# Геометрия

## Содержание

# 1 Бинарное отношение. Векторы.

**Определение 1.** Пусть множество $a, b \in M$. Множество $R \subset \{(a,b)|a,b \in M\}$ упорядоченных пар. Если $(\widehat{a}, \widehat{b}) \subset R$, пишут $\widehat{a} \underset{R}{\sim} \widehat{b}$.

**Определение 2.** Отношение $\sim$ на $M$ называется:

1. Рефлексивным: $\forall a \in M : a \sim a$
2. Симметричным: $\forall a, b \in M : a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$
3. Транзитивным: $\forall a, b \in M : a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$

**Определение 3.** Отношение $\sim$ на $M$ называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Как только на $M$ задано отношение эквивалентности, появляется $M/\sim$ классов эквивалентности.

**Определение 4.** Вектор – класс эквивалентности параллельных переносов.

Свойства сложения векторов:

- Коммутативно: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Ассоциативно: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

**Определение 5.** $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, если $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\vec{a} = \vec{b}$.

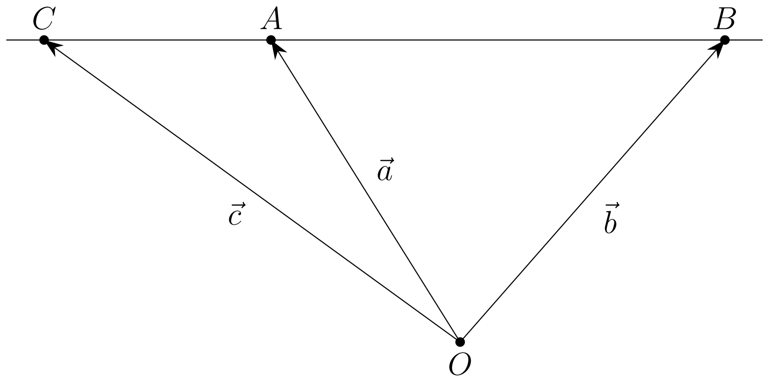
**Определение 6.** Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов $(\vec{a}; \vec{b})$.

**Теорема 1.1.** $\forall \vec{v} \in V_{\mathbb{R}^2} \exists! (x; y); x, y \in \mathbb{R} : \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $(\vec{a}; \vec{b})$ – базис $V_{\mathbb{R}^2}$. То есть $(x; y)$ – координаты $\vec{v}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$.

**Определение 7.** Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}\,||\,\vec{b}|}\right) \Longleftrightarrow \cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}\,||\,\vec{b}|}$, где $|\vec{a}| = \sqrt{(a, a)}$.

**Теорема 1.2.** $C \in AB \Longleftrightarrow \forall O : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

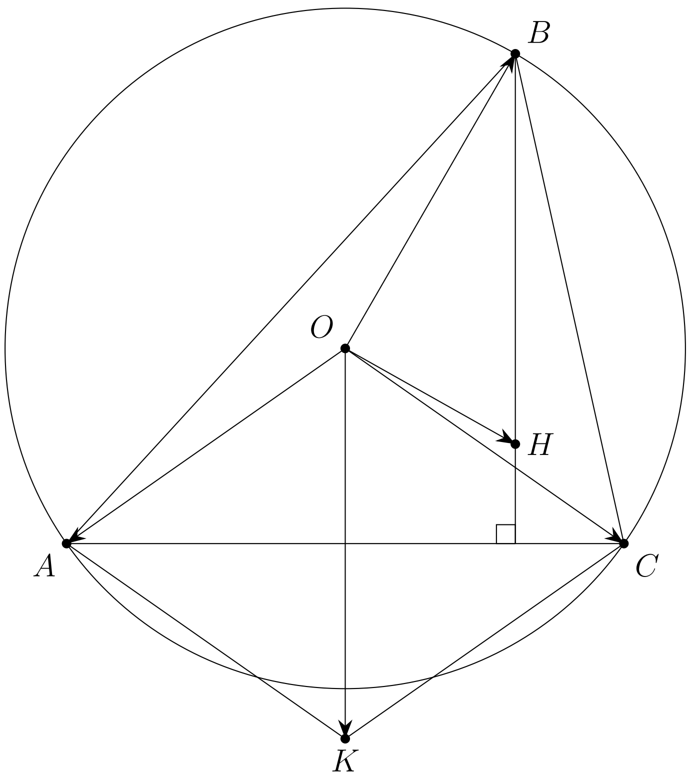
*Доказательство.*



Обозначим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Тогда $\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$. Тогда обозначим $\dfrac{|\ \vec{c}-\vec{b}\ |}{|\ \vec{a}-\vec{b}\ |}=x$, откуда $\vec{c}-\vec{b}=x(\vec{a}-\vec{b})$, то есть $\vec{c}=x\vec{a}-(1-x)\vec{b}$. ■

**Теорема 1.3.** Пусть $O$ и $H$ – центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

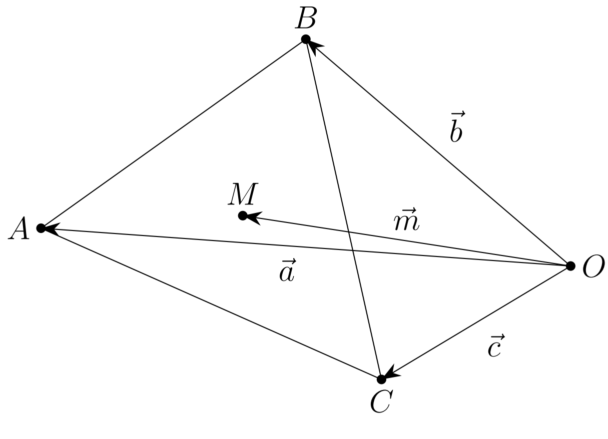
*Доказательство.*




Рассмотрим сумму $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}$, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$, как радиусы описанной окружности, следовательно, $AOCK$ – ромб, а значит $AC\perp OK$ как диагонали. Тогда $OK \parallel BH$, а значит точка $M$ вектора $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OB}$ лежит на $BH$, но аналогично эта точка лежит на всех высотах $\triangle ABC$, а значит является ортоцентром. ■

**Теорема 1.4.** Пусть $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ – базис в $\triangle ABC$, а $M$ – его центроид. Тогда $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

*Доказательство.*



Обозначим $\overrightarrow{OA}$ как $\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}$ как $\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}$ как $\vec{c}$, $\overrightarrow{OM}$ как $\vec{m}$. Представим $\overrightarrow{OM}$ в виде суммы векторов:
$\vec{b}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\right)=\vec{b}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$ ■

**Теорема 1.5.** Пусть $O$ – центр описанной окружности, $H$ – ортоцентр, а $M$ – центроид $\triangle ABC$ соответственно. Тогда $O$, $H$ и $M$ – коллинеарны.

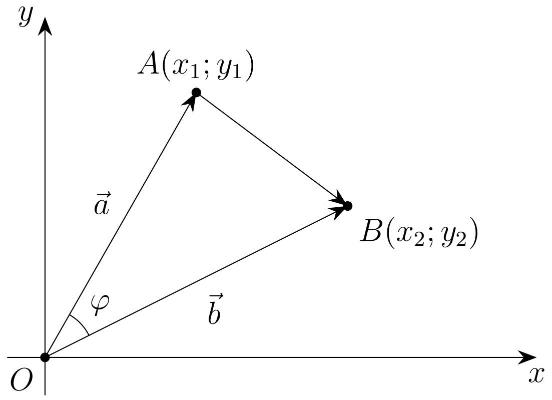
*Доказательство.* Из предыдущих двух теорем нам известно, что $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, а также что $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, из чего следует, что $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OM}$. ■

**Определение 8.** Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**Теорема 1.6.** В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1;y_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2)$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$$

*Доказательство.*




По теореме косинусов $AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\varphi$, но по теореме Пифагора $OA^2=(x_1)^2+(y_1)^2$, $OB^2=(x_2)^2+(y_2)^2$, $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$. Тогда если подставить в первое выражение и упростить получим $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=OA\cdot OB\cdot\cos\varphi$. ■

# 2 Метод координат

**Определение 9.** Общим уравнением прямой называется уравнение вида $ax+by+c=0$, в котором $a$ и $b$ не равны нулю:

$$\begin{aligned}
&l_1: a_1x+b_1y+c_1=0\\
&l_2: a_2x+b_2y+c_2=0\\
&l_1\parallel l_2 \overset{b_1\cdot b_2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{-a_1}{b_1}=\frac{-a_2}{b_2}\Longleftrightarrow a_1b_2=a_2b_1\\
&l_1\perp l_2 \overset{b_1\cdot b_2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{-a_1}{b_1}\cdot\frac{-a_2}{b_2}=-1\Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0
\end{aligned}$$

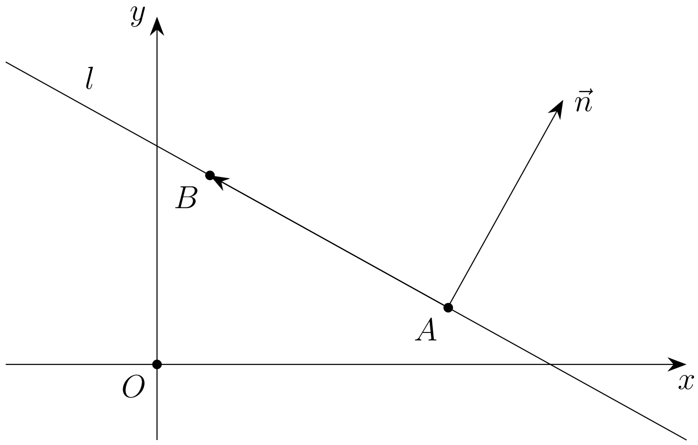
## 2.1 Нормаль и направляющий вектор

**Определение 10.** Вектор $\vec{v}$ называется направляющим для прямой $l$, если его начало и конец лежат на $l$.

**Определение 11.** Любой вектор $\vec{n_l} : \vec{n_l} \perp l$, называется ее нормалью.

**Теорема 2.1.** Вектор $\vec{n}(a;b)$ является вектором нормали к прямой $l$, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

*Доказательство.*

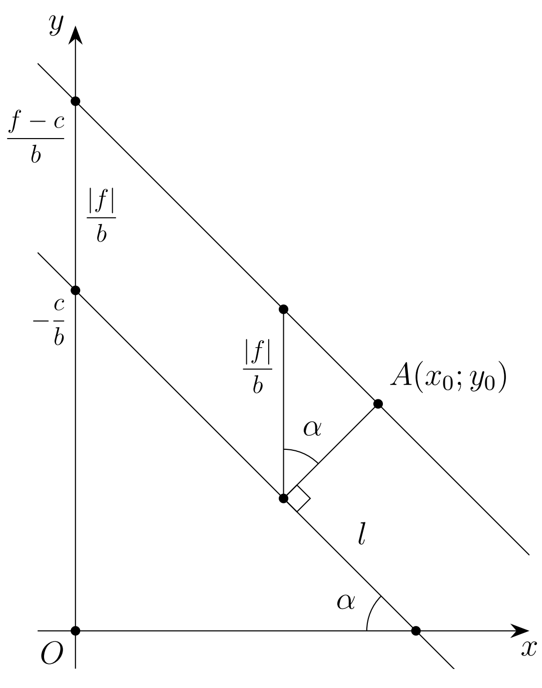



Возьмем произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. При этом $ax_1 + by_1 + c = ax_2 + by_2 + c = 0$, следовательно, если вычесть одно из другого, получим $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. Рассмотрим $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$. ■

## 2.2 Расстояние от точки до прямой

**Теорема 2.2.** $\rho(A; l) : A(x_0; y_0),\ l : ax + by + c = 0 : \rho(A; l) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

*Доказательство.*



Пусть $A(x_0; y_0)$, тогда $ax_0 + by_0 + c = f \Longrightarrow y_0 = \dfrac{f-c}{b} - \dfrac{ax_0}{b}$. Проведем через точку $A$ перпендикуляр к $l$, а также прямую, параллельную $l$. Отметим найденные ранее координаты на $OY$, а также найдем расстояние между ними. Пусть угол наклона $l$ относительно $OX$ равен $\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{a}{b}$. Из основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{\frac{a^2}{b^2}+1}$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тогда, чтобы найти $\rho(A; l)$, умножим косинус на гипотенузу и получим:

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{|f|}{b} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

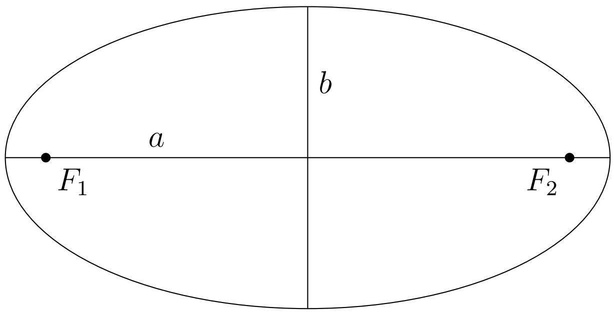
■

# 3 Кривые второго порядка

## 3.1 Свойства кривых второго порядка

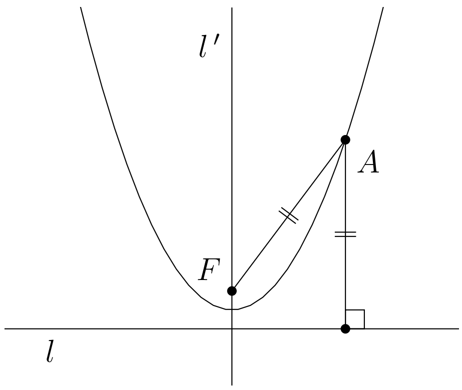
**Определение 12.** Углом между кривыми называется угол между их касательными в данной точке.

**Определение 13.** Эллипсом называется ГМТ, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называющихся фокусами, постоянна.



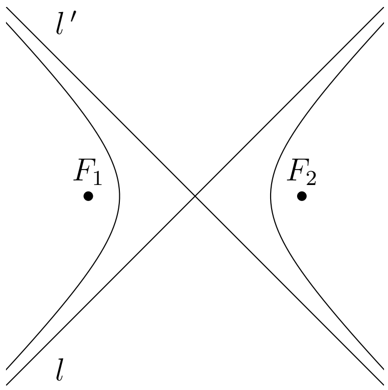

$F_1$, $F_2$ – фокусы эллипса
$a$ – большая ось
$b$ – малая ось

**Определение 14.** Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фиксированной точки $F$, называемой ее фокусом, и прямой $l$, называемой директрисой данной параболы.




$l'$ – ось параболы
$F$ – фокус параболы
$l$ – директриса параболы

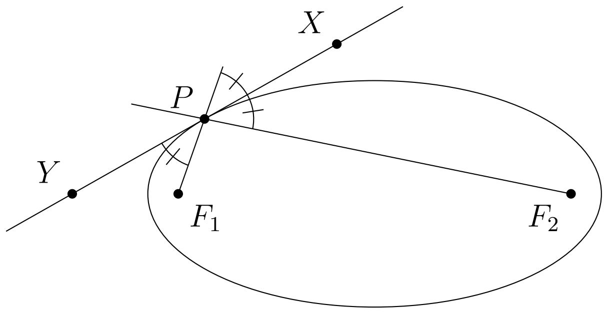
**Определение 15.** Гиперболой называется ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянен.




$F_1$, $F_2$ – фокусы гиперболы
$l$, $l'$ – асимптоты гиперболы

**Теорема 3.1** (Оптическое свойство эллипса)**.** Пусть $l$ касается эллипса с фокусами $F_1$ и $F_2$ в точке $P$, тогда $l$ – биссектриса угла, смежного $\angle F_1PF_2$.

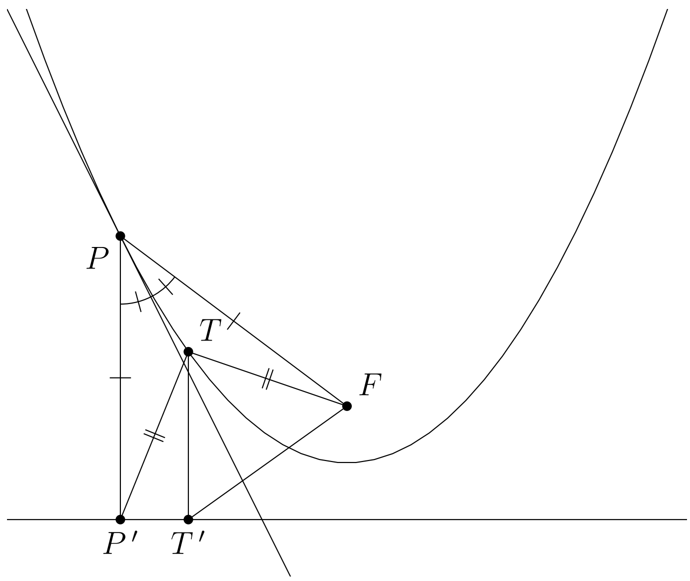
*Доказательство.*




Пусть $X$, $Y \in l$, тогда по определению касательной $XF_1+XF_2 \geq PF_1+PF_2$. Следовательно, $P$ – точка на $l$, сумма расстояний от которой до фокусов минимальна, откуда $\angle F_2PX = \angle F_1PY$. ∎

**Теорема 3.2** (Оптическое свойство параболы)**.** Пусть $l$ касается параболы в точке $P$, $P'$ – проекция точки $P$ на директрису. Тогда $l$ – биссектриса $\angle FPP'$.

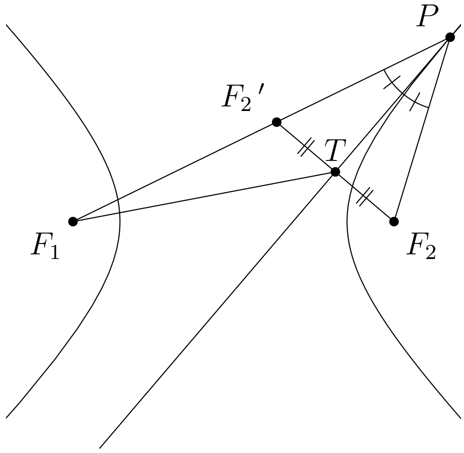
*Доказательство.*




Пусть биссектриса не касается параболы, то есть пересекает ее в точке $T$. По определению параболы $PP' = PF \implies \triangle P'PT = \triangle PFT$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $P'T = TF$, но тогда если $T'$ – проекция $T$ на директрису, то $TT' = TF$, то есть $TP' = TT'$, противоречие. ∎

**Теорема 3.3** (Оптическое свойство гиперболы)**.** Пусть $l$ касается гиперболы с фокусами $F_1$ и $F_2$ в точке $P$, тогда $l$ – биссектриса $\angle F_1F_2P$.

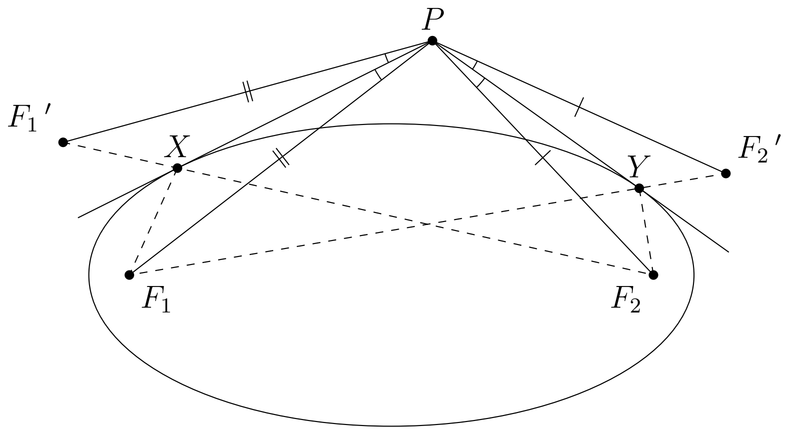
*Доказательство.*




Пусть биссектриса не касается гиперболы, то есть пересекает ее в точке $T$. Обозначим через ${F_2}'$ точку, симметричную $F_2$ относительно $l$. Тогда $F_2T = {F_2}'T$, а также $F_2P = {F_2}'P$. Кроме того, $F_1$, ${F_2}'$ и $P$ коллинеарны по определению биссектрисы. По определению гиперболы $F_1P - F_2P = F_1T - F_2T$. Тогда получаем, что $F_1{F_2}' = F_1P - {F_2}'P = F_1T - {F_2}'T$, но по неравенству треугольника $F_1{F_2}' > F_1T - {F_2}'T$, противоречие. ■

**Теорема 3.4** (Изогональное свойство эллипса)**.** Пусть $PX$ и $PY$ – касательные к эллипсу с фокусами $F_1$ и $F_2$. Тогда $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.

*Доказательство.*



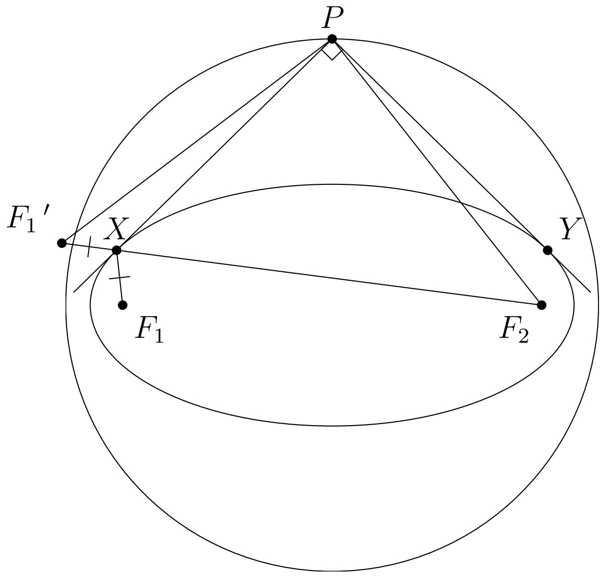

Пусть ${F_1}'$ и ${F_2}'$ – точки, симметричные $F_1$ и $F_2$ относительно $PX$ и $PY$ соответственно. Тогда $PF_1 = P{F_1}'$ и $PF_2 = P{F_2}'$, при этом $F_1$, $Y$ и ${F_2}'$, а также $F_2$, $X$ и ${F_1}'$ коллинеарны по оптическому свойству эллипса. Получаем, что $F_2{F_1}' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_1{F_2}'$. То есть $\triangle F_1P{F_2}' = \triangle F_2P{F_1}'$ по трем сторонам. Тогда $\angle F_1PF_2 + 2\angle F_1PX = \angle F_2P{F_1}' = \angle F_1P{F_2}' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY \Longrightarrow \angle F_1PX = \angle F_2PY$. ■

**Теорема 3.5.** В обозначениях теоремы 3.4 прямая $F_1P$ суть биссектриса $\angle XF_1Y$.

*Доказательство.* В силу оптических свойств $\angle P{F_1}'X = \angle PF_1X$, при этом из теоремы 3.4 известно, что $\angle P{F_1}'F_2 = \angle PF_1{F_2}'$, так как $\triangle F_1P{F_2}' = \triangle {F_1}'PF_2$. Тогда $\angle PF_1{F_2}' = \angle P{F_1}'X = \angle PF_1X$. ■

**Теорема 3.6.** Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом, является окружность с центром в центре эллипса.

*Доказательство.*

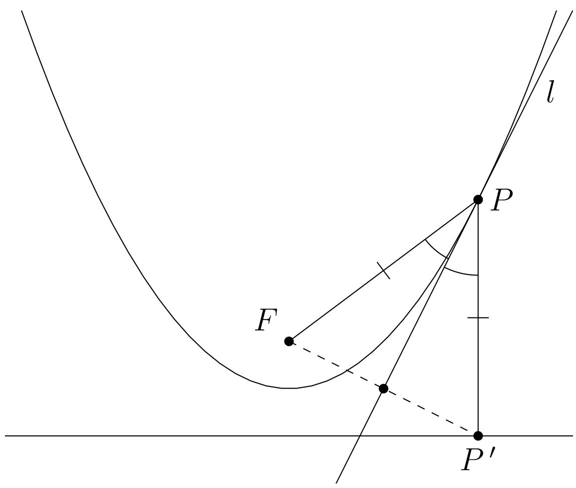



Пусть $F_1{}'$ – образ $F_1$ относительно прямой $PX$. Из теоремы 3.4 следует, что $\angle F_1{}'PF_2 = \angle XPY = 90°$. По теореме Пифагора $F_1{}'P^2 + F_2P^2 = F_1{}'F_2{}^2$, то есть получаем уравнение окружности с центром в середине $F_1F_2$. ■

## 3.2 Свойства параболы

**Лемма 3.7.** Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы.

*Доказательство.*

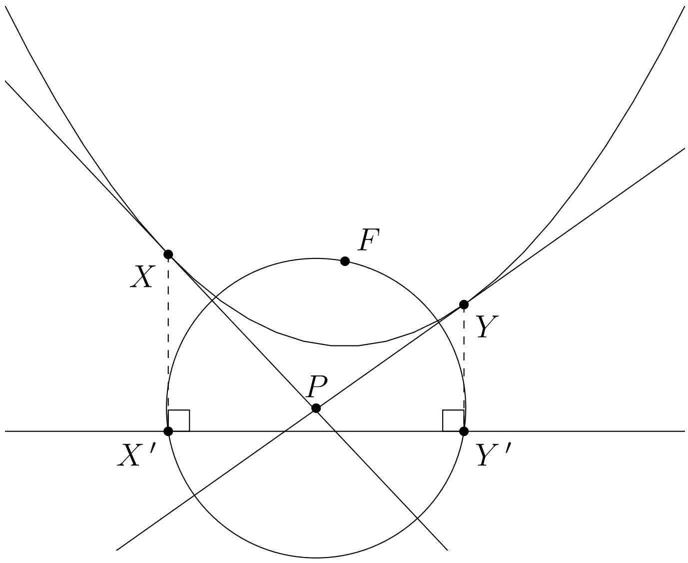



Пусть прямая $l$ касается параболы в точке $P$, $P'$ – проекция $P$ на директрису параболы. $l$ – биссектриса $\angle FPP'$, но $\triangle FPP'$ – равнобедренный по определению параболы, а значит $l$ в нем медиана и высота, откуда $P'$ – образ $F$. ■

**Следствие 3.7.1.** Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.

**Лемма 3.8.** Пусть $PX$ и $PY$ – касательные к параболе. Тогда $P$ является центром описанной около $\triangle FX'Y'$ окружности, где $X'$ и $Y'$ – проекции $X$ и $Y$ на директрису параболы соответственно.

*Доказательство.*

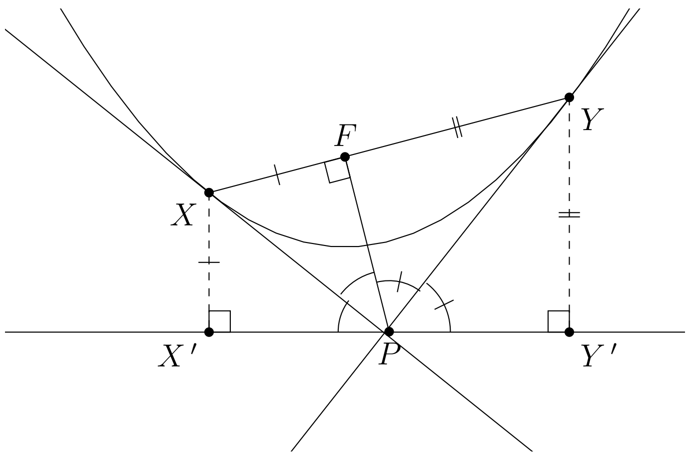



Из леммы 3.8 следует, что $PX$ и $PY$ являются серединными перпендикулярами к $FX'$ и $FY'$ соответственно. Тогда их точка пересечения будет являться центром окружности, описанной около $\triangle FX'Y'$. ■

**Следствие 3.8.1.** Если $PX$ и $PY$ – касательные к параболе, то $P'$ будет серединой $X'Y'$, где $P'$, $X'$ и $Y'$ – проекции $P$, $X$ и $Y$ на директрису параболы соответственно.

**Теорема 3.9.** Множество таких точек $P$, из которых парабола видна под прямым углом, суть директриса этой параболы. Кроме того, если $PX$ и $PY$ – касательные к этой параболе, то $XY$ содержит $F$ и $PF$ – высота $\triangle PXY$.

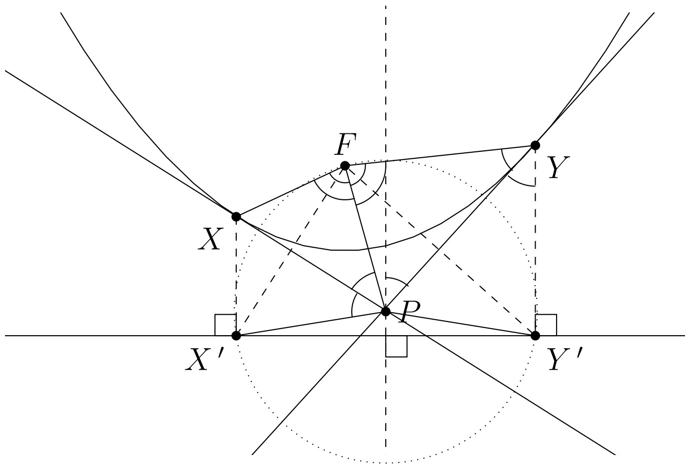
*Доказательство.*




Пусть $P$ лежит на директрисе, тогда если $X'$ и $Y'$ – проекции $X$ и $Y$ на директрису соответственно, то $\triangle PXX' = \triangle PXF$, а значит $\angle PFX = \angle PX'X = 90°$. Аналогично $\angle PFY = 90°$. То есть $X$, $F$ и $Y$ коллинеарны. При этом $\angle XPX' = \angle XPF$, $\angle YPF = \angle YPY'$, следовательно, $\angle XPY = \dfrac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90°$. ■

**Теорема 3.10.** Пусть $PX$ и $PY$ – касательные к параболе, а $l$ – прямая, проходящая через $P$ параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми $PY$ и $l$ равен $\angle XPF$, $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ и $FP$ – биссектриса $\angle XFY$.

*Доказательство.*

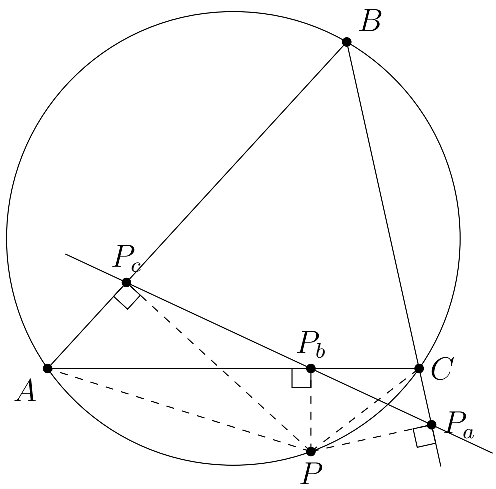



Пусть $X'$ и $Y'$ – проекции $X$ и $Y$ на директрису соответственно. Угол между $PY$ и $l$ равен $\angle X'Y'F$, так как $l \perp X'Y'$ и $PY \perp Y'F$. При этом по лемме 3.8 $F$, $X'$ и $Y'$ лежат на окружности с центром в $P$. Тогда $\angle X'Y'F = \dfrac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$. Поскольку $l \parallel YY'$, угол между $PY$ и $l$ равен $\angle PYY'$, который в силу оптического свойства параболы равен $\angle PYF$. То есть $\angle PYF = \angle XPF$, аналогично $\angle FXP = \angle YPF$. Тогда $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ по двум углам и $PF$ – биссектриса $\angle XFY$. ■

## 3.3 Прямая Симсона

**Теорема 3.11** (Прямая Симсона)**.** Проекции точки $P$ на стороны $\triangle ABC$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка $P$ лежит на описанной окружности треугольника.

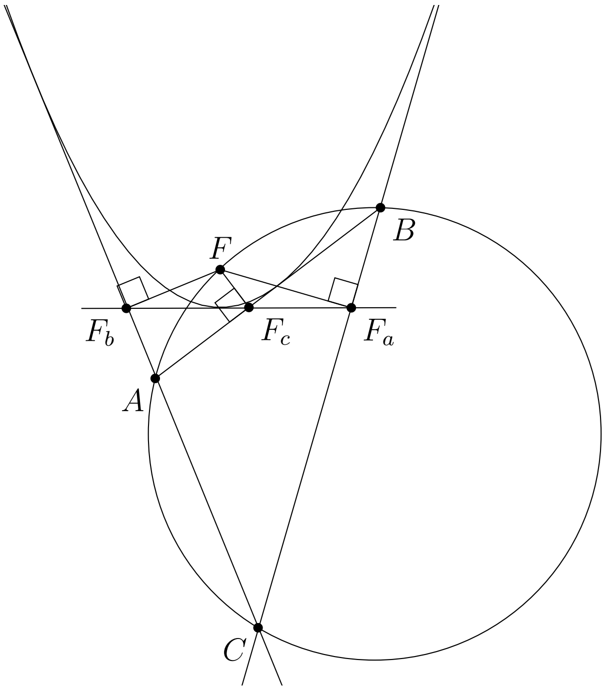
*Доказательство.*




Пусть $P_a$, $P_b$ и $P_c$ – проекции точки $P$ на $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. $AP_cP_bP$ вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$. Тогда $\angle APP_c = \angle AP_bP_C$. Аналогично $\angle CP_bP_a = \angle CPP_a$. В силу вписанности $ABCP$ $\angle PCP_a = 180^\circ - \angle BCP = \angle BAP$. При этом $\angle PCP_a = 90^\circ - \angle CPP_a = 90^\circ - \angle CP_bP_a$. То есть $\angle AP_cP = 90^\circ - \angle APP_c = 90^\circ - \angle AP_bP_c = 90^\circ - \angle CP_bP_a$, а значит $\angle AP_bP_c = \angle CP_bP_a$. В таком случае они вертикальные, следовательно, $P_a$, $P_b$ и $P_c$ коллинеарны. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

**Теорема 3.12.** Пусть $\triangle ABC$ описан около параболы, тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности этого треугольника.

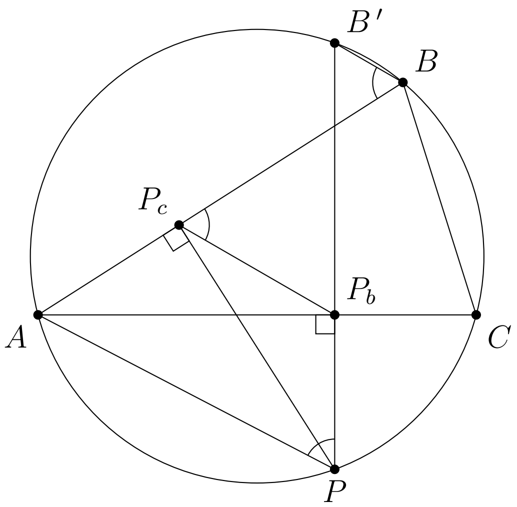
*Доказательство.*




Пусть $F_a$, $F_b$ и $F_c$ – проекции фокуса параболы на стороны треугольника. По лемме 3.7 они коллинеарны. Тогда по теореме о прямой Симсона $F$ принадлежит окружности, описанной около $\triangle ABC$. ■

**Теорема 3.13.** Пусть $P$ и $B'$ лежат на окружности, описанной около $\triangle ABC$, при чем $PB' \perp AC$. Тогда $BB'$ параллельная прямой Симсона точки $P$.

*Доказательство.*

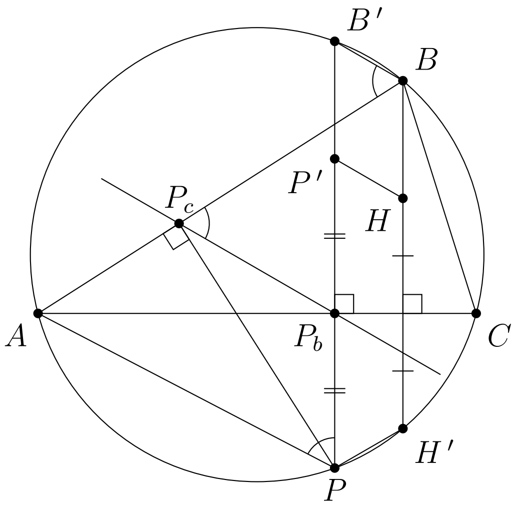



Пусть $P_b$ и $P_c$ – проекции $P$ на $AC$ и $AB$ соответственно. $\angle ABB' = \angle APB'$ как вписанные. $AP_cP_bP$ – вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$, следовательно, $\angle APP_b = \angle P_bP_cB$. То есть $\angle P_cBB' = \angle P_bP_cB$, а значит $BB' \parallel P_bP_c$. ■

**Следствие 3.13.1.** При вращении точки $P$ по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги $PA$.

**Следствие 3.13.2.** Прямая Симсона точки $P$ относительно $\triangle ABC$ делит отрезок $PH$ пополам, где $H$ – ортоцентр $\triangle ABC$.

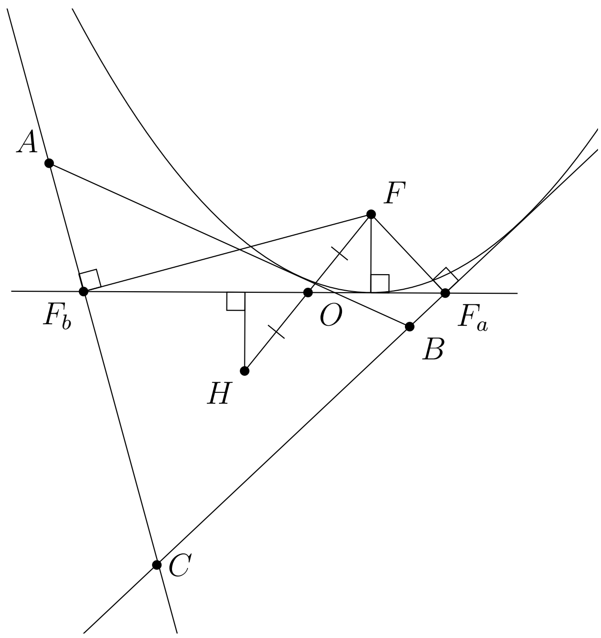
*Доказательство.*




Пусть $H'$ и $P'$ – образы $H$ и $P$ относительно $AC$ соответственно. Поскольку $PB' \parallel H'B$, $PB'BH'$ – равнобокая трапеция. Тогда отрезок, симметричный $PH'$ относительно $AC$ должен быть параллелен $BB'$, то есть $P'H \parallel B'B \parallel P_cP_b$. Поскольку $P_b$ – середина $PP'$ и $P_cP_b \parallel P'H$, прямая Симсона – средняя линия $\triangle HPP'$, а значит делит $HP$ пополам. ■

**Теорема 3.14.** Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе.

*Доказательство.*




Пусть $F_a$ и $F_b$ – проекции $F$ на $BC$ и $AC$ соответственно. Тогда по следствию 3.7.1 $F_bF_a$ – прямая, касающаяся параболы в ее вершине и параллельная директрисе этой параболы. Пусть $O$ – точка пересечения $FH$ и $F_bF_a$, тогда по следствию 3.13.2 $FO = OH$, при этом $\angle HOF_b = \angle FOF_a$ как вертикальные, в таком случае равны по двум углам и стороне треугольники, образованные $F$, $O$, $H$ и проекциями $F$ и $H$ на $F_bF_a$. Следовательно, расстояние от $F$ до прямой, проходящей через вершину параболы и параллельной ее директрисе, равно расстоянию от этой прямой до $H$, а значит $H$ лежит на директрисе параболы. ■

# 4 Гомотетия

**Определение 16.** Гомотетия с центром $O$ и коэффициентом $k$ суть преобразование плоскости, при котором $\forall A \in \mathbb{R}^2 : H_O^k(A) = A' : \overrightarrow{OA} \cdot k = \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA} \upuparrows \overrightarrow{OA'}$.

## 4.1 Композиция гомотетий

**Определение 17.** Композиция гомотетий $H_O^k$ и $H_P^l$ при $k$, $l \neq 1$ – это параллельный перенос при $k \cdot l = 1$ или $H_Q^{kl} : Q \in OP, \overrightarrow{OQ} \cdot (k-1) = \overrightarrow{QP} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{l}\right)$.

# 5 Инверсия

**Определение 18.** Точки $A$ и $B$ называются симметричными относительно окружности $\omega(O;\, R)$, если $OA \cdot OB = R^2$ и $A$ лежит на луче $OB$.

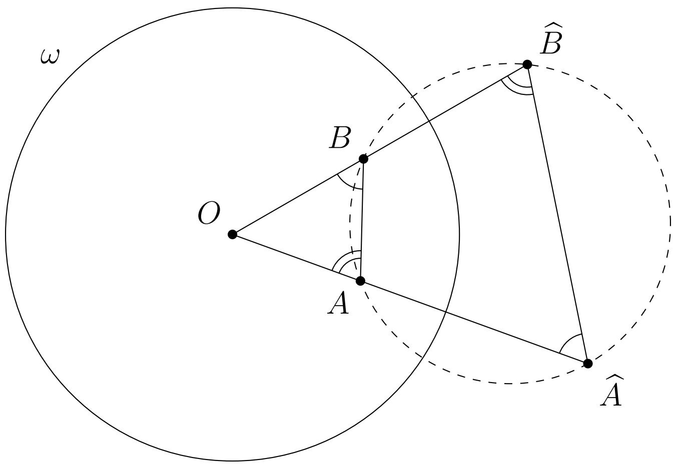
Для точек, симметричных относительно окружности $\omega(O;\, R)$, выполняются условия:

1. $\forall X \in \mathbb{R}^2 :\ X \neq 0\ \ \exists!\, Y :\ X, Y$ – симметричны относительно $\omega$
2. Если $X$ внутри $\omega$, то $Y$ снаружи и наоборот
3. Нет точки, симметричной $O$
4. $\forall C \in \omega :\ C$ симметрична сама себе

**Определение 19.** Пусть на плоскости дана окружность $\omega(O;\, R)$. Отображение $\varphi : \mathbb{R}^2/\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\{0\}$, при котором точки переходят в симметричные им относительно $\omega$, называется инверсией.

**Лемма 5.1** (Основная лемма)**.** Любые две пары точек, симметричных относительно одной окружности, лежат на одной окружности.

*Доказательство.*



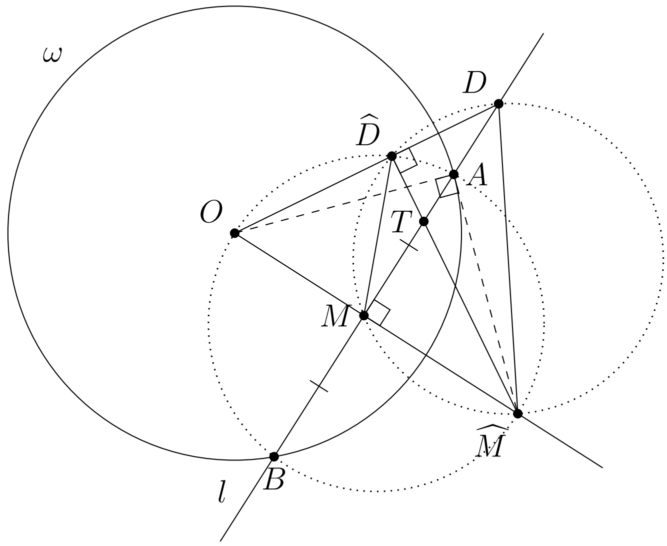

Пусть $A$ и $\widehat{A}$, $B$ и $\widehat{B}$ – пары точек, симметричных около окружности $\omega(O;\, R)$. Тогда:

$$OA \cdot O\widehat{A} = R^2 = OB \cdot O\widehat{B} \Longleftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{O\widehat{B}}{O\widehat{A}}$$

Следовательно, по двум сторонам, а также по общему углу $\triangle AOB \sim \triangle \widehat{B}O\widehat{A}$. Отсюда $\angle ABO = \angle O\widehat{A}\widehat{B}$ и $\angle OAB = \angle O\widehat{B}\widehat{A}$, а значит $\widehat{A}AB\widehat{B}$ – вписанный, так как сумма его противоположных углов равна $180°$. ∎

**Теорема 5.2.** Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

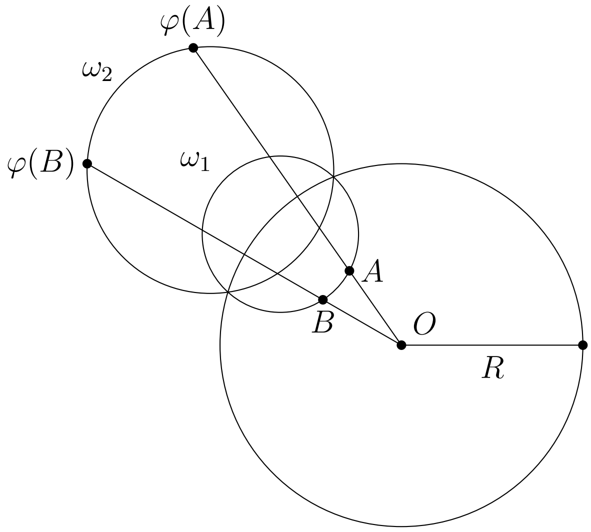
*Доказательство.*




Пусть $M$ – основание серединного перпенидкуляра, опущенного из $O$ на $l$, $D$ – произвольная точка вне окружности, а $\widehat{M}$ и $\widehat{D}$ – точки, симметричные $M$ и $D$ соответственно относительно $\omega$, $T$ – точка пересечения $l$ и $\widehat{D}\widehat{M}$. Из построения инверсии, $AM$ – касательная к $\omega$. Тогда $\angle OA\widehat{M} = 90°$. По основной лемме $D\widehat{D}M\widehat{M}$ – вписанный. Тогда $\angle D\widehat{D}\widehat{M} = \angle DM\widehat{M} = 90° = \angle OA\widehat{M}$. А значит $O\widehat{D}A\widehat{M}$ – вписанный по признаку. ■

**Теорема 5.3.** Если при инверсии $\varphi$ верно: $\varphi(\omega_1) = \omega_2$, где $\omega_i$ – это окружность, то центр данной инверсии суть центр гомотетии, переводящей $\omega_1$ в $\omega_2$.

*Доказательство.*

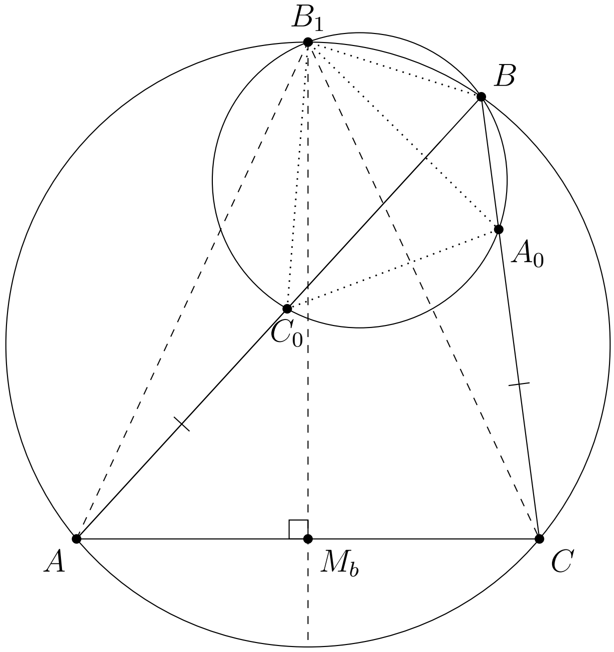



Возьмем две произвольные точки $A$ и $B$, лежащие на $\omega_1$ и построим их образы при инверсии $\varphi$: $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ соответственно. По определению инверсии $OA \cdot O\varphi(A) = R^2 = OB \cdot O\varphi(B) \Longrightarrow \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{O\varphi(A)}{O\varphi(B)}$, а значит $O$ – центр гомотетии, переводящей $\omega_1$ в $\omega_2$. ■

# 6 Полезные факты

**Лемма 6.1.** Пусть $C_0$ и $A_0$ – произвольные точки на сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$, $B_1$ – середина дуги $ABC$, описанной около $\triangle ABC$ окружности, тогда $BB_1C_0A_0$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AC_0 = CA_0$.

*Доказательство.*

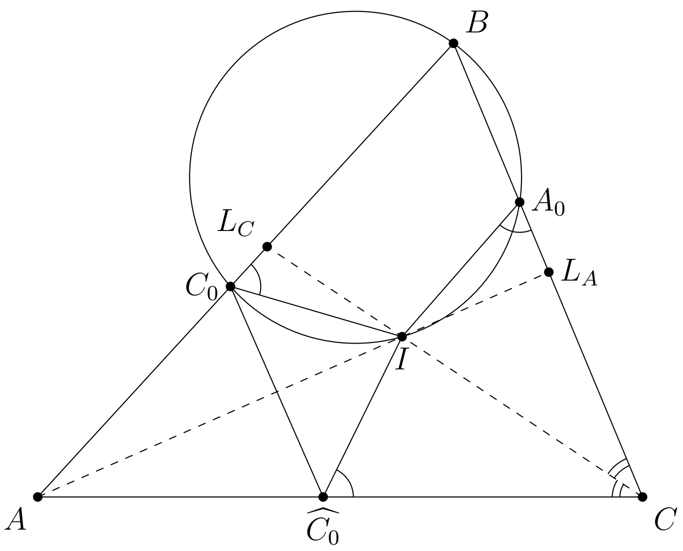



Пусть $AC_0 = CA_0$, докажем вписанность $BB_1C_0A_0$. Опустим перпендикуляр с основанием $M_b$ из $B_1$ на $AC$, тогда в силу того, что $B_1$ – середина дуги $ABC$, $B_1M_b$ – серединный перпендикуляр к $AC$. Тогда $AB_1 = B_1C$. Рассмотрим $\triangle AB_1C_0$ и $\triangle CB_1A_0$: $\angle B_1AB = \angle B_1CB$, так как они опираются на одну дугу $B_1B$, при этом $AC_0 = CA_0$ по условию и $AB_1 = B_1C$. То есть $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$, а значит равны их внешние углы: $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$, тогда $BB_1C_0A_0$ – вписанный по признаку.

Докажем, что $AC_0 = CA_0$ при условии вписанности $BB_1C_0A_0$. Аналогично первому доказательству, $\angle B_1AB = \angle B_1CB$ и в силу вписанности $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$, при этом $AB_1 = B_1C$, а значит $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$ по двум углам и стороне, то есть $AC_0 = CA_0$. ■

**Лемма 6.2.** Пусть $A_0$ и $C_0$ – произвольные точки на $BC$ и $AB$ треугольника $ABC$ соответственно. Инцентр $\triangle ABC$ лежит на окружности, описанной около $\triangle A_0BC_0$ тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

*Доказательство.*




Пусть $L_A$ и $L_C$ – основания биссектрис из точек $A$ и $C$ соответственно. Отметим точку $\widehat{C_0}$, симметричную $C_0$ относительно $AL_A$. Докажем равенство при условии вписанности. В силу вписанности $A_0IC_0B$: $\angle IA_0C = \angle IC_0B$. При этом в силу симметрии $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C_0}C$. Также $\angle IC\widehat{C_0} = \angle ICL_A$, так как $CI$ – биссектриса. Тогда $\triangle IC\widehat{C_0} = \triangle ICA_0$ по двум углам и общей стороне $IC$. То есть $\widehat{C_0}C = A_0C$, а значит $A\widehat{C_0} + \widehat{C_0}C = A\widehat{C_0} + A_0C = AC_0 + A_0C = AC$.

Докажем вписанность при условии равенства. В силу симметрии $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C_0}C$. $AC = AC_0 + A_0C = A\widehat{C_0} + A_0C \Longrightarrow A_0C = C\widehat{C_0}$. Тогда $\triangle IC\widehat{C_0} = \triangle ICA_0$ по двум сторонам и углу, а значит $\angle I\widehat{C_0}C = \angle IA_0C$, то есть $\angle IA_0C = \angle IC_0B$, следовательно, $A_0IC_0B$ – вписанный. ■

# 7 Стереометрия

## 7.1 Введение

**Аксиома 1.** В $\mathbb{R}^3$ существуют плоскости, причем для любой из них выполняются аксиомы планиметрии.

**Аксиома 2** (Аксиома плоскости)**.** Через любые три неколлинеарные точки пространства проходит плоскость, при чем только одна.

**Аксиома 3.** Прямая, проходящая через две точки плоскости полностью лежит в данной плоскости.

**Аксиома 4** (Аксиома пересечения плоскостей)**.** Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой:

$$M \in \alpha;\ M \in \beta \Longrightarrow \exists\, l:\ l \subset \alpha;\ l \subset \beta$$

**Аксиома 5** (Аксиома расстояния)**.** В любой из плоскостей, проходящих через две различные точки расстояние между этими точками одно и то же:

$$A \neq B;\ \forall\, \alpha:\ A,\ B \in \alpha\ \rho_\alpha(A;\ B) = \mathrm{const}$$

**Определение 20.** Прямая и плоскость называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку.

**Определение 21.** Две плоскости называются пересекающимися, если они имеют одну общую прямую.

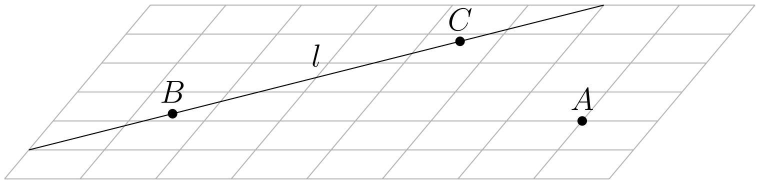
**Определение 22.** Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек называются параллельными.

## 7.2 Следствия из аксиом

**Лемма 7.1.** Через прямую и точку, не лежащую на ней, проходит плоскость, при том только одна:

$$\forall\, A;\ \forall\, l:\ A \notin l\ \exists!\ \alpha:\ l \subset \alpha;\ A \in \alpha$$

*Доказательство.*




Рассмотрим $B, C \in l:\ l \subset \alpha \Longrightarrow B, C \in \alpha$. По аксиоме плоскости $\exists!\ \alpha:\ A, B, C \in \alpha;\ l \subset \alpha$. ■

**Лемма 7.2.** Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, при том только одна:

$$a \cap b = C \Longrightarrow \exists!\ \alpha:\ a, b \subset \alpha$$

**Лемма 7.3.** Через две параллельные прямые проходит плоскость, при том только одна:

$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \alpha:\ a, b \subset \alpha$$

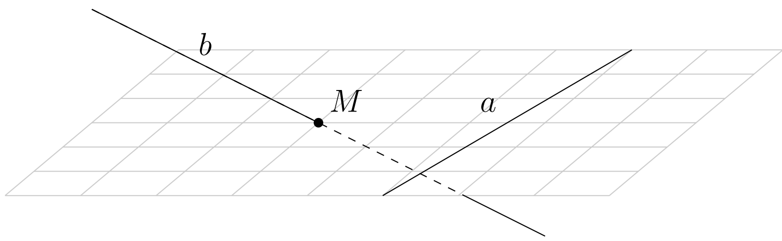
## 7.3 Скрещивающиеся прямые

**Определение 23.** Две прямые называются скрещивающимися, если у них нет общих точек и они не параллельны.

**Теорема 7.4** (Признак скрещивающихся)**.** Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекают данную плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, данные прямые скрещиваются:

$$a \subset \alpha,\ b \cap \alpha = M:\ M \notin a \Longrightarrow a \dot{-} b$$

*Доказательство.*



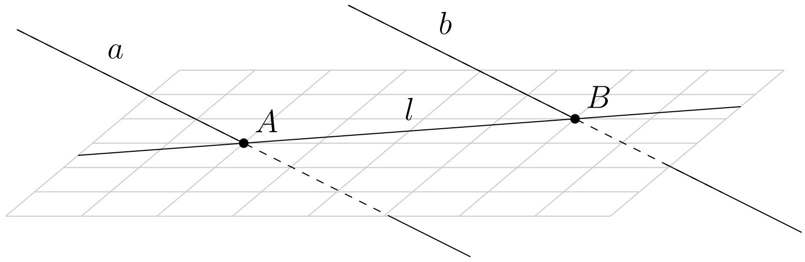

Пусть $a$ и $b$ не скрещиваются. Тогда $a \parallel b$ или $a \cap b \neq \varnothing$ :

1. $a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta:\ a, b \subset \beta \Longrightarrow M \in \beta,$ при этом $a \subset \alpha$ (по условию);
   $a \subset \beta$ (по предложению) $\Longrightarrow \alpha \cap \beta = a,\ M \in \alpha,\ M \in \beta \Longrightarrow M \in a,$ противоречие.
2. $a \cap \beta \neq \varnothing \Longrightarrow \exists\, k:\ k \in a,\ k \in b \Longrightarrow \exists\, \beta:\ a, b \subset \beta \Longrightarrow M \in \beta,$ при этом $a \subset \alpha$ (по условию);
   $a \subset \beta$ (по предложению) $\Longrightarrow \alpha \cap \beta = a,\ M \in \alpha,\ M \in \beta \Longrightarrow M \in a,$ противоречие.

■

**Теорема 7.5.** Пусть $a \parallel b;\ a \cap \alpha \neq \varnothing$, тогда $b \cap \alpha \neq \varnothing$.

*Доказательство.*




$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\, \beta: \ a, b \subset \beta,\, a \cap \alpha = A \Longrightarrow A \in \beta \Longrightarrow \exists\, l: \ l = \alpha \cap \beta$$

$$l \cap a = A,\, a \parallel \beta \Longrightarrow l \cap \beta = B: \ B \in b,\, B \in l \Longrightarrow b \cap \alpha = B.$$

■

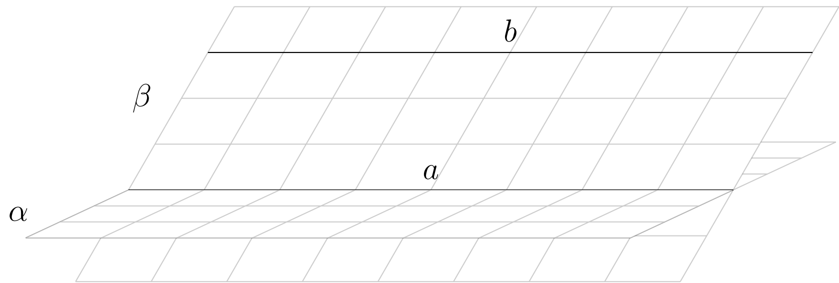
## 7.4 Параллельность прямой и плоскости

**Определение 24.** Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

**Теорема 7.6** (Признак параллельности прямой и плоскости)**.** Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны:

$$a \subset \alpha,\, b \not\subset \alpha,\, a \parallel b \Longrightarrow \alpha \parallel b$$

*Доказательство.*



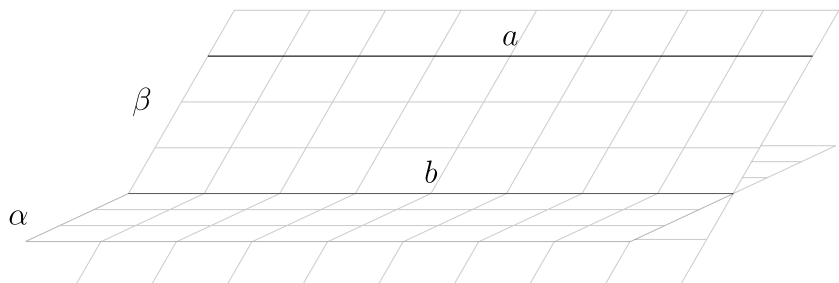

$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\, \beta: \ a, b \subset \beta$. Пусть $b \cap \alpha \neq \varnothing$. Но $\alpha \cap \beta = a$. Противоречие.

■

**Теорема 7.7** (О линии пересечения плоскостей)**.** Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой:

$$a \parallel \alpha,\, a \subset \beta,\, \alpha \cap \beta = b \Longrightarrow a \parallel b$$

*Доказательство.*



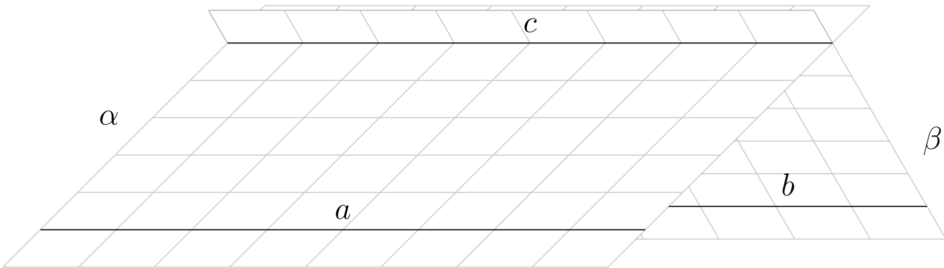
$a \parallel \alpha \Longrightarrow a \cap b = \varnothing$. Пусть $a \dot{-} b$, тогда $a \cap \alpha \neq \varnothing$, но $a \parallel \alpha$. Противоречие.

■

**Теорема 7.8** (О крыше)**.** Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых:

$$a \parallel b,\ a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ \alpha \cap \beta = c \Longrightarrow a \parallel c,\ b \parallel c$$

*Доказательство.*




$a \parallel b$, $b \not\subset \alpha \Longrightarrow b \parallel \alpha \Longrightarrow b \parallel c$ (по теореме о линии пересечения плоскостей). Аналогично $c \parallel a$.

■

**Следствие 7.8.1.** Параллельность прямых в пространстве транзитивна.

**Следствие 7.8.2.** Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

**Определение 25.** Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным и лежащим в одной плоскости.

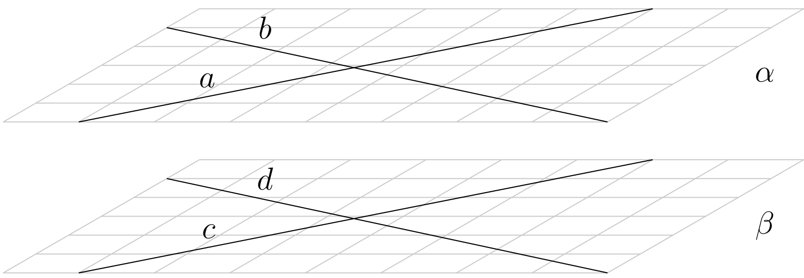
## 7.9 Параллельность плоскостей

**Определение 26.** Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

**Теорема 7.9** (Признак параллельности плоскостей)**.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны:

$$a,\ b \subset \alpha,\ a \cap b \neq \varnothing;\ \ c,\ d \subset \beta;\ \ a \parallel c,\ b \parallel d \Longrightarrow \alpha \parallel \beta$$

*Доказательство.*

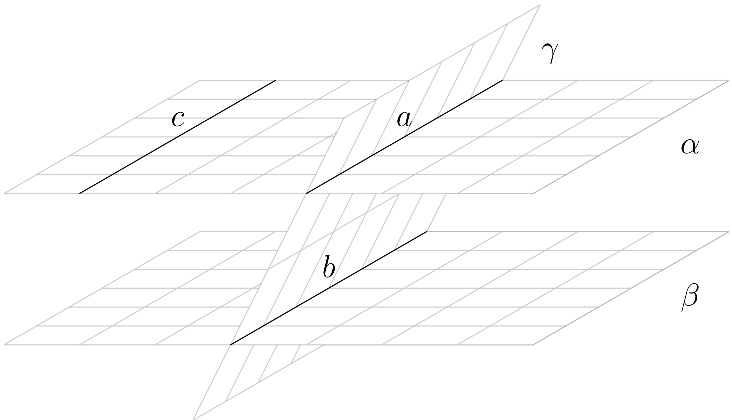



Пусть $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$. Тогда по теореме о линии пересечения плоскостей $\alpha \cap \beta = k$, $k \parallel a$ ($c \subset \beta$); $\alpha \cap \beta = l$, $l \parallel b$ ($d \subset \beta$). Противоречие. ■

**Теорема 7.10.** Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны:

$$\alpha \parallel \beta,\ \gamma \cap \alpha = a,\ \gamma \cap \beta = b \Longrightarrow a \parallel b$$

*Доказательство.*




$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow \exists c \subset \alpha : \ c \parallel b$. По теореме о крыше $a \parallel c$, $b \parallel c$.

■

## 7.10 Сечения

**Определение 27.** Если пересечение плоскости и многогранника есть многоугольник, то он называется сечением этого многогранника этой плоскостью.

**Определение 28.** Следом называется прямая, по которой плоскость сечения пересекает плоскость любой из граней многогранника.

**Определение 29.** Пирамида – это многогранник, одна из граней которого – произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной.

**Определение 30.** Пирамида называется правильной, если в её основании лежит правильный многоугольник, а все боковые грани – равнобедренные треугольники с общей вершиной.

**Определение 31.** Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется апофемой этой пирамиды.

**Определение 32.** Треугольная пирамида называется тетраэдром.

**Определение 33.** Тетраэдр называется правильным, если все его рёбра равны.

**Определение 34.** Усечённой пирамидой называется часть пирамиды, заключённая между плоскостью основания и плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей все боковые рёбра пирамиды.

**Определение 35.** Призма – это многогранник, две грани которого – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все рёбра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны между собой. Два равных многоугольника, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями призмы. Остальные грани призмы называются её боковыми гранями, а их объединение – боковой поверхностью призмы. Рёбра, не лежащие в основании призмы, называются её боковыми рёбрами. Если в основаниях призмы лежат $n$-угольники, то призма называется $n$-угольной.

**Определение 36.** Призма, основания которой являются параллелограммами, называется параллелепипедом.

**Определение 37.** Если все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, то параллелепипед называется прямоугольным.

**Определение 38.** Если все грани параллелепипеда – квадраты, то он называется кубом.

## 7.11 Векторы в пространстве

**Определение 39.** Векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$ называются коллинеарными, если $\exists\,\lambda : \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

**Теорема 7.11** (Признак копланарности векторов)**.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются копланарными, если $\exists\,\alpha,\,\beta : \vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

**Определение 40.** Набор $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ векторов линейно независим, если уравнение $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = 0$ имеет только тривиальное решение, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

**Определение 41.** Базисом в $\mathbb{R}^n$ называется набор из $n$ линейно независимых векторов.

**Определение 42.** Коэффициенты $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ в разложении $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$ называют координатами вектора $\vec{v}$ в базисе $\{\vec{a};\, \vec{b},\, \vec{c}\}$.

**Теорема 7.12.** Точка $M$ принадлежит плоскости $(ABC)$ тогда и только тогда, когда:

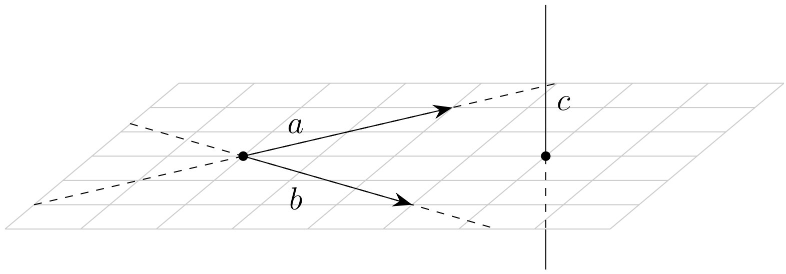
$$\forall\, O \notin (ABC) : \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} \Longleftrightarrow x + y + z = 1$$

## 7.12 Перпендикулярность в пространстве

**Определение 43.** Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

**Теорема 7.13** (Признак перпендикулярности прямой и плоскости)**.** Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

*Доказательство.*




Пусть $\vec{v_a}$, $\vec{v_b}$ и $\vec{v_c}$ – направляющие векторы прямых $a$, $b$ и $c$ соответственно, тогда $\forall\, l \in \alpha : \vec{v_l}$ – направляющий $\vec{v_l} = x\vec{v_a} + y\vec{v_b}$, так как $a \cap b \neq \varnothing$. Тогда $\vec{v_c} \cdot \vec{v_l} = \vec{v_c} \cdot (x\vec{v_a} + y\vec{v_b}) = 0 \Longrightarrow l \perp c$. ■

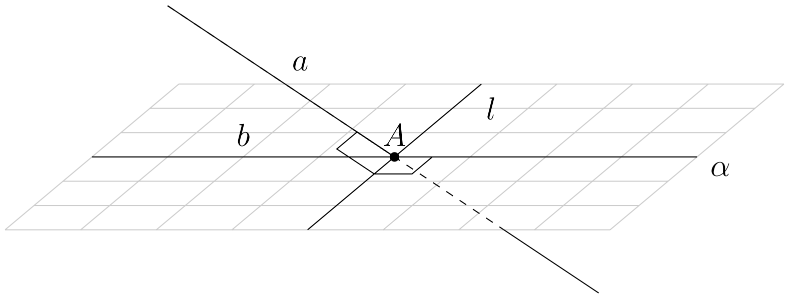
**Теорема 7.14.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой плоскости, то и вторая перпендикулярна этой плоскости.

**Теорема 7.15.** Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

**Определение 44.** Параллельное проектирование, при котором направление проектирования перпендикулярно плоскости проектирования, называют ортогональным проектированием.

**Теорема 7.16** (О трёх перпендикулярах)**.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда перпендикулярна проекции этой наклонной на эту плоскость.

*Доказательство.*



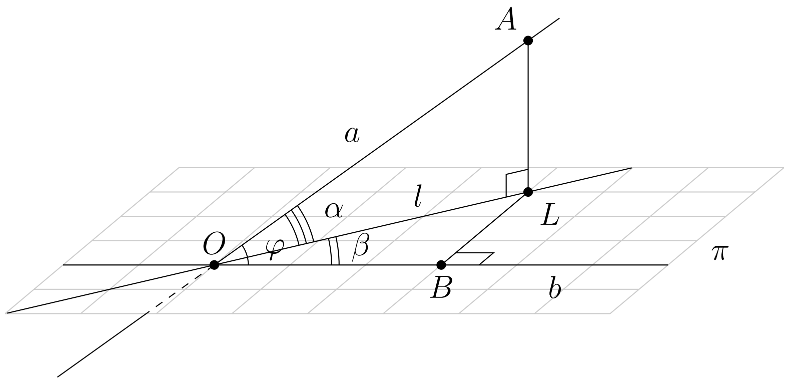

Пусть $a$, $b$ и $l$ – это наклонная, её проекция и прямая, лежащая в плоскости $\alpha$ соответственно, также пусть $a \cap \alpha = A$. По лемме 7.2 существует плоскость $\beta$, содержащая $a$ и $b$. Тогда $\alpha \cap \beta = b$, причем должна существовать такая $d \subset \beta$, что она проходит через $a$ и $b$ и перпендикулярна $b$, а значит перпендикулярна $\alpha$. Отсюда она также перпендикулярна $l$ по признаку перпендикулярности, откуда $l \perp b$ по определению. ■

**Определение 45.** Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на данную плоскость.

**Теорема 7.17.** Угол между наклонной к плоскости и её проекцией на эту плоскость есть наименьший из углов между наклонной и каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

**Теорема 7.18.** Пусть прямая $a$ образует с плоскостью $\pi$ угол $\alpha$. Прямая $b \subset \pi$ образует с прямой $a$ угол $\varphi$, а с её проекцией на плоскость $\pi$ – угол $\beta$. Тогда $\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

*Доказательство.*




Пусть $A$ – произвольная точка на прямой $a$, $O$ – точка пересечения прямой $a$ с $\pi$, $L$ – основание перпендикуляра из $A$ на $\pi$, а $B$ – основание перпендикуляра из $L$ на $b$. Без ограничения общности положим $OA = 1$, тогда $OL = \cos\alpha$, а $OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta$. Пусть $\delta = (ABL)$, тогда $BL \perp b$ по построению, $AL \perp b$, так как $b \subset \pi$, $AL \perp \pi \implies b \perp \delta \implies b \perp AB$. Отсюда $OB = \cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\beta$. ■

**Определение 46.** Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре $\Phi_1$, а другая – фигуре $\Phi_2$, существует наименьшее, то его называют между фигурами $\Phi_1$ и $\Phi_2$.

**Теорема 7.19.** Расстоянием от точки до плоскости является расстояние от данной точки до её проекции на данную плоскость.

**Определение 47.** Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на данных прямых, перпендикулярный к ним.

**Теорема 7.20.** Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует и единственен.

**Теорема 7.21.** Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки пересечения одной из этих прямых с перпендикулярной ей плоскостью до проекции другой прямой на эту плоскость.

## 7.13 Двугранные углы

**Определение 48.** Две полуплоскости с общей ограничивающей их прямой разбивают пространство на два двугранных угла. Полуплоскости называются гранями этого угла, а их общая прямая – его ребром.

**Определение 49.** Линейным углом двугранного угла называется пересечение данного двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной его ребру.

**Определение 50.** Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

**Теорема 7.22.** Величина двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла.

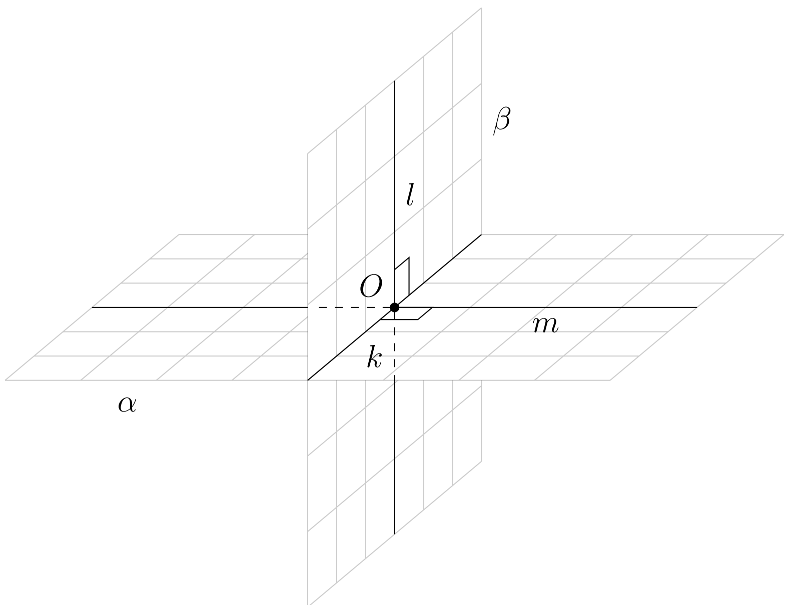
**Определение 51.** Полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, делящая его на два равных по величине двугранных угла называется биссектором данного угла.

**Определение 52.** Углом между плоскостями называется наименьший из образованных их пересечением двугранных углов. Угол между параллельными плоскостями полагается равным нулю.

**Определение 53.** Плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

**Теорема 7.23** (Признак перпендикулярности плоскостей)**.** Если плоскость содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то данные плоскости перпендикулярны.

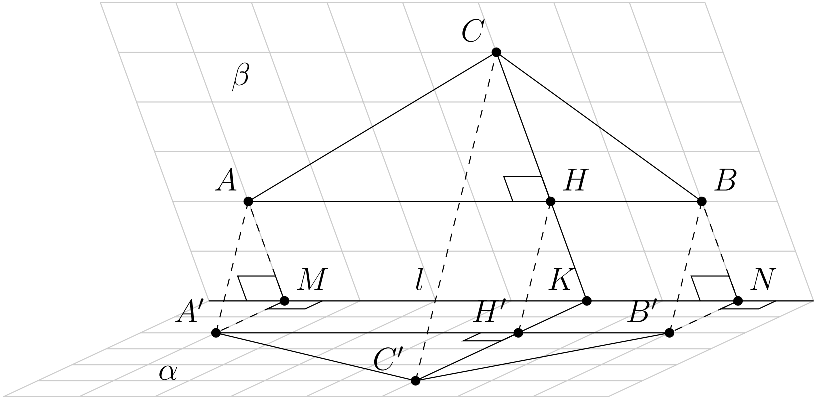
*Доказательство.*




Пусть $l \perp \alpha$, тогда $\forall m \subset \alpha : \ l \perp m$. Пусть $\alpha \cap \beta = k$. Пусть также $m \perp k; \ m \cap k = O$. Тогда $\angle(m; \, l)$ – линейный угол одного из двугранных углов между $\alpha$ и $\beta$. $m \perp k$; $l \perp k$; $m \cap l = O \in k$, значит $\angle(m; \, l) = 90°$. ■

**Теорема 7.24** (Площадь ортогональной проекции многоугольника)**.** Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади данного многоугольника и косинуса угла между плоскостью проецирования и плоскостью многоугольника.

*Доказательство.*




Пусть $\triangle ABC \subset \beta$; $l = \alpha \cap \beta$; $AB \parallel l$. Обозначим $H$ основание высоты $CH$ треугольника $ABC$, $M$ – проекция $A$ на $l$, $N$ – проекция $B$ на $l$, а $A'$, $B'$, $C'$, $H'$ – проекции $A$, $B$, $C$, $H$ на $\alpha$ соответственно. Тогда $AB = MN$, следовательно, $MABN$ – прямоугольник, значит по теореме о трёх перпендикулярах $MA' \perp l$; $NB' \perp l$, то есть $MA'B'N$ – прямоугольник, а значит $AB = MN = A'B'$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$; $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2}AB \cdot C'H'$. Пусть $K$ – проекция $C$ на $l$, тогда $H' \in C'K$. Пусть $\angle CKC' = \theta$, значит $KC' = KC \cdot \cos\theta$; $KH' = KH \cdot \cos\theta \Longrightarrow C'H' = CH \cdot \cos\theta$. То есть $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}AB \cdot C'H' = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\theta$.

Теорема доказана для треугольника, одна из сторон которого параллельна ребру двугранного угла. Чтобы обобщить доказательство до произвольного треугольника, достаточно заметить, что мы можем провести прямую, параллельную ребру двугранного угла, через одну из вершин этого треугольника, разбив его на два треугольника, удовлетворяющих нашему условию. Для произвольного многоугольника достаточно сказать, что его можно разбить на треугольники, а значит теорема доказана. ■

# 8 Многогранные углы

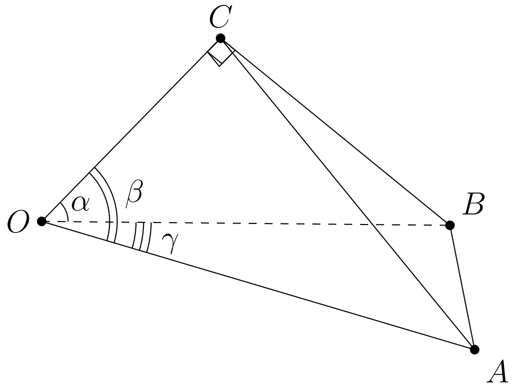
**Определение 54.** Пусть $\Phi = A_1A_2\ldots A_n$ — $n$-угольник; $n \geq 3$; точка $S \notin (A_1A_2A_3)$, тогда часть пространства, ограниченная гранями $SA_1A_2$, $SA_2A_3, \ldots,$ $SA_nA_1$ называется многогранным углом.

**Определение 55.** Пусть $\Phi = A_1A_2\ldots A_n$ — $n$-угольник; $n \geq 3$; точка $S \notin (A_1A_2A_3)$, тогда многогранным углом называется множество лучей $SX\,\forall\, x \in \Phi$.

**Теорема 8.1** (Первая теорема косинусов)**.**

$$\cos\angle C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

*Доказательство.*



Пусть $A$ и $B$ – такие точки на рёбрах угла, что $AC \perp OC$ и $BC \perp OC$. Тогда $\angle BCA$ – линейный угол $\angle C$. Из $\triangle OCA$ и $\triangle OCB$:

$$OA = \frac{OC}{\cos\beta};\ OB = \frac{OC}{\cos\alpha} \Longrightarrow AC = OC \cdot \operatorname{tg}\beta;\ BC = OC \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

По теореме косинусов в $\triangle OBA$ и $\triangle ABC$:

$$AB^2 = OC^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}\right) = OC^2 \cdot \left(\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\angle C\right)$$

Тогда если выразить $\cos\angle C$ получим:

$$\cos\angle C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

■

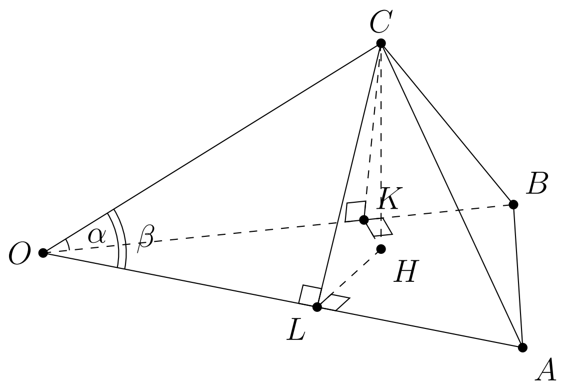
**Теорема 8.2** (Вторая теорема косинусов)**.**

$$\cos\angle C = -\cos\angle A \cdot \cos\angle B + \sin\angle A \cdot \sin\angle B \cdot \cos\gamma$$

**Теорема 8.3** (Теорема синусов)**.**

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle B} = \frac{\sin\gamma}{\sin\angle C}$$

*Доказательство.*




Пусть $H$ – проекция $C$ на $(ABC)$, $K$ – проекция $C$ на $OB$ и $L$ – проекция $C$ на $OA$ соответственно. По теореме о трёх перпендикулярах $HK \perp OB$ и $HL \perp OA$. Тогда из $\triangle OCK$ и $\triangle CKH$: $CH = OC \cdot \sin\alpha \cdot \sin\angle B$. Аналогично из $\triangle OCL$ и $\triangle CLH$: $CH = OC \cdot \sin\beta \cdot \sin\angle A$. То есть:

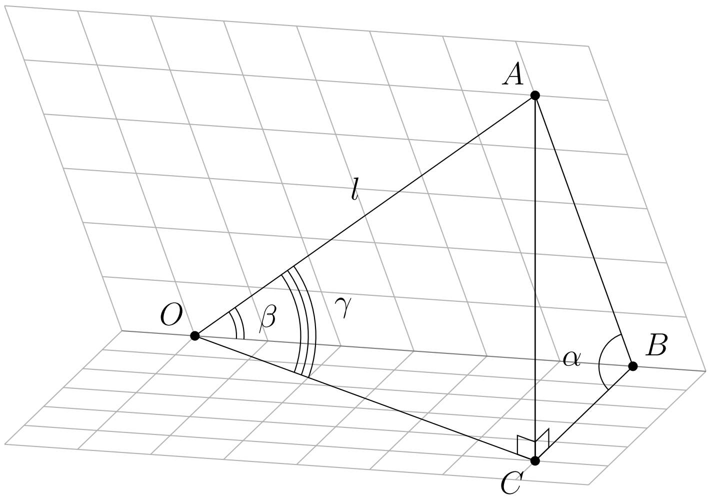
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle B}$$

■

**Теорема 8.4** (Теорема о трёх синусах)**.** Пусть прямая $l$ содержится в одной из граней двугранного угла. Также пусть $\alpha$ – плоский угол данного двугранного, $\beta$ – угол между прямой и ребром двугранного угла, а $\gamma$ – угол между $l$ и её проекцией на вторую грань угла. Тогда:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

*Доказательство.*




Пусть $l$ пересекает ребро двугранного угла в точке $O$. Возьмём произвольную точку $A$ на этой прямой. Пусть $C$ – основание перпендикуляра из $A$ на вторую грань двугранного угла. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $CB \perp AB$, а значит $\angle ABC = \alpha$. Тогда:

$$\sin\gamma = \frac{AC}{OA} = \frac{AB \cdot \sin\alpha}{OA} = \frac{OA \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha}{OA} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

■