

# Геометрия

## Содержание

<b>1</b>	<b>Бинарное отношение. Векторы.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Метод координат</b>	<b>4</b>
2.1	Нормаль и направляющий вектор . . . . .	5
2.2	Расстояние от точки до прямой . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Кривые второго порядка</b>	<b>6</b>
3.1	Свойства кривых второго порядка . . . . .	6
3.2	Свойства параболы . . . . .	9
3.3	Прямая Симсона . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Гомотетия</b>	<b>14</b>
4.1	Композиция гомотетий . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Инверсия</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Полезные факты</b>	<b>16</b>

# 1 Бинарное отношение. Векторы.

**Определение 1.** Пусть множество  $a, b \in M$ . Множество  $R \subset \{(a, b) | a, b \in M\}$  упорядоченных пар. Если  $(\hat{a}, \hat{b}) \in R$ , пишут  $\hat{a} \sim_R \hat{b}$ .

**Определение 2.** Отношение  $\sim$  на  $M$  называется:

1. Рефлексивным:  $\forall a \in M : a \sim a$
2. Симметричным:  $\forall a, b \in M : a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивным:  $\forall a, b \in M : a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

**Определение 3.** Отношение  $\sim$  на  $M$  называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Как только на  $M$  задано отношение эквивалентности, появляется  $M / \sim$  классов эквивалентности.

**Определение 4.** Вектор – класс эквивалентности параллельных переносов.

Свойства сложения векторов:

- Коммутативно:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Ассоциативно:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

**Определение 5.**  $\vec{a}$  коллинеарен  $\vec{b}$ , если  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \vec{a} = \vec{b}$ .

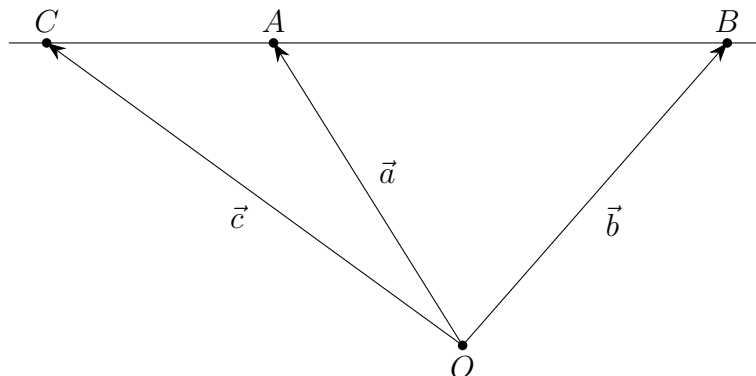
**Определение 6.** Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов  $(\vec{a}; \vec{b})$ .

**Теорема 1.1.**  $\forall \vec{v} \in V_{\mathbb{R}^2} \exists! (x; y); x, y \in \mathbb{R} : \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , где  $(\vec{a}; \vec{b})$  – базис  $V_{\mathbb{R}^2}$ . То есть  $(x; y)$  – координаты  $\vec{v}$  в базисе  $(\vec{a}; \vec{b})$ .

**Определение 7.** Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется:  $\phi = \arccos \left( \frac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right) \iff \cos \phi = \frac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ , где  $|\vec{a}| = \sqrt{(a, a)}$ .

**Теорема 1.2.**  $C \in AB \iff \forall O : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

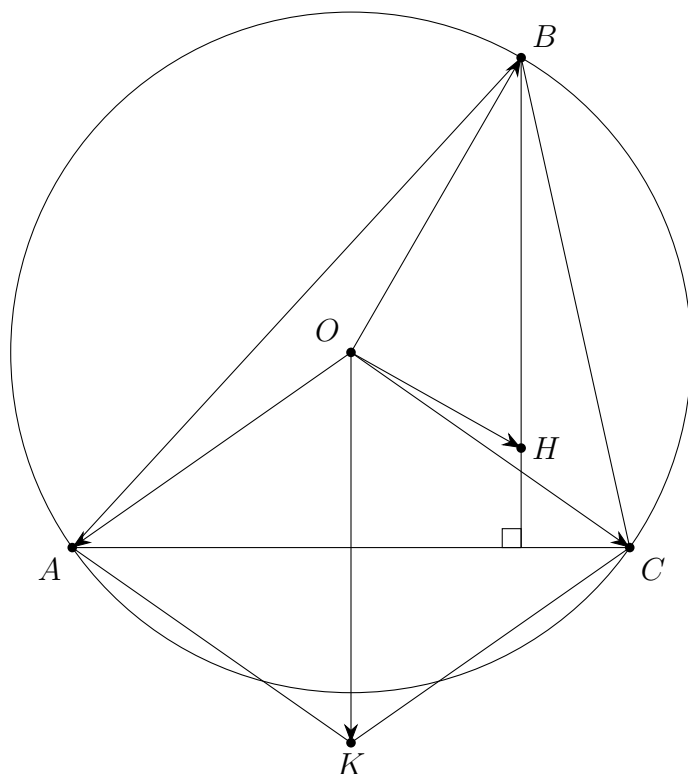
*Доказательство.*



Обозначим  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ . Тогда  $\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ;  $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$ . Тогда обозначим  $\frac{|\vec{c} - \vec{b}|}{|\vec{a} - \vec{b}|} = x$ , откуда  $\vec{c} - \vec{b} = x(\vec{a} - \vec{b})$ , то есть  $\vec{c} = x\vec{a} - (1 - x)\vec{b}$ . ■

**Теорема 1.3.** Пусть  $O$  и  $H$  – центр описанной окружности и ортоцентр  $\triangle ABC$  соответственно. Тогда  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

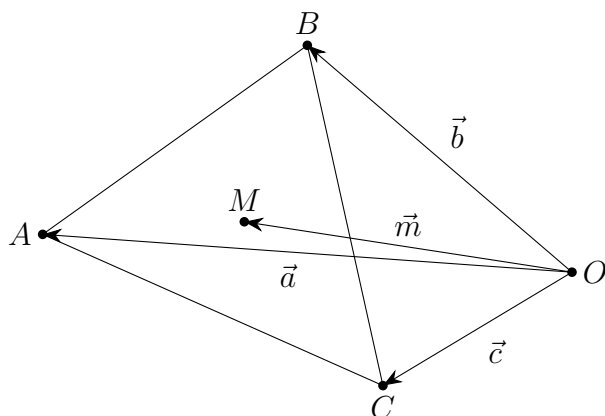
*Доказательство.*



Рассмотрим сумму  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}$ ,  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$ , как радиусы описанной окружности, следовательно,  $AOCK$  – ромб, а значит  $AC \perp OK$  как диагонали. Тогда  $OK \parallel BH$ , а значит точка  $M$  вектора  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OB}$  лежит на  $BH$ , но аналогично эта точка лежит на всех высотах  $\triangle ABC$ , а значит является ортоцентром. ■

**Теорема 1.4.** Пусть  $\overrightarrow{OK}$  и  $\overrightarrow{OL}$  – базис в  $\triangle ABC$ , а  $M$  – его центроид. Тогда  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ .

*Доказательство.*



Обозначим  $\overrightarrow{OA}$  как  $\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  как  $\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  как  $\vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OM}$  как  $\vec{m}$ . Представим  $\overrightarrow{OM}$  в виде суммы векторов:  

$$\vec{b} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \left( \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \right) = \vec{b} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \quad \blacksquare$$

**Теорема 1.5.** Пусть  $O$  – центр описанной окружности,  $H$  – ортоцентр, а  $M$  – центроид  $\triangle ABC$  соответственно. Тогда  $O$ ,  $H$  и  $M$  – коллинеарны.

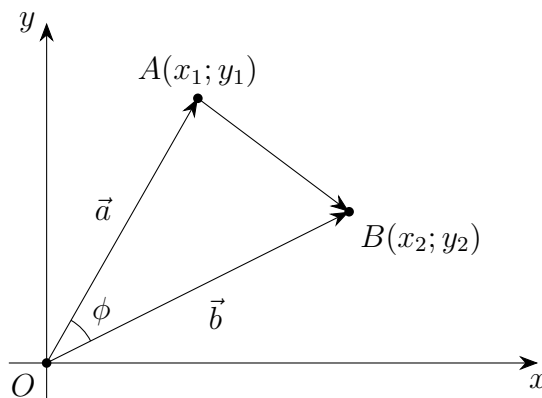
*Доказательство.* Из предыдущих двух теорем нам известно, что  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ , а также что  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ , из чего следует, что  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$ .  $\blacksquare$

**Определение 8.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется величина  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$ , где  $\phi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Теорема 1.6.** В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов  $\vec{a}(x_1; y_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2)$  равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

*Доказательство.*



По теореме косинусов  $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \phi$ , но по теореме Пифагора  $OA^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2$ ,  $OB^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$ ,  $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ . Тогда если подставить в первое выражение и упростить получим  $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = OA \cdot OB \cdot \cos \phi$ .  $\blacksquare$

## 2 Метод координат

**Определение 9.** Общим уравнением прямой называется уравнение вида  $ax + by + c = 0$ , в котором  $a$  и  $b$  не равны нулю:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 \stackrel{b_1 \cdot b_2 \neq 0}{\iff} \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \iff a_1b_2 = a_2b_1$$

$$l_1 \perp l_2 \stackrel{b_1 \cdot b_2 \neq 0}{\iff} \frac{-a_1}{b_1} \cdot \frac{-a_2}{b_2} = -1 \iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

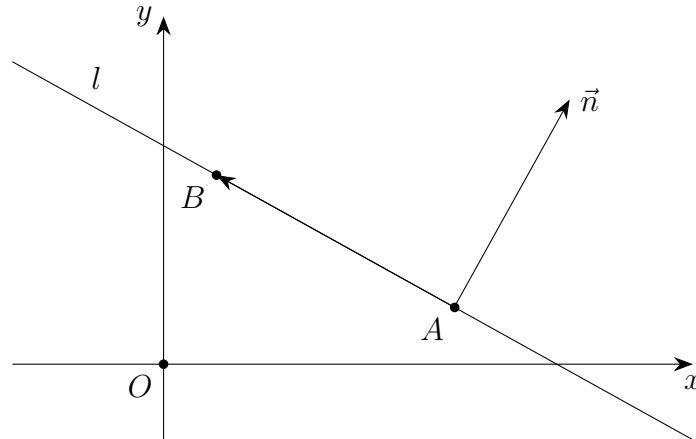
## 2.1 Нормаль и направляющий вектор

**Определение 10.** Вектор  $\vec{v}$  называется направляющим для прямой  $l$ , если его начало и конец лежат на  $l$ .

**Определение 11.** Любой вектор  $\vec{n}_l : \vec{n}_l \perp l$ , называется ее нормалью.

**Теорема 2.1.** Вектор  $\vec{n}(a; b)$  является вектором нормали к прямой  $l$ , заданной уравнением  $ax + by + c = 0$ .

*Доказательство.*

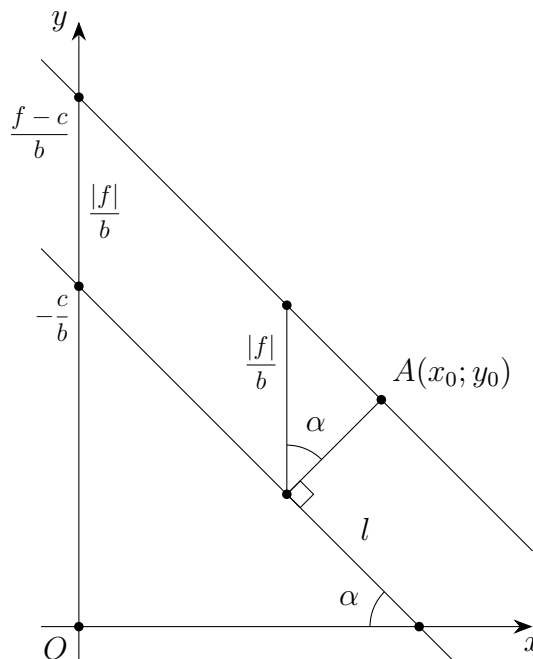


Возьмем произвольные точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . Тогда  $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ . При этом  $ax_1 + by_1 + c = ax_2 + by_2 + c = 0$ , следовательно, если вычесть одно из другого, получим  $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ . Рассмотрим  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0 \implies \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$ . ■

## 2.2 Расстояние от точки до прямой

**Теорема 2.2.**  $\rho(A; l) : A(x_0; y_0), l : ax + by + c = 0 : \rho(A; l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

*Доказательство.*



Пусть  $A(x_0; y_0)$ , тогда  $ax_0 + by_0 + c = f \implies y_0 = \frac{f - c}{b} - \frac{ax_0}{b}$ . Проведем через точку  $A$  перпендикуляр к  $l$ , а также прямую, параллельную  $l$ . Отметим найденные ранее координаты на  $OY$ , а также найдем расстояние между ними. Пусть угол наклона  $l$  относительно  $OX$  равен  $\alpha$ , тогда  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}$ . Из основного тригонометрического тождества:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \mid : \cos^2 \alpha \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} + 1} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

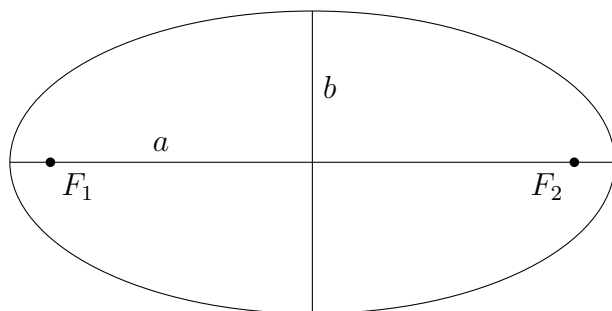
Тогда чтобы найти  $\rho(A; l)$  умножим косинус на гипотенузу и получим:  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|f|}{b} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . ■

## 3 Кривые второго порядка

### 3.1 Свойства кривых второго порядка

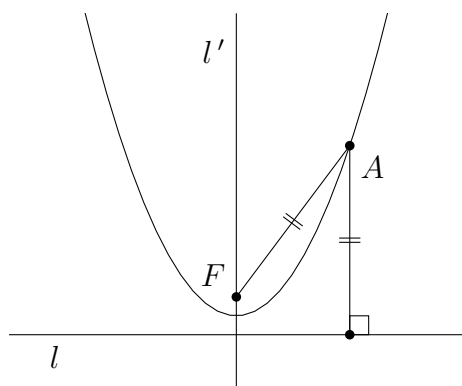
**Определение 12.** Углом между кривыми называется угол между их касательными в данной точке.

**Определение 13.** Эллипсом называется ГМТ, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называющихся фокусами, постоянна.



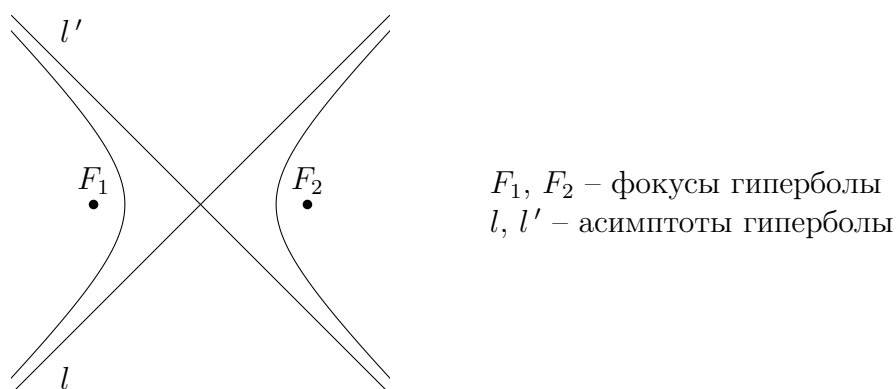
$F_1, F_2$  – фокусы эллипса  
 $a$  – большая ось  
 $b$  – малая ось

**Определение 14.** Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фиксированной точки  $F$ , называемой ее фокусом, и прямой  $l$ , называемой директрисой данной параболы.



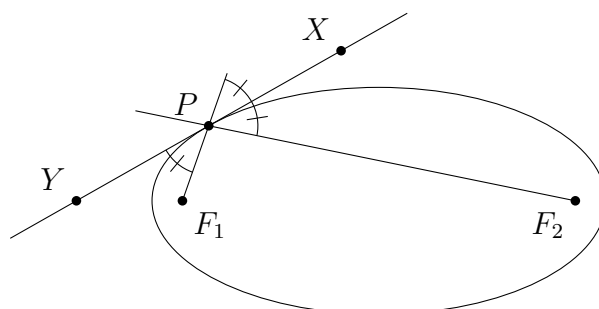
$l'$  – ось параболы  
 $F$  – фокус параболы  
 $l$  – директриса параболы

**Определение 15.** Гиперболой называется ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянен.



**Теорема 3.1** (Оптическое свойство эллипса). Пусть  $l$  касается эллипса с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P$ , тогда  $l$  – биссектриса угла, смежного  $\angle F_1PF_2$ .

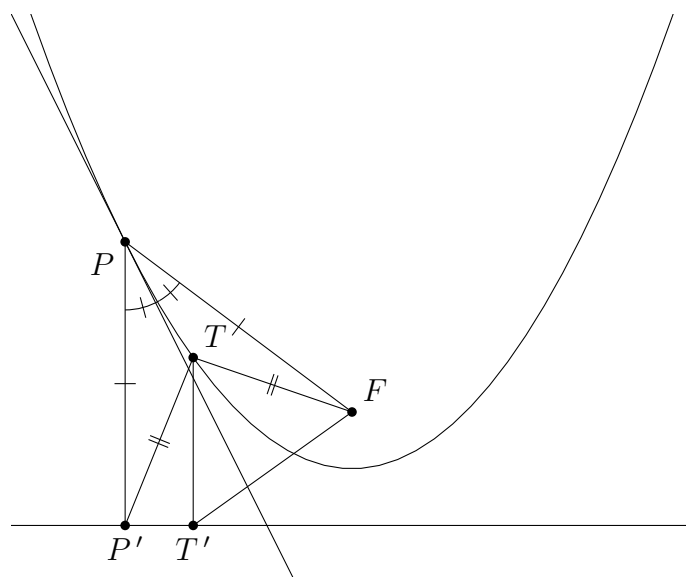
*Доказательство.*



Пусть  $X, Y \in l$ , тогда по определению касательной  $XF_1 + XF_2 \geq PF_1 + PF_2$ . Следовательно,  $P$  – точка на  $l$ , сумма расстояний от которой до фокусов минимальна, откуда  $\angle F_2PX = \angle F_1PY$ . ■

**Теорема 3.2** (Оптическое свойство параболы). Пусть  $l$  касается параболы в точке  $P$ ,  $P'$  – проекция точки  $P$  на директрису. Тогда  $l$  – биссектриса  $\angle FPP'$ .

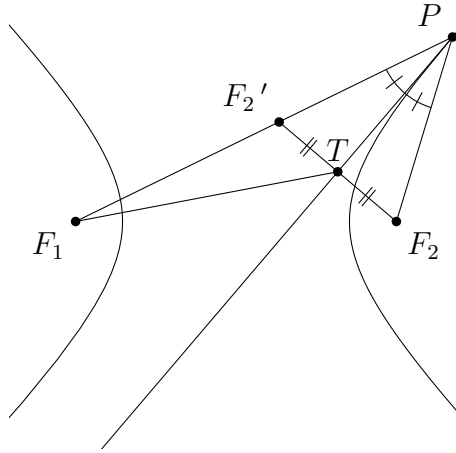
*Доказательство.*



Пусть биссектриса не касается параболы, то есть пересекает ее в точке  $T$ . По определению параболы  $PP' = PF \implies \triangle P'TT = \triangle PFT$  по двум сторонам и углу между ними. Отсюда  $P'T = TF$ , но тогда если  $T'$  – проекция  $T$  на директрису, то  $TT' = TF$ , то есть  $TP' = TT'$ , противоречие. ■

**Теорема 3.3** (Оптическое свойство гиперболы). Пусть  $l$  касается гиперболы с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P$ , тогда  $l$  – биссектриса  $\angle F_1F_2P$ .

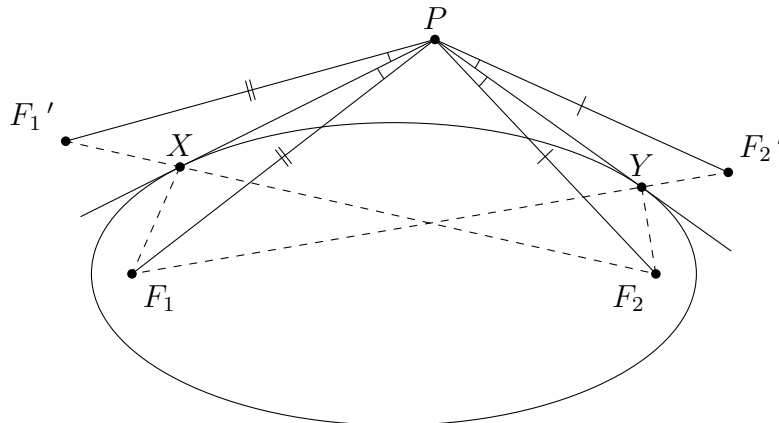
*Доказательство.*



Пусть биссектриса не касается гиперболы, то есть пересекает ее в точке  $T$ . Обозначим через  $F_2'$  точку, симметричную  $F_2$  относительно  $l$ . Тогда  $F_2T = F_2'T$ , а также  $F_2P = F_2'P$ . Кроме того,  $F_1, F_2'$  и  $P$  коллинеарны по определению биссектрисы. По определению гиперболы  $F_1P - F_2P = F_1T - F_2T$ . Тогда получаем, что  $F_1F_2' = F_1P - F_2'P = F_1T - F_2'T$ , но по неравенству треугольника  $F_1F_2' > F_1T - F_2'T$ , противоречие. ■

**Теорема 3.4** (Изогональное свойство эллипса). Пусть  $PX$  и  $PY$  – касательные к эллипсу с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда  $\angle F_1PX = \angle F_2PY$ .

*Доказательство.*



Пусть  $F_1'$  и  $F_2'$  – точки, симметричные  $F_1$  и  $F_2$  относительно  $PX$  и  $PY$  соответственно. Тогда  $PF_1 = PF_1'$  и  $PF_2 = PF_2'$ , при этом  $F_1, Y$  и  $F_2'$ , а также  $F_2, X$  и  $F_1'$  коллинеарны по оптическому свойству эллипса. Получаем, что  $F_2F_1' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_1F_2'$ . То есть  $\triangle F_1PF_2' = \triangle F_2PF_1'$  по трем сторонам. Тогда  $\angle F_1PF_2 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF_1' = \angle F_1PF_2' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY \implies \angle F_1PX = \angle F_2PY$ . ■

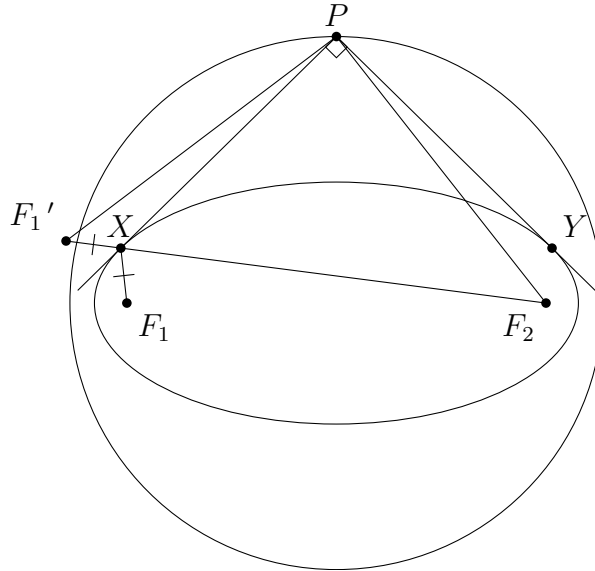
**Теорема 3.5.** В обозначениях теоремы 3.4 прямая  $F_1P$  суть биссектриса  $\angle XF_1Y$ .



*Доказательство.* В силу оптических свойств  $\angle PF_1'X = \angle PF_1X$ , при этом из теоремы 3.4 известно, что  $\angle PF_1'F_2 = \angle PF_1F_2'$ , так как  $\triangle F_1PF_2' = \triangle F_1'PF_2$ . Тогда  $\angle PF_1F_2' = \angle PF_1'X = \angle PF_1X$ . ■

**Теорема 3.6.** Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом, является окружность с центром в центре эллипса.

*Доказательство.*

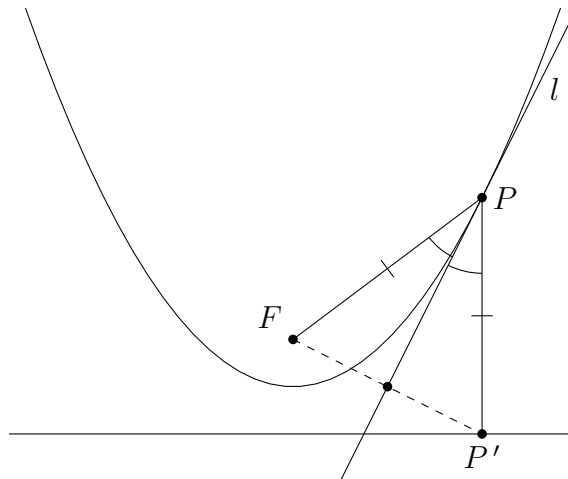


Пусть  $F_1'$  – образ  $F_1$  относительно прямой  $PX$ . Из теоремы 3.4 следует, что  $\angle F_1'PF_2 = \angle XPY = 90^\circ$ . По теореме Пифагора  $F_1'P^2 + F_2P^2 = F_1'F_2^2$ , то есть получаем уравнение окружности с центром в середине  $F_1F_2$ . ■

## 3.2 Свойства параболы

**Лемма 3.7.** Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы.

*Доказательство.*

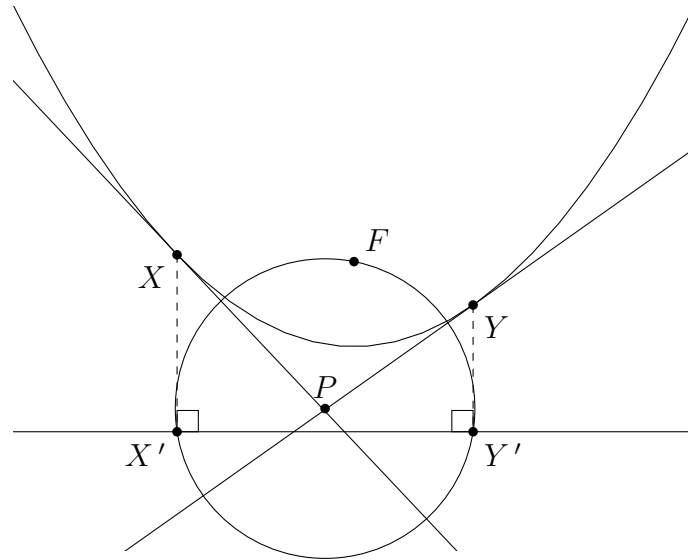


Пусть прямая  $l$  касается параболы в точке  $P$ ,  $P'$  – проекция  $P$  на директрису параболы.  $l$  – биссектриса  $\angle FPP'$ , но  $\triangle FPP'$  – равнобедренный по определению параболы, а значит  $l$  в нем медиана и высота, откуда  $P'$  – образ  $F$ . ■

**Следствие 3.7.1.** Проекция фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.

**Лемма 3.8.** Пусть  $PX$  и  $PY$  – касательные к параболе. Тогда  $P$  является центром описанной около  $\triangle FX'Y'$  окружности, где  $X'$  и  $Y'$  – проекции  $X$  и  $Y$  на директрису параболы соответственно.

*Доказательство.*

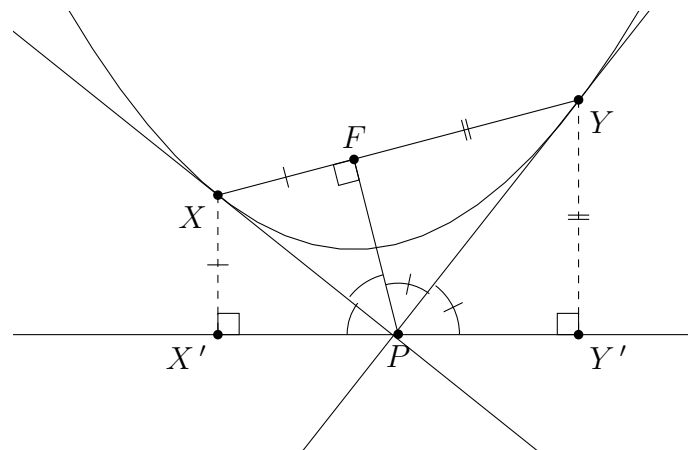


Из леммы 3.8 следует, что  $PX$  и  $PY$  являются серединными перпендикулярами к  $FX'$  и  $FY'$  соответственно. Тогда их точка пересечения будет являться центром окружности, описанной около  $\triangle FX'Y'$ . ■

**Следствие 3.8.1.** Если  $PX$  и  $PY$  – касательные к параболе, то  $P'$  будет серединой  $X'Y'$ , где  $P'$ ,  $X'$  и  $Y'$  – проекции  $P$ ,  $X$  и  $Y$  на директрису параболы соответственно.

**Теорема 3.9.** Множество таких точек  $P$ , из которых парабола видна под прямым углом, суть директриса этой параболы. Кроме того, если  $PX$  и  $PY$  – касательные к этой параболе, то  $XY$  содержит  $F$  и  $PF$  – высота  $\triangle PXY$ .

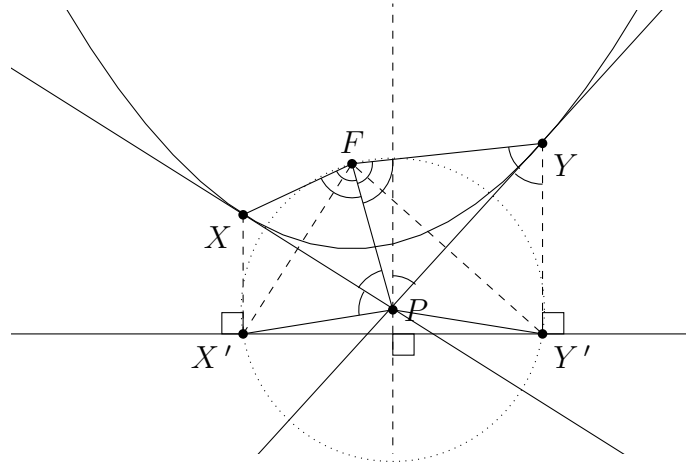
*Доказательство.*



Пусть  $P$  лежит на директрисе, тогда если  $X'$  и  $Y'$  – проекции  $X$  и  $Y$  на директрису соответственно, то  $\triangle PXX' = \triangle PXF$ , а значит  $\angle PFY = \angle PXX' = 90^\circ$ . Аналогично  $\angle PFY = 90^\circ$ . То есть  $X, F$  и  $Y$  коллинеарны. При этом  $\angle XPX' = \angle XPF$ ,  $\angle YPF = \angle YPY'$ , следовательно,  $\angle XPY = \frac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$ . ■

**Теорема 3.10.** Пусть  $PX$  и  $PY$  – касательные к параболы, а  $l$  – прямая, проходящая через  $P$  параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми  $PY$  и  $l$  равен  $\angle XPF$ ,  $\triangle XFP \sim \triangle PFY$  и  $FP$  – биссектриса  $\angle XFY$ .

*Доказательство.*

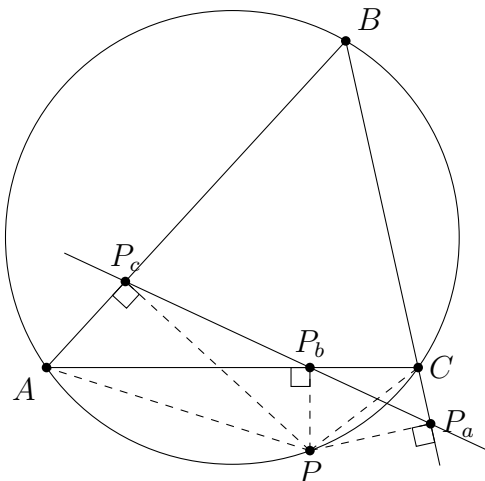


Пусть  $X'$  и  $Y'$  – проекции  $X$  и  $Y$  на директрису соответственно. Угол между  $PY$  и  $l$  равен  $\angle X'Y'F$ , так как  $l \perp X'Y'$  и  $PY \perp Y'F$ . При этом по лемме 3.8  $F, X'$  и  $Y'$  лежат на окружности с центром в  $P$ . Тогда  $\angle X'Y'F = \frac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$ . Поскольку  $l \parallel YY'$ , угол между  $PY$  и  $l$  равен  $\angle PYY'$ , который в силу оптического свойства параболы равен  $\angle PYF$ . То есть  $\angle PYF = \angle XPF$ , аналогично  $\angle FXP = \angle YPF$ . Тогда  $\triangle XFP \sim \triangle PFY$  по двум углам и  $FP$  – биссектриса  $\angle XFY$ . ■

### 3.3 Прямая Симсона

**Теорема 3.11** (Прямая Симсона). Проекции точки  $P$  на стороны  $\triangle ABC$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника.

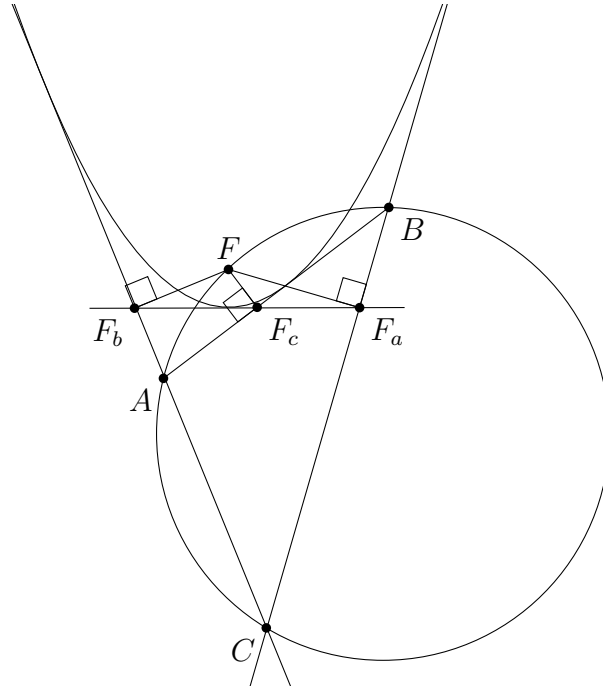
*Доказательство.*



Пусть  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  – проекции точки  $P$  на  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно.  $AP_cP_bP$  вписанный, так как  $\angle AP_cP = \angle AP_bP$ . Тогда  $\angle APP_c = \angle AP_bP_c$ . Аналогично  $\angle CP_bP_a = \angle CPP_a$ . В силу вписанности  $ABCP$   $\angle PCP_a = 180^\circ - \angle BCP = \angle BAP$ . При этом  $\angle PCP_a = 90^\circ - \angle CPP_a = 90^\circ - \angle CP_bP_a$ . То есть  $\angle AP_cP = 90^\circ - \angle APP_c = 90^\circ - \angle AP_bP_c = 90^\circ - \angle CP_bP_a$ , а значит  $\angle AP_bP_c = \angle CP_bP_a$ . В таком случае они вертикальные, следовательно,  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  коллинеарны. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

**Теорема 3.12.** Пусть  $\triangle ABC$  описан около параболы, тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности этого треугольника.

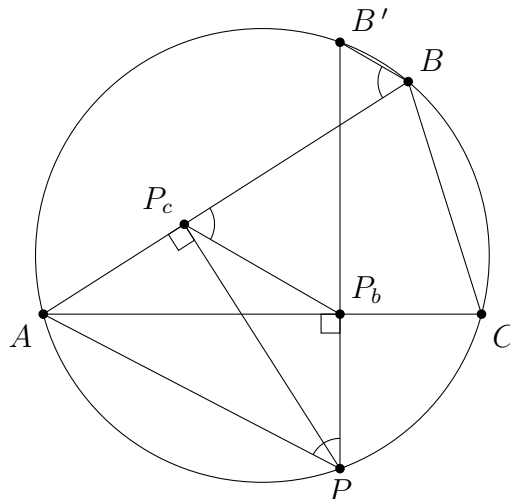
*Доказательство.*



Пусть  $F_a$ ,  $F_b$  и  $F_c$  – проекции фокуса параболы на стороны треугольника. По лемме 3.7 они коллинеарны. Тогда по теореме о прямой Симсона  $F$  принадлежит окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . ■

**Теорема 3.13.** Пусть  $P$  и  $B'$  лежат на окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , при чем  $PB' \perp AC$ . Тогда  $BB'$  параллельная прямой Симсона точки  $P$ .

*Доказательство.*

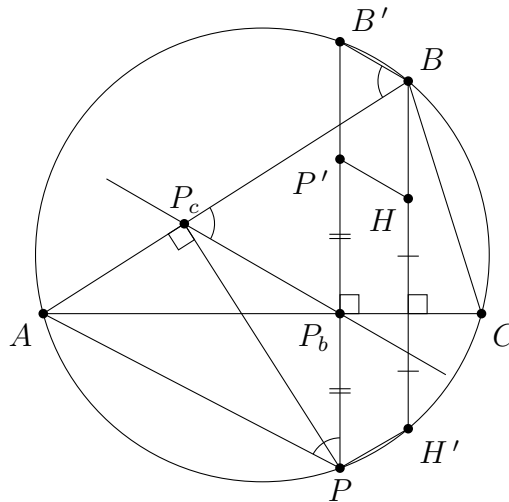


Пусть  $P_b$  и  $P_c$  – проекции  $P$  на  $AC$  и  $AB$  соответственно.  $\angle ABB' = \angle APB'$  как вписанные.  $AP_cP_bP$  – вписанный, так как  $\angle AP_cP = \angle AP_bP$ , следовательно,  $\angle APP_b = \angle P_bP_cB$ . То есть  $\angle P_cBB' = \angle P_bP_cB$ , а значит  $BB' \parallel P_bP_c$ . ■

**Следствие 3.13.1.** При вращении точки  $P$  по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги  $PA$ .

**Следствие 3.13.2.** Прямая Симсона точки  $P$  относительно  $\triangle ABC$  делит отрезок  $PH$  пополам, где  $H$  – ортоцентр  $\triangle ABC$ .

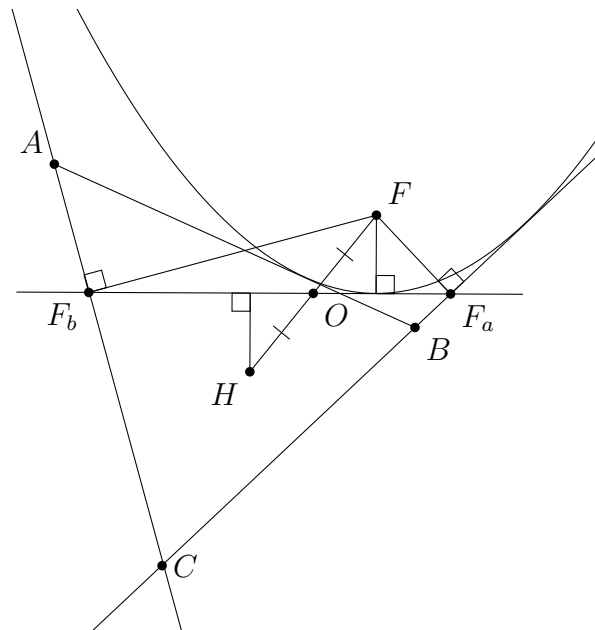
*Доказательство.*



Пусть  $H'$  и  $P'$  – образы  $H$  и  $P$  относительно  $AC$  соответственно. Поскольку  $PB' \parallel H'B$ ,  $PB'BH'$  – равнобокая трапеция. Тогда отрезок, симметричный  $PH'$  относительно  $AC$  должен быть параллелен  $BB'$ , то есть  $P'H \parallel B'B \parallel P_cP_b$ . Поскольку  $P_b$  – середина  $PP'$  и  $P_cP_b \parallel P'H$ , прямая Симсона – средняя линия  $\triangle HPP'$ , а значит делит  $HP$  пополам. ■

**Теорема 3.14.** Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе.

*Доказательство.*



Пусть  $F_a$  и  $F_b$  – проекции  $F$  на  $BC$  и  $AC$  соответственно. Тогда по следствию 3.7.1  $F_bF_a$  – прямая, касающаяся параболы в ее вершине и параллельная директрисе этой параболы. Пусть  $O$  – точка пересечения  $FH$  и  $F_bF_a$ , тогда по следствию 3.13.2  $FO = OH$ , при этом  $\angle HOF_b = \angle FOF_a$  как вертикальные, в таком случае равны по двум углам и стороне треугольники, образованные  $F, O, H$  и проекциями  $F$  и  $H$  на  $F_bF_a$ . Следовательно, расстояние от  $F$  до прямой, проходящей через вершину параболы и параллельной ее директрисе, равно расстоянию от этой прямой до  $H$ , а значит  $H$  лежит на директрисе параболы. ■

## 4 Гомотетия

**Определение 16.** Гомотетия с центром  $O$  и коэффициентом  $k$  суть преобразование плоскости, при котором  $\forall A \in \mathbb{R}^2 : H_O^k(A) = A' : \overrightarrow{OA} \cdot k = \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA'}$ .

### 4.1 Композиция гомотетий

**Определение 17.** Композиция гомотетий  $H_O^k$  и  $H_P^l$  при  $k, l \neq 1$  – это параллельный перенос при  $k \cdot l = 1$  или  $H_Q^{kl} : Q \in OP, \overrightarrow{OQ} \cdot (k - 1) = \overrightarrow{QP} \cdot \left(1 - \frac{1}{l}\right)$ .

## 5 Инверсия

**Определение 18.** Точки  $A$  и  $B$  называются симметричными относительно окружности  $\omega(O; R)$ , если  $OA \cdot OB = R^2$  и  $A$  лежит на луче  $OB$ .

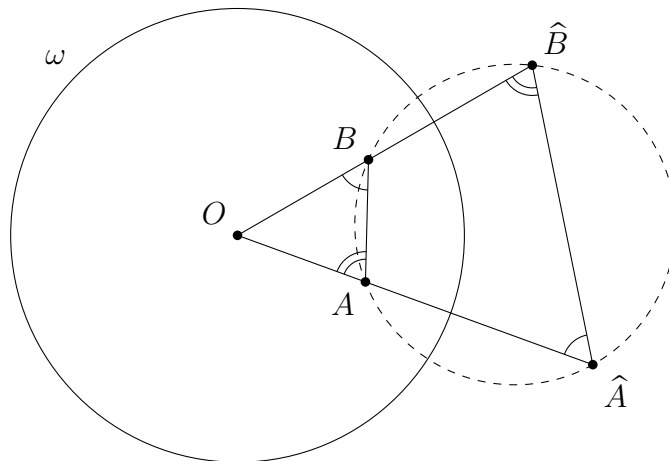
Для точек, симметричных относительно окружности  $\omega(O; R)$ , выполняются условия:

1.  $\forall X \in \mathbb{R}^2 : X \neq O \exists ! Y : X, Y$  – симметричны относительно  $\omega$
2. Если  $X$  внутри  $\omega$ , то  $Y$  снаружи и наоборот
3. Нет точки, симметричной  $O$
4.  $\forall C \in \omega : C$  симметрична сама себе

**Определение 19.** Пусть на плоскости дана окружность  $\omega(O; R)$ . Отображение  $\phi : \mathbb{R}^2/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2/\{0\}$ , при котором точки переходят в симметричные им относительно  $\omega$ , называется инверсией.

**Лемма 5.1** (Основная лемма). Любые две пары точек, симметричных относительно одной окружности, лежат на одной окружности.

*Доказательство.*



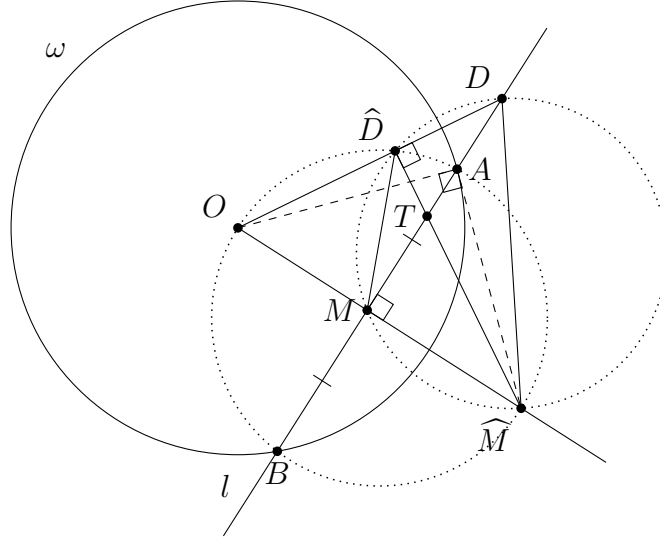
Пусть  $A$  и  $\hat{A}$ ,  $B$  и  $\hat{B}$  – пары точек, симметричных около окружности  $\omega(O; R)$ . Тогда:

$$OA \cdot O\hat{A} = R^2 = OB \cdot O\hat{B} \iff \frac{OA}{OB} = \frac{O\hat{B}}{O\hat{A}}$$

Следовательно, по двум сторонам, а также по общему углу  $\triangle AOB \sim \triangle \hat{B}O\hat{A}$ . Отсюда  $\angle ABO = \angle O\hat{A}\hat{B}$  и  $\angle OAB = \angle O\hat{B}\hat{A}$ , а значит  $\hat{A}AB\hat{B}$  – вписанный, так как сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ . ■

**Теорема 5.2.** Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

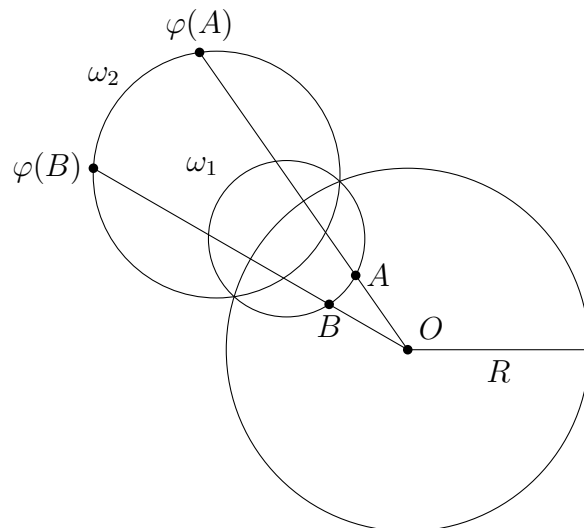
*Доказательство.*



Пусть  $M$  – основание серединного перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $l$ ,  $D$  – произвольная точка вне окружности, а  $\hat{M}$  и  $\hat{D}$  – точки, симметричные  $M$  и  $D$  соответственно относительно  $\omega$ ,  $T$  – точка пересечения  $l$  и  $\hat{D}\hat{M}$ . Из построения инверсии,  $AM$  – касательная к  $\omega$ . Тогда  $\angle OAM = 90^\circ$ . По основной лемме  $D\hat{D}M\hat{M}$  – вписанный. Тогда  $\angle D\hat{D}M = \angle DM\hat{M} = 90^\circ = \angle OAM$ . А значит  $O\hat{D}A\hat{M}$  – вписанный по признаку. ■

**Теорема 5.3.** Если при инверсии  $\varphi$  верно:  $\varphi(\omega_1) = \omega_2$ , где  $\omega_i$  – это окружность, то центр данной инверсии суть центр гомотетии, переводящей  $\omega_1$  в  $\omega_2$ .

*Доказательство.*

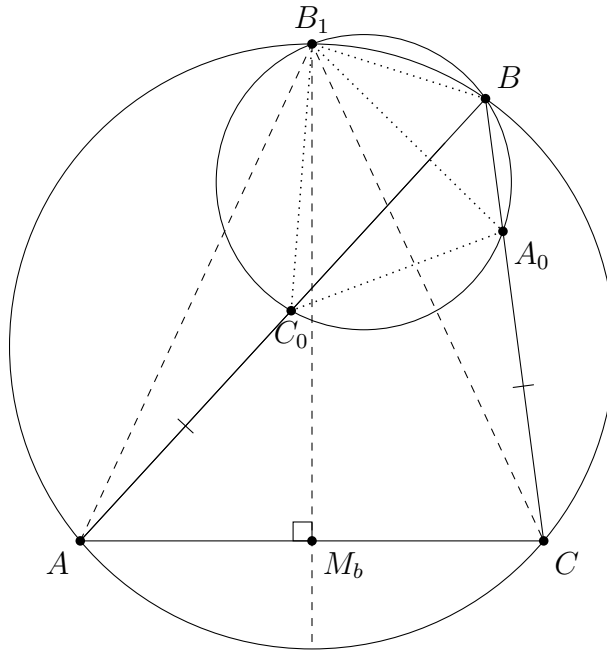


Возьмем две произвольные точки  $A$  и  $B$ , лежащие на  $\omega_1$  и построим их образы при инверсии  $\varphi$ :  $\varphi(A)$  и  $\varphi(B)$  соответственно. По определению инверсии  $OA \cdot O\varphi(A) = R^2 = OB \cdot O\varphi(B) \implies \frac{OA}{OB} = \frac{O\varphi(A)}{O\varphi(B)}$ , а значит  $O$  – центр гомотетии, переводящей  $\omega_1$  в  $\omega_2$ . ■

## 6 Полезные факты

**Лемма 6.1.** Пусть  $C_0$  и  $A_0$  – произвольные точки на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ ,  $B_1$  – середина дуги  $ABC$ , описанной около  $\triangle ABC$  окружности, тогда  $BB_1C_0A_0$  является вписанным тогда и только тогда, когда  $AC_0 = CA_0$ .

*Доказательство.*



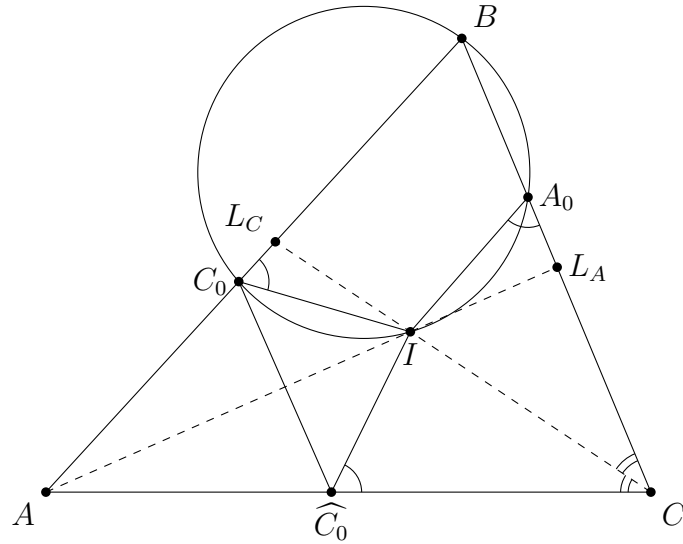
Пусть  $AC_0 = CA_0$ , докажем вписанность  $BB_1C_0A_0$ . Опустим перпендикуляр с основанием  $M_b$  из  $B_1$  на  $AC$ , тогда в силу того, что  $B_1$  – середина дуги  $ABC$ ,  $B_1M_b$  – серединный перпендикуляр к  $AC$ . Тогда  $AB_1 = B_1C$ . Рассмотрим  $\triangle AB_1C_0$  и  $\triangle CB_1A_0$ :  $\angle B_1AB = \angle B_1CB$ , так как они опираются на одну дугу  $B_1B$ , при этом  $AC_0 = CA_0$  по условию и  $AB_1 = B_1C$ . То есть  $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$ , а значит равны их внешние углы:  $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$ , тогда  $BB_1C_0A_0$  – вписанный по признаку.

Докажем, что  $AC_0 = CA_0$  при условии вписанности  $BB_1C_0A_0$ . Аналогично первому доказательству,  $\angle B_1AB = \angle B_1CB$  и в силу вписанности  $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$ , при этом  $AB_1 = B_1C$ , а значит  $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$  по двум углам и стороне, то есть  $AC_0 = CA_0$ . ■

**Лемма 6.2.** Пусть  $A_0$  и  $C_0$  – произвольные точки на  $BC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Инцентр  $\triangle ABC$  лежит на окружности, описанной около  $\triangle A_0BC_0$  тогда и только тогда, когда  $AC_0 + CA_0 = AC$ .

*Доказательство.*





Пусть  $L_A$  и  $L_C$  – основания биссектрисс из точек  $A$  и  $C$  соответственно. Отметим точку  $\widehat{C}_0$ , симметричную  $C_0$  относительно  $AL_A$ . Докажем равенство при условии вписанности. В силу вписанности  $A_0IC_0B$ :  $\angle IA_0C = \angle IC_0B$ . При этом в силу симметрии  $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C}_0C$ . Также  $\angle IC\widehat{C}_0 = \angle ICL_A$ , так как  $CI$  – биссектриса. Тогда  $\triangle IC\widehat{C}_0 = \triangle ICA_0$  по двум углам и общей стороне  $IC$ . То есть  $\widehat{C}_0C = A_0C$ , а значит  $A\widehat{C}_0 + \widehat{C}_0C = A\widehat{C}_0 + A_0C = AC_0 + A_0C = AC$ .

Докажем вписанность при условии равенства. В силу симметрии  $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C}_0C$ .  $AC = AC_0 + A_0C = A\widehat{C}_0 + A_0C \implies A_0C = C\widehat{C}_0$ . Тогда  $\triangle IC\widehat{C}_0 = \triangle ICA_0$  по двум сторонам и углу, а значит  $\angle I\widehat{C}_0C = \angle IA_0C$ , то есть  $\angle IA_0C = \angle IC_0B$ , следовательно,  $A_0IC_0B$  – вписанный. ■