A4 HW theory

Фокин Алексей, 922 группа

23 октября 2021 г.

Задача 2

Будем понимать $\tilde{\Lambda}$ как $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\tilde{F}}, 0, \dots, 0\}$.

Тогда $\|X - \tilde{X}\| = \|V(\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\|$.

Далее, пусть $\Delta = \sqrt{\Lambda} - \sqrt{\tilde{\Lambda}}$, тогда $\|X - \tilde{X}\|^2 =$
$\mathrm{Tr}((X - \tilde{X})^T(X - \tilde{X})) =$
$\mathrm{Tr}((V\Delta U^T)^T(V\Delta U^T)) =$
$\mathrm{Tr}(U\Delta^T V^T V\Delta U^T) =$
$\mathrm{Tr}(\Delta^T\Delta) = \sum_{i=\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i$

Задача 3

Пусть $\mathbf{u} = \mathrm{argmax}_{\|\mathbf{u}\|=1}(X\mathbf{u})^2$, обозначим $(X\mathbf{u})^2 = \lambda_1$. Тогда $X\mathbf{u} = \sqrt{\lambda_1}\mathbf{v}$.

Сингулярное разложение X есть $X = V\sqrt{\Lambda}U^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_F}\}$, притом λ_1 есть употреблённое выше λ_1.

$X = V\sqrt{\Lambda}U^T$ равносильно $XU = V\sqrt{\Lambda}$. Следовательно, $X\mathbf{u_1} = \sqrt{\lambda_1}\mathbf{v_1}$, то есть на $\mathbf{u_1}$ достигается максимум. Притом, $\mathbf{u_1}^{\mathrm{T}}\mathbf{u_1} = 1$. Тогда этот сингулярный вектор (отвечающий наибольшему СЗ) отвечает решению поставленной задачи.

Задача 4

* Рассмотрим вектора $\mathbf{a}$ с единичной нормой.

Сумму квадратов расстояний от точек выборки до прямой $\langle\mathbf{a}\rangle$ можно выразить как
$\sum\limits_{i=1}^{l}(\mathbf{x}_{i\perp})^2 \overset{\text{Пифагор}}{=} \sum\limits_{i=1}^{l}(\mathbf{x}_i^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)^2)$,
тогда
$\sum\limits_{i=1}^{l}(\mathbf{x}_{i\perp})^2 \to min \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{l}(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)^2 = (X\mathbf{a})^{\mathrm{T}}(X\mathbf{a}) \equiv (X\mathbf{a})^2 \to max$,

что, согласно предыдущей задаче, реализуется на вполне конкретном сингулярном векторе.

Задача 5

Назовём вещи своими именами:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ & \dots & \\ x_l & y_l & z_l \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X^{\mathrm{T}}X \equiv \hat{\mathrm{Cov}}X = \begin{pmatrix} \sum\limits_i x_i^2 & \sum\limits_{i,j} x_i y_j & \sum\limits_{i,j} x_i z_j \\ \sum\limits_{i,j} x_i y_j & \sum\limits_i y_i^2 & \sum\limits_{i,j} y_i z_j \\ \sum\limits_{i,j} x_i z_j & \sum\limits_{i,j} y_i z_j & \sum\limits_i z_i^2 \end{pmatrix}$$

В то же время, момент инерции $\hat{I}$ есть

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \sum\limits_i y_i^2 + z_i^2 & -\sum\limits_{i,j} x_i y_j & -\sum\limits_{i,j} x_i z_j \\ -\sum\limits_{i,j} x_i y_j & \sum\limits_i x_i^2 + z_i^2 & -\sum\limits_{i,j} y_i z_j \\ -\sum\limits_{i,j} x_i z_j & -\sum\limits_{i,j} y_i z_j & \sum\limits_i x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что декорреляция X эквивалентна диагонализации $\hat{I}$ и являет собой нахождение координат, в которых $\sum\limits_{i,j} x_i y_j = 0$, тогда и нахождение сингулярных векторов – суть нахождение главных осей.