

## Esame di Algebra e Geometria del 19/01/2022

Nome Cognome.....

Matricola.....A

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando tutti i passaggi e scrivendo le definizioni che si ritengono opportune:

[.../6] 1. Sia  $X = \{a, b, c\}$  e  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ .

- Quanti elementi ha l'insieme  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times Y)$ ?
- Si consideri la funzione  $g : X \rightarrow (X \times Y)$  definita nel seguente modo:

$$g(a) = (a, 2) \quad g(b) = (a, 3) \quad g(c) = (c, 3).$$

La funzione  $g$  è iniettiva e/o suriettiva? Perché?

- La relazione  $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (3, 4), (1, 4)\}$  è una relazione d'equivalenza sull'insieme  $Y$ ? E' una relazione d'ordine? Disegnare il diagramma di Hasse.

[.../4] 2. Provare per induzione che, per  $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

[.../4] 3. Scrivere la tabella moltiplicativa di  $\mathbb{Z}_5$  e determinare gli elementi invertibili di  $\mathbb{Z}_5$ . Che struttura algebrica è  $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$  e perché?

[.../4] 4. Dare la definizione di sottospazio vettoriale e di base. Dire se  $\{(a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$  e  $\{(a, 2a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$  sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^2$  e trovare eventualmente una loro base.

[.../5] 5. Enunciare il teorema di Rouchè-Capelli. Dire se il seguente sistema ha soluzioni e quante ne ha, e calcolarle nel caso in cui esistano:

$$\begin{cases} 2x & -y & & = & 0 \\ 3x & +y & -z & = & 5 \\ x & & +z & = & 1 \end{cases}$$

[.../7] 6. Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 3y, x + 2y + 2z).$$

Trovare la dimensione di  $Im f$  e  $Ker f$ . Trovare inoltre gli autovalori di  $f$ , le molteplicità algebriche e geometriche, gli spazi degli autovettori e una base per ogni spazio di autovettori. Dire se esiste una base di  $\mathbb{R}^3$  fatta da autovettori di  $f$ .

Totale: [.../30]