Алгебра

Содержание

1 Решение уравнений и неравенств.

1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a,\ a > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \qquad |f(x)| > a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leqslant |g(x) \Longleftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leqslant 0 \\ &|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \Longleftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0 \\ &|f(x)| + |g(x)| \leqslant |f(x) + g(x)| \Longleftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

2 Многочлены

Определение 1. Многочленом от переменной x над K называется выражение вида: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_k \in K$ – коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$.

Определение 2. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$, называется степенью многочлена f:

$$\begin{aligned} &k = deg\, f \\ &a_0 \text{ – свободный член} \\ &a_n x^n \text{ – старший член} \\ &a_n \text{ – старший коэффициент} \end{aligned}$$

Определение 3. Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях x равны.

Определение 4.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + d_1 x + d_0, \text{ где} d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

.

Утверждение 2.1. Пусть $def\, f(x) \neq 0$, $deg\, g(x) \neq 0$, тогда:

1. $deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max\{deg\, f,\, deg\, g\}$
2. $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3. $deg(f(x) \cdot g(x)) = deg\, f(x) + deg\, g(x)$

Доказательство.

1. Пусть $deg\, f = def\, g = n$
   $f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
   Если $k > n$, то$a_k = 0$, $b_k = 0$, то есть $(a_k + b_k) = 0$

   Пусть $deg\, f = n$, $deg\, g = m$, $m < n$
   Если $k > n$, то $a_k + b_k = 0$, так как $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_{n-1} = b_n = 0$
   Тогда $a_n + b_n = a_n \neq 0$

2. $f(x) \cdot g(x) = \underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{a_n b_m} x^{n+m} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{степень}<n}$

■

Определение 5. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot g(x) = f(x)$.

Утверждение 2.2. Свякий многочлен $f(x) \neq 0$ делится на самого себя.

Утверждение 2.3. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $f(x)$, то $f(x) = c \cdot g(x)$, $c \in K$.

Определение 6. Число x_0 является корнем $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

Доказательство.

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$
$$P(a) = 0 \cdot p(x) + r = r$$

■

Следствие 2.4.1. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

3 Множества

Определение 7. Множества равномощны, если между ними существует биекция.

Определение 8. Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Определение 9. Множества, равномощные $\mathbb{N}$, называются счетными.

Определение 10. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{x \mid x = (a, b),\ a \in A,\ b \in B\}$.

Определение 11. Число a называется числом кратности k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.

4 Числовые последовательности

Определение 12. Бесконечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 13. Конечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $a : \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{R}$.

Определение 14. Множество M, $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists\, c : \forall x \in M : x \leqslant c$.

Определение 15. Множество M, $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists\, c : \forall x \in M : x \geqslant c$.

Определение 16. Множество M, $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 17. Последовательность a_n называется ограниченной, если $a(\mathbb{N})$ ограничено.

Определение 18. Последовательность a_n называется называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$.

Теорема 4.1. Пусть все элементы последовательности a_n положительны. Последовательность a_n возстает тогда и только тогда, когда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

4.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 19. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества M называется точной верхней гранью:

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \leqslant a,\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, x \in M : x > a - \varepsilon$$

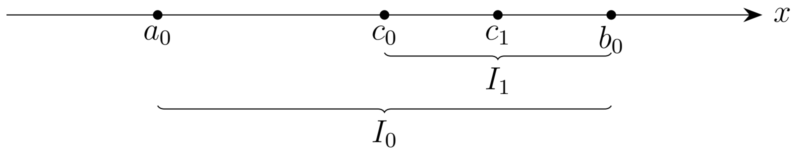
Определение 20. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества M называется точной нижней гранью:

$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \geqslant a,\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, x \in M : x < a + \varepsilon$$

Теорема 4.2. Пусть $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(\mathbb{N})$ ограничена. Тогда:

$$\exists\, x_0 \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(\underset{\substack{\shortparallel \\ U_\varepsilon(x_0)}}{(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)}) \text{ бесконечно}$$

Доказательство. Если $\exists\, x_0 : a^{-1}(x_0)$ бесконечно, то доказано. Если $\exists\, x_0 : a^{-1}(x_0)$ конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$ и $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$, а также середину a_0b_0, то есть $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Разделим один из получившихся отрезков (отметим c_0 и b_0, как a_1 и b_1 соответственно) пополам, получив $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset \ldots \supset [a_n;\, b_n] \supset \ldots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n;\, b_n] \neq \varnothing$$

1. $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$
2. $a(\mathbb{N})$ ограничена сверху b_i элементом
3. $a(\mathbb{N})$ имеет точную верхнюю грань $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$
   и точную нижнюю грань $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4. $M_1 \leqslant M_2$
5. $[M_1;\, M_2] \subset \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} [a_n;\, b_n]$
6. Пусть $M_1 < M_2$, тогда $\exists\, n : b_n - a_n < M_2 - M_1$.
   Получаем противоречие, значит $M_1 = M_2 = M$.
7. Возьмем такое n, что $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $[a_n;\, b_n] \subset U_\varepsilon(M)$.
   То есть $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$ бесконечно.

∎

Определение 21. Число x называется частичным пределом последовательности $a(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(x))$ бесконечно.

4.2 Прогрессии

Определение 22. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Определение 23. Разностью арифметической прогрессии называется разность a_{n+1} и a_n.

Утверждение 4.3. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

Утверждение 4.4. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2 \;\; \forall k \in \mathbb{N},\, k < n : a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

Теорема 4.5. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
S_n = {} & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
= {} & a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1) \cdot d) = \\
= {} & n \cdot a_1 + d \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = \\
= {} & n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) = \\
= {} & n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = \\
= {} & n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}
\end{aligned}$$

■

Определение 24. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n-го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0$$

Утверждение 4.6. Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 :\ b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

Теорема 4.7. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},\ q \neq 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
S_n = {} & b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \\
= {} & b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\
= {} & b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = \\
= {} & b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}
\end{aligned}$$

■

5 Эквивалентность и группы

Определение 25. Пусть M – множество, тогда множество $R \subset \{(a,\, b) \mid a,\, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется бинарным отношением на M.

Определение 26. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность $a \sim a$
2. Симметричность $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$
3. Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Longleftrightarrow a \sim c$

Теорема 5.1 (Малая теорема Ферма)**.** $\forall n \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{P} :\, n^{p-1} \equiv_p 1$

Определение 27. Бинарной операцией $\times$ на множестве M называется отображение из множества упорядоченных пар $M^2 = \{(a,\, b) \,|\, a,\, b \in M\}$ в множество M.

Определение 28. Пара $G(M;\, \times)$, M – множество, $\times$ – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1. $\forall a,\, b \in M :\, (a \times b) \in M$
2. $\exists\, e \in M\;\; \forall a \in M :\, e \times a = a$
3. $\forall a \in M\;\; \exists\, a^{-1} \in M :\, a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4. $\forall a,\, b,\, c \in M :\, (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

6 Пределы

Определение 29. Число A называется пределом (x_n), если:

$$\forall \varepsilon > 0\;\, \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall n > N\;\; |x_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 6.1.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n)$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a;\, y_n \to b$. По определению $N_a(\varepsilon) \,:\, \forall n > N_a(\varepsilon)\;\, |x_n - a| < \varepsilon,\, N_b(\varepsilon) \,:\, \forall n > N_b(\varepsilon)\;\, |y_n - b| < \varepsilon$. Рассмотрим $N_c(\varepsilon) \,:\, \forall n > N_c(\varepsilon)\;\, |x_n + y_n - a - b| < \varepsilon \,:\, |x_n + y_n - a - b| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| \leqslant 2\varepsilon$ при $N_c = \max(N_a(\varepsilon);\, N_b(\varepsilon))$, то есть $2N_c(\varepsilon)$ – это номер, с которого утверждение точно выполняется. ∎

Теорема 6.2 (Теорема Вейерштрасса)**.** Пусть (x_n) монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty;\, +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет вредел в $\mathbb{R}$

Доказательство. По определению монотонно возрастающей последовательности: $\forall n \,:\, x_{n+1} > x_n$, пусть (x_n) не ограничена, то есть $\nexists\, m \,:\, \forall n\;\, x_n < m$, тогда $\sup(x_n) = +\infty$, а значит $(x_n) \to \infty$. Пусть $\exists\, m \,:\, \forall n\;\, x_n \leqslant m$ и $m = \sup(x_n)$. Тогда $m = \lim_{n\to\infty}(x_n)$. Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ∎