

# ТВиМС

## Содержание

<b>1</b>	<b>Случайная величина</b>	<b>2</b>
1.1	Числовые характеристики случайных величин . . . . .	2
1.1.1	Распределение Бернулли . . . . .	3
1.1.2	Биномиальное распределение . . . . .	3
1.1.3	Геометрическое распределение . . . . .	3
1.1.4	Гипергеометрическое распределение . . . . .	4
1.1.5	Распределение Паскаля . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Ковариация</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Корреляция</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Мера Жордана</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Распределение Пуассона</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Ветвящиеся процессы</b>	<b>7</b>
6.1	Цепи Маркова . . . . .	7
6.1.1	Классификация состояний Марковских цепей . . . . .	8
6.1.2	Эргодичность . . . . .	8
6.2	Процесс Гальтона-Ватсона . . . . .	9
6.3	Тождество Вальда . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Производящие функции</b>	<b>10</b>
7.1	Операции с производящими функциями . . . . .	10
7.2	Производящие функции вероятности . . . . .	10
7.3	Классификация процессов Гальтона-Ватсона . . . . .	11
<b>8</b>	<b>Основы математической статистики</b>	<b>12</b>
8.1	Нормальное распределение . . . . .	13
<b>9</b>	<b>Оценка выборки</b>	<b>14</b>

# 1 Случайная величина

**Определение 1.** Случайной величиной  $\xi$  называется функция, заданная на множестве  $\Omega$ , принимающая значения в  $\mathbb{R}$ .

Задать случайную величину, значит указать все ее реализации и соответственные вероятности.

**Определение 2.** Индикатором события  $A$  называется случайная величина:

$$\mathbb{I}(A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mathbb{P}(A) & \mathbb{P}(A) \end{pmatrix}$$

**Определение 3.** Законом распределения случайной величины называется некоторое правило, позволяющее однозначно определить значение вероятности по значению случайной величины.

## 1.1 Числовые характеристики случайных величин

**Определение 4.** Математическим ожиданием дискретной случайной величины, если оно существует, называется число:

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mathbb{P}(\xi = \omega_i)$$

**Определение 5.** Дисперсией случайной величины называется  $\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$ .

**Теорема 1.1.**  $\mathbb{E}(a\xi + b\eta + c) = a\mathbb{E}(\xi) + b\mathbb{E}(\eta) + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a\xi + b\eta + c) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \cdot \mathbb{P}(a\xi + b\eta + c = \hat{\omega}_i) = \\ &= c + \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i^c \cdot \mathbb{P}(a\xi + b\eta = \hat{\omega}_i^c) = \\ &= c + \sum_{i=1}^n \omega_i^\xi \cdot \mathbb{P}(a\xi = \omega_i^\xi) + \sum_{i=1}^n \omega_i^\eta \cdot \mathbb{P}(b\eta = \omega_i^\eta) = \\ &= c + a\mathbb{E}(\xi) + b\mathbb{E}(\eta) \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.2.** Дисперсия случайной величины  $\xi$  может быть вычислена, как  $\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 = \\ &= \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2) = \\ &= \mathbb{E}(\xi^2) - 2(\mathbb{E}(\xi))^2 + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \\ &= \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 \end{aligned}$$

■

**Определение 6.** Стандартным отклонением случайной величины  $\xi$  называется  $\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}(\xi)}$ .

### 1.1.1 Распределение Бернулли

**Определение 7.** Случайная величина  $\xi$  распределена по Бернулли, если ее распределение суть индикатор.

$$Ber(p) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

### 1.1.2 Биномиальное распределение

**Определение 8.** Случайная величина  $\xi$  распределена биномиально, если она моделирует схему испытаний Бернулли или является суммой бернуллиевых случайных величин.

$$B(p, n) \sim \begin{pmatrix} 0 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & \dots & C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.3.** Математическое ожидание биномиально распределенной случайной величины  $\xi$  может быть вычислено, как  $\mathbb{E}(\xi) = np$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= C_n^1 p q^{n-1} + 2C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + kC_n^k p^k q^{n-k} + \dots + nC_n^n p^n = \\ &= np \cdot (C_{n-1}^0 q^{n-1} + C_{n-1}^1 p q^{n-2} + \dots + C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} + \dots + C_{n-1}^{n-1} p^{n-1}) = \\ &= np \cdot (q + p)^{n-1} = \\ &= np \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.4.** Дисперсия независимых случайных величин линейна:  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}(\xi) + \mathbb{D}(\eta)$

**Лемма 1.5.** Дисперсия биномиально распределенной случайной величины  $\xi$  может быть вычислена, как  $\mathbb{D}(\xi) = npq$ .

*Доказательство.* Пусть  $\eta$  – число успехов в одном испытании Бернулли. Тогда:

$$\eta \sim B(p, 1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

В таком случае  $\mathbb{D}(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = p - p^2 = pq$ . Тогда по теореме 1.4:

$$\mathbb{D}(\xi) = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}(\xi_i) = pq \cdot n = npq$$

■

### 1.1.3 Геометрическое распределение

**Определение 9.** Случайная величина  $\xi$  распределена геометрически, если она моделирует схему испытаний до первого успеха с вероятностью  $p$ .

$$Geom(p) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & qp & \dots & q^{n-1}p & \dots \end{pmatrix}$$

**Лемма 1.6.** Математическое ожидание геометрически распределенной случайной величины  $\xi$  может быть вычислено, как  $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= p + 2qp + 2q^2p + \dots + kq^{k-1}p + \dots = \\ &= (p + qp + q^2p + \dots + q^{k-1}p + \dots) + (qp + 2q^2p + \dots + (k-1)q^{k-1}p + \dots) = \\ &= \frac{p}{1-q} + q(p + 2pq + \dots + (k-1)q^{k-2}p + \dots)\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 + q\mathbb{E}(\xi)$$

$$\mathbb{E}(\xi)(1-q) = 1$$

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}$$

■

**Лемма 1.7.** Дисперсия геометрически распределенной случайной величины  $\xi$  может быть вычислена, как  $\mathbb{D}(\xi) = \frac{q}{p^2}$ .

*Доказательство.*

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= p + 2qp + 9q^2p + \dots + k^2q^{k-1}p + \dots = \\ &= p + qp + 3qp + 4q^2p + 5q^2p + \dots = \\ &= (qp + 4q^2p + \dots) + (p + 3qp + 5q^2p + \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= q\mathbb{E}(\xi^2) + \mathbb{E}(2\xi - 1) = \\ &= (1-p)\mathbb{E}(\xi^2) + \frac{2}{p} - 1 = \frac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}(\xi) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

■

#### 1.1.4 Гипергеометрическое распределение

**Определение 10.** Случайная величина  $\xi$  распределена гипергеометрически, если она моделирует выбор  $n$  элементов из множества мощности  $N$  с  $K$  помеченными и является числом помеченных в выборке.

$$\xi \sim HG(N, K, n)$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

**Утверждение 1.8.** Математическое ожидание гипергеометрически распределенной случайной величины  $\xi$  может быть вычислено, как  $\mathbb{E}(\xi) = \frac{n \cdot K}{N}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\xi &= \mathbb{I}(A_1) + \mathbb{I}(A_2) + \dots + \mathbb{I}(A_n), \text{ где } A_i = \{i\text{-ый элемент выборки помечен}\} \\ \mathbb{I}(A_i) &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{K}{N} & \frac{K}{N} \end{pmatrix} \\ \mathbb{E}(\xi) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{I}(A_i)) = n \cdot \frac{K}{N}\end{aligned}$$

■

### 1.1.5 Распределение Паскаля

**Определение 11.** Случайная величина  $\xi$  распределена по Паскалю, если она моделирует испытания до первых  $k$  успехов.

**Определение 12.**

$$\xi \sim NB(p, k), \text{ если } \xi = \sum_{i=1}^k \eta_i : \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : \eta_i \sim Geom(p)$$

$$\mathbb{P}(\xi = n) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}$$

**Утверждение 1.9.** Математическое ожидание случайной величины  $\xi$ , распределенной по Паскалю, может быть вычислено, как  $\mathbb{E}(\xi) = \frac{k}{p}$ .

*Доказательство.* Поскольку математическое ожидание линейно:

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{p} \cdot k = \frac{k}{p}$$

■

## 2 Ковариация

**Определение 13.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины, тогда ковариацией называется:

$$cov(\xi; \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\eta - \mathbb{E}(\eta)))$$

**Теорема 2.1.** Для  $cov(\xi; \eta)$  выполняются свойства:

1.  $cov(\xi; \xi) \geq 0$
2.  $cov(\xi; \eta) = cov(\eta; \xi)$
3.  $cov(\lambda\xi; \eta) = \lambda \cdot cov(\xi; \eta)$
4.  $cov(\xi_1 + \xi_2; \eta) = cov(\xi_1; \eta) + cov(\xi_2; \eta)$
5.  $cov(\xi; \eta) \leq \mathbb{D}(\xi) \cdot \mathbb{D}(\eta)$

**Теорема 2.2.**

$$cov(\xi; \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\eta - \mathbb{E}(\eta))) = \\
& = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta - \xi \mathbb{E}(\eta) - \eta \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta)) = \\
& = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi \mathbb{E}(\eta)) - \mathbb{E}(\eta \mathbb{E}(\xi)) + \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta) = \\
& = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta)
\end{aligned}$$

■

**Теорема 2.3.**

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}(\xi) + \mathbb{D}(\eta) + 2 \cdot \text{cov}(\xi; \eta)$$

### 3 Корреляция

**Определение 14.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины:  $\mathbb{D}(\xi) \neq 0$ ,  $\mathbb{D}(\eta) \neq 0$ ,  $\text{cov}(\xi; \eta)$  определена корректно. Тогда коэффициентом корреляции  $\xi$  и  $\eta$  называется:

$$\text{corr}(\xi; \eta) = r_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi; \eta)}{\sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta)}$$

Свойства:

1.  $|r_{\xi\eta}| \leq 1$
2.  $|r_{\xi\eta}| = 1 \iff \exists k \neq 0, b : \eta = k\xi + b$  (почти наверное).

### 4 Мера Жордана

**Определение 15.**  $A$  измеримо по Жордану, если  $\mu^j(A) = \mu_j(A)$ , где  $\mu^j(A) = \inf\{\mu(\delta) : A \subset \delta\}$ ,  $\mu_j(A) = \sup\{\mu(\delta) : \delta \subset A\}$ .

**Определение 16.** Пусть  $A \subset \Omega$ , тогда  $\mathbb{P}(x \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ .

### 5 Распределение Пуассона

**Теорема 5.1** (Теорема Пуассона). Пусть  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $np \rightarrow \lambda$ ,  $\lambda = \text{const}$ , тогда если  $\xi$  – количество успехов в серии испытаний Бернулли, то она распределена по Пуассону:

$$\xi \sim P(\lambda) : \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
P(\xi = k) &= C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k q^{n-k} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{p^k}{k! \cdot q^k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot q^n \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{p^k q^n}{k! \cdot q^k} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{p^k q^n n^k}{k! \cdot q^k} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{\lambda^k \cdot q^n}{k! \cdot q^k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} q^n \end{aligned}$$

$$\ln q^n = n \cdot \ln(1-p) \rightarrow -np \rightarrow -\lambda \implies \frac{\lambda^k}{k!} q^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

■

**Теорема 5.2.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Теорема 5.3.** Пусть  $\xi \sim P(\lambda)$ . Тогда  $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}(\xi) = \lambda$ .

*Доказательство.*

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

■

**Лемма 5.4.** Пусть  $\xi \sim P(\lambda_\xi)$ ,  $\eta \sim P(\lambda_\eta)$ ,  $\xi$  и  $\eta$  независимы. Тогда  $(\xi + \eta) \sim P(\lambda_\xi + \lambda_\eta)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi + \eta = n) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(\xi = i) \cdot \mathbb{P}(\eta = n-i) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_\xi^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_\xi} \cdot \frac{\lambda_\eta^{n-i}}{(n-i)!} \cdot e^{-\lambda_\eta} = \\ &= e^{-(\lambda_\xi + \lambda_\eta)} \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_\xi^i \cdot \lambda_\eta^{n-i}}{i! \cdot (n-i)!} \cdot \frac{n!}{n!} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda_\xi + \lambda_\eta)}}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^i \lambda_\xi^i \lambda_\eta^{n-i} = \\ &= e^{-(\lambda_\xi + \lambda_\eta)} \cdot \frac{(\lambda_\xi + \lambda_\eta)^n}{n!} \end{aligned}$$

■

## 6 Ветвящиеся процессы

### 6.1 Цепи Маркова

**Определение 17.** Последовательность случайных величин  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  называется Цепью Маркова, если

$$\forall n, i_0, i_1, \dots, i_n : \mathbb{P}(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \dots, \xi_0 = x_{i_0})$$

верно, что:

$$\mathbb{P}(\xi_n = x_{i_n} \mid \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \dots, \xi_0 = x_{i_0}) = \mathbb{P}(\xi_n = x_{i_n} \mid \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})$$

**Определение 18.** Цепь Маркова называется однородной, если:

$$\forall i, j : \mathbb{P}(\xi_n = x_j \mid \xi_{n-1} = x_i) = p_{i,j} \text{ не зависит от } n.$$

**Определение 19.** Матрица  $A = (a_{i,j})$  называется стохастической, если:

$$\forall i, j : a_{i,j} \in [0; 1], \sum_i (a_{i,j}) = 1$$

**Определение 20.** Матрица  $\pi = (p_{i,j})$  называется матрицей переходных вероятностей.

**Теорема 6.1.** Пусть  $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$  и  $p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$  – начальное распределение и распределение на  $k$ -ом шаге соответственно вероятностей Марковской цепи, где  $p_i^{(k)} = \mathbb{P}(\xi_k = x_i)$ . Тогда:

$$p^{(k)} = p^{(0)} \cdot \pi^k$$

### 6.1.1 Классификация состояний Марковских цепей

**Определение 21.** Состояние  $x_j$  достижимо из  $x_i$ , если:

$$\exists k : P_{ij}^k = \mathbb{P}(\xi_{m+k} = x_j \mid \xi_m = x_i) > 0$$

**Определение 22.** Состояния называются сообщающимися, если они достижимы друг для друга.

**Определение 23.** Состояние  $x_i$  называется несущественным, если существует такое состояние  $x_j$ , что  $x_j$  достижимо из  $x_i$ , но  $x_i$  недостижимо из  $x_j$ .

**Определение 24.** Состояние  $x_i$  называется существенным, если существует такое состояние  $x_j$ , что  $x_j$  достижимо из  $x_i$  и  $x_i$  достижимо из  $x_j$ .

**Определение 25.** Марковская цепь, все состояния которой составляют один класс сообщающихся состояний, называется неразложимой.

**Определение 26.** Состояние  $x_i$  называется возвратным, если вероятность возвращения в это состояние равна 1.

**Определение 27.** Состояние  $x_i$  называется невозвратным, если вероятность возвращения в это состояние не равна 1.

**Определение 28.** Возвратное состояние  $x_i$  называется возвратным положительным, если среднее время возвращения в него конечно.

**Определение 29.** Возвратное состояние  $x_i$  называется возвратным нулевым, если среднее время возвращения в него бесконечно.

**Определение 30.** Состояние  $x_i$  называется периодическим, если  $\text{НОД}\{k : P_{ii}^{(k)} > 0\} = d > 1$ , где  $d$  – период состояния.

### 6.1.2 Эргодичность

**Определение 31.** Марковская цепь называется эргодической, если:

$$\forall i, j : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} P_{ij}^{(k)} = p_{ij} > 0, \sum_j p_j = 1$$

**Теорема 6.2** (Критерий эргодичности). Марковская цепь эргодична, если:

$$\exists k : \forall i, j : P_{ij}^{(k)} > 0$$



## 6.2 Процесс Гальтона-Ватсона

**Определение 32.** Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_m : p_m \geq 0; p_0 + p_1 + \dots + p_m = 1$  – начальное распределение. Пусть для  $i \geq 2$  определено:

$$p_i^{*k} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=i} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k}$$

Процесс Гальтона-Ватсона есть марковская цепь  $Z(n), n \in \mathbb{N}_0$  с начальным распределением  $P_0(k) = \mathbb{P}(Z(0) = k)$  и переходными вероятностями:

$$P_{ij} = \mathbb{P}(Z(n+1) = j \mid Z(n) = i) = \begin{cases} p_j^{*i}, & \text{если } i \geq 1, j \geq 0 \\ \delta_{0j}, & \text{если } i \geq 0, j \geq 0 \end{cases}$$

Если не оговорено иного,  $P_0(1) = \mathbb{P}(Z(0) = 1) = 1; P_0(k) = 0, k \neq 1$ .

**Пример** (Деление клетки 1). Рассмотрим популяцию частиц. Пусть после каждой единицы времени частица либо умирает, либо делится на двое. При этом пусть в начале мы имели только одну частицу, то есть  $Z(0) = 1$ . Рассмотрим случайную величину  $\xi_i^{(n)}$  – число потомков  $i$ -й частицы  $n$ -го поколения:

$$Z(n+1) = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)}, \quad n \geq 0$$

Заметим, что можно также фиксировать не число частиц в момент времени  $n$ , а число частиц первого поколения:

$$Z(n+1) = Z_1(n) + Z_2(n) + \dots + Z_{Z(1)}(n)$$

Таким образом для независимых  $\xi_i^{(n)}$  верно:

$$\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} Z(n+1) = Z_1(n) + Z_2(n) + \dots + Z_{Z(1)}(n)$$

Далее смотреть в примере 7.2.

## 6.3 Тождество Вальда

**Теорема 6.3.** Пусть  $\xi_0, \xi_1, \dots$  – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть  $\tau$  – случайный момент времени, не зависящий от  $(\xi_i)$ . Пусть  $S_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда:

$$\mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\tau)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{E}(\tau) \\ \mathbb{E}(S_\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(S_\tau; \tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n; \tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k; \tau = n) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_k; \tau = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_k; \tau \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_k) \cdot \mathbb{P}(\tau \geq k) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\tau) \end{aligned}$$

■

## 7 Производящие функции

**Определение 33.** Производящей функцией произвольной последовательности  $(a_n)$  называется выражение вида:

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

### 7.1 Операции с производящими функциями

**Определение 34.** Суммой производящих функций  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  и  $B(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$  называется производящая функция:

$$A(z) + B(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \dots$$

**Определение 35.** Произведением производящих функций  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  и  $B(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$  называется производящая функция:

$$A(z) \cdot B(z) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \dots$$

**Определение 36.** Пусть  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ ;  $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$ ;  $b_0 = 0$  – производящие функции. Подстановкой производящей функции  $B$  в производящую функцию  $A$  будет называться производящая функция:

$$A(B(t)) = a_0 + a_1b_1t + (a_1b_2 + a_2b_1^2)t^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)t^3 + \dots$$

**Теорема 7.1.** Пусть  $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$ ;  $b_0 = 0$ ;  $b_1 \neq 0$  – производящая функция. Тогда существуют единственные такие функции  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ ;  $a_0 = 0$  и  $C(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots$ ;  $c_0 = 0$ , что  $A(B(t)) = t$  и  $B(C(u)) = u$ . Функция  $A$  называется левой обратной, а функция  $C$  – правой обратной к функции  $B$ .

*Доказательство.* Рассмотрим левую обратную функцию:

$$A(B(t)) = a_1b_1t + (a_1b_2 + a_2b_1^2)t^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)t^3 + \dots = t$$

Чтобы равенство выполнялось, коэффициент при  $t$  должен равняться 1, а коэффициенты при  $t^n$ ,  $n \geq 2$  должны равняться 0. Отсюда  $a_1b_1 = 1 \implies a_1 = \frac{1}{b_1}$ . Пусть аналогично определены коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Тогда коэффициент  $a_{n+1}$  будет определяться из условия, что многочлен  $a_{n+1}b_1^{n+1} + \dots$  от  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ , являющийся коэффициентом при  $t^{n+1}$ , будет равен нулю. Поскольку  $b_1 \neq 0$  по условию, получаем уравнение от  $a_{n+1}$  с единственным корнем. То есть мы однозначно можем задать такие коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$ , чтобы  $A(B(t)) = t$ .

Доказательство для правой обратной функции аналогично. ■

**Определение 37.** Производящая функция называется рациональной, если ее можно представить в виде  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – многочлены.

### 7.2 Производящие функции вероятности

**Определение 38.** Производящей функцией  $\varphi_\xi$  случайной величины  $\xi$  называется производящая функция последовательности  $(\mathbb{P}(\xi = n))_{n=0}^\infty$ :

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{E}(z^\xi)$$

Причем  $\varphi_\xi(1) = 1$  как сумма вероятностей. Рассмотрим производную данной функции:

$$\varphi'_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} \mathbb{P}(\xi = n) \qquad \varphi'_\xi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{E}(\xi)$$

**Определение 39.** Итерацией производящей функции случайной величины порядка  $n$  называется композиция, строящаяся рекуррентно:

$$\varphi_0(z) = z \qquad \varphi_1(z) = \varphi(z) \qquad \varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(\varphi(z))$$

**Определение 40.** Пусть  $\xi_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  – независимые случайные величины, тогда:

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1} \cdot \varphi_{\xi_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n} = \varphi_n(\varphi_{\xi_1}(z))$$

При этом  $\xi_1$  может быть заменена на любую из  $\xi_i$ , так как они одинаково распределены.

**Пример** (Деление клетки 2). Продолжим рассмотрение примера 6.2.

$$F(n; z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(z^{Z(n)}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(Z(n) = k)$$

Рассмотрим  $F(n+1; z)$  при учёте, что  $Z(0) = 1$  и используя свойства итераций:

$$\begin{aligned} F(n+1; z) &= \mathbb{E}(z^{Z(n+1)}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^{Z(n+1)} | Z(n))) = \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(z^{\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)}} | Z(n)\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{Z(n)} \mathbb{E}\left(z^{\xi_k^{(n)}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(z^\xi)^{Z(n)}\right) = \\ &= F(n; \varphi(z)) = F(n-1; \varphi_2(z)) = F(0; \varphi_{n+1}(z)) = \varphi_{n+1}(z) \end{aligned}$$

Тогда вероятность вырождения к моменту  $n$  может быть вычислена как итерация:

$$\varphi_n(0) = F(n; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k \mathbb{P}(Z(n) = k) = \mathbb{P}(Z(n) = 0)$$

### 7.3 Классификация процессов Гальтона-Ватсона

**Определение 41.** Пусть  $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(Z(1) | Z(0) = 1) < \infty$ . Тогда процесс Гальтона-Ватсона называется:

Докритическим, если  $A < 1$       Критическим, если  $A = 1$       Надкритическим, если  $A > 1$

**Лемма 7.2.**  $\mathbb{E}(Z(n)) = A^n$ . При этом если  $\mathbb{D}(\xi) < \infty$ , то:

$$\mathbb{D}(Z(n)) = \begin{cases} \mathbb{D}\left(\frac{A^{n-1}(A^n - 1)}{A - 1}\right), & \text{если } A \neq 1 \\ \sigma(n^2), & \text{если } A = 1 \end{cases}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(n)) &= \mathbb{E}\left(\xi_1^{(n-1)} + \xi_2^{(n-1)} + \dots + \xi_{Z(n-1)}^{(n-1)}\right) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(Z(n-1)) = \\ &= A \cdot \mathbb{E}(Z(n-1)) = A^2 \cdot \mathbb{E}(Z(n-2)) = \dots = A^n \cdot \mathbb{E}(Z(0)) = A^n \end{aligned}$$

■

**Теорема 7.3.** Вероятность вырождения ветвящегося процесса равна наименьшему неотрицательному корню  $p$  уравнения  $z = \varphi(z)$ .

*Доказательство.*

$$\varphi_n(z) = \mathbb{P}(Z(n) = 0) \leq \mathbb{P}(Z(n+1) = 0) = \varphi_{n+1}(z)$$

В силу монотонности и возрастания последовательности

$$P(n) = \mathbb{P}(Z(n) = 0) = \varphi_n(0)$$

выполняется теорема Вейерштрасса, по которой она имеет предел  $r$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что

$$P(1) = \varphi_1(0) = \varphi_1(\varphi_0(0)) \leq p = \varphi(p)$$

Пусть  $\varphi_{n-1}(0) = P(n-1) < p$ , тогда по индукции получаем:

$$P(n) = \varphi_n(0) = \varphi(\varphi_{n-1}(0)) = \varphi(P(n-1)) \leq \varphi(p) = p$$

Отсюда в силу непрерывности  $\varphi$  имеем:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(P(n-1)) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P(n-1)\right) = \varphi(r)$$

Таким образом, мы также получаем, что докритические процессы вырождаются с вероятностью  $p = 1$ , а надкритические процессы вырождаются с вероятностью  $p < 1$ , которая является минимальным неотрицательным корнем уравнения  $z = \varphi(z)$ . ■

**Пример.** Рассмотрим бинарное деление клетки с производящей функцией  $\varphi(z) = 1 - p + pz^2$ . Решим уравнение  $z = 1 - p + pz^2$ , получив корни  $z = 1$  и  $z = \frac{1-p}{p}$ . То есть при  $p > 0,5$  вероятность вырождения равна  $\mathbb{P} = \frac{1-p}{p}$ , а при  $p \leq 0,5$  имеем  $\mathbb{P} = 1$ .

## 8 Основы математической статистики

**Определение 42.** Функция распределения случайной величины  $\xi$  суть  $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$ .

**Определение 43.** Квантилем уровня  $\alpha$  называется такой  $x_\alpha$ , что он является решением уравнения  $F_\xi(x) = \alpha$ .

**Определение 44.** Выборкой объема  $n$ ;  $n > 1$  называется случайный вектор  $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , где  $\xi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  называются элементами выборки и являются независимыми случайными величинами с одной функцией распределения  $F_\xi(x)$ . Тогда выборка  $Z_n$  соответствует функции распределения  $F_\xi(x)$ .

**Определение 45.** Реализацией выборки называется неслучайный вектор  $z_n = (x_1, \dots, x_n)$ , компонентами которого являются реализации соответствующих элементов выборки  $\xi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Следствие 8.0.1.** Из определений 44 и 45 следует, что реализацию выборки  $z_n$  можно также рассматривать как последовательность  $x_1, \dots, x_n$  из  $n$  реализаций одной и той же случайной величины  $\xi$ , полученных в серии из  $n$  независимых одинаковых опытов, проводимых в одинаковых условиях. Поэтому можно говорить, что выборка  $Z_n$  порождена наблюдаемой случайной величиной  $\xi$ , имеющей распределение  $F_\xi(x) = F(x)$ .

**Определение 46.** Параметром распределения  $\theta$  случайной величины  $\xi$  называется любая числовая характеристика этой случайной величины или любая константа, явно входящая в выражение для функции распределения.

**Определение 47.** Случайная величина  $T = \varphi(Z_n)$ , где  $\varphi(z_n)$  – произвольная функция определенная на выборочном пространстве, называется статистикой.

**Определение 48.** Статистической гипотезой  $H$  называется любое предположение относительно вида распределения, параметров распределения или свойств закона распределения наблюдаемой в эксперименте случайной величины  $X$ .

**Определение 49.** Любое предположение относительно параметров распределения случайной величины  $X$  называют параметрической гипотезой.

**Определение 50.** Проверяемая гипотеза называется основной (или нулевой) и обозначается  $H_0$ . Гипотеза, конкурирующая с  $H_0$ , называется альтернативной и обозначается  $H_1$ .

**Определение 51.** Статистическим критерием проверки гипотезы  $H_0$  называется правило, в соответствии с которым по реализации  $t = \varphi(z_n)$  статистики  $T$  гипотеза  $H_0$  принимается или отвергается.

**Определение 52.** Критической областью  $\bar{G}$  статистического критерия называется область реализаций  $t$  статистики  $T$ , при которых гипотеза  $H_0$  отвергается.

**Определение 53.** Доверительной областью  $\bar{G}$  статистического критерия называется область реализаций  $t$  статистики  $T$ , при которых гипотеза  $H_0$  принимается.

**Определение 54.** Ошибкой 1-го рода называется событие, состоящее в том, что гипотеза  $H_0$  отвергается, когда она верна.

**Определение 55.** Ошибкой 2-го рода называется событие, состоящее в том, что принимается гипотеза  $H_0$ , когда верна гипотеза  $H_1$ .

**Определение 56.** Уровнем значимости статистического критерия называется вероятность ошибки 1-го рода:

$$\alpha = \mathbb{P}(T \in G | H_0 - \text{верна})$$

## 8.1 Нормальное распределение

**Определение 57.** Случайная величина  $\xi$  распределена нормально с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ , если её функция плотности вероятности имеет вид:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

**Теорема 8.1.** Пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ . Тогда  $\mathbb{E}(\xi) = \mu$  и  $\mathbb{D}(\xi) = \sigma^2$ .

**Определение 58.** Случайная величина  $\xi$  распределена стандартно нормально, если  $\xi \sim \mathcal{N}(0; 1)$ .

**Определение 59.** Функция плотности стандартно нормально распределенной случайной величины  $\xi$  обозначается:

$$\varphi_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**Теорема 8.2.** Функцией распределения стандартно нормально распределенной случайной величины  $\xi$  является функция Лапласа:

$$\Phi_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\xi}(y) dy$$

**Теорема 8.3** (Правило трёх сигм). Для случайной величины  $\xi$ , имеющей стандартное нормальное распределение:

$$\mathbb{P}(|\xi - \mu| < 3\sigma) \approx 0,9973$$

**Теорема 8.4** (Центральная предельная теорема). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – последовательность независимых случайных величин, а  $S_n$  – их сумма, тогда:

$$\frac{S_n - n \cdot \mathbb{E}(\xi)}{\sigma(\xi) \cdot \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0; 1)$$

Пусть  $\hat{\xi}$  – центрированная и нормированная случайная величина, тогда:

$$\mathbb{P}(a < \hat{\xi} < b) = \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n \cdot \mathbb{E}(\xi)}{\sigma(\xi) \cdot \sqrt{n}} < b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

**Теорема 8.5** (Муавр-Лаплас). Пусть  $\xi \sim B(p; n)$ ,  $n \geq 30$ , тогда можно сказать, что  $\xi \sim \mathcal{N}(np; npq)$ , а значит:

$$\mathbb{P}(a < \xi < b) = \mathbb{P}\left(\frac{a - np}{npq} < \frac{\xi - np}{npq} < \frac{b - np}{npq}\right) = \Phi\left(\frac{b - np}{npq}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{npq}\right)$$

## 9 Оценка выборки

**Определение 60.** Точечной (выборочной) оценкой неизвестного параметра распределения  $\theta$  называется произвольная статистика  $\hat{\theta}(Z_n)$ , построенная по выборке  $Z_n$ .

**Определение 61.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется несмещённой оценкой параметра  $\theta$ , если математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру, то есть  $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ .

**Определение 62.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной оценкой параметра  $\theta$ , если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть:

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$$

**Теорема 9.1.** Размер выборки, необходимой для оценки, с точностью  $\delta$  и уровнем доверия  $1 - \alpha$  можно выразить как:

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\delta}\right)^2 pq$$

*Доказательство.* Пусть  $\hat{p}$  – вероятность наличия у объекта выборки какого-то признака, тогда должно выполняться условие:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - p| < \delta) = 1 - \alpha$$

Поскольку частота является несмещённой и состоятельной оценкой вероятности, при проведении  $n$  опытов, в  $X$  из которых произойдёт нужное нам событие, вероятность можно будет представить, как  $\hat{p} = \frac{X}{n}$ . При этом в случае выбора с возвращением,  $X$  будет иметь биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$ , где  $n$  – количество проведенных экспериментов, а  $p$  – вероятность появления признака. Тогда по центральной предельной теореме:

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0; 1)$$

В таком случае можно считать, что  $\hat{p} \sim \mathcal{N}(0; 1)$ , а значит:

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{np}{n} = p$$

$$\mathbb{D}(\hat{p}) = \mathbb{D}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

Зная распределение  $\hat{p}$ , мы можем установить, когда выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\hat{p} - p| < \delta) &= \mathbb{P}(p - \delta < \hat{p} < p + \delta) = \Phi\left(\frac{p + \delta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{p - \delta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) - 1 = 1 - \alpha \implies \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Получили, что аргумент функции Лапласа является квантилем уровня  $1 - \frac{\alpha}{2}$  стандартного нормального распределения, тогда остается выразить  $n$ :

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\delta}\right)^2 pq$$

Здесь  $p$  определяется либо из предварительного опроса, либо подбирается такое её значение, при котором  $\mathbb{D}(\hat{p})$  максимальное, то есть  $p = 0,5$ . ■