

Алгебра

Содержание

1	Решение уравнений и неравенств.	2
1.1	Иррациональные уравнения	2
1.2	Иррациональные неравенства	2
1.3	Неравенства с модулем	2
2	Многочлены	2
3	Множества	4
4	Числовые последовательности	4
4.1	Аксиоматика действительных чисел	4
4.2	Прогрессии	5
5	Эквивалентность и группы	6
6	Пределы	7
7	Тригонометрия	8
8	Комплексные числа	16
8.1	Матрицы поворота	17
9	Логарифмы	17
9.5	Показательные уравнения и неравенства	19
9.6	Логарифмические уравнения и неравенства	19
10	Линейная алгебра	19
10.1	Координаты на плоскости	19
10.2	Векторы	20
10.3	Линейные пространства	20
10.4	Матрицы	21

1 Решение уравнений и неравенств.

1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$$
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a, \quad a > 0 \iff \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad |f(x)| > a \iff \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |g(x)| \iff (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0 \\ |f(x)| + |g(x)| &> |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) < 0 \\ |f(x)| + |g(x)| &\leq |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

2 Многочлены

Определение 1. Многочленом от переменной x над K называется выражение вида: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in K$ — коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$.

Определение 2. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$, называется степенью многочлена f :

$$k = \deg f$$

a_0 — свободный член

$a_n x^n$ — старший член

a_n — старший коэффициент

Определение 3. Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях x равны.

Определение 4.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + d_1x + d_0, \text{ где } d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$$

Утверждение 2.1. Пусть $\deg f(x) \neq 0$, $\deg g(x) \neq 0$, тогда:

1. $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max \{\deg f, \deg g\}$
2. $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3. $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

Доказательство.

1. Пусть $\deg f = \deg g = n$

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Если $k > n$, то $a_k = 0$, $b_k = 0$, то есть $(a_k + b_k) = 0$

Пусть $\deg f = n$, $\deg g = m$, $m < n$

Если $k > n$, то $a_k + b_k = 0$, так как $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{n-1} = b_n = 0$

Тогда $a_n + b_n = a_n \neq 0$

$$2. f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{степень} < n \\ 0}}$$

■

Определение 5. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot g(x) = f(x)$.

Утверждение 2.2. Всякий многочлен $f(x) \neq 0$ делится на самого себя.

Утверждение 2.3. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $f(x)$, то $f(x) = c \cdot g(x)$, $c \in K$.

Определение 6. Число x_0 является корнем $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

Доказательство.

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot q(a) + r = r$$

■

Следствие 2.4.1. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

3 Множества

Определение 7. Множества равноможны, если между ними существует биекция.

Определение 8. Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Определение 9. Множества, равноможные \mathbb{N} , называются счетными.

Определение 10. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{x \mid x = (a, b), a \in A, b \in B\}$.

Определение 11. Число a называется числом кратности k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - a)^k$, но не делится на $(x - a)^{k+1}$.

4 Числовые последовательности

Определение 12. Бесконечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 13. Конечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $a : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 14. Множество M , $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists c : \forall x \in M : x \leq c$.

Определение 15. Множество M , $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists c : \forall x \in M : x \geq c$.

Определение 16. Множество M , $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 17. Последовательность a_n называется ограниченной, если $a(\mathbb{N})$ ограничено.

Определение 18. Последовательность a_n называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$.

Теорема 4.1. Пусть все элементы последовательности a_n положительны. Последовательность a_n возрастает тогда и только тогда, когда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

4.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 19. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества M называется точной верхней гранью (супремумом):

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \leq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > a - \varepsilon$$

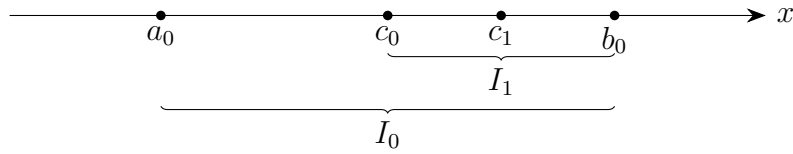
Определение 20. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества M называется точной нижней гранью (инфинумом):

$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \geq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < a + \varepsilon$$

Теорема 4.2. Пусть $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(\mathbb{N})$ ограничена. Тогда:

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : a^{-1}((x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)) \text{ бесконечно} \\ \parallel \\ U_\varepsilon(x_0) \end{aligned}$$

Доказательство. Если $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$ бесконечно, то доказано. Если $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$ конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$ и $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$, а также середину a_0b_0 , то есть $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Разделим один из получившихся отрезков (отметим c_0 и b_0 , как a_1 и b_1 соответственно) пополам, получив $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$

1. $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
2. $a(\mathbb{N})$ ограничена сверху b_i элементом
3. $a(\mathbb{N})$ имеет точную верхнюю грань $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$
и точную нижнюю грань $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4. $M_1 \leq M_2$
5. $[M_1; M_2] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n]$
6. Пусть $M_1 < M_2$, тогда $\exists n : b_n - a_n < M_2 - M_1$.
Получаем противоречие, значит $M_1 = M_2 = M$.
7. Возьмем такое n , что $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $[a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(M)$.
То есть $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$ бесконечно.

■

Определение 21. Число x называется частичным пределом последовательности $a(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(x))$ бесконечно.

4.2 Прогрессии

Определение 22. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Определение 23. Разностью арифметической прогрессии называется разность a_{n+1} и a_n .

Утверждение 4.3. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

Утверждение 4.4. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k < n : a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

Теорема 4.5. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) = \\ &= n \cdot a_1 + d \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) = \\ &= n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

■

Определение 24. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad b_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

Утверждение 4.6. Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 : \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

Теорема 4.7. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \\ &= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\ &= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

■

5 Эквивалентность и группы

Определение 25. Пусть M – множество, тогда множество $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется бинарным отношением на M .

Определение 26. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность $a \sim a$
2. Симметричность $a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивность $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$

Теорема 5.1 (Малая теорема Ферма). $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P} : n^{p-1} \equiv_p 1$

Определение 27. Бинарной операцией \times на множестве M называется отображение из множества упорядоченных пар $M^2 = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ в множество M .

Определение 28. Пара $G(M; \times)$, M – множество, \times – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1. $\forall a, b \in M : (a \times b) \in M$
2. $\exists e \in M \forall a \in M : e \times a = a$
3. $\forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4. $\forall a, b, c \in M : (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

6 Пределы

Определение 29. A называется пределом (x_n) , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 6.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$$

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$; $y_n \rightarrow b$. По определению $N_a(\varepsilon) : \forall n > N_a(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon$, $N_b(\varepsilon) : \forall n > N_b(\varepsilon) \quad |y_n - b| < \varepsilon$. Рассмотрим $N_c(\varepsilon) : \forall n > N_c(\varepsilon) \quad |x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$: $|x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq 2\varepsilon$ при $N_c = \max(N_a(\varepsilon); N_b(\varepsilon))$, то есть $2N_c(\varepsilon)$ – это номер, с которого утверждение точно выполняется. ■

Теорема 6.2 (Теорема Вейерштрасса). Пусть (x_n) монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет предел в \mathbb{R}

Доказательство. Пусть (x_n) монотонно возрастает. По определению монотонно возрастающей последовательности: $\forall n : x_{n+1} > x_n$, пусть (x_n) не ограничена, то есть $\nexists m : \forall n \quad x_n < m$, тогда $\sup(x_n) = +\infty$, а значит $(x_n) \rightarrow \infty$. Пусть $\exists m : \forall n \quad x_n \leq m$ и $m = \sup(x_n)$. Тогда $m = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$. Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ■

Теорема 6.3. Пусть $(x_n), (y_n), (z_n)$ – последовательности, причем $x_n \leq y_n \leq z_n$, кроме того $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n)$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$.

Лемма 6.4 (Неравенство Бернулли).

$$(1 + x)^n \geq 1 + xn, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0$$

Доказательство. Докажем по индукции: $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ верно, пусть $(1 + x)^n \geq 1 + xn$ верно, тогда:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + xn) = 1 + x + nx + x^2n > 1 + (n + 1)x$$

Определение 30.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство. Рассмотрим $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} > 2 - \text{последовательность ограничена снизу.}$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим $\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$ и используем неравенство Бернулли:

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+3n+1}{n^2+2n}$$

То есть $\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < \frac{n^2+2n}{n^3+3n+1}$, а значит E_n монотонно возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists!$ предел E_n , а значит $\exists!$ предел e_n . ■

7 Тригонометрия

Определение 31. Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

Определение 32. Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

Определение 33. Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

Определение 34. Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

Утверждение 7.1.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Доказательство. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

Утверждение 7.2.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 7.1 разделить на $\cos^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 7.3.

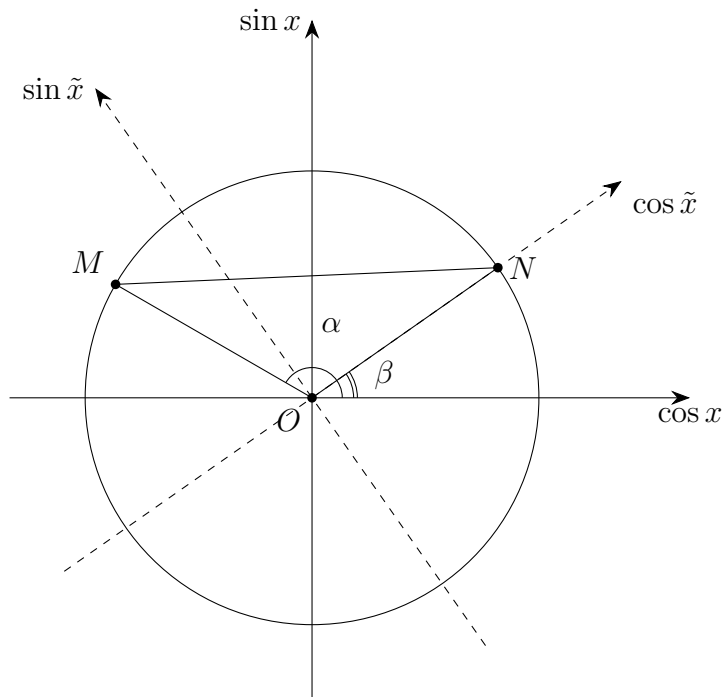
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 7.1 разделить на $\sin^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 7.4.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол β , тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

То есть $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$, а значит $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$. ■

Утверждение 7.5.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Утверждение 7.6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

Доказательство.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

■

Утверждение 7.7.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Утверждение 7.8.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Утверждение 7.9.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 7.10.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 7.11.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

Утверждение 7.12.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

■

Утверждение 7.13.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

■

Утверждение 7.14.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Доказательство.

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

■

Утверждение 7.15.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Утверждение 7.16.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Утверждение 7.17.

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \\ &= \cos(2\alpha + \alpha) = \\ &= \cos(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (1 + 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (3 - 2 \cos^2 \alpha) = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Утверждение 7.18.

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \\ &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha + 1) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (3 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Утверждение 7.19.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \iff \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Утверждение 7.20.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

■

Утверждение 7.21.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Утверждение 7.22.

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \\ &- \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Утверждение 7.23.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&+ \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

Утверждение 7.24.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \sin \beta &= \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&- \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

Утверждение 7.25.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

Утверждение 7.26.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

Утверждение 7.27.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

Утверждение 7.28.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

Утверждение 7.29.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.21:

$$2 \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 7.30.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.22:

$$-2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = -\frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 7.31.

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.23:

$$2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 7.32.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Доказательство.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

■

Утверждение 7.33.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

Утверждение 7.34.

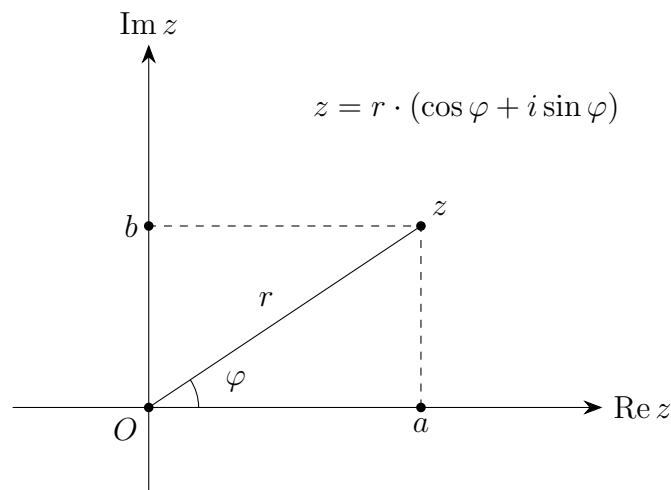
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

8 Комплексные числа

Определение 35. Мнимой единицей называется такое число i , что $i^2 = -1$.**Определение 36.** Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где $a = \operatorname{Re} z$ – действительная часть, а $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая.**Определение 37.** Число z_1 называется сопряженным к числу z , если $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z_1 = -\operatorname{Im} z$. Обозначение: $z_1 = \bar{z}$.**Определение 38.** Модулем $z \in \mathbb{C}$ называется $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.**Определение 39.** Комплексная плоскость:

Теорема 8.1 (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Доказательство. Докажем по индукции. $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ верно. Пусть $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ верно, докажем, что $z^{n+1} = r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi))$ верно.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi) \cdot \cos \varphi - \sin(n\varphi) \cdot \sin \varphi) + i(\cos(n\varphi) \cdot \sin \varphi + \sin(n\varphi) \cdot \cos \varphi)) = \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)) \end{aligned}$$

■

Определение 40. Корнем из комплексного числа называется:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

8.1 Матрицы поворота

Определение 41. Матрицей поворота на угол α называется:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot E + \sin \alpha \cdot I$$

Утверждение 8.2.

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff z = re^{i\varphi}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \\ \cos x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} \cdot (-1)^i \\ \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot (-1)^i \\ e^{ix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot i^k = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

■

9 Логарифмы

Определение 42. Пусть $a > 0$; $a \neq 1$, $b > 0$. Логарифмом $\log_a b$ числа b по основанию a называется такое число c , что $a^c = b$. Из этого, а также свойств степеней следует:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Утверждение 9.1.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a (bc)}$$

■

Утверждение 9.2.

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

Доказательство.

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \frac{b}{c} = a^{\log_a \left(\frac{b}{c} \right)}$$

■

Утверждение 9.3.

$$\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$a^{\log_a (b^k)} = b^k = (a^{\log_a b})^k = a^{k \cdot \log_a b}$$

■

Утверждение 9.4.

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Доказательство.

$$(a^k)^{\log_{a^k} b} = a^{k \cdot \log_{a^k} b} = b = a^{\log_a b}$$

■

Следствие 9.4.1.

$$\log_{a^k} (b^k) = \log_a b$$

Утверждение 9.5.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_c a \neq 0$$

Доказательство.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \iff \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$c^{\log_c b} = b = a^{\log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = c^{\log_a b \cdot \log_c a}$$

■

Утверждение 9.6.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\frac{1}{\log_b a}} = (b^{\log_b a})^{\frac{1}{\log_b a}} = b = a^{\log_a b}$$

■

Утверждение 9.7.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Доказательство.

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$$

■

Определение 43. Натуральным логарифмом $\ln x$ называется логарифм с основанием e .

Определение 44. Десятичным логарифмом $\lg x$ называется логарифм с основанием 10.

9.5 Показательные уравнения и неравенства

$$a^x = a^{x_0} \iff x = x_0$$

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

$$a^x > a^{x_0} \iff x > x_0$$

$$a^x > b \iff \begin{cases} x > \log_a b, & \text{если } a > 1 \\ x > \log_a b, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

9.6 Логарифмические уравнения и неравенства

$$\log_a x = b \iff x = a^b$$

$$\log_a x > b \iff \begin{cases} x > a^b, & \text{если } a > 1 \\ x < a^b, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} & a > 1 \\ \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

10 Линейная алгебра**10.1 Координаты на плоскости**

Утверждение 10.1. Пусть даны $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда середина отрезка AB будет иметь координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, а его длина будет равна $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Утверждение 10.2. Пусть $A(x_0; y_0) \in \omega(O; r)$, $O(a; b)$, тогда $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$.

Утверждение 10.3. Пусть даны $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через A и B будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Утверждение 10.4. Пусть даны точка $M(x_0; y_0)$ и прямая $l: ax + by + c = 0$. Тогда:

$$\rho(M; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

10.2 Векторы

Определение 45. Направленным отрезком \overrightarrow{AB} называется отрезок AB , у которого заданы начало A и конец B .

Определение 46. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются коллинеарными, если $AB \parallel CD$.

Определение 47. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются конгруэнтными, если они коллинеарны, B и D лежат в одной плоскости относительно AC и их длины равны.

Определение 48. Пусть $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ – векторы в \mathbb{R}^n . Они называются линейно зависимыми, если $\exists a_1, \dots, a_n$, не равные одновременно нулю, что $a_1\vec{r}_1 + \dots + a_n\vec{r}_n = 0$.

Определение 49. Пусть X – множество, рассмотрим $X \times X = \{(x; y) \mid x, y \in X\}$. Тогда $\rho \subset X \times X$ – бинарное отношение.

Определение 50. Бинарное отношение $\sim \subset X \times X$ называется отношением эквивалентности на множестве X , если $\forall x, y, z \in X : x \sim x; x \sim y \iff y \sim x; x \sim y, y \sim z \iff x \sim z$.

10.3 Линейные пространства

Определение 51. Элементами поля F являются скаляры или векторы. L называется линейным пространством над полем F , если $\forall a, b \in L; \forall \lambda, \mu \in F$:

- | | |
|--|---|
| 1. $a + b = b + a$ | 5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ |
| 2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ | 6. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ |
| 3. $\exists \vec{0} \in L : a + \vec{0} = a$ | 7. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ |
| 4. $\forall a \exists b : a + b = \vec{0}$ | 8. $1 \cdot a = a$ |

Определение 52. Пусть L – линейное пространство над полем F ; $u_1, \dots, u_n \in L$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, тогда $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ – линейная комбинация. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\forall i : \alpha_i = 0$.

Определение 53. Пусть $U \subset L$, множество векторов $\langle U \rangle$, которые не выражаются через элементы U называется линейной оболочкой.

Определение 54. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ – система векторов. Она называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Теорема 10.5. Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других.

Определение 55. Система $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ линейно независимых векторов линейного пространства L называется базисом, если $\langle U \rangle = L$.

Определение 56. Скалярным произведением векторов $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ называется величина $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$. Если \vec{a} и \vec{b} сонаправлены, то угол между ними равен нулю, а если коллинеарны, но не сонаправлены – π :

- | | |
|---|--|
| 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ | 3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ |
| 2. $k \cdot (\vec{a}; \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$ | 4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} ^2 - \vec{a} ^2 - \vec{b} ^2)$ |

10.4 Матрицы

Определение 57. Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Определение 58. Квадратная матрица называется верхней треугольной, если $\forall i, j; i > j : a_{ij} = 0$.

Определение 59. Квадратная матрица называется нижней треугольной, если $\forall i, j; i < j : a_{ij} = 0$.

Определение 60. Квадратная матрица называется диагональной, если $\forall i, j; i \neq j : a_{ij} = 0$. Обозначение: $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Определение 61. Диагональная матрица порядка n , у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной. Обозначение: E или E_n . Элементы единичной матрицы обозначаются δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Определение 62. Квадратная матрица A называется скалярной, если $A = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Определение 63. Матрица B называется транспонированной по отношению к матрице A , если $\forall i, j : b_{ij} = a_{ji}$. Обозначение: $B = A^T$.

Определение 64. Квадратная матрица A называется симметрической, если $A^T = A$.

Определение 65. Квадратная матрица A называется кососимметрической, если $A^T = -A$.

Определение 66. Матрица B называется комплексно сопряжённой по отношению к матрице A , если $\forall i, j : b_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Обозначение: $B = \overline{A}$.

Определение 67. Матрица B называется эрмитово сопряжённой по отношению к матрице A , если $\forall i, j : b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Обозначение: $B = A^*$.

Определение 68. Квадратная матрица A называется эрмитовой, если $A^* = A$.

Определение 69. Квадратная матрица A называется косоэрмитовой, если $A^* = -A$.

Определение 70. Матрица называется нулевой, если все её элементы равны нулю. Обозначение: $A = O$.

Определение 71. Матрица называется неотрицательной, если $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$.

Определение 72. Матрица называется стохастической, если:

$$\forall i, j : a_{ij} \geq 0; \forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$$

Определение 73. Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times k$. Их произведением будет матрица размера $m \times k$, в которой:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}$$

Утверждение 10.6. Произведение верхних треугольных матриц является верхней треугольной матрицей.

Определение 74. Пусть A – квадратная матрица порядка n . Матрица B называется обратной к A , если $A \cdot B = B \cdot A = E$. Обозначение: $B = A^{-1}$.

Определение 75. Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^T = A^{-1}$.

Определение 76. Квадратная матрица A называется унитарной, если $A^* = A^{-1}$.

Определение 77. Матрица A называется нильпотентной, если $A^k = O$, $k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из таких k называется показателем нильпотентности матрицы A .

Определение 78. Матрица A называется периодической, если $A^k = E$, $k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из таких k называется периодом матрицы A .

Определение 79. Пусть дана перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Инверсией называется число таких пар $(i; j)$, что $i > j$; $\alpha_i < \alpha_j$.

Определение 80. Пусть дана квадратная матрица A порядка n . Если α_i – перестановка чисел от 1 до n , а $N(\alpha_i)$ – число инверсия в α_i перестановке, то определителем матрицы A называется:

$$\det A = \sum_{\alpha_i} (-1)^{N(\alpha_i)} \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Теорема 10.7. Пусть дана квадратная матрица A , M_{ji} – дополнительный минор элемента a_{ji} . Элементы её обратной матрицы можно вычислить по формуле:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot M_{ji}}{\det A}$$

Определение 81. Квадратная матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$.

Определение 82. Квадратная матрица A называется невырожденной, если $\det A \neq 0$.

Определение 83. Квадратная матрица A называется унимодулярной, если $|\det A| = 1$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Определение 84. Квадратная матрица A называется матрицей перестановки, если она получена из E перестановкой строк.

Определение 85. Квадратная матрица A называется элементарной, если она получена из E элементарным преобразованием.