Тестовый файл

Содержание

1 Стереометрия

1.1 Введение

Аксиома 1. В $\mathbb{R}^3$ существуют плоскости, причем для любой из них выполняются аксиомы планиметрии.

Аксиома 2 (Аксиома плоскости)**.** Через любые три неколлинеарные точки пространства проходит плоскость, при чем только одна.

Аксиома 3. Прямая, проходящая через две точки плоскости полностью лежит в данной плоскости.

Аксиома 4 (Аксиома пересечения плоскостей)**.** Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой:

$$M \in \alpha;\, M \in \beta \Longrightarrow \exists\, l:\ l \subset \alpha;\, l \subset \beta$$

Аксиома 5 (Аксиома расстояния)**.** В любой из плоскостей, проходящих через две различные точки расстояние между этими точками одно и то же:

$$A \neq B;\ \forall\, \alpha:\ A,\, B \in \alpha\ \rho_\alpha(A;\ B) = \mathrm{const}$$

Определение 1. Прямая и плоскость называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку.

Определение 2. Две плоскости называются пересекающимися, если они имеют одну общую прямую.

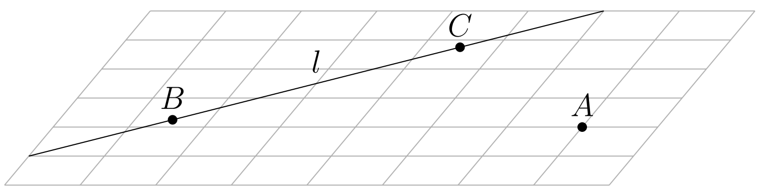
Определение 3. Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек называются параллельными.

1.2 Следствия из аксиом

Лемма 1.1. Через прямую и точку, не лежащую на ней, проходит плоскость, при том только одна:

$$\forall\, A;\ \forall\, l:\ A \notin l\ \exists!\ \alpha:\ l \subset \alpha;\ A \in \alpha$$

Доказательство.



Рассмотрим $B,\, C \in l:\ l \subset \alpha \Longrightarrow B,\, C \in \alpha$. По аксиоме плоскости $\exists!\ \alpha:\ A,\, B,\, C \in \alpha;\ l \subset \alpha$. ■

Лемма 1.2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, при том только одна:

$$a \cap b = C \Longrightarrow \exists!\ \alpha:\ a,\, b \subset \alpha$$

Лемма 1.3. Через две параллельные прямые проходит плоскость, при том только одна:

$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \alpha:\ a,\, b \subset \alpha$$

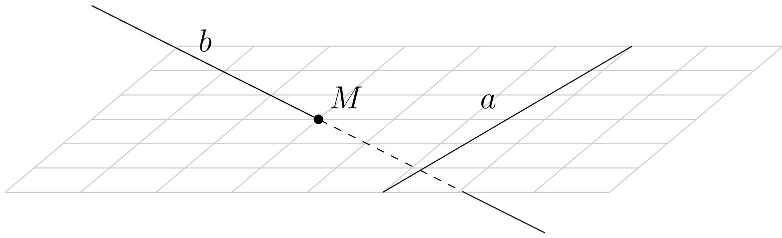
1.3 Скрещивающиеся прямые

Определение 4. Две прямые называются скрещивающимися, если у них нет общих точек и они не параллельны.

Теорема 1.4 (Признак скрещивающихся)**.** Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекают данную плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, данные прямые скрещиваются:

$$a \subset \alpha,\, b \cap \alpha = M:\ M \notin a \Longrightarrow a \dot{-} b$$

Доказательство.



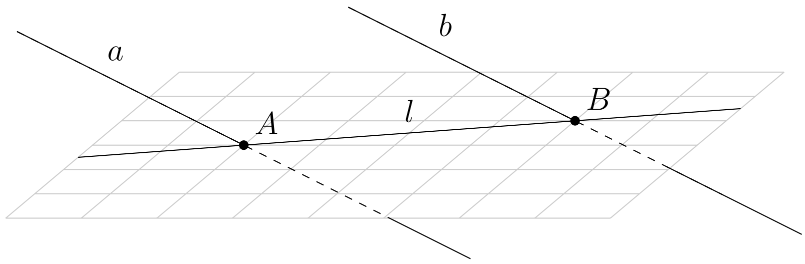
Пусть a и b не скрещиваются. Тогда $a \parallel b$ или $a \cap b \neq \varnothing$:

1. $a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta:\ a, b \subset \beta \Longrightarrow M \in \beta,$ при этом $a \subset \alpha$ (по условию);
   $a \subset \beta$ (по предложению) $\Longrightarrow \alpha \cap \beta = a,\, M \in \alpha,\, M \in \beta \Longrightarrow M \in a,$ противоречие.
2. $a \cap \beta \neq \varnothing \Longrightarrow \exists\, k:\ k \in a,\, k \in b \Longrightarrow \exists\, \beta:\ a, b \subset \beta \Longrightarrow M \in \beta,$ при этом $a \subset \alpha$ (по условию);
   $a \subset \beta$ (по предложению) $\Longrightarrow \alpha \cap \beta = a,\, M \in \alpha,\, M \in \beta \Longrightarrow M \in a,$ противоречие.

∎

Теорема 1.5. Пусть $a \parallel b$; $a \cap \alpha \neq \varnothing$, тогда $b \cap \alpha \neq \varnothing$.

Доказательство.



$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta:\ a, b \subset \beta,\, a \cap \alpha = A \Longrightarrow A \in \beta \Longrightarrow \exists\, l:\ l = \alpha \cap \beta$$

$$l \cap a = A,\, a \parallel \beta \Longrightarrow l \cap \beta = B:\ B \in b,\, B \in l \Longrightarrow b \cap \alpha = B.$$

∎

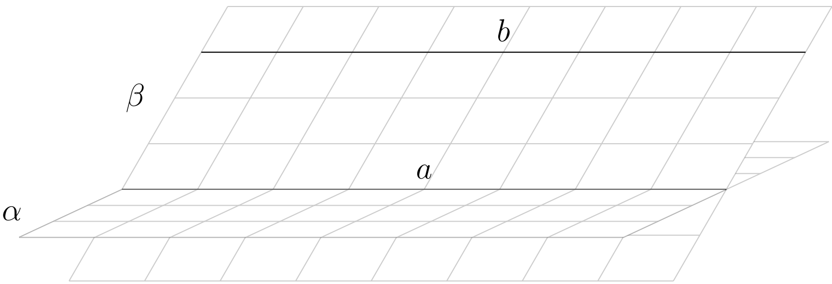
1.4 Параллельность прямой и плоскости

Определение 5. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 1.6 (Признак параллельности прямой и плоскости)**.** Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны:

$$a \subset \alpha,\, b \not\subset \alpha,\, a \parallel b \Longrightarrow \alpha \parallel b$$

Доказательство.



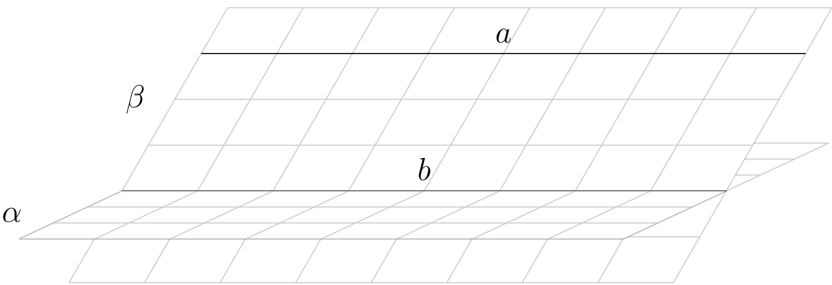
$$a \parallel b \Longrightarrow \exists!\ \beta :\ \ a,\, b \subset \beta.\ \text{Пусть}\ b \cap \alpha \neq \varnothing.\ \text{Но}\ \alpha \cap \beta = a.\ \text{Противоречие.}$$

■

Теорема 1.7 (О линии пересечения плоскостей)**.** Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой:

$$a \parallel \alpha,\ a \subset \beta,\ \alpha \cap \beta = b \Longrightarrow a \parallel b$$

Доказательство.



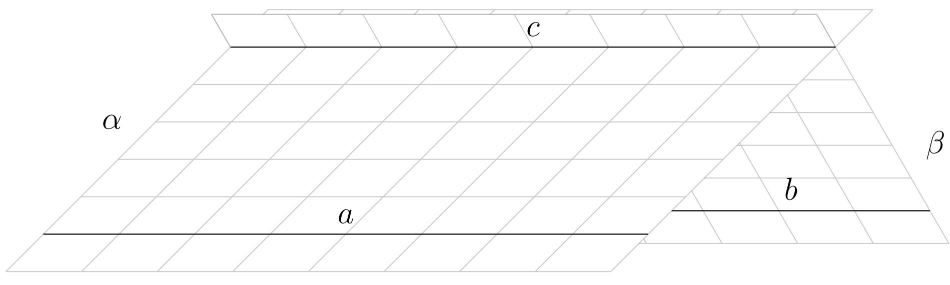
$$a \parallel \alpha \Longrightarrow a \cap b = \varnothing.\ \text{Пусть}\ a \dot{-} b,\ \text{тогда}\ a \cap \alpha \neq \varnothing,\ \text{но}\ a \parallel \alpha.\ \text{Противоречие.}$$

■

Теорема 1.8 (О крыше)**.** Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых:

$$a \parallel b,\ a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ \alpha \cap \beta = c \Longrightarrow a \parallel c,\ b \parallel c$$

Доказательство.



$a \parallel b$, $b \not\subset \alpha \Longrightarrow b \parallel \alpha \Longrightarrow b \parallel c$ (по теореме о линии пересечения плоскостей). Аналогично $c \parallel a$.

■

Следствие 1.8.1. Параллельность прямых в пространстве транзитивна.

Следствие 1.8.2. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

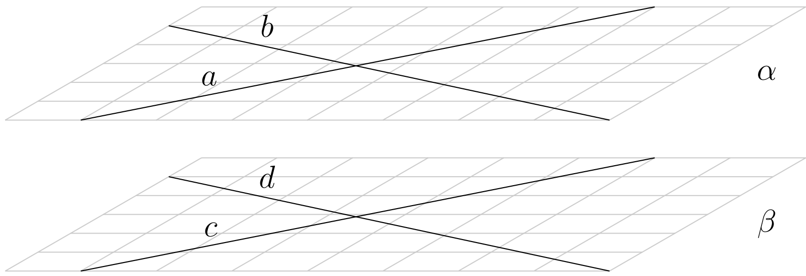
1.9 Параллельность плоскостей

Определение 6. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 1.9 (Признак параллельности плоскостей)**.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны:

$$a,\, b \subset \alpha,\; a \cap b \neq \varnothing;\;\; c,\, d \subset \beta;\;\; a \parallel c,\; b \parallel d \Longrightarrow \alpha \parallel \beta$$

Доказательство.

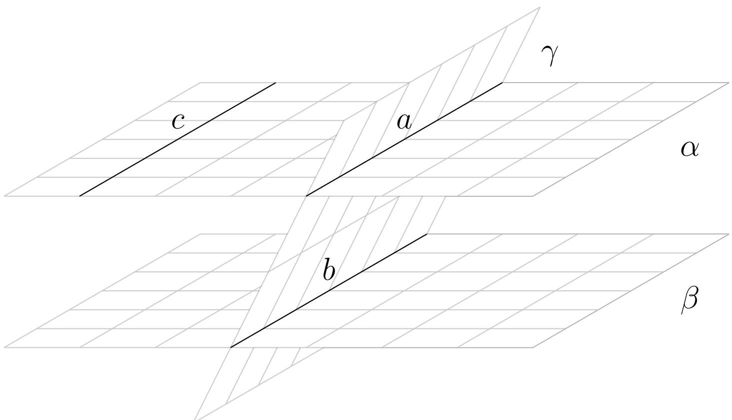


Пусть $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$. Тогда по теореме о линии пересечения плоскостей $\alpha \cap \beta = k$, $k \parallel a$ $(c \subset \beta)$; $\alpha \cap \beta = l$, $l \parallel b$ $(d \subset \beta)$. Противоречие. ■

Теорема 1.10. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны:

$$\alpha \parallel \beta,\; \gamma \cap \alpha = a,\; \gamma \cap \beta = b \Longrightarrow a \parallel b$$

Доказательство.



$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow \exists\, c \subset \alpha :\; c \parallel b$. По теореме о крыше $a \parallel c$, $b \parallel c$.

■