Алгебра

Содержание

1 Решение уравнений и неравенств.

1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a,\ a > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \qquad |f(x)| > a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leq |g(x)| \Longleftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0 \\ &|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \Longleftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0 \\ &|f(x)| + |g(x)| \leq |f(x) + g(x)| \Longleftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

2 Многочлены

Определение 1. Многочленом от переменной x над K называется выражение вида: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $a_k \in K$ – коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$.

Определение 2. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$, называется степенью многочлена f:

$$\begin{aligned} &k = \deg\, f \\ &a_0 \text{ – свободный член} \\ &a_nx^n \text{ – старший член} \\ &a_n \text{ – старший коэффициент} \end{aligned}$$

Определение 3. Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях x равны.

Определение 4.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \\ g(x) &= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + d_1x + d_0, \text{ где } d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$$

Утверждение 2.1. Пусть $\deg\, f(x) \neq 0$, $\deg\, g(x) \neq 0$, тогда:

1. $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg\, f, \deg\, g\}$
2. $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3. $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg\, f(x) + \deg\, g(x)$

Доказательство.

1. Пусть $\deg\, f = \deg\, g = n$
   $f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
   Если $k > n$, то $a_k = 0$, $b_k = 0$, то есть $(a_k + b_k) = 0$

   Пусть $\deg\, f = n$, $\deg\, g = m$, $m < n$
   Если $k > n$, то $a_k + b_k = 0$, так как $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_{n-1} = b_n = 0$
   Тогда $a_n + b_n = a_n \neq 0$

2. $f(x) \cdot g(x) = \underset{\substack{\not\parallel \\ 0}}{a_nb_m}x^{n+m} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{степень}<n}$

∎

Определение 5. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot g(x) = f(x)$.

Утверждение 2.2. Всякий многочлен $f(x) \neq 0$ делится на самого себя.

Утверждение 2.3. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $f(x)$, то $f(x) = c \cdot g(x)$, $c \in K$.

Определение 6. Число x_0 является корнем $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (Теорема Безу)**.** Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

Доказательство.

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$
$$P(a) = 0 \cdot p(x) + r = r$$

∎

Следствие 2.4.1. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

3 Множества

Определение 7. Множества равномощны, если между ними существует биекция.

Определение 8. Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Определение 9. Множества, равномощные $\mathbb{N}$, называются счетными.

Определение 10. Декартовым произведением множеств A и B называется множество:

$$A \times B = \{x \,|\, x = (a, b),\, a \in A,\, b \in B\}$$

Определение 11. Число a называется числом кратности k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.

Определение 12. Множество m называется ограниченным, если:

$$\exists\, c : \forall x \in M \;\; |x| \leq c$$

Определение 13. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества M называется точной верхней гранью (супремумом):

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : \; x \leq a,\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in M : \; x > a - \varepsilon$$

Определение 14. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества M называется точной нижней гранью (инфинумом):

$$a = \inf M \iff \forall x \in M : \; x \geq a,\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in M : \; x < a + \varepsilon$$

Определение 15. Множество M называется открытым, если:

$$\forall\, m \in M \;\; \exists\, \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(m) \subset M$$

Определение 16. Точка A называется предельной точкой множества M, если:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; U_\varepsilon(A) \cap M \text{ бесконечно или } \mathring{U}_\varepsilon(A) \cap M \neq \varnothing$$

Определение 17. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 18. Пусть $M \subset U_{A_i}$, A_i – открытое множество, тогда U_{A_i} называется открытыми покрытиями.

Определение 19. Говорят, что почти все элементы множества M удовлетворяют некоторому условию, если этому условию не удовлетворяет конечное число элементов.

4 Числовые последовательности

Определение 20. Числовой последовательностью a_n называется отображение $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 21. Последовательность a_n называется ограниченной, если $a(\mathbb{N})$ ограничено.

Определение 22. Последовательность a_n называется монотонно возрастающей, если:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} > a_n$$

Определение 23. Последовательность a_n асимптотически больше b_n, если:

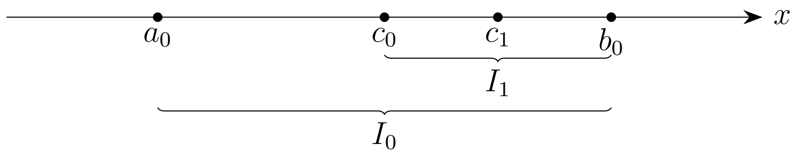
$$a_n \succ b_n \Longleftrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N \ a_n \geq b_n$$

Определение 24. Точка A называется частичным пределом последовательности a_n, если:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ a^{-1}(U_\varepsilon(A)) \text{ бесконечно}$$

Теорема 4.1. Пусть последовательность a_n ограничена, тогда у неё есть частичный предел.

Доказательство. Если $\exists\, x_0 : a^{-1}(x_0)$ бесконечно, то доказано. Если $\exists\, x_0 : a^{-1}(x_0)$ конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$ и $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$, а также середину a_0b_0, то есть $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Разделим один из получившихся отрезков (отметим c_0 и b_0, как a_1 и b_1 соответственно) пополам, получив $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset \ldots \supset [a_n;\, b_n] \supset \ldots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n;\, b_n] \neq \varnothing$$

1. $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$
2. $a(\mathbb{N})$ ограничена сверху b_i элементом
3. $a(\mathbb{N})$ имеет точную верхнюю грань $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$
   и точную нижнюю грань $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4. $M_1 \leq M_2$
5. $[M_1;\, M_2] \subset \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n;\, b_n]$
6. Пусть $M_1 < M_2$, тогда $\exists\, n : b_n - a_n < M_2 - M_1$.
   Получаем противоречие, значит $M_1 = M_2 = M$.
7. Возьмем такое n, что $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $[a_n;\, b_n] \subset U_\varepsilon(M)$.
   То есть $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$ бесконечно.

■

Теорема 4.2. Пусть M – множество частичных пределов последовательности a_n, тогда:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup M; \ \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf M$$

Теорема 4.3. Множество частичных пределов числовой последовательности замкнуто.

Определение 25. Пусть даны $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, при этом b монотонна. Тогда $a \circ b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется подпоследовательностью.

Утверждение 4.4. У всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

4.1 Прогрессии

Определение 26. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Определение 27. Разностью арифметической прогрессии называется разность a_{n+1} и a_n.

Утверждение 4.5. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

Утверждение 4.6. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\;\; \forall k \in \mathbb{N},\, k < n :\; a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

Теорема 4.7. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
&= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1) \cdot d) = \\
&= n \cdot a_1 + d \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = \\
&= n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) = \\
&= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = \\
&= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}
\end{aligned}$$

■

Определение 28. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n-го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\, b_1 \neq 0,\, q \neq 0$$

Утверждение 4.8. Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 :\; b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

Теорема 4.9. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},\, q \neq 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \\
&= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\
&= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \\
&= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}
\end{aligned}$$

■

4.2 Пределы последовательностей

Определение 29. Число A называется пределом последовательности a_n, если:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

Определение 30. Число A называется пределом последовательности a_n, если $\forall\,\varepsilon > 0$ почти все элементы последовательности принадлежат $U_\varepsilon(A)$.

Определение 31. Число A называется пределом последовательности a_n, если:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall\, n > n_0,\ n \in \mathbb{N}\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 4.10. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

Доказательство.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N_1 :\ \forall\, n > N_1\ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2};\ \exists\, N_2 :\ \forall\, n > N_2\ |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \forall\, n > N = \max(N_1; N_2)\ |a_n + b_n - A - B| \le |a_n - A| + |b_n - B| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

Определение 32. Последовательность a_n называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема 4.11. Пусть α_n – бесконечно малая последовательность, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} = A \Longleftrightarrow a_n = A + \alpha_n$$

Теорема 4.12. Пусть a_n сходится, α_n – бесконечно малая. Тогда $b_n = a_n \cdot \alpha_n$ – бесконечно малая.

Доказательство.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N :\ \forall\, n > N\ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c} \Longrightarrow \forall\, n > N\ |a_n \cdot \alpha_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

■

Теорема 4.13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = AB$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} ((A + \alpha_n)(B + \beta_n)) = \lim_{n\to\infty} (AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n) = AB$$

■

Определение 33. Последовательность x_n называется бесконечно большой, если:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall\, c\ \ \exists\, n_0 :\ \forall\, n > n_0\ \ x_n > c$$

Теорема 4.14 (Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть x_n монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет предел в $\mathbb{R}$

Доказательство. Пусть x_n монотонно возрастает. По определению $\forall n : x_{n+1} > x_n$. Пусть x_n не ограничена, то есть $\nexists m : \forall n \; x_n < m$, тогда $\sup(x_n) = +\infty$, а значит $x_n \to \infty$. Пусть $\exists m : \forall n \; x_n \leq m$ и $m = \sup(x_n)$. Тогда $m = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ■

Теорема 4.15 (Принцип двух милиционеров)**.** Пусть даны последовательности: $x_n \leq y_n \leq z_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \; |x_n - A| < \varepsilon; \; |z_n - A| < \varepsilon \Longrightarrow |x_n - A| \leq |y_n - A| \leq |z_n - A| < \varepsilon$$

■

Теорема 4.16. Пусть a_n монотонно не убывает и ограничена сверху, тогда a_n сходится.

Доказательство. В силу ограниченности a_n имеет частичный предел. Пусть B – частичный предел a_n и $B < \sup a_n = A$. Возьмём $\varepsilon < \frac{a-b}{3}$, тогда $\exists n : a_n > A - \varepsilon$. Значит, $a_n - B > 2\varepsilon$ и $\forall m > n \; a_m - B \geq a_n - B$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$. ■

Лемма 4.17 (Неравенство Бернулли)**.**

$$(1+x)^n \geq 1 + xn, \, n \in \mathbb{N}, \, x > 0$$

Доказательство. Докажем по индукции: $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ верно, пусть $(1+x)^n \geq 1 + xn$ верно, тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+xn) = 1 + x + nx + x^2 n > 1 + (n+1)x$$

■

Определение 34.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность E_n:

$$E_n = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n}; \;\; 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим последовательность, в которой поменяем местами числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+3n+1}{n^2+2n}$$

Вернувшись к изначальной последовательности, получаем:

$$\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < \frac{n^2+2n}{n^3+3n+1}$$

Таким образом, $E_{n+1} > E_n$, а значит E_n монотонно возрастает, при этом она ограничена, а значит по теореме Вейерштрасса имеет предел, то есть e_n также имеет предел. ■

4.3 Пределы функций

Определение 35 (Предел функции по Коши)**.** Число A называется пределом $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0, а также:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Определение 36 (Предел функции по Гейне)**.** Число A называется пределом $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0, а также:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall\, x_n \neq x_0 \;\; \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Утверждение 4.18. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. Пусть определение по Коши верно, также пусть $x_n \neq x_0$ – некоторая последовательность, такая что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, то есть $\exists\, n_0 : \forall\, n > n_0 \;\; x_n \in U_\delta(x_0)$, но тогда по Коши $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$.

Пусть определение по Гейне верно, а по Коши нет, то есть:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : \; f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $\exists\, x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, причём $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$, что противоречит определению по Гейне. ∎

Теорема 4.19 (Принцип двух милиционеров для функций)**.** Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0, тогда:

$$f(x) \le g(x) \le h(x); \;\; \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

Доказательство. Пусть $x_n \neq x_0 : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Из условия $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = A$. Тогда по принципу двух милиционеров для последовательностей $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = A$. ∎

Определение 37. Пусть $f(x)$ определена на некотором неограниченном множестве, тогда:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = B \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, c : \forall\, x > c \;\; f(x) \in U_\varepsilon(B)$$

Теорема 4.20. Если у $f(x)$ существует предел в точке x_0, он единственный.

Доказательство. Пусть у $f(x)$, определённой в проколотой окрестности точки x_0, есть два предела A_1 и A_2, тогда:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_1,\, \delta_2 > 0 : \forall\, x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0),\, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0) \;\; f(x_1) \in U_\varepsilon(A_1),\, f(x_2) \in U_\varepsilon(A_2)$$

Возьмём $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, тогда $\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A_1)$, $f(x) \in U_\varepsilon(A_2)$, но $U_\varepsilon(A_1) \cap U_\varepsilon(A_2) = \varnothing$, противоречие. ∎

Определение 38. Пусть $f(x)$ определена в проколотой левой (правой) полуокрестности точки x_0. Число A называется левым (правым) пределом $f(x)$ в точке x_0, если:

$$A = \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in \mathring{U}^{\pm}_\delta(x_0) \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Утверждение 4.21. Функция $f(x)$, определённая в проколотой окрестности точки x_0, имеет в ней предел тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Определение 39. Точка x_0 называется изолированной точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap M = \varnothing$$

Определение 40. Пусть $f(x)$ определена на $M \subset \mathbb{R}$. Она называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если x_0 – изолированная точка или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 41 (Непрерывность по Гейне)**.** Пусть $f(x)$ определена на $M \subset \mathbb{R}$. Она называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если:

$$\forall\, x_n \in M : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Определение 42 (Непрерывность по Коши)**.** Пусть $f(x)$ определена на $M \subset \mathbb{R}$. Она называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap M \;\; f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

Теорема 4.22 (1-я теорема Больцано-Коши)**.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, тогда:

$$f(a) < 0,\; f(b) > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in [a; b] : f(c) = 0$$

Доказательство. Рассмотрим $d = \frac{a+b}{2}$. Если $f(d) = 0$, то $c = d$. Если $f(d) < 0$, то $a_1 = d$, $b_1 = b$, аналогично если $f(d) > 0$, то $a_1 = a$, $b_1 = d$, при этом $d_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}; \;\; \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

Пусть $f(c) = k > 0$, тогда $\forall\, n \;\; a_n < 0 \Longrightarrow \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, a_n \in U_\delta(c) : |f(c) - f(a_n)| > \frac{k}{2}$, что невозможно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, противоречие. Аналогично при $f(c) < 0$. ■

Теорема 4.23. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда она ограничена на $[a; b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не ограничена на $[a; b]$. Возьмём $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда на одном из отрезков $[a; c]$ или $[c; b]$ она не ограничена. Без ограничения общности пусть это отрезок $[a; c]$. Тогда $a_1 = a$, $b_1 = c$, $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Аналогично в противном случае. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{k\}$$

Возьмём бесконечно большую последовательность d_n. Тогда $\forall\, n \;\; \exists\, x_n \in [a_n; b_n] : f(x_n) > d_n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$; из непрерывности $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(k)$, но $f(x_n)$ – бесконечно большая. Таким образом, значение функции в точке равно бесконечности, противоречие. ■

Теорема 4.24. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда она достигает своего супремума на этом отрезке.

Доказательство. Возьмём $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда:

$$\sup_{[a;c]} f(x) \le \sup_{[a;b]} f(x); \quad \sup_{[c;b]} f(x) \le \sup_{[a;b]} f(x)$$

Из данных неравенств следует, что на $[a; c]$ или на $[c; b]$ супремум равен супремуму на $[a; b]$. Без ограничения общности пусть это отрезок $[a; c]$. Тогда $a_1 = a$, $b_1 = c$, $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Аналогично в противном случае. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{k\}$$

Возьмём бесконечно малую последовательность ε_n. Тогда:

$$\forall\, n\ \exists\, x_n \in [a_n; b_n] :\ f(x_n) > \sup_{[a_n;b_n]} f(x) - \varepsilon_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = k;\ \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{[a;b]} f(x)$$

Значит, из непрерывности функции $f(k) = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$. ■

5 Эквивалентность и группы

Определение 43. Пусть M – множество, тогда множество $R \subset \{(a,\, b)\,|\, a,\, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется бинарным отношением на M.

Определение 44. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность $a \sim a$
2. Симметричность $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$
3. Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Longleftrightarrow a \sim c$

Теорема 5.1 (Малая теорема Ферма)**.** $\forall n \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{P} :\ n^{p-1} \equiv_p 1$

Определение 45. Бинарной операцией $\times$ на множестве M называется отображение из множества упорядоченных пар $M^2 = \{(a,\, b)\,|\, a,\, b \in M\}$ в множество M.

Определение 46. Пара $G(M;\, \times)$, M – множество, $\times$ – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1. $\forall a,\, b \in M :\ (a \times b) \in M$
2. $\exists\, e \in M\ \ \forall a \in M :\ e \times a = a$
3. $\forall a \in M\ \ \exists\, a^{-1} \in M :\ a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4. $\forall a,\, b,\, c \in M :\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

6 Тригонометрия

Определение 47. Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

Определение 48. Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

Определение 49. Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

Определение 50. Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

Утверждение 6.1.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Доказательство. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

■

Утверждение 6.2.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 6.1 разделить на $\cos^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 6.3.

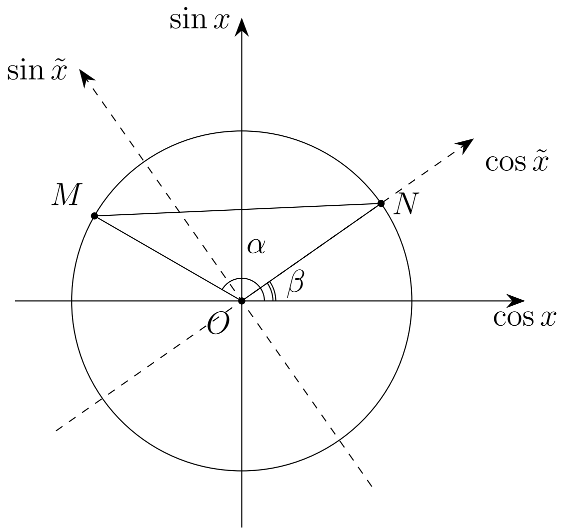
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 6.1 разделить на $\sin^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 6.4.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол β, тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

То есть $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$, а значит $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$. ■

Утверждение 6.5.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

■

Утверждение 6.6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

Доказательство.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$$

■

Утверждение 6.7.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

■

Утверждение 6.8.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

■

Утверждение 6.9.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, получим:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 6.10.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, получим:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 6.11.

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, получим:

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$$

■

Утверждение 6.12.

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=-\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, получим:

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=-\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$$

■

Утверждение 6.13.

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

■

Утверждение 6.14.

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Доказательство.

$$\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

■

Утверждение 6.15.

$$\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

■

Утверждение 6.16.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

■

Утверждение 6.17.

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\cos(3\alpha) = \\
=&\cos(2\alpha + \alpha) = \\
=&\cos(2\alpha) \cdot \cos\alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin\alpha = \\
=&(2\cos^2\alpha - 1) \cdot \cos\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \\
=&2\cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot (1 + 2\sin^2\alpha) = \\
=&2\cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot (3 - 2\cos^2\alpha) = \\
=&4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.18.

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\sin(3\alpha) = \\
=&\sin(2\alpha + \alpha) = \\
=&\sin(2\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin\alpha = \\
=&2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha = \\
=&\sin\alpha \cdot (2\cos^2\alpha + 1) - 2\sin^3\alpha = \\
=&\sin\alpha \cdot (3 - 2\sin^2\alpha) - 2\sin^3\alpha = \\
=&3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha
\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.19.

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \iff \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

■

Утверждение 6.20.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

■

Утверждение 6.21.

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos\beta = \\
=&\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+ \\
+&\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.22.

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos\beta = \\
=&\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)- \\
-&\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.23.

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha + \sin\beta = \\
=&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \\
+&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.24.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha - \sin\beta = \\
=&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \\
-&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\
=&2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.25.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

■

Утверждение 6.26.

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

■

Утверждение 6.27.

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

■

Утверждение 6.28.

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

■

Утверждение 6.29.

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, тогда из утверждения 7.21:

$$2\cos\tilde{\alpha} \cdot \cos\tilde{\beta} = \cos\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) + \cos\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right) \iff \cos\tilde{\alpha} \cdot \cos\tilde{\beta} = \frac{\cos\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) + \cos\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right)}{2}$$

■

Утверждение 6.30.

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, тогда из утверждения 7.22:

$$-2\sin\tilde{\alpha} \cdot \sin\tilde{\beta} = \cos\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) - \cos\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right) \iff \sin\tilde{\alpha} \cdot \sin\tilde{\beta} = -\frac{\cos\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) - \cos\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right)}{2}$$

■

Утверждение 6.31.

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, тогда из утверждения 7.23:

$$2\sin\tilde{\alpha} \cdot \sin\tilde{\beta} = \sin\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) + \sin\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right) \iff \sin\tilde{\alpha} \cdot \cos\tilde{\beta} = \frac{\sin\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) + \sin\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right)}{2}$$

■

Утверждение 6.32.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

Доказательство.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

■

Утверждение 6.33.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

Утверждение 6.34.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

7 Комплексные числа

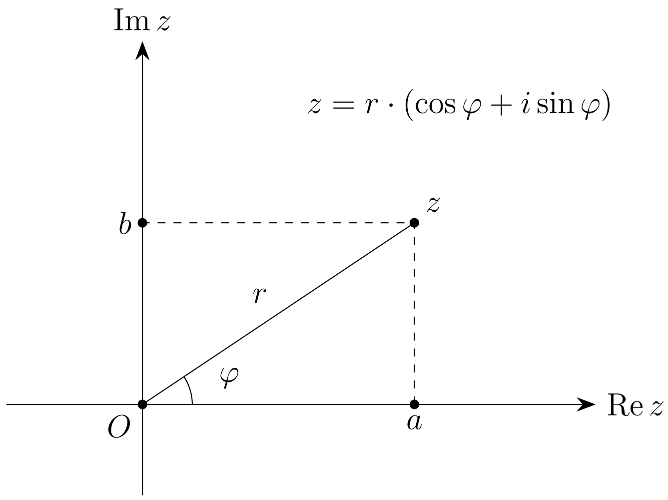
Определение 51. Мнимой единицей называется такое число i, что $i^2 = -1$.

Определение 52. Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где $a = \operatorname{Re} z$ – действительная часть, а $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая.

Определение 53. Число z_1 называется сопряженным к числу z, если $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z_1 = -\operatorname{Im} z$. Обозначение: $z_1 = \bar{z}$.

Определение 54. Модулем $z \in \mathbb{C}$ называется $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

Определение 55. Комплексная плоскость:



Теорема 7.1 (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Доказательство. Докажем по индукции. $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ верно. Пусть $z^n = r^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ верно, докажем, что $z^{n+1} = r^{n+1}\cdot(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi))$ верно.

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi)\cdot\cos\varphi - \sin(n\varphi)\cdot\sin\varphi) + i(\cos(n\varphi)\cdot\sin\varphi + \sin(n\varphi)\cdot\cos\varphi)) =$$

$$= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi))$$

■

Определение 56. Корнем из комплексного числа называется:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k \in \{1,\ 2, \ldots,\ n-1\}$$

7.1 Матрицы поворота

Определение 57. Матрицей поворота на угол α называется:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos\alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\alpha\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos\alpha\cdot E + \sin\alpha\cdot I$$

Утверждение 7.2.

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) \iff z = re^{i\varphi}$$

Доказательство.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\cdot(-1)^i$$

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot(-1)^i$$

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot i^k = \cos x + i\sin x$$

■

8 Логарифмы

Определение 58. Пусть $a > 0$; $a \neq 1$, $b > 0$. Логарифмом $\log_a b$ числа b по основанию a называется такое число c, что $a^c = b$. Из этого, а также свойств степеней следует:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad a^{\log_a b} = b$$

Утверждение 8.1.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a (bc)}$$

■

Утверждение 8.2.

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \frac{b}{c} = a^{\log_a \left(\frac{b}{c}\right)}$$

■

Утверждение 8.3.

$$\log_a \left(b^k\right) = k \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$a^{\log_a \left(b^k\right)} = b^k = \left(a^{\log_a b}\right)^k = a^{k \cdot \log_a b}$$

■

Утверждение 8.4.

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$\left(a^k\right)^{\log_{a^k} b} = a^{k \cdot \log_{a^k} b} = b = a^{\log_a b}$$

■

Следствие 8.4.1.

$$\log_{a^k} \left(b^k\right) = \log_a b$$

Утверждение 8.5.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ \log_c a \neq 0$$

Доказательство.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Longleftrightarrow \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$c^{\log_c b} = b = a^{\log_a b} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = c^{\log_a b \cdot \log_c a}$$

■

Утверждение 8.6.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\frac{1}{\log_b a}} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{1}{\log_b a}} = b = a^{\log_a b}$$

■

Утверждение 8.7.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$$

■

Определение 59. Натуральным логарифмом $\ln x$ называется логарифм с основанием e.

Определение 60. Десятичным логарифмом $\lg x$ называется логарифм с основанием 10.

8.5 Показательные уравнения и неравенства

$$a^x = a^{x_0} \iff x = x_0 \qquad a^x = b \iff x = \log_a b$$

$$a^x > a^{x_0} \iff \begin{array}{l} x > x_0, \text{ если } a > 1 \\ x < x_0, \text{ если } 0 < a < 1 \end{array} \qquad a^x > b \iff \begin{array}{l} x > \log_a b, \text{ если } a > 1 \\ x < \log_a b, \text{ если } 0 < a < 1 \end{array}$$

8.6 Логарифмические уравнения и неравенства

$$\log_a x = b \iff x = a^b \qquad \log_a x > b \iff \begin{array}{l} x > a^b, \text{ если } a > 1 \\ x < a^b, \text{ если } 0 < a < 1 \end{array}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{array}{ll} \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} & a > 1 \\ \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} & 0 < a < 1 \end{array}$$

9 Линейная алгебра

9.1 Координаты на плоскости

Утверждение 9.1. Пусть даны $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда середина отрезка AB будет иметь координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$, а его длина будет равна $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Утверждение 9.2. Пусть $A(x_0; y_0) \in \omega(O; r)$, $O(a; b)$, тогда $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$.

Утверждение 9.3. Пусть даны $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через A и B будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Утверждение 9.4. Пусть даны точка $M(x_0; y_0)$ и прямая $l:\ ax + by + c = 0$. Тогда:

$$\rho(M; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

9.2 Векторы

Определение 61. Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ называется отрезок AB, у которого заданы начало A и конец B.

Определение 62. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются коллинеарными, если $AB \parallel CD$.

Определение 63. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются конгруэнтными, если они коллинеарны, B и D лежат в одной плоскости относительно AC и их длины равны.

Определение 64. Пусть $\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_n}$ – векторы в $\mathbb{R}^n$. Они называются линейно зависимыми, если $\exists\, a_1, \ldots, a_n$, не равные одновременно нулю, что $a_1\overrightarrow{r_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{r_n} = 0$.

Определение 65. Пусть X – множество, рассмотрим $X \times X = \{(x; y) \,|\, x, y \in X\}$. Тогда $\rho \subset X \times X$ – бинарное отношение.

Определение 66. Бинарное отношение $\sim \subset X \times X$ называется отношением эквивалентности на множестве X, если $\forall\, x, y, z \in X :\ x \sim x;\ x \sim y \iff y \sim x;\ x \sim y,\ y \sim z \iff x \sim z$.

9.3 Линейные пространства

Определение 67. Элементами поля F являются скаляры или векторы. L называется линейным пространством над полем F, если $\forall\, a, b \in L$; $\forall\, \lambda,\ \mu \in F$:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists\, \overrightarrow{0} \in L :\ a + \overrightarrow{0} = a$
4. $\forall\, a\ \exists\, b :\ a + b = \overrightarrow{0}$
5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
6. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
7. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
8. $1 \cdot a = a$

Определение 68. Пусть L – линейное пространство над полем F; $u_1, \ldots, u_n \in L$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, тогда $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ – линейная комбинация. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\forall\, i :\ \alpha_i = 0$.

Определение 69. Пусть $U \subset L$, множество векторов $\langle U \rangle$, которые не выражаются через элементы U называется линейной оболочкой.

Определение 70. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ – система векторов. Она называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Теорема 9.5. Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других.

Определение 71. Система $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно независимых векторов линейного пространства L называется базисом, если $\langle U \rangle = L$.

Определение 72. Скалярным произведением векторов $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ называется величина $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$. Если $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, то угол между ними равен нулю, а если коллинеарны, но не сонаправлены – π:

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
2. $k \cdot (\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}) = (k \cdot \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (k \cdot \overrightarrow{b})$
3. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$
4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{b}|^2\right)$

9.4 Матрицы

Определение 73. Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Определение 74. Квадратная матрица называется верхней треугольной, если $\forall\, i, j;\ i > j :$ $a_{ij} = 0$.

Определение 75. Квадратная матрица называется нижней треугольной, если $\forall\, i, j;\ i < j :$ $a_{ij} = 0$.

Определение 76. Квадратная матрица называется диагональной, если $\forall\, i, j;\ i \neq j : a_{ij} = 0$. Обозначение: $\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

Определение 77. Диагональная матрица порядка n, у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной. Обозначение: E или E_n. Элементы единичной матрицы обозначаются δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

Определение 78. Квадратная матрица A называется скалярной, если $A = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Определение 79. Сумма диагональных элементов матрицы A называется её шпуром или следом. Обозначение: $\mathrm{Sp}\, A$ или $\mathrm{tr}\, A$.

Определение 80. Матрица B называется транспонированной по отношению к матрице A, если $\forall\, i, j : b_{ij} = a_{ji}$. Обозначение: $B = A^T$.

Определение 81. Квадратная матрица A называется симметрической, если $A^T = A$.

Определение 82. Квадратная матрица A называется кососимметрической, если $A^T = -A$.

Определение 83. Матрица B называется комплексно сопряжённой по отношению к матрице A, если $\forall\, i, j : b_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Обозначение: $B = \overline{A}$.

Определение 84. Матрица B называется эрмитово сопряжённой по отношению к матрице A, если $\forall\, i, j : b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Обозначение: $B = A^*$.

Определение 85. Квадратная матрица A называется эрмитовой, если $A^* = A$.

Определение 86. Квадратная матрица A называется косоэрмитовой, если $A^* = -A$.

Определение 87. Матрица называется нулевой, если все её элементы равны нулю. Обозначение: $A = O$.

Определение 88. Матрица называется неотрицательной, если $\forall\, i, j : a_{ij} \geq 0$.

Определение 89. Матрица называется стохастической, если:

$$\forall\, i, j : a_{ij} \geq 0;\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$$

9.4.1 Произведение матриц

Определение 90. Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times k$. Их произведением будет матрица размера $m \times k$, в которой:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}$$

Утверждение 9.6. Произведение верхних треугольных матриц является верхней треугольной матрицей.

Определение 91. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица B называется обратной к A, если $A \cdot B = B \cdot A = E$. Обозначение: $B = A^{-1}$.

Определение 92. Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^T = A^{-1}$.

Определение 93. Квадратная матрица A называется унитарной, если $A^* = A^{-1}$.

Определение 94. Матрица A называется нильпотентной, если $A^k = O$, $k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из таких k называется показателем нильпотентности матрицы A.

Определение 95. Матрица A называется периодической, если $A^k = E$, $k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из таких k называется периодом матрицы A.

9.4.2 Определитель

Определение 96. Пусть дана перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Инверсией называется число таких пар $(i; j)$, что $i > j$; $\alpha_i < \alpha_j$.

Определение 97. Пусть дана квадратная матрица A порядка n. Если α_i – перестановка чисел от 1 до n, а $N(\alpha_i)$ – число инверсия в α_i перестановке, то определителем матрицы A называется:

$$\det A = \sum_{a_i} (-1)^{N(\alpha_i)} \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Теорема 9.7. Пусть дана квадратная матрица A, M_{ji} – дополнительный минор элемента a_{ji}. Элементы её обратной матрицы можно вычислить по формуле:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot M_{ji}}{\det A}$$

Определение 98. Квадратная матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$.

Определение 99. Квадратная матрица A называется невырожденной, если $\det A \neq 0$.

Определение 100. Квадратная матрица A называется унимодулярной, если $|\det A| = 1$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Определение 101. Квадратная матрица A называется матрицей перестановки, если она получена из E перестановкой строк.

Определение 102. Квадратная матрица A называется элементарной, если она получена из E элементарным преобразованием.

9.4.3 Ранг матрицы

Определение 103. Рангом матрицы называется наибольший порядок из всех порядков её ненулевых миноров.

Теорема 9.8 (О базисном миноре)**.** Пусть M_r – базисный минор матрицы A, строки соответствующей матрицы – базисные строки, а столбцы – базисные столбцы. Тогда:

1. Базисные строки линейно независимы.

2. Базисные столбцы линейно независимы.

3. Любая строка (столбец) матрицы A – линейная комбинация базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из определения базиса. Без ограничения общности пусть базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы A, то есть матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1r}} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2r}} & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \boldsymbol{a_{r2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rr}} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если расширить базисный минор до $r+1$ строки и $r+1$ столбца, при этом все его строки и столбцы останутся линейно независимыми, тогда $\operatorname{rank} A = r+1$, но по условию $\operatorname{rank} A = r$, противоречие. ■

Теорема 9.9 (Кронекер-Капелли)**.** Система линейных алгебраических уравнений $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$.

Доказательство. Пусть система совместна, тогда:

$$b_i = \sum_j a_{ji} x_j; \ \overrightarrow{b} = \sum_j \overrightarrow{a_j} x_j$$

То есть, $\overrightarrow{b}$ выражается через $\overrightarrow{a_i}$, а значит $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$. Пусть $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \left(A \mid \overrightarrow{b}\right)$. Тогда по теореме о базисном миноре она совместна. ■

Теорема 9.10 (Правило Крамера)**.** Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестным вида $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Тогда если Δ – определитель матрицы A, то $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы A, в которой i-й столбец заменили на вектор свободных членов:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(i-1)} & b_{(n-1)} & a_{(n-1)(i+1)} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Теорема 9.11 (Конечномерная альтернатива Фредгольма)**.** Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными вида $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Тогда выполняется одно из двух условий:

1. Система имеет 1 решение для любого $\overrightarrow{b}$ и соответствующая однородная система уравнений имеет только тривиальное решение.
2. Соответствующая однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, тогда $\exists\ \overrightarrow{b} : A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ не имеет решений.

Доказательство.

1. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда все столбцы A называются векторами n-мерного пространства, при этом они линейно независимы, то есть они образуют в этом пространстве базис. Тогда $\overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{a_n}$; любой вектор этого пространства выражается единственным образом через линейную комбинацию базисных векторов. Система имеет единственное решение. Поскольку векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ линейно независимы, то нулю может равняться только их тривиальная комбинация.

2. Пусть $\det A = 0$. Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ – линейно зависимы, поэтому существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю. $\dim\langle\overrightarrow{a_i}\rangle = k < n$. Пусть при любом $\overrightarrow{b}$ система имеет решение. Тогда любой $\overrightarrow{b}$ выражается через линейную комбинацию $\overrightarrow{a_i}$, то есть $\{\overrightarrow{a_i}\}$ – базис в n-мерном пространстве. Противоречие.

■