Геометрия

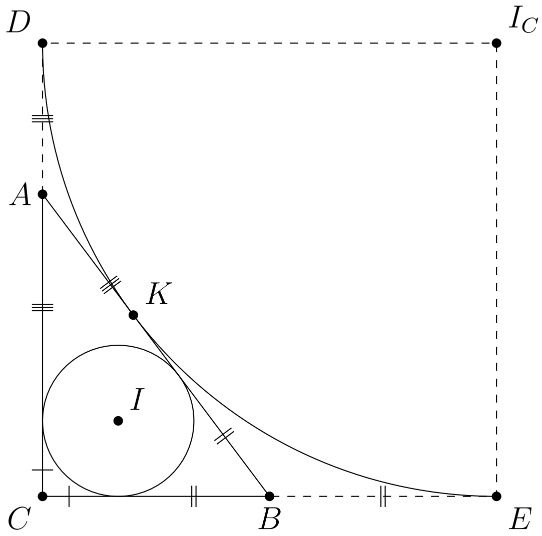
Содержание

1 Планиметрия

1.1 Введение

Утверждение 1.1. В прямоугольном $\triangle ABC$ с прямым углом C и сторонами a, b и c радиус вписанной окружности равен $p-c$, радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы, равен p.

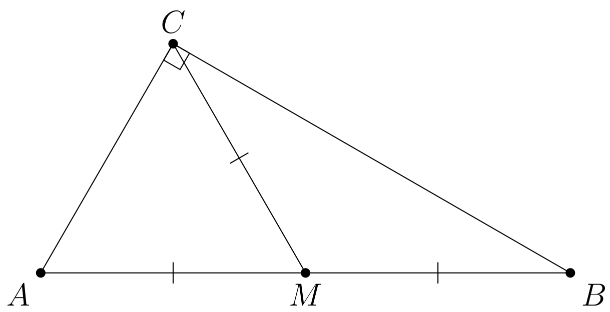
Доказательство.



Пусть отрезки касательных из вершин A, B и C равны x, y и z соответственно. Тогда радиус вневписанной окружности равен $CE = x + y + c = p$. Радиус вписанной окружности равен $z = CE - x - y = CE - AB = p - c$. ∎

Утверждение 1.2. Если медиана в треугольнике равна половине стороны, к которой она проведена, треугольник прямоугольный.

Доказательство.



$\triangle ACM$ – равнобедренный, так как $AM = CM$. Значит, $\angle CAM = \angle ACM = \alpha$. Аналогично $\angle MBC = \angle BCM = \beta$ в равнобедренном $\triangle CMB$. Тогда по сумме углов треугольника $2\alpha+2\beta = 180° \implies \alpha + \beta = 90° \implies \angle ACB = 90°$. ∎

Утверждение 1.3. Биссектрисы треугольника конкурентны.

Доказательство. Пусть две биссектрисы пересеклись в точке I. Опустим из неё перпендикуляры на стороны треугольника, тогда в силу равноудалённости I от сторон двух углов, все три перпендикуляра равны, а значит I равноудалена от сторон третьего угла, то есть лежит на его биссектрисе. ∎

Утверждение 1.4. Серединные перпендикуляры треугольника конкурентны.

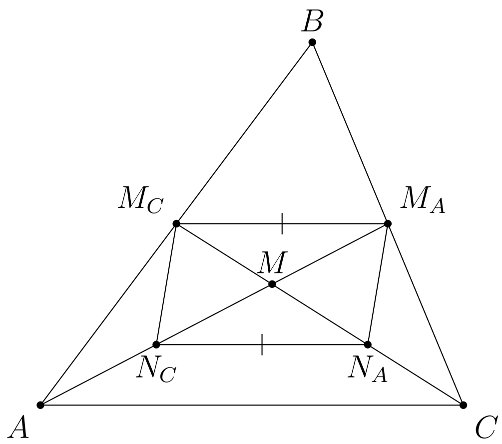
Доказательство. Пусть два серединных перпендикуляра пересеклись в точке O. Соединим O с вершинами треугольника. Эти отрезки равны в силу равноудалённости серединного перпендикуляра от концов отрезка, к которому он построен. Следовательно, O равноудалена от вершин третьей стороны треугольника, а значит лежит на серединном перпендикуляре к ней. ■

Утверждение 1.5. Высоты треугольника конкурентны.

Доказательство. Проведём через вершины треугольника прямые, параллельные противоположным сторонам. В образованном треугольнике вершины исходного – середины сторон, что следует из равенства параллелограммов, построенных на двух сторонах исходного треугольника. Тогда прямые, содержащие высоты исходного треугольника, по определению являются серединными перпендикулярами для образованного, а значит пересекаются в одной точке. ■

Утверждение 1.6. Медианы треугольника конкурентны и делятся точкой их пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Доказательство.



Пусть медианы AM_A и CM_C треугольника ABC пересекаются в точке M. Отметим N_A и N_C – середины AM и CM соответственно. По свойству средней линии в $\triangle ABC$ и $\triangle AMC$: $M_CM_A = \frac{1}{2}AC = N_CN_A$, при этом $M_CM_A \parallel AC \parallel N_CN_A$, значит $M_CM_AN_AN_C$ – параллелограмм, и диагонали в нём точкой пересечения делятся пополам. То есть:

$$\frac{AM}{MM_A} = \frac{AN_C + N_CM}{MM_A} = \frac{2}{1}$$

Аналогично третья медиана треугольника также проходит через M и делится ей в отношении $2 : 1$, считая от вершины. ■

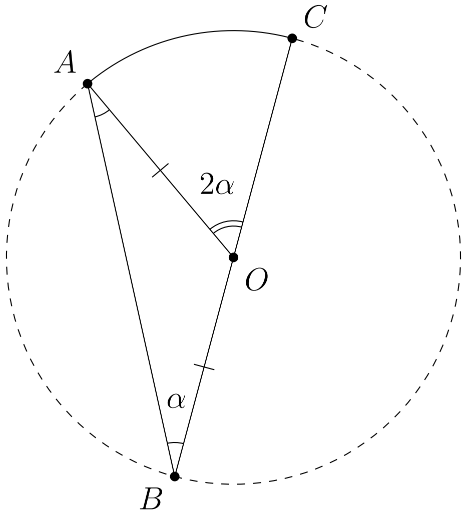
1.2 Углы, ассоциированные с окружностью

Определение 1. Центральным углом называется угол, вершина которого совпадает с центром окружности, а стороны являются радиусами.

Определение 2. Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами.

Утверждение 1.7. Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Доказательство.



Построим вписанный угол, опирающийся на ту же дугу AC и проходящий через центр O окружности, тогда в силу равенства радиусов будут образован равнобедренный треугольник AOB. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle AOC = \angle ABC + \angle BAO = 2\angle ABC$. ∎

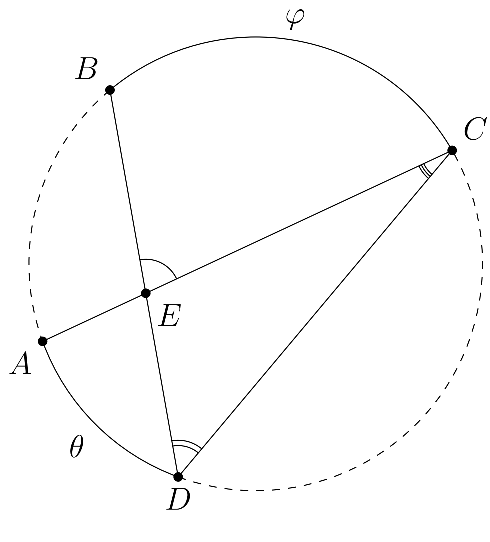
Утверждение 1.8. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, он вписан.

Утверждение 1.9. Если два угла четырёхугольника с вершинами в одной полуплоскости опираются на один отрезок и равны, данный четырёхугольник вписан.

Утверждение 1.10. Пусть AC и BD – диагонали четырёхугольника, O – их точка пересечения. Тогда если $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, то данный четырёхугольник вписан.

Утверждение 1.11. Величина угла, образованного пересечением хорд окружности, равна полусумме градусных мер дуг, заключённых между его сторонами.

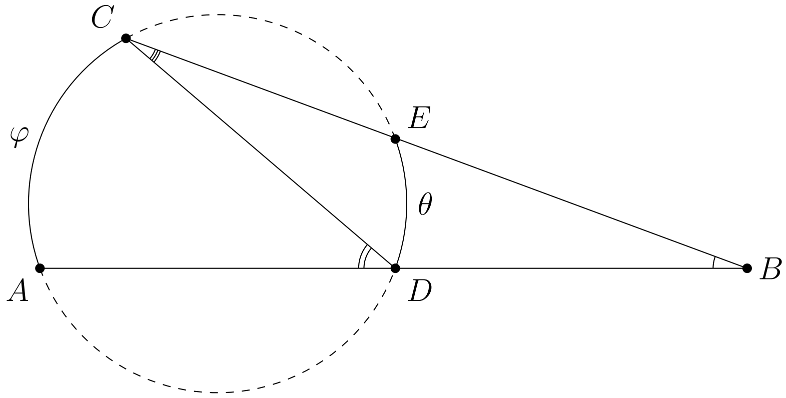
Доказательство.



Пусть градусные меры дуг CB и AD равны φ и θ соответственно. В силу вписанности углов $\angle BDC = \dfrac{\varphi}{2}$, $\angle ACD = \dfrac{\theta}{2}$, тогда $\angle BEC = \dfrac{\varphi + \theta}{2}$ как внешний угол $\triangle CDE$. ∎

Утверждение 1.12. Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга, равна полуразности градусных мер дуг, заключённых между его сторонами.

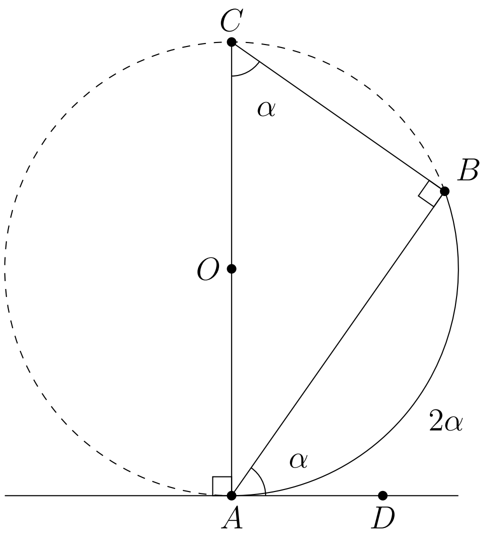
Доказательство.



Пусть градусные меры дуг CA и DE равны φ и θ соответственно. В силу вписанности углов $\angle ADC = \dfrac{\varphi}{2}$, $\angle DCE = \dfrac{\theta}{2}$, тогда $\angle ABC = \dfrac{|\varphi - \theta|}{2}$ из суммы углов $\triangle BCD$. ■

Утверждение 1.13. Величина угла, образованного касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине величины дуги, заключённой между его сторонами.

Доказательство.

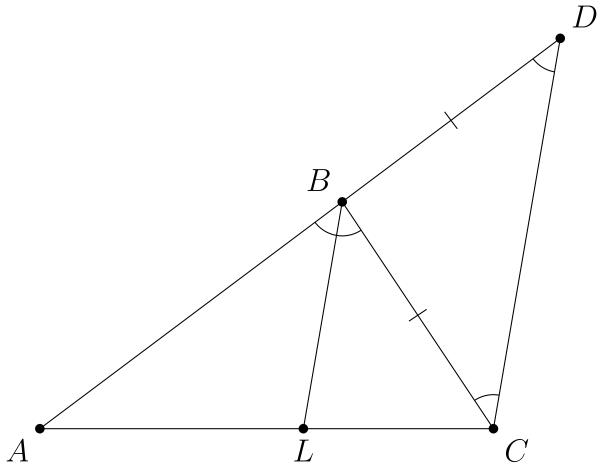


Пусть градусная мера дуги, на которую опирается хорда AB, равна 2α. Возьмём точку C, диаметрально противоположную A. Тогда $\angle ACB = \alpha$ как вписанный, при этом $\angle ABC = 90°$, так как опирается на диаметр. $\angle CAD = 90°$ как радиус к касательной, тогда $\angle BAD = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. ■

1.3 Пропорциональность отрезков в окружности

Теорема 1.14 (Свойство биссектрисы)**.** Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении стягивающих его сторон.

Доказательство.



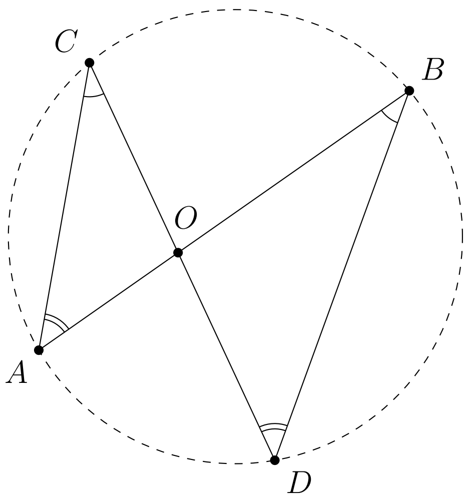
Проведём через точку C треугольника ABC прямую, параллельную биссектрисе BL до пересечения со стороной AB в точке D. Тогда $\angle BCD = \angle LBC$ как накрест лежащие, $\angle ABL = \angle BDC$ как соответственные. Значит, $\triangle BCD$ – равнобедренный. По теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC}$$

■

Утверждение 1.15. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке O, тогда $AO \cdot OB = CO \cdot OD$

Доказательство.



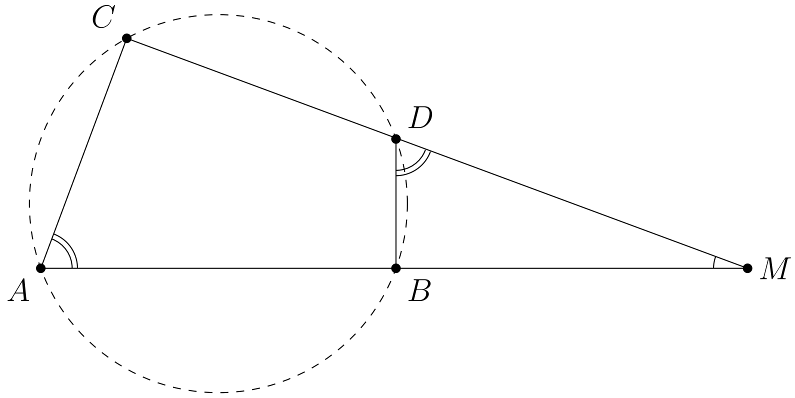
$\angle ACD = \angle ABD$, так как они опираются на одну дугу, аналогично $\angle CAB = \angle CDB$. Значит, $\triangle AOC \sim \triangle DOB$ по двум углам, откуда:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{CO}{OB} \Longrightarrow AO \cdot OB = CO \cdot OD$$

■

Утверждение 1.16. Пусть через точку M проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно. Тогда $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Доказательство.



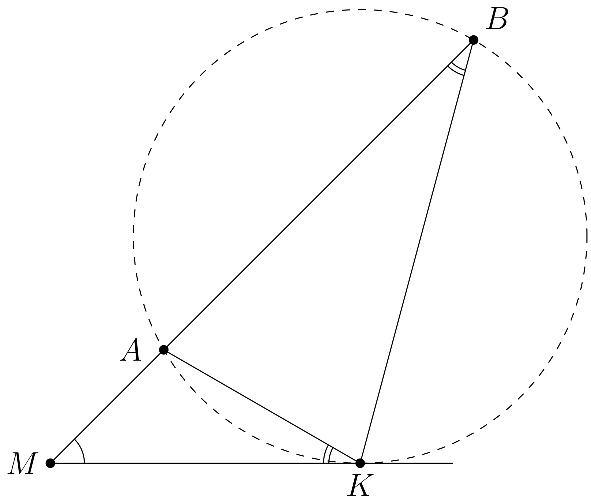
Четырёхугольник $ACDB$ вписан, следовательно, $\angle BDM = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - (180^\circ - \angle CAB) = \angle CAB$. Тогда $\triangle BDM \sim \triangle CAM$ по двум углам ($\angle AMC$ общий), откуда:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} \Longrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

■

Утверждение 1.17. Пусть через точку M проведены касательная и секущая, касающаяся и пересекающая окружность в точках K и A, B соответственно. Тогда $MK^2 = MA \cdot MB$.

Доказательство.



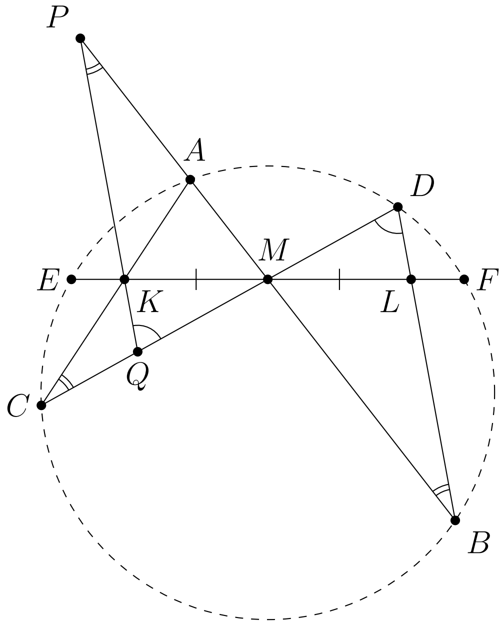
$\angle AKM = \angle ABK$ как угол между хордой и касательной, значит $\triangle AMK \sim \triangle KMB$ по двум углам ($\angle BMK$ общий). Тогда:

$$\frac{MK}{MA} = \frac{MB}{MK} \Longrightarrow MK^2 = MA \cdot MB$$

■

Лемма 1.18 (О бабочке)**.** Пусть хорды AB и CD пересекаются в середине M хорды EF. Также пусть K и L – точки пересечения AC и BD хорды EF соответственно. Тогда $MK = ML$.

Доказательство.



Проведём через K прямую PQ, параллельную BD. Тогда $\angle QPM = \angle MBD = \angle ACD$ как накрест лежащие и вписанные. Аналогично $\angle PQM = \angle MDB$. $\triangle PAK \sim \triangle CQK$ по двум углам, откуда $PK \cdot KQ = AK \cdot KC$, при этом $AK \cdot KC = EK \cdot KF = (EM - KM)(MF + KM) = EM^2 - KM^2$ как отрезки хорд ($EM = MF$ по условию). Аналогично $BL \cdot LD = EM^2 - ML^2$. Рассмотрим подобные треугольники:

$$\triangle PKM \sim \triangle BLM \Longrightarrow \frac{PK}{KM} = \frac{BL}{ML};\ \triangle QKM \sim \triangle DLM \Longrightarrow \frac{KQ}{KM} = \frac{DL}{ML}$$

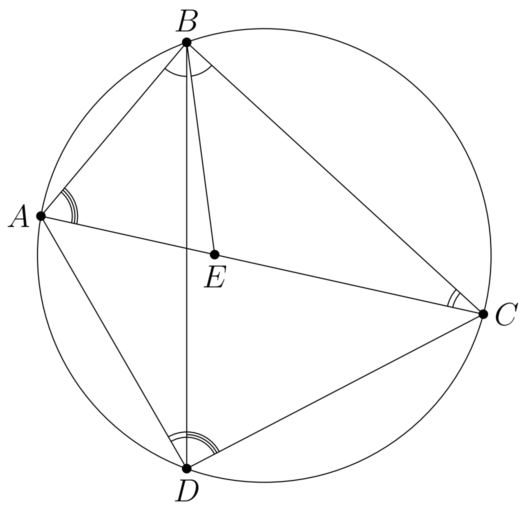
Перемножим полученные равенства:

$$\frac{PK \cdot KQ}{KM^2} = \frac{BL \cdot DL}{ML^2} \Longleftrightarrow \frac{EM^2 - KM^2}{KM^2} = \frac{EM^2 - ML^2}{ML^2} \Longrightarrow KM = ML$$

■

Теорема 1.19 (Птолемея)**.** Если четырёхугольник вписан в окружность, произведение его диагоналей равно сумме попарных произведений его противоположных сторон.

Доказательство.



Пусть E – такая точка на диагонали AC четырёхугольника $ABCD$, что $\angle ABD = \angle CBE$. $\angle ADB = \angle ACB$ и $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные, тогда в силу подобий треугольников:

$$\triangle ABD \sim \triangle EBC \Longrightarrow AD \cdot BC = BD \cdot EC;\ \triangle ABE \sim \triangle DBC \Longrightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AE$$

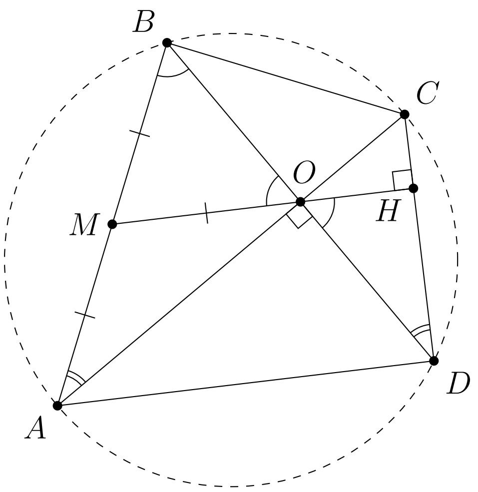
Сложив данные равенства, получаем:

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot (AE + EC) = BD \cdot AC$$

■

Теорема 1.20 (Брахмагупты)**.** Пусть диагонали вписанного четырёхугольника пересекаются в точке O под прямым углом, тогда если прямая проходит через O и перпендикулярная одной из сторон четырёхугольника, она делит его противоположную сторону пополам.

Доказательство.

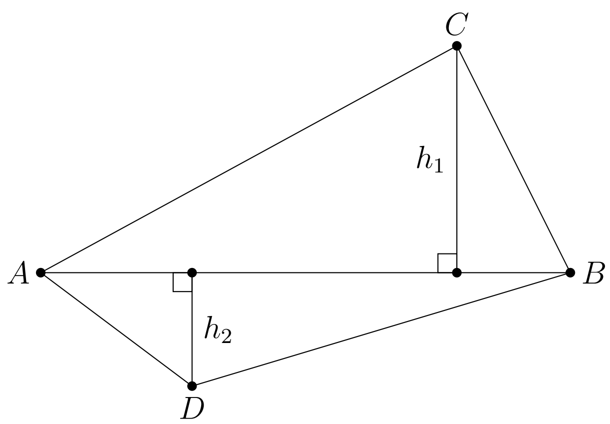


$MO = MA = MB$ как медиана в прямоугольном $\triangle ABO$. Отсюда $\angle MBO = \angle MOB = \angle DOH$ как вертикальные, при этом $\angle BAO = \angle BDC$ как вписанные. Тогда $\angle OHD = 180^\circ - (\angle BAO + \angle ABO) = 90^\circ$. ■

1.4 Отношения площадей

Утверждение 1.21. Площади треугольников с равными основаниями относятся как их высоты.

Доказательство.

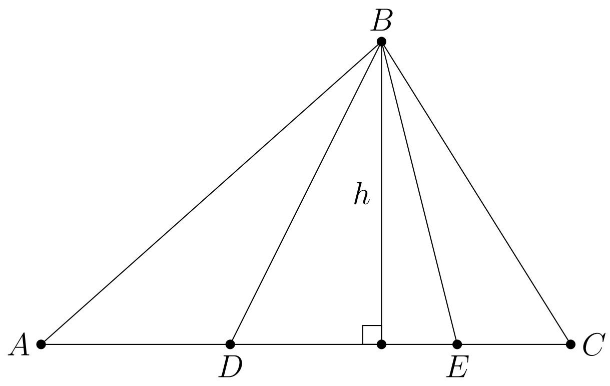


$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot h_1}{\frac{1}{2}AB \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

■

Утверждение 1.22. Площади треугольников с равными высотами, проведёнными к основаниям, относятся как их основания.

Доказательство.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot h}{\frac{1}{2}DE \cdot h} = \frac{AC}{DE}$$

■

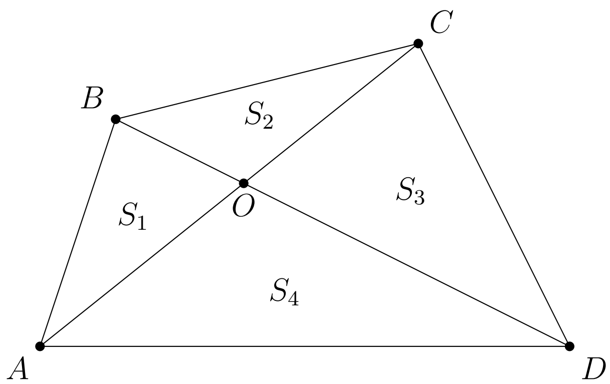
Следствие 1.22.1 (Свойство чевианы)**.** Чевиана делит площадь треугольника в том же отношении, что его основание.

Следствие 1.22.2. Медиана треугольника делит его на два равновеликих.

Утверждение 1.23 (Свойство дельтаплана)**.** Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, тогда:

$$S_{ABO} \cdot S_{CDO} = S_{BCO} \cdot S_{ADO}$$

Доказательство.



По свойству чевианы в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$:

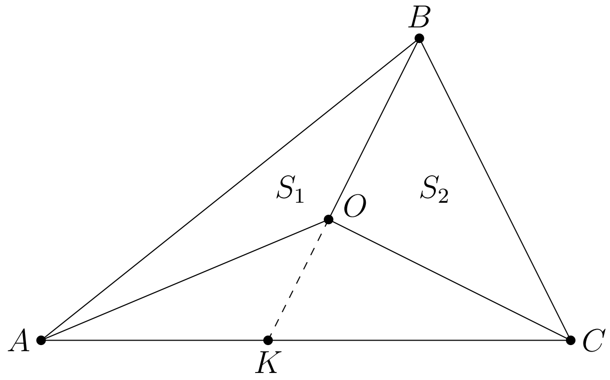
$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{BO}{OD} = \frac{S_2}{S_3} \Longrightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

■

Лемма 1.24 (О ласточкином хвосте)**.** Пусть на чевиане BK треугольника ABC взята точка O, тогда:

$$\frac{S_{ABO}}{S_{BCO}} = \frac{AK}{KC}$$

Доказательство.



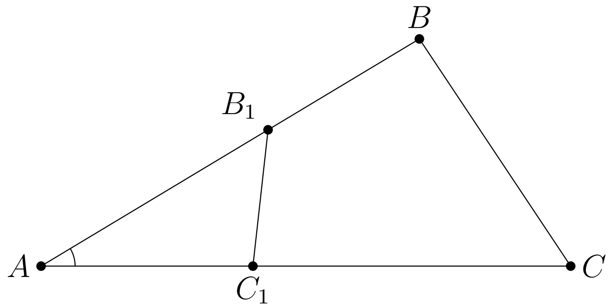
По свойству чевианы в $\triangle ABC$:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{BCK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{AKO}}{S_{CKO}} \Longrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AK}{KC}$$

■

Утверждение 1.25. Площади треугольников с равными углами относятся как произведения сторон, стягивающих этот угол.

Доказательство.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC}{\frac{1}{2}AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin\angle BAC} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$$

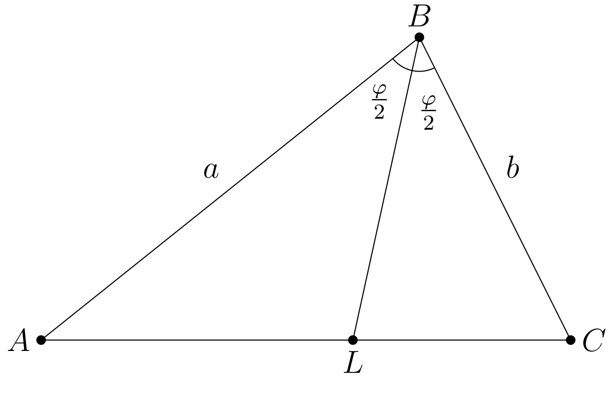
■

Следствие 1.25.1. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Теорема 1.26 (Формула длины биссектрисы)**.** Пусть BL – биссектриса $\angle ABC = \varphi$, который стягивают стороны a и b треугольника ABC, тогда:

$$BL = \frac{2ab\cos\frac{\varphi}{2}}{a+b}$$

Доказательство.



$$S_{ABC}=S_{ABL}+S_{LBC}\Longleftrightarrow \frac{1}{2}ab\sin\varphi=\frac{1}{2}BL\cdot\sin\frac{\varphi}{2}(a+b)\Longrightarrow BL=\frac{ab\sin\varphi}{(a+b)\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{2ab\cos\frac{\varphi}{2}}{a+b}$$

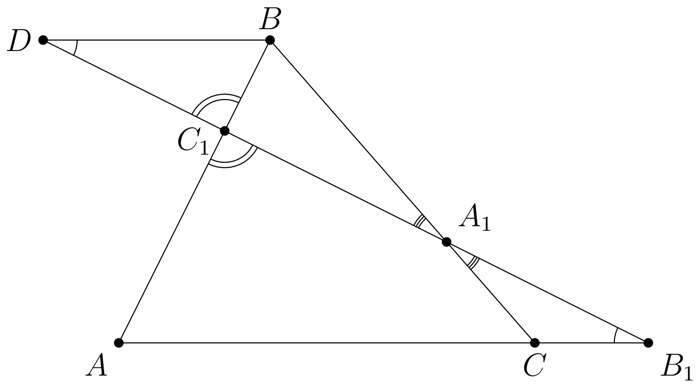
■

1.5 Отношения отрезков

Теорема 1.27 (Менелая)**.** Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, AC и AB, содержащих стороны $\triangle ABC$. Точки A_1, B_1 и C_1 коллинеарны тогда и только тогда, когда:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Доказательство.



Проведём прямую Евклида через B, пусть она пересекает A_1C_1 в точке D. $\angle BDC_1=\angle CB_1A_1$ как накрест лежащие, откуда:

$$\triangle AC_1B_1\sim\triangle BC_1D\Longrightarrow\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BD}{AB_1};\ \triangle CA_1B_1\sim\triangle BA_1D\Longrightarrow\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BD}{CB_1}$$

Выразим из данных неравенств BD и приравняем:

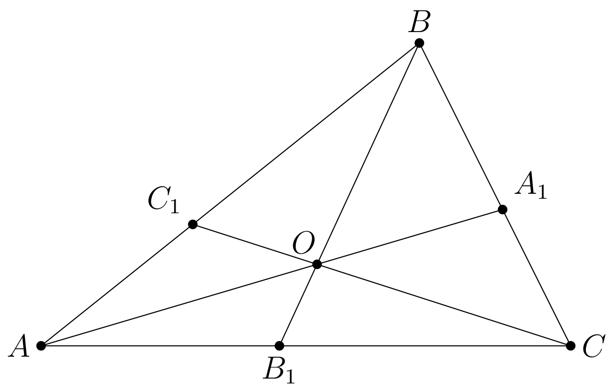
$$\frac{BC_1\cdot AB_1}{AC_1}=\frac{BA_1\cdot CB_1}{A_1C}\Longrightarrow\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Обратное доказательство (коллинеарности при условии равенства отношения) очевидно и рассуждать можно от противного. ■

Теорема 1.28 (Чевы)**.** Пусть чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, тогда:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Доказательство.



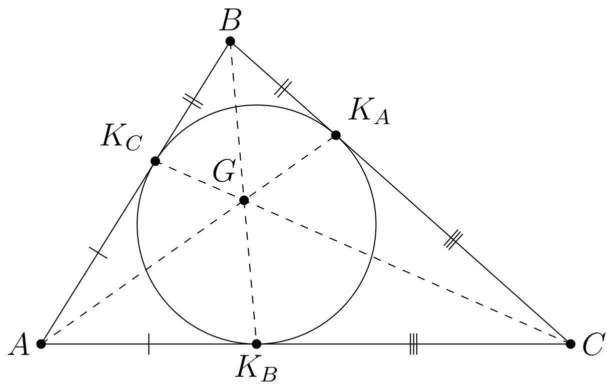
Из леммы о ласточкином хвосте:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BA_1}{A_1C};\ \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AB_1}{B_1C};\ \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{AC_1}{C_1B}$$

Тогда при перемножении соотношений получаем искомое равенство. ■

Теорема 1.29 (Точка Жергона)**.** Пусть K_A, K_B, K_C – точки касания вписанной окружности $\triangle ABC$ со сторонами BC, AC и AB соответственно. Тогда AK_A, BK_B и CK_C пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.

Доказательство.



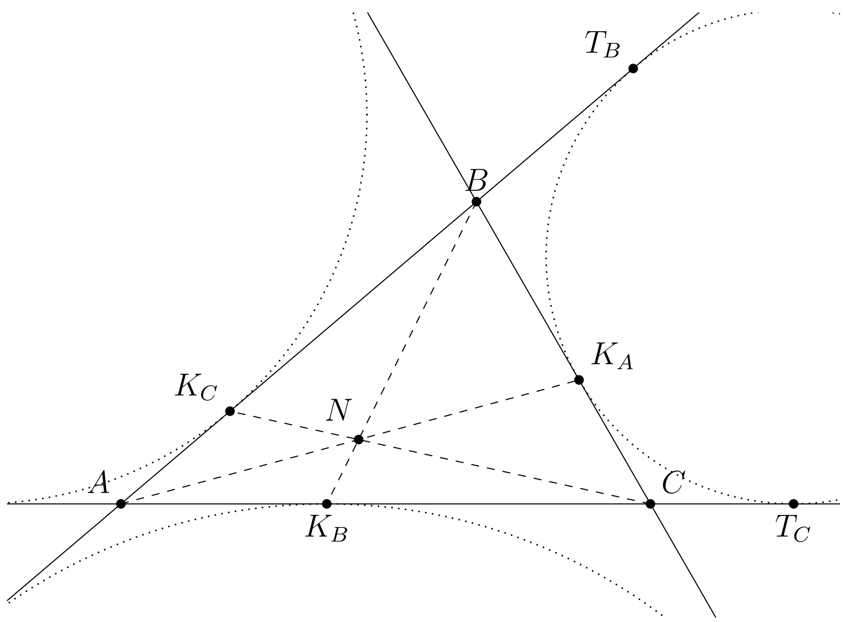
В силу равенства отрезков касательных:

$$\frac{AK_C}{K_CB} \cdot \frac{BK_A}{K_AC} \cdot \frac{CK_B}{K_BA} = \frac{AK_C}{K_CB} \cdot \frac{K_CB}{K_AC} \cdot \frac{K_AC}{AK_C} = 1$$

Тогда по теореме Чевы отрезки AK_A, BK_B и CK_C конкурентны. ■

Теорема 1.30 (Точка Нагеля)**.** Пусть K_A, K_B, K_C – точки касания вневписанных окружностей $\triangle ABC$ со сторонами BC, AC и AB соответственно. Тогда AK_A, BK_B и CK_C пересекаются в одной точке, называемой точкой Нагеля.

Доказательство.



Пусть окружность, касающаяся BC в точке K_A, касается AB в точке T_B, а AC – в точке T_C. Тогда как касательные $CK_A = CT_C = BC - BK_A = BC - BT_B$, при этом $AT_B = AT_C$, то есть $AC + (BC - BT_B) = AB + BT_B \Longrightarrow BT_B = BK_A = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = p - AB$. Аналогично $K_AC = p - AC$, $AK_B = p - AB$, $AK_C = p - AC$, $K_CB = p - BC$. Отсюда получаем:

$$\frac{AK_C}{K_CB} \cdot \frac{BK_A}{K_AC} \cdot \frac{CK_B}{K_BA} = \frac{p - AC}{p - BC} \cdot \frac{p - AB}{p - AC} \cdot \frac{p - BC}{p - AB} = 1$$

Тогда по теореме Чевы отрезки AK_A, BK_B и CK_C конкурентны. ■

2 Бинарное отношение и векторы

Определение 3. Пусть множество $a, b \in M$. Множество $R \subset \{(a,b) | a, b \in M\}$ упорядоченных пар. Если $(\widehat{a}, \widehat{b}) \subset R$, пишут $\widehat{a} \underset{R}{\sim} \widehat{b}$.

Определение 4. Отношение $\sim$ на M называется:

1. Рефлексивным: $\forall a \in M : a \sim a$
2. Симметричным: $\forall a, b \in M : a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$
3. Транзитивным: $\forall a, b \in M : a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$

Определение 5. Отношение $\sim$ на M называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Как только на M задано отношение эквивалентности, появляется $M/\sim$ классов эквивалентности.

Определение 6. Вектор – класс эквивалентности параллельных переносов.

Свойства сложения векторов:

- Коммутативно: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
- Ассоциативно: $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$

Определение 7. $\overrightarrow{a}$ коллинеарен $\overrightarrow{b}$, если $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

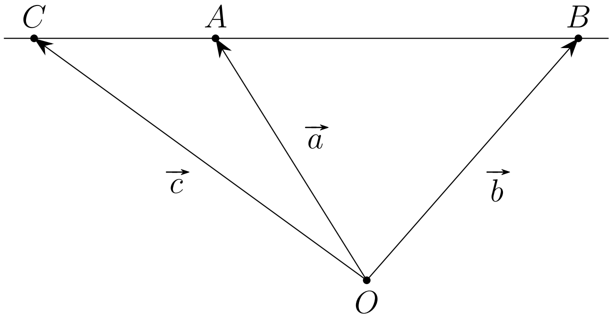
Определение 8. Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$.

Теорема 2.1. $\forall \overrightarrow{v} \in V_{\mathbb{R}^2} \exists! (x; y); x, y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$, где $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$ – базис $V_{\mathbb{R}^2}$. То есть $(x; y)$ – координаты $\overrightarrow{v}$ в базисе $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$.

Определение 9. Углом между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется: $\varphi = \arccos\left(\frac{(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}\| \overrightarrow{b}|}\right) \Longleftrightarrow \cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}\| \overrightarrow{b}|}$, где $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(a, a)}$.

Теорема 2.2. $C \in AB \Longleftrightarrow \forall O : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

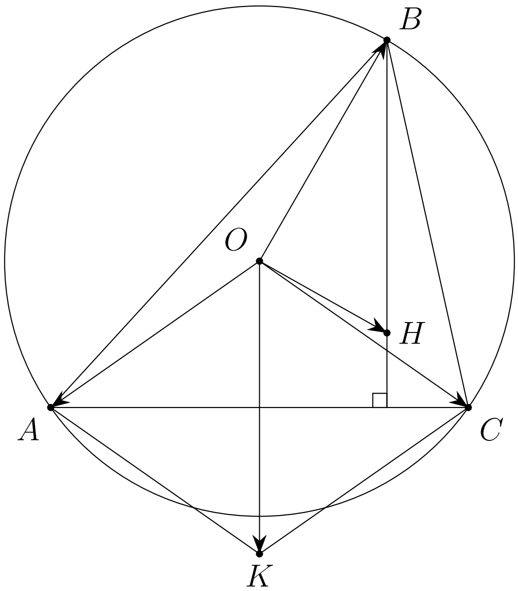
Доказательство.



Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тогда $\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$. Тогда обозначим $\dfrac{|\ \vec{c} - \vec{b}\ |}{|\ \vec{a} - \vec{b}\ |} = x$, откуда $\vec{c} - \vec{b} = x(\vec{a} - \vec{b})$, то есть $\vec{c} = x\vec{a} - (1-x)\vec{b}$. ■

Теорема 2.3. Пусть O и H – центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

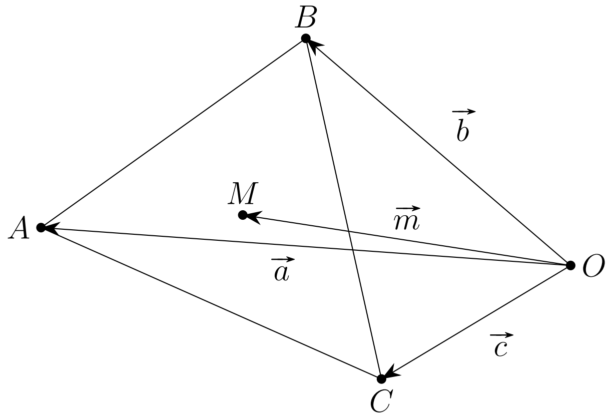
Доказательство.



Рассмотрим сумму $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$, как радиусы описанной окружности, следовательно, $AOCK$ – ромб, а значит $AC \perp OK$ как диагонали. Тогда $OK \parallel BH$, а значит точка M вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OB}$ лежит на BH, но аналогично эта точка лежит на всех высотах $\triangle ABC$, а значит является ортоцентром. ■

Теорема 2.4. Пусть $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ – базис в $\triangle ABC$, а M – его центроид. Тогда $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Доказательство.



Обозначим $\overrightarrow{OA}$ как $\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}$ как $\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}$ как $\vec{c}$, $\overrightarrow{OM}$ как $\vec{m}$. Представим $\overrightarrow{OM}$ в виде суммы векторов: $\vec{b} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}\right) = \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. ■

Теорема 2.5. Пусть O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, а M – центроид $\triangle ABC$ соответственно. Тогда O, H и M – коллинеарны.

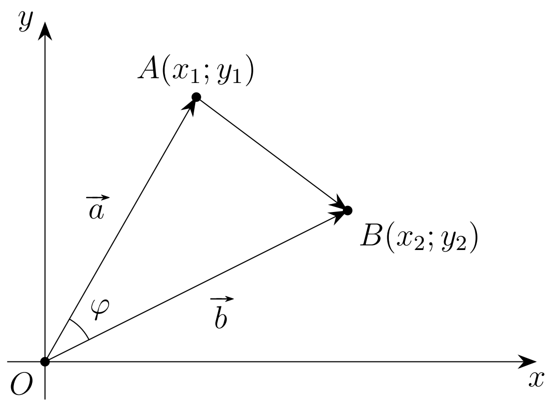
Доказательство. Из предыдущих двух теорем нам известно, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, а также что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, из чего следует, что $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$. ■

Определение 10. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема 2.6. В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Доказательство.



По теореме косинусов $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$, но по теореме Пифагора $OA^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2$, $OB^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$, $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Тогда если подставить в первое выражение и упростить получим $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$. ■

3 Метод координат

Определение 11. Общим уравнением прямой называется уравнение вида $ax + by + c = 0$, в котором a и b не равны нулю:

$$
\begin{aligned}
&l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0\\
&l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0\\
&l_1 \parallel l_2 \overset{b_1 \cdot b_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \Longleftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1\\
&l_1 \perp l_2 \overset{b_1 \cdot b_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{-a_1}{b_1} \cdot \frac{-a_2}{b_2} = -1 \Longleftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0
\end{aligned}
$$

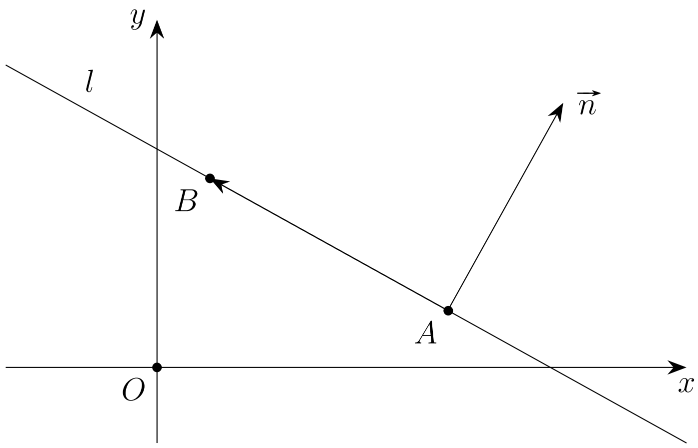
3.1 Нормаль и направляющий вектор

Определение 12. Вектор $\vec{v}$ называется направляющим для прямой l, если его начало и конец лежат на l.

Определение 13. Любой вектор $\vec{n_l} : \vec{n_l} \perp l$, называется ее нормалью.

Теорема 3.1. Вектор $\vec{n}(a; b)$ является вектором нормали к прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

Доказательство.

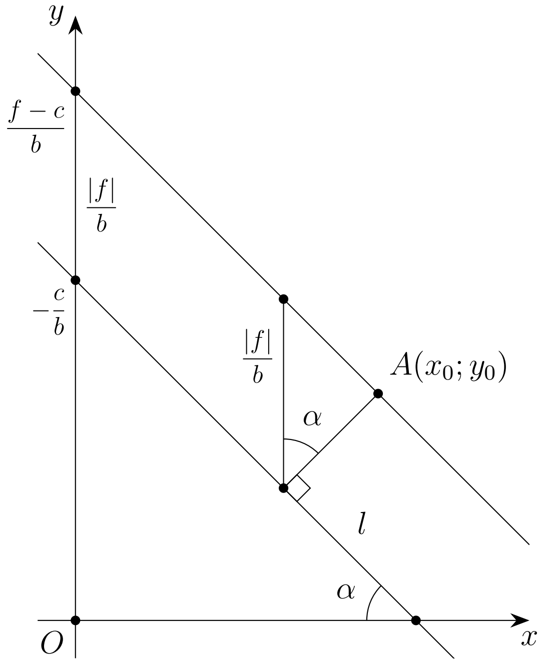


Возьмем произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1; y_2-y_1)$. При этом $ax_1+by_1+c = ax_2+by_2+c = 0$, следовательно, если вычесть одно из другого, получим $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1) = 0$. Рассмотрим $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$. ■

3.2 Расстояние от точки до прямой

Теорема 3.2. $\rho(A; l) : A(x_0; y_0),\ l : ax + by + c = 0 : \rho(A; l) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Доказательство.



Пусть $A(x_0;y_0)$, тогда $ax_0+by_0+c=f \Longrightarrow y_0=\dfrac{f-c}{b}-\dfrac{ax_0}{b}$. Проведем через точку A перпендикуляр к l, а также прямую, параллельную l. Отметим найденные ранее координаты на OY, а также найдем расстояние между ними. Пусть угол наклона l относительно OX равен α, тогда $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{a}{b}$. Из основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}+1}$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тогда, чтобы найти $\rho(A;l)$, умножим косинус на гипотенузу и получим:

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|f|}{b}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

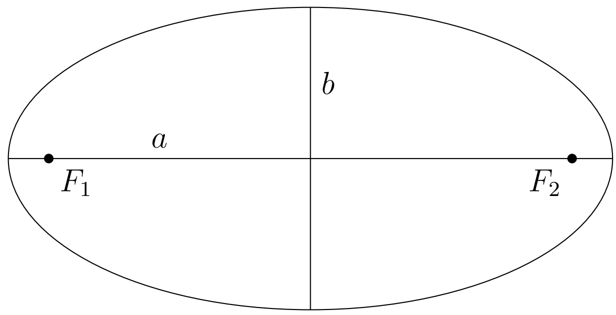
■

4 Кривые второго порядка

4.1 Свойства кривых второго порядка

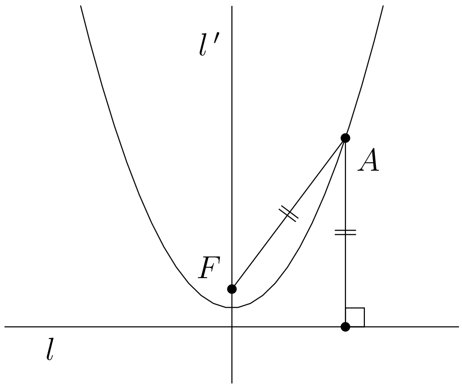
Определение 14. Углом между кривыми называется угол между их касательными в данной точке.

Определение 15. Эллипсом называется ГМТ, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называющихся фокусами, постоянна.



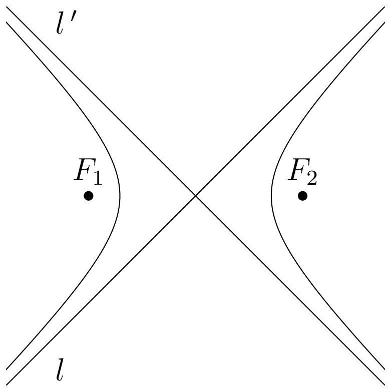
F_1, F_2 – фокусы эллипса
a – большая ось
b – малая ось

Определение 16. Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фиксированной точки F, называемой ее фокусом, и прямой l, называемой директрисой данной параболы.



l' – ось параболы
F – фокус параболы
l – директриса параболы

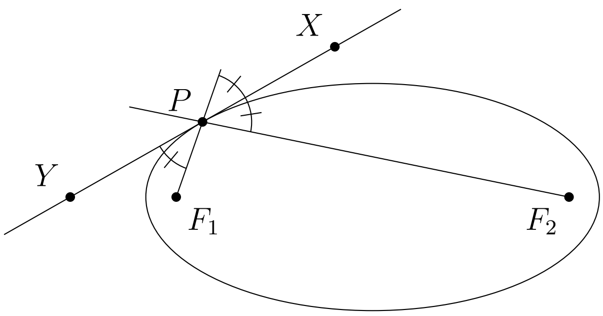
Определение 17. Гиперболой называется ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянен.



F_1, F_2 – фокусы гиперболы
l, l' – асимптоты гиперболы

Теорема 4.1 (Оптическое свойство эллипса)**.** Пусть l касается эллипса с фокусами F_1 и F_2 в точке P, тогда l – биссектриса угла, смежного $\angle F_1PF_2$.

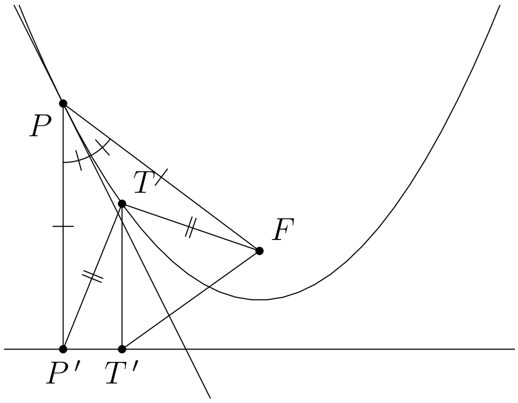
Доказательство.



Пусть X, $Y \in l$, тогда по определению касательной $XF_1+XF_2 \geq PF_1+PF_2$. Следовательно, P – точка на l, сумма расстояний от которой до фокусов минимальна, откуда $\angle F_2PX = \angle F_1PY$. ∎

Теорема 4.2 (Оптическое свойство параболы)**.** Пусть l касается параболы в точке P, P' – проекция точки P на директрису. Тогда l – биссектриса $\angle FPP'$.

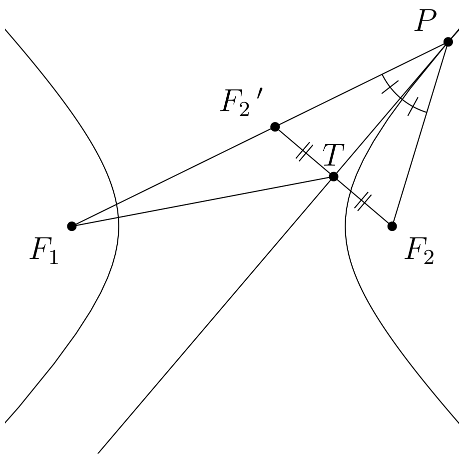
Доказательство.



Пусть биссектриса не касается параболы, то есть пересекает ее в точке T. По определению параболы $PP' = PF \implies \triangle P'PT = \triangle PFT$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $P'T = TF$, но тогда если T' – проекция T на директрису, то $TT' = TF$, то есть $TP' = TT'$, противоречие. ■

Теорема 4.3 (Оптическое свойство гиперболы)**.** Пусть l касается гиперболы с фокусами F_1 и F_2 в точке P, тогда l – биссектриса $\angle F_1F_2P$.

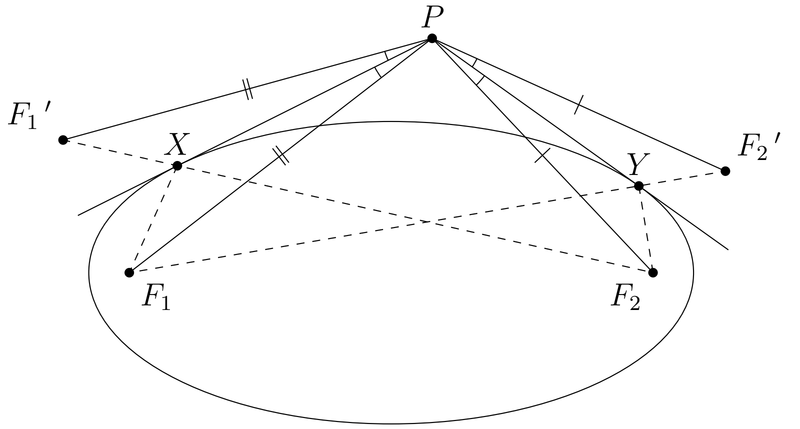
Доказательство.



Пусть биссектриса не касается гиперболы, то есть пересекает ее в точке T. Обозначим через ${F_2}'$ точку, симметричную F_2 относительно l. Тогда $F_2T = {F_2}'T$, а также $F_2P = {F_2}'P$. Кроме того, F_1, ${F_2}'$ и P коллинеарны по определению биссектрисы. По определению гиперболы $F_1P - F_2P = F_1T - F_2T$. Тогда получаем, что $F_1{F_2}' = F_1P - {F_2}'P = F_1T - {F_2}'T$, но по неравенству треугольника $F_1{F_2}' > F_1T - {F_2}'T$, противоречие. ■

Теорема 4.4 (Изогональное свойство эллипса)**.** Пусть PX и PY – касательные к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Тогда $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.

Доказательство.



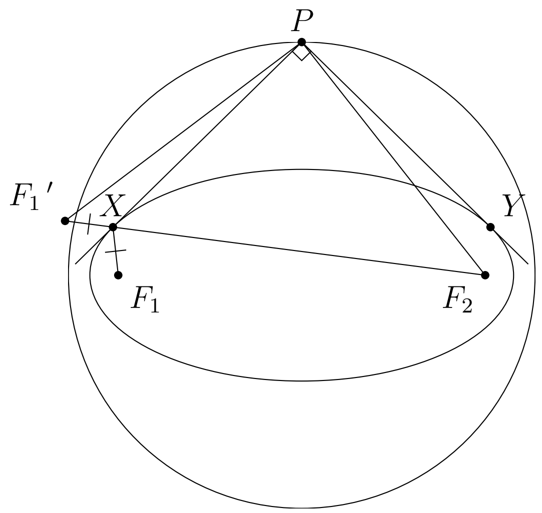
Пусть $F_1{}'$ и $F_2{}'$ – точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PX и PY соответственно. Тогда $PF_1 = PF_1{}'$ и $PF_2 = PF_2{}'$, при этом F_1, Y и $F_2{}'$, а также F_2, X и $F_1{}'$ коллинеарны по оптическому свойству эллипса. Получаем, что $F_2F_1{}' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_1F_2{}'$. То есть $\triangle F_1PF_2{}' = \triangle F_2PF_1{}'$ по трем сторонам. Тогда $\angle F_1PF_2 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF_1{}' = \angle F_1PF_2{}' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY \Longrightarrow \angle F_1PX = \angle F_2PY$. ■

Теорема 4.5. В обозначениях теоремы 3.4 прямая F_1P суть биссектриса $\angle XF_1Y$.

Доказательство. В силу оптических свойств $\angle PF_1{}'X = \angle PF_1X$, при этом из теоремы 3.4 известно, что $\angle PF_1{}'F_2 = \angle PF_1F_2{}'$, так как $\triangle F_1PF_2{}' = \triangle F_1{}'PF_2$. Тогда $\angle PF_1F_2{}' = \angle PF_1{}'X = \angle PF_1X$. ■

Теорема 4.6. Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом, является окружность с центром в центре эллипса.

Доказательство.

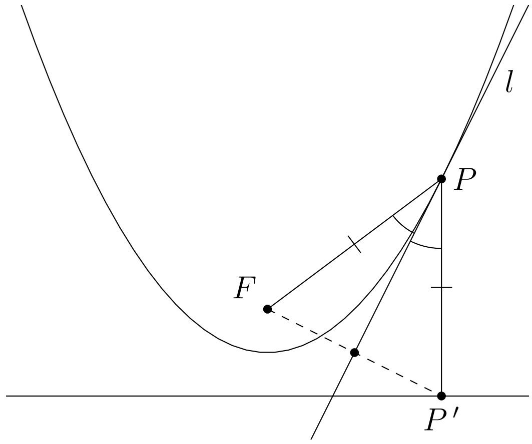


Пусть $F_1{}'$ – образ F_1 относительно прямой PX. Из теоремы 3.4 следует, что $\angle F_1{}'PF_2 = \angle XPY = 90°$. По теореме Пифагора $F_1{}'P^2 + F_2P^2 = F_1{}'F_2{}^2$, то есть получаем уравнение окружности с центром в середине F_1F_2. ■

4.2 Свойства параболы

Лемма 4.7. Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы.

Доказательство.

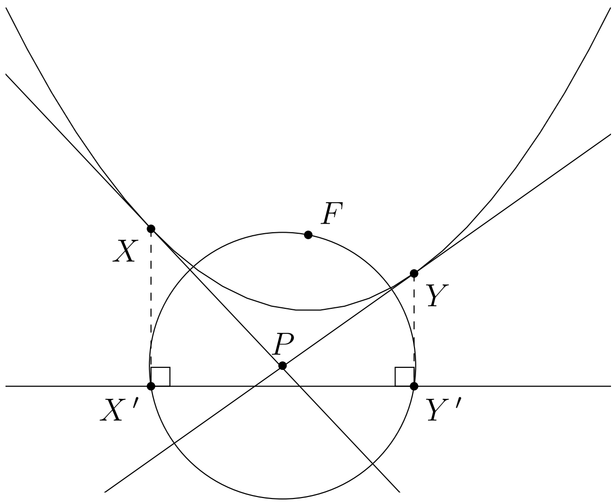


Пусть прямая l касается параболы в точке P, P' – проекция P на директрису параболы. l – биссектриса $\angle FPP'$, но $\triangle FPP'$ – равнобедренный по определению параболы, а значит l в нем медиана и высота, откуда P' – образ F. ■

Следствие 4.7.1. Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.

Лемма 4.8. Пусть PX и PY – касательные к параболе. Тогда P является центром описанной около $\triangle FX'Y'$ окружности, где X' и Y' – проекции X и Y на директрису параболы соответственно.

Доказательство.

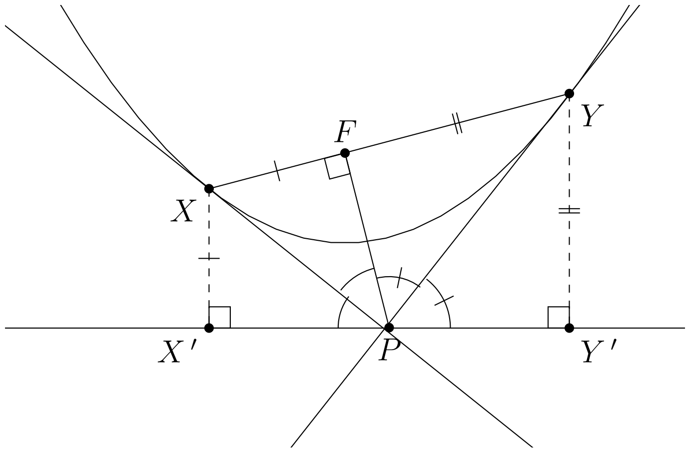


Из леммы 3.8 следует, что PX и PY являются серединными перпендикулярами к FX' и FY' соответственно. Тогда их точка пересечения будет являться центром окружности, описанной около $\triangle FX'Y'$. ■

Следствие 4.8.1. Если PX и PY – касательные к параболе, то P' будет серединой $X'Y'$, где P', X' и Y' – проекции P, X и Y на директрису параболы соответственно.

Теорема 4.9. Множество таких точек P, из которых парабола видна под прямым углом, суть директриса этой параболы. Кроме того, если PX и PY – касательные к этой параболе, то XY содержит F и PF – высота $\triangle PXY$.

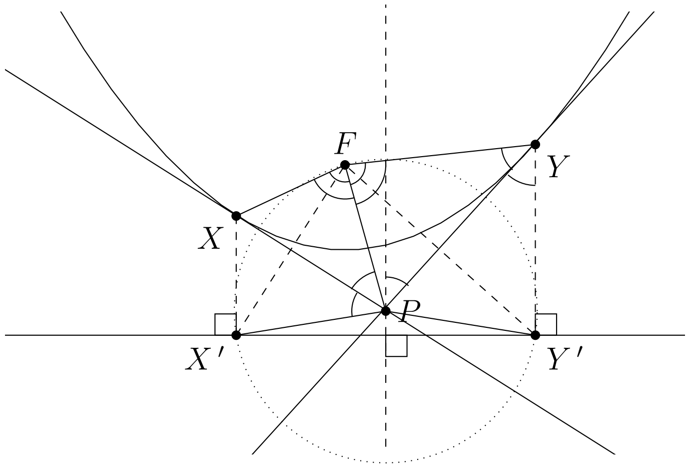
Доказательство.



Пусть P лежит на директрисе, тогда если X' и Y' – проекции X и Y на директрису соответственно, то $\triangle PXX' = \triangle PXF$, а значит $\angle PFX = \angle PX'X = 90°$. Аналогично $\angle PFY = 90°$. То есть X, F и Y коллинеарны. При этом $\angle XPX' = \angle XPF$, $\angle YPF = \angle YPY'$, следовательно, $\angle XPY = \dfrac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90°$. ■

Теорема 4.10. Пусть PX и PY – касательные к параболе, а l – прямая, проходящая через P параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми PY и l равен $\angle XPF$, $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ и FP – биссектриса $\angle XFY$.

Доказательство.

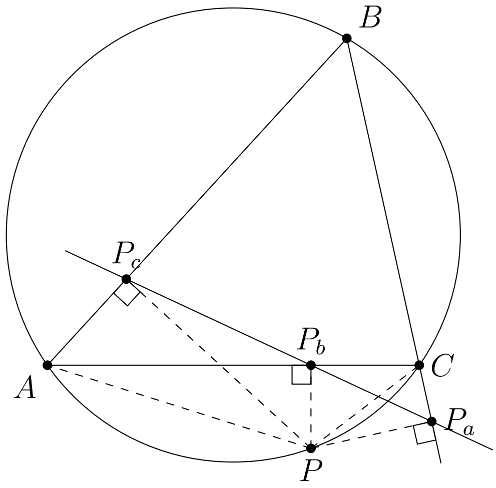


Пусть X' и Y' – проекции X и Y на директрису соответственно. Угол между PY и l равен $\angle X'Y'F$, так как $l \perp X'Y'$ и $PY \perp Y'F$. При этом по лемме 3.8 F, X' и Y' лежат на окружности с центром в P. Тогда $\angle X'Y'F = \dfrac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$. Поскольку $l \parallel YY'$, угол между PY и l равен $\angle PYY'$, который в силу оптического свойства параболы равен $\angle PYF$. То есть $\angle PYF = \angle XPF$, аналогично $\angle FXP = \angle YPF$. Тогда $\triangle XFP \sim \triangle PFY$ по двум углам и PF – биссектриса $\angle XFY$. ■

4.3 Прямая Симсона

Теорема 4.11 (Прямая Симсона)**.** Проекции точки P на стороны $\triangle ABC$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника.

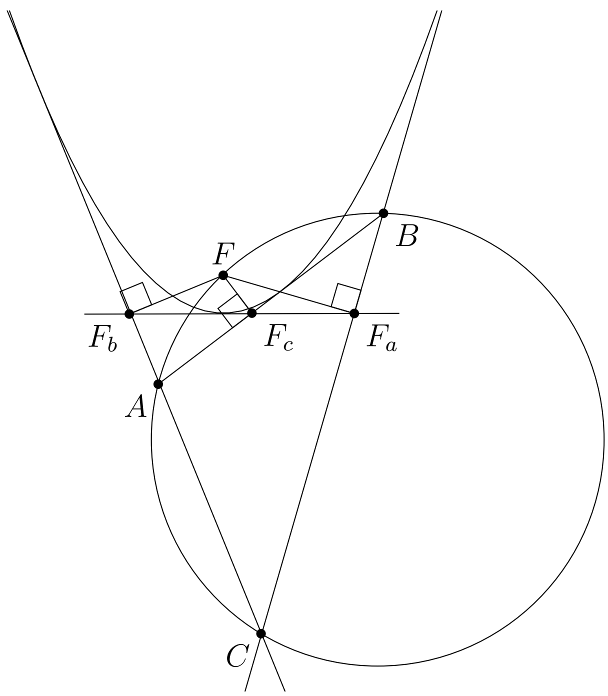
Доказательство.



Пусть P_a, P_b и P_c – проекции точки P на BC, AC и AB соответственно. AP_cP_bP вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$. Тогда $\angle APP_c = \angle AP_bP_C$. Аналогично $\angle CP_bP_a = \angle CPP_a$. В силу вписанности $ABCP$ $\angle PCP_a = 180° - \angle BCP = \angle BAP$. При этом $\angle PCP_a = 90° - \angle CPP_a = 90° - \angle CP_bP_a$. То есть $\angle AP_cP = 90° - \angle APP_c = 90° - \angle AP_bP_c = 90° - \angle CP_bP_a$, а значит $\angle AP_bP_c = \angle CP_bP_a$. В таком случае они вертикальные, следовательно, P_a, P_b и P_c коллинеарны. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теорема 4.12. Пусть $\triangle ABC$ описан около параболы, тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности этого треугольника.

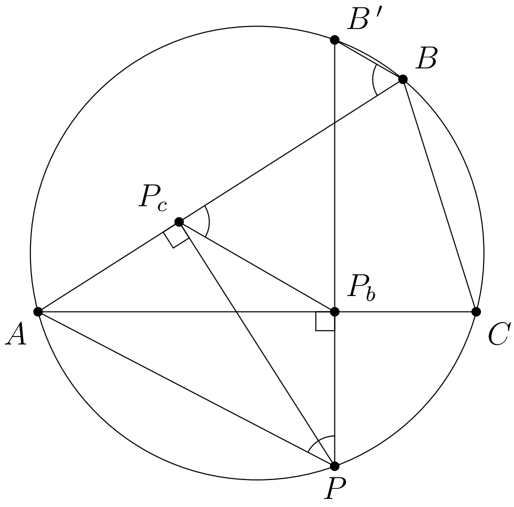
Доказательство.



Пусть F_a, F_b и F_c – проекции фокуса параболы на стороны треугольника. По лемме 3.7 они коллинеарны. Тогда по теореме о прямой Симсона F принадлежит окружности, описанной около $\triangle ABC$. ■

Теорема 4.13. Пусть P и B' лежат на окружности, описанной около $\triangle ABC$, при чем $PB' \perp AC$. Тогда BB' параллельная прямой Симсона точки P.

Доказательство.

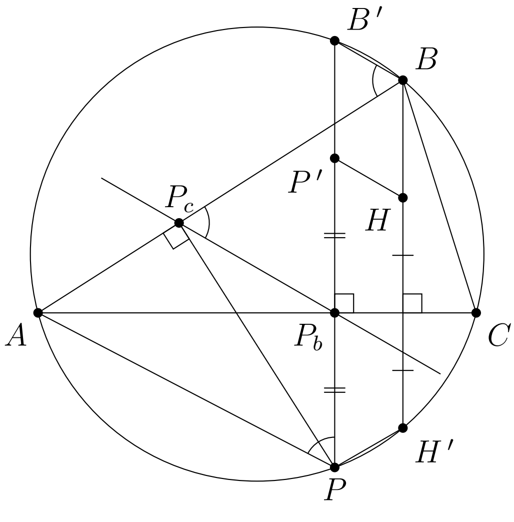


Пусть P_b и P_c – проекции P на AC и AB соответственно. $\angle ABB' = \angle APB'$ как вписанные. AP_cP_bP – вписанный, так как $\angle AP_cP = \angle AP_bP$, следовательно, $\angle APP_b = \angle P_bP_cB$. То есть $\angle P_cBB' = \angle P_bP_cB$, а значит $BB' \parallel P_bP_c$. ∎

Следствие 4.13.1. При вращении точки P по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги PA.

Следствие 4.13.2. Прямая Симсона точки P относительно $\triangle ABC$ делит отрезок PH пополам, где H – ортоцентр $\triangle ABC$.

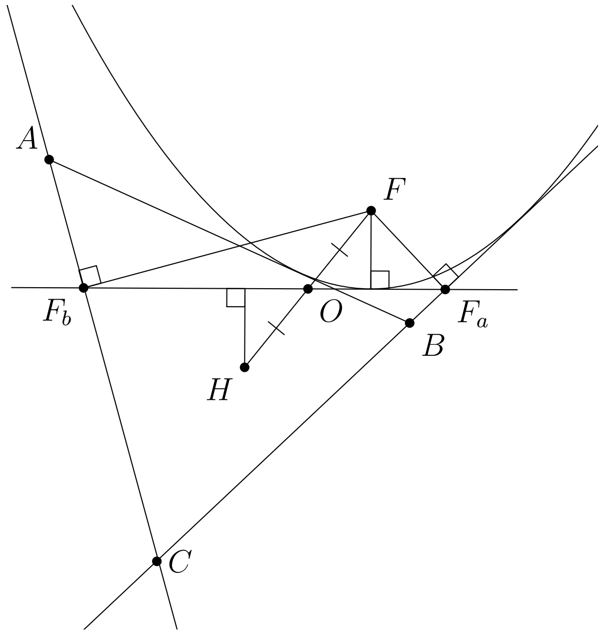
Доказательство.



Пусть H' и P' – образы H и P относительно AC соответственно. Поскольку $PB' \parallel H'B$, $PB'BH'$ – равнобокая трапеция. Тогда отрезок, симметричный PH' относительно AC должен быть параллелен BB', то есть $P'H \parallel B'B \parallel P_cP_b$. Поскольку P_b – середина PP' и $P_cP_b \parallel P'H$, прямая Симсона – средняя линия $\triangle HPP'$, а значит делит HP пополам. ∎

Теорема 4.14. Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе.

Доказательство.



Пусть F_a и F_b – проекции F на BC и AC соответственно. Тогда по следствию 3.7.1 F_bF_a – прямая, касающаяся параболы в ее вершине и параллельная директрисе этой параболы. Пусть O – точка пересечения FH и F_bF_a, тогда по следствию 3.13.2 $FO = OH$, при этом $\angle HOF_b = \angle FOF_a$ как вертикальные, в таком случае равны по двум углам и стороне треугольники, образованные F, O, H и проекциями F и H на F_bF_a. Следовательно, расстояние от F до прямой, проходящей через вершину параболы и параллельной ее директрисе, равно расстоянию от этой прямой до H, а значит H лежит на директрисе параболы. ■

5 Гомотетия

Определение 18. Гомотетия с центром O и коэффициентом k суть преобразование плоскости, при котором $\forall A \in \mathbb{R}^2 : H_O^k(A) = A' : \overrightarrow{OA} \cdot k = \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA} \upuparrows \overrightarrow{OA'}$.

5.1 Композиция гомотетий

Определение 19. Композиция гомотетий H_O^k и H_P^l при $k, l \neq 1$ – это параллельный перенос при $k \cdot l = 1$ или $H_Q^{kl} : Q \in OP, \overrightarrow{OQ} \cdot (k-1) = \overrightarrow{QP} \cdot \left(1 - \frac{1}{l}\right)$.

6 Инверсия

Определение 20. Точки A и B называются симметричными относительно окружности $\omega(O;\, R)$, если $OA \cdot OB = R^2$ и A лежит на луче OB.

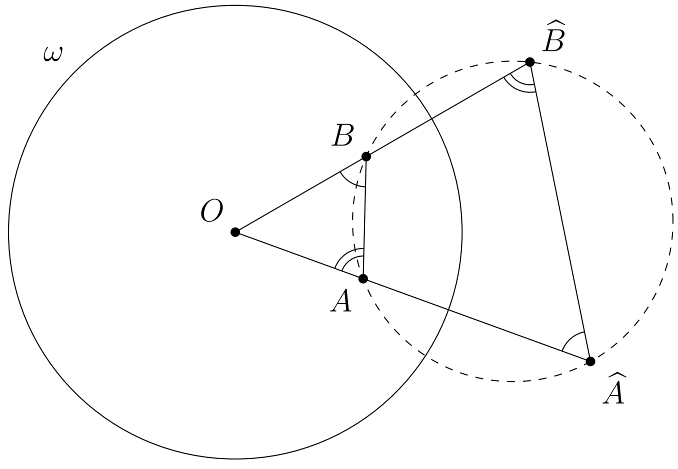
Для точек, симметричных относительно окружности $\omega(O;\, R)$, выполняются условия:

1. $\forall X \in \mathbb{R}^2 : X \neq 0 \;\; \exists! Y : X, Y$ – симметричны относительно ω
2. Если X внутри ω, то Y снаружи и наоборот
3. Нет точки, симметричной O
4. $\forall C \in \omega : C$ симметрична сама себе

Определение 21. Пусть на плоскости дана окружность $\omega(O;\, R)$. Отображение $\varphi : \mathbb{R}^2/\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\{0\}$, при котором точки переходят в симметричные им относительно ω, называется инверсией.

Лемма 6.1 (Основная лемма)**.** Любые две пары точек, симметричных относительно одной окружности, лежат на одной окружности.

Доказательство.



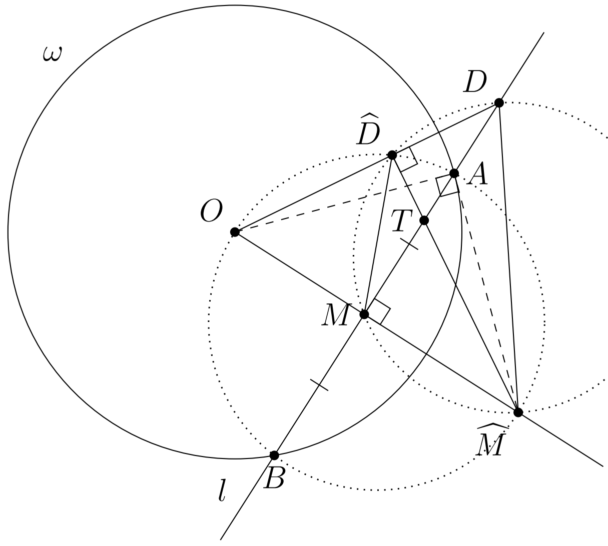
Пусть A и $\widehat{A}$, B и $\widehat{B}$ – пары точек, симметричных около окружности $\omega(O;\ R)$. Тогда:

$$OA \cdot O\widehat{A} = R^2 = OB \cdot O\widehat{B} \iff \frac{OA}{OB} = \frac{O\widehat{B}}{O\widehat{A}}$$

Следовательно, по двум сторонам, а также по общему углу $\triangle AOB \sim \triangle \widehat{B}O\widehat{A}$. Отсюда $\angle ABO = \angle O\widehat{A}\widehat{B}$ и $\angle OAB = \angle O\widehat{B}\widehat{A}$, а значит $\widehat{A}AB\widehat{B}$ – вписанный, так как сумма его противоположных углов равна $180°$. ■

Теорема 6.2. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

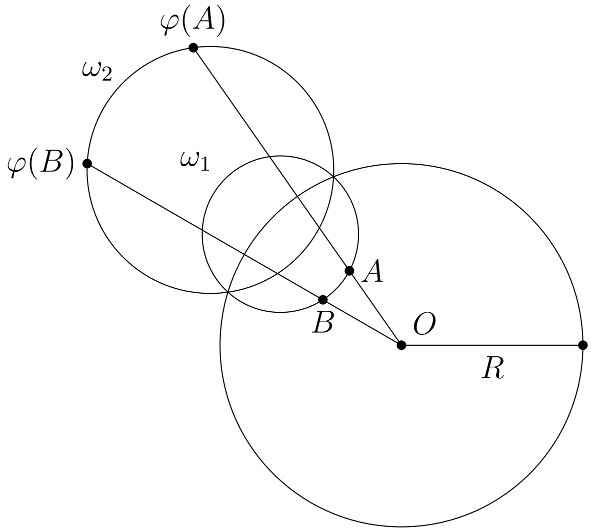
Доказательство.



Пусть M – основание серединного перпенидкуляра, опущенного из O на l, D – произвольная точка вне окружности, а $\widehat{M}$ и $\widehat{D}$ – точки, симметричные M и D соответственно относительно ω, T – точка пересечения l и $\widehat{D}\widehat{M}$. Из построения инверсии, AM – касательная к ω. Тогда $\angle OA\widehat{M} = 90°$. По основной лемме $D\widehat{D}M\widehat{M}$ – вписанный. Тогда $\angle D\widehat{D}\widehat{M} = \angle DM\widehat{M} = 90° = \angle OA\widehat{M}$. А значит $O\widehat{D}A\widehat{M}$ – вписанный по признаку. ■

Теорема 6.3. Если при инверсии φ верно: $\varphi(\omega_1) = \omega_2$, где ω_i – это окружность, то центр данной инверсии суть центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2.

Доказательство.

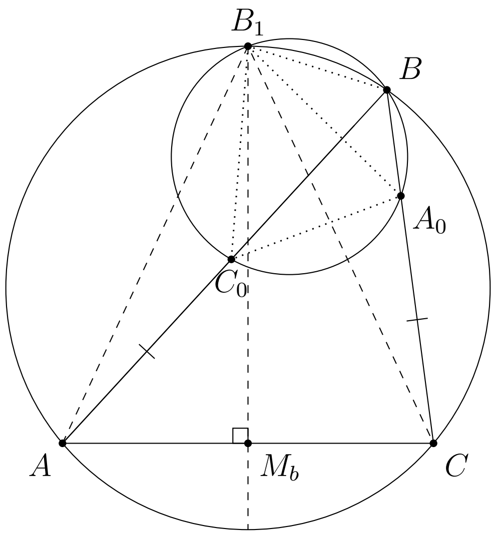


Возьмем две произвольные точки A и B, лежащие на ω_1 и построим их образы при инверсии φ: $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ соответственно. По определению инверсии $OA \cdot O\varphi(A) = R^2 = OB \cdot O\varphi(B) \Longrightarrow \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{O\varphi(A)}{O\varphi(B)}$, а значит O – центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2. ∎

7 Полезные факты

Лемма 7.1. Пусть C_0 и A_0 – произвольные точки на сторонах AB и BC треугольника ABC, B_1 – середина дуги ABC, описанной около $\triangle ABC$ окружности, тогда $BB_1C_0A_0$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AC_0 = CA_0$.

Доказательство.

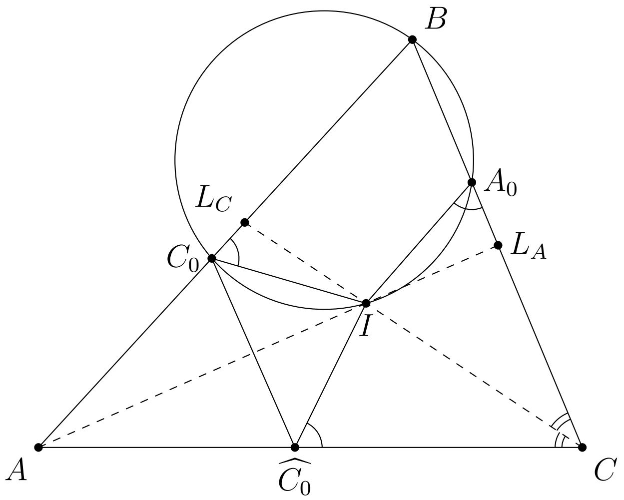


Пусть $AC_0 = CA_0$, докажем вписанность $BB_1C_0A_0$. Опустим перпендикуляр с основанием M_b из B_1 на AC, тогда в силу того, что B_1 – середина дуги ABC, B_1M_b – серединный перпендикуляр к AC. Тогда $AB_1 = B_1C$. Рассмотрим $\triangle AB_1C_0$ и $\triangle CB_1A_0$: $\angle B_1AB = \angle B_1CB$, так как они опираются на одну дугу B_1B, при этом $AC_0 = CA_0$ по условию и $AB_1 = B_1C$. То есть $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$, а значит равны их внешние углы: $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$, тогда $BB_1C_0A_0$ – вписанный по признаку.

Докажем, что $AC_0 = CA_0$ при условии вписанности $BB_1C_0A_0$. Аналогично первому доказательству, $\angle B_1AB = \angle B_1CB$ и в силу вписанности $\angle B_1C_0B = \angle B_1A_0B$, при этом $AB_1 = B_1C$, а значит $\triangle AB_1C_0 = \triangle CB_1A_0$ по двум углам и стороне, то есть $AC_0 = CA_0$. ■

Лемма 7.2. Пусть A_0 и C_0 – произвольные точки на BC и AB треугольника ABC соответственно. Инцентр $\triangle ABC$ лежит на окружности, описанной около $\triangle A_0BC_0$ тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

Доказательство.



Пусть L_A и L_C – основания биссектрис из точек A и C соответственно. Отметим точку $\widehat{C_0}$, симметричную C_0 относительно AL_A. Докажем равенство при условии вписанности. В силу вписанности A_0IC_0B: $\angle IA_0C = \angle IC_0B$. При этом в силу симметрии $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C_0}C$. Также $\angle IC\widehat{C_0} = \angle ICL_A$, так как CI – биссектриса. Тогда $\triangle IC\widehat{C_0} = \triangle ICA_0$ по двум углам и общей стороне IC. То есть $\widehat{C_0}C = A_0C$, а значит $A\widehat{C_0} + \widehat{C_0}C = A\widehat{C_0} + A_0C = AC_0 + A_0C = AC$.

Докажем вписанность при условии равенства. В силу симметрии $\angle IC_0B = \angle I\widehat{C_0}C$. $AC = AC_0 + A_0C = A\widehat{C_0} + A_0C \Longrightarrow A_0C = C\widehat{C_0}$. Тогда $\triangle IC\widehat{C_0} = \triangle ICA_0$ по двум сторонам и углу, а значит $\angle I\widehat{C_0}C = \angle IA_0C$, то есть $\angle IA_0C = \angle IC_0B$, следовательно, A_0IC_0B – вписанный. ■

8 Стереометрия

8.1 Введение

Аксиома 1. В $\mathbb{R}^3$ существуют плоскости, причем для любой из них выполняются аксиомы планиметрии.

Аксиома 2 (Аксиома плоскости)**.** Через любые три неколлинеарные точки пространства проходит плоскость, при чем только одна.

Аксиома 3. Прямая, проходящая через две точки плоскости полностью лежит в данной плоскости.

Аксиома 4 (Аксиома пересечения плоскостей)**.** Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой:

$$M \in \alpha;\, M \in \beta \Longrightarrow \exists\, l:\ l \subset \alpha;\, l \subset \beta$$

Аксиома 5 (Аксиома расстояния)**.** В любой из плоскостей, проходящих через две различные точки расстояние между этими точками одно и то же:

$$A \neq B;\ \forall\, \alpha :\ A,\, B \in \alpha\ \rho_\alpha(A;\ B) = \mathrm{const}$$

Определение 22. Прямая и плоскость называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку.

Определение 23. Две плоскости называются пересекающимися, если они имеют одну общую прямую.

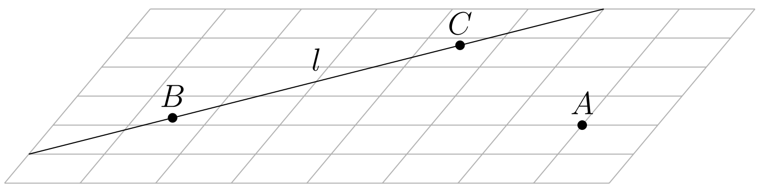
Определение 24. Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек называются параллельными.

8.2 Следствия из аксиом

Лемма 8.1. Через прямую и точку, не лежащую на ней, проходит плоскость, при том только одна:

$$\forall\, A;\ \forall\, l :\ A \notin l\ \exists!\ \alpha :\ l \subset \alpha;\ A \in \alpha$$

Доказательство.



Рассмотрим $B,\, C \in l :\ l \subset \alpha \Longrightarrow B,\, C \in \alpha$. По аксиоме плоскости $\exists!\ \alpha :\ A,\, B,\, C \in \alpha;\ l \subset \alpha$. ∎

Лемма 8.2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, при том только одна:

$$a \cap b = C \Longrightarrow \exists!\ \alpha :\ a,\, b \subset \alpha$$

Лемма 8.3. Через две параллельные прямые проходит плоскость, при том только одна:

$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \alpha :\ a,\, b \subset \alpha$$

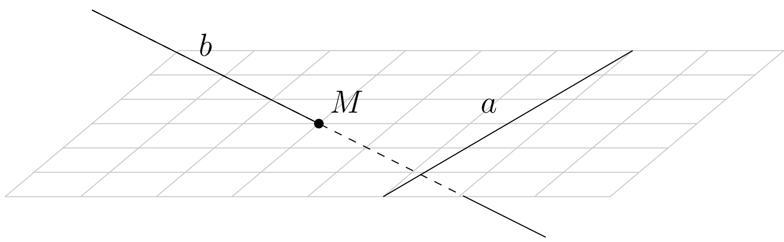
8.3 Скрещивающиеся прямые

Определение 25. Две прямые называются скрещивающимися, если у них нет общих точек и они не параллельны.

Теорема 8.4 (Признак скрещивающихся)**.** Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекают данную плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, данные прямые скрещиваются:

$$a \subset \alpha,\, b \cap \alpha = M :\ M \notin a \Longrightarrow a \dot{-} b$$

Доказательство.



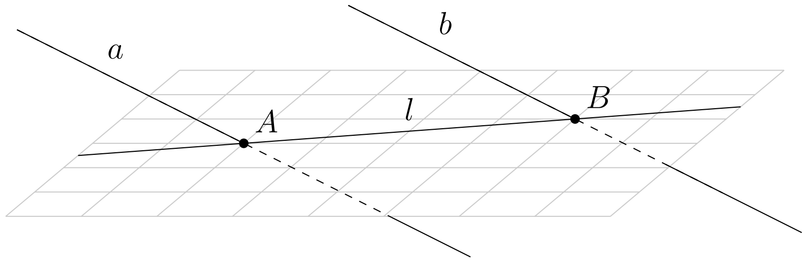
Пусть a и b не скрещиваются. Тогда $a \parallel b$ или $a \cap b \neq \varnothing$:

1. $a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta:\ a,\, b \subset \beta \Longrightarrow M \in \beta,$ при этом $a \subset \alpha$ (по условию);
   $a \subset \beta$ (по предложению) $\Longrightarrow \alpha \cap \beta = a,\ M \in \alpha,\ M \in \beta \Longrightarrow M \in a,$ противоречие.
2. $a \cap \beta \neq \varnothing \Longrightarrow \exists\, k:\ k \in a,\ k \in b \Longrightarrow \exists\, \beta:\ a,\, b \subset \beta \Longrightarrow M \in \beta,$ при этом $a \subset \alpha$ (по условию);
   $a \subset \beta$ (по предложению) $\Longrightarrow \alpha \cap \beta = a,\ M \in \alpha,\ M \in \beta \Longrightarrow M \in a,$ противоречие.

■

Теорема 8.5. Пусть $a \parallel b$; $a \cap \alpha \neq \varnothing$, тогда $b \cap \alpha \neq \varnothing$.

Доказательство.



$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta:\ a,\, b \subset \beta,\ a \cap \alpha = A \Longrightarrow A \in \beta \Longrightarrow \exists\, l:\ l = \alpha \cap \beta$$

$$l \cap a = A,\ a \parallel \beta \Longrightarrow l \cap \beta = B:\ B \in b,\ B \in l \Longrightarrow b \cap \alpha = B.$$

■

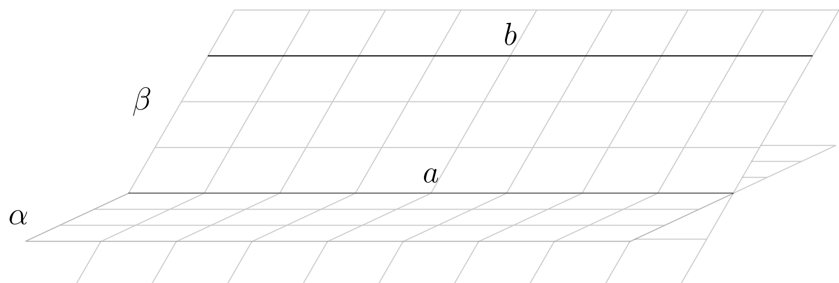
8.4 Параллельность прямой и плоскости

Определение 26. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 8.6 (Признак параллельности прямой и плоскости)**.** Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны:

$$a \subset \alpha,\ b \not\subset \alpha,\ a \parallel b \Longrightarrow \alpha \parallel b$$

Доказательство.



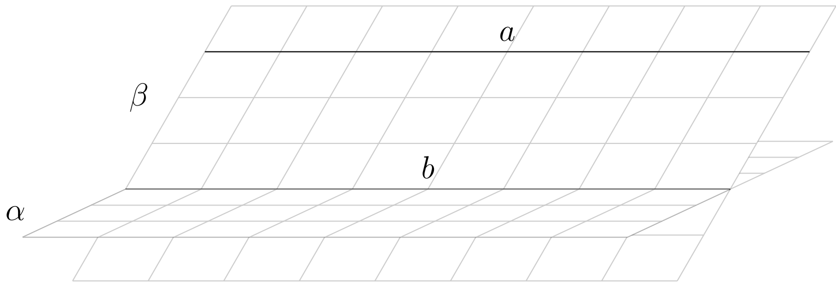
$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta:\ a,\, b \subset \beta$. Пусть $b \cap \alpha \neq \varnothing$. Но $\alpha \cap \beta = a$. Противоречие.

■

Теорема 8.7 (О линии пересечения плоскостей)**.** Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой:

$$a \parallel \alpha,\ a \subset \beta,\ \alpha \cap \beta = b \Longrightarrow a \parallel b$$

Доказательство.



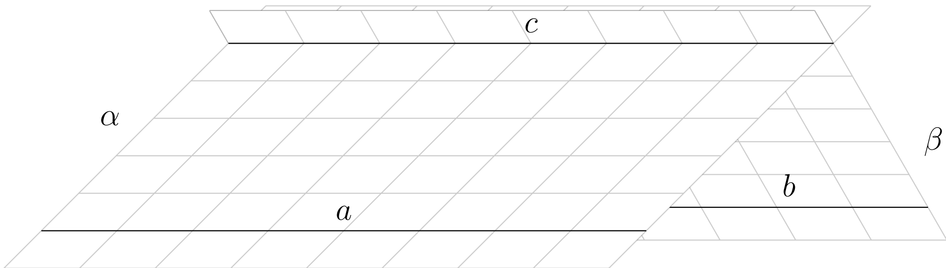
$a \parallel \alpha \Longrightarrow a \cap b = \varnothing$. Пусть $a \dot{-} b$, тогда $a \cap \alpha \neq \varnothing$, но $a \parallel \alpha$. Противоречие.

■

Теорема 8.8 (О крыше)**.** Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых:

$$a \parallel b,\ a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ \alpha \cap \beta = c \Longrightarrow a \parallel c,\ b \parallel c$$

Доказательство.



$a \parallel b$, $b \not\subset \alpha \Longrightarrow b \parallel \alpha \Longrightarrow b \parallel c$ (по теореме о линии пересечения плоскостей). Аналогично $c \parallel a$.

■

Следствие 8.8.1. Параллельность прямых в пространстве транзитивна.

Следствие 8.8.2. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

Определение 27. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным и лежащим в одной плоскости.

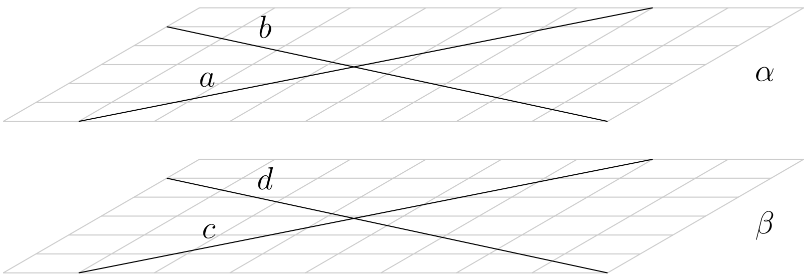
8.5 Параллельность плоскостей

Определение 28. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 8.9 (Признак параллельности плоскостей)**.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны:

$$a,\, b \subset \alpha,\ a \cap b \neq \varnothing;\ \ c,\, d \subset \beta;\ \ a \parallel c,\ b \parallel d \Longrightarrow \alpha \parallel \beta$$

Доказательство.

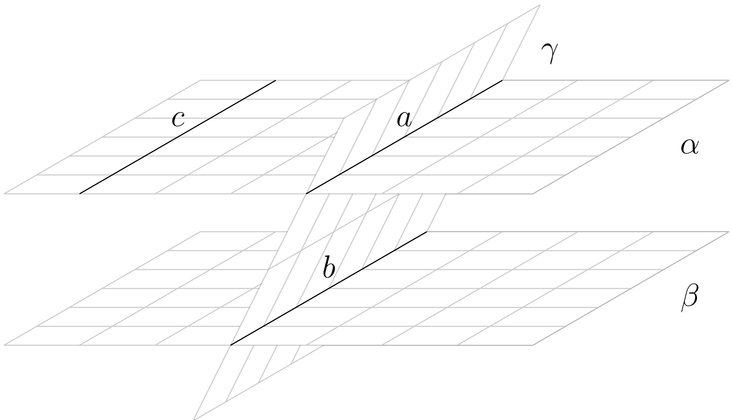


Пусть $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$. Тогда по теореме о линии пересечения плоскостей $\alpha \cap \beta = k$, $k \parallel a$ $(c \subset \beta)$; $\alpha \cap \beta = l$, $l \parallel b$ $(d \subset \beta)$. Противоречие. ∎

Теорема 8.10. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны:

$$\alpha \parallel \beta,\ \gamma \cap \alpha = a,\ \gamma \cap \beta = b \Longrightarrow a \parallel b$$

Доказательство.



$$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow \exists c \subset \alpha :\ c \parallel b. \text{ По теореме о крыше } a \parallel c,\ b \parallel c.$$

∎

8.6 Сечения

Определение 29. Если пересечение плоскости и многогранника есть многоугольник, то он называется сечением этого многогранника этой плоскостью.

Определение 30. Следом называется прямая, по которой плоскость сечения пересекает плоскость любой из граней многогранника.

Определение 31. Пирамида – это многогранник, одна из граней которого – произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной.

Определение 32. Пирамида называется правильной, если в её основании лежит правильный многоугольник, а все боковые грани – равнобедренные треугольники с общей вершиной.

Определение 33. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется апофемой этой пирамиды.

Определение 34. Треугольная пирамида называется тетраэдром.

Определение 35. Тетраэдр называется правильным, если все его рёбра равны.

Определение 36. Усечённой пирамидой называется часть пирамиды, заключённая между плоскостью основания и плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей все боковые рёбра пирамиды.

Определение 37. Призма – это многогранник, две грани которого – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все рёбра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны между собой. Два равных многоугольника, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями призмы. Остальные грани призмы называются её боковыми гранями, а их объединение – боковой поверхностью призмы. Рёбра, не лежащие в основании призмы, называются её боковыми рёбрами. Если в основаниях призмы лежат n-угольники, то призма называется n-угольной.

Определение 38. Призма, основания которой являются параллелограммами, называется параллелепипедом.

Определение 39. Если все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, то параллелепипед называется прямоугольным.

Определение 40. Если все грани параллелепипеда – квадраты, то он называется кубом.

8.7 Векторы в пространстве

Определение 41. Векторы $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{u}$ называются коллинеарными, если $\exists\,\lambda:\ \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{u}$.

Теорема 8.11 (Признак копланарности векторов)**.** Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ называются копланарными, если $\exists\,\alpha,\,\beta:\ \overrightarrow{c} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$.

Определение 42. Набор $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ векторов линейно независим, если уравнение $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = 0$ имеет только тривиальное решение, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Определение 43. Базисом в $\mathbb{R}^n$ называется набор из n линейно независимых векторов.

Определение 44. Коэффициенты α, β и γ в разложении $\overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b} + \gamma \cdot \overrightarrow{c}$ называют координатами вектора $\overrightarrow{v}$ в базисе $\{\overrightarrow{a};\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\}$.

Теорема 8.12. Точка M принадлежит плоскости (ABC) тогда и только тогда, когда:

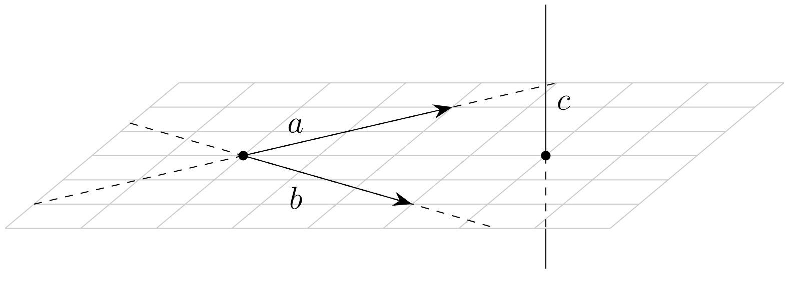
$$\forall\, O \notin (ABC):\ \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} \Longleftrightarrow x + y + z = 1$$

8.8 Перпендикулярность в пространстве

Определение 45. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема 8.13 (Признак перпендикулярности прямой и плоскости)**.** Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Доказательство.



Пусть $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{v_b}$ и $\overrightarrow{v_c}$ – направляющие векторы прямых a, b и c соответственно, тогда $\forall\, l \in \alpha:\ \overrightarrow{v_l}$ – направляющий $\overrightarrow{v_l} = x\overrightarrow{v_a} + y\overrightarrow{v_b}$, так как $a \cap b \neq \varnothing$. Тогда $\overrightarrow{v_c} \cdot \overrightarrow{v_l} = \overrightarrow{v_c} \cdot (x\overrightarrow{v_a} + y\overrightarrow{v_b}) = 0 \Longrightarrow l \perp c$. ■

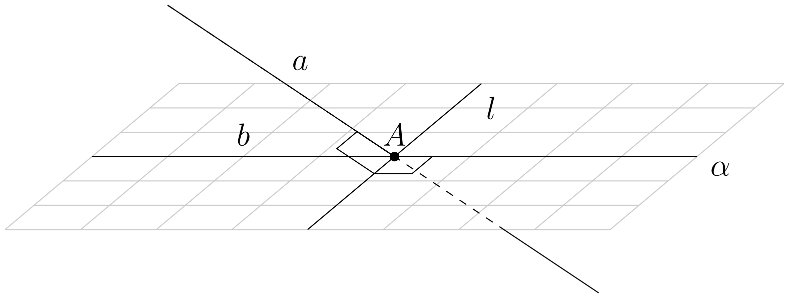
Теорема 8.14. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой плоскости, то и вторая перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 8.15. Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Определение 46. Параллельное проектирование, при котором направление проектирования перпендикулярно плоскости проектирования, называют ортогональным проектированием.

Теорема 8.16 (О трёх перпендикулярах)**.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда перпендикулярна проекции этой наклонной на эту плоскость.

Доказательство.



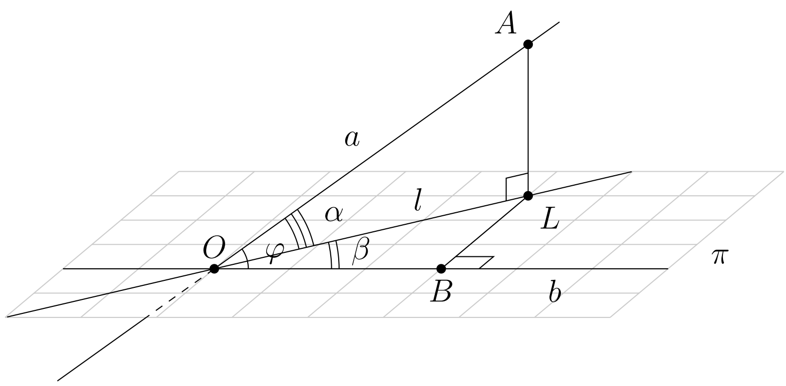
Пусть a, b и l – это наклонная, её проекция и прямая, лежащая в плоскости α соответственно, также пусть $a \cap \alpha = A$. По лемме 8.2 существует плоскость β, содержащая a и b. Тогда $\alpha \cap \beta = b$, причем должна существовать такая $d \subset \beta$, что она проходит через a и b и перпендикулярна b, а значит перпендикулярна α. Отсюда она также перпендикулярна l по признаку перпендикулярности, откуда $l \perp b$ по определению. ∎

Определение 47. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на данную плоскость.

Теорема 8.17. Угол между наклонной к плоскости и её проекцией на эту плоскость есть наименьший из углов между наклонной и каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема 8.18. Пусть прямая a образует с плоскостью π угол α. Прямая $b \subset \pi$ образует с прямой a угол φ, а с её проекцией на плоскость π – угол β. Тогда $\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

Доказательство.



Пусть A – произвольная точка на прямой a, O – точка пересечения прямой a с π, L – основание перпендикуляра из A на π, а B – основание перпендикуляра из L на b. Без ограничения общности положим $OA = 1$, тогда $OL = \cos\alpha$, а $OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta$. Пусть $\delta = (ABL)$, тогда $BL \perp b$ по построению, $AL \perp b$, так как $b \subset \pi$, $AL \perp \pi \implies b \perp \delta \implies b \perp AB$. Отсюда $OB = \cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\beta$. ∎

Определение 48. Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре Φ_1, а другая – фигуре Φ_2, существует наименьшее, то его называют между фигурами Φ_1 и Φ_2.

Теорема 8.19. Расстоянием от точки до плоскости является расстояние от данной точки до её проекции на данную плоскость.

Определение 49. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на данных прямых, перпендикулярный к ним.

Теорема 8.20. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует и единственен.

Теорема 8.21. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки пересечения одной из этих прямых с перпендикулярной ей плоскостью до проекции другой прямой на эту плоскость.

8.9 Двугранные углы

Определение 50. Две полуплоскости с общей ограничивающей их прямой разбивают пространство на два двугранных угла. Полуплоскости называются гранями этого угла, а их общая прямая – его ребром.

Определение 51. Линейным углом двугранного угла называется пересечение данного двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Определение 52. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Теорема 8.22. Величина двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла.

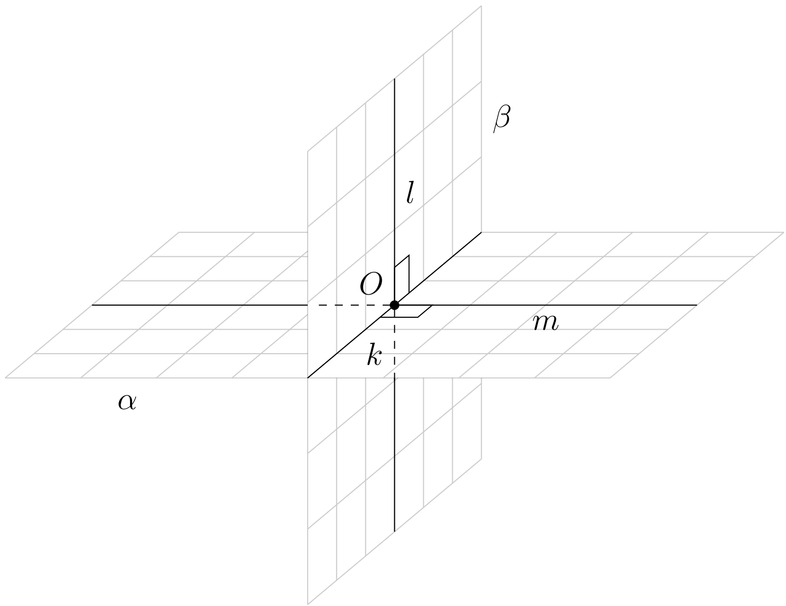
Определение 53. Полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, делящая его на два равных по величине двугранных угла называется биссектором данного угла.

Определение 54. Углом между плоскостями называется наименьший из образованных их пересечением двугранных углов. Угол между параллельными плоскостями полагается равным нулю.

Определение 55. Плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

Теорема 8.23 (Признак перпендикулярности плоскостей)**.** Если плоскость содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то данные плоскости перпендикулярны.

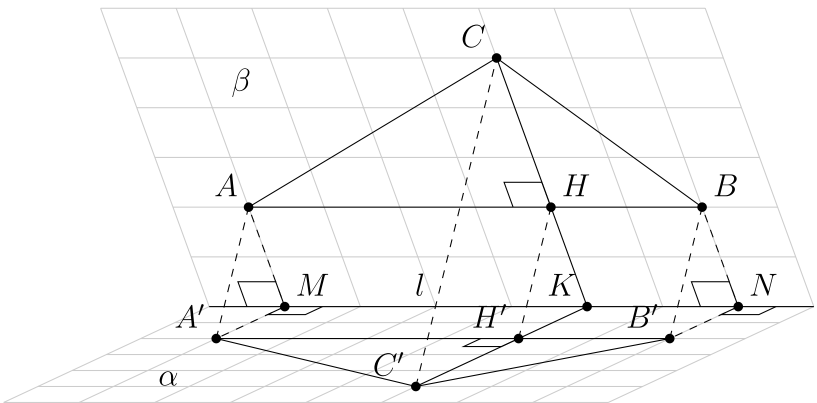
Доказательство.



Пусть $l \perp \alpha$, тогда $\forall m \subset \alpha:\ l \perp m$. Пусть $\alpha \cap \beta = k$. Пусть также $m \perp k;\ m \cap k = O$. Тогда $\angle(m;\, l)$ – линейный угол одного из двугранных углов между α и β. $m \perp k$; $l \perp k$; $m \cap l = O \in k$, значит $\angle(m;\, l) = 90°$. ■

Теорема 8.24 (Площадь ортогональной проекции многоугольника)**.** Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади данного многоугольника и косинуса угла между плоскостью проецирования и плоскостью многоугольника.

Доказательство.



Пусть $\triangle ABC \subset \beta$; $l = \alpha \cap \beta$; $AB \parallel l$. Обозначим H основание высоты CH треугольника ABC, M – проекция A на l, N – проекция B на l, а A', B', C', H' – проекции A, B, C, H на α соответственно. Тогда $MABN$ – прямоугольник, значит по теореме о трёх перпендикулярах $MA' \perp l$; $NB' \perp l$, то есть $MA'B'N$ – прямоугольник, а значит $AB = MN = A'B'$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$; $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B' \cdot C'H' = \frac{1}{2}AB \cdot C'H'$. Пусть K – проекция C на l, тогда $H' \in C'K$. Пусть $\angle CKC' = \theta$, значит $KC' = KC \cdot \cos\theta$; $KH' = KH \cdot \cos\theta \Longrightarrow C'H' = CH \cdot \cos\theta$. То есть $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}AB \cdot C'H' = S_{ABC} \cdot \cos\theta$.

Теорема доказана для треугольника, одна из сторон которого параллельна ребру двугранного угла. Чтобы обобщить доказательство до произвольного треугольника, достаточно заметить, что мы можем провести прямую, параллельную ребру двугранного угла, через одну из вершин этого треугольника, разбив его на два треугольника, удовлетворяющих нашему условию. Для произвольного многоугольника достаточно сказать, что его можно разбить на треугольники, а значит теорема доказана. ■

8.10 Многогранные углы

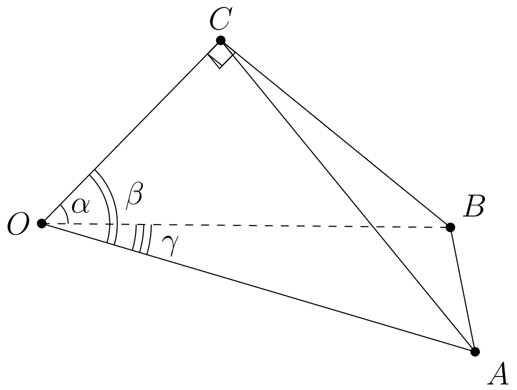
Определение 56. Пусть $\Phi = A_1A_2\ldots A_n$ — n-угольник; $n \geq 3$; точка $S \notin (A_1A_2A_3)$, тогда часть пространства, ограниченная гранями SA_1A_2, $SA_2A_3, \ldots, SA_nA_1$ называется многогранным углом.

Определение 57. Пусть $\Phi = A_1A_2\ldots A_n$ — n-угольник; $n \geq 3$; точка $S \notin (A_1A_2A_3)$, тогда многогранным углом называется множество лучей $SX\,\forall\, X \in \Phi$.

Теорема 8.25 (Первая теорема косинусов)**.**

$$\cos\angle C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Доказательство.



Пусть A и B – такие точки на рёбрах угла, что $AC \perp OC$ и $BC \perp OC$. Тогда $\angle BCA$ – линейный угол $\angle C$. Из $\triangle OCA$ и $\triangle OCB$:

$$OA = \frac{OC}{\cos\beta};\ OB = \frac{OC}{\cos\alpha} \Longrightarrow AC = OC\cdot\operatorname{tg}\beta;\ BC = OC\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

По теореме косинусов в $\triangle OBA$ и $\triangle ABC$:

$$AB^2 = OC^2\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\right) = OC^2\cdot\left(\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\angle C\right)$$

Тогда если выразить $\cos\angle C$ получим:

$$\cos\angle C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

■

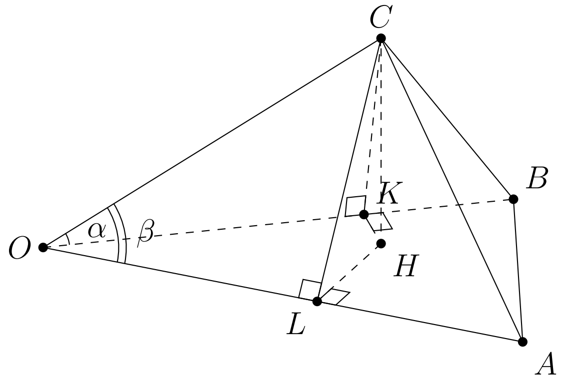
Теорема 8.26 (Вторая теорема косинусов)**.**

$$\cos\angle C = -\cos\angle A\cdot\cos\angle B + \sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\cos\gamma$$

Теорема 8.27 (Теорема синусов)**.**

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle B} = \frac{\sin\gamma}{\sin\angle C}$$

Доказательство.



Пусть H – проекция C на (ABC), K – проекция C на OB и L – проекция C на OA соответственно. По теореме о трёх перпендикулярах $HK \perp OB$ и $HL \perp OA$. Тогда из $\triangle OCK$ и $\triangle CKH$: $CH = OC \cdot \sin\alpha \cdot \sin\angle B$. Аналогично из $\triangle OCL$ и $\triangle CLH$: $CH = OC \cdot \sin\beta \cdot \sin\angle A$. То есть:

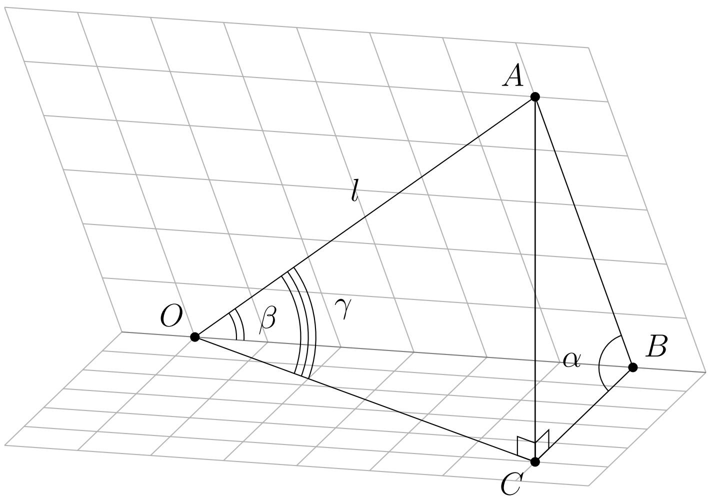
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle B}$$

■

Теорема 8.28 (Теорема о трёх синусах)**.** Пусть прямая l содержится в одной из граней двугранного угла. Также пусть α – плоский угол данного двугранного угла, β – угол между прямой и ребром двугранного угла, а γ – угол между l и её проекцией на вторую грань угла. Тогда:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказательство.



Пусть l пересекает ребро двугранного угла в точке O. Возьмём произвольную точку A на этой прямой. Пусть C – основание перпендикуляра из A на вторую грань двугранного угла, а B – проекция A на ребро двугранного угла. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $CB \perp OB$, а значит $\angle ABC = \alpha$. Тогда:

$$\sin\gamma = \frac{AC}{OA} = \frac{AB \cdot \sin\alpha}{OA} = \frac{OA \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha}{OA} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

■

Теорема 8.29. Если трёхгранный угол одной треугольной пирамиды равен трёхгранному углу другой пирамиды, объёмы этих пирамид относятся как произведение рёбер, образующих трёхгранные углы:

$$\frac{V_{DABC}}{V_{D_1A_1B_1C_1}} = \frac{DA \cdot DB \cdot DC}{D_1A_1 \cdot D_1B_1 \cdot D_1C_1}$$

Доказательство. Пусть в треугольных пирамидах равны трёхгранные углы при вершинах D и D_1. Опустим перпендикуляры BM и B_1M_1 на противоположные грани. Тогда DM и D_1M_1 – проекции BD и B_1D_1 на эти грани. $\angle(DB;\,(DAC)) = \angle(D_1B_1;\,(D_1A_1C_1))$. Тогда:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot\sin\varphi\cdot MB,\text{ где } MB = DB\cdot\sin\alpha,\ \varphi = \angle ADC,\ \alpha = \angle ADM$$

Отсюда для $DABC$ и аналогично для $D_1A_1B_1C_1$:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot\sin\varphi\cdot DB\cdot\sin\alpha;\ V_{D_1A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot A_1D_1\cdot D_1C_1\cdot\sin\varphi\cdot D_1B_1\cdot\sin\alpha$$

Следовательно,

$$\frac{V_{DABC}}{V_{D_1A_1B_1C_1}} = \frac{DA\cdot DB\cdot DC}{D_1A_1\cdot D_1B_1\cdot D_1C_1}$$

■

8.11 Тела вращения

Определение 58. Фигура называется фигурой вращения, если в пространстве существует такая ось, что при любом повороте вокруг этой оси фигура переходит в себя.

Определение 59. Сфера суть ГМТ пространства, равноудалённых от данной точки, называемой центром.

Определение 60. Шар суть ГМТ пространства, удалённых не более чем на фиксированное расстояние от данной точки, называемой центром.

Определение 61. Плоскость называется касательной к сфере (шару), если она имеет с ней (с ним) ровно одну общую точку.

Утверждение 8.30 (Объём тела вращения)**.** Пусть $f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция, определённая на $[a;\,b]$, а тело T получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b\,y = 0$. Тогда объём тела T вычисляется по формуле:

$$V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Утверждение 8.31 (Объём шара)**.** Пусть R – радиус шара, тогда объём шара равен:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Доказательство.

$$V = 2\int_0^R \pi\left(R^2-(R-r)^2\right)\mathrm{d}r = 4\pi r\int_0^R \mathrm{d}r - 2\pi\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi R\cdot\frac{R^2}{2} - 2\pi\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

■

Определение 62. Пусть в одной плоскости даны прямая l и круг S, не имеющие общих точек, тогда тело, полученное вращением плоскости относительно l называется тором.

Утверждение 8.32 (Объём тора)**.** Пусть R – радиус круга, образованного осевым сечением тора, d – расстояние от оси тора до центра данного круга. Тогда объём тора равен:

$$V = 2\pi^2 dR^2$$

Доказательство. Уравнение окружности имеет вид $(x-d)^2+y^2=R^2$, откуда $x=d\pm\sqrt{R^2-y^2}$. Пусть $x_1=d-\sqrt{R^2-y^2}$, $x_2=d+\sqrt{R^2-y^2}$. Тогда:

$$V=\int_{-R}^{R}(\pi x_2^2-\pi x_1^2)\,\mathrm{d}y=\pi\int_{-R}^{R}2d\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\cdot\mathrm{d}y=4\pi d\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\cdot\mathrm{d}y=2\pi^2dR^2$$

■

Определение 63. Пусть в пространстве даны плоскость α, содержащаяся в ней кривая γ и прямая l, пересекающая данную плоскость. Тогда множество прямых, параллельных l и пересекающих γ, называется цилиндрической поверхностью.

Определение 64. Цилиндром называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями.

Определение 65. Цилиндр называется прямым, если образующая его цилиндрическая плоскость перпендикулярная его основанию.

Определение 66. Цилиндр называется круговым, если его основания являются кругами.

Определение 67. Пусть в пространстве даны точка S, плоскость α и лежащая в ней кривая γ. Множество точек пространства называется конической поверхностью, если они принадлежат прямым, проходящим через S и пересекающим γ. Точка S называется её вершиной, γ – её направляющей, а прямые, проходящие через вершину – образующими.

Определение 68. Конусом называется тело, ограниченное замкнутой конической поверхностью и плоскостью, пересекающей все образующие с одной стороны от S.

Определение 69. Конус называется круговым, если его основание является кругом.

Определение 70. Конус называется прямым, если его вершина ортогонально проецируется в центр основания.

Определение 71. Часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усечённым конусом.

9 Аналитическая геометрия

Определение 72. Уравнение плоскости в пространстве имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Утверждение 9.1. Уравнение плоскости с вектором нормали $\vec{n}(a;b;c)$, проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Доказательство. Для любой точки M в искомой плоскости вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Тогда $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0$, откуда и следует уравнение. ■

Определение 73. Каноническое уравнение такой прямой l в пространстве, что $M\,(x_0;y_0;z_0)\in l$ и $\vec{v}\,(\alpha;\beta;\gamma)$ – её направляющий вектор, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

Определение 74. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ называется правой, если из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки.

9.1 Произведения векторов

Определение 75. Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, что:

1. Его длина равна площади параллелограмма, натянутого на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Он перпендикулярен одновременно $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ является правой.

Утверждение 9.2 (Свойства векторного произведения)**.**

1. Антикоммутативность.
2. Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.
3. Линейность по обоим сомножителям.
4. (Тождество Лагранжа) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

Определение 76. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

Утверждение 9.3 (Свойства векторного произведения)**.**

1. Смешанное произведения равно нулю тогда и только тогда, когда его сомножители компланарны.
2. Смешанное произведение равно ориентированному объёму параллелепипеда, натянутого на векторы-сомножители.
3. Линейность по каждому из сомножителей.
4. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\left(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right) = \left(\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}\right) = \left(\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}\right) = -\left(\vec{b}; \vec{a}; \vec{c}\right) = -\left(\vec{c}; \vec{b}; \vec{a}\right) = -\left(\vec{a}; \vec{c}; \vec{b}\right)$$

Теорема 9.4. Пусть $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}\}$ – правый ортонормированный базис. Если в этом базисе известны $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$, то:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) \times (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}) = \\ &= \vec{e_1} \times \vec{e_2} \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) + \vec{e_2} \times \vec{e_3} \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{e_1} \times \vec{e_3} \cdot (a_1b_3 - a_3b_1) = \\ &= \vec{e_1} \times \vec{e_2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \vec{e_2} \times \vec{e_3} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e_1} \times \vec{e_3} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e_3} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \vec{e_1} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e_2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

■

Теорема 9.5. Пусть $\{\overrightarrow{g_1}; \overrightarrow{g_2}; \overrightarrow{g_3}\}$ – произвольный базис. Если в этом базисе известны $\overrightarrow{a}\,(a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ и $\overrightarrow{c}\,(c_1; c_2; c_3)$, то:

$$\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\overrightarrow{g_1}; \overrightarrow{g_2}; \overrightarrow{g_3})$$

Следствие 9.5.1. Векторы $\overrightarrow{a}\,(a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ и $\overrightarrow{c}\,(c_1; c_2; c_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 9.6 (Плоскость по точке и двум векторам)**.** Пусть даны точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ и $\overrightarrow{b}\,(b_1; b_2; b_3)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через M параллельно плоскости, содержащей векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Следствие 9.6.1 (Плоскость по трём точкам)**.** Пусть даны точки $M(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через эти точки, будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

9.2 Расстояния в пространстве

Теорема 9.7 (Расстояние от точки до плоскости)**.** Пусть даны плоскость α с базисом $\{\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\}$, точка $A \in \alpha$ и точка M. Тогда если $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AM}$, то:

$$\rho\,(M; \alpha) = \frac{|(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})|}{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}$$

Следствие 9.7.1 (Расстояние между скрещивающимися прямыми)**.** Пусть даны плоскость α, прямые a и b с направляющими $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ соответственно и произвольные точки $A \in a$ и $B \in b$. Тогда если $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}$, то:

$$\rho\,(a; b) = \frac{|(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})|}{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}$$

Следствие 9.7.2 (Расстояние от точки до плоскости)**.** В декартовых координатах расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $\alpha:\ Ax + By + Cz + D = 0$ равно:

$$\rho\,(M; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

9.3 Экстремальные задачи

Определение 77 (Предел функции)**.**

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение 78 (Правосторонний предел функции)**.**

$$A = \lim_{x \to x_0+} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение 79 (Левосторонний предел функции)**.**

$$A = \lim_{x \to x_0-} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение 80. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение 81. Производной функции $f(x)$ называется (если он существует) предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Утверждение 9.8 (Свойства производных)**.**

- $c' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \neq 0$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Определение 82. Точка x_0 называется критической для функции $f(x)$, если $f'(x_0)$ не существует или равна нулю.

Определение 83. Точка x_0 называется стационарной для функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.

Определение 84. Точка x_0 называется точкой экстремума для функции $f(x)$, если x_0 – точка максимума или точка минимума.

Теорема 9.9 (Лагранжа)**.** Пусть $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a; b]$. Тогда:

$$\exists\, c \in (a; b) :\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Теорема 9.10 (Ролля)**.** Пусть $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a; b]$, $f(a) = f(b)$. Тогда:

$$\exists\, c \in (a; b) :\ f'(c) = 0$$

Теорема 9.11. $x = x_0$ – вертикальная асимптота $f(x)$, если x_0 – точка разрыва и хотя бы один из односторонних пределов в x_0 существует и бесконечен.

Теорема 9.12. $y = kx + b$ – асимптота $f(x)$, если существуют и конечны пределы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

10 Объёмы

Определение 85. Призматоидом называется многогранник, все вершины которого лежат в двух параллелльных плоскостях.

Определение 86. Антипризма – полуправильный многогранник, у которого две параллельные грани, называемые основаниями, – правильные n-угольники, а остальные $2n$ граней, называемые боковыми, – правильные треугольники.

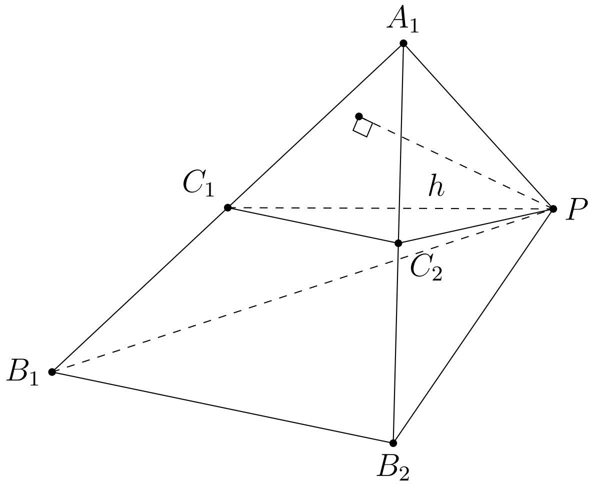
Теорема 10.1 (Формула Симпсона)**.** Пусть $S_{\text{нижн.}}$ и $S_{\text{верх.}}$ – площади оснований выпуклого призматоида; $S_{\text{сред.}}$ – площадь его серединного сечения – сечения плоскостью, параллельной плоскостям основания и проходящей на равном расстоянии от них; H – расстояние между плоскостями основания, тогда объём данного выпуклого призматоида равен:

$$V = \frac{H}{6}\left(S_{\text{нижн.}} + 4S_{\text{сред.}} + S_{\text{верх.}}\right)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный выпуклый призматоид $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_m$, а также произвольную точку P, принадлежащую $C_1C_2\ldots C_k$ – серединному сечению данного призматоида. Тогда объём призматоида равен сумме объёмов пирамид $PA_1A_2\ldots A_n$ и $PB_1B_2\ldots B_m$, а также $k-1$ пирамид с вершиной P и основаниями $A_1B_1B_2$, $A_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3, \ldots,$ $A_1B_1A_n$:

$$V_{PA_1A_2\ldots A_n} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2\ldots A_n}\frac{H}{2};\ V_{PB_1B_2\ldots B_m} = \frac{1}{3}S_{B_1B_2\ldots B_m}\frac{H}{2}$$

Рассмотрим произвольную боковую пирамиду $PA_1B_1B_2$:



$$V_{PA_1B_1B_2} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1B_2}h = \frac{4}{3}S_{A_1C_1C_2}h = \frac{4}{3}S_{C_1C_2P}\frac{H}{2}$$

Тогда объём исходного призматоида равен:

$$\frac{H}{6}\left(S_{A_1A_2\ldots A_n} + 4(S_{C_1C_2P} + S_{C_2C_3P} + \ldots + S_{C_kC_1P}) + S_{B_1B_2\ldots B_m}\right) = \frac{H}{6}\left(S_{\text{верх.}} + 4S_{\text{сред.}} + S_{\text{нижн.}}\right)$$

■

Теорема 10.2 (Принцип Кавальери)**.** Если любая плоскость, параллельная данной, пересекает два тела по фигурам равной площади, то объёмы этих тел равны.