Геометрия

Содержание

1 Бинарное отношение. Векторы.

Определение 1. Пусть множество $a, b \in M$. Множество $R \subset \{(a,b)|a,b \in M\}$ упорядоченных пар. Если $(\widehat{a}, \widehat{b}) \subset R$, пишут $\widehat{a} \underset{R}{\sim} \widehat{b}$.

Определение 2. Отношение $\sim$ на M называется:

1. Рефлексивным: $\forall a \in M : a \sim a$
2. Симметричным: $\forall a, b \in M : a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$
3. Транзитивным: $\forall a, b \in M : a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$

Определение 3. Отношение $\sim$ на M называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Как только на M задано отношение эквивалентности, появляется $M/\sim$ классов эквивалентности.

Определение 4. Вектор – класс эквивалентности параллельных переносов.

Свойства сложения векторов:

- Коммутативно: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Ассоциативно: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Определение 5. $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, если $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\vec{a} = \vec{b}$.

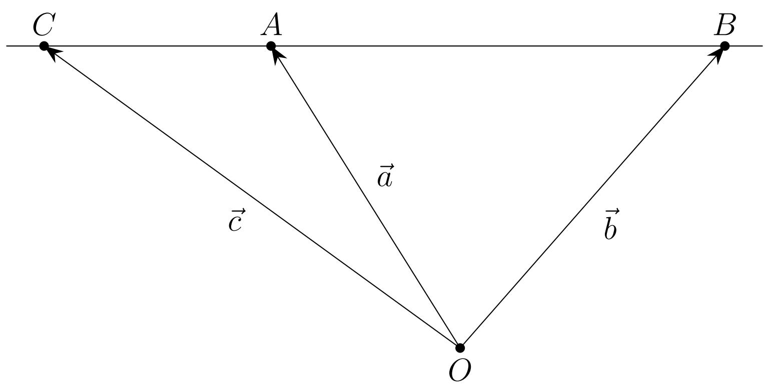
Определение 6. Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов $(\vec{a}; \vec{b})$.

Теорема 1.1. $\forall \vec{v} \in V_{\mathbb{R}^2} \exists!(x; y); x, y \in \mathbb{R} : \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $(\vec{a}; \vec{b})$ – базис $V_{\mathbb{R}^2}$. То есть $(x; y)$ – координаты $\vec{v}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$.

Определение 7. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется: $\phi = \arccos\left(\dfrac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \Longleftrightarrow \cos\phi = \dfrac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, где $|\vec{a}| = \sqrt{(a, a)}$.

Теорема 1.2. $C \in AB \Longleftrightarrow \forall O : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

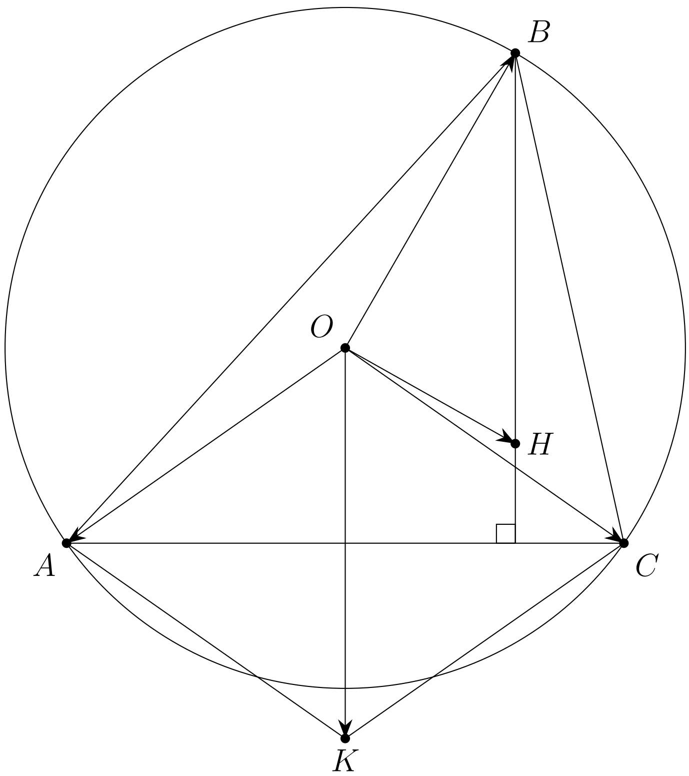
Доказательство.



Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тогда $\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$. Тогда обозначим $\dfrac{|\ \vec{c} - \vec{b}\ |}{|\ \vec{a} - \vec{b}\ |} = x$, откуда $\vec{c} - \vec{b} = x(\vec{a} - \vec{b})$, то есть $\vec{c} = x\vec{a} - (1 - x)\vec{b}$. ■

Теорема 1.3. Пусть O и H – центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

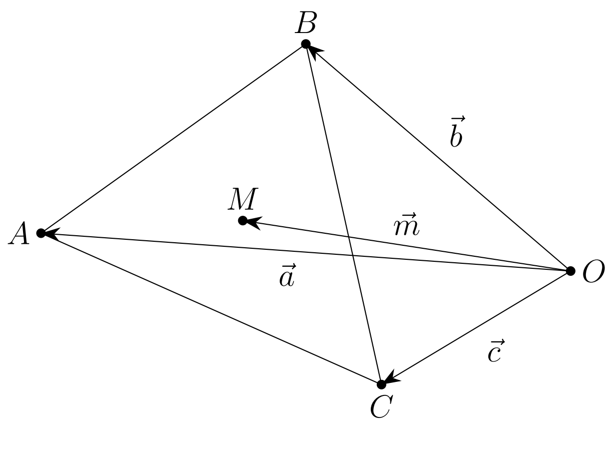
Доказательство.



Рассмотрим сумму $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$, как радиусы описанной окружности, следовательно, $AOCK$ – ромб, а значит $AC \perp OK$ как диагонали. Тогда $OK \| BH$, а значит точка M вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OB}$ лежит на BH, но аналогично эта точка лежит на всех высотах $\triangle ABC$, а значит является ортоцентром. ■

Теорема 1.4. Пусть $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ – базис в $\triangle ABC$, а M – его центроид. Тогда $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Доказательство.



Обозначим $\overrightarrow{OA}$ как $\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}$ как $\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}$ как $\vec{c}$, $\overrightarrow{OM}$ как $\vec{m}$. Представим $\overrightarrow{OM}$ в виде суммы векторов: $\vec{b}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\right)=\vec{b}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. ■

Теорема 1.5. Пусть O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, а M – центроид $\triangle ABC$ соответственно. Тогда O, H и M – коллинеарны.

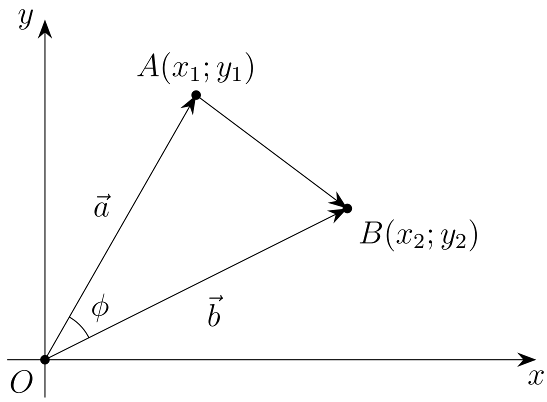
Доказательство. Из предыдущих двух теорем нам известно, что $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, а также что $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, из чего следует, что $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OM}$. ■

Определение 8. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$, где ϕ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема 1.6. В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1;y_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2)$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$$

Доказательство.



По теореме косинусов $AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\phi$, но по теореме Пифагора $OA^2=(x_1)^2+(y_1)^2$, $OB^2=(x_2)^2+(y_2)^2$, $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$. Тогда если подставить в первое выражение и упростить получим $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=OA\cdot OB\cdot\cos\phi$. ■

2 Метод координат

Определение 9. Общим уравнением прямой называется уравнение вида $ax+by+c=0$, в котором a и b не равны нулю:

$$\begin{aligned}
&l_1: a_1x+b_1y+c_1=0\\
&l_2: a_2x+b_2y+c_2=0\\
&l_1\| l_2 \overset{b_1\cdot b_2\neq 0}{\iff} \frac{-a_1}{b_1}=\frac{-a_2}{b_2}\iff a_1b_2=a_2b_1\\
&l_1\perp l_2 \overset{b_1\cdot b_2\neq 0}{\iff} \frac{-a_1}{b_1}\cdot\frac{-a_2}{b_2}=-1\iff a_1a_2+b_1b_2=0
\end{aligned}$$

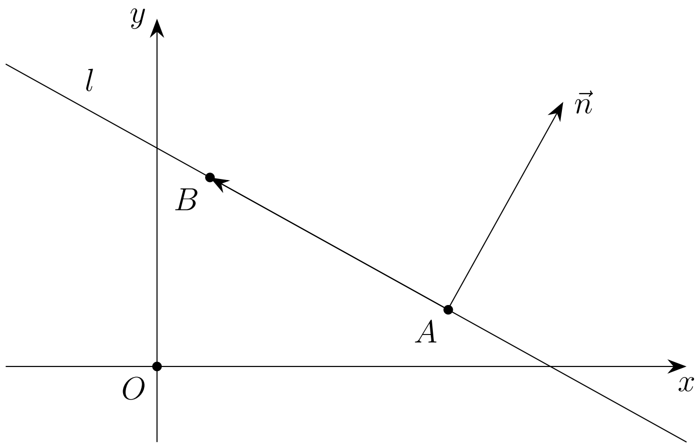
2.1 Нормаль и направляющий вектор

Определение 10. Вектор $\vec{v}$ называется направляющим для прямой l, если его начало и конец лежат на l.

Определение 11. Любой вектор $\vec{n_l} : \vec{n_l} \perp l$, называется ее нормалью.

Теорема 2.1. Вектор $\vec{n}(a; b)$ является вектором нормали к прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

Доказательство.

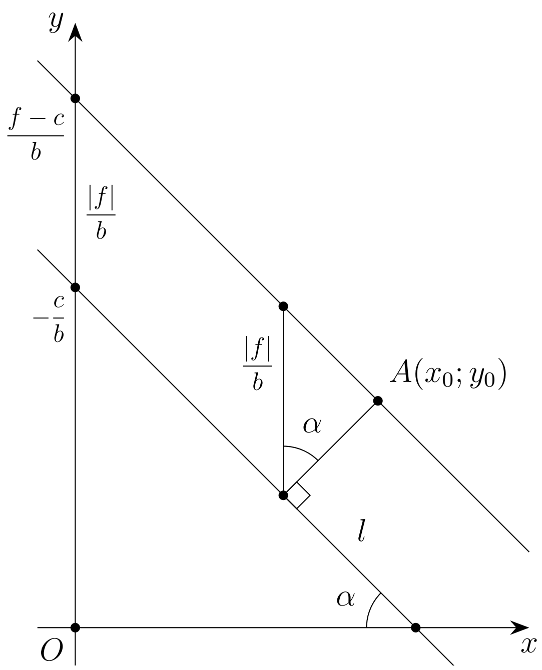


Возьмем произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. При этом $ax_1 + by_1 + c = ax_2 + by_2 + c = 0$, следовательно, если вычесть одно из другого, получим $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. Рассмотрим $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$. ■

2.2 Расстояние от точки до прямой

Теорема 2.2. $\rho(A; l) : A(x_0; y_0),\ l : ax + by + c = 0 : \rho(A; l) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Доказательство.



Пусть $A(x_0; y_0)$, тогда $ax_0 + by_0 + c = f \Longrightarrow y_0 = \dfrac{f-c}{b} - \dfrac{ax_0}{b}$. Проведем через точку A перпендикуляр к l, а также прямую, параллельную l. Отметим найденные ранее координаты на OY, а также найдем расстояние между ними. Пусть угол наклона l относительно OX равен α, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{a}{b}$. Из основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \,|\, : \cos^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\dfrac{a^2}{b^2} + 1}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

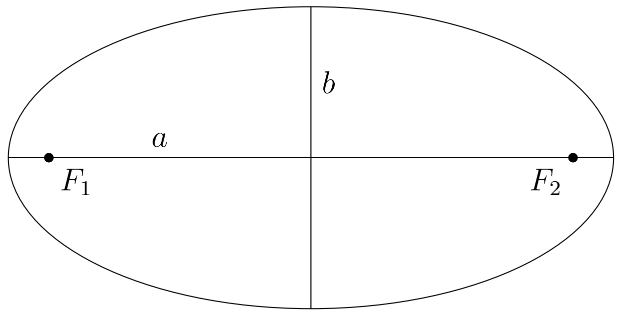
Тогда, чтобы найти $\rho(A; l)$, умножим косинус на гипотенузу и получим: $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \dfrac{|f|}{b} = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ■

3 Кривые второго порядка

3.1 Свойства кривых второго порядка

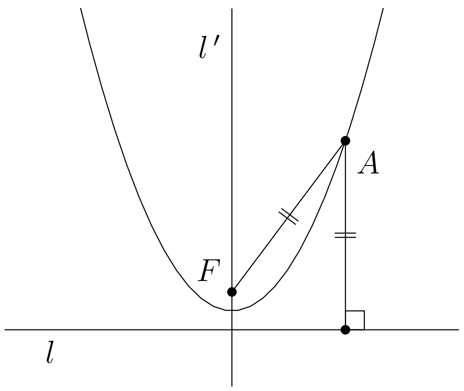
Определение 12. Углом между кривыми называется угол между их касательными в данной точке.

Определение 13. Эллипсом называется ГМТ, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называющихся фокусами, постоянна.



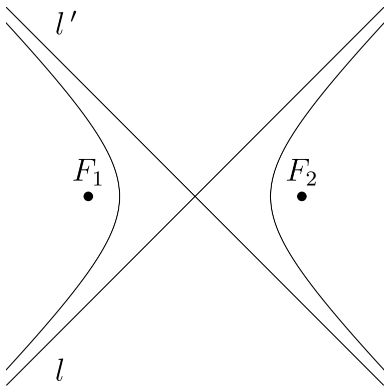
F_1, F_2 – фокусы эллипса
a – большая ось
b – малая ось

Определение 14. Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фиксированной точки F, называемой ее фокусом, и прямой l, называемой директрисой данной параболы.



l' – ось параболы
F – фокус параболы
l – директриса параболы

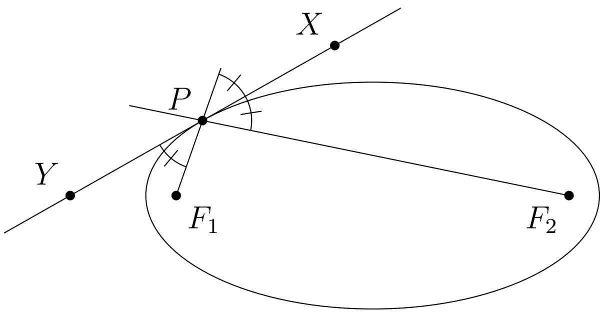
Определение 15. Гиперболой называется ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянен.



F_1, F_2 – фокусы гиперболы
l, l' – асимптоты гиперболы

Теорема 3.1 (Оптическое свойство эллипса)**.** Пусть l касается эллипса с фокусами F_1 и F_2 в точке P, тогда l – биссектриса угла, смежного $\angle F_1PF_2$.

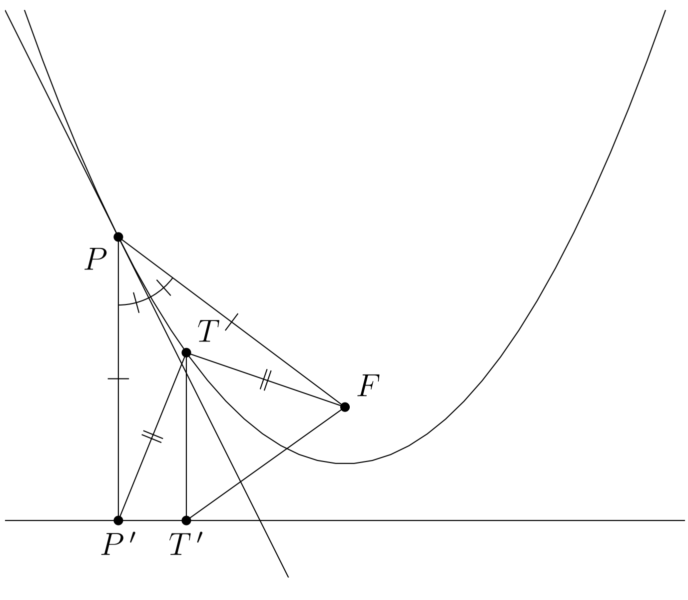
Доказательство.



Пусть X, $Y \in l$, тогда по определению касательной $XF_1 + XF_2 \geqslant PF_1 + PF_2$. Следовательно, P – точка на l, сумма расстояний от которой до фокусов минимальна, откуда $\angle F_2PX = \angle F_1PY$. ∎

Теорема 3.2 (Оптическое свойство параболы)**.** Пусть l касается параболы в точке P, P' – проекция точки P на директрису. Тогда l – биссектриса $\angle FPP'$.

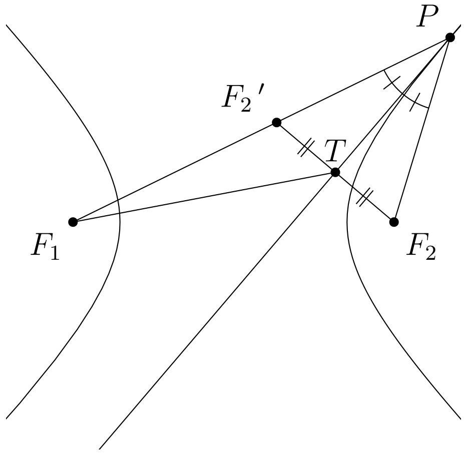
Доказательство.



Пусть биссектриса не касается параболы, то есть пересекает ее в точке T. По определению параболы $PP' = PF \implies \triangle P'PT = \triangle PFT$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $P'T = TF$, но тогда если T' – проекция T на директрису, то $TT' = TF$, то есть $TP' = TT'$, противоречие. ■

Теорема 3.3 (Оптическое свойство гиперболы)**.** Пусть l касается гиперболы с фокусами F_1 и F_2 в точке P, тогда l – биссектриса $\angle F_1F_2P$.

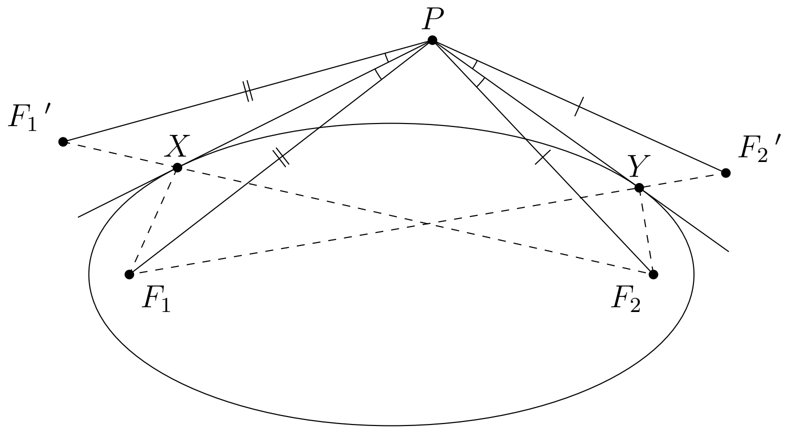
Доказательство.



Пусть биссектриса не касается гиперболы, то есть пересекает ее в точке T. Обозначим через ${F_2}'$ точку, симметричную F_2 относительно l. Тогда $F_2T = {F_2}'T$, а также $F_2P = {F_2}'P$. Кроме того, F_1, ${F_2}'$ и P коллинеарны по определению биссектрисы. По определению гиперболы $F_1P - F_2P = F_1T - F_2T$. Тогда получаем, что $F_1{F_2}' = F_1P - {F_2}'P = F_1T - {F_2}'T$, но по неравенству треугольника $F_1{F_2}' > F_1T - {F_2}'T$, противоречие. ■

Теорема 3.4 (Изогональное свойство эллипса)**.** Пусть PX и PY – касательные к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Тогда $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.

Доказательство.



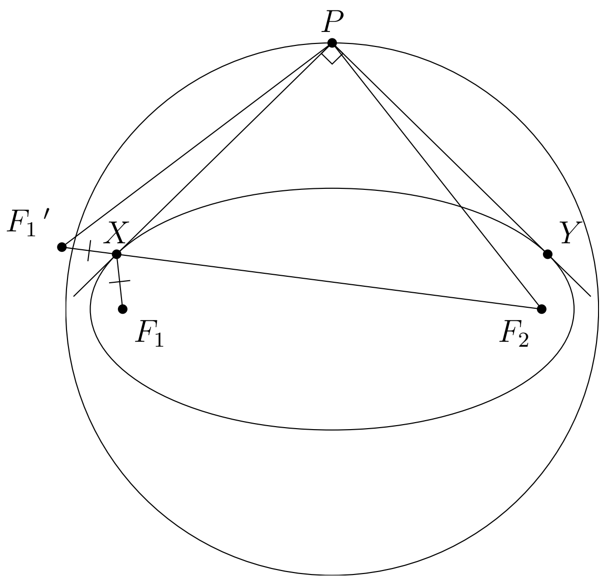
Пусть ${F_1}'$ и ${F_2}'$ – точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PX и PY соответственно. Тогда $PF_1 = P{F_1}'$ и $PF_2 = P{F_2}'$, при этом F_1, Y и ${F_2}'$, а также F_2, X и ${F_1}'$ коллинеарны по оптическому свойству эллипса. Получаем, что $F_2{F_1}' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_1{F_2}'$. То есть $\triangle F_1P{F_2}' = \triangle F_2P{F_1}'$ по трем сторонам. Тогда $\angle F_1PF_2 + 2\angle F_1PX = \angle F_2P{F_1}' = \angle F_1P{F_2}' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY \implies \angle F_1PX = \angle F_2PY$. ■

Теорема 3.5. В обозначениях теоремы 3.4 прямая F_1P суть биссектриса $\angle XF_1Y$.

Доказательство. В силу оптических свойств $\angle PF_1{}'X = \angle PF_1X$, при этом из теоремы 3.4 известно, что $\angle PF_1{}'F_2 = \angle PF_1F_2{}'$, так как $\triangle F_1PF_2{}' = \triangle F_1{}'PF_2$. Тогда $\angle PF_1F_2{}' = \angle PF_1{}'X = \angle PF_1X$. ■

Теорема 3.6. Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом, является окружность с центром в центре эллипса.

Доказательство.

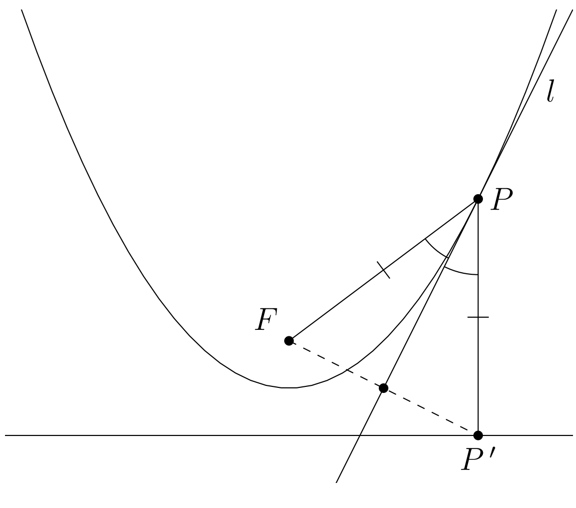


Пусть $F_1{}'$ – образ F_1 относительно прямой PX. Из теоремы 3.4 следует, что $\angle F_1{}'PF_2 = \angle XPY = 90°$. По теореме Пифагора $F_1{}'P^2 + F_2P^2 = F_1{}'F_2{}^2$, то есть получаем уравнение окружности с центром в середине F_1F_2. ■

3.2 Свойства параболы

Лемма 3.7. Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы.

Доказательство.

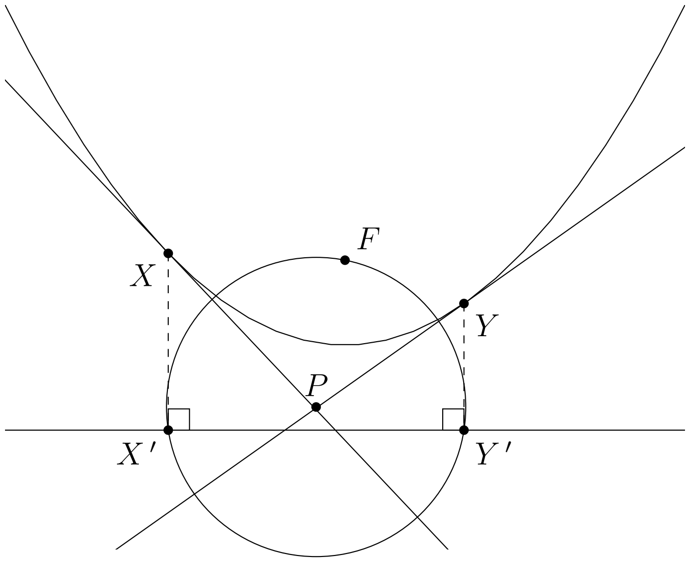


Пусть прямая l касается параболы в точке P, P' – проекция P на директрису параболы. l – биссектриса $\angle FPP'$, но $\triangle FPP'$ – равнобедренный по определению параболы, а значит l в нем медиана и высота, откуда P' – образ F. ■

Следствие 3.7.1. Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.

Лемма 3.8. Пусть PX и PY – касательные к параболе. Тогда P является центром описанной около $\triangle FX'Y'$ окружности, где X' и Y' – проекции X и Y на директрису параболы соответственно.

Доказательство.

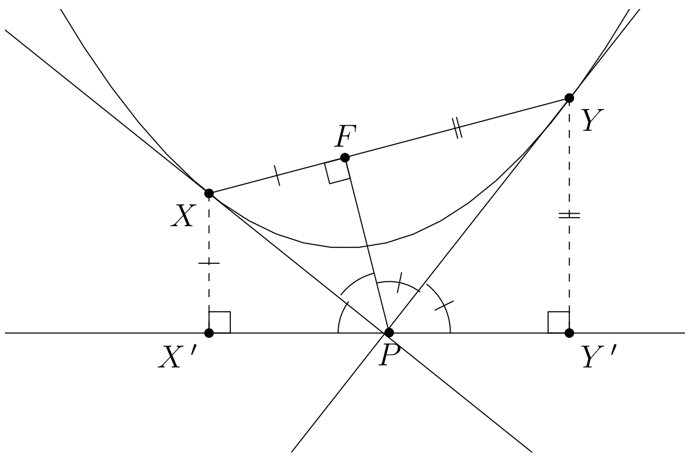


Из леммы 3.8 следует, что PX и PY являются серединными перпендикулярами к FX' и FY' соответственно. Тогда их точка пересечения будет являться центром окружности, описанной около $\triangle FX'Y'$. ■

Следствие 3.8.1. Если PX и PY – касательные к параболе, то P' будет серединой $X'Y'$, где P', X' и Y' – проекции P, X и Y на директрису параболы соответственно.

Теорема 3.9. Множество таких точек P, из которых парабола видна под прямым углом, суть директриса этой параболы. Кроме того, если PX и PY – касательные к этой параболе, то XY содержит F и PF – высота $\triangle PXY$.

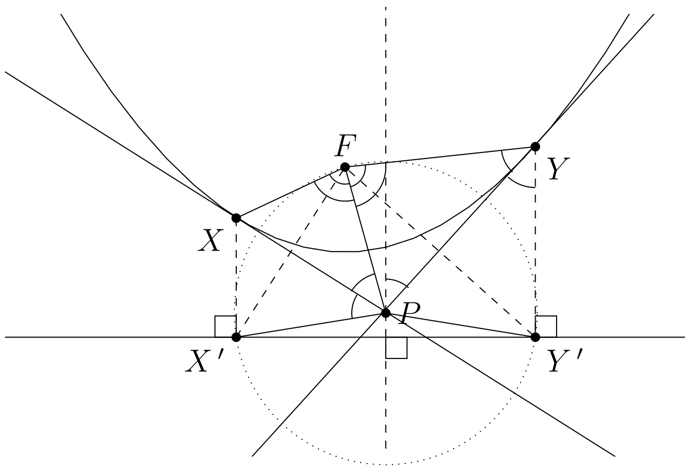
Доказательство.



Пусть P лежит на директрисе, тогда если X' и Y' – проекции X и Y на директрису соответственно, то $\triangle PXX' = \triangle PXF$, а значит $\angle PFX = \angle PX'X = 90^\circ$. Аналогично $\angle PFY = 90^\circ$. То есть X, F и Y коллинеарны. При этом $\angle XPX' = \angle XPF$, $\angle YPF = \angle YPY'$, следовательно, $\angle XPY = \dfrac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$. ■

Теорема 3.10. Пусть PX и PY – касательные к параболе, а l – прямая, проходящая через P параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми PY и l равен $\angle XPF$, $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ и FP – биссектриса $\angle XFY$.

Доказательство.

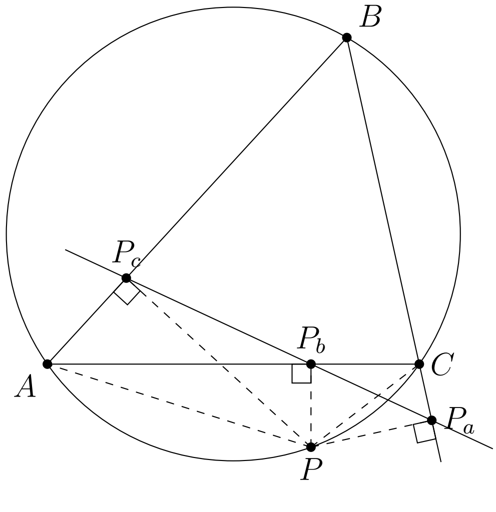


Пусть X' и Y' – проекции X и Y на директрису соответственно. Угол между PY и l равен $\angle X'Y'F$, так как $l \perp X'Y'$ и $PY \perp Y'F$. При этом по лемме 3.8 F, X' и Y' лежат на окружности с центром в P. Тогда $\angle X'Y'F = \dfrac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$. Поскольку $l \parallel YY'$, угол между PY и l равен $\angle PYY'$, который в силу оптического свойства параболы равен $\angle PYF$. То есть $\angle PYF = \angle XPF$, аналогично $\angle FXP = \angle YPF$. Тогда $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ по двум углам и PF – биссектриса $\angle XFY$. ■

3.3 Прямая Симсона

Теорема 3.11 (Прямая Симсона)**.** Проекции точки P на стороны $\triangle ABC$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника.

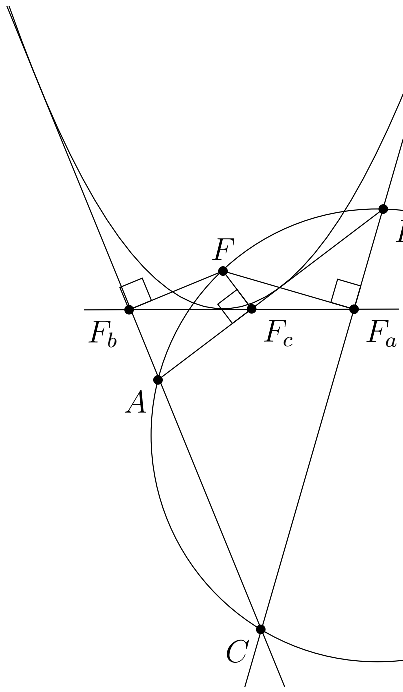
Доказательство.



Пусть P_a, P_b и P_c – проекции точки P на BC, AC и AB соответственно. AP_cP_bP вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$. Тогда $\angle APP_c = \angle AP_bP_C$. Аналогично $\angle CP_bP_a = \angle CPP_a$. В силу вписанности $ABCP$ $\angle PCP_a = 180^\circ - \angle BCP = \angle BAP$. При этом $\angle PCP_a = 90^\circ - \angle CPP_a = 90^\circ - \angle CP_bP_a$. То есть $\angle AP_cP = 90^\circ - \angle APP_c = 90^\circ - \angle AP_bP_c = 90^\circ - \angle CP_bP_a$, а значит $\angle AP_bP_c = \angle CP_bP_a$. В таком случае они вертикальные, следовательно, P_a, P_b и P_c коллинеарны. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теорема 3.12. Пусть $\triangle ABC$ описан около параболы, тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности этого треугольника.

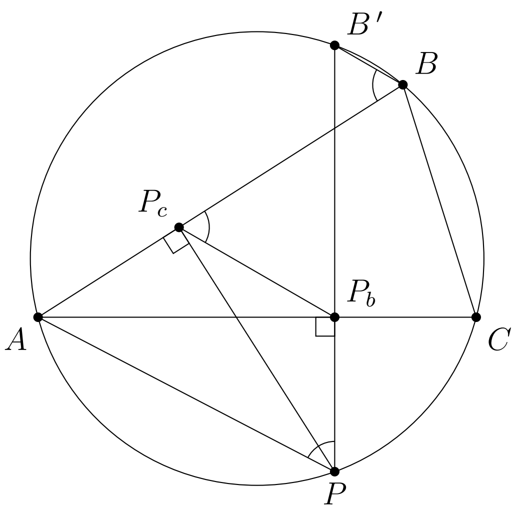
Доказательство.



Пусть F_a, F_b и F_c – проекции фокуса параболы на стороны треугольника. По лемме 3.7 они коллинеарны. Тогда по теореме о прямой Симсона F принадлежит окружности, описанной около $\triangle ABC$. ■

Теорема 3.13. Пусть P и B' лежат на окружности, описанной около $\triangle ABC$, при чем $PB' \perp AC$. Тогда BB' параллельная прямой Симсона точки P.

Доказательство.

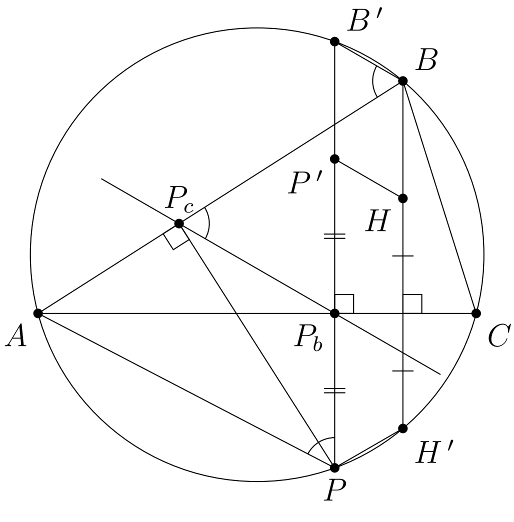


Пусть P_b и P_c – проекции P на AC и AB соответственно. $\angle ABB' = \angle APB'$ как вписанные. AP_cP_bP – вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$, следовательно, $\angle APP_b = \angle P_bP_cB$. То есть $\angle P_cBB' = \angle P_bP_cB$, а значит $BB' \parallel P_bP_c$. ■

Следствие 3.13.1. При вращении точки P по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги PA.

Следствие 3.13.2. Прямая Симсона точки P относительно $\triangle ABC$ делит отрезок PH пополам, где H – ортоцентр $\triangle ABC$.

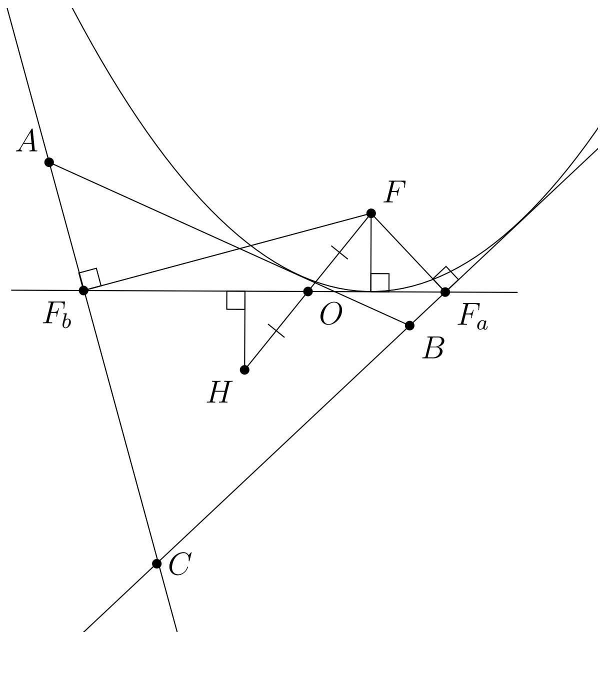
Доказательство.



Пусть H' и P' – образы H и P относительно AC соответственно. Поскольку $PB' \parallel H'B$, $PB'BH'$ – равнобокая трапеция. Тогда отрезок, симметричный PH' относительно AC должен быть параллелен BB', то есть $P'H \parallel B'B \parallel P_cP_b$. Поскольку P_b – середина PP' и $P_cP_b \parallel P'H$, прямая Симсона – средняя линия $\triangle HPP'$, а значит делит HP пополам. ■

Теорема 3.14. Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе.

Доказательство.



Пусть F_a и F_b – проекции F на BC и AC соответственно. Тогда по следствию 3.7.1 F_bF_a – прямая, касающаяся параболы в ее вершине и параллельная директрисе этой параболы. Пусть O – точка пересечения FH и F_bF_a, тогда по следствию 3.13.2 $FO = OH$, при этом $\angle HOF_b = \angle FOF_a$ как вертикальные, в таком случае равны по двум углам и стороне треугольники, образованные F, O, H и проекциями F и H на F_bF_a. Следовательно, расстояние от F до прямой, проходящей через вершину параболы и параллельной ее директрисе, равно расстоянию от этой прямой до H, а значит H лежит на директрисе параболы. ■

4 Гомотетия

Определение 16. Гомотетия с центром O и коэффициентом k суть преобразование плоскости, при котором $\forall A \in \mathbb{R}^2 : H_O^k(A) = A' : \overrightarrow{OA} \cdot k = \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA} \upuparrows \overrightarrow{OA'}$.

4.1 Композиция гомотетий

Определение 17. Композиция гомотетий H_O^k и H_P^l при k, $l \neq 1$ – это параллельный перенос при $k \cdot l = 1$ или $H_Q^{kl} : Q \in OP, \overrightarrow{OQ} \cdot (k-1) = \overrightarrow{QP} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{l}\right)$.

5 Инверсия

Определение 18. Точки A и B называются симметричными относительно окружности $\omega(O;\ R)$, если $OA \cdot OB = R^2$ и A лежит на луче OB.

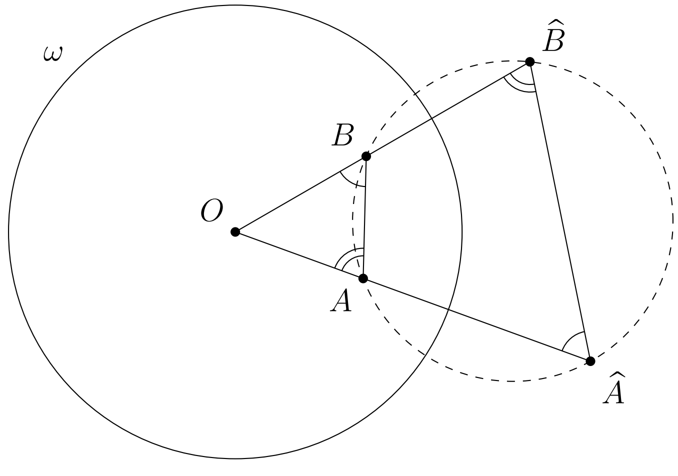
Для точек, симметричных относительно окружности $\omega(O;\ R)$, выполняются условия:

1. $\forall X \in \mathbb{R}^2 : X \neq 0\ \exists!\, Y : X, Y$ – симметричны относительно ω
2. Если X внутри ω, то Y снаружи и наоборот
3. Нет точки, симметричной O
4. $\forall C \in \omega : C$ симметрична сама себе

Определение 19. Пусть на плоскости дана окружность $\omega(O;\ R)$. Отображение $\phi : \mathbb{R}^2/\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\{0\}$, при котором точки переходят в симметричные им относительно ω, называется инверсией.

Лемма 5.1 (Основная лемма)**.** Любые две пары точек, симметричных относительно одной окружности, лежат на одной окружности.

Доказательство.



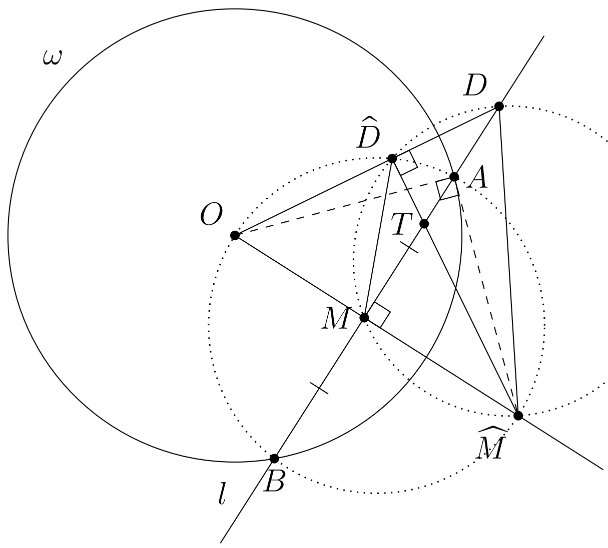
Пусть A и $\widehat{A}$, B и $\widehat{B}$ – пары точек, симметричных около окружности $\omega(O;\, R)$. Тогда:

$$OA \cdot O\widehat{A} = R^2 = OB \cdot O\widehat{B} \Longleftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{O\widehat{B}}{O\widehat{A}}$$

Следовательно, по двум сторонам, а также по общему углу $\triangle AOB \sim \triangle \widehat{B}O\widehat{A}$. Отсюда $\angle ABO = \angle O\widehat{A}\widehat{B}$ и $\angle OAB = \angle O\widehat{B}\widehat{A}$, а значит $\widehat{A}AB\widehat{B}$ – вписанный, так как сумма его противоположных углов равна $180°$. ■

Теорема 5.2. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

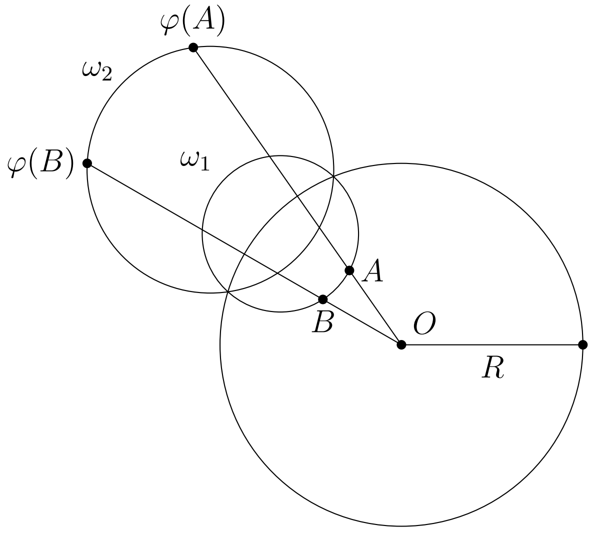
Доказательство.



Пусть M – основание серединного перпенидкуляра, опущенного из O на l, D – произвольная точка вне окружности, а $\widehat{M}$ и $\widehat{D}$ – точки, симметричные M и D соответственно относительно ω, T – точка пересечения l и $\widehat{D}\widehat{M}$. Из построения инверсии, AM – касательная к ω. Тогда $\angle OA\widehat{M} = 90°$. По основной лемме $D\widehat{D}M\widehat{M}$ – вписанный. Тогда $\angle D\widehat{D}\widehat{M} = \angle DM\widehat{M} = 90° = \angle OA\widehat{M}$. А значит $O\widehat{D}A\widehat{M}$ – вписанный по признаку. ■

Теорема 5.3. Если при инверсии φ верно: $\varphi(\omega_1) = \omega_2$, где ω_i – это окружность, то центр данной инверсии суть центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2.

Доказательство.

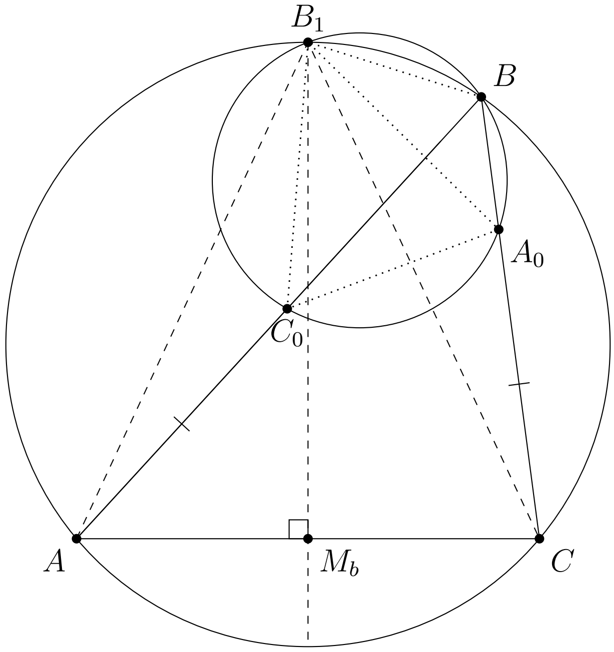


Возьмем две произвольные точки A и B, лежащие на ω_1 и построим их образы при инверсии φ: $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ соответственно. По определению инверсии $OA \cdot O\varphi(A) = R^2 = OB \cdot O\varphi(B) \Longrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{O\varphi(A)}{O\varphi(B)}$, а значит O – центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2. ∎

6 Полезные факты

Лемма 6.1. Пусть C_0 и A_0 – произвольные точки на сторонах AB и BC треугольника ABC, B_1 – середина дуги ABC, описанной около $\triangle ABC$ окружности, тогда $BB_1C_0A_0$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AC_0 = CA_0$.

Доказательство.

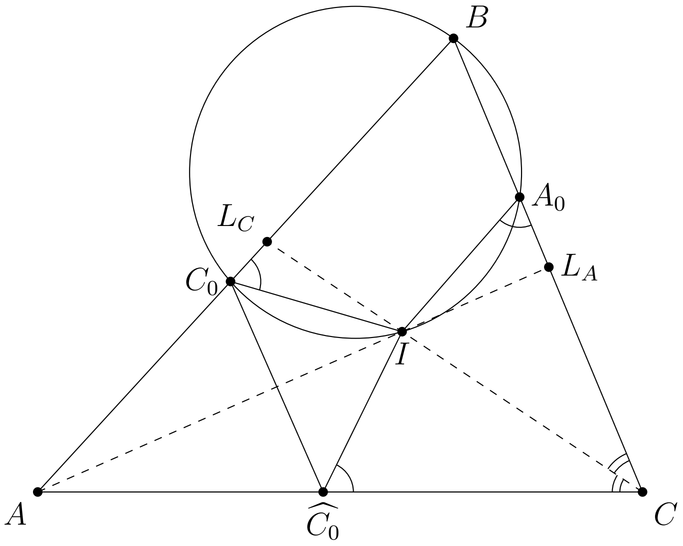


Пусть $AC_0 = CA_0$, докажем вписанность $BB_1C_0A_0$. Опустим перпендикуляр с основанием M_b из B_1 на AC, тогда в силу того, что B_1 – середина дуги ABC, B_1M_b – серединный перпендикуляр к AC. Тогда $AB_1 = B_1C$. Рассмотрим $\triangle AB_1C_0$ и $\triangle CB_1A_0$: $\angle B_1AB = \angle B_1CB$, так как они опираются на одну дугу B_1B, при этом $AC_0 = CA_0$ по условию и $AB_1 = B_1C$. То есть $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$, а значит равны их внешние углы: $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$, тогда $BB_1C_0A_0$ – вписанный по признаку.

Докажем, что $AC_0 = CA_0$ при условии вписанности $BB_1C_0A_0$. Аналогично первому доказательству, $\angle B_1AB = \angle B_1CB$ и в силу вписанности $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$, при этом $AB_1 = B_1C$, а значит $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$ по двум углам и стороне, то есть $AC_0 = CA_0$. ∎

Лемма 6.2. Пусть A_0 и C_0 – произвольные точки на BC и AB треугольника ABC соответственно. Инцентр $\triangle ABC$ лежит на окружности, описанной около $\triangle A_0BC_0$ тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

Доказательство.



Пусть L_A и L_C – основания биссектрисс из точек A и C соответственно. Отметим точку $\widehat{C_0}$, симметричную C_0 относительно AL_A. Докажем равенство при условии вписанности. В силу вписанности A_0IC_0B: $\angle IA_0C = \angle IC_0B$. При этом в силу симметрии $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C_0}C$. Также $\angle IC\widehat{C_0} = \angle ICL_A$, так как CI – биссектриса. Тогда $\triangle IC\widehat{C_0} = \triangle ICA_0$ по двум углам и общей стороне IC. То есть $\widehat{C_0}C = A_0C$, а значит $A\widehat{C_0} + \widehat{C_0}C = A\widehat{C_0} + A_0C = AC_0 + A_0C = AC$.

Докажем вписанность при условии равенства. В силу симметрии $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C_0}C$. $AC = AC_0 + A_0C = A\widehat{C_0} + A_0C \Longrightarrow A_0C = C\widehat{C_0}$. Тогда $\triangle IC\widehat{C_0} = \triangle ICA_0$ по двум сторонам и углу, а значит $\angle I\widehat{C_0}C = \angle IA_0C$, то есть $\angle IA_0C = \angle IC_0B$, следовательно, A_0IC_0B – вписанный. ■