2$*).*

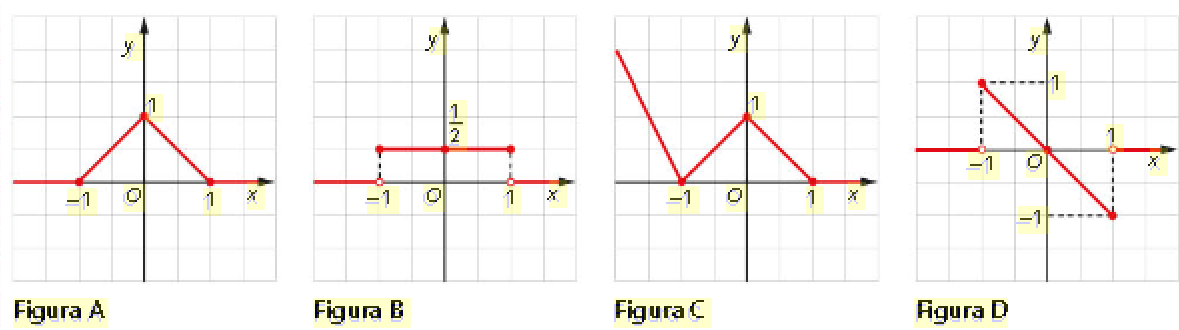
Dai calcoli precedenti, la funzione di ripartizione è così definita:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & se\ 0 < x < 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & se\ \leq x < 2 \\ 1 & altrimenti. \end{cases}$$

Adesso possiamo calcolare $P(0.2 \leq X \leq 0.8)$ *usando* F*:*

$$P(0.2 \leq X \leq 0.8) = F(0.8) - F(0.2) = \frac{(0.8)^2}{2} - \frac{(0.2)^2}{2} = 0.3.$$

Esercizio 3. *Per ciascuno dei seguenti grafici stabilisci, motivando la risposta, se rappresenta una densità di probabilità.*



(Sol. sono densità le funzioni di a e b)

Esercizio 4. *Considera la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} k(4 - x^2) & se\ -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Determina per quali valori di k *stabilisce una densità di probabilità.*
(Sol. $k = \frac{3}{32}$*)*

Esercizio 5. *Una variabile aleatoria continua X ha densità di probabilità:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} & \textit{se } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Determina

(a) la probabilità che risulti $\dfrac{1}{2} \le X \le 1$*;*

(b) il valori medio di X*;*

(c) la varianza di X*;*

(d) la deviazione standard di X*.*

(Sol: $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{\sqrt{11}}{6}$*)*

Esercizio 6. *Una variabile aleatoria continua X ha densità:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \textit{se } 2 \le x < 5 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Determina la funzione di ripartizione di X*.*

$$\left(\textit{Sol.} F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \le 2 \\ \frac{x-2}{3} & \textit{se } 2 \le x \le 5 \\ 1 & \textit{se } x > 5 \end{cases} \right)$$

Esercizio 7. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3(1-x^2)}{4} & \textit{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Verificare che f è la densità di probabilità di una v.a. continua X*;*

(b) Trovare la funzione di ripartizione di X*;*

(c) Calcolare la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori maggiori di 4.

(d) Calcolare il valor medio e la varianza di X*.*