

Graphes et Algorithmes – Partie I

Introduction et Applications

FISA Informatique 1^{ère} année

2020 - 2021

Introduction et applications – Plan

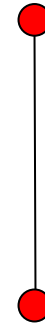
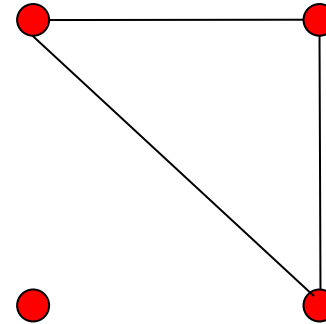
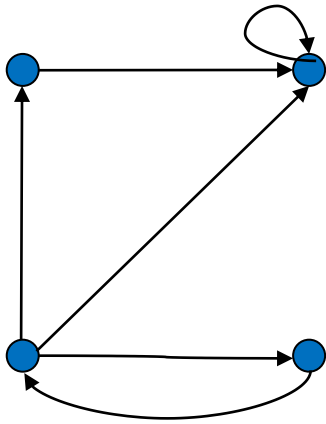
- Notion de graphe et de réseau
- Historique
- Domaines d'applications
- Exemples de modélisations

Théorie des graphes ?

- Discipline à la frontière entre mathématique et informatique qui étudie les graphes
- Connexion avec plusieurs domaines
 - Recherche opérationnelle
 - Intelligence artificielle
 - Automatique
 - Linguistique
 - Sciences sociales
 - etc.

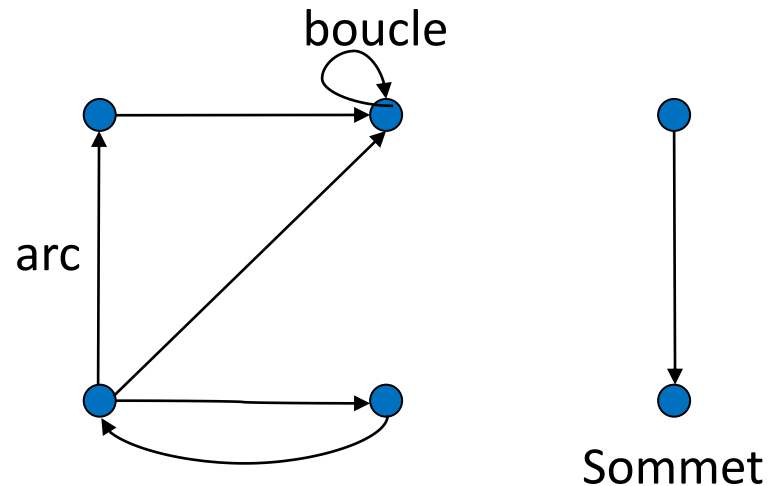
Graphe ?

- De manière informelle, un graphe est un ensemble de points reliés par un ensemble de lignes ou de flèches

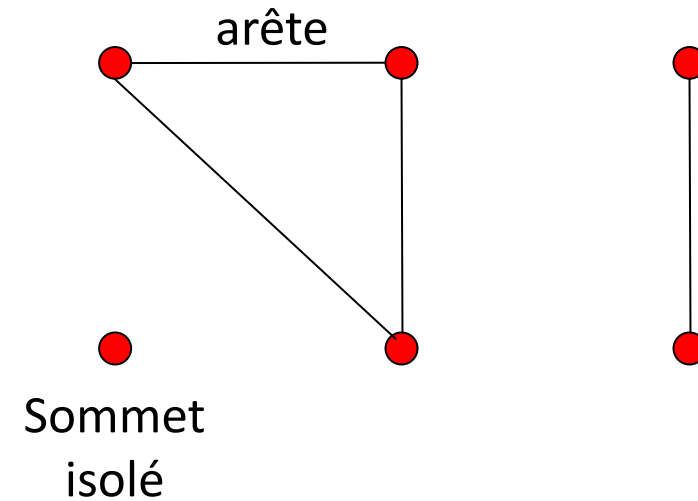


Graphe ?

- De manière informelle, un graphe est un ensemble de points reliés par un ensemble de lignes ou de flèches



Graphe orienté



Graphe non orienté

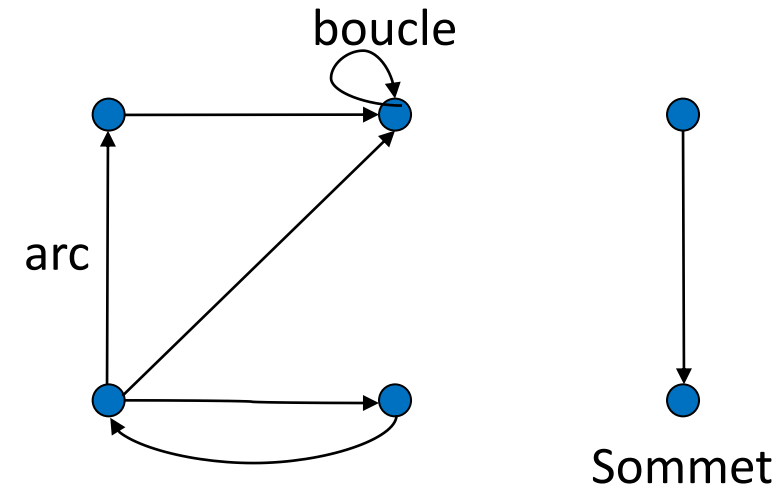
Graphe : orienté ou non

■ Graphe orienté

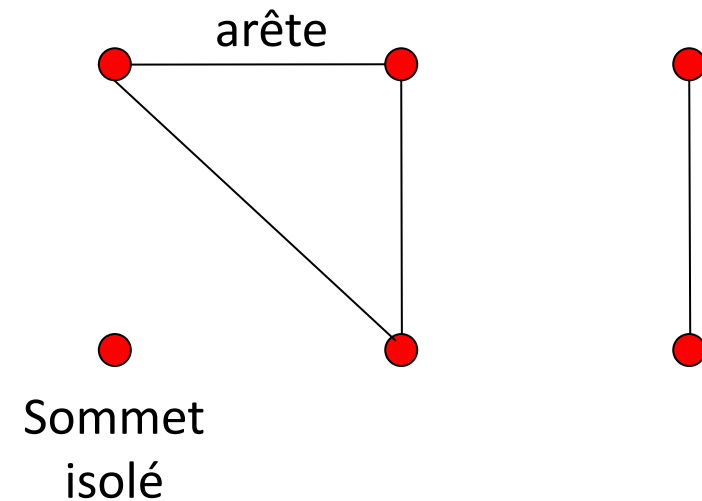
- 1 ensemble de sommets noté **S**
- 1 ensemble d'**arcs** noté **A**

■ Graphe non orienté

- 1 ensemble de sommets noté **S**
- 1 ensemble d'**arêtes** noté **A**



Graphe orienté



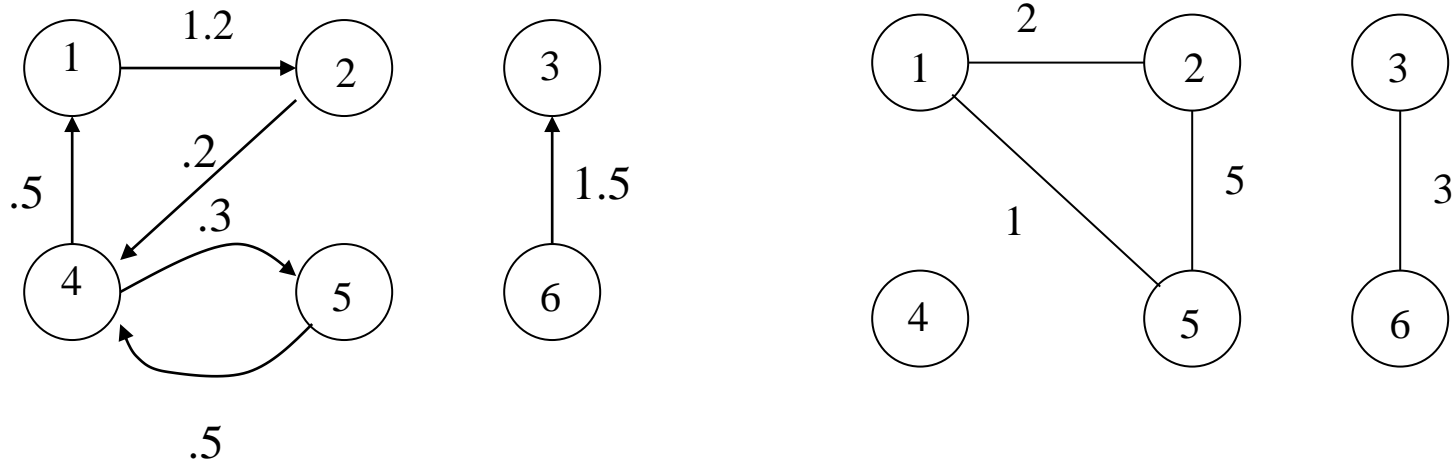
Graphe non orienté

Réseau ?

- Réseau = graphe + un ensemble d'informations
- Un réseau est un graphe **pondéré**

Réseau ?

- Réseau = graphe + un ensemble d'informations
- Un réseau est un graphe **pondéré**
 - Chaque élément $e \in S \cup A$ a des **attributs** dans E



- Dans ce module on traite **en priorité** des graphes

Bref historique

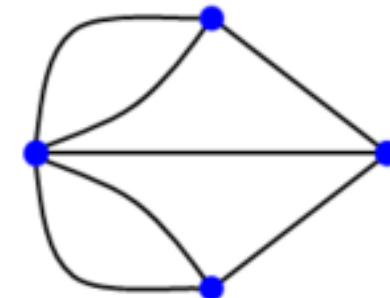
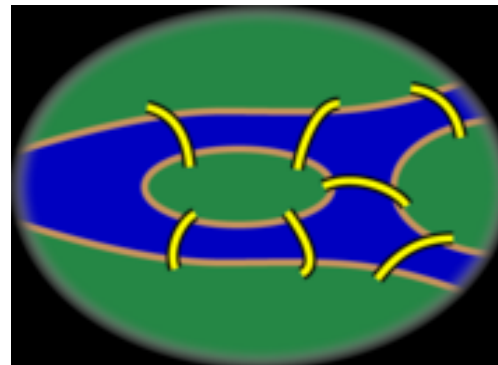
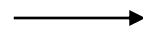
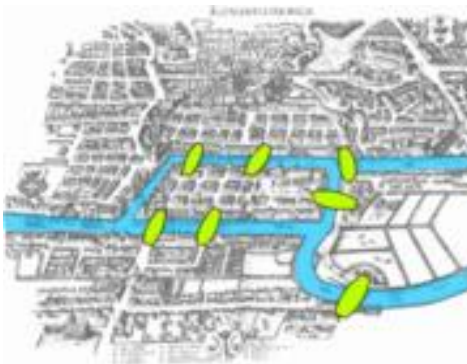
- 1736, Euler : les ponts de Königsberg
... récréations mathématiques ...
... chimie, électricité ...
- 1852, De Morgan (Guthrie) : quatre couleurs
- 1946, Kuhn, Ford et Fulkerson, Roy, etc.
... recherche opérationnelle ...
- Depuis 1960, applications... (informatique)

Théorie des graphes – historique

Article de Leonhard Euler sur les
“7 Ponts de Königsberg” , 1736



1707 - 1783



Théorie des graphes – historique

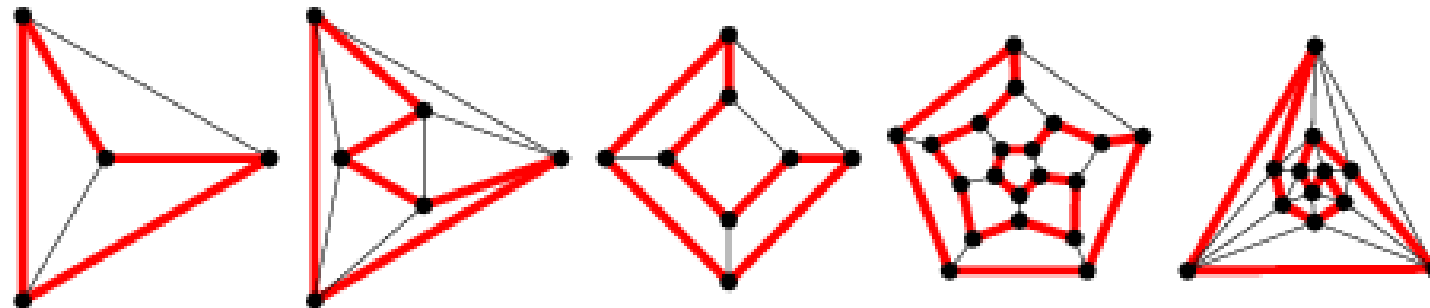
Cycles dans un Polyhèdre



Thomas P. Kirkman
1806 – 1895



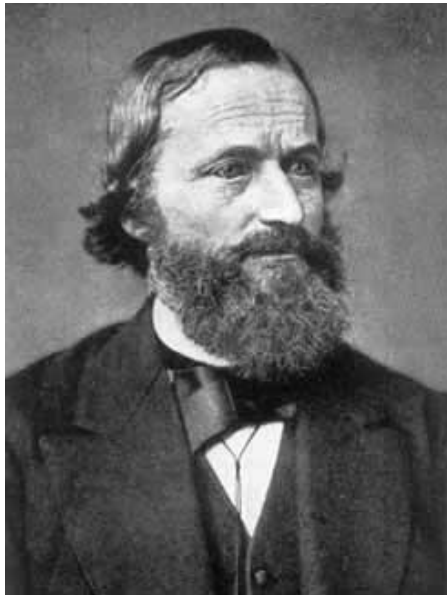
William R. Hamilton
1805 - 1865



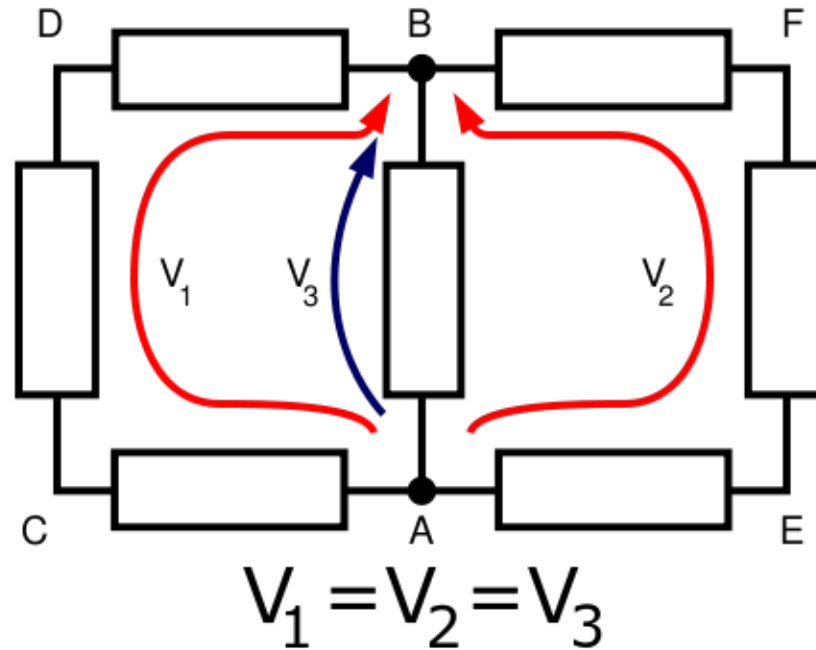
Cycles Hamiltoniens dans les graphes platoniques

Théorie des graphes – historique

Arbres dans les Circuits Electriques

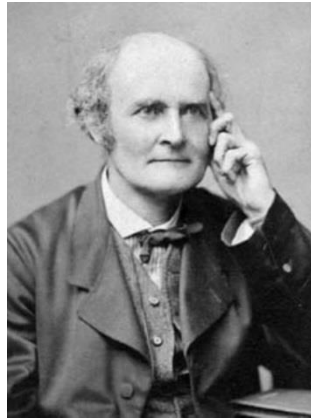


Gustav Kirchhoff
1824 – 1887

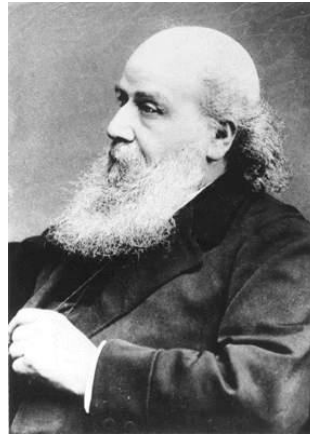


Théorie des graphes – historique

Enumération des Isomères Chimiques



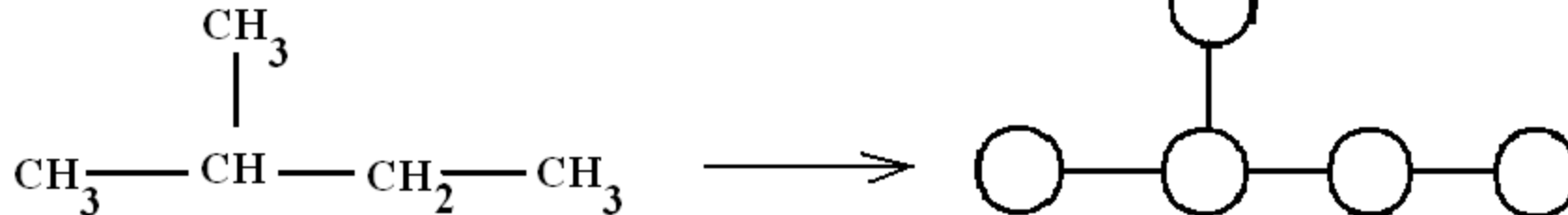
Arthur Cayley
1821 – 1895



James J. Sylvester
1814 – 1897



George Polya
1887 – 1985



Théorie des graphes – historique

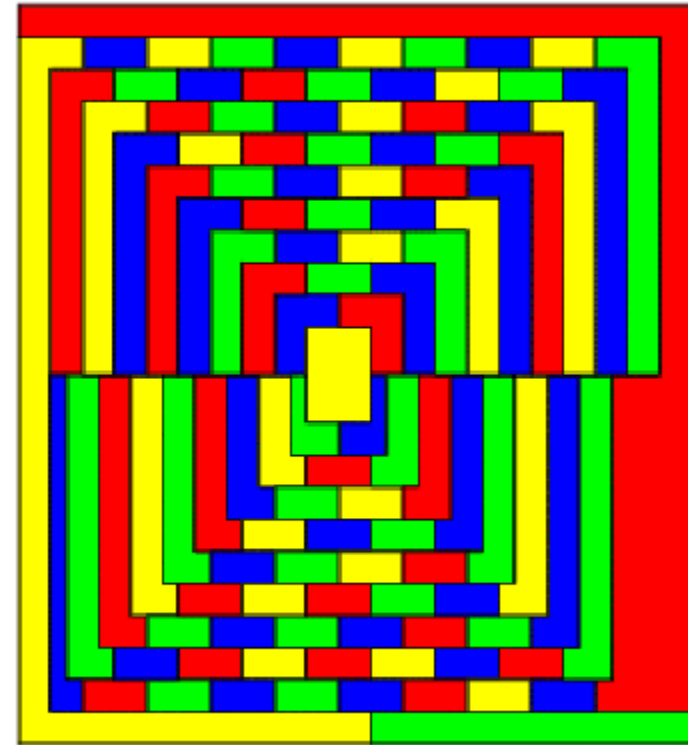
4 Couleurs d'une Carte



Francis Guthrie
1831 - 1899



Auguste DeMorgan
1806 – 1871



Quelques domaines d'applications

- Chimie
- Informatique (BDs, compilation, etc.)
- Bio-informatique
- Réseaux de communications
- Sociologie / Web (graphes de liens, moteur de recherche, etc.)
- Imagerie numérique
- Géographie, architecture, linguistique
- etc.

Illustration : réseaux de transport

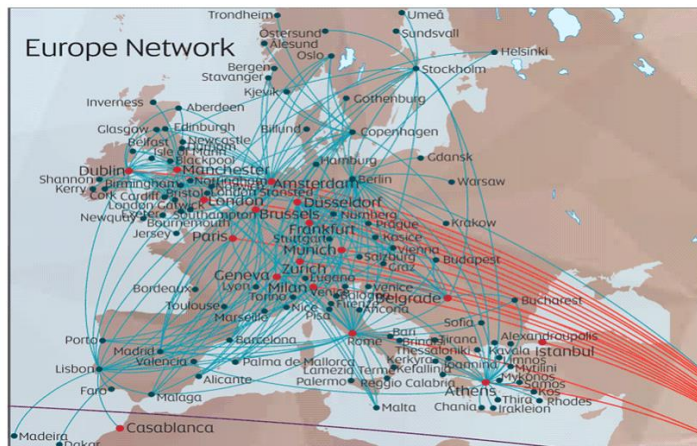
Méto



Routier



Aérien



Vélo

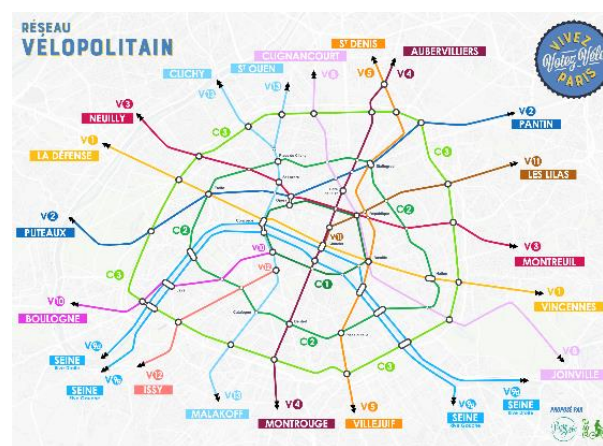
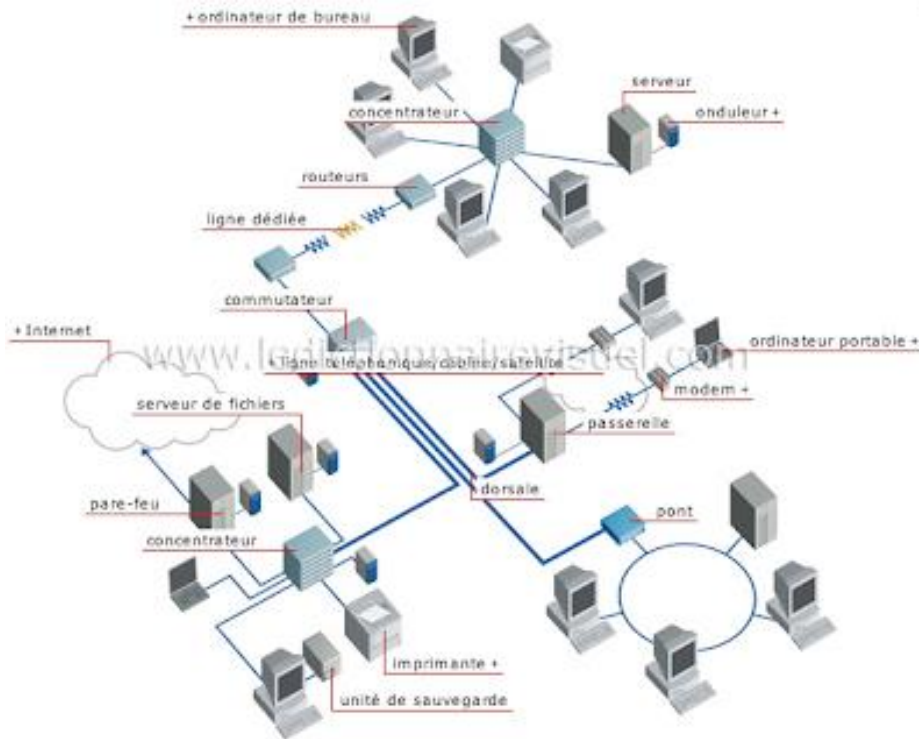


Illustration : réseaux informatique

Réseau d'entreprise

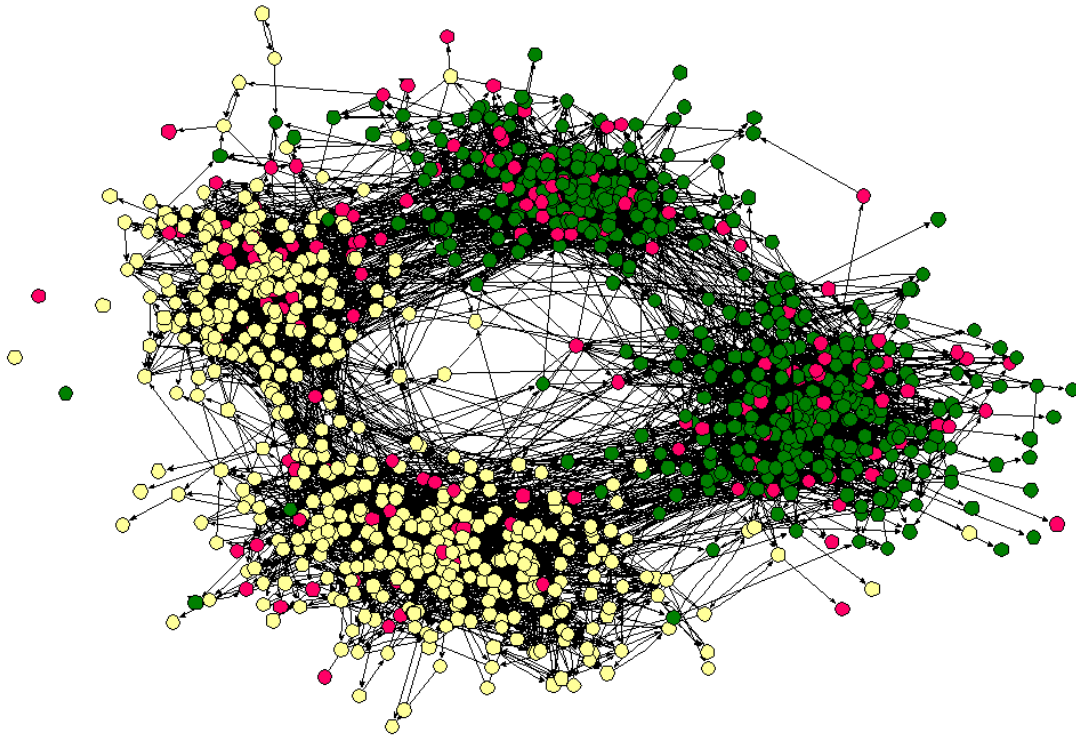


Internet



Illustration : graphes de liens (I)

Réseau d'amitié



Réseau de collaboration
(scientifique)

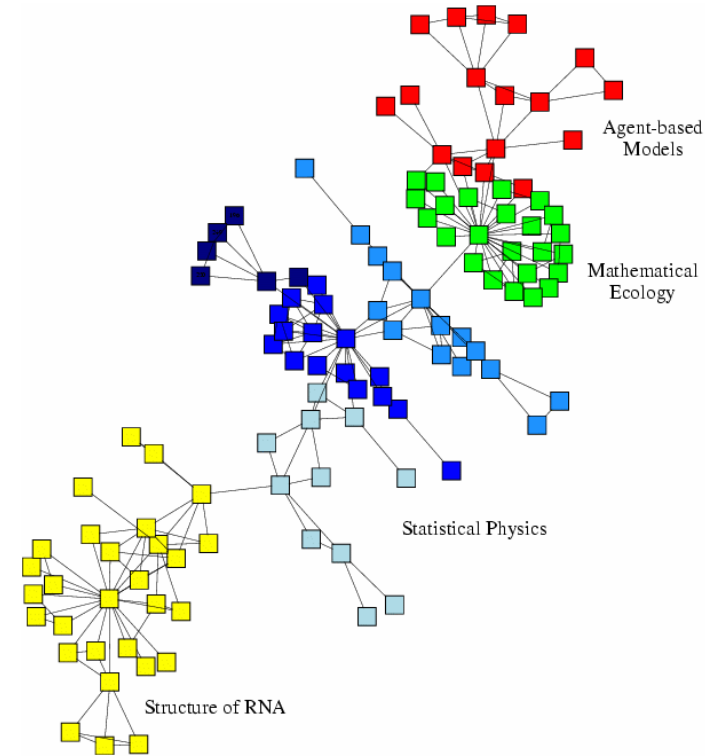
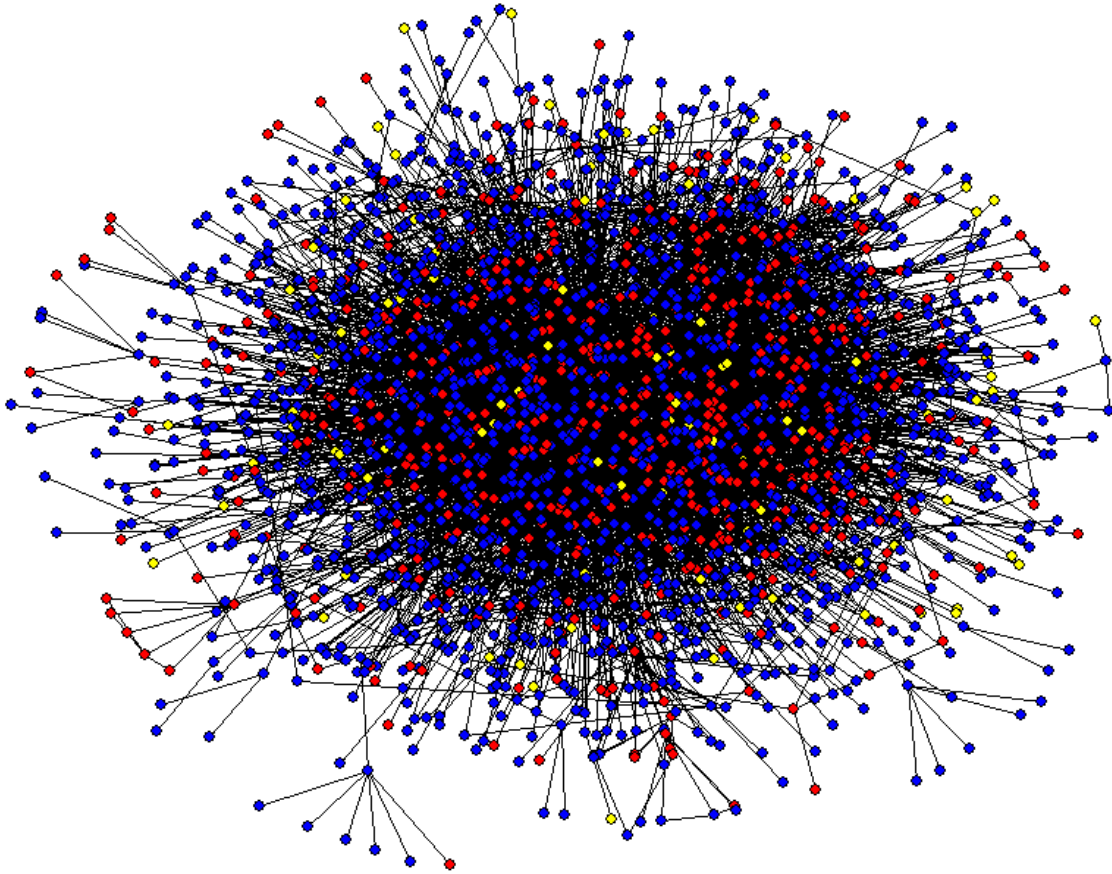
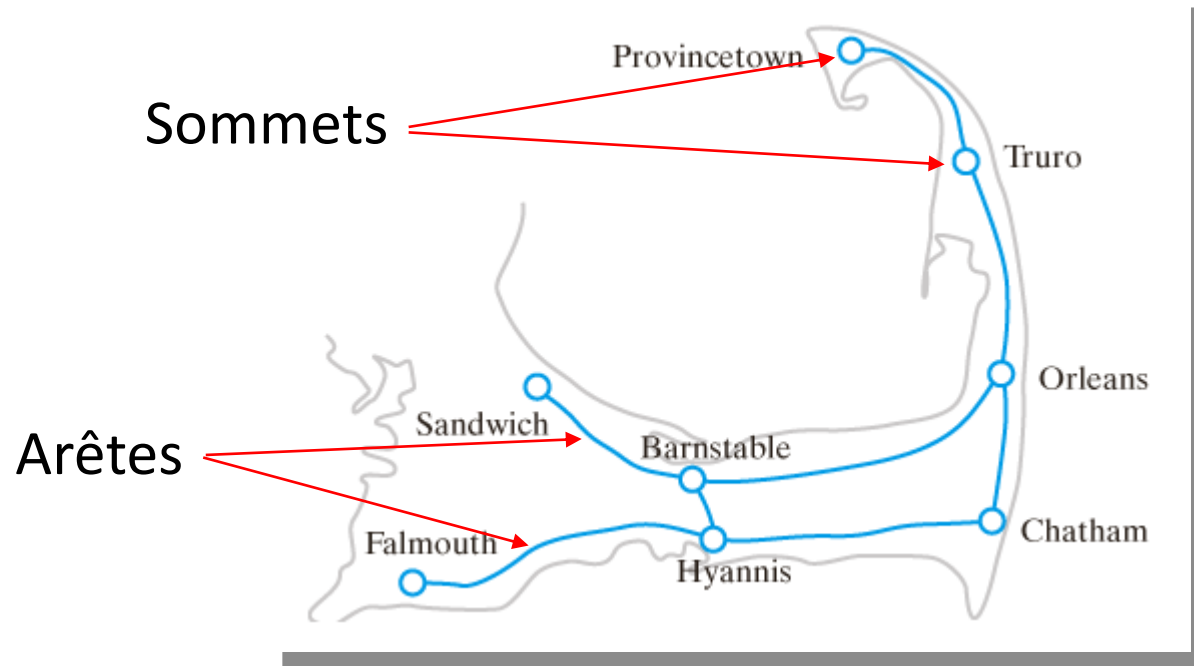


Illustration : graphes de liens (II)

Réseau d'interaction entre protéines

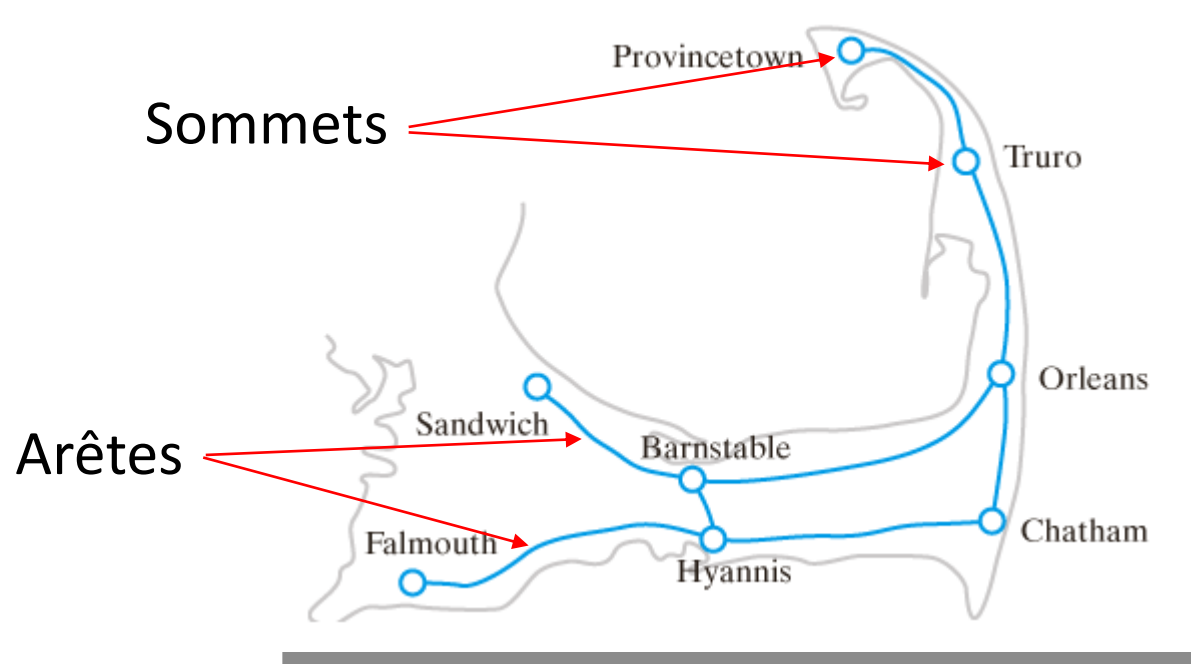


Exemple de la carte routière

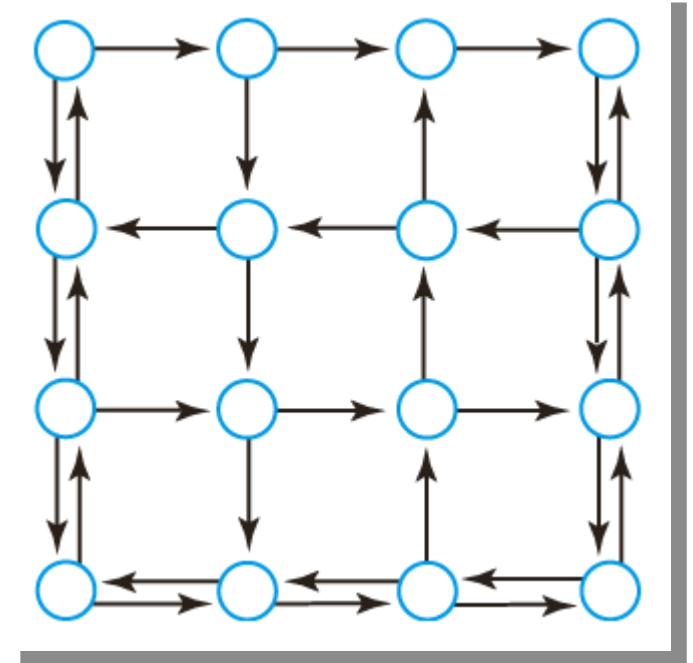


Une portion de carte routière

Exemple de la carte routière

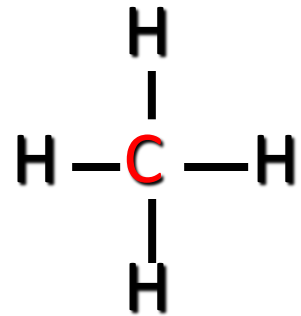


Une portion de carte routière

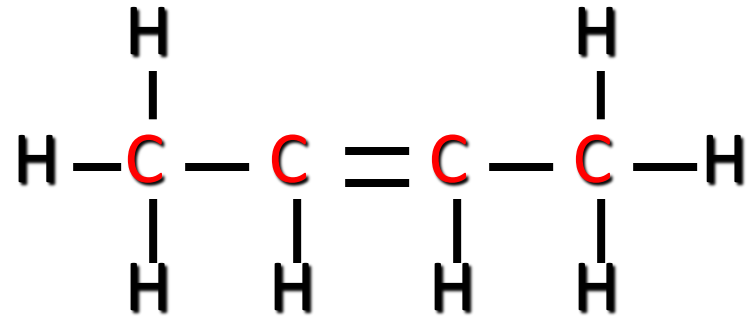


Si on zoome

Exemple en chimie : modélisation de molécules

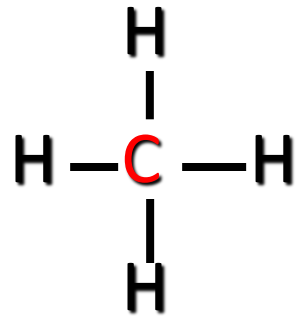


méthane CH_4

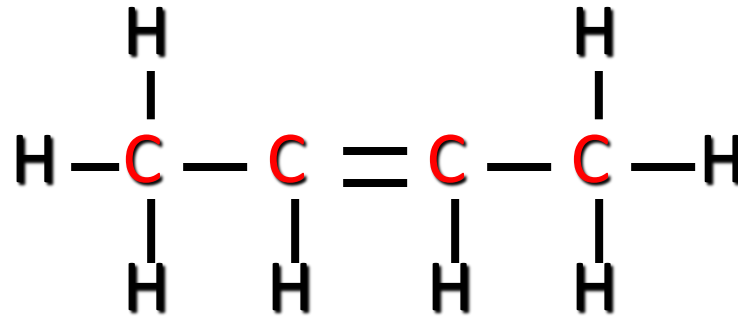


butène C_4H_8

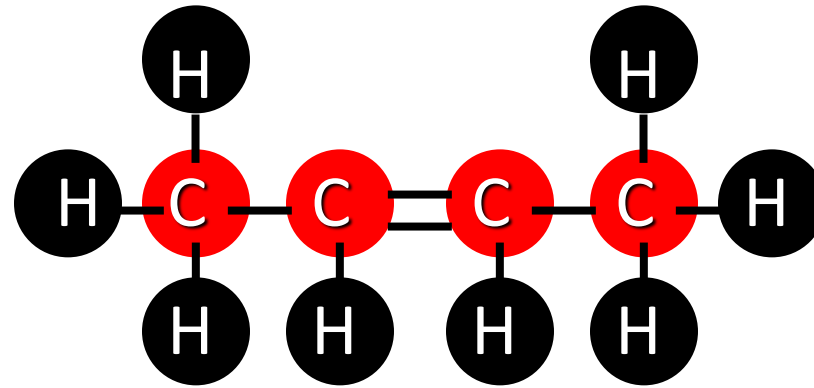
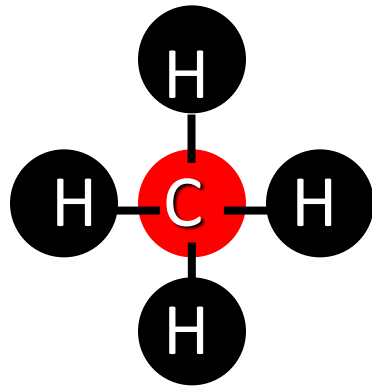
Exemple en chimie : modélisation de molécules



méthane CH_4



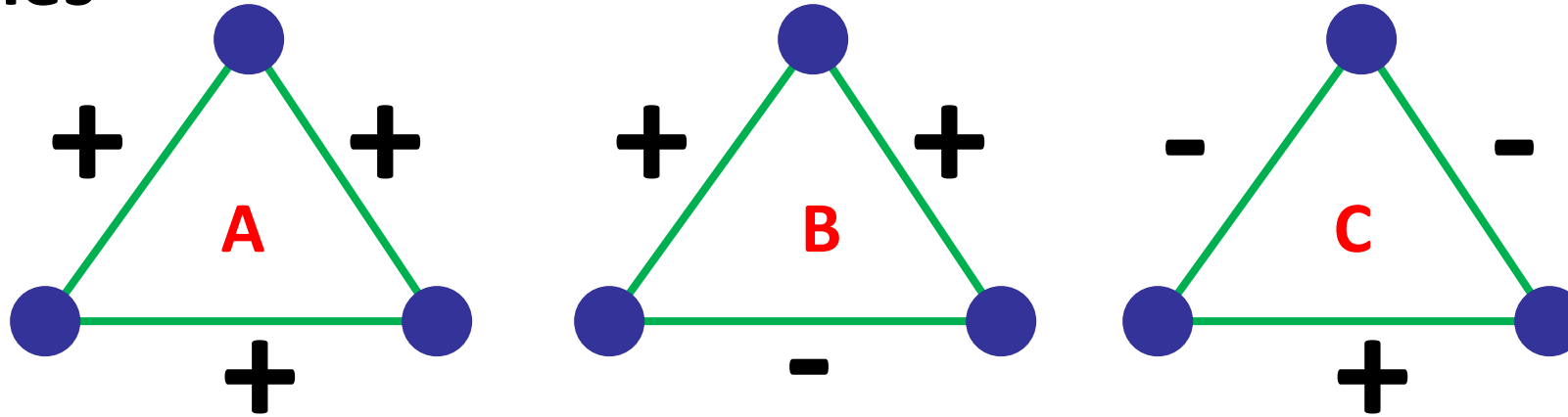
butène C_4H_8



Graphes (**multigraphes**) avec contraintes sur les degrés des sommets selon le type de sommet...

Exemple en sociologie : graphes signés

Sociogrammes

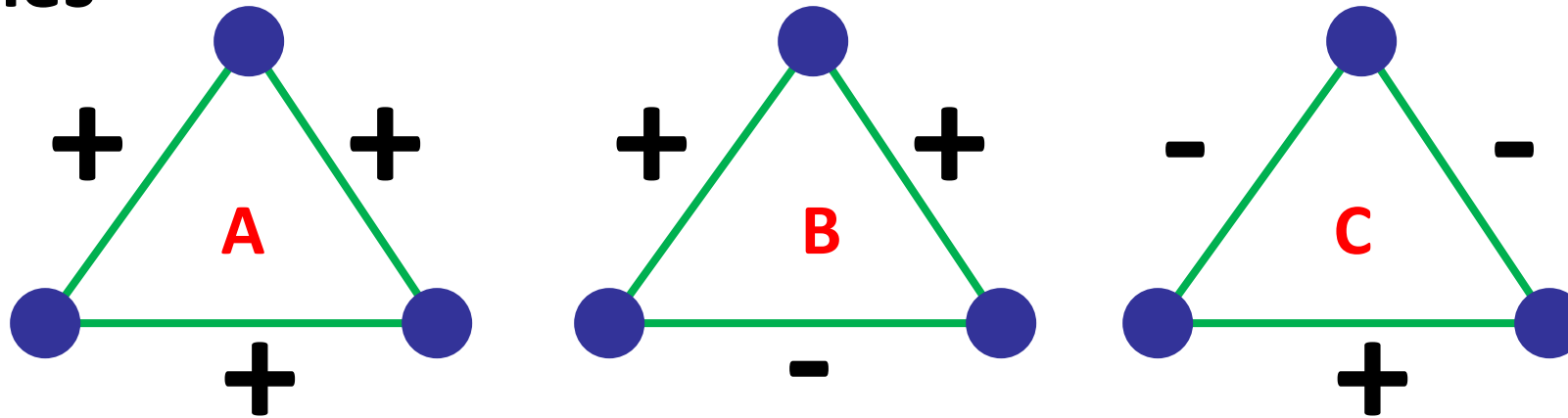


Relation aimer / détester entre employés...

Configurations équilibrées (A, B) ou non (C)

Exemple en sociologie : graphes signés

Sociogrammes



Relation aimer / détester entre employés...

Configurations équilibrées (A, B) ou non (C)

Notions de « clans » (employés, nations, politiciens, etc.)

Algorithmes de Découpage, Classification, ...

Un autre exemple : labyrinthe

(a) Labyrinthe

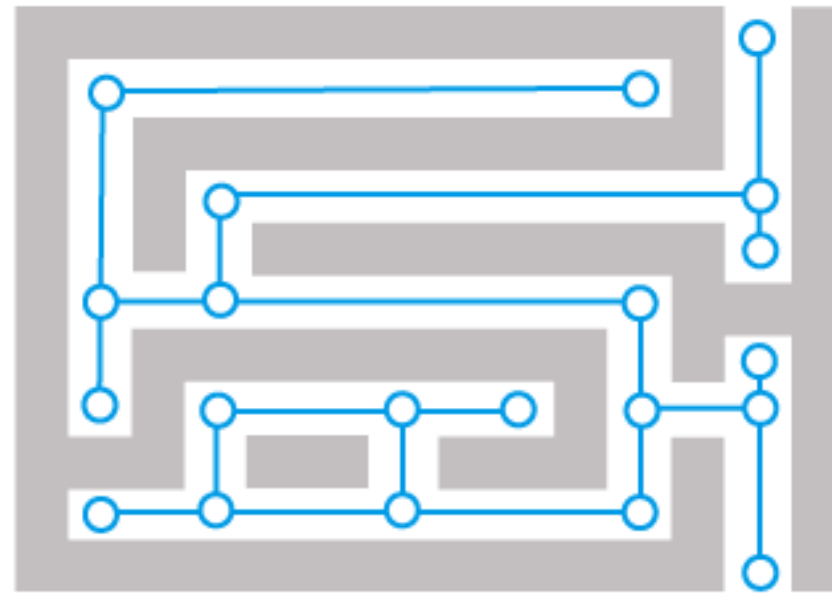


Un autre exemple : labyrinthe

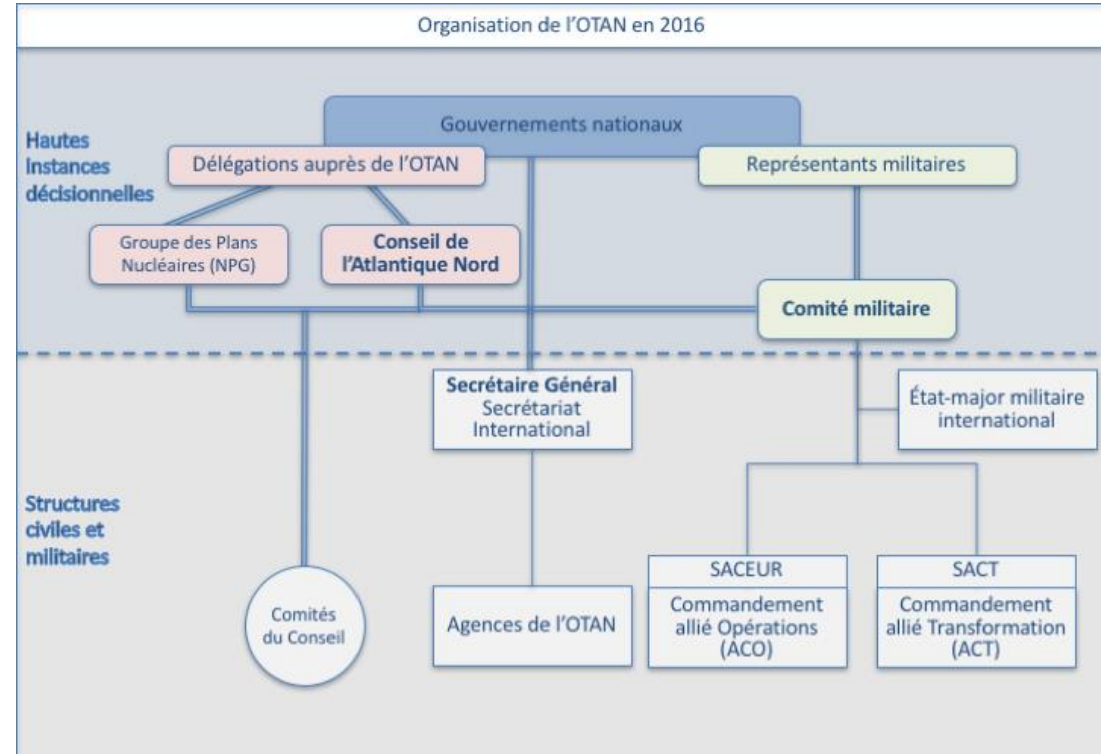
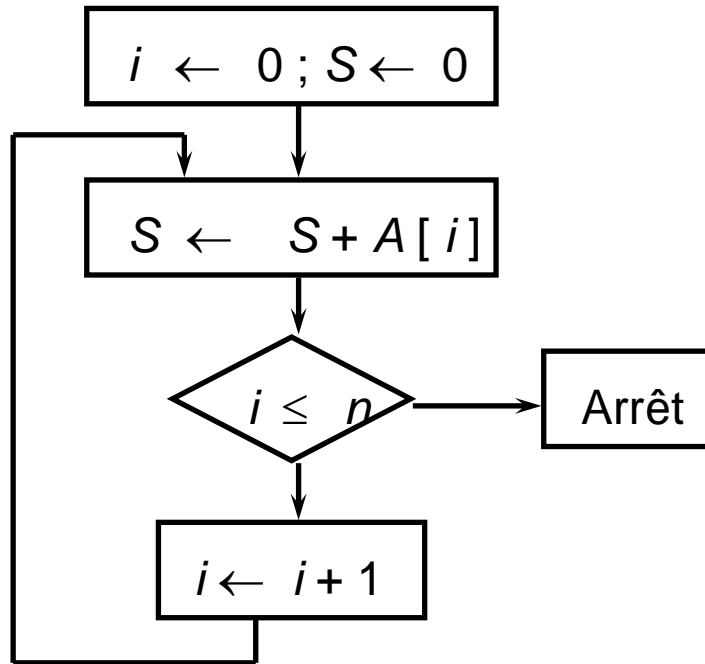
(a) Labyrinthe



(b) Graphe



Un autre exemple : les organigrammes



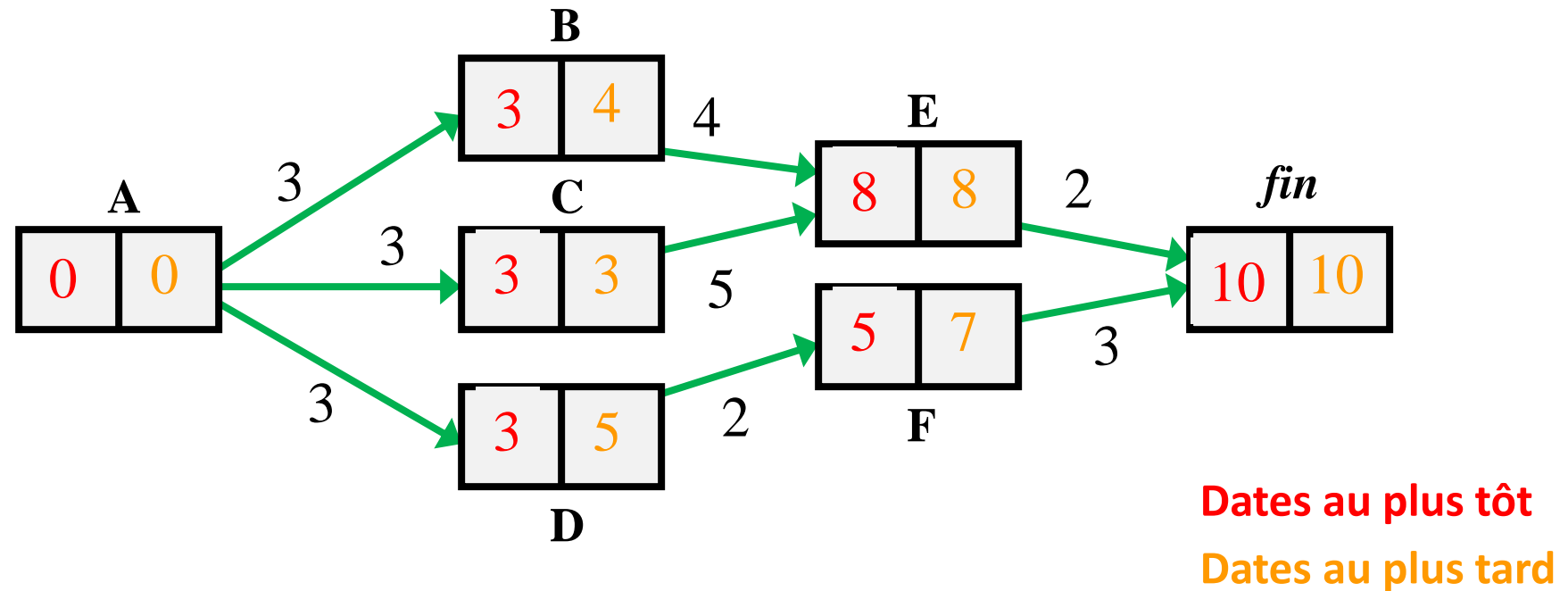
Des graphes ... pour faire quoi ?

- Pour modéliser / représenter une situation
 - Organigramme, Carte routière, Réseau d'une entreprise, Collaborations, etc.
- Pour modéliser / représenter une solution à un problème
 - Itinéraire sur une carte, Sociogramme, etc.

Des graphes ... pour faire quoi ?

- Pour modéliser / représenter une situation
 - Organigramme, Carte routière, Réseau d'une entreprise, Collaborations, etc.
- Pour modéliser / représenter une solution à un problème
 - Itinéraire sur une carte, Sociogramme, etc.
- Pour résoudre un problème
 - Labyrinthe (→ Rechercher un itinéraire)
 - Planification de tâches
 - Fiabilité d'un réseau
 - etc.

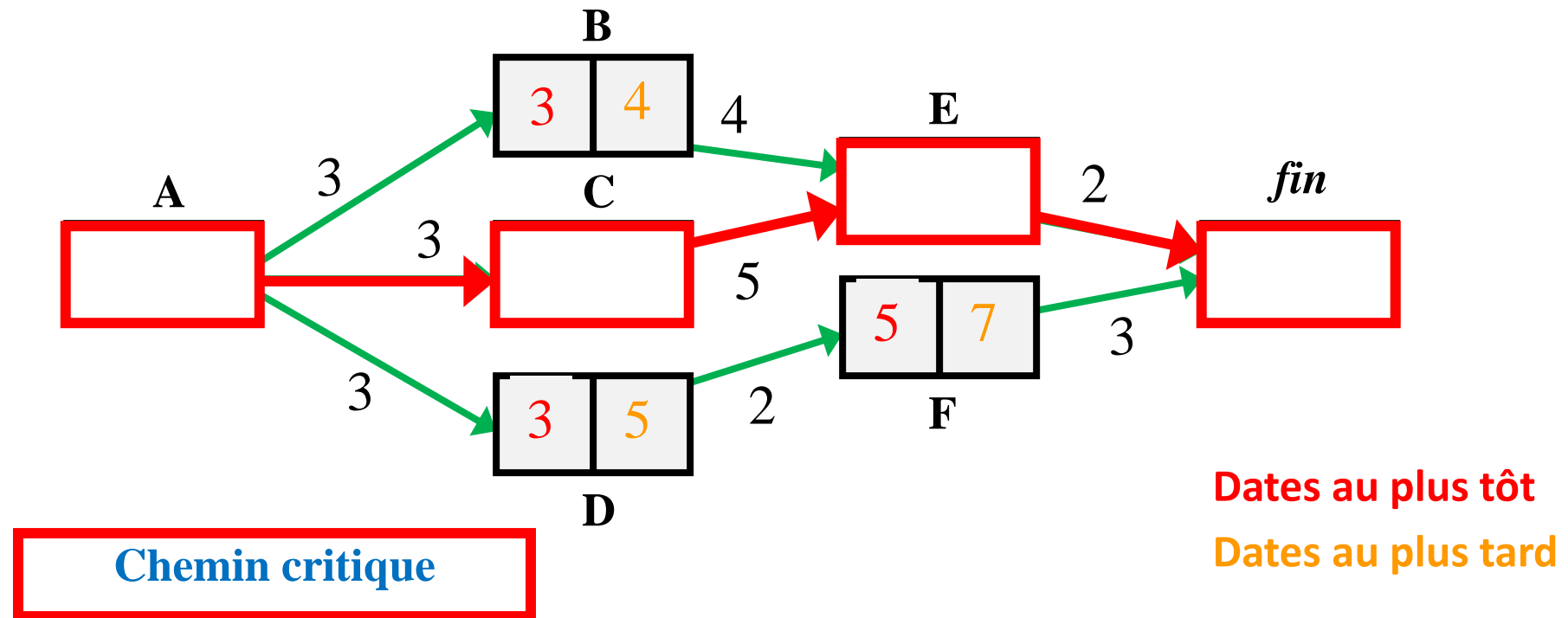
Exemple : problème d'ordonnancement



Sommets = tâches à réaliser

Arcs = relation d'antériorité (pondération : durée de la tâche initiale)

Exemple : problème d'ordonnancement

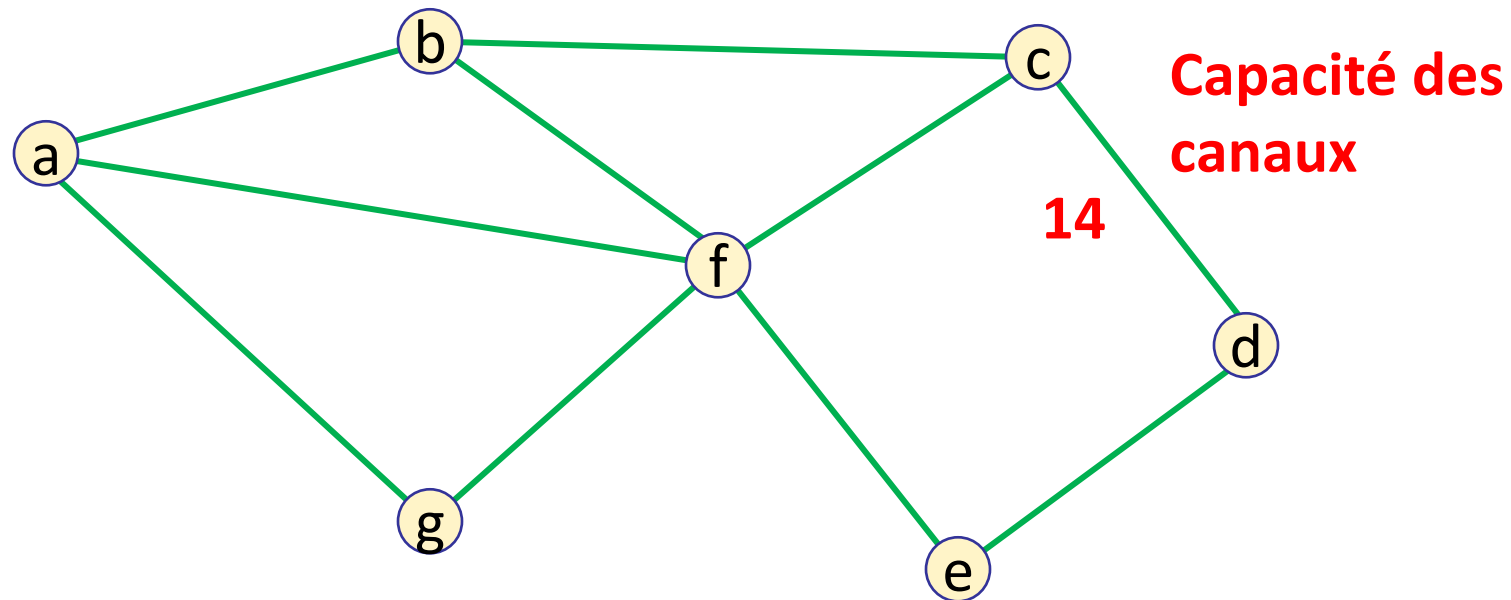


Sommets = tâches à réaliser

Arcs = relation d'antériorité (pondération : durée de la tâche initiale)

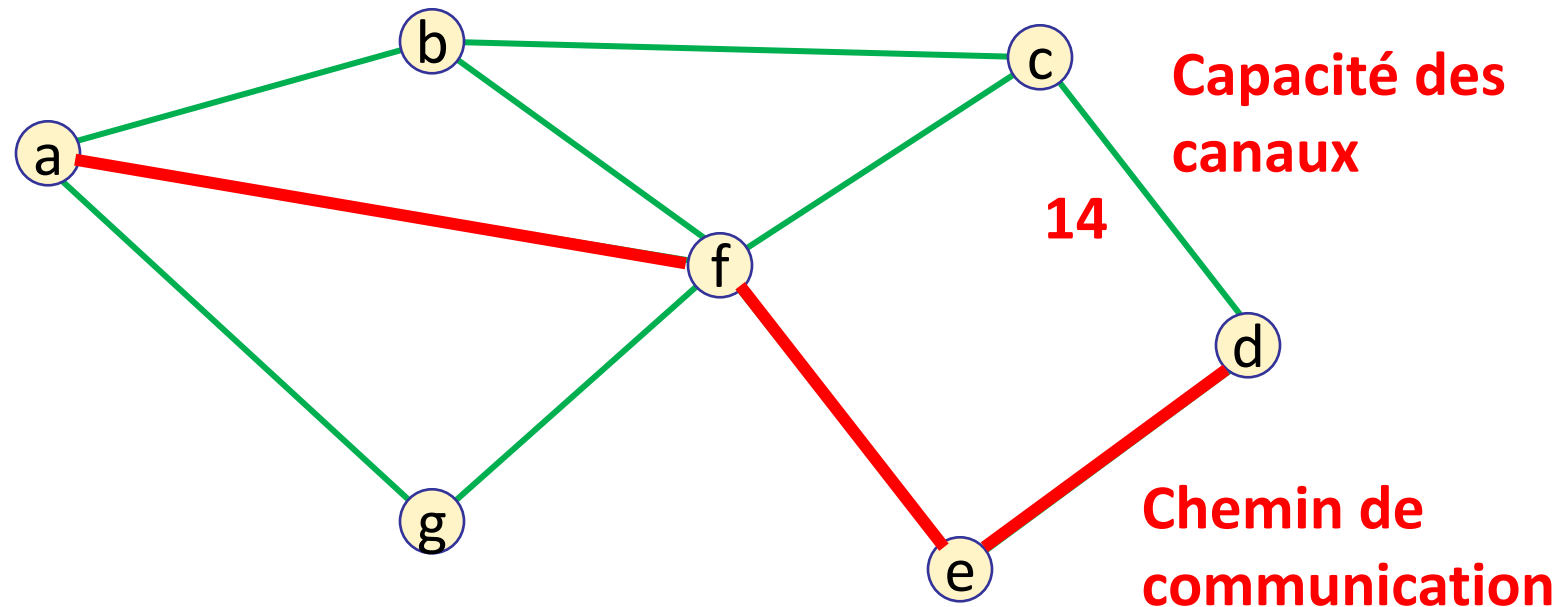
Exemple : modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc. -----> sommets
canaux de communication -----> arcs, arêtes



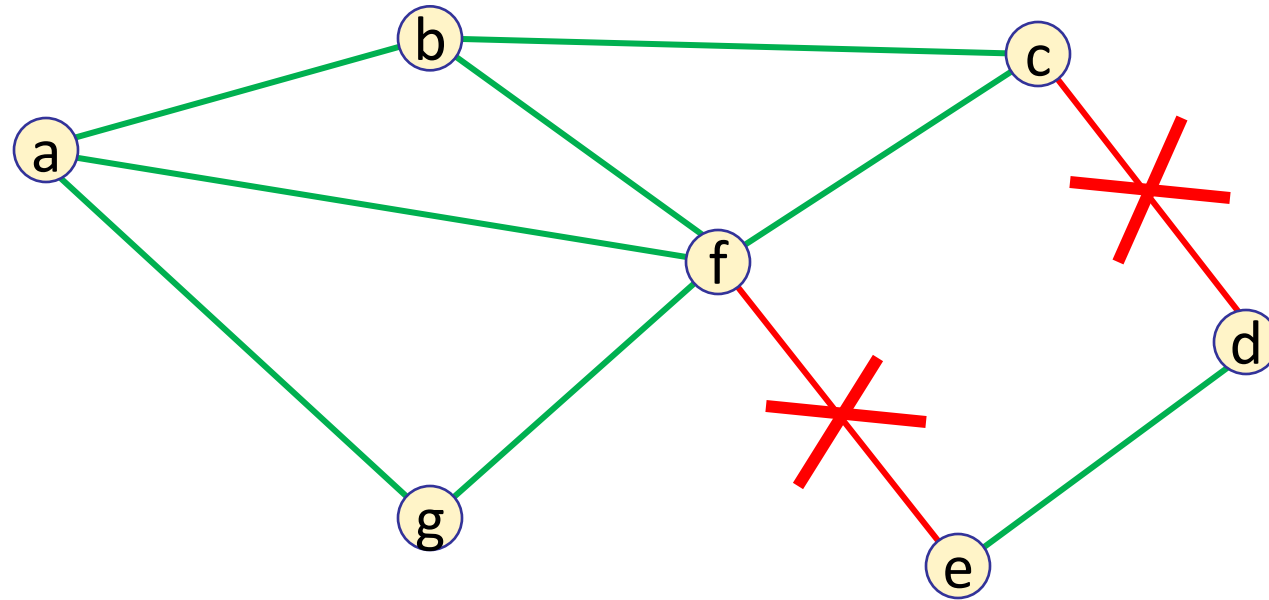
Exemple : modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc. -----> sommets
canaux de communication -----> arcs, arêtes



- Cheminement
- Flot

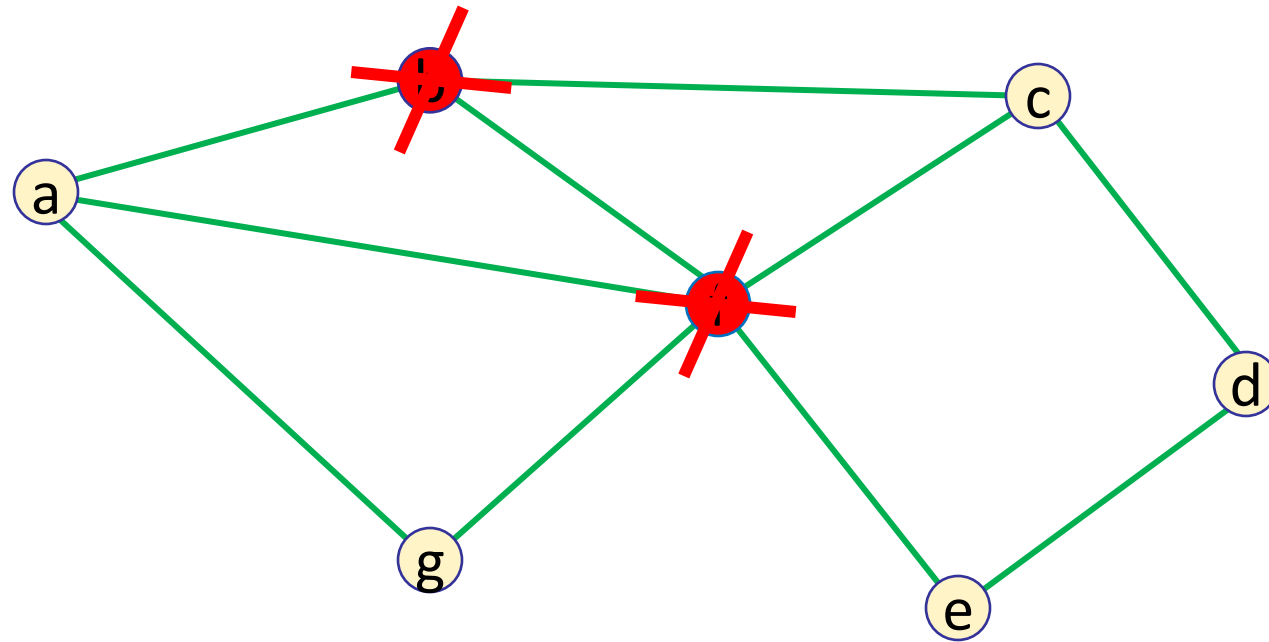
Exemple : modélisation d'un réseau



- Cheminement
- Flot
- **Fiabilité d'un réseau**

ensemble d'arêtes déconnectant le graphe
→ panne des canaux de communication

Exemple : modélisation d'un réseau



- Cheminement
- Flot
- **Fiabilité d'un réseau**

ensemble de sommets déconnectant le graphe
→ panne des sommets « relais »

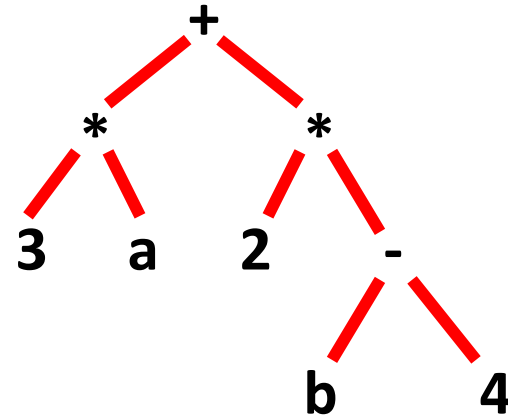
Exemple : compilation

Représentation d'un programme par un arbre

expression
arithmétique

$3 * a + 2 * (b - 4)$

codage par
un arbre



Exemple : compilation

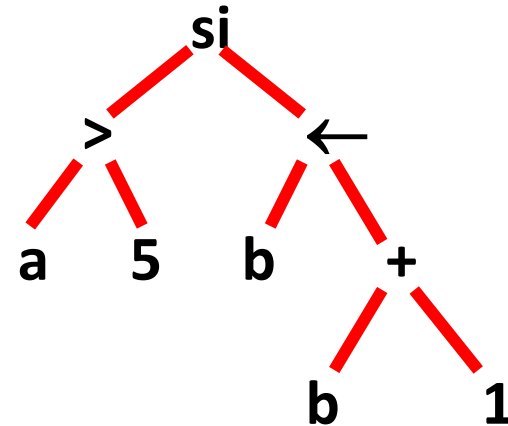
Représentation d'un programme par un arbre

instruction

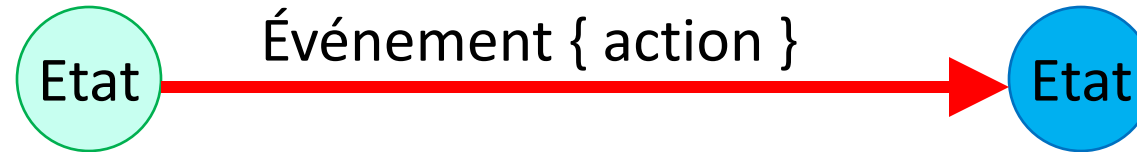
si (a > 5)
alors b ← b + 1

Programme \Rightarrow **graphe**
(sous-arbres communs)

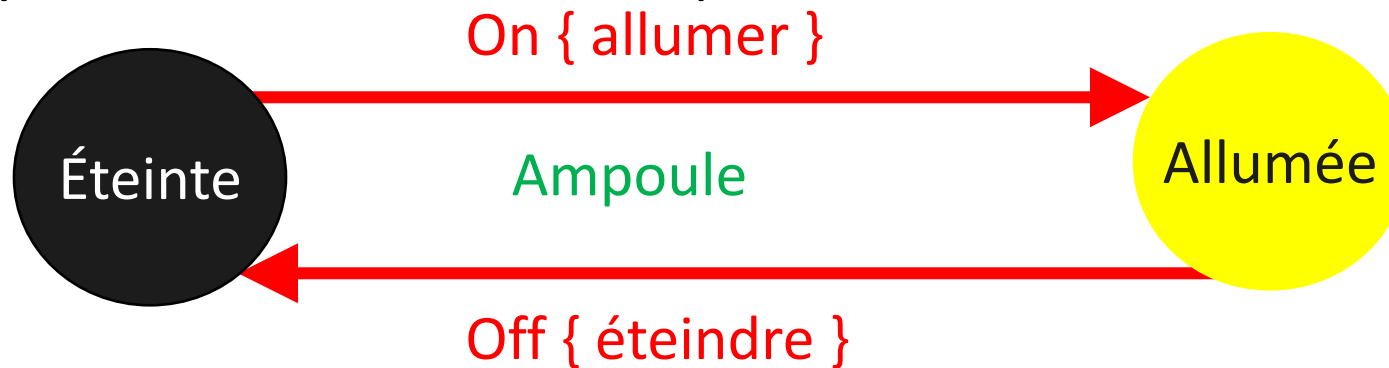
codage par
un arbre



Exemple : automate



Les événements déclenchent des actions (réactions) du système selon l'état dans lequel celui-ci se trouve...



Automate déterministe : pour chaque état, au plus une transition par événement...

Synthèse : quelques exemples d'applications

Objets	Causes des liens	Valeurs associées aux liens	Type de problème concret
Sites géographiques	Routes, rues, lignes ferroviaires, ...	Distance, durée, coût, ...	Cheminement
Tâches à effectuer	Précédence	Temps d'attente, d'exécution	Ordonnancement
Nœuds dans un réseau	Communication entre les nœuds	Débit, durée, capacité, ...	Connexité
Individus / objets à grouper	Incompatibilité	Catégorie associée aux individus / objets	Incompatibilité
Cours / épreuves	Présence d'un groupe identique	Nombre d'inscrits	Incompatibilité
Carrefours, intersections	Circulation d'objets	Capacité maximale	Flot