

Геометрия

Содержание

1	Бинарное отношение. Векторы.	2
2	Метод координат	4
2.1	Нормаль и направляющий вектор	5
2.2	Расстояние от точки до прямой	5
3	Кривые второго порядка	6
3.1	Свойства кривых второго порядка	6
3.2	Свойства параболы	9
3.3	Прямая Симсона	11
4	Гомотетия	14
4.1	Композиция гомотетий	14

1 Бинарное отношение. Векторы.

Определение 1. Пусть множество $a, b \in M$. Множество $R \subset \{(a, b) | a, b \in M\}$ упорядоченных пар. Если $(\hat{a}, \hat{b}) \in R$, пишут $\hat{a} \sim_R \hat{b}$.

Определение 2. Отношение \sim на M называется:

1. Рефлексивным: $\forall a \in M : a \sim a$
2. Симметричным: $\forall a, b \in M : a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивным: $\forall a, b \in M : a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

Определение 3. Отношение \sim на M называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Как только на M задано отношение эквивалентности, появляется M / \sim классов эквивалентности.

Определение 4. Вектор – класс эквивалентности параллельных переносов.

Свойства сложения векторов:

- Коммутативно: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Ассоциативно: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Определение 5. \vec{a} коллинеарен \vec{b} , если $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \vec{a} = \vec{b}$.

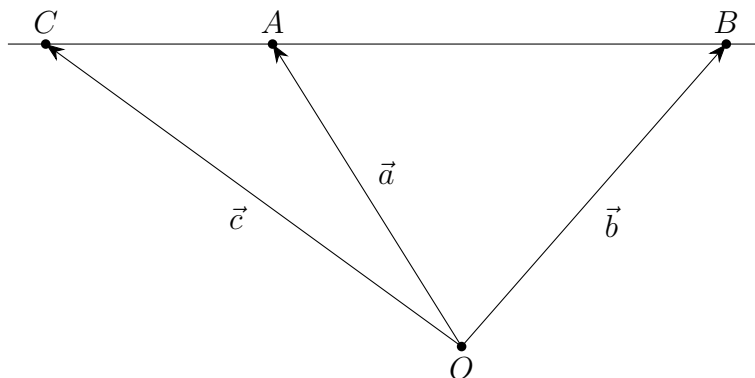
Определение 6. Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов $(\vec{a}; \vec{b})$.

Теорема 1.1. $\forall \vec{v} \in V_{\mathbb{R}^2} \exists! (x; y); x, y \in \mathbb{R} : \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $(\vec{a}; \vec{b})$ – базис $V_{\mathbb{R}^2}$. То есть $(x; y)$ – координаты \vec{v} в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$.

Определение 7. Углом между векторами \vec{a} и \vec{b} называется: $\phi = \arccos \left(\frac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right) \iff \cos \phi = \frac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, где $|\vec{a}| = \sqrt{(a, a)}$.

Теорема 1.2. $C \in AB \iff \forall O : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

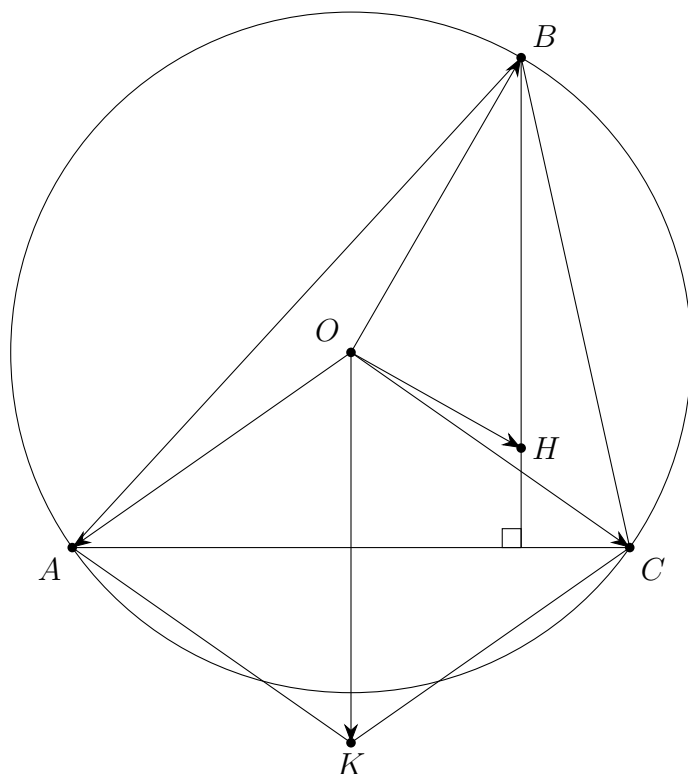
Доказательство.



Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тогда $\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$. Тогда обозначим $\frac{|\vec{c} - \vec{b}|}{|\vec{a} - \vec{b}|} = x$, откуда $\vec{c} - \vec{b} = x(\vec{a} - \vec{b})$, то есть $\vec{c} = x\vec{a} - (1 - x)\vec{b}$. ■

Теорема 1.3. Пусть O и H – центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

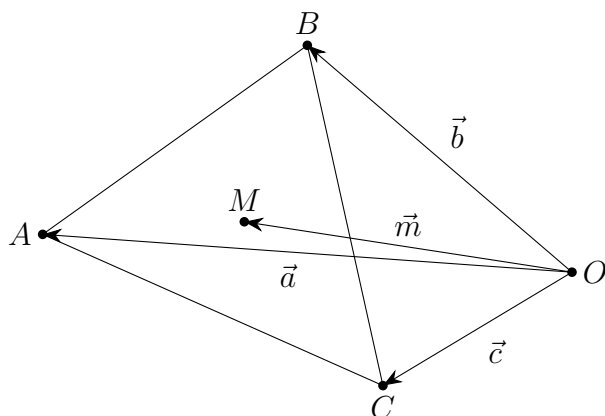
Доказательство.



Рассмотрим сумму $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$, как радиусы описанной окружности, следовательно, $AOCK$ – ромб, а значит $AC \perp OK$ как диагонали. Тогда $OK \parallel BH$, а значит точка M вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OB}$ лежит на BH , но аналогично эта точка лежит на всех высотах $\triangle ABC$, а значит является ортоцентром. ■

Теорема 1.4. Пусть \overrightarrow{OK} и \overrightarrow{OL} – базис в $\triangle ABC$, а M – его центроид. Тогда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Доказательство.



Обозначим \overrightarrow{OA} как \vec{a} , \overrightarrow{OB} как \vec{b} , \overrightarrow{OC} как \vec{c} , \overrightarrow{OM} как \vec{m} . Представим \overrightarrow{OM} в виде суммы векторов:

$$\vec{b} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \left(\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \right) = \vec{b} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \quad \blacksquare$$

Теорема 1.5. Пусть O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, а M – центроид $\triangle ABC$ соответственно. Тогда O , H и M – коллинеарны.

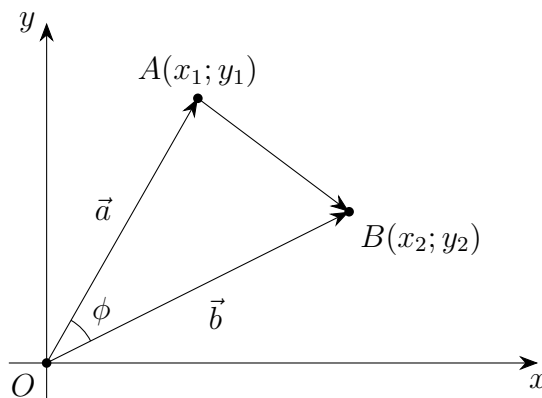
Доказательство. Из предыдущих двух теорем нам известно, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, а также что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, из чего следует, что $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$. \blacksquare

Определение 8. Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется величина $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$, где ϕ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Теорема 1.6. В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Доказательство.



По теореме косинусов $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \phi$, но по теореме Пифагора $OA^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2$, $OB^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$, $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Тогда если подставить в первое выражение и упростить получим $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = OA \cdot OB \cdot \cos \phi$. \blacksquare

2 Метод координат

Определение 9. Общим уравнением прямой называется уравнение вида $ax + by + c = 0$, в котором a и b не равны нулю:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 \stackrel{b_1 \cdot b_2 \neq 0}{\iff} \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \iff a_1b_2 = a_2b_1$$

$$l_1 \perp l_2 \stackrel{b_1 \cdot b_2 \neq 0}{\iff} \frac{-a_1}{b_1} \cdot \frac{-a_2}{b_2} = -1 \iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

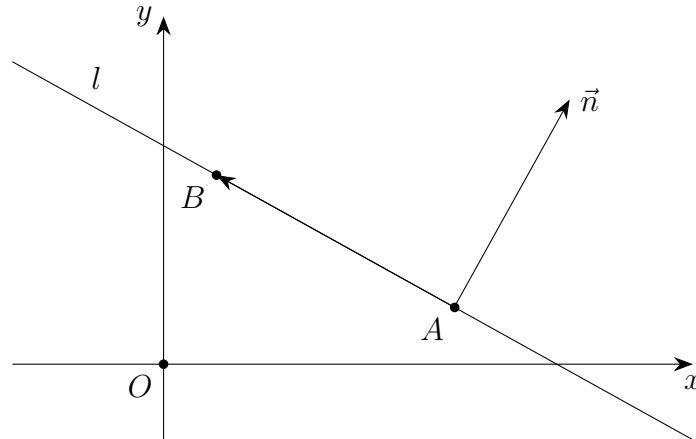
2.1 Нормаль и направляющий вектор

Определение 10. Вектор \vec{v} называется направляющим для прямой l , если его начало и конец лежат на l .

Определение 11. Любой вектор $\vec{n}_l : \vec{n}_l \perp l$, называется ее нормалью.

Теорема 2.1. Вектор $\vec{n}(a; b)$ является вектором нормали к прямой l , заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

Доказательство.

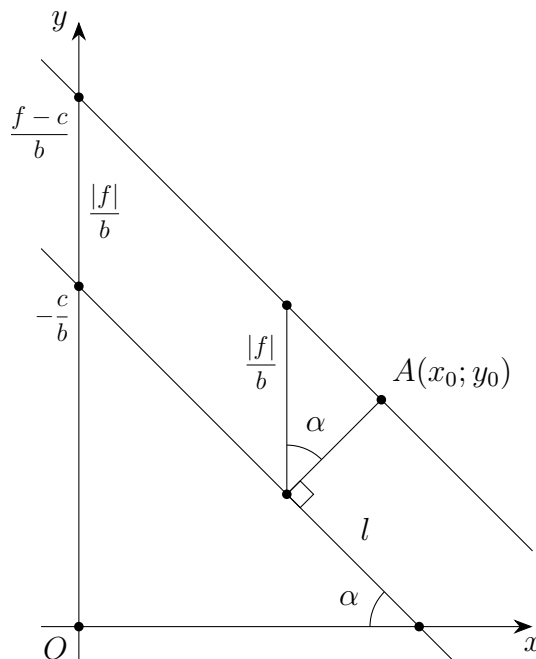


Возьмем произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. При этом $ax_1 + by_1 + c = ax_2 + by_2 + c = 0$, следовательно, если вычесть одно из другого, получим $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. Рассмотрим $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0 \implies \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$. ■

2.2 Расстояние от точки до прямой

Теорема 2.2. $\rho(A; l) : A(x_0; y_0), l : ax + by + c = 0 : \rho(A; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Доказательство.



Пусть $A(x_0; y_0)$, тогда $ax_0 + by_0 + c = f \implies y_0 = \frac{f - c}{b} - \frac{ax_0}{b}$. Проведем через точку A перпендикуляр к l , а также прямую, параллельную l . Отметим найденные ранее координаты на OY , а также найдем расстояние между ними. Пусть угол наклона l относительно OX равен α , тогда $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}$. Из основного тригонометрического тождества:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \mid : \cos^2 \alpha \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} + 1} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

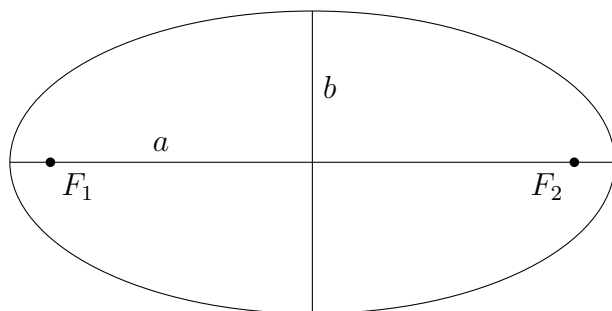
Тогда чтобы найти $\rho(A; l)$ умножим косинус на гипотенузу и получим: $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|f|}{b} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ■

3 Кривые второго порядка

3.1 Свойства кривых второго порядка

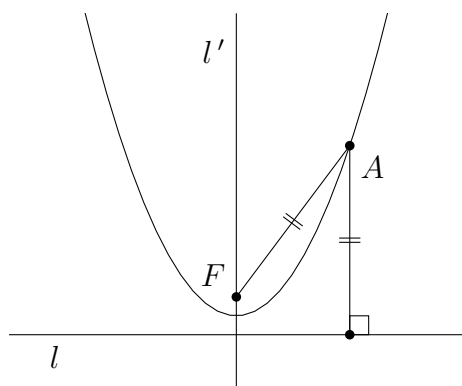
Определение 12. Углом между кривыми называется угол между их касательными в данной точке.

Определение 13. Эллипсом называется ГМТ, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называющихся фокусами, постоянна.



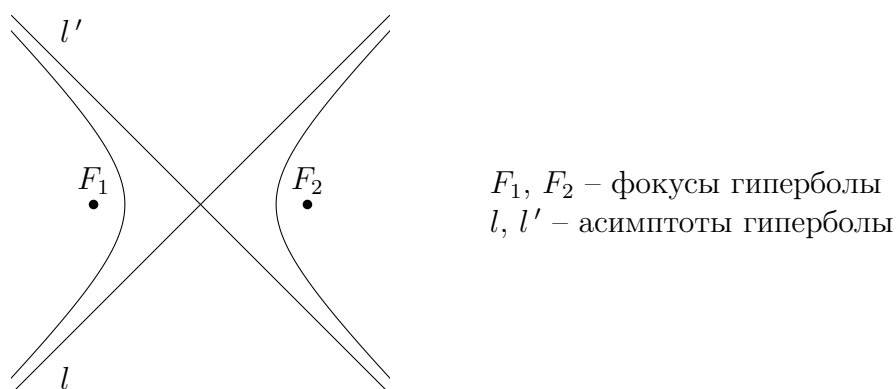
F_1, F_2 – фокусы эллипса
 a – большая ось
 b – малая ось

Определение 14. Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фиксированной точки F , называемой ее фокусом, и прямой l , называемой директрисой данной параболы.



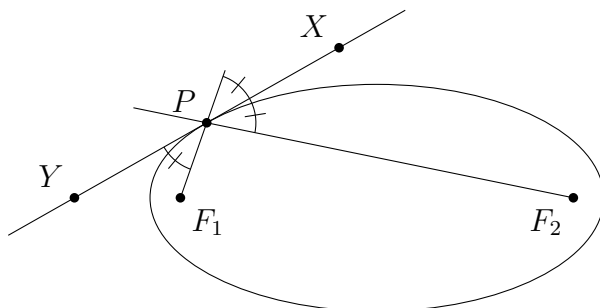
l' – ось параболы
 F – фокус параболы
 l – директриса параболы

Определение 15. Гиперболой называется ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянен.



Теорема 3.1 (Оптическое свойство эллипса). Пусть l касается эллипса с фокусами F_1 и F_2 в точке P , тогда l – биссектриса угла, смежного $\angle F_1PF_2$.

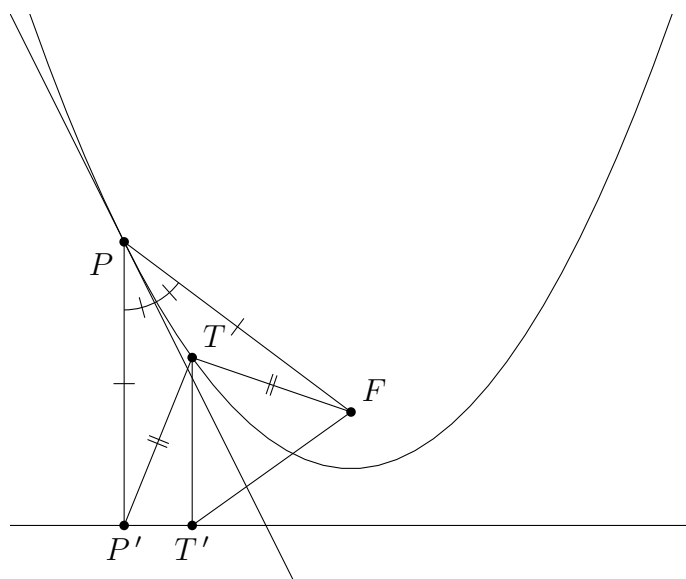
Доказательство.



Пусть $X, Y \in l$, тогда по определению касательной $XF_1 + XF_2 \geq PF_1 + PF_2$. Следовательно, P – точка на l , сумма расстояний от которой до фокусов минимальна, откуда $\angle F_2PX = \angle F_1PY$. ■

Теорема 3.2 (Оптическое свойство параболы). Пусть l касается параболы в точке P , P' – проекция точки P на директрису. Тогда l – биссектриса $\angle FPP'$.

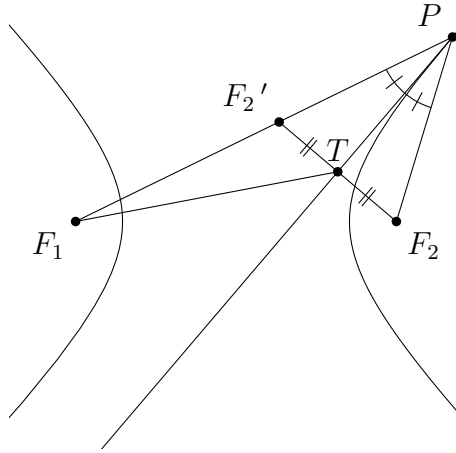
Доказательство.



Пусть биссектриса не касается параболы, то есть пересекает ее в точке T . По определению параболы $PP' = PF \implies \triangle P'TT = \triangle PFT$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $P'T = TF$, но тогда если T' – проекция T на директрису, то $TT' = TF$, то есть $TP' = TT'$, противоречие. ■

Теорема 3.3 (Оптическое свойство гиперболы). Пусть l касается гиперболы с фокусами F_1 и F_2 в точке P , тогда l – биссектриса $\angle F_1F_2P$.

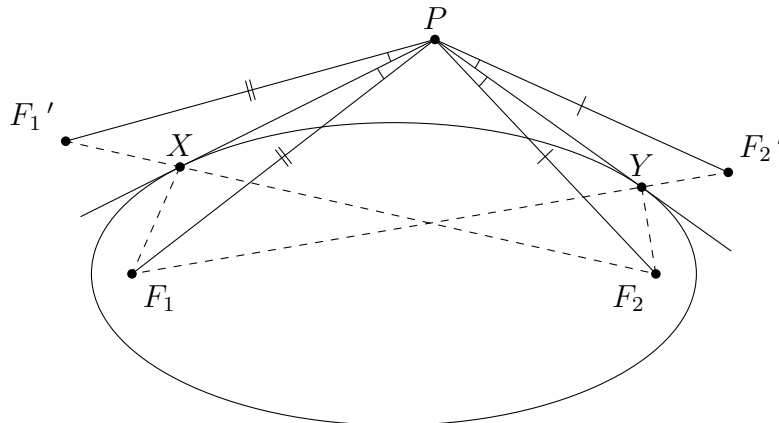
Доказательство.



Пусть биссектриса не касается гиперболы, то есть пересекает ее в точке T . Обозначим через F_2' точку, симметричную F_2 относительно l . Тогда $F_2T = F_2'T$, а также $F_2P = F_2'P$. Кроме того, F_1, F_2' и P коллинеарны по определению биссектрисы. По определению гиперболы $F_1P - F_2P = F_1T - F_2T$. Тогда получаем, что $F_1F_2' = F_1P - F_2'P = F_1T - F_2'T$, но по неравенству треугольника $F_1F_2' > F_1T - F_2'T$, противоречие. ■

Теорема 3.4 (Изогональное свойство эллипса). Пусть PX и PY – касательные к эллипсу с фокусами F_1 и F_2 . Тогда $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.

Доказательство.



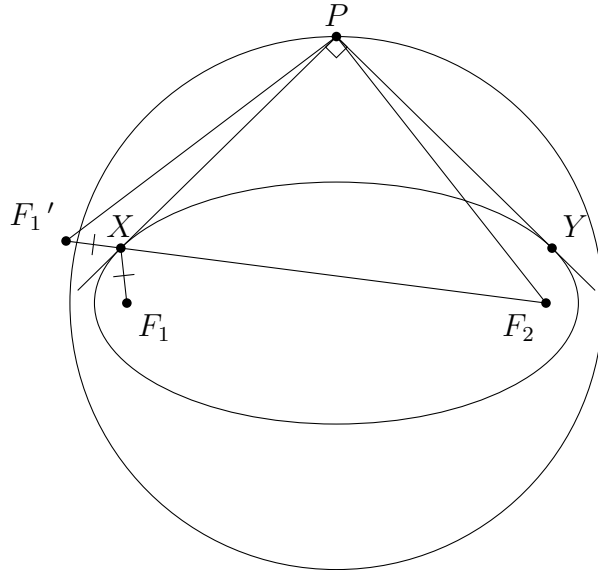
Пусть F_1' и F_2' – точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PX и PY соответственно. Тогда $PF_1 = PF_1'$ и $PF_2 = PF_2'$, при этом F_1, Y и F_2' , а также F_2, X и F_1' коллинеарны по оптическому свойству эллипса. Получаем, что $F_2F_1' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_1F_2'$. То есть $\triangle F_1PF_2' = \triangle F_2PF_1'$ по трем сторонам. Тогда $\angle F_1PF_2 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF_1' = \angle F_1PF_2' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY \implies \angle F_1PX = \angle F_2PY$. ■

Теорема 3.5. В обозначениях теоремы 3.4 прямая F_1P суть биссектриса $\angle XF_1Y$.

Доказательство. В силу оптических свойств $\angle PF_1'X = \angle PF_1X$, при этом из теоремы 3.4 известно, что $\angle PF_1'F_2 = \angle PF_1F_2'$, так как $\triangle F_1PF_2' = \triangle F_1'PF_2$. Тогда $\angle PF_1F_2' = \angle PF_1'X = \angle PF_1X$. ■

Теорема 3.6. Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом, является окружность с центром в центре эллипса.

Доказательство.

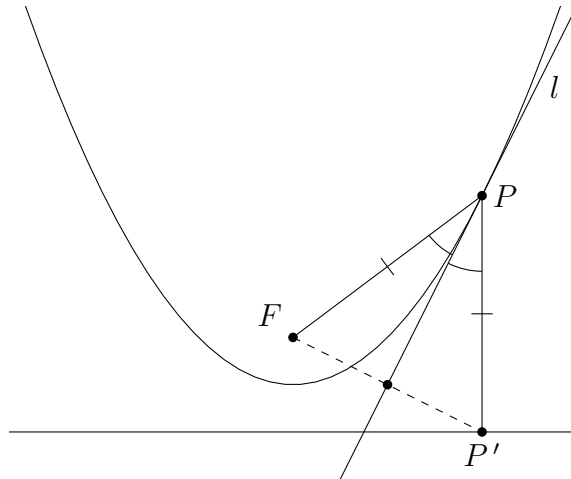


Пусть F_1' – образ F_1 относительно прямой PX . Из теоремы 3.4 следует, что $\angle F_1'PF_2 = \angle XPY = 90^\circ$. По теореме Пифагора $F_1'P^2 + F_2P^2 = F_1'F_2^2$, то есть получаем уравнение окружности с центром в середине F_1F_2 . ■

3.2 Свойства параболы

Лемма 3.7. Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы.

Доказательство.

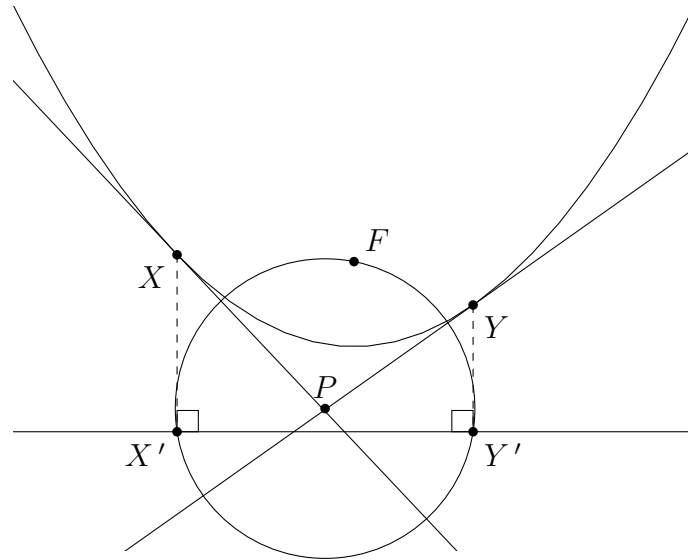


Пусть прямая l касается параболы в точке P , P' – проекция P на директрису параболы. l – биссектриса $\angle FPP'$, но $\triangle FPP'$ – равнобедренный по определению параболы, а значит l в нем медиана и высота, откуда P' – образ F . ■

Следствие 3.7.1. Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.

Лемма 3.8. Пусть PX и PY – касательные к параболе. Тогда P является центром описанной около $\triangle FX'Y'$ окружности, где X' и Y' – проекции X и Y на директрису параболы соответственно.

Доказательство.

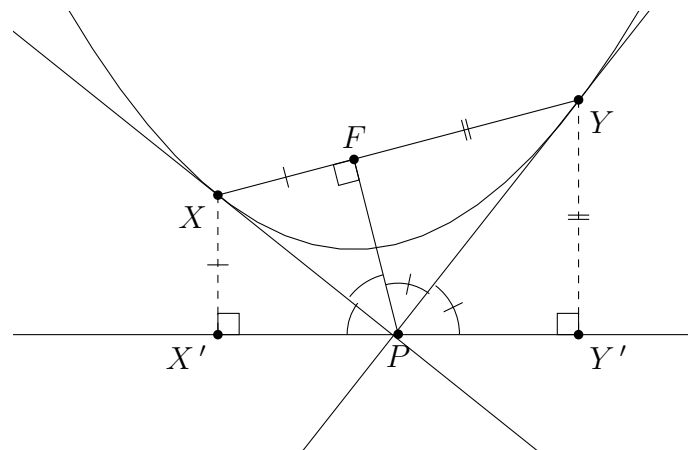


Из леммы 3.8 следует, что PX и PY являются серединными перпендикулярами к FX' и FY' соответственно. Тогда их точка пересечения будет являться центром окружности, описанной около $\triangle FX'Y'$. ■

Следствие 3.8.1. Если PX и PY – касательные к параболе, то P' будет серединой $X'Y'$, где P' , X' и Y' – проекции P , X и Y на директрису параболы соответственно.

Теорема 3.9. Множество таких точек P , из которых парабола видна под прямым углом, суть директриса этой параболы. Кроме того, если PX и PY – касательные к этой параболе, то XY содержит F и PF – высота $\triangle PXY$.

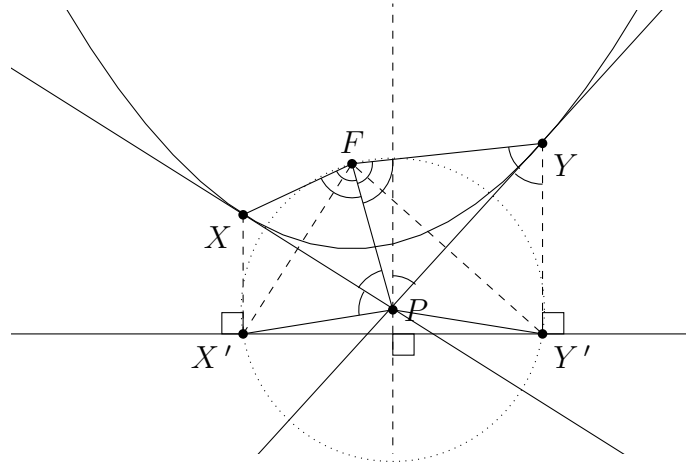
Доказательство.



Пусть P лежит на директрисе, тогда если X' и Y' – проекции X и Y на директрису соответственно, то $\triangle PXX' = \triangle PXF$, а значит $\angle PFY = \angle PXX' = 90^\circ$. Аналогично $\angle PFY = 90^\circ$. То есть X, F и Y коллинеарны. При этом $\angle XPX' = \angle XPF$, $\angle YPF = \angle YPY'$, следовательно, $\angle XPY = \frac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$. ■

Теорема 3.10. Пусть PX и PY – касательные к параболы, а l – прямая, проходящая через P параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми PY и l равен $\angle XPF$, $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ и FP – биссектриса $\angle XFY$.

Доказательство.

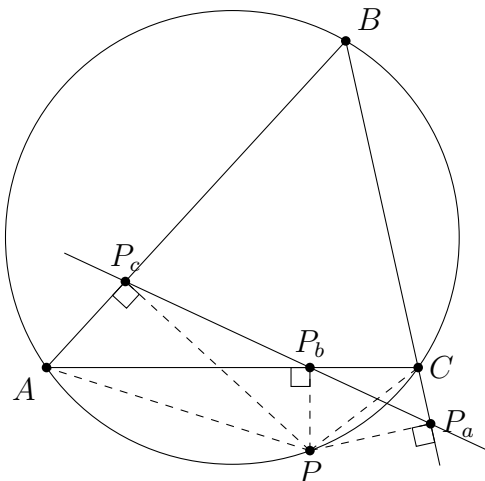


Пусть X' и Y' – проекции X и Y на директрису соответственно. Угол между PY и l равен $\angle X'Y'F$, так как $l \perp X'Y'$ и $PY \perp Y'F$. При этом по лемме 3.8 F, X' и Y' лежат на окружности с центром в P . Тогда $\angle X'Y'F = \frac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$. Поскольку $l \parallel Y'Y'$, угол между PY и l равен $\angle PYY'$, который в силу оптического свойства параболы равен $\angle PYF$. То есть $\angle PYF = \angle XPF$, аналогично $\angle FXP = \angle YPF$. Тогда $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ по двум углам и FP – биссектриса $\angle XFY$. ■

3.3 Прямая Симсона

Теорема 3.11 (Прямая Симсона). Проекции точки P на стороны $\triangle ABC$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника.

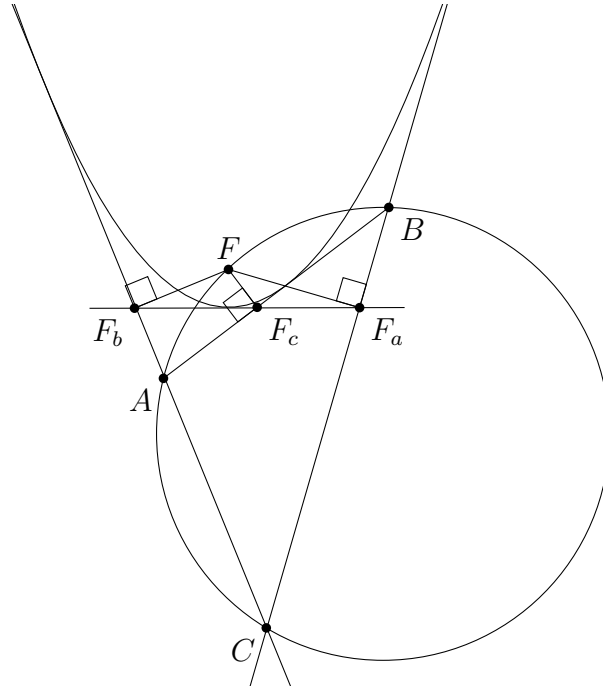
Доказательство.



Пусть P_a , P_b и P_c – проекции точки P на BC , AC и AB соответственно. AP_cP_bP вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$. Тогда $\angle APP_c = \angle AP_bP_c$. Аналогично $\angle CP_bP_a = \angle CPP_a$. В силу вписанности $ABCP$ $\angle PCP_a = 180^\circ - \angle BCP = \angle BAP$. При этом $\angle PCP_a = 90^\circ - \angle CPP_a = 90^\circ - \angle CP_bP_a$. То есть $\angle AP_cP = 90^\circ - \angle APP_c = 90^\circ - \angle AP_bP_c = 90^\circ - \angle CP_bP_a$, а значит $\angle AP_bP_c = \angle CP_bP_a$. В таком случае они вертикальные, следовательно, P_a , P_b и P_c коллинеарны. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теорема 3.12. Пусть $\triangle ABC$ описан около параболы, тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности этого треугольника.

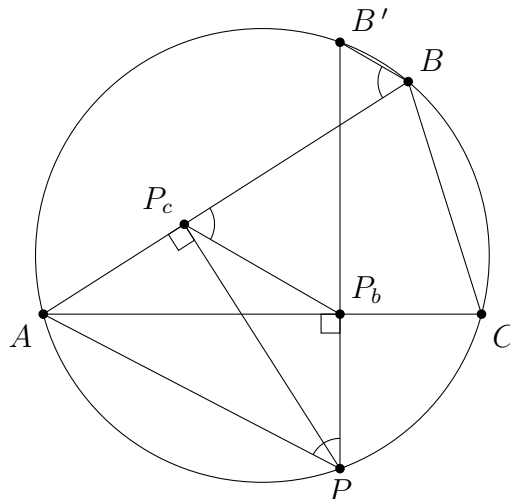
Доказательство.



Пусть F_a , F_b и F_c – проекции фокуса параболы на стороны треугольника. По лемме 3.7 они коллинеарны. Тогда по теореме о прямой Симсона F принадлежит окружности, описанной около $\triangle ABC$. ■

Теорема 3.13. Пусть P и B' лежат на окружности, описанной около $\triangle ABC$, при чем $PB' \perp AC$. Тогда BB' параллельная прямой Симсона точки P .

Доказательство.

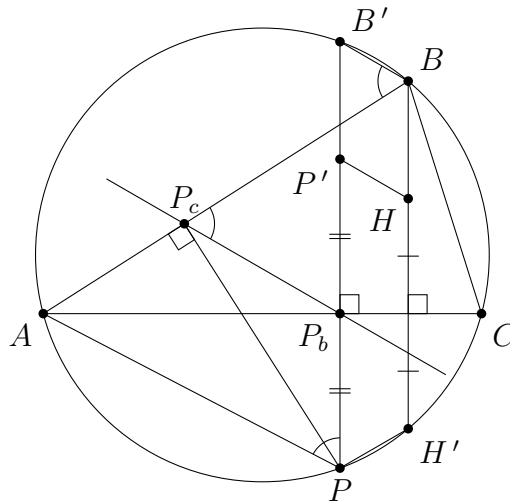


Пусть P_b и P_c – проекции P на AC и AB соответственно. $\angle ABB' = \angle APB'$ как вписанные. AP_cP_bP – вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$, следовательно, $\angle APP_b = \angle P_bP_cB$. То есть $\angle P_cBB' = \angle P_bP_cB$, а значит $BB' \parallel P_bP_c$. ■

Следствие 3.13.1. При вращении точки P по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги PA .

Следствие 3.13.2. Прямая Симсона точки P относительно $\triangle ABC$ делит отрезок PH пополам, где H – ортоцентр $\triangle ABC$.

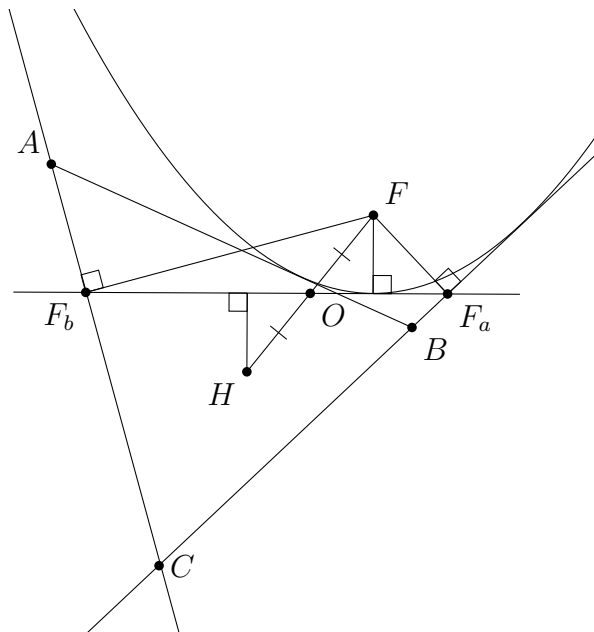
Доказательство.



Пусть H' и P' – образы H и P относительно AC соответственно. Поскольку $PB' \parallel H'B$, $PB'BH'$ – равнобокая трапеция. Тогда отрезок, симметричный PH' относительно AC должен быть параллелен BB' , то есть $P'H \parallel B'B \parallel P_cP_b$. Поскольку P_b – середина PP' и $P_cP_b \parallel P'H$, прямая Симсона – средняя линия $\triangle HPP'$, а значит делит HP пополам. ■

Теорема 3.14. Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе.

Доказательство.



Пусть F_a и F_b – проекции F на BC и AC соответственно. Тогда по следствию 3.7.1 F_bF_a – прямая, касающаяся параболы в ее вершине и параллельная директрисе этой параболы. Пусть O – точка пересечения FH и F_bF_a , тогда по следствию 3.13.2 $FO = OH$, при этом $\angle HOF_b = \angle FOF_a$ как вертикальные, в таком случае равны по двум углам и стороне треугольники, образованные F, O, H и проекциями F и H на F_bF_a . Следовательно, расстояние от F до прямой, проходящей через вершину параболы и параллельной ее директрисе, равно расстоянию от этой прямой до H , а значит H лежит на директрисе параболы. ■

4 Гомотетия

Определение 16. Гомотетия с центром O и коэффициентом k суть преобразование плоскости, при котором $\forall A \in \mathbb{R}^2 : H_O^k(A) = A' : \overrightarrow{OA} \cdot k = \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA'}$.

4.1 Композиция гомотетий

Определение 17. Композиция гомотетий H_O^k и H_P^l при $k, l \neq 1$ – это параллельный перенос при $k \cdot l = 1$ или $H_Q^{kl} : Q \in OP, \overrightarrow{OQ} \cdot (k - 1) = \overrightarrow{QP} \cdot \left(1 - \frac{1}{l}\right)$.