

# Алгебра

## Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Решение уравнений и неравенств.</b>     | <b>2</b>  |
| 1.1      | Иррациональные уравнения . . . . .         | 2         |
| 1.2      | Иррациональные неравенства . . . . .       | 2         |
| 1.3      | Неравенства с модулем . . . . .            | 2         |
| <b>2</b> | <b>Многочлены</b>                          | <b>2</b>  |
| <b>3</b> | <b>Множества</b>                           | <b>4</b>  |
| <b>4</b> | <b>Числовые последовательности</b>         | <b>4</b>  |
| 4.1      | Аксиоматика действительных чисел . . . . . | 4         |
| 4.2      | Прогрессии . . . . .                       | 5         |
| <b>5</b> | <b>Эквивалентность и группы</b>            | <b>6</b>  |
| <b>6</b> | <b>Пределы</b>                             | <b>7</b>  |
| <b>7</b> | <b>Тригонометрия</b>                       | <b>8</b>  |
| <b>8</b> | <b>Комплексные числа</b>                   | <b>16</b> |
| 8.1      | Матрицы поворота . . . . .                 | 17        |

# 1 Решение уравнений и неравенств.

## 1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

## 1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

## 1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a, \quad a > 0 \iff \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad |f(x)| > a \iff \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq |g(x)| \iff (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0$$

$$|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$|f(x)| + |g(x)| \leq |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) \geq 0$$

# 2 Многочлены

**Определение 1.** Многочленом от переменной  $x$  над  $K$  называется выражение вида:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_k \in K$  – коэффициент многочлена,  $a_n \neq 0$ .

**Определение 2.** Наибольшее  $k$  такое, что  $a_k \neq 0$ , называется степенью многочлена  $f$ :

$$k = \deg f$$

$a_0$  – свободный член

$a_n x^n$  – старший член

$a_n$  – старший коэффициент

**Определение 3.** Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях  $x$  равны.

**Определение 4.**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Суммой многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + d_1x + d_0, \text{ где } d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\deg f(x) \neq 0$ ,  $\deg g(x) \neq 0$ , тогда:

1.  $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
2.  $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3.  $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

*Доказательство.*

1. Пусть  $\deg f = \deg g = n$

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Если  $k > n$ , то  $a_k = 0$ ,  $b_k = 0$ , то есть  $(a_k + b_k) = 0$

Пусть  $\deg f = n$ ,  $\deg g = m$ ,  $m < n$

Если  $k > n$ , то  $a_k + b_k = 0$ , так как  $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{n-1} = b_n = 0$

Тогда  $a_n + b_n = a_n \neq 0$

$$2. f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{степень} < n \\ \text{0}}}$$

■

**Определение 5.** Многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$ , если существует такой многочлен  $h(x)$ , что  $h(x) \cdot g(x) = f(x)$ .

**Утверждение 2.2.** Всякий многочлен  $f(x) \neq 0$  делится на самого себя.

**Утверждение 2.3.** Если  $f(x)$  делится на  $g(x)$ , а  $g(x)$  делится на  $f(x)$ , то  $f(x) = c \cdot g(x)$ ,  $c \in K$ .

**Определение 6.** Число  $x_0$  является корнем  $f(x)$ , если  $f(x_0) = 0$ .

**Теорема 2.4** (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена  $P(x)$  на двучлен  $(x - a)$  равен  $P(a)$ .

*Доказательство.*

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot q(a) + r = r$$

■

**Следствие 2.4.1.** Число  $a$  является корнем многочлена  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится на  $(x - a)$ .

### 3 Множества

**Определение 7.** Множества равноможны, если между ними существует биекция.

**Определение 8.** Множества  $A$  и  $B$  называются равными, если  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq A$ .

**Определение 9.** Множества, равноможные  $\mathbb{N}$ , называются счетными.

**Определение 10.** Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \times B = \{x \mid x = (a, b), a \in A, b \in B\}$ .

**Определение 11.** Число  $a$  называется числом кратности  $k$  многочлена  $f(x)$ , если  $f(x)$  делится на  $(x - a)^k$ , но не делится на  $(x - a)^{k+1}$ .

### 4 Числовые последовательности

**Определение 12.** Бесконечной числовой последовательностью  $(a_n)$  называется отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 13.** Конечной числовой последовательностью  $(a_n)$  называется отображение  $a : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 14.** Множество  $M$ ,  $M \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным сверху, если  $\exists c : \forall x \in M : x \leq c$ .

**Определение 15.** Множество  $M$ ,  $M \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным снизу, если  $\exists c : \forall x \in M : x \geq c$ .

**Определение 16.** Множество  $M$ ,  $M \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

**Определение 17.** Последовательность  $a_n$  называется ограниченной, если  $a(\mathbb{N})$  ограничено.

**Определение 18.** Последовательность  $a_n$  называется монотонно возрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ .

**Теорема 4.1.** Пусть все элементы последовательности  $a_n$  положительны. Последовательность  $a_n$  возрастает тогда и только тогда, когда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ .

#### 4.1 Аксиоматика действительных чисел

**Определение 19.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $M$  ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества  $M$  называется точной верхней гранью:

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \leq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > a - \varepsilon$$

**Определение 20.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $M$  ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества  $M$  называется точной нижней гранью:

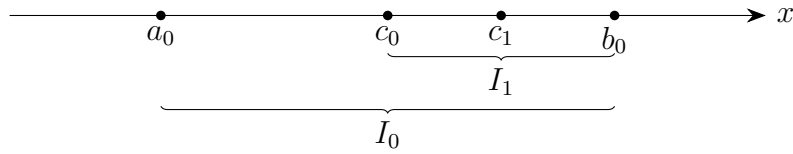
$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \geq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < a + \varepsilon$$

**Теорема 4.2.** Пусть  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a(\mathbb{N})$  ограничена. Тогда:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : a^{-1}((x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)) \text{ бесконечно}$$

$\parallel$   
 $U_\varepsilon(x_0)$

*Доказательство.* Если  $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$  бесконечно, то доказано. Если  $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$  конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой  $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$  и  $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$ , а также середину  $a_0b_0$ , то есть  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Разделим один из получившихся отрезков (отметим  $c_0$  и  $b_0$ , как  $a_1$  и  $b_1$  соответственно) пополам, получив  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$

1.  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
2.  $a(\mathbb{N})$  ограничена сверху  $b_i$  элементом
3.  $a(\mathbb{N})$  имеет точную верхнюю грань  $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$   
и точную нижнюю грань  $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4.  $M_1 \leq M_2$
5.  $[M_1; M_2] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n]$
6. Пусть  $M_1 < M_2$ , тогда  $\exists n : b_n - a_n < M_2 - M_1$ .  
Получаем противоречие, значит  $M_1 = M_2 = M$ .
7. Возьмем такое  $n$ , что  $b_n - a_n < \varepsilon$ . Тогда  $[a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(M)$ .  
То есть  $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$  бесконечно.

■

**Определение 21.** Число  $x$  называется частичным пределом последовательности  $a(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(x))$  бесконечно.

## 4.2 Прогрессии

**Определение 22.** Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

**Определение 23.** Разностью арифметической прогрессии называется разность  $a_{n+1}$  и  $a_n$ .

**Утверждение 4.3.** Пусть  $(a_n)$  – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

**Утверждение 4.4.** Пусть  $(a_n)$  – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k < n : a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

**Теорема 4.5.** Сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left( a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) = \\ &= n \cdot a_1 + d \cdot \left( \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) = \\ &= n \cdot \left( a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

■

**Определение 24.** Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad b_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

**Утверждение 4.6.** Пусть  $(b_n)$  – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 : \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

*Доказательство.*

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

**Теорема 4.7.** Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \\ &= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\ &= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

■

## 5 Эквивалентность и группы

**Определение 25.** Пусть  $M$  – множество, тогда множество  $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$  упорядоченных пар элементов  $M$  называется бинарным отношением на  $M$ .

**Определение 26.** Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность  $a \sim a$
2. Симметричность  $a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивность  $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$

**Теорема 5.1** (Малая теорема Ферма).  $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P} : n^{p-1} \equiv_p 1$

**Определение 27.** Бинарной операцией  $\times$  на множестве  $M$  называется отображение из множества упорядоченных пар  $M^2 = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$  в множество  $M$ .

**Определение 28.** Пара  $G(M; \times)$ ,  $M$  – множество,  $\times$  – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1.  $\forall a, b \in M : (a \times b) \in M$
2.  $\exists e \in M \forall a \in M : e \times a = a$
3.  $\forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4.  $\forall a, b, c \in M : (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

## 6 Пределы

**Определение 29.**  $A$  называется пределом  $(x_n)$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon$$

**Теорема 6.1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$$

*Доказательство.* Пусть  $x_n \rightarrow a$ ;  $y_n \rightarrow b$ . По определению  $N_a(\varepsilon) : \forall n > N_a(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon$ ,  $N_b(\varepsilon) : \forall n > N_b(\varepsilon) \quad |y_n - b| < \varepsilon$ . Рассмотрим  $N_c(\varepsilon) : \forall n > N_c(\varepsilon) \quad |x_n + y_n - a - b| < \varepsilon : |x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq 2\varepsilon$  при  $N_c = \max(N_a(\varepsilon); N_b(\varepsilon))$ , то есть  $2N_c(\varepsilon)$  – это номер, с которого утверждение точно выполняется. ■

**Теорема 6.2** (Теорема Вейерштрасса). Пусть  $(x_n)$  монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет предел в  $\mathbb{R}$

*Доказательство.* Пусть  $(x_n)$  монотонно возрастает. По определению монотонно возрастающей последовательности:  $\forall n : x_{n+1} > x_n$ , пусть  $(x_n)$  не ограничена, то есть  $\nexists m : \forall n \quad x_n < m$ , тогда  $\sup(x_n) = +\infty$ , а значит  $(x_n) \rightarrow \infty$ . Пусть  $\exists m : \forall n \quad x_n \leq m$  и  $m = \sup(x_n)$ . Тогда  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ . Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ■

**Теорема 6.3.** Пусть  $(x_n), (y_n), (z_n)$  – последовательности, причем  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , кроме того  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n)$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$ .

**Лемма 6.4** (Неравенство Бернулли).

$$(1 + x)^n \geq 1 + xn, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0$$

*Доказательство.* Докажем по индукции:  $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$  верно, пусть  $(1 + x)^n \geq 1 + xn$  верно, тогда:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + xn) = 1 + x + nx + x^2n > 1 + (n + 1)x$$

**Определение 30.**

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n$ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} > 2 - \text{последовательность ограничена снизу.}$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим  $\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$  и используем неравенство Бернулли:

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+3n+1}{n^2+2n}$$

То есть  $\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < \frac{n^2+2n}{n^3+3n+1}$ , а значит  $E_n$  монотонно возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса  $\exists!$  предел  $E_n$ , а значит  $\exists!$  предел  $e_n$ . ■

## 7 Тригонометрия

**Определение 31.** Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

**Определение 32.** Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

**Определение 33.** Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

**Определение 34.** Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

**Утверждение 7.1.**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

*Доказательство.* По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

**Утверждение 7.2.**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

*Доказательство.* Если выражение из утверждения 7.1 разделить на  $\cos^2 \alpha$ , то получим данное выражение. ■



**Утверждение 7.3.**

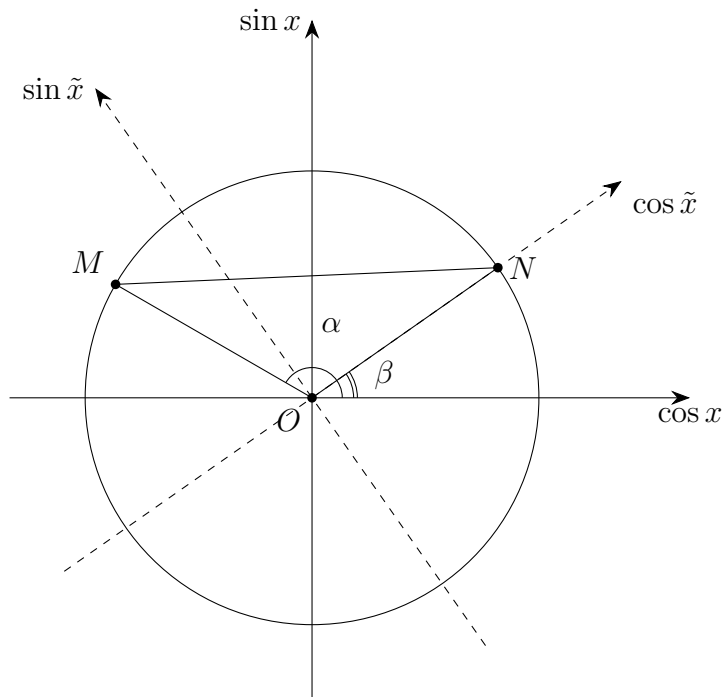
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

*Доказательство.* Если выражение из утверждения 7.1 разделить на  $\sin^2 \alpha$ , то получим данное выражение. ■

**Утверждение 7.4.**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

*Доказательство.*



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол  $\beta$ , тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

То есть  $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$ , а значит  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ . ■

**Утверждение 7.5.**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

*Доказательство.*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Утверждение 7.6.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

*Доказательство.*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

■

**Утверждение 7.7.**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

*Доказательство.*

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

**Утверждение 7.8.**

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

*Доказательство.*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

**Утверждение 7.9.**

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на  $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ , получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

**Утверждение 7.10.**

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на  $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ , получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

**Утверждение 7.11.**

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на  $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ , получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

**Утверждение 7.12.**

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на  $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ , получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

■

**Утверждение 7.13.**

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

*Доказательство.*

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

■

**Утверждение 7.14.**

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

*Доказательство.*

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

■

**Утверждение 7.15.**

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

■

**Утверждение 7.16.**

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

**Утверждение 7.17.**

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \\ &= \cos(2\alpha + \alpha) = \\ &= \cos(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (1 + 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (3 - 2 \cos^2 \alpha) = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

■

**Утверждение 7.18.**

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \\ &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha + 1) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (3 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

■

**Утверждение 7.19.**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

*Доказательство.*

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \iff \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

■

**Утверждение 7.20.**

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

*Доказательство.*

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

■

**Утверждение 7.21.**

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &+ \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

**Утверждение 7.22.**

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \\ &- \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

**Утверждение 7.23.**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= \\&= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&+ \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

**Утверждение 7.24.**

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \sin \beta &= \\&= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&- \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

**Утверждение 7.25.**

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

**Утверждение 7.26.**

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

**Утверждение 7.27.**

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

**Утверждение 7.28.**

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

**Утверждение 7.29.**

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , тогда из утверждения 7.21:

$$2 \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

**Утверждение 7.30.**

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , тогда из утверждения 7.22:

$$-2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = -\frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

**Утверждение 7.31.**

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , тогда из утверждения 7.23:

$$2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

**Утверждение 7.32.**

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

*Доказательство.*

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

■

**Утверждение 7.33.**

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

**Утверждение 7.34.**

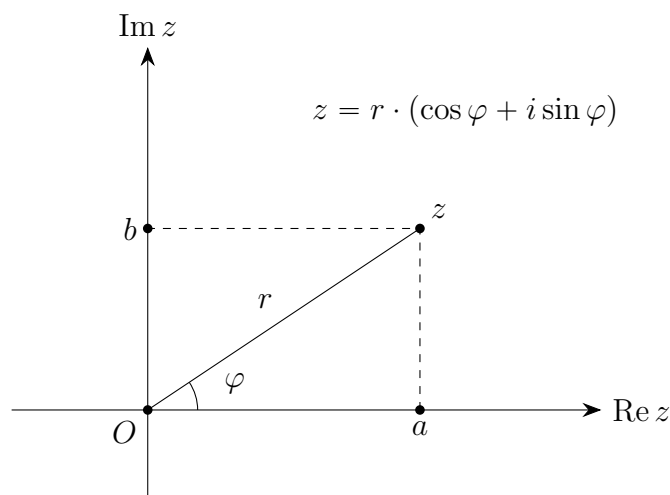
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

## 8 Комплексные числа

**Определение 35.** Мнимой единицей называется такое число  $i$ , что  $i^2 = -1$ .**Определение 36.** Комплексным числом называется выражение вида  $z = a + bi$ .**Определение 37.** Модулем комплексного числа называется выражение вида  $|z| = r = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ,  $\bar{z} = a - bi$ , то есть  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .**Определение 38.** Комплексная плоскость:



**Теорема 8.1** (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

*Доказательство.* Докажем по индукции.  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  верно. Пусть  $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$  верно, докажем, что  $z^{n+1} = r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi))$  верно.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi) \cdot \cos \varphi - \sin(n\varphi) \cdot \sin \varphi) + i(\cos(n\varphi) \cdot \sin \varphi + \sin(n\varphi) \cdot \cos \varphi)) = \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)) \end{aligned}$$

■

## 8.1 Матрицы поворота

**Определение 39.** Матрицей поворота на угол  $\alpha$  называется:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot E + \sin \alpha \cdot I$$

**Утверждение 8.2.**

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff z = r e^{i\varphi}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \\ \cos x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} \cdot (-1)^i \\ \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot (-1)^i \\ e^{ix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot i^k = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

■