

Алгебра

Содержание

1	Решение уравнений и неравенств.	2
1.1	Иррациональные уравнения	2
1.2	Иррациональные неравенства	2
1.3	Неравенства с модулем	2
2	Многочлены	2
3	Множества	4
4	Числовые последовательности	4
4.1	Аксиоматика действительных чисел	4
4.2	Прогрессии	5
5	Эквивалентность и группы	6
6	Пределы	7
7	Тригонометрия	8
8	Комплексные числа	16
8.1	Матрицы поворота	17

1 Решение уравнений и неравенств.

1.1 Иррациональные уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Иррациональные неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Неравенства с модулем

$$|f(x)| < a, \quad a > 0 \iff \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad |f(x)| > a \iff \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq |g(x)| \iff (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0$$

$$|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$|f(x)| + |g(x)| \leq |f(x) + g(x)| \iff f(x) \cdot g(x) \geq 0$$

2 Многочлены

Определение 1. Многочленом от переменной x над K называется выражение вида: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in K$ – коэффициент многочлена, $a_n \neq 0$.

Определение 2. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$, называется степенью многочлена f :

$$k = \deg f$$

a_0 – свободный член

$a_n x^n$ – старший член

a_n – старший коэффициент

Определение 3. Два многочлена называются равными, если их коэффициенты при соответственных степенях x равны.

Определение 4.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется:

$$S(x) = d_{2n}x^{2n} + d_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + d_1x + d_0, \text{ где } d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Утверждение 2.1. Пусть $\deg f(x) \neq 0$, $\deg g(x) \neq 0$, тогда:

1. $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
2. $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
3. $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

Доказательство.

1. Пусть $\deg f = \deg g = n$

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Если $k > n$, то $a_k = 0$, $b_k = 0$, то есть $(a_k + b_k) = 0$

Пусть $\deg f = n$, $\deg g = m$, $m < n$

Если $k > n$, то $a_k + b_k = 0$, так как $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{n-1} = b_n = 0$

Тогда $a_n + b_n = a_n \neq 0$

$$2. f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{степень} < n \\ \text{0}}}$$

■

Определение 5. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot g(x) = f(x)$.

Утверждение 2.2. Всякий многочлен $f(x) \neq 0$ делится на самого себя.

Утверждение 2.3. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $f(x)$, то $f(x) = c \cdot g(x)$, $c \in K$.

Определение 6. Число x_0 является корнем $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

Доказательство.

$$P(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot q(a) + r = r$$

■

Следствие 2.4.1. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

3 Множества

Определение 7. Множества равномоцны, если между ними существует биекция.

Определение 8. Множества A и B называются равными, если $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Определение 9. Множества, равномоцные \mathbb{N} , называются счетными.

Определение 10. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{x \mid x = (a, b), a \in A, b \in B\}$.

Определение 11. Число a называется числом кратности k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - a)^k$, но не делится на $(x - a)^{k+1}$.

4 Числовые последовательности

Определение 12. Бесконечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 13. Конечной числовой последовательностью (a_n) называется отображение $a : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 14. Множество M , $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists c : \forall x \in M : x \leq c$.

Определение 15. Множество M , $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists c : \forall x \in M : x \geq c$.

Определение 16. Множество M , $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 17. Последовательность a_n называется ограниченной, если $a(\mathbb{N})$ ограничено.

Определение 18. Последовательность a_n называется называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$.

Теорема 4.1. Пусть все элементы последовательности a_n положительны. Последовательность a_n возрастает тогда и только тогда, когда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

4.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 19. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наименьшая из верхних граней множества M называется точной верхней гранью:

$$a = \sup M \iff \forall x \in M : x \leq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > a - \varepsilon$$

Определение 20. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, M ограничено. Тогда наибольшая из нижних граней множества M называется точной нижней гранью:

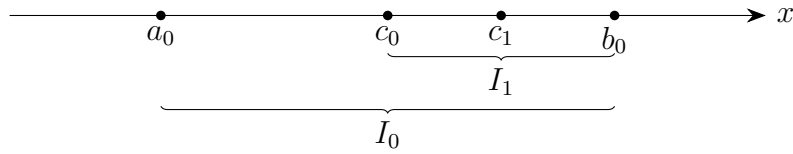
$$a = \inf M \iff \forall x \in M : x \geq a, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < a + \varepsilon$$

Теорема 4.2. Пусть $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(\mathbb{N})$ ограничена. Тогда:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : a^{-1}((x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)) \text{ бесконечно}$$

\parallel
 $U_\varepsilon(x_0)$

Доказательство. Если $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$ бесконечно, то доказано. Если $\exists x_0 : a^{-1}(x_0)$ конечно или пусто, то:



Отметим на числовой прямой $a_0 = \inf a(\mathbb{N})$ и $b_0 = \sup a(\mathbb{N})$, а также середину a_0b_0 , то есть $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Разделим один из получившихся отрезков (отметим c_0 и b_0 , как a_1 и b_1 соответственно) пополам, получив $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Данный процесс можно продолжать, получая следующую конструкцию:

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Теперь необходимо доказать следующее:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$

1. $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
2. $a(\mathbb{N})$ ограничена сверху b_i элементом
3. $a(\mathbb{N})$ имеет точную верхнюю грань $M_1 = \sup a(\mathbb{N})$
и точную нижнюю грань $M_2 = \inf a(\mathbb{N})$
4. $M_1 \leq M_2$
5. $[M_1; M_2] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n]$
6. Пусть $M_1 < M_2$, тогда $\exists n : b_n - a_n < M_2 - M_1$.
Получаем противоречие, значит $M_1 = M_2 = M$.
7. Возьмем такое n , что $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $[a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(M)$.
То есть $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(M))$ бесконечно.

■

Определение 21. Число x называется частичным пределом последовательности $a(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 : a^{-1}(U_\varepsilon(x))$ бесконечно.

4.2 Прогрессии

Определение 22. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Определение 23. Разностью арифметической прогрессии называется разность a_{n+1} и a_n .

Утверждение 4.3. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

Утверждение 4.4. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k < n : a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

Теорема 4.5. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) = \\ &= n \cdot a_1 + d \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) = \\ &= n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right) = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

■

Определение 24. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad b_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

Утверждение 4.6. Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 : \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2$$

■

Теорема 4.7. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \\ &= b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\ &= b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

■

5 Эквивалентность и группы

Определение 25. Пусть M – множество, тогда множество $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется бинарным отношением на M .

Определение 26. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам:

1. Рефлексивность $a \sim a$
2. Симметричность $a \sim b \iff b \sim a$
3. Транзитивность $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$

Теорема 5.1 (Малая теорема Ферма). $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P} : n^{p-1} \equiv_p 1$

Определение 27. Бинарной операцией \times на множестве M называется отображение из множества упорядоченных пар $M^2 = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ в множество M .

Определение 28. Пара $G(M; \times)$, M – множество, \times – бинарная операция, называется группой, если выполняются свойства:

1. $\forall a, b \in M : (a \times b) \in M$
2. $\exists e \in M \forall a \in M : e \times a = a$
3. $\forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
4. $\forall a, b, c \in M : (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

6 Пределы

Определение 29. A называется пределом (x_n) , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon$$

Теорема 6.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$$

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$; $y_n \rightarrow b$. По определению $N_a(\varepsilon) : \forall n > N_a(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon$, $N_b(\varepsilon) : \forall n > N_b(\varepsilon) \quad |y_n - b| < \varepsilon$. Рассмотрим $N_c(\varepsilon) : \forall n > N_c(\varepsilon) \quad |x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$: $|x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq 2\varepsilon$ при $N_c = \max(N_a(\varepsilon); N_b(\varepsilon))$, то есть $2N_c(\varepsilon)$ – это номер, с которого утверждение точно выполняется. ■

Теорема 6.2 (Теорема Вейерштрасса). Пусть (x_n) монотонна, тогда:

1. Она имеет предел в $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
2. Если она ограничена, то она имеет предел в \mathbb{R}

Доказательство. Пусть (x_n) монотонно возрастает. По определению монотонно возрастающей последовательности: $\forall n : x_{n+1} > x_n$, пусть (x_n) не ограничена, то есть $\nexists m : \forall n \quad x_n < m$, тогда $\sup(x_n) = +\infty$, а значит $(x_n) \rightarrow \infty$. Пусть $\exists m : \forall n \quad x_n \leq m$ и $m = \sup(x_n)$. Тогда $m = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$. Доказательство для монотонно убывающей последовательности аналогично. ■

Теорема 6.3. Пусть $(x_n), (y_n), (z_n)$ – последовательности, причем $x_n \leq y_n \leq z_n$, кроме того $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n)$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$.

Лемма 6.4 (Неравенство Бернулли).

$$(1 + x)^n \geq 1 + xn, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0$$

Доказательство. Докажем по индукции: $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ верно, пусть $(1 + x)^n \geq 1 + xn$ верно, тогда:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + xn) = 1 + x + nx + x^2n > 1 + (n + 1)x$$

Определение 30.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство. Рассмотрим $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot e_n$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} > 2 - \text{последовательность ограничена снизу.}$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

Рассмотрим $\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$ и используем неравенство Бернулли:

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+3n+1}{n^2+2n}$$

То есть $\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} < \frac{n^2+2n}{n^3+3n+1}$, а значит E_n монотонно возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists!$ предел E_n , а значит $\exists!$ предел e_n . ■

7 Тригонометрия

Определение 31. Синусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к гипотенузе.

Определение 32. Косинусом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к гипотенузе.

Определение 33. Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его противолежащего катета к прилежащему или синуса этого угла к его косинусу.

Определение 34. Котангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение его прилежащего катета к противолежащему или косинуса этого угла к его синусу.

Утверждение 7.1.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Доказательство. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Утверждение 7.2.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 7.1 разделить на $\cos^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 7.3.

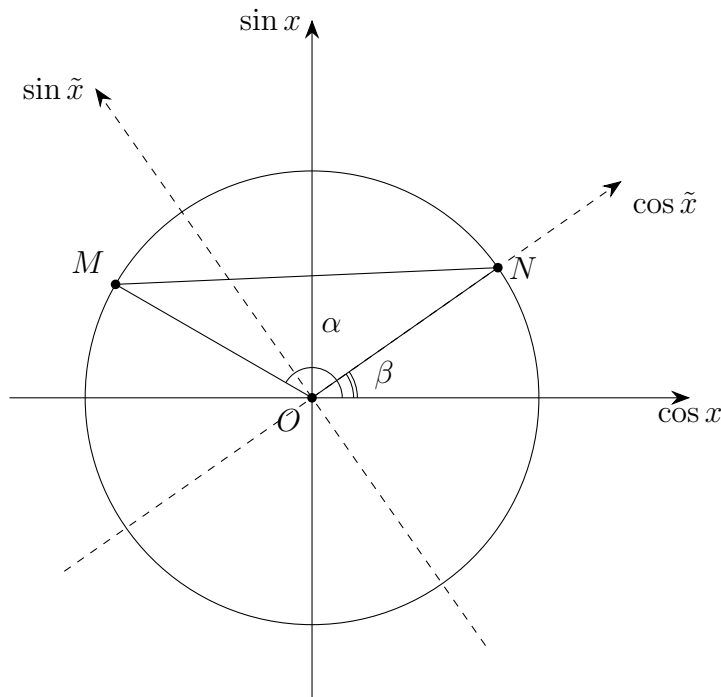
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Доказательство. Если выражение из утверждения 7.1 разделить на $\sin^2 \alpha$, то получим данное выражение. ■

Утверждение 7.4.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.



По теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2}$$

Введем оси координат, повернутые относительно начальной на угол β , тогда:

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

То есть $\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta))}$, а значит $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$. ■

Утверждение 7.5.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Доказательство.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Утверждение 7.6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

Доказательство.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$$

■

Утверждение 7.7.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Утверждение 7.8.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Утверждение 7.9.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 7.10.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Тогда если разделить все на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

■

Утверждение 7.11.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

■

Утверждение 7.12.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Тогда если разделить все на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим:

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

■

Утверждение 7.13.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

■

Утверждение 7.14.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Доказательство.

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

■

Утверждение 7.15.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Утверждение 7.16.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Утверждение 7.17.

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \\ &= \cos(2\alpha + \alpha) = \\ &= \cos(2\alpha) \cdot \cos \alpha - \sin(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (1 + 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot (3 - 2 \cos^2 \alpha) = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Утверждение 7.18.

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \\ &= \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha + 1) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (3 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Утверждение 7.19.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \iff \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Утверждение 7.20.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Доказательство.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

■

Утверждение 7.21.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Утверждение 7.22.

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \\ &- \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Утверждение 7.23.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&+ \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

Утверждение 7.24.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \sin \beta &= \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\&- \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\&= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

■

Утверждение 7.25.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

Утверждение 7.26.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

■

Утверждение 7.27.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

Утверждение 7.28.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

■

Утверждение 7.29.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.21:

$$2 \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \cos \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 7.30.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.22:

$$-2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = -\frac{\cos(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) - \cos(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 7.31.

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tilde{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда из утверждения 7.23:

$$2 \sin \tilde{\alpha} \cdot \sin \tilde{\beta} = \sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \iff \sin \tilde{\alpha} \cdot \cos \tilde{\beta} = \frac{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \sin(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})}{2}$$

■

Утверждение 7.32.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Доказательство.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

■

Утверждение 7.33.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

Утверждение 7.34.

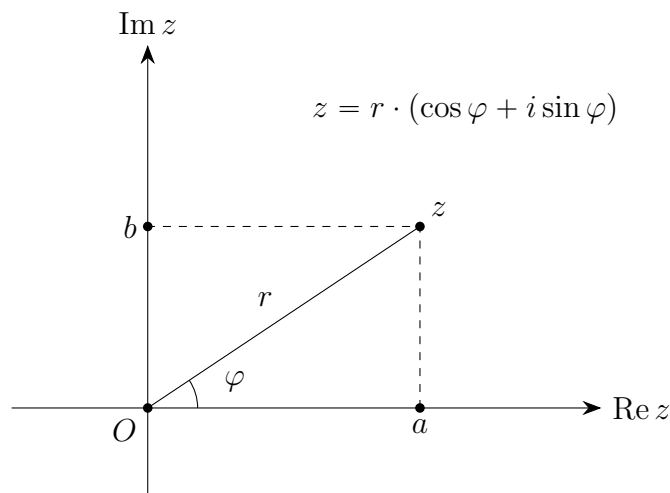
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

■

8 Комплексные числа

Определение 35. Мнимой единицей называется такое число i , что $i^2 = -1$.**Определение 36.** Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$.**Определение 37.** Модулем комплексного числа называется выражение вида $|z| = r = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, $\bar{z} = a - bi$, то есть $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.**Определение 38.** Комплексная плоскость:

Теорема 8.1 (Формула Муавра).

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Доказательство. Докажем по индукции. $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ верно. Пусть $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ верно, докажем, что $z^{n+1} = r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi))$ верно.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \cdot r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^{n+1} \cdot ((\cos(n\varphi) \cdot \cos \varphi - \sin(n\varphi) \cdot \sin \varphi) + i(\cos(n\varphi) \cdot \sin \varphi + \sin(n\varphi) \cdot \cos \varphi)) = \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)) \end{aligned}$$

■

8.1 Матрицы поворота

Определение 39. Матрицей поворота на угол α называется:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha \cdot E + \sin \alpha \cdot I$$

Утверждение 8.2.

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff z = r e^{i\varphi}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \\ \cos x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} \cdot (-1)^i \\ \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot (-1)^i \\ e^{ix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot i^k = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

■