

PROBLEMI DI CALCOLO COMBINATORIO

Vediamo come fare per risolvere un qualsiasi problema di Calcolo Combinatorio e, soprattutto, come si fa a capire se usare **permutazioni**, **disposizioni** o **combinazioni**, semplici o con ripetizione.

La maggior parte degli studenti trova difficoltà proprio a capire quale sia la formula corretta da utilizzare. Se è così anche per te, vai sereno e continua a leggere: tra poco sarà tutto chiaro!


Tutte le possibili formule da usare nei problemi di Calcolo Combinatorio

Iniziamo innanzitutto col richiamare le formule che ricorreranno nei problemi di Calcolo Combinatorio.

Permutazioni semplici di n oggetti distinti:

$$P_n = n! \qquad P_n^C = (n-1)! \quad \text{permutazioni circolari}$$

Permutazioni di n oggetti con ripetizioni r_1, r_2, r_3, \dots :


$$P_n = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

Disposizioni semplici di n oggetti distinti di classe k :

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione di n oggetti distinti di classe k :

$$D'_{n,k} = n^k$$

Combinazioni semplici di n oggetti distinti di classe k :

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinazioni con ripetizione di n oggetti distinti di classe k :

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

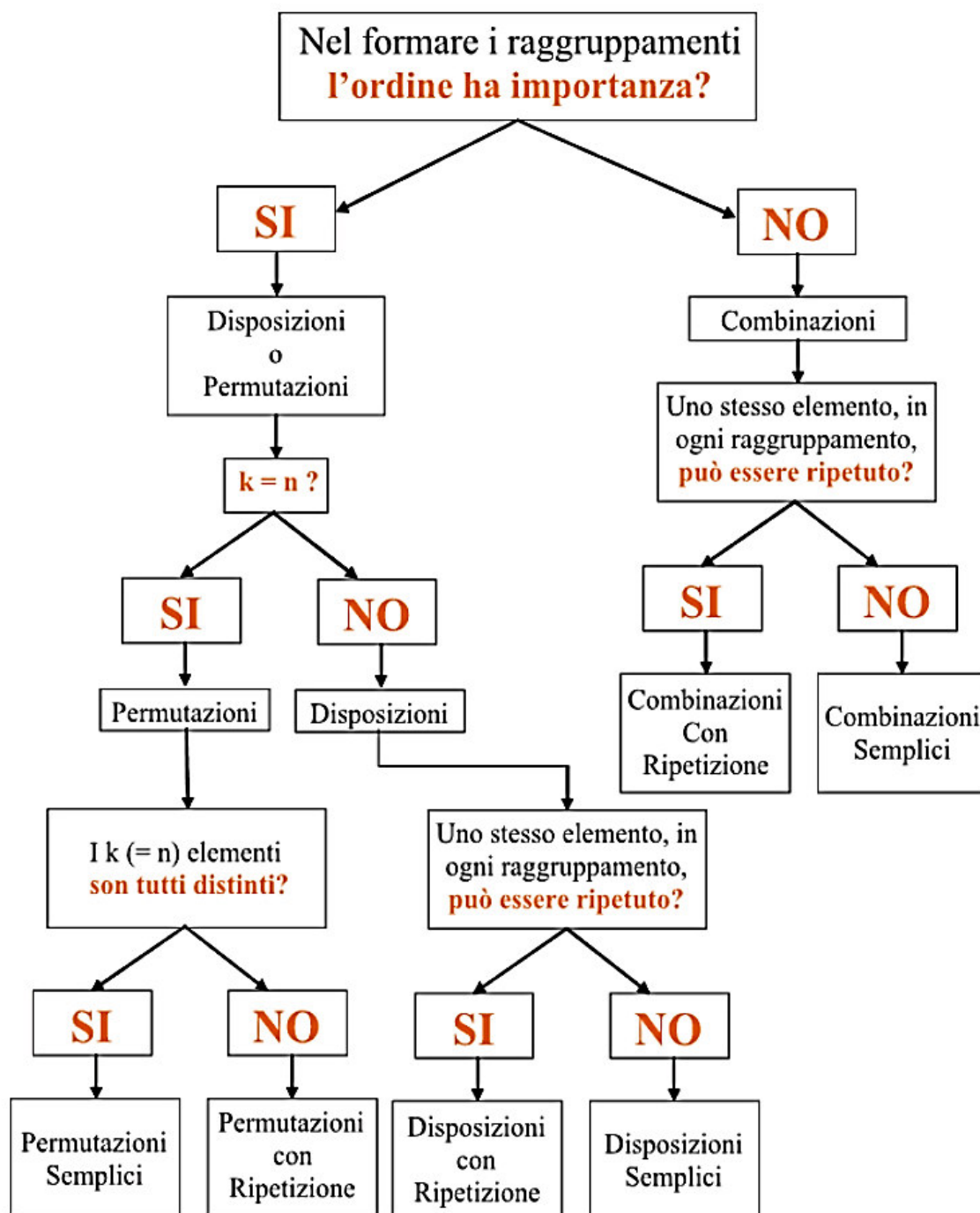
Se non l'avete già fatto vi consiglio vivamente di leggere almeno una volta le singole lezioni correlate, che spiegano nel dettaglio le caratteristiche di ogni metodo del Calcolo Combinatorio e che presentano svariati esempi.

Come riconoscere la formula da usare

Veniamo ora al vivo della lezione. Come capire quale formula usare? Con il seguente schemino arriverete in un batter d'occhio alla soluzione:

1) Innanzitutto leggiamo con attenzione il testo del problema ed individuiamo

- ✓ **n**: numero totale degli elementi;
- ✓ **k**: numero degli elementi coi quali dobbiamo formare i raggruppamenti;



Esempi svolti sulla scelta delle formule: permutazioni, combinazioni, disposizioni

1) Le targhe automobilistiche sono costituite da 2 lettere, seguite da 3 cifre, seguite a loro volta da 2 lettere. Sapendo che le 2 lettere possono essere scelte fra le 26 dell'alfabeto anglosassone, si calcoli quante automobili si possono immatricolare in questo modo.

Svolgimento: come già spiegato, dal testo del problema una targa automobilistica ha questa struttura: (lettera-lettera)-(numero-numero-numero)-(lettera-lettera). Abbiamo cioè tre tipi di raggruppamenti diversi.

Nel primo "lettera-lettera" abbiamo $k=2$ elementi che si possono scegliere tra $n=26$ elementi distinti (le lettere dell'alfabeto anglosassone).

L'ordine ha importanza? SÌ, in quanto, due lettere scambiate di posto generano due targhe distinte. Abbiamo a che fare quindi con disposizioni (in quanto $k \neq n$).

Uno stesso elemento, all'interno di un raggruppamento, può essere ripetuto? SÌ, vi sono infatti targhe che iniziano con due lettere uguali.

Siamo quindi di fronte a disposizioni con ripetizione di classe k . Ne segue che le lettere possono essere raggruppate in:

$$D'_{26,2} = 26^2 = 676$$

modi diversi.

Per quanto riguarda le cifre, esse sono raggruppamenti di $k=3$ elementi, scelti da un insieme che ne contiene $n=10$. Anche in questo caso l'ordine ha importanza e una stessa cifra può essere ripetuta fino a tre volte. Utilizzeremo quindi le disposizioni con ripetizione da cui:

$$D'_{10,3} = 10^3 = 1000$$

Avendo tre raggruppamenti (lettere - cifre - lettere) il numero totale delle targhe automobilistiche che si possono formare è dato da:

$$D'_{26,2} \cdot D'_{10,3} \cdot D'_{26,2} = 676 \cdot 1000 \cdot 676 = 456976000$$

2) 24 amici, ex compagni di liceo, si rivedono dopo qualche anno e organizzano una cena. A fine serata si salutano e ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante strette di mano ci saranno?

Svolgimento: come di consueto iniziamo con l'individuare n (numero totale elementi) e k (numero di elementi con cui si forma un raggruppamento).

Ovviamente $n=24$ e $k=2$ in quanto una stretta di mano avviene fra due persone. L'ordine ha importanza? NO, ognuno può stringere la mano a chi vuole e in che ordine vuole. Ci orientiamo quindi verso le combinazioni.

Uno stesso elemento, all'interno di un raggruppamento può essere ripetuto? NO, sarebbe assurdo infatti che ciascun tipo salutasse se stesso stringendosi da solo la mano. Non dite? Per contare il numero delle strette di mano ricorreremo quindi alle combinazioni semplici, da cui:

$$C_{24,2} = \frac{24!}{2!(24-2)!} = \frac{24!}{2 \cdot 22!} = \frac{23 \cdot 24}{2} = 276$$

3) 8 amici si incontrano settimanalmente per un banchetto, cambiando ogni volta la loro posizione lungo una tavolata. Dopo quanti anni avranno esaurito tutte le possibili disposizioni?

Svolgimento: l'ordine ha importanza? Certo che SI. Ogni disposizione a tavola varierà dalle altre proprio per l'ordine in cui gli amici occuperanno i posti.

Quanto valgono k ed n ? In questo caso $k=n=8$. Gli elementi sono tutti distinti? Certo che SI. Utilizzeremo quindi le permutazioni semplici, da cui troveremo:

$$P_8 = 8! = 40320$$

possibili modi di occupare i posti a tavola. Considerando che si vedono una volta la settimana ed in un anno vi sono circa 52 settimane, ci impiegheranno la bellezza di circa:

$$40320 : 52 \simeq 775$$

circa 775 anni per esaurire tutte le possibili disposizioni a tavola.

Domanda bonus: se il tavolo fosse stato circolare ed i posti non numerati, sarebbe cambiata qualcosa? La risposta è sì! Per risolvere correttamente il problema avremmo dovuto far ricorso alle **permutazioni circolari** (vedere esercizio 18).

4) Calcolare il numero di ambi, terne, quaterne e cinquine che si possono formare con i 90 numeri della tombola.

Dapprima, calcoliamo il numero di ambi possibili. Poiché gli ambi sono tutte le coppie di numeri da 1 a 90, il numero di classi (o posti) $k=2$ mentre il numero totale degli oggetti $n=90$. Inoltre, un ambo differisce da un altro soltanto per i numeri scelti ("qualità"), per cui è ovvio che i raggruppamenti possibili si ottengono calcolando le combinazioni semplici dei 90 numeri presi a 2 a 2 (o di classe 2):

$$C_{90,2} = \binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2!}$$

Analogamente si trovano le terne:

$$C_{90,3} = \binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!}$$

le quaterne:

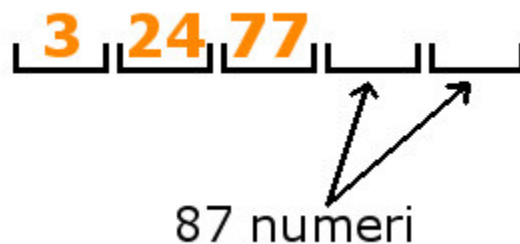
$$C_{90,4} = \binom{90}{4} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{4!}$$

e le cinquine:

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!}$$

5) Calcolare il numero di cinquine che si possono formare con i 90 numeri della tombola, sotto la condizione che contengano il terno 3,24,77.

Come nell'esercizio precedente, utilizziamo le **combinazioni semplici** per trovare il numero delle cinquine possibili. In più, consideriamo il vincolo imposto dalla presenza del terno 3,24,77. Questo vuol dire che tra i 5 posti disponibili, 3 saranno sempre fissati, e 2 varieranno tra gli 87 numeri rimasti:



Dunque, bisogna calcolare le combinazioni semplici di 87 elementi di classe 2:

$$C_{87,2} = \binom{87}{2} = \frac{87 \cdot 86}{2!}$$

6) Quanti sono i numeri naturali formati con (a) 3 cifre differenti e (b) 3 cifre qualsiasi?

Trattiamo separatamente (a) e (b). Cominciamo da (a): banalmente il numero di posti è $k=3$ e il numero di oggetti (cifre) è $n=10$. Due qualsiasi numeri naturali si differenziano sia per le cifre presenti ("qualità") che per l'ordine in cui esse compaiono ("ordine"). Inoltre, poiché le cifre devono essere differenti, non ci possono essere elementi ripetuti. Dobbiamo calcolare le disposizioni semplici di 10 elementi presi a 3 a 3:

$$D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Osserviamo, infine, che i numeri non possono cominciare con 0: dobbiamo pertanto contare i numeri del tipo 0 _ _ con 3 cifre differenti, ed eliminarli dal computo. Tali numeri sono esattamente le disposizioni semplici di 9 elementi (le cifre diverse da 0) di classe 2 (i due posti liberi):

$$D_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$$

Pertanto, nel caso (a), si ha:

$$D_{10,3} - D_{9,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$$

Il caso (b), invece, differisce dal caso (a), solo per il fatto che le cifre possono essere ripetute per cui utilizzeremo le disposizioni con ripetizione. Dal conteggio totale dobbiamo togliere tutti i numeri del tipo 0 _ _ , quelli del tipo 0 0 _ e il numero 0 0 0 che sono esattamente $D_{10,2}^r$:

$$D_{10,3}^r - D_{10,2}^r = 10^3 - 10^2$$

7) Quante composizioni può avere un organo elettivo di 10 membri se gli eleggibili sono 20, distribuiti in 2 liste di 10 candidati ciascuna?

Notiamo subito che la divisione in liste è un'informazione irrilevante ai fini del calcolo. Il numero dei posti (numero membri dell'organo elettivo) è $k=10$ e il numero degli oggetti (numero di membri eleggibili) è $n=20$. Non potendo esserci membri ripetuti, il problema si risolve calcolando le combinazioni semplici di 20 elementi presi a 10 a 10:

$$C_{20,10} = \binom{20}{10}$$

8) Quanti anagrammi possono formarsi con le lettere della parola "MATEMATICA"? Quanti di essi iniziano per "MAT"?

Nel primo caso le lettere (gli elementi) della parola "MATEMATICA" SONO 'M', 'A', 'T', 'E', 'I', 'C', ripetute rispettivamente 2, 3, 2, 1, 1, 1 volte, quindi $n=6$ mentre i posti a disposizione sono $k=10$ (lunghezza della parola "MATEMATICA"). Identificando con:

$$r_1 = 2 \quad r_2 = 3 \quad r_3 = 2 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = 1 \quad r_6 = 1$$

bisogna calcolare le permutazioni con ripetizione:

$$P_{2,3,2,1,1,1}^r = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = \frac{10!}{2!3!2!}$$

Nel secondo caso, invece, 'M', 'A', 'T' sono all'inizio della parola, dunque i primi 3 posti saranno sempre fissati, mentre varieranno i restanti 7 ($k=7$).

M A T

Gli elementi (le lettere) sono sempre $n=6$ ma stavolta, a causa del vincolo imposto, le lettere 'M', 'A', 'T', 'E', 'I', 'C' si ripetono rispettivamente 1, 2, 1, 1, 1, 1 volte.

Dunque posto:

$$r_1 = 1 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = 1 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = 1 \quad r_6 = 1$$

bisogna calcolare

$$P_{1,2,1,1,1,1}^r = \frac{7!}{1!2!1!1!1!1!} = \frac{7!}{2!}$$

9) Quante colonne di 13 elementi si possono formare con gli elementi dell'insieme {1, X, 2}?

Banalmente, il numero degli elementi $n=3$ e i posti su cui disporli sono $k=13$. Una colonna si differenzia da un'altra sia per gli elementi presenti ("qualità") sia per l'ordine in cui sono disposti ("ordine"). Inoltre, gli elementi dell'insieme {1, X, 2} possono essere ripetuti lungo le colonne per cui abbiamo delle disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 13:

$$D_{3,13}^r = 3^{13}$$

10) In un'azienda si vogliono assumere 6 laureati, provenienti da 4 facoltà universitarie. In quanti modi possibili si può effettuare l'assunzione?

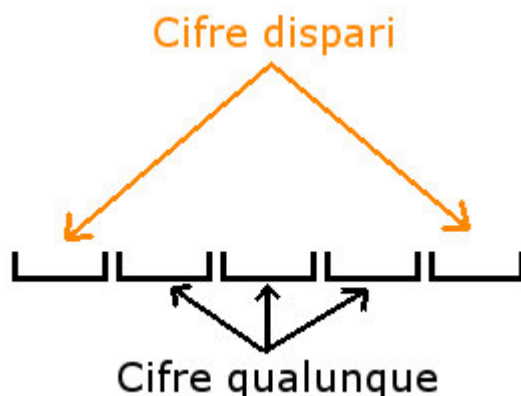
Assumiamo che le 4 facoltà siano fissate, ad esempio: Matematica (M), Ingegneria (I), Economia (E) e Fisica (F). Esse rappresentano il numero di oggetti $n=4$, mentre i posti disponibili sono chiaramente $k=6$. In questo caso non importa l'ordine con cui vengono scelti i laureati per cui siamo in presenza di combinazioni. Poichè il numero dei posti (6) è maggiore del numero delle facoltà (4), verrà necessariamente ripetuta la scelta di qualche facoltà. Dunque bisogna calcolare le combinazioni con ripetizione

di 4 elementi (facoltà) presi a 6 a 6 (numero di laureati):

$$C_{4,6}^r = \binom{9}{6}$$

11) Nel sistema di numerazione decimale quanti numeri naturali di 5 cifre iniziano e finiscono con una cifra dispari?

Lo schema da seguire è raffigurato nell'immagine seguente:



Trattiamo separatamente le 3 cifre centrali e le 2 cifre estreme combinando opportunamente i risultati ottenuti.

Per quanto riguarda le 3 cifre interne il numero di posti è appunto $k=3$ e le cifre del sistema decimale (oggetti) da disporre sono in tutto $n=10$. Un numero naturale con 3 cifre differisce da un altro sia per le cifre che per l'ordine delle stesse. Osservando, poi, che tali cifre interne possono essere ripetute senza avere vincoli, il numero dei raggruppamenti possibili così fatti è dato dalle disposizioni con ripetizione di 10 elementi (cifre del sistema decimale) presi a 3 a 3 (numero di posti per le 3 cifre interne):

$$D_{10,3}^r = 10^3$$

Contiamo adesso i possibili modi con cui disporre le due cifre dispari agli estremi del numero naturale. Innanzitutto, le cifre dispari sono $n=5$ (1,3,5,7,9) e i posti in cui disporle sono $k=2$. Anche in questo caso conta sia l'ordine degli elementi che gli elementi stessi. Inoltre tali cifre possono ripetersi per cui bisogna calcolare le disposizioni con ripetizione di 5 elementi (cifre dispari) di classe 2 (numero posti):

$$D_{5,2}^r = 5^2$$

Combinando i risultati ottenuti si ha:

$$D_{10,3}^r \cdot D_{5,2}^r = 10^3 \cdot 5^2$$

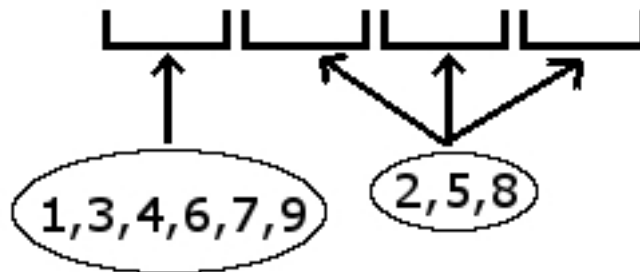
In questo caso vale la regola della composizione dei risultati ottenuti (ovvero si effettua il prodotto tra i due) perché non sono indipendenti l'un l'altro.

12) Nel sistema di numerazione decimale quanti numeri naturali di 4 cifre contengono esattamente un 2, un 5 e un 8?

Possiamo suddividere il problema in 4 sotto-casi:

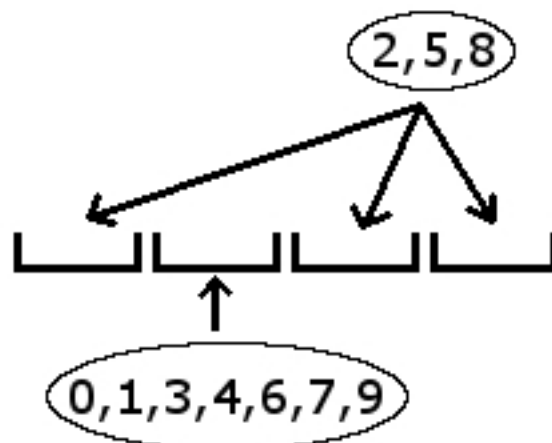
1° CASO

Fisso nella prima posizione le possibili cifre (1,3,4,6,7,9) e permuto le cifre 2,5 e 8 nelle restanti 3 posizioni ottenendo in tutto $6 \cdot P_3$ numeri naturali



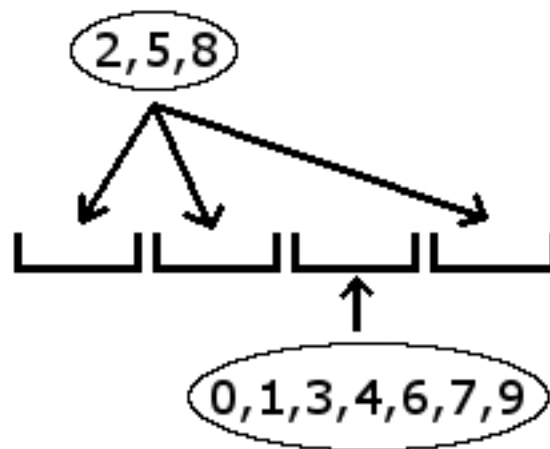
2° CASO

Fisso nella seconda posizione le possibili cifre (0,1,3,4,6,7,9) e permuto le cifre 2,5 e 8 nelle restanti 3 posizioni ottenendo in tutto $7 \cdot P_3$ numeri naturali



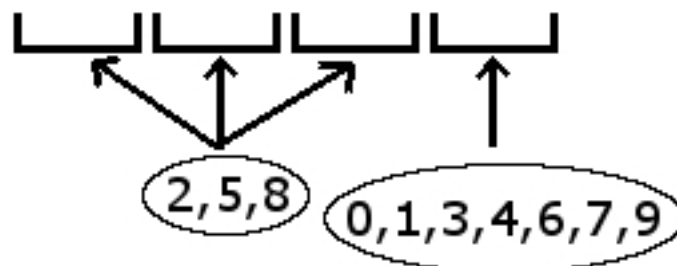
3° CASO

Fisso nella terza posizione le possibili cifre (0,1,3,4,6,7,9) e permuto le cifre 2,5 e 8 nelle restanti 3 posizioni ottenendo ancora $7 \cdot P_3$ numeri naturali



4° CASO

Fisso nella prima posizione le possibili cifre (0,1,3,4,6,7,9) e permuto le cifre 2,5 e 8 nelle restanti 3 posizioni ottenendo $7 \cdot P_3$ numeri naturali



Vista la loro **indipendenza**, sommo i risultati ottenuti per trovare ciò che l'esercizio richiedeva:

$$6 \cdot P_3 + 7 \cdot P_3 + 7 \cdot P_3 + 7 \cdot P_3 = P_3(6 + 7 + 7 + 7) = 3! \cdot 27$$

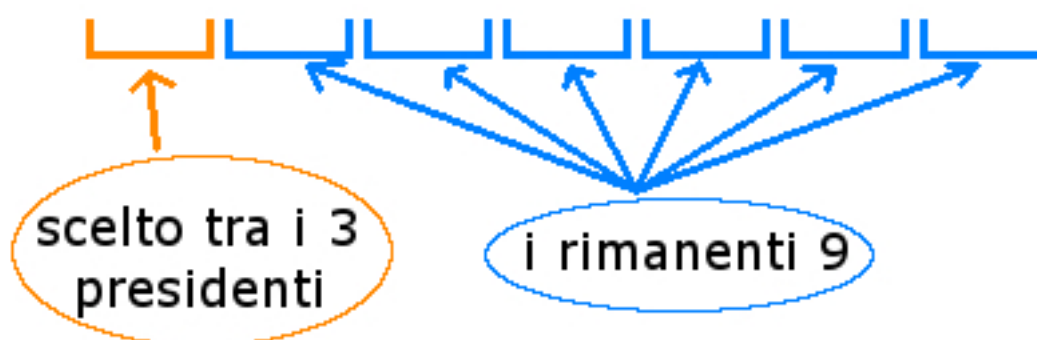
In questo caso vale la regola della composizione dei risultati ottenuti (ovvero si effettua il prodotto tra i due) perché non sono indipendenti l'un l'altro.

13) Quanti consigli di amministrazione di 7 membri è possibile formare disponendo di 10 candidati, dei quali però solo 3 possono assumere la presidenza?

È noto che in un consiglio di amministrazione è presente un solo presidente. Quindi, il problema può essere ricondotto a come disporre i 10 candidati sui 7 posti disponibili con i seguenti vincoli:

- 1 posto deve essere occupato da un presidente
- i presidenti candidati sono in tutto 3.

Lo schema seguente mette più in chiaro la situazione:



Scomponiamo, dunque, il problema principale in 2 sotto-problemi:

1° - scelta del presidente

Il numero di posti $k=1$ e il numero degli elementi (presidenti eleggibili) $n=3$. L'unica regola da considerare è la "qualità" e quindi contiamo i vari raggruppamenti mediante le combinazioni. I presidenti chiaramente non si possono ripetere per cui non si avranno ripetizioni. Possiamo calcolare le combinazioni semplici di 3 elementi presi ad 1 ad 1:

$$C_{3,1} = \binom{3}{1} = 3$$

2°: scelta del presidente

$k=6$ (posti disponibili) ed $n=9$ (organi eleggibili rimanenti). Anche in questo caso useremo le combinazioni semplici per trovare i possibili raggruppamenti:

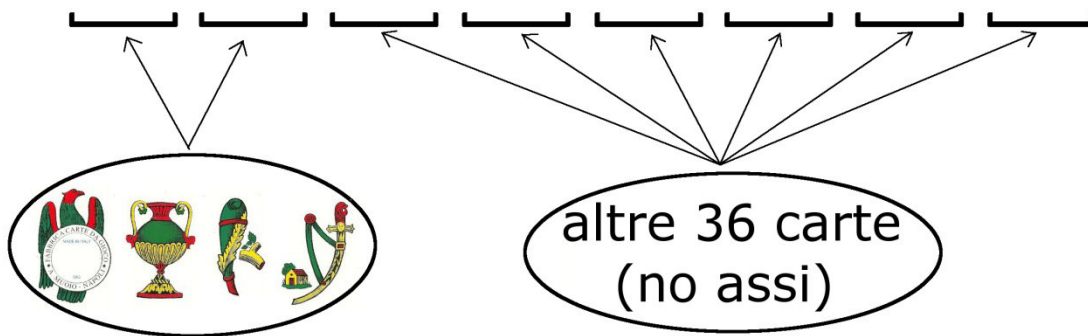
$$C_{9,6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!}$$

Per la regola della composizione, il numero totale dei possibili raggruppamenti si ottiene facendo il prodotto delle combinazioni appena calcolate:

$$C_{3,1} \cdot C_{9,6} = 3 \cdot \frac{9!}{6!3!}$$

14) Si consideri un mazzo di carte Siciliane (40 carte). Quante mani di 8 carte contengono esattamente 2 assi?

Il problema si può ricondurre a come disporre 4 assi in due posti e le rimanenti 36 carte nei rimanenti 6 posti.



Dunque, esattamente come nell'Esercizio precedente, si ha che i modi possibili di disporre queste 8 carte sono:

$$C_{4,2} \cdot C_{36,6} = \binom{4}{2} \cdot \binom{36}{6} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{36!}{6!30!} = 6 \cdot 1.947.792 = 11.686.752$$

15) Dato l'insieme finito $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, contare quanti sono tutti i suoi sottoinsiemi.

Raggruppiamoli (in base al numero di elementi che contengono) e contiamo gli elementi di ciascun gruppo.

Sottoinsiemi con:

| | | |
|------------|---------------------------------------------------|----------------|
| 0 elementi | \emptyset | $\binom{4}{0}$ |
| 1 elemento | $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}$ | $\binom{4}{1}$ |
| 2 elementi | $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \dots, \{a_3, a_4\}$ | $\binom{4}{2}$ |
| 3 elementi | $\{a_1, a_2, a_3\}, \dots, \{a_2, a_3, a_4\}$ | $\binom{4}{3}$ |
| 4 elementi | A | $\binom{4}{4}$ |

In totale i sottoinsiemi possibili sono:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

Osserviamo che la somma precedente rappresenta lo sviluppo del **binomio di Newton** con $a=1$ e $b=1$:

$$\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \cdot 1^{4-k} \cdot 1^k = 2^4 = 16$$

Ricordiamo infatti che, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

16) Quante terne di numeri naturali, la cui somma è pari a 10, esistono?

Poiché la somma dei 3 numeri naturali deve dare 10, il problema si riconduce a come disporre i primi 10 numeri naturali (compreso lo zero) in 3 posti. Osserviamo inoltre che tali numeri possono ripetersi e l'ordine in cui essi compaiono non conta. Cioè:

$$3+3+4=10, 5+5+0=10, 4+2+4=10, 8+1+1=10 \text{ (un numero può ripetersi)}$$
$$1+5+4 = 4+5+1 = 5+1+4 = \dots = 10 \text{ (l'ordine in cui i numeri compaiono non conta)}$$

Queste considerazioni ci portano a dire che bisogna calcolare le combinazioni con ripetizione di 3 posti di classe 10 (numeri da 0 a 10):

$$C_{3,10} = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$$

Tale problema coincide con quello di chiedersi in quanti modi è possibile distribuire 10 palline in 3 scatole.

17) In quanti modi possono danzare contemporaneamente 6 coppie di cui 6 uomini e 6 donne?

Consideriamo i modi in cui gli uomini si possano accoppiare con le donne: il Primo uomo potrà scegliere tra 6 donne, il Secondo tra le 5 rimanenti, il Terzo tra le 4 rimanenti e così via fino ad arrivare all'ultimo uomo che potrà scegliere di ballare con l'unica donna rimasta. Da questo ragionamento si capisce bene che bisogna calcolare le permutazioni semplici di 6 elementi:

$$P_6 = 6!$$

18) In quanti modi possono sedersi 16 persone attorno a 2 tavoli circolari da 8 posti ciascuno?

Decomponiamo il problema in 2 sottoproblemi:

1. Determinazione delle persone che stanno in ciascun tavolo
2. Determinazione delle configurazioni di persone in ciascun tavolo

Risolti 1) e 2), applichiamo il principio di composizione.

Caso 1), osserviamo che le persone che vanno al tavolo verde possono disporsi in $C_{16,8}$ modi, mentre le rimanenti 8 si possono sedere al tavolo rosso in $C_{8,8}$.

Caso 2): scelte le persone che vanno al tavolo verde, queste si possono sedere in P_8^C modi; idem per le persone al tavolo rosso: P_8^C .

Nella fattispecie P_8^C è la **permutazione circolare** di n oggetti disposti lungo una circonferenza. In questo particolare tipo di permutazioni, non è possibile stabilire qual è il primo elemento e quale l'ultimo. Si avrà:

$$P_n^C = (n - 1)!$$

Dunque, tornando al nostro problema, in definitiva, il numero di modi in cui possono disporsi 16 persone in 2 tavoli circolari sono:

$$C_{16,8} \cdot C_{8,8} \cdot P_8^C \cdot P_8^C$$

19) La Pollese Calcio nelle ultime 6 partite ha realizzato 10 punti. Quante sono le possibili strisce di risultati che può aver realizzato? (Il risultato di ogni partita è stato vittoria (V), pareggio (P) o sconfitta (S). V vale 3 punti, P vale 1 e S vale 0...)

Osserviamo che il problema si riconduce a come sistemare i numeri 3 (vittoria), 1 (pareggio) e 0 (sconfitta) in 6 posti (partite) con il vincolo che la loro somma deve fare 10.

Inoltre, per ottenere somma pari a 10, la squadra deve aver almeno totalizzato 2 vittorie. I casi di strisce possibili sono:

1. 2 V e 4 P;
2. 3 V, 1 P e 2 S

In entrambi i casi tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare sono dati dalle permutazioni con ripetizioni. A tal proposito ricordiamo che le permutazioni con ripetizione di n elementi ripetuti rispettivamente r_1, r_2, \dots, r_n volte sono:

$$P_{r_1, r_2, \dots, r_n}^r = \frac{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)!}{r_1! r_2! \cdot r_n!}$$

In particolare, nel primo caso abbiamo le permutazioni degli elementi 3 e 1 ripetuti rispettivamente 2 e 4 volte:

$$P_{2,4}^r = \frac{(2+4)!}{2!4!} = \frac{6!}{2 \cdot 4!} = 15$$



Nel secondo caso, invece, abbiamo le permutazioni degli elementi 3, 1 e 0 ripetuti rispettivamente 3, 1 e 2 volte:

$$P_{3,1,2}^r = \frac{(3+1+2)!}{3!1!2!} = \frac{6!}{2 \cdot 3!} = 70$$



Facendo la somma dei casi 1) e 2) otteniamo le strisce di risultati complessivi che la squadra può aver ottenuto:

$$15 + 70 = 85$$

20) Michela va tre giorni alla settimana in palestra, dove pratica, uno sport per giorno, spinning, pilates e aerobica. La palestra è aperta tutti i giorni. In quanti modi Michela può organizzare i giorni di allenamento? E se non vuole fare aerobica di domenica?

Si può scomporre tale problema nei seguenti sottoproblemi:

1. Modi in cui Michela può scegliere i giorni in cui allenarsi;
2. Modi in cui Michela può praticare i 3 sport nei giorni scelti.

I primi non sono altro che le combinazioni semplici di 7 elementi (giorni della settimana) a gruppi di 3 (giorni scelti):

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

I secondi invece sono le permutazioni di 3 elementi (gli sport) a gruppi di 3 (i giorni scelti):

$$P_3 = 3! = 6$$

Il totale dei modi con cui Michela può organizzare i giorni di allenamento sono dati dal prodotto dei precedenti:

$$35 \cdot 6 = 210$$

Per rispondere alla seconda domanda calcoliamo i modi in cui Michela può scegliere di praticare i 3 sport con il vincolo che pratichi aerobica di domenica. In tal caso lo sport aerobica rimane fissato la domenica, mentre gli altri due sport variano nei 6 giorni rimanenti. Seguendo lo stesso procedimento di prima si ha:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

e il numero di modi con cui possono permutare i due sport sono:

$$P_2 = 2! = 2$$

Dunque, in tutto avremo $15 \cdot 2 = 30$ modi possibili con cui Michela può scegliere di fare aerobica domenica. Per trovare, invece, i modi con cui può organizzare i giorni di allenamento senza fare aerobica la domenica, facciamo la sottrazione:

$$210 - 30 = 180$$

21) Un ristorante offre 5 primi, 7 secondi e 10 tipi di vino. Per un matrimonio si richiedono un tris di primi, 2 secondi e 2 vini. L'antipasto è a buffet e come dessert c'è la torta nuziale. In quanti modi diversi si può predisporre il menù?

Calcoliamo i seguenti:

1. Modi con cui possiamo scegliere i 3 primi fra i 5 disponibili
2. Modi con cui possiamo scegliere i 2 secondi fra i 7 disponibili
3. Modi con cui possiamo scegliere i 2 vini fra i 10 disponibili

Si tratta in tutti i 3 casi di combinazioni semplici dato che l'ordine con cui disponiamo i piatti non conta e non possono essere ripetuti. In particolare nel primo caso abbiamo:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Nel secondo caso, invece:

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

Infine, nel terzo caso si ha:

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

Il numero di modi totale con cui si può predisporre il menù è dato dal prodotto dei precedenti numeri:

$$10 \cdot 21 \cdot 45 = 9450$$