ESERCIZI CAPITOLO 3

(1)

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{per } n \geq 1$$

BASE DI INDUZIONE

$n=1$ $$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1 \quad \text{ok.}$$

PASSO DI INDUZIONE

SUPPONIAMO VERO PER n

E DIMOSTRIAMO $$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}$$

da dimostr.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = (\text{per ip. d'ind})$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \text{ok}$$

(b) $$\sum_{k=2}^{n} (2k-3) = (n-1)^2 \quad \text{per } n \geq 2$$

BASE DI INDUZIONE $n=2$

$$\sum_{k=2}^{2} (2k-3) = 1 \qquad (n-1)^2 = 1^2 = 1$$

ok

PASSO DI INDUZIONE

SUPPONIAMO VERO PER n (IP. DI IND.)
E VERIFICHIAMO CHE

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n+1}(2k-3) = n^2}$$ DA DIMOSTR.

$$\sum_{k=2}^{n+1}(2k-3) = \sum_{k=2}^{n}(2k-3) + 2(n+1)-3 = (\text{ip. ind})$$

$$= (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 + 1 - 2n + 2n - 1 = n^2$$

ok.

(c) $\sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)\, 2^{n+1}$ per $n \geq 2$

BASE DI INDUZIONE

$n=2$ $\quad \sum_{k=2}^{2} k \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 = 8$

$(n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^3 = 8$ ok

PASSO DI INDUZIONE
SUPPONIAMO VERO PER n e
DIMOSTRIAMO PER $n+1$ CIOE'

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n+1} k \cdot 2^k = n \cdot 2^{n+2}}$$ DA DIMOSTR.

$$\sum_{k=2}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^k + (n+1)2^{(n+1)} =$$

$$= (n-1)\cdot 2^{n+1} + (n+1)\cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(n-1+n+1) =$$

$$= 2^{n+1}\cdot 2n = n\cdot 2^{n+2} \qquad \text{ok.}$$

(d) $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$ per $n \geq 1$

BASE DI INDUZIONE

$n=1 \qquad \sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 1$

$n^2 = 1 \qquad$ ok

PASSO DI INDUZIONE

SUPPONIAMO VERO IL RISULTATO PER n E DIMOSTRIAMO PER $n+1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2} \quad \text{da dim.}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) + 2n+1 =$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \qquad \text{ok.}$$

(e) $5^n - 1$ È MULTIPLO DI 4 per $n \geq 1$

BASE DI INDUZIONE

$n=1 \qquad 5^1 - 1 = 4$ MULTIPLO DI 4 ok

PASSO DI INDUZIONE

SUPPONIAMO VERO IL RISULTATO PER n

E DIMOSTRATO PER $n+1$

$\boxed{5^{n+1}-1 \text{ È MULTIPLO DI } 4}$ da dimostr.

5^n-1 È MULTIPLO DI 4 QUINDI

$5^n-1=4\cdot x \Rightarrow 5^n=4x+1$

$5^{n+1}-1=5^n\cdot 5-1=(4x+1)5-1=$

$=20x+5-1=20x+4=4(5x+1)$

QUINDI $5^{n+1}-1$ È MULTIPLO DI 4.

2 • MCD(15, 32)

$32=15\cdot 2+2$

$15=2\cdot 7+1 \qquad \Rightarrow MCD(15,32)=1$

$2=1\cdot 2+0$

$1=15-2\cdot 7=15-(32-15\cdot 2)\cdot 7=$

$=15-32\cdot 7+15\cdot 14=15\cdot 15-32\cdot 7$

• MCD(42, 12)

$42=12\cdot 3+6 \qquad \Rightarrow MCD(42,12)=6$

$12=6\cdot 2+0$

$6=42-12\cdot 3$

• MCD(42, 15)

$42=15\cdot 2+12 \qquad MCD(42,15)=3$

$15=12\cdot 1+3$

$12=4\cdot 3+0$

$3 = 15 - 12 \cdot 1 = 15 - (42 - 15 \cdot 2) = 15 \cdot 3 - 42$

- MCD(36, 84)

$84 = 36 \cdot 2 + 12$

$36 = 12 \cdot 3 + 0$

MCD(36, 84) = 12

$12 = 84 - 36 \cdot 2$

- MCD(72, 124)

$124 = 72 \cdot 1 + 52$

$72 = 52 \cdot 1 + 20$

$52 = 20 \cdot 2 + 12$

MCD(72, 124) = 4

$20 = 12 \cdot 1 + 8$

$12 = 8 \cdot 1 + 4$

$8 = 4 \cdot 2 + 0$

$52 = 124 - 72$

$20 = 72 - 52 = 72 - 124 + 72 = 72 \cdot 2 - 124$

$12 = 52 - 20 \cdot 2 = 124 - 72 - 72 \cdot 4 - 124 \cdot 2 =$
$= 124 \cdot 3 - 72 \cdot 5$

$8 = 20 - 12 = 72 \cdot 2 - 124 - 124 \cdot 3 + 72 \cdot 5 =$
$= 72 \cdot 7 - 124 \cdot 4$

$4 = 12 - 8 \quad = 124 \cdot 3 - 72 \cdot 5 - 72 \cdot 7 + 124 \cdot 4 =$
$= 124 \cdot 7 - 72 \cdot 12$

- MCD(72, 100)

$100 = 72 \cdot 1 + 28$

$72 = 28 \cdot 2 + 16$

$28 = 16 \cdot 1 + 12$

MCD(72, 100) = 4

$16 = 12 \cdot 1 + 4$

$12 = 4 \cdot 3 + 0$

$28 = 100 - 72$

$16 = 72 - 28 \cdot 2 = 72 - 100 \cdot 2 + 72 \cdot 2 =$
$= 72 \cdot 3 - 100 \cdot 2$

$12 = 28 - 16 = 100 - 72 - 72 \cdot 3 + 100 \cdot 2 =$
$= 100 \cdot 3 - 72 \cdot 4$

$4 = 16 - 12 = 72 \cdot 3 - 100 \cdot 2 - 100 \cdot 3 + 72 \cdot 4 =$
$= 72 \cdot 7 - 100 \cdot 5$

3