

# Алгебра

## Содержание

<b>1 Решение уравнений и неравенств.</b>	<b>2</b>
1.1 Иррациональные уравнения . . . . .	2
1.2 Иррациональные неравенства . . . . .	2
1.3 Неравенства с модулем . . . . .	2
<b>2 Многочлены</b>	<b>2</b>
<b>3 Множества</b>	<b>4</b>
<b>4 Числовые последовательности</b>	<b>4</b>
4.1 Прогрессии . . . . .	6
4.2 Пределы последовательностей . . . . .	7
4.3 Пределы функций . . . . .	9
<b>5 Эквивалентность и группы</b>	<b>11</b>
<b>6 Тригонометрия</b>	<b>11</b>
<b>7 Комплексные числа</b>	<b>19</b>
7.1 Матрицы поворота . . . . .	20
<b>8 Логарифмы</b>	<b>20</b>
8.5 Показательные уравнения и неравенства . . . . .	22
8.6 Логарифмические уравнения и неравенства . . . . .	22
<b>9 Линейная алгебра</b>	<b>22</b>
9.1 Координаты на плоскости . . . . .	22
9.2 Векторы . . . . .	22
9.3 Линейные пространства . . . . .	23
9.4 Матрицы . . . . .	23
9.4.1 Произведение матриц . . . . .	24
9.4.2 Определитель . . . . .	25
9.4.3 Ранг матрицы . . . . .	25

# 1 Решение уравнений и неравенств.

## 1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

## 1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$$
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

## 1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a, a > 0 \iff \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad |f(x)| > a \iff \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq |g(x)| &\iff (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0 \\ |f(x)| + |g(x)| &> |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) < 0 \\ |f(x)| + |g(x)| &\leq |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

# 2 Многочлены

**Определение 1.** Многочленом от переменной  $x$  над  $K$  называется выражение вида:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_k \in K$  – коэффициент многочлена,  $a_n \neq 0$ .

**Определение 2.** Наибольшее  $k$  такое, что  $a_k \neq 0$ , называется степенью многочлена  $f$ :

$$\begin{aligned} k &= \deg f \\ a_0 &- \text{свободный член} \\ a_n x^n &- \text{старший член} \\ a_n &- \text{старший коэффициент} \end{aligned}$$

**Определение 3.** Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях  $x$  равны.

**Определение 4.**

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Суммой многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + d_1x + d_0, \text{ где } d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\deg f(x) \neq 0$ ,  $\deg g(x) \neq 0$ , тогда:

1.  $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max \{\deg f, \deg g\}$
2.  $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3.  $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

*Доказательство.*

1. Пусть  $\deg f = \deg g = n$

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Если  $k > n$ , то  $a_k = 0$ ,  $b_k = 0$ , то есть  $(a_k + b_k) = 0$

Пусть  $\deg f = n$ ,  $\deg g = m$ ,  $m < n$

Если  $k > n$ , то  $a_k + b_k = 0$ , так как  $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{n-1} = b_n = 0$

Тогда  $a_n + b_n = a_n \neq 0$

$$2. f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \underbrace{\dots}_{\substack{\nwarrow \\ 0}} \underbrace{\dots}_{\text{степень} < n}$$

**Определение 5.** Многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$ , если существует такой многочлен  $h(x)$ , что  $h(x) \cdot g(x) = f(x)$ .

**Утверждение 2.2.** Всякий многочлен  $f(x) \neq 0$  делится на самого себя.

**Утверждение 2.3.** Если  $f(x)$  делится на  $g(x)$ , а  $g(x)$  делится на  $f(x)$ , то  $f(x) = c \cdot g(x)$ ,  $c \in K$ .

**Определение 6.** Число  $x_0$  является корнем  $f(x)$ , если  $f(x_0) = 0$ .

**Теорема 2.4** (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена  $P(x)$  на двучлен  $(x - a)$  равен  $P(a)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - a) \cdot q(x) + r \\ P(a) &= 0 \cdot p(x) + r = r \end{aligned}$$

**Следствие 2.4.1.** Число  $a$  является корнем многочлена  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится на  $(x - a)$ .

### 3 Множества

**Определение 7.** Множества равномощны, если между ними существует биекция.

**Определение 8.** Множества  $A$  и  $B$  называются равными, если  $A \subseteq B, B \subseteq A$ .

**Определение 9.** Множества, равномощные  $\mathbb{N}$ , называются счетными.

**Определение 10.** Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество:

$$A \times B = \{x \mid x = (a, b), a \in A, b \in B\}$$

**Определение 11.** Число  $a$  называется числом кратности  $k$  многочлена  $f(x)$ , если  $f(x)$  делится на  $(x - a)^k$ , но не делится на  $(x - a)^{k+1}$ .

**Определение 12.** Множество  $M$  называется ограниченным, если:

$$\exists c : \forall x \in M \mid x \mid \leq c$$

**Определение 13.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $M$  ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества  $M$  называется точной верхней гранью (супремумом):

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \leq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > a - \varepsilon$$

**Определение 14.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $M$  ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества  $M$  называется точной нижней гранью (инфимумом):

$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \geq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < a + \varepsilon$$

**Определение 15.** Множество  $M$  называется открытым, если:

$$\forall m \in M \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(m) \subset M$$

**Определение 16.** Точка  $A$  называется предельной точкой множества  $M$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(A) \cap M \text{ бесконечно или } \dot{U}_\varepsilon(A) \cap M \neq \emptyset$$

**Определение 17.** Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

**Определение 18.** Пусть  $M \subset U_{A_i}$ ,  $A_i$  – открытое множество, тогда  $U_{A_i}$  называется открытыми покрытиями.

**Определение 19.** Говорят, что почти все элементы множества  $M$  удовлетворяют некоторому условию, если этому условию не удовлетворяет конечное число элементов.

### 4 Числовые последовательности

**Определение 20.** Числовой последовательностью  $a_n$  называется отображение  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 21.** Последовательность  $a_n$  называется ограниченной, если  $a(\mathbb{N})$  ограничено.

**Определение 22.** Последовательность  $a_n$  называется монотонно возрастающей, если:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$$

**Определение 23.** Последовательность  $a_n$  асимптотически больше  $b_n$ , если:

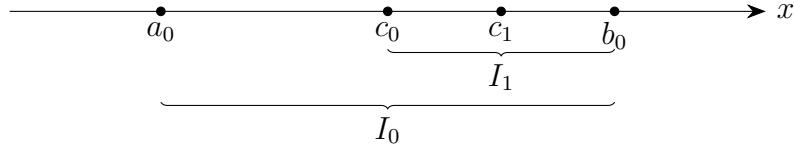
$$a_n > b_n \iff \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n \geq b_n$$

**Определение 24.** Точка  $A$  называется частичным пределом последовательности  $a_n$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ a^{-1}(U_\varepsilon(A)) \text{ бесконечно}$$

**Теорема 4.1.** Пусть последовательность  $a_n$  ограничена, тогда у неё есть частичный предел.

*Доказательство.* Если  $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$  бесконечно, то доказано. Если  $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$  конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой  $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$  и  $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$ , а также середину  $a_0 b_0$ , то есть  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Разделим один из получившихся отрезков (отметим  $c_1$  и  $b_0$ , как  $a_1$  и  $b_1$  соответственно) пополам, получив  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$

1.  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
2.  $a(\mathbb{N})$  ограничена сверху  $b_i$  элементом
3.  $a(\mathbb{N})$  имеет точную верхнюю грань  $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$   
и точную нижнюю грань  $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4.  $M_1 \leq M_2$
5.  $[M_1; M_2] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n]$
6. Пусть  $M_1 < M_2$ , тогда  $\exists n : b_n - a_n < M_2 - M_1$ .  
Получаем противоречие, значит  $M_1 = M_2 = M$ .
7. Возьмем такое  $n$ , что  $b_n - a_n < \varepsilon$ . Тогда  $[a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(M)$ .  
То есть  $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$  бесконечно.

■

**Теорема 4.2.** Пусть  $M$  – множество частичных пределов последовательности  $a_n$ , тогда:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup M; \ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf M$$

**Теорема 4.3.** Множество частичных пределов числовой последовательности замкнуто.

**Определение 25.** Пусть даны  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , при этом  $b$  монотонна. Тогда  $a \circ b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  называется подпоследовательностью.

**Утверждение 4.4.** У всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

## 4.1 Прогрессии

**Определение 26.** Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

**Определение 27.** Разностью арифметической прогрессии называется разность  $a_{n+1}$  и  $a_n$ .

**Утверждение 4.5.** Пусть  $(a_n)$  – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

**Утверждение 4.6.** Пусть  $(a_n)$  – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k < n : a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

**Теорема 4.7.** Сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left( a_1 + \frac{(n - 1) \cdot d}{2} \right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n - 1) \cdot d) = \\ &= n \cdot a_1 + d \cdot \left( \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \right) = \\ &= n \cdot \left( a_1 + \frac{(n - 1) \cdot d}{2} \right) = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n - 1) \cdot d)}{2} = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

■

**Определение 28.** Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, b_1 \neq 0, q \neq 0$$

**Утверждение 4.8.** Пусть  $(b_n)$  – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

*Доказательство.*

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

**Теорема 4.9.** Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \\ &= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\ &= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

■

## 4.2 Пределы последовательностей

**Определение 29.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $a_n$ , если:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

**Определение 30.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $a_n$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  почти все элементы последовательности принадлежат  $U_\varepsilon(A)$ .

**Определение 31.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $a_n$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} |a_n - A| < \varepsilon$$

**Теорема 4.10.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ . Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}; \exists N_2 : \forall n > N_2 |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \\ \implies \forall n > N = \max(N_1; N_2) |a_n + b_n - A - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Определение 32.** Последовательность  $a_n$  называется бесконечно малой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Теорема 4.11.** Пусть  $\alpha_n$  – бесконечно малая последовательность, тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = A \iff a_n = A + \alpha_n$$

**Теорема 4.12.** Пусть  $a_n$  сходится,  $\alpha_n$  – бесконечно малая. Тогда  $b_n = a_n \cdot \alpha_n$  – бесконечно малая.

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c} \implies \forall n > N |a_n \cdot \alpha_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

■

**Теорема 4.13.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ . Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = AB$$

*Доказательство.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((A + \alpha_n)(B + \beta_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n) = AB$$

■

**Определение 33.** Последовательность  $x_n$  называется бесконечно большой, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall c \exists n_0 : \forall n > n_0 x_n > c$$

**Теорема 4.14** (Теорема Вейерштрасса). Пусть  $x_n$  монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет предел в  $\mathbb{R}$

*Доказательство.* Пусть  $x_n$  монотонно возрастает. По определению  $\forall n : x_{n+1} > x_n$ . Пусть  $x_n$  не ограничена, то есть  $\nexists m : \forall n x_n < m$ , тогда  $\sup(x_n) = +\infty$ , а значит  $x_n \rightarrow \infty$ . Пусть  $\exists m : \forall n x_n \leq m$  и  $m = \sup(x_n)$ . Тогда  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ■

**Теорема 4.15** (Принцип двух милиционеров). Пусть даны последовательности:  $x_n \leq y_n \leq z_n$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N |x_n - A| < \varepsilon; |z_n - A| < \varepsilon \implies |x_n - A| \leq |y_n - A| \leq |z_n - A| < \varepsilon$$

■

**Теорема 4.16.** Пусть  $a_n$  монотонно не убывает и ограничена сверху, тогда  $a_n$  сходится.

*Доказательство.* В силу ограниченности  $a_n$  имеет частичный предел. Пусть  $B$  – частичный предел  $a_n$  и  $B < \sup a_n = A$ . Возьмём  $\varepsilon < \frac{a-b}{3}$ , тогда  $\exists n : a_n > A - \varepsilon$ . Значит,  $a_n - B > 2\varepsilon$  и  $\forall m > n a_m - B \geq a_n - B$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n$ . ■

**Лемма 4.17** (Неравенство Бернулли).

$$(1+x)^n \geq 1 + xn, n \in \mathbb{N}, x > 0$$

*Доказательство.* Докажем по индукции:  $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$  верно, пусть  $(1+x)^n \geq 1 + xn$  верно, тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+xn) = 1 + x + nx + x^2n > 1 + (n+1)x$$

■

**Определение 34.**

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $E_n$ :

$$E_n = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n}; \quad 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим последовательность, в которой поменяем местами числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n} = \frac{n^3 + 3n + 1}{n^2 + 2n}$$

Вернувшись к изначальной последовательности, получаем:

$$\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} < \frac{n^2 + 2n}{n^3 + 3n + 1}$$

Таким образом,  $E_{n+1} > E_n$ , а значит  $E_n$  монотонно возрастает, при этом она ограничена, а значит по теореме Вейерштрасса имеет предел, то есть  $e_n$  также имеет предел. ■

### 4.3 Пределы функций

**Определение 35** (Предел функции по Коши). Число  $A$  называется пределом  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x)$  определена в проколотой окрестности точки  $x_0$ , а также:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Определение 36** (Предел функции по Гейне). Число  $A$  называется пределом  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x)$  определена в проколотой окрестности точки  $x_0$ , а также:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall x_n \neq x_0 \ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Утверждение 4.18.** Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

*Доказательство.* Пусть определение по Коши верно, также пусть  $x_n \neq x_0$  – некоторая последовательность, такая что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , то есть  $\exists n_0 : \forall n > n_0 \ x_n \in U_\delta(x_0)$ , но тогда по Коши  $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ .

Пусть определение по Гейне верно, а по Коши нет, то есть:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Возьмём  $\delta = \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , тогда  $\exists x_n \in \dot{U}_\delta(x_0)$ , причём  $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$ , что противоречит определению по Гейне. ■

**Теорема 4.19** (Принцип двух милиционеров для функций). Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  определены в проколотой окрестности точки  $x_0$ , тогда:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x); \ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

*Доказательство.* Пусть  $x_n \neq x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Из условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$ . Тогда по принципу двух милиционеров для последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A$ . ■

**Определение 37.** Пусть  $f(x)$  определена на некотором неограниченном множестве, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists c : \forall x > c \ f(x) \in U_\varepsilon(B)$$

**Теорема 4.20.** Если у  $f(x)$  существует предел в точке  $x_0$ , он единственный.

*Доказательство.* Пусть у  $f(x)$ , определённой в проколотой окрестности точки  $x_0$ , есть два предела  $A_1$  и  $A_2$ , тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall x_1 \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0), x_2 \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0) \ f(x_1) \in U_\varepsilon(A_1), f(x_2) \in U_\varepsilon(A_2)$$

Возьмём  $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$ , тогда  $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(A_1)$ ,  $f(x) \in U_\varepsilon(A_2)$ , но  $U_\varepsilon(A_1) \cap U_\varepsilon(A_2) = \emptyset$ , противоречие. ■

**Определение 38.** Пусть  $f(x)$  определена в проколотой левой (правой) полуокрестности точки  $x_0$ . Число  $A$  называется левым (правым) пределом  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta^\pm(x_0) \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Утверждение 4.21.** Функция  $f(x)$ , определённая в проколотой окрестности точки  $x_0$ , имеет в ней предел тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

**Определение 39.** Точка  $x_0$  называется изолированной точкой множества  $M \subset \mathbb{R}$ , если:

$$\exists \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

**Определение 40.** Пусть  $f(x)$  определена на  $M \subset \mathbb{R}$ . Она называется непрерывной в точке  $x_0 \in M$ , если  $x_0$  – изолированная точка или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Определение 41** (Непрерывность по Гейне). Пусть  $f(x)$  определена на  $M \subset \mathbb{R}$ . Она называется непрерывной в точке  $x_0 \in M$ , если:

$$\forall x_n \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

**Определение 42** (Непрерывность по Коши). Пусть  $f(x)$  определена на  $M \subset \mathbb{R}$ . Она называется непрерывной в точке  $x_0 \in M$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

**Теорема 4.22** (1-я теорема Больцано-Коши). Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , тогда:

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \implies \exists c \in [a; b] : f(c) = 0$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $d = \frac{a+b}{2}$ . Если  $f(d) = 0$ , то  $c = d$ . Если  $f(d) < 0$ , то  $a_1 = d, b_1 = b$ , аналогично если  $f(d) > 0$ , то  $a_1 = a, b_1 = d$ , при этом  $d_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ . Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Пусть  $f(c) = k > 0$ , тогда  $\forall n \ a_n < 0 \implies \forall \delta > 0 \ \exists a_n \in U_\delta(c) : |f(c) - f(a_n)| > \frac{k}{2}$ , что невозможно, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , противоречие. Аналогично при  $f(c) < 0$ . ■

**Теорема 4.23.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , тогда она ограничена на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(x)$  не ограничена на  $[a; b]$ . Возьмём  $c = \frac{a+b}{2}$ . Тогда на одном из отрезков  $[a; c]$  или  $[c; b]$  она не ограничена. Без ограничения общности пусть это отрезок  $[a; c]$ . Тогда  $a_1 = a, b_1 = c, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ . Аналогично в противном случае. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{k\}$$

Возьмём бесконечно большую последовательность  $d_n$ . Тогда  $\forall n \ \exists x_n \in [a_n; b_n] : f(x_n) > d_n$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k$ ; из непрерывности  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(k)$ , но  $f(x_n)$  – бесконечно большая. Таким образом, значение функции в точке равно бесконечности, противоречие. ■

**Теорема 4.24.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , тогда она достигает своего супремума на этом отрезке.

*Доказательство.* Возьмём  $c = \frac{a+b}{2}$ . Тогда:

$$\sup_{[a;c]} f(x) \leq \sup_{[a;b]} f(x); \quad \sup_{[c;b]} f(x) \leq \sup_{[a;b]} f(x)$$

Из данных неравенств следует, что на  $[a; c]$  или на  $[c; b]$  супремум равен супремуму на  $[a; b]$ . Без ограничения общности пусть это отрезок  $[a; c]$ . Тогда  $a_1 = a, b_1 = c, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ . Аналогично в противном случае. Таким образом:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{k\}$$

Возьмём бесконечно малую последовательность  $\varepsilon_n$ . Тогда:

$$\forall n \exists x_n \in [a_n; b_n] : f(x_n) > \sup_{[a_n; b_n]} f(x) - \varepsilon_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k; \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_{[a; b]} f(x)$$

Значит, из непрерывности функции  $f(k) = \sup_{[a; b]} f(x)$ . ■

## 5 Эквивалентность и группы

**Определение 43.** Пусть  $M$  – множество, тогда множество  $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$  упорядоченных пар элементов  $M$  называется бинарным отношением на  $M$ .

**Определение 44.** Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность  $a \sim a$
2. Симметричность  $a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивность  $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$

**Теорема 5.1** (Малая теорема Ферма).  $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P} : n^{p-1} \equiv_p 1$

**Определение 45.** Бинарной операцией  $\times$  на множестве  $M$  называется отображение из множества упорядоченных пар  $M^2 = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$  в множество  $M$ .

**Определение 46.** Пара  $G(M; \times)$ ,  $M$  – множество,  $\times$  – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1.  $\forall a, b \in M : (a \times b) \in M$
2.  $\exists e \in M \forall a \in M : e \times a = a$
3.  $\forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4.  $\forall a, b, c \in M : (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

## 6 Тригонометрия

**Определение 47.** Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

**Определение 48.** Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

**Определение 49.** Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

**Определение 50.** Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

**Утверждение 6.1.**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

*Доказательство.* По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

**Утверждение 6.2.**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

*Доказательство.* Если выражение из утверждения 6.1 разделить на  $\cos^2 \alpha$ , то получим данное выражение. ■

**Утверждение 6.3.**

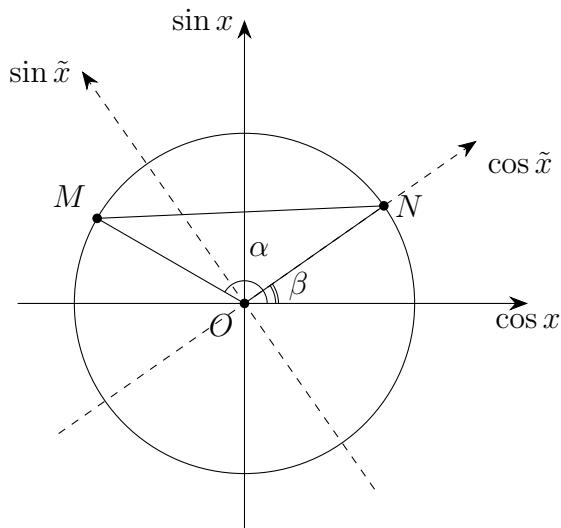
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

*Доказательство.* Если выражение из утверждения 6.1 разделить на  $\sin^2 \alpha$ , то получим данное выражение. ■

**Утверждение 6.4.**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

*Доказательство.*



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол  $\beta$ , тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

То есть  $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$ , а значит  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ . ■

**Утверждение 6.5.**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

*Доказательство.*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Утверждение 6.6.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

*Доказательство.*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

■

**Утверждение 6.7.**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

*Доказательство.*

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

**Утверждение 6.8.**

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

*Доказательство.*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

**Утверждение 6.9.**

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на  $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ , получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

**Утверждение 6.10.**

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на  $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ , получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

**Утверждение 6.11.**

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на  $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ , получим:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

**Утверждение 6.12.**

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на  $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ , получим:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

■

**Утверждение 6.13.**

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

*Доказательство.*

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

■

**Утверждение 6.14.**

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

*Доказательство.*

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

■

**Утверждение 6.15.**

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

■

**Утверждение 6.16.**

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

**Утверждение 6.17.**

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \\ &= \cos(2\alpha + \alpha) = \\ &= \cos(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (1 + 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (3 - 2 \cos^2 \alpha) = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.18.**

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \\ &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha + 1) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (3 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.19.**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

*Доказательство.*

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \iff \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

■

**Утверждение 6.20.**

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

*Доказательство.*

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

■

**Утверждение 6.21.**

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &\quad + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.22.**

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \\ &\quad - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.23.**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha + \sin \beta = \\
 & = \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\
 & = \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\
 & + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\
 & = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.24.**

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha - \sin \beta = \\
 & = \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\
 & = \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\
 & - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\
 & = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

■

**Утверждение 6.25.**

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

**Утверждение 6.26.**

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

**Утверждение 6.27.**

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

**Утверждение 6.28.**

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

**Утверждение 6.29.**

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , тогда из утверждения 7.21:

$$2 \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

**Утверждение 6.30.**

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , тогда из утверждения 7.22:

$$-2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = -\frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

**Утверждение 6.31.**

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ , тогда из утверждения 7.23:

$$2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

**Утверждение 6.32.**

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

*Доказательство.*

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

■

**Утверждение 6.33.**

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

**Утверждение 6.34.**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

*Доказательство.*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

## 7 Комплексные числа

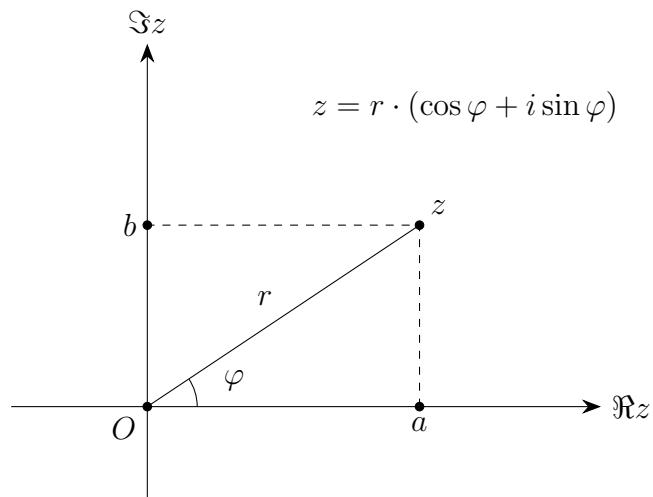
**Определение 51.** Мнимой единицей называется такое число  $i$ , что  $i^2 = -1$ .

**Определение 52.** Комплексным числом называется выражение вида  $z = a + bi$ , где  $a = \Re z$  – действительная часть, а  $b = \Im z$  – мнимая.

**Определение 53.** Число  $z_1$  называется сопряженным к числу  $z$ , если  $\Re z_1 = \Re z$ ;  $\Im z_1 = -\Im z$ . Обозначение:  $z_1 = \bar{z}$ .

**Определение 54.** Модулем  $z \in \mathbb{C}$  называется  $|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$ .

**Определение 55.** Комплексная плоскость:



**Теорема 7.1** (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

*Доказательство.* Докажем по индукции.  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  верно. Пусть  $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$  верно, докажем, что для  $n+1$  утверждение верно верно.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi) \cdot \cos \varphi - \sin(n\varphi) \cdot \sin \varphi) + i(\cos(n\varphi) \cdot \sin \varphi + \sin(n\varphi) \cdot \cos \varphi)) = \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)) \end{aligned}$$

■

**Определение 56.** Корнем из комплексного числа называется:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

## 7.1 Матрицы поворота

**Определение 57.** Матрицей поворота на угол  $\alpha$  называется:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot E + \sin \alpha \cdot I$$

**Утверждение 7.2.**

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff z = r e^{i\varphi}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \\ \cos x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} \cdot (-1)^i \\ \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot (-1)^i \\ e^{ix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot i^k = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

■

## 8 Логарифмы

**Определение 58.** Пусть  $a > 0; a \neq 1, b > 0$ . Логарифмом  $\log_a b$  числа  $b$  по основанию  $a$  называется такое число  $c$ , что  $a^c = b$ . Из этого, а также свойств степеней следует:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

**Утверждение 8.1.**

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

*Доказательство.*

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a(bc)}$$

■

**Утверждение 8.2.**

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right)$$

*Доказательство.*

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \frac{b}{c} = a^{\log_a \left( \frac{b}{c} \right)}$$

■

**Утверждение 8.3.**

$$\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b$$

*Доказательство.*

$$a^{\log_a (b^k)} = b^k = (a^{\log_a b})^k = a^{k \cdot \log_a b}$$

■

**Утверждение 8.4.**

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

*Доказательство.*

$$(a^k)^{\log_{a^k} b} = a^{k \cdot \log_{a^k} b} = b = a^{\log_a b}$$

■

**Следствие 8.4.1.**

$$\log_{a^k} (b^k) = \log_a b$$

**Утверждение 8.5.**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_c a \neq 0$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \iff \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \\ c^{\log_c b} &= b = a^{\log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = c^{\log_a b \cdot \log_c a} \end{aligned}$$

■

**Утверждение 8.6.**

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

*Доказательство.*

$$a^{\frac{1}{\log_b a}} = (b^{\log_b a})^{\frac{1}{\log_b a}} = b = a^{\log_a b}$$

■

**Утверждение 8.7.**

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

*Доказательство.*

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = (a^{\log_a c})^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$$

■

**Определение 59.** Натуральным логарифмом  $\ln x$  называется логарифм с основанием  $e$ .

**Определение 60.** Десятичным логарифмом  $\lg x$  называется логарифм с основанием 10.

## 8.5 Показательные уравнения и неравенства

$$a^x = a^{x_0} \iff x = x_0$$

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

$$a^x > a^{x_0} \iff \begin{cases} x > x_0, & \text{если } a > 1 \\ x < x_0, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^x > b \iff \begin{cases} x > \log_a b, & \text{если } a > 1 \\ x < \log_a b, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

## 8.6 Логарифмические уравнения и неравенства

$$\log_a x = b \iff x = a^b$$

$$\log_a x > b \iff \begin{cases} x > a^b, & \text{если } a > 1 \\ x < a^b, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & a > 1 \\ f(x) > 0 & \\ f(x) > g(x) & 0 < a < 1 \\ g(x) > 0 & \end{cases}$$

# 9 Линейная алгебра

## 9.1 Координаты на плоскости

**Утверждение 9.1.** Пусть даны  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . Тогда середина отрезка  $AB$  будет иметь координаты  $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$ , а его длина будет равна  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

**Утверждение 9.2.** Пусть  $A(x_0; y_0) \in \omega(O; r)$ ,  $O(a; b)$ , тогда  $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$ .

**Утверждение 9.3.** Пусть даны  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через  $A$  и  $B$  будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

**Утверждение 9.4.** Пусть даны точка  $M(x_0; y_0)$  и прямая  $l : ax + by + c = 0$ . Тогда:

$$\rho(M; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## 9.2 Векторы

**Определение 61.** Направленным отрезком  $\overrightarrow{AB}$  называется отрезок  $AB$ , у которого заданы начало  $A$  и конец  $B$ .

**Определение 62.** Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются коллинеарными, если  $AB \parallel CD$ .

**Определение 63.** Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются конгруэнтными, если они коллинеарны,  $B$  и  $D$  лежат в одной плоскости относительно  $AC$  и их длины равны.

**Определение 64.** Пусть  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  – векторы в  $\mathbb{R}^n$ . Они называются линейно зависимыми, если  $\exists a_1, \dots, a_n$ , не равные одновременно нулю, что  $a_1\vec{r}_1 + \dots + a_n\vec{r}_n = 0$ .

**Определение 65.** Пусть  $X$  – множество, рассмотрим  $X \times X = \{(x; y) \mid x, y \in X\}$ . Тогда  $\rho \subset X \times X$  – бинарное отношение.

**Определение 66.** Бинарное отношение  $\sim \subset X \times X$  называется отношением эквивалентности на множестве  $X$ , если  $\forall x, y, z \in X : x \sim x; x \sim y \iff y \sim x; x \sim y, y \sim z \iff x \sim z$ .

### 9.3 Линейные пространства

**Определение 67.** Элементами поля  $F$  являются скаляры или векторы.  $L$  называется линейным пространством над полем  $F$ , если  $\forall a, b \in L; \forall \lambda, \mu \in F$ :

1.  $a + b = b + a$
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$
3.  $\exists \vec{0} \in L : a + \vec{0} = a$
4.  $\forall a \ \exists b : a + b = \vec{0}$
5.  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
6.  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
7.  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
8.  $1 \cdot a = a$

**Определение 68.** Пусть  $L$  – линейное пространство над полем  $F$ ;  $u_1, \dots, u_n \in L$ ;  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ , тогда  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$  – линейная комбинация. Линейная комбинация называется тривиальной, если  $\forall i : \alpha_i = 0$ .

**Определение 69.** Пусть  $U \subset L$ , множество векторов  $\langle U \rangle$ , которые не выражаются через элементы  $U$  называется линейной оболочкой.

**Определение 70.** Пусть  $\{x_1, \dots, x_n\}$  – система векторов. Она называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

**Теорема 9.5.** Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией других.

**Определение 71.** Система  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  линейно независимых векторов линейного пространства  $L$  называется базисом, если  $\langle U \rangle = L$ .

**Определение 72.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\vec{b} \neq \vec{0}$  называется величина  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$ . Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, то угол между ними равен нулю, а если коллинеарны, но не сонаправлены –  $\pi$ :

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2.  $k \cdot (\vec{a}; \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$
3.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

### 9.4 Матрицы

**Определение 73.** Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

**Определение 74.** Квадратная матрица называется верхней треугольной, если  $\forall i, j; i > j : a_{ij} = 0$ .

**Определение 75.** Квадратная матрица называется нижней треугольной, если  $\forall i, j; i < j : a_{ij} = 0$ .

**Определение 76.** Квадратная матрица называется диагональной, если  $\forall i, j; i \neq j : a_{ij} = 0$ . Обозначение:  $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ .

**Определение 77.** Диагональная матрица порядка  $n$ , у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной. Обозначение:  $E$  или  $E_n$ . Элементы единичной матрицы обозначаются  $\delta_{ij}$ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

**Определение 78.** Квадратная матрица  $A$  называется скалярной, если  $A = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ .

**Определение 79.** Сумма диагональных элементов матрицы  $A$  называется её шпуром или следом. Обозначение:  $\text{Sp } A$  или  $\text{tr } A$ .

**Определение 80.** Матрица  $B$  называется транспонированной по отношению к матрице  $A$ , если  $\forall i, j : b_{ij} = a_{ji}$ . Обозначение:  $B = A^T$ .

**Определение 81.** Квадратная матрица  $A$  называется симметрической, если  $A^T = A$ .

**Определение 82.** Квадратная матрица  $A$  называется кососимметрической, если  $A^T = -A$ .

**Определение 83.** Матрица  $B$  называется комплексно сопряжённой по отношению к матрице  $A$ , если  $\forall i, j : b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ . Обозначение:  $B = \overline{A}$ .

**Определение 84.** Матрица  $B$  называется эрмитово сопряжённой по отношению к матрице  $A$ , если  $\forall i, j : b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ . Обозначение:  $B = A^*$ .

**Определение 85.** Квадратная матрица  $A$  называется эрмитовой, если  $A^* = A$ .

**Определение 86.** Квадратная матрица  $A$  называется косоэрмитовой, если  $A^* = -A$ .

**Определение 87.** Матрица называется нулевой, если все её элементы равны нулю. Обозначение:  $A = O$ .

**Определение 88.** Матрица называется неотрицательной, если  $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$ .

**Определение 89.** Матрица называется стохастической, если:

$$\forall i, j : a_{ij} \geq 0; \forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$$

#### 9.4.1 Произведение матриц

**Определение 90.** Пусть даны матрица  $A$  размера  $m \times n$  и матрица  $B$  размера  $n \times k$ . Их произведением будет матрица размера  $m \times k$ , в которой:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}$$

**Утверждение 9.6.** Произведение верхних треугольных матриц является верхней треугольной матрицей.

**Определение 91.** Пусть  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$ . Матрица  $B$  называется обратной к  $A$ , если  $A \cdot B = B \cdot A = E$ . Обозначение:  $B = A^{-1}$ .

**Определение 92.** Квадратная матрица  $A$  называется ортогональной, если  $A^T = A^{-1}$ .

**Определение 93.** Квадратная матрица  $A$  называется унитарной, если  $A^* = A^{-1}$ .

**Определение 94.** Матрица  $A$  называется нильпотентной, если  $A^k = O$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Наименьшее из таких  $k$  называется показателем нильпотентности матрицы  $A$ .

**Определение 95.** Матрица  $A$  называется периодической, если  $A^k = E$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Наименьшее из таких  $k$  называется периодом матрицы  $A$ .

### 9.4.2 Определитель

**Определение 96.** Пусть дана перестановка  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ . Инверсией называется число таких пар  $(i; j)$ , что  $i > j$ ;  $\alpha_i < \alpha_j$ .

**Определение 97.** Пусть дана квадратная матрица  $A$  порядка  $n$ . Если  $\alpha_i$  – перестановка чисел от 1 до  $n$ , а  $N(\alpha_i)$  – число инверсия в  $\alpha_i$  перестановке, то определителем матрицы  $A$  называется:

$$\det A = \sum_{\alpha_i} (-1)^{N(\alpha_i)} \cdot a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \cdots \cdot a_{n\alpha_n}$$

**Теорема 9.7.** Пусть дана квадратная матрица  $A$ ,  $M_{ji}$  – дополнительный минор элемента  $a_{ji}$ . Элементы её обратной матрицы можно вычислить по формуле:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot M_{ji}}{\det A}$$

**Определение 98.** Квадратная матрица  $A$  называется вырожденной, если  $\det A = 0$ .

**Определение 99.** Квадратная матрица  $A$  называется невырожденной, если  $\det A \neq 0$ .

**Определение 100.** Квадратная матрица  $A$  называется унимодулярной, если  $|\det A| = 1$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 101.** Квадратная матрица  $A$  называется матрицей перестановки, если она получена из  $E$  перестановкой строк.

**Определение 102.** Квадратная матрица  $A$  называется элементарной, если она получена из  $E$  элементарным преобразованием.

### 9.4.3 Ранг матрицы

**Определение 103.** Рангом матрицы называется наибольший порядок из всех порядков её ненулевых миноров.

**Теорема 9.8 (О базисном миноре).** Пусть  $M_r$  – базисный минор матрицы  $A$ , строки соответствующей матрицы – базисные строки, а столбцы – базисные столбцы. Тогда:

- 1. Базисные строки линейно независимы.
- 2. Базисные столбцы линейно независимы.
- 3. Любая строка (столбец) матрицы  $A$  – линейная комбинация базисных строк (столбцов).

*Доказательство.* Пункты 1 и 2 следуют из определения базиса. Без ограничения общности пусть базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы  $A$ , то есть матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если расширить базисный минор до  $r + 1$  строки и  $r + 1$  столбца, при этом все его строки и столбцы останутся линейно независимыми, тогда  $\text{rank } A = r + 1$ , но по условию  $\text{rank } A = r$ , противоречие. ■

**Теорема 9.9** (Кронекер-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  совместна тогда и только тогда, когда  $\text{rank } A = \text{rank } (A | \vec{b})$ .

*Доказательство.* Пусть система совместна, тогда:

$$b_i = \sum_j a_{ji}x_j; \quad \vec{b} = \sum_j \vec{a}_j x_j$$

То есть,  $\vec{b}$  выражается через  $\vec{a}_i$ , а значит  $\text{rank } A = \text{rank } (A | \vec{b})$ . Пусть  $\text{rank } A = \text{rank } (A | \vec{b})$ . Тогда по теореме о базисном миноре она совместна. ■

**Теорема 9.10** (Правило Крамера). Пусть дана система из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестным вида  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Тогда если  $\Delta$  – определитель матрицы  $A$ , то  $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где  $\Delta_i$  – определитель матрицы  $A$ , в которой  $i$ -й столбец заменили на вектор свободных членов:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(i-1)} & b_{(n-1)} & a_{(n-1)(i+1)} & \dots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если  $\Delta = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна.

**Теорема 9.11** (Конечномерная альтернатива Фредгольма). Пусть дана система из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными вида  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Тогда выполняется одно из двух условий:

1. Система имеет 1 решение для любого  $\vec{b}$  и соответствующая однородная система уравнений имеет только тривиальное решение.
2. Соответствующая однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, тогда  $\exists \vec{b} : A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  не имеет решений.

*Доказательство.*

1. Пусть  $\det A \neq 0$ . Тогда все столбцы  $A$  называются векторами  $n$ -мерного пространства, при этом они линейно независимы, то есть они образуют в этом пространстве базис. Тогда  $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n$ ; любой вектор этого пространства выражается единственным образом через линейную комбинацию базисных векторов. Система имеет единственное решение. Поскольку векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно независимы, то нулю может равняться только их тривиальная комбинация.

2. Пусть  $\det A = 0$ . Векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  – линейно зависимы, поэтому существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.  $\dim\langle\vec{a}_i\rangle = k < n$ . Пусть при любом  $\vec{b}$  система имеет решение. Тогда любой  $\vec{b}$  выражается через линейную комбинацию  $\vec{a}_i$ , то есть  $\{\vec{a}_i\}$  – базис в  $n$ -мерном пространстве. Противоречие.

■