

Алгебра

Содержание

1	Решение уравнений и неравенств.	2
1.1	Иррациональные уравнения	2
1.2	Иррациональные неравенства	2
1.3	Неравенства с модулем	2
2	Многочлены	2
3	Множества	4
4	Числовые последовательности	4
4.1	Прогрессии	6
4.2	Пределы последовательностей	7
4.3	Пределы функций	9
5	Эквивалентность и группы	11
6	Тригонометрия	11
7	Комплексные числа	19
7.1	Матрицы поворота	20
8	Логарифмы	20
8.5	Показательные уравнения и неравенства	22
8.6	Логарифмические уравнения и неравенства	22
9	Линейная алгебра	22
9.1	Координаты на плоскости	22
9.2	Векторы	22
9.3	Линейные пространства	23
9.4	Матрицы	23
9.4.1	Произведение матриц	24
9.4.2	Определитель	25
9.4.3	Ранг матрицы	25

1 Решение уравнений и неравенств.

1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$$
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a, a > 0 \iff \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad |f(x)| > a \iff \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq |g(x)| &\iff (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0 \\ |f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| &\iff f(x) \cdot g(x) < 0 \\ |f(x)| + |g(x)| \leq |f(x) + g(x)| &\iff f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

2 Многочлены

Определение 1. Многочленом от переменной x над K называется выражение вида: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in K$ – коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$.

Определение 2. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$, называется степенью многочлена f :

$$\begin{aligned} k &= \deg f \\ a_0 &\text{ – свободный член} \\ a_n x^n &\text{ – старший член} \\ a_n &\text{ – старший коэффициент} \end{aligned}$$

Определение 3. Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях x равны.

Определение 4.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + d_1x + d_0, \text{ где } d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$$

Утверждение 2.1. Пусть $\deg f(x) \neq 0$, $\deg g(x) \neq 0$, тогда:

1. $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
2. $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3. $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

Доказательство.

1. Пусть $\deg f = \deg g = n$

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Если $k > n$, то $a_k = 0$, $b_k = 0$, то есть $(a_k + b_k) = 0$

Пусть $\deg f = n$, $\deg g = m$, $m < n$

Если $k > n$, то $a_k + b_k = 0$, так как $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{n-1} = b_n = 0$

Тогда $a_n + b_n = a_n \neq 0$

$$2. f(x) \cdot g(x) = a_nb_mx^{n+m} + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{степень} < n \\ 0}}$$

■

Определение 5. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot g(x) = f(x)$.

Утверждение 2.2. Всякий многочлен $f(x) \neq 0$ делится на самого себя.

Утверждение 2.3. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $f(x)$, то $f(x) = c \cdot g(x)$, $c \in K$.

Определение 6. Число x_0 является корнем $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

Доказательство.

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot q(a) + r = r$$

■

Следствие 2.4.1. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

3 Множества

Определение 7. Множества равномоцны, если между ними существует биекция.

Определение 8. Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Определение 9. Множества, равномоцные \mathbb{N} , называются счетными.

Определение 10. Декартовым произведением множеств A и B называется множество:

$$A \times B = \{x \mid x = (a, b), a \in A, b \in B\}$$

Определение 11. Число a называется числом кратности k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - a)^k$, но не делится на $(x - a)^{k+1}$.

Определение 12. Множество m называется ограниченным, если:

$$\exists c : \forall x \in M \quad |x| \leq c$$

Определение 13. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества M называется точной верхней гранью (супремумом):

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \leq a, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in M : x > a - \varepsilon$$

Определение 14. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества M называется точной нижней гранью (инфинумом):

$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \geq a, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in M : x < a + \varepsilon$$

Определение 15. Множество M называется открытым, если:

$$\forall m \in M \quad \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(m) \subset M$$

Определение 16. Точка A называется предельной точкой множества M , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(A) \cap M \text{ бесконечно или } \overset{\circ}{U}_\varepsilon(A) \cap M \neq \emptyset$$

Определение 17. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 18. Пусть $M \subset U_{A_i}$, A_i – открытое множество, тогда U_{A_i} называется открытыми покрытиями.

Определение 19. Говорят, что почти все элементы множества M удовлетворяют некоторому условию, если этому условию не удовлетворяет конечное число элементов.

4 Числовые последовательности

Определение 20. Числовой последовательностью a_n называется отображение $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 21. Последовательность a_n называется ограниченной, если $a(\mathbb{N})$ ограничено.

Определение 22. Последовательность a_n называется монотонно возрастающей, если:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$$

Определение 23. Последовательность a_n асимптотически больше b_n , если:

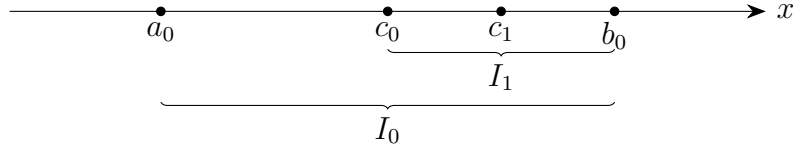
$$a_n \succ b_n \iff \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad a_n \geq b_n$$

Определение 24. Точка A называется частичным пределом последовательности a_n , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a^{-1}(U_\varepsilon(A)) \text{ бесконечно}$$

Теорема 4.1. Пусть последовательность a_n ограничена, тогда у неё есть частичный предел.

Доказательство. Если $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$ бесконечно, то доказано. Если $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$ конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$ и $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$, а также середину $a_0 b_0$, то есть $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Разделим один из получившихся отрезков (отметим c_0 и b_0 , как a_1 и b_1 соответственно) пополам, получив $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$

1. $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
2. $a(\mathbb{N})$ ограничена сверху b_i элементом
3. $a(\mathbb{N})$ имеет точную верхнюю грань $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$
и точную нижнюю грань $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4. $M_1 \leq M_2$
5. $[M_1; M_2] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n]$
6. Пусть $M_1 < M_2$, тогда $\exists n : b_n - a_n < M_2 - M_1$.
Получаем противоречие, значит $M_1 = M_2 = M$.
7. Возьмем такое n , что $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $[a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(M)$.
То есть $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$ бесконечно.

■

Теорема 4.2. Пусть M – множество частичных пределов последовательности a_n , тогда:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} a_n = \sup M; \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} a_n = \inf M$$

Теорема 4.3. Множество частичных пределов числовой последовательности замкнуто.

Определение 25. Пусть даны $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ и $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, при этом b монотонна. Тогда $a \circ b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ называется подпоследовательностью.

Утверждение 4.4. У всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

4.1 Прогрессии

Определение 26. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Определение 27. Разностью арифметической прогрессии называется разность a_{n+1} и a_n .

Утверждение 4.5. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

Утверждение 4.6. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k < n : a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

Теорема 4.7. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) = \\ &= n \cdot a_1 + d \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) = \\ &= n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

■

Определение 28. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad b_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

Утверждение 4.8. Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

Теорема 4.9. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \\ &= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\ &= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

■

4.2 Пределы последовательностей

Определение 29. Число A называется пределом последовательности a_n , если:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Определение 30. Число A называется пределом последовательности a_n , если $\forall \varepsilon > 0$ почти все элементы последовательности принадлежат $U_\varepsilon(A)$.

Определение 31. Число A называется пределом последовательности a_n , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 4.10. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}; \exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \\ \implies \forall n > N = \max(N_1; N_2) \quad |a_n + b_n - A - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Определение 32. Последовательность a_n называется бесконечно малой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Теорема 4.11. Пусть α_n – бесконечно малая последовательность, тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff a_n = A + \alpha_n$$

Теорема 4.12. Пусть a_n сходится, α_n – бесконечно малая. Тогда $b_n = a_n \cdot \alpha_n$ – бесконечно малая.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c} \implies \forall n > N \quad |a_n \cdot \alpha_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

■

Теорема 4.13. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = AB$$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((A + \alpha_n)(B + \beta_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n) = AB$$

■

Определение 33. Последовательность x_n называется бесконечно большой, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall c \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n > c$$

Теорема 4.14 (Теорема Вейерштрасса). Пусть x_n монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет предел в \mathbb{R}

Доказательство. Пусть x_n монотонно возрастает. По определению $\forall n : x_{n+1} > x_n$. Пусть x_n не ограничена, то есть $\nexists m : \forall n x_n < m$, тогда $\sup(x_n) = +\infty$, а значит $x_n \rightarrow \infty$. Пусть $\exists m : \forall n x_n \leq m$ и $m = \sup(x_n)$. Тогда $m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ■

Теорема 4.15 (Принцип двух милиционеров). Пусть даны последовательности: $x_n \leq y_n \leq z_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n - A| < \varepsilon; |z_n - A| < \varepsilon \implies |x_n - A| \leq |y_n - A| \leq |z_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 4.16. Пусть a_n монотонно не убывает и ограничена сверху, тогда a_n сходится.

Доказательство. В силу ограниченности a_n имеет частичный предел. Пусть B – частичный предел a_n и $B < \sup a_n = A$. Возьмём $\varepsilon < \frac{A-B}{3}$, тогда $\exists n : a_n > A - \varepsilon$. Значит, $a_n - B > 2\varepsilon$ и $\forall m > n a_m - B \geq a_n - B$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n$. ■

Лемма 4.17 (Неравенство Бернулли).

$$(1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbb{N}, x > 0$$

Доказательство. Докажем по индукции: $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$ верно, пусть $(1+x)^n \geq 1+nx$ верно, тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+x^2n > 1+(n+1)x$$

Определение 34.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность E_n :

$$E_n = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n}; \quad 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим последовательность, в которой поменяем местами числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+3n+1}{n^2+2n}$$

Вернувшись к изначальной последовательности, получаем:

$$\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < \frac{n^2+2n}{n^3+3n+1}$$

Таким образом, $E_{n+1} > E_n$, а значит E_n монотонно возрастает, при этом она ограничена, а значит по теореме Вейерштрасса имеет предел, то есть e_n также имеет предел. ■

4.3 Пределы функций

Определение 35 (Предел функции по Коши). Число A называется пределом $f(x)$ в точке x_0 , если $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 , а также:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Определение 36 (Предел функции по Гейне). Число A называется пределом $f(x)$ в точке x_0 , если $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 , а также:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall x_n \neq x_0 \ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Утверждение 4.18. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. Пусть определение по Коши верно, также пусть $x_n \neq x_0$ – некоторая последовательность, такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то есть $\exists n_0 : \forall n > n_0 \ x_n \in U_\delta(x_0)$, но тогда по Коши $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$.

Пусть определение по Гейне верно, а по Коши нет, то есть:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $\exists x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, причём $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$, что противоречит определению по Гейне. ■

Теорема 4.19 (Принцип двух милиционеров для функций). Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0 , тогда:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x); \ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

Доказательство. Пусть $x_n \neq x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$. Тогда по принципу двух милиционеров для последовательностей $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A$. ■

Определение 37. Пусть $f(x)$ определена на некотором неограниченном множестве, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B \iff \forall \varepsilon > 0 \exists c : \forall x > c \ f(x) \in U_\varepsilon(B)$$

Теорема 4.20. Если у $f(x)$ существует предел в точке x_0 , он единственный.

Доказательство. Пусть у $f(x)$, определённой в проколотой окрестности точки x_0 , есть два предела A_1 и A_2 , тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0), x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0) \ f(x_1) \in U_\varepsilon(A_1), f(x_2) \in U_\varepsilon(A_2)$$

Возьмём $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(A_1), f(x) \in U_\varepsilon(A_2)$, но $U_\varepsilon(A_1) \cap U_\varepsilon(A_2) = \emptyset$, противоречие. ■

Определение 38. Пусть $f(x)$ определена в проколотой левой (правой) полуокрестности точки x_0 . Число A называется левым (правым) пределом $f(x)$ в точке x_0 , если:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta^\pm(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Утверждение 4.21. Функция $f(x)$, определённая в проколотой окрестности точки x_0 , имеет в ней предел тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Определение 39. Точка x_0 называется изолированной точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если:

$$\exists \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

Определение 40. Пусть $f(x)$ определена на $M \subset \mathbb{R}$. Она называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если x_0 – изолированная точка или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 41 (Непрерывность по Гейне). Пусть $f(x)$ определена на $M \subset \mathbb{R}$. Она называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если:

$$\forall x_n \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Определение 42 (Непрерывность по Коши). Пусть $f(x)$ определена на $M \subset \mathbb{R}$. Она называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

Теорема 4.22 (1-я теорема Больцано-Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, тогда:

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \implies \exists c \in [a; b] : f(c) = 0$$

Доказательство. Рассмотрим $d = \frac{a+b}{2}$. Если $f(d) = 0$, то $c = d$. Если $f(d) < 0$, то $a_1 = d, b_1 = b$, аналогично если $f(d) > 0$, то $a_1 = a, b_1 = d$, при этом $d_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Пусть $f(c) = k > 0$, тогда $\forall n \quad a_n < 0 \implies \forall \delta > 0 \quad \exists a_n \in U_\delta(c) : |f(c) - f(a_n)| > \frac{k}{2}$, что невозможно, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, противоречие. Аналогично при $f(c) < 0$. ■

Теорема 4.23. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда она ограничена на $[a; b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не ограничена на $[a; b]$. Возьмём $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда на одном из отрезков $[a; c]$ или $[c; b]$ она не ограничена. Без ограничения общности пусть это отрезок $[a; c]$. Тогда $a_1 = a, b_1 = c, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Аналогично в противном случае. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{k\}$$

Возьмём бесконечно большую последовательность d_n . Тогда $\forall n \quad \exists x_n \in [a_n; b_n] : f(x_n) > d_n$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k$; из непрерывности $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(k)$, но $f(x_n)$ – бесконечно большая. Таким образом, значение функции в точке равно бесконечности, противоречие. ■

Теорема 4.24. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда она достигает своего супремума на этом отрезке.

Доказательство. Возьмём $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда:

$$\sup_{[a;c]} f(x) \leq \sup_{[a;b]} f(x); \quad \sup_{[c;b]} f(x) \leq \sup_{[a;b]} f(x)$$

Из данных неравенств следует, что на $[a; c]$ или на $[c; b]$ супремум равен супремуму на $[a; b]$. Без ограничения общности пусть это отрезок $[a; c]$. Тогда $a_1 = a, b_1 = c, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Аналогично в противном случае. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{k\}$$

Возьмём бесконечно малую последовательность ε_n . Тогда:

$$\forall n \exists x_n \in [a_n; b_n] : f(x_n) > \sup_{[a_n; b_n]} f(x) - \varepsilon_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_{[a; b]} f(x)$$

Значит, из непрерывности функции $f(k) = \sup_{[a; b]} f(x)$. ■

5 Эквивалентность и группы

Определение 43. Пусть M – множество, тогда множество $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется бинарным отношением на M .

Определение 44. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность $a \sim a$
2. Симметричность $a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивность $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$

Теорема 5.1 (Малая теорема Ферма). $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P} : n^{p-1} \equiv_p 1$

Определение 45. Бинарной операцией \times на множестве M называется отображение из множества упорядоченных пар $M^2 = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ в множество M .

Определение 46. Пара $G(M; \times)$, M – множество, \times – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1. $\forall a, b \in M : (a \times b) \in M$
2. $\exists e \in M \forall a \in M : e \times a = a$
3. $\forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4. $\forall a, b, c \in M : (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

6 Тригонометрия

Определение 47. Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

Определение 48. Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

Определение 49. Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

Определение 50. Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

Утверждение 6.1.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Доказательство. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$
■

Утверждение 6.2.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 6.1 разделить на $\cos^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 6.3.

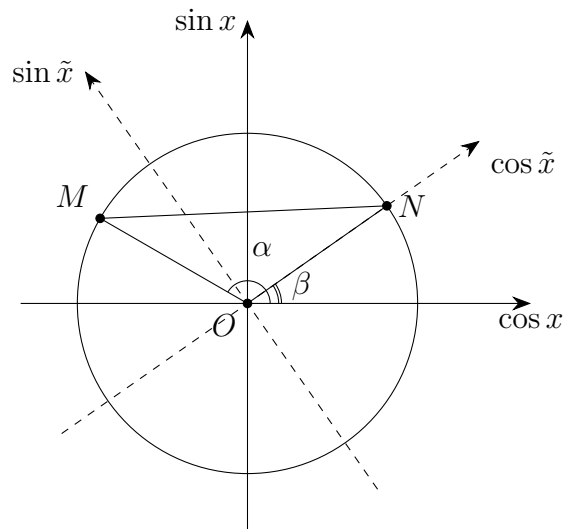
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 6.1 разделить на $\sin^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 6.4.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол β , тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

То есть $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$, а значит $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$. ■

Утверждение 6.5.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Утверждение 6.6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

Доказательство.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

■

Утверждение 6.7.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Утверждение 6.8.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Утверждение 6.9.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 6.10.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 6.11.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

Утверждение 6.12.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

■

Утверждение 6.13.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

■

Утверждение 6.14.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Доказательство.

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

■

Утверждение 6.15.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Утверждение 6.16.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Утверждение 6.17.

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \\ &= \cos(2\alpha + \alpha) = \\ &= \cos(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (1 + 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (3 - 2 \cos^2 \alpha) = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Утверждение 6.18.

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \\ &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha + 1) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (3 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Утверждение 6.19.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \iff \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Утверждение 6.20.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

■

Утверждение 6.21.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Утверждение 6.22.

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \\ &- \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Утверждение 6.23.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&+ \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.24.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \sin \beta &= \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&- \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

Утверждение 6.25.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

Утверждение 6.26.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

Утверждение 6.27.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

Утверждение 6.28.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

Утверждение 6.29.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.21:

$$2 \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 6.30.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.22:

$$-2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = -\frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 6.31.

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.23:

$$2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 6.32.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Доказательство.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

■

Утверждение 6.33.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

Утверждение 6.34.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

7 Комплексные числа

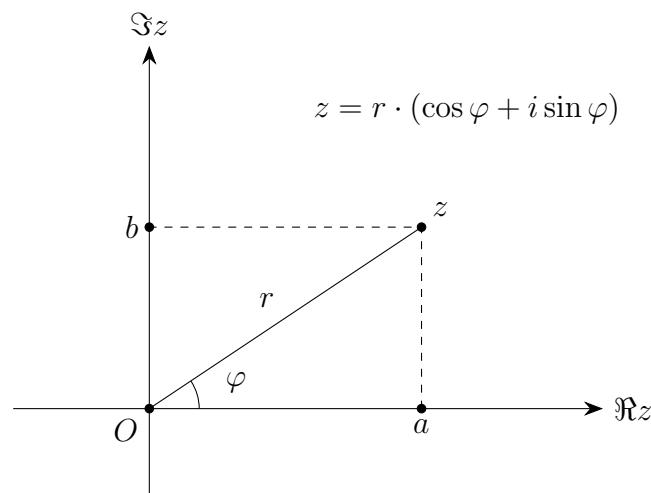
Определение 51. Мнимой единицей называется такое число i , что $i^2 = -1$.

Определение 52. Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где $a = \Re z$ — действительная часть, а $b = \Im z$ — мнимая.

Определение 53. Число z_1 называется сопряженным к числу z , если $\Re z_1 = \Re z$; $\Im z_1 = -\Im z$. Обозначение: $z_1 = \bar{z}$.

Определение 54. Модулем $z \in \mathbb{C}$ называется $|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$.

Определение 55. Комплексная плоскость:



Теорема 7.1 (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Доказательство. Докажем по индукции. $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ верно. Пусть $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ верно, докажем, что для $n + 1$ утверждение верно.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi) \cdot \cos \varphi - \sin(n\varphi) \cdot \sin \varphi) + i(\cos(n\varphi) \cdot \sin \varphi + \sin(n\varphi) \cdot \cos \varphi)) = \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)) \end{aligned}$$

■

Определение 56. Корнем из комплексного числа называется:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

7.1 Матрицы поворота

Определение 57. Матрицей поворота на угол α называется:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot E + \sin \alpha \cdot I$$

Утверждение 7.2.

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff z = re^{i\varphi}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \\ \cos x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} \cdot (-1)^i \\ \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot (-1)^i \\ e^{ix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot i^k = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

■

8 Логарифмы

Определение 58. Пусть $a > 0$; $a \neq 1$, $b > 0$. Логарифмом $\log_a b$ числа b по основанию a называется такое число c , что $a^c = b$. Из этого, а также свойств степеней следует:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Утверждение 8.1.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a (bc)}$$

Утверждение 8.2.

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \frac{b}{c} = a^{\log_a \left(\frac{b}{c} \right)}$$

Утверждение 8.3.

$$\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$a^{\log_a (b^k)} = b^k = (a^{\log_a b})^k = a^{k \cdot \log_a b}$$

Утверждение 8.4.

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$(a^k)^{\log_{a^k} b} = a^{k \cdot \log_{a^k} b} = b = a^{\log_a b}$$

Следствие 8.4.1.

$$\log_{a^k} (b^k) = \log_a b$$

Утверждение 8.5.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_c a \neq 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} &\iff \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \\ c^{\log_c b} = b &= a^{\log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = c^{\log_a b \cdot \log_c a} \end{aligned}$$

Утверждение 8.6.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\frac{1}{\log_b a}} = (b^{\log_b a})^{\frac{1}{\log_b a}} = b = a^{\log_a b}$$

Утверждение 8.7.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = (a^{\log_a c})^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$$

Определение 59. Натуральным логарифмом $\ln x$ называется логарифм с основанием e .

Определение 60. Десятичным логарифмом $\lg x$ называется логарифм с основанием 10.

8.5 Показательные уравнения и неравенства

$$a^x = a^{x_0} \iff x = x_0$$

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

$$a^x > a^{x_0} \iff \begin{cases} x > x_0, \text{ если } a > 1 \\ x < x_0, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^x > b \iff \begin{cases} x > \log_a b, \text{ если } a > 1 \\ x < \log_a b, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

8.6 Логарифмические уравнения и неравенства

$$\log_a x = b \iff x = a^b$$

$$\log_a x > b \iff \begin{cases} x > a^b, \text{ если } a > 1 \\ x < a^b, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} & a > 1 \\ \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

9 Линейная алгебра

9.1 Координаты на плоскости

Утверждение 9.1. Пусть даны $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда середина отрезка AB будет иметь координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$, а его длина будет равна $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Утверждение 9.2. Пусть $A(x_0; y_0) \in \omega(O; r)$, $O(a; b)$, тогда $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$.

Утверждение 9.3. Пусть даны $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через A и B будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Утверждение 9.4. Пусть даны точка $M(x_0; y_0)$ и прямая $l : ax + by + c = 0$. Тогда:

$$\rho(M; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

9.2 Векторы

Определение 61. Направленным отрезком \overrightarrow{AB} называется отрезок AB , у которого заданы начало A и конец B .

Определение 62. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются коллинеарными, если $AB \parallel CD$.

Определение 63. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются конгруэнтными, если они коллинеарны, B и D лежат в одной плоскости относительно AC и их длины равны.

Определение 64. Пусть $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ – векторы в \mathbb{R}^n . Они называются линейно зависимыми, если $\exists a_1, \dots, a_n$, не равные одновременно нулю, что $a_1 \vec{r}_1 + \dots + a_n \vec{r}_n = 0$.

Определение 65. Пусть X – множество, рассмотрим $X \times X = \{(x; y) | x, y \in X\}$. Тогда $\rho \subset X \times X$ – бинарное отношение.

Определение 66. Бинарное отношение $\sim \subset X \times X$ называется отношением эквивалентности на множестве X , если $\forall x, y, z \in X : x \sim x; x \sim y \iff y \sim x; x \sim y, y \sim z \iff x \sim z$.

9.3 Линейные пространства

Определение 67. Элементами поля F являются скаляры или векторы. L называется линейным пространством над полем F , если $\forall a, b \in L; \forall \lambda, \mu \in F$:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \vec{0} \in L : a + \vec{0} = a$
4. $\forall a \exists b : a + b = \vec{0}$
5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
6. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
7. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
8. $1 \cdot a = a$

Определение 68. Пусть L – линейное пространство над полем F ; $u_1, \dots, u_n \in L$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, тогда $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ – линейная комбинация. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\forall i : \alpha_i = 0$.

Определение 69. Пусть $U \subset L$, множество векторов $\langle U \rangle$, которые не выражаются через элементы U называется линейной оболочкой.

Определение 70. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ – система векторов. Она называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Теорема 9.5. Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других.

Определение 71. Система $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ линейно независимых векторов линейного пространства L называется базисом, если $\langle U \rangle = L$.

Определение 72. Скалярным произведением векторов $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ называется величина $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$. Если \vec{a} и \vec{b} сонаправлены, то угол между ними равен нулю, а если коллинеарны, но не сонаправлены – π :

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $k \cdot (\vec{a}; \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

9.4 Матрицы

Определение 73. Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Определение 74. Квадратная матрица называется верхней треугольной, если $\forall i, j; i > j : a_{ij} = 0$.

Определение 75. Квадратная матрица называется нижней треугольной, если $\forall i, j; i < j : a_{ij} = 0$.

Определение 76. Квадратная матрица называется диагональной, если $\forall i, j; i \neq j : a_{ij} = 0$. Обозначение: $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Определение 77. Диагональная матрица порядка n , у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной. Обозначение: E или E_n . Элементы единичной матрицы обозначаются δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Определение 78. Квадратная матрица A называется скалярной, если $A = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Определение 79. Сумма диагональных элементов матрицы A называется её шпуром или следом. Обозначение: $\text{Sp } A$ или $\text{tr } A$.

Определение 80. Матрица B называется транспонированной по отношению к матрице A , если $\forall i, j : b_{ij} = a_{ji}$. Обозначение: $B = A^T$.

Определение 81. Квадратная матрица A называется симметрической, если $A^T = A$.

Определение 82. Квадратная матрица A называется кососимметрической, если $A^T = -A$.

Определение 83. Матрица B называется комплексно сопряжённой по отношению к матрице A , если $\forall i, j : b_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Обозначение: $B = \overline{A}$.

Определение 84. Матрица B называется эрмитово сопряжённой по отношению к матрице A , если $\forall i, j : b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Обозначение: $B = A^*$.

Определение 85. Квадратная матрица A называется эрмитовой, если $A^* = A$.

Определение 86. Квадратная матрица A называется косоэрмитовой, если $A^* = -A$.

Определение 87. Матрица называется нулевой, если все её элементы равны нулю. Обозначение: $A = O$.

Определение 88. Матрица называется неотрицательной, если $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$.

Определение 89. Матрица называется стохастической, если:

$$\forall i, j : a_{ij} \geq 0; \forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$$

9.4.1 Произведение матриц

Определение 90. Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times k$. Их произведением будет матрица размера $m \times k$, в которой:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}$$

Утверждение 9.6. Произведение верхних треугольных матриц является верхней треугольной матрицей.

Определение 91. Пусть A – квадратная матрица порядка n . Матрица B называется обратной к A , если $A \cdot B = B \cdot A = E$. Обозначение: $B = A^{-1}$.

Определение 92. Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^T = A^{-1}$.

Определение 93. Квадратная матрица A называется унитарной, если $A^* = A^{-1}$.

Определение 94. Матрица A называется нильпотентной, если $A^k = O$, $k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из таких k называется показателем нильпотентности матрицы A .

Определение 95. Матрица A называется периодической, если $A^k = E$, $k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из таких k называется периодом матрицы A .

9.4.2 Определитель

Определение 96. Пусть дана перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Инверсией называется число таких пар $(i; j)$, что $i > j$; $\alpha_i < \alpha_j$.

Определение 97. Пусть дана квадратная матрица A порядка n . Если α_i – перестановка чисел от 1 до n , а $N(\alpha_i)$ – число инверсия в α_i перестановке, то определителем матрицы A называется:

$$\det A = \sum_{\alpha_i} (-1)^{N(\alpha_i)} \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Теорема 9.7. Пусть дана квадратная матрица A , M_{ji} – дополнительный минор элемента a_{ji} . Элементы её обратной матрицы можно вычислить по формуле:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot M_{ji}}{\det A}$$

Определение 98. Квадратная матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$.

Определение 99. Квадратная матрица A называется невырожденной, если $\det A \neq 0$.

Определение 100. Квадратная матрица A называется унимодулярной, если $|\det A| = 1$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Определение 101. Квадратная матрица A называется матрицей перестановки, если она получена из E перестановкой строк.

Определение 102. Квадратная матрица A называется элементарной, если она получена из E элементарным преобразованием.

9.4.3 Ранг матрицы

Определение 103. Рангом матрицы называется наибольший порядок из всех порядков её ненулевых миноров.

Теорема 9.8 (О базисном миноре). Пусть M_r – базисный минор матрицы A , строки соответствующей матрицы – базисные строки, а столбцы – базисные столбцы. Тогда:

1. Базисные строки линейно независимы.
2. Базисные столбцы линейно независимы.
3. Любая строка (столбец) матрицы A – линейная комбинация базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из определения базиса. Без ограничения общности пусть базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы A , то есть матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2r} & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{r1} & \mathbf{a}_{r2} & \cdots & \mathbf{a}_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если расширить базисный минор до $r + 1$ строки и $r + 1$ столбца, при этом все его строки и столбцы останутся линейно независимыми, тогда $\text{rank } A = r + 1$, но по условию $\text{rank } A = r$, противоречие. ■

Теорема 9.9 (Кронекер-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $\text{rank } A = \text{rank} \begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть система совместна, тогда:

$$b_i = \sum_j a_{ji} x_j; \quad \vec{b} = \sum_j \vec{a}_j x_j$$

То есть, \vec{b} выражается через \vec{a}_i , а значит $\text{rank } A = \text{rank} (A | \vec{b})$. Пусть $\text{rank } A = \text{rank} (A | \vec{b})$. Тогда по теореме о базисном миноре она совместна. \blacksquare

Теорема 9.10 (Правило Крамера). Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестным вида $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$:

[illegible]

Тогда если Δ – определитель матрицы A , то $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы A , в которой i -й столбец заменили на вектор свободных членов:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(i-1)} & b_{(n-1)} & a_{(n-1)(i+1)} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Теорема 9.11 (Конечномерная альтернатива Фредгольма). Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными вида $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$:

[illegible]

Тогда выполняется одно из двух условий:

1. Система имеет 1 решение для любого \vec{b} и соответствующая однородная система уравнений имеет только тривиальное решение.
2. Соответствующая однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, тогда $\exists \vec{b} : A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ не имеет решений.

Доказательство.

1. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда все столбцы A называются векторами n -мерного пространства, при этом они линейно независимы, то есть они образуют в этом пространстве базис. Тогда $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n$; любой вектор этого пространства выражается единственным образом через линейную комбинацию базисных векторов. Система имеет единственное решение. Поскольку векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно независимы, то нулю может равняться только их тривиальная комбинация.

2. Пусть $\det A = 0$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ – линейно зависимы, поэтому существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю. $\dim\langle \vec{a}_i \rangle = k < n$. Пусть при любом \vec{b} система имеет решение. Тогда любой \vec{b} выражается через линейную комбинацию \vec{a}_i , то есть $\{\vec{a}_i\}$ – базис в n -мерном пространстве. Противоречие.

■