Алгебра

Содержание

1	Решение уравнений и неравенств.	2
	1.1 Иррациональные уравнения	2
	1.2 Иррациональные неравенства	2
	1.3 Неравенства с модулем	2
2	Многочлены	2
3	Множества	4
4	Числовые последовательности	4
	4.1 Аксиоматика действительных чисел	4
	4.2 Прогрессии	5
5	Эквивалентность и группы	6
6	Пределы	7
7	Тригонометрия	8
8	Комплексные числа	16
	8.1 Матрицы поворота	17
9	Логарифмы	17

1 Решение уравнений и неравенств.

1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$$

1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a, \ a > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \qquad |f(x)| > a \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

$$|f(x)| \le |g(x)| \Longleftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \le 0$$

$$|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \Longleftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$|f(x)| + |g(x)| \le |f(x) + g(x)| \Longleftrightarrow f(x) \cdot g(x) \ge 0$$

2 Многочлены

Определение 1. Многочленом от переменной x над K называется выражение вида: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ a_k \in K$ – коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$.

Определение 2. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$, называется степенью многочлена f:

$$k = \deg f$$
 $a_0 -$ свободный член $a_n x^n -$ старший член $a_n -$ старший коэффициент

Определение 3. Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях x равны.

2

Определение 4.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Суммой многочленов f(x) и g(x) называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов f(x) и g(x) называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + d_1x + d_0$$
, где $d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$

Утверждение 2.1. Пусть deg $f(x) \neq 0$, deg $g(x) \neq 0$, тогда:

1.
$$\deg(f(x) + g(x)) \le \max\{\deg f, \deg g\}$$

2.
$$f(x) \cdot g(x) \neq 0$$

3.
$$deg(f(x) \cdot g(x)) = deg f(x) + deg g(x)$$

Доказательство.

1. Пусть deg $f = \deg g = n$ $f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ Если k > n, то $a_k = 0$, $b_k = 0$, то есть $(a_k + b_k) = 0$

Пусть $\deg f=n, \deg g=m, m< n$ Если k>n, то $a_k+b_k=0,$ так как $b_{m+1}=b_{m+2}=\ldots=b_{n-1}=b_n=0$ Тогда $a_n+b_n=a_n\neq 0$

2.
$$f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \underbrace{\cdots}_{\text{степень} < n}$$

Определение 5. Многочлен f(x) делится на многочлен g(x), если существует такой многочлен h(x), что $h(x) \cdot g(x) = f(x)$.

Утверждение 2.2. Всякий многочлен $f(x) \neq 0$ делится на самого себя.

Утверждение 2.3. Если f(x) делится на g(x), а g(x) делится на f(x), то $f(x) = c \cdot g(x)$, $c \in K$.

Определение 6. Число x_0 является корнем f(x), если $f(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен (x-a) равен P(a).

Доказательство.

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot p(x) + r = r$$

Следствие 2.4.1. Число a является корнем многочлена P(x) тогда и только тогда, когда P(x) делится на (x-a).

3 Множества

Определение 7. Множества равномощны, если между ними существует биекция.

Определение 8. Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B, B \subseteq A$.

Определение 9. Множества, равномощные №, называются счетными.

Определение 10. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{x \mid x = (a, b), \ a \in A, \ b \in B\}.$

Определение 11. Число a называется числом кратности k многочлена f(x), если f(x) делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.

4 Числовые последовательности

Определение 12. Бесконечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 13. Конечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $a: \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{R}$.

Определение 14. Множество $M, M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists c : \forall x \in M : x \leq c$.

Определение 15. Множество $M,\,M\subset\mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists\,c:\,\forall x\in M:\,x\geq c.$

Определение 16. Множество $M, M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 17. Последовательность a_n называется ограниченной, если $a(\mathbb{N})$ ограничено.

Определение 18. Последовательность a_n называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} > a_n$.

Теорема 4.1. Пусть все элементы последовательности a_n положительны. Последовательность a_n возрастает тогда и только тогда, когда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

4.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 19. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества M называется точной верхней гранью (супремумом):

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \le a, \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x > a - \varepsilon$$

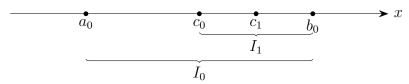
Определение 20. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества M называется точной нижней гранью (инфинумом):

$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \ge a, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x < a + \varepsilon$$

Теорема 4.2. Пусть $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(\mathbb{N})$ ограничена. Тогда:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : a^{-1}((x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon))$$
 бесконечно $\bigcup_{U_{\varepsilon}(x_0)}$

Доказательство. Если $\exists x_0: a^{-1}(x_0)$ бесконечно, то доказано. Если $\exists x_0: a^{-1}(x_0)$ конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой $a_0=\inf a(\mathbb{N})$ и $b_0=\sup a(\mathbb{N})$, а также середину a_0b_0 , то есть $c_0=\frac{a_0+b_0}{2}$. Разделим один из получившихся отрезков (отметим c_0 и b_0 , как a_1 и b_1 соответственно) пополам, получив $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$. Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$

- 1. $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n \le \ldots$
- 2. $a(\mathbb{N})$ ограничена сверху b_i элементом
- 3. $a(\mathbb{N})$ имеет точную верхнюю грань $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$ и точную нижнюю грань $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
- 4. $M_1 \leq M_2$
- 5. $[M_1; M_2] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n]$
- 6. Пусть $M_1 < M_2$, тогда $\exists n : b_n a_n < M_2 M_1$. Получаем противоречие, значит $M_1 = M_2 = M$.
- 7. Возьмем такое n, что $b_n-a_n<\varepsilon$. Тогда $[a_n;\,b_n]\subset U_\varepsilon(M)$. То есть $\forall \varepsilon>0:\,a^{-1}(U_\varepsilon(M))$ бесконечно.

Определение 21. Число x называется частичным пределом последовательности $a(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_{\varepsilon}(x))$ бесконечно.

4.2 Прогрессии

Определение 22. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Определение 23. Разностью арифметической прогрессии называется разность a_{n+1} и a_n .

Утверждение 4.3. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

Утверждение 4.4. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \ge 2 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k < n : \ a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

Теорема 4.5. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Доказательство.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n - 1) \cdot d) =$$

$$= n \cdot a_1 + d \cdot \left(\frac{(n - 1) \cdot n}{2}\right) =$$

$$= n \cdot \left(a_1 + \frac{(n - 1) \cdot d}{2}\right) =$$

$$= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n - 1) \cdot d)}{2} =$$

$$= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Определение 24. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n-го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, b_1 \neq 0, q \neq 0$$

Утверждение 4.6. Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

Теорема 4.7. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \ q \neq 1$$

Доказательство.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n =$$

$$= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} =$$

$$= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^n) =$$

$$= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

5 Эквивалентность и группы

Определение 25. Пусть M – множество, тогда множество $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется бинарным отношением на M.

Определение 26. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

- 1. Рефлексивность $a \sim a$
- 2. Симметричность $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$
- 3. Транзитивность $a \sim b, b \sim c \Longleftrightarrow a \sim c$

Теорема 5.1 (Малая теорема Ферма). $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P} : n^{p-1} \equiv_p 1$

Определение 27. Бинарной операцией \times на множестве M называется отображение из множества упорядоченных пар $M^2 = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ в множество M.

Определение 28. Пара $G(M; \times)$, M – множество, \times – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

- 1. $\forall a, b \in M : (a \times b) \in M$
- $2. \exists e \in M \ \forall a \in M : e \times a = a$
- 3. $\forall a \in M \ \exists a^{-1} \in M : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
- 4. $\forall a, b, c \in M : (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

6 Пределы

Определение 29. A называется пределом (x_n) , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |x_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 6.1.

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \to \infty} (x_n) + \lim_{n \to \infty} (y_n)$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$; $y_n \to b$. По определению $N_a(\varepsilon): \forall n > N_a(\varepsilon) |x_n - a| < \varepsilon, N_b(\varepsilon): \forall n > N_b(\varepsilon) |y_n - b| < \varepsilon$. Рассмотрим $N_c(\varepsilon): \forall n > N_c(\varepsilon) |x_n + y_n - a - b| < \varepsilon: |x_n + y_n - a - b| \le |x_n - a| + |y_n - b| \le 2\varepsilon$ при $N_c = \max(N_a(\varepsilon); N_b(\varepsilon))$, то есть $2N_c(\varepsilon)$ – это номер, с которого утверждение точно выполняется.

Теорема 6.2 (Теорема Вейерштрасса). Пусть (x_n) монотонна, тогда:

- 1. Она имеет предел в $\mathbb{\bar{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
- 2. Если она ограничена, то она имеет предел в \mathbb{R}

Доказательство. Пусть (x_n) монотонно возрастает. По определению монотонно возрастающей последовательности: $\forall n: x_{n+1} > x_n$, пусть (x_n) не ограничена, то есть $\nexists m: \forall n: x_n < m$, тогда $\sup(x_n) = +\infty$, а значит $(x_n) \to \infty$. Пусть $\exists m: \forall n: x_n \leq m$ и $m = \sup(x_n)$. Тогда $m = \lim_{n \to \infty} (x_n)$. Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично.

Теорема 6.3. Пусть (x_n) , (y_n) , (z_n) – последовательности, причем $x_n \leq y_n \leq z_n$, кроме того $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a = \lim_{n\to\infty}(z_n)$, тогда $\lim_{n\to\infty}(y_n) = a$.

Лемма 6.4 (Неравенство Бернулли).

$$(1+x)^n \ge 1 + xn, n \in \mathbb{N}, x > 0$$

Доказательство. Докажем по индукции: $(1+x)^1 \ge 1+1\cdot x$ верно, пусть $(1+x)^n \ge 1+xn$ верно, тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+xn) = 1+x+nx+x^2n > 1+(n+1)x$$

Определение 30.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Доказательство. Рассмотрим $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n$:

 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge 1+\frac{n+1}{n} > 2$ — последовательность ограничена снизу.

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим $\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$ и используем неравенство Бернулли:

$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \ge 1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n} = \frac{n^3 + 3n + 1}{n^2 + 2n}$$

То есть $\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < \frac{n^2+2n}{n^3+3n+1}$, а значит E_n монотонно возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists !$ предел E_n , а значит $\exists !$ предел e_n .

7 Тригонометрия

Определение 31. Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

Определение 32. Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

Определение 33. Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

Определение 34. Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

Утверждение 7.1.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Доказательство. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Утверждение 7.2.

$$tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 7.1 разделить на $\cos^2 \alpha$, то получим данное выражение.

Утверждение 7.3.

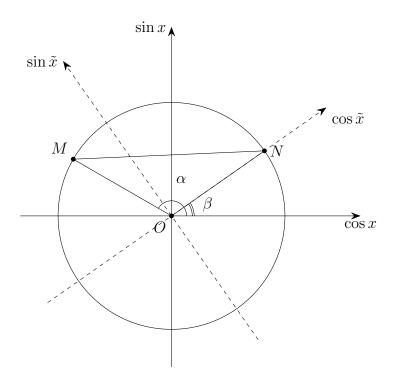
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 7.1 разделить на $\sin^2 \alpha$, то получим данное выражение.

Утверждение 7.4.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол β , тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

To есть $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$, а значит $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Утверждение 7.5.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Утверждение 7.6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

Доказательство.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

Утверждение 7.7.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Утверждение 7.8.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Утверждение 7.9.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}$$

Доказательство.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, получим:

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Утверждение 7.10.

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha \cdot tg \beta}$$

Доказательство.

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, получим:

$$\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Утверждение 7.11.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}} = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

Утверждение 7.12.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}} = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} = -\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta + 1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

Утверждение 7.13.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Утверждение 7.14.

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Доказательство.

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Утверждение 7.15.

$$tg(2\alpha) = \frac{2 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$$

Доказательство.

$$tg(2\alpha) = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg \alpha + tg \alpha}{1 - tg \alpha \cdot tg \alpha} = \frac{2 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$$

Утверждение 7.16.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

Утверждение 7.17.

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Доказательство.

$$\cos(3\alpha) =$$

$$= \cos(2\alpha + \alpha) =$$

$$= \cos(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin \alpha =$$

$$= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha =$$

$$= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (1 + 2\sin^2 \alpha) =$$

$$= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (3 - 2\cos^2 \alpha) =$$

$$= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

Утверждение 7.18.

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Доказательство.

$$\sin(3\alpha) =$$

$$= \sin(2\alpha + \alpha) =$$

$$= \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha =$$

$$= 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cdot (2\cos^2 \alpha + 1) - 2\sin^3 \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cdot (3 - 2\sin^2 \alpha) - 2\sin^3 \alpha =$$

$$= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

Утверждение 7.19.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$cos(2\alpha) = 2cos^2 \alpha - 1 \Longleftrightarrow cos^2 \alpha = \frac{1 + cos(2\alpha)}{2}$$

Утверждение 7.20.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Утверждение 7.21.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\cos\alpha + \cos\beta = \\ &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \\ &+ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Утверждение 7.22.

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\cos\alpha + \cos\beta = \\ &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \\ &- \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Утверждение 7.23.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) +$$

$$+ \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$= 2\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Утверждение 7.24.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Доказательство.

$$\sin \alpha - \sin \beta =$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) +$$

$$- \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Утверждение 7.25.

$$tg \alpha + tg \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$tg \alpha + tg \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Утверждение 7.26.

$$tg \alpha - tg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$tg \alpha - tg \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Утверждение 7.27.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Утверждение 7.28.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Утверждение 7.29.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{2},\,\tilde{\beta}=\frac{\alpha-\beta}{2},$ тогда из утверждения 7.21:

$$2\cos\tilde{\alpha}\cdot\cos\tilde{\beta} = \cos\left(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\right) + \cos\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right) \Longleftrightarrow \cos\tilde{\alpha}\cdot\cos\tilde{\beta} = \frac{\cos\left(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\right) + \cos\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)}{2}$$

Утверждение 7.30.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{2},\,\tilde{\beta}=\frac{\alpha-\beta}{2},\,$ тогда из утверждения 7.22:

$$-2\sin\tilde{\alpha}\cdot\sin\tilde{\beta} = \cos\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) - \cos\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right) \Longleftrightarrow \sin\tilde{\alpha}\cdot\sin\tilde{\beta} = -\frac{\cos\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right) - \cos\left(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right)}{2}$$

Утверждение 7.31.

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.23:

$$2\sin\tilde{\alpha}\cdot\sin\tilde{\beta} = \sin\Bigl(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\Bigr) + \sin\Bigl(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\Bigr) \Longleftrightarrow \sin\tilde{\alpha}\cdot\cos\tilde{\beta} = \frac{\sin\Bigl(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\Bigr) + \sin\Bigl(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\Bigr)}{2}$$

Утверждение 7.32.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Доказательство.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha\right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Утверждение 7.33.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Утверждение 7.34.

$$tg \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

8 Комплексные числа

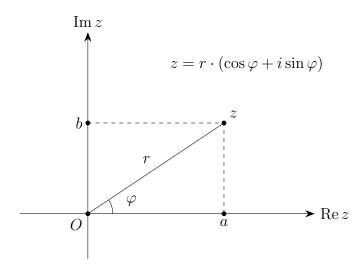
Определение 35. Мнимой единицей называется такое число i, что $i^2 = -1$.

Определение 36. Комплексным числом называется выражение вида z=a+bi, где $a={\rm Re}\,z$ – действительная часть, а $b={\rm Im}\,z$ – мнимая.

Определение 37. Число z_1 называется сопряженным к числу z, если $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z_1 = -\operatorname{Im} z$. Обозначение: $z_1 = \bar{z}$.

Определение 38. Модулем $z\in\mathbb{C}$ называется $|z|=\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}.$

Определение 39. Комплексная плоскость:



Теорема 8.1 (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Доказательство. Докажем по индукции. $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ верно. Пусть $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ верно, докажем, что $z^{n+1} = r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi))$ верно.

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi) \cdot \cos\varphi - \sin(n\varphi) \cdot \sin\varphi) + i(\cos(n\varphi) \cdot \sin\varphi + \sin(n\varphi) \cdot \cos\varphi)) =$$

$$= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi))$$

Определение 40. Корнем из комплексного числа называется:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), \ k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

8.1 Матрицы поворота

Определение 41. Матрицей поворота на угол α называется:

$$R_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot E + \sin \alpha \cdot I$$

Утверждение 8.2.

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff z = re^{i\varphi}$$

Доказательство.

$$e^{x} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i}}{i!}$$

$$\cos x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \cdot (-1)^{i}$$

$$\sin x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot (-1)^{i}$$

$$e^{ix} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!} \cdot i^{k} = \cos x + i \sin x$$

9 Логарифмы

Определение 42. Пусть a>0; $a\neq 1,\ b>0$. Логарифмом $\log_a b$ числа b по основанию a называется такое число c, что $a^c=b$. Из этого, а также свойств степеней следует:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \qquad \log_a a = 1 \qquad \qquad a^{\log_a b} = b$$

Утверждение 9.1.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a (bc)}$$

Утверждение 9.2.

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \frac{b}{c} = a^{\log_a \left(\frac{b}{c}\right)}$$

Утверждение 9.3.

$$\log_a(b^k) = k \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$a^{\log_a(b^k)} = b^k = (a^{\log_a b})^k = a^{k \cdot \log_a b}$$

Утверждение 9.4.

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$(a^k)^{\log_{a^k} b} = a^{k \cdot \log_{a^k} b} = b = a^{\log_a b}$$

Следствие 9.4.1.

$$\log_{a^k} \left(b^k \right) = \log_a b$$

Утверждение 9.5.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \ \log_c a \neq 0$$

Доказательство.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Longleftrightarrow \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$c^{\log_c b} = b = a^{\log_a b} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = c^{\log_a b \cdot \log_c a}$$

Утверждение 9.6.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\frac{1}{\log_b a}} = (b^{\log_b a})^{\frac{1}{\log_b a}} = b = a^{\log_a b}$$

Утверждение 9.7.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = (a^{\log_a c})^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$$

Определение 43. Натуральным логарифмом $\ln x$ называется логарифм с основанием e. **Определение 44.** Десятичным логарифмом $\lg x$ называется логарифм с основанием 10.