Graphes et Algorithmes – Partie II
Définitions et terminologie

FISA Informatique 1ère année

2020 - 2021

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES HAUTS-DE-FRANCE

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Définitions et terminologie – Plan

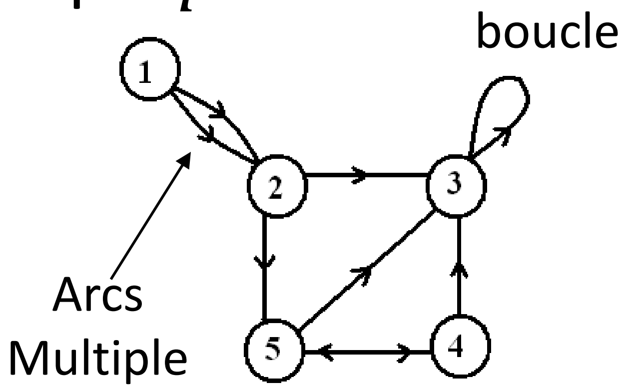
- Graphe orienté ou non
- Notion de voisin
- Notion de chemin
- Graphes particuliers
- Isomorphisme

Définition formelle d'un graphe

- Un graphe G est un couple (S, A), où
  - S est un ensemble de $\boldsymbol{n}$ sommets
  - A est une famille de $\boldsymbol{m}$ éléments du produit cartésien
$$S \times S = \{(i, j) : i, j \in S\}$$

Définition formelle d'un graphe

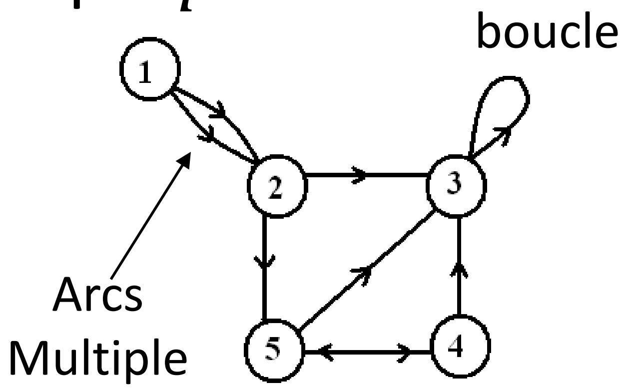
- Un graphe G est un couple (S, A), où
  - S est un ensemble de $\boldsymbol{n}$ sommets
  - A est une famille de $\boldsymbol{m}$ éléments du produit cartésien
$$S \times S = \{(i, j): i, j \in S\}$$
- Un élément (i, j) peut apparaître plusieurs fois dans A
  - Dans un $\boldsymbol{p - graphe}$, (i, j) ne peut pas apparaître plus que p fois
  - Un **multi-graphe** est un $p - graphe$ avec $p > 1$



Définition formelle d'un graphe

- Un graphe G est un couple (S, A), où
  - S est un ensemble de $\boldsymbol{n}$ sommets
  - A est une famille de $\boldsymbol{m}$ éléments du produit cartésien
    $$S \times S = \{(i,j): i,j \in S\}$$
- Un élément (i,j) peut apparaître plusieurs fois dans A
  - Dans un $\boldsymbol{p-graphe}$, (i,j) ne peut pas apparaître plus que p fois
  - Un **multi-graphe** est un $p-graphe$ avec $p > 1$
- Le nombre de sommets n, est appelé l'***ordre*** de G

[Info. possibles sur les liens / sommets]



Définition formelle d'un graphe : **hypothèses**

- Le graphe $G = (S, A)$ est **fini** (i.e. n et m sont des entiers positifs)
- G est $\mathbf{1 - \mathit{graphe}}$

  $\rightarrow A$ devient un sous ensemble de $S \times S = \{(i, j) : i, j \in S\}$
- L'élément (i, i) est appelé une ***boucle***

Définition formelle d'un graphe : **hypothèses**

- Le graphe $G = (S, A)$ est **fini** (i.e. n et m sont des entiers positifs)
- G est $\boldsymbol{1 - graphe}$

  $\rightarrow A$ devient un sous ensemble de $S \times S = \{(i, j): i, j \in S\}$
- L'élément (i, i) est appelé une ***boucle***
- G est ***simple*** s'il est $1 - graphe$ et sans boucle

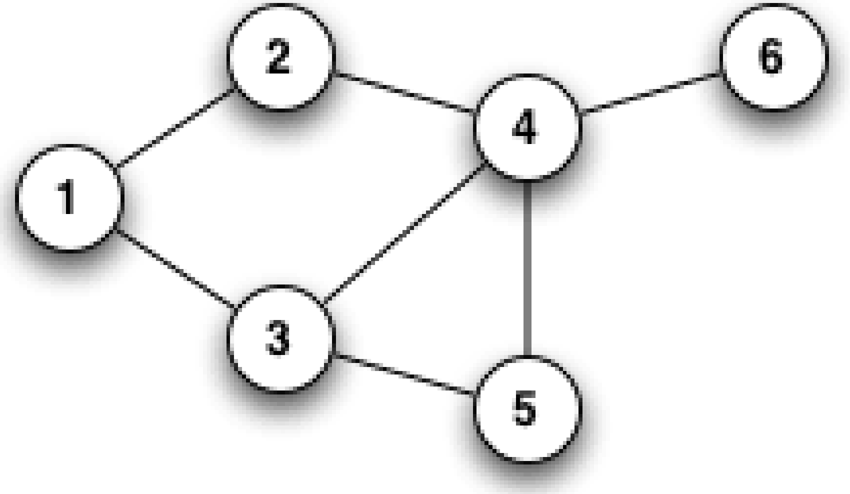
Définition formelle d'un graphe : **hypothèses**

- Le graphe $G = (S, A)$ est **fini** (i.e. n et m sont des entiers positifs)
- G est $\boldsymbol{1 - graphe}$

  $\rightarrow A$ devient un sous ensemble de $S \times S = \{(i,j): i,j \in S\}$
- L'élément (i,i) est appelé une ***boucle***
- $\boxed{G \text{ est } \textit{\textbf{simple}} \text{ s'il est } 1 - graphe \text{ et sans boucle}}$
- Conséquences
  - Un graphe G est une ***relation binaire*** A sur l'ensemble S
  - Si la relation A est *symétrique* le graphe G est appelé un graphe ***non orienté***, sinon G est appelé graphe ***orienté***

Représentation graphique

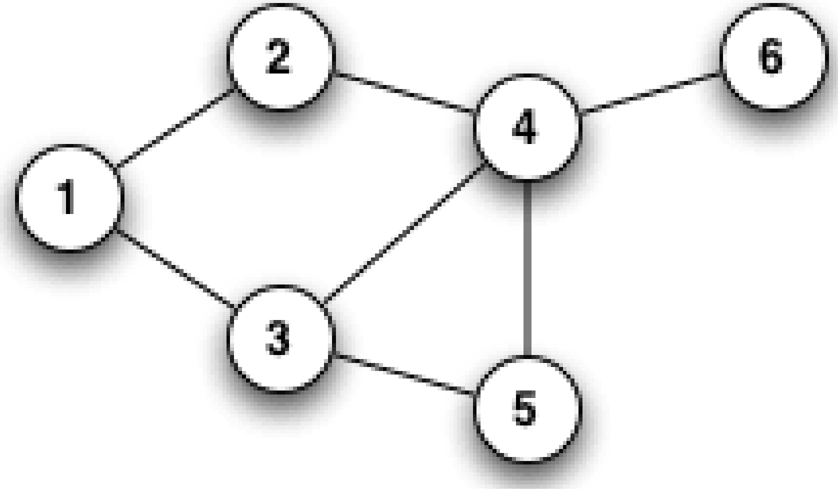
Graphe non orienté



S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
A = { (1,2), (1,3), (2,4), (3,4),
(3,5), (4,5), (4,6) }

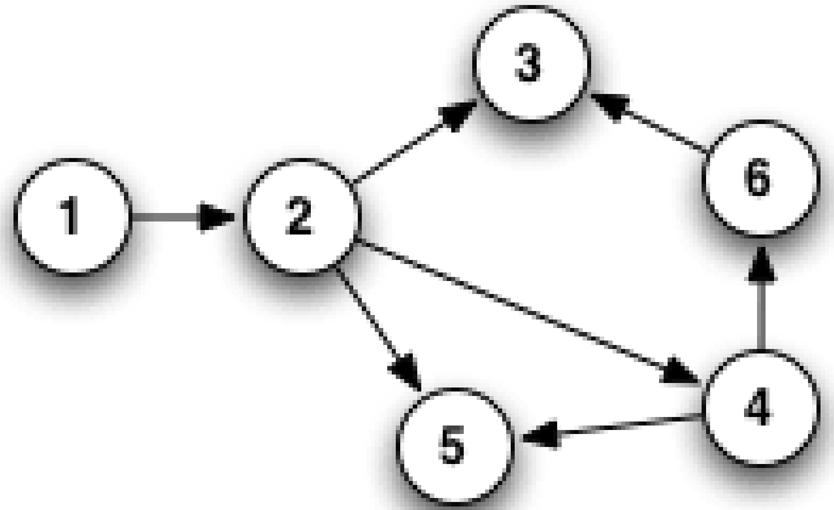
Représentation graphique

Graphe non orienté



S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
A = { (1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,5), (4,6) }

Graphe orienté



S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
A = { (1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (4,5), (4,6), (6,3) }

Composantes d’un graphe

- Sommet
  - Elément de base : nœud, point, objet, tâche, …
  - Dessiné par un point, un cercle, un carré, un nœud, une forme, …

Composantes d’un graphe

- Sommet
  - Elément de base : nœud, point, objet, tâche, …
  - Dessiné par un point, un cercle, un carré, un nœud, une forme, …
- Arc
  - Un arc reliant i à j est noté (i, j)
  - Dessiné par une flèche **orientée** de i vers j

Composantes d’un graphe

- Sommet
  - Elément de base : nœud, point, objet, tâche, …
  - Dessiné par un point, un cercle, un carré, un nœud, une forme, …
- Arc
  - Un arc reliant i à j est noté (i, j)
  - Dessiné par une flèche **orientée** de i vers j
- Arête
  - Une arête reliant i à j est noté $\{i, j\}$ ou $[i, j]$ ou (i, j)
  - Dessinée par une ligne reliant i à j

Exemple

- Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d’un fleuve. Un passeur souhaite les transporter sur l’autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu’un seul d’entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ni la chèvre et le chou ?

Adjacence / Incidence

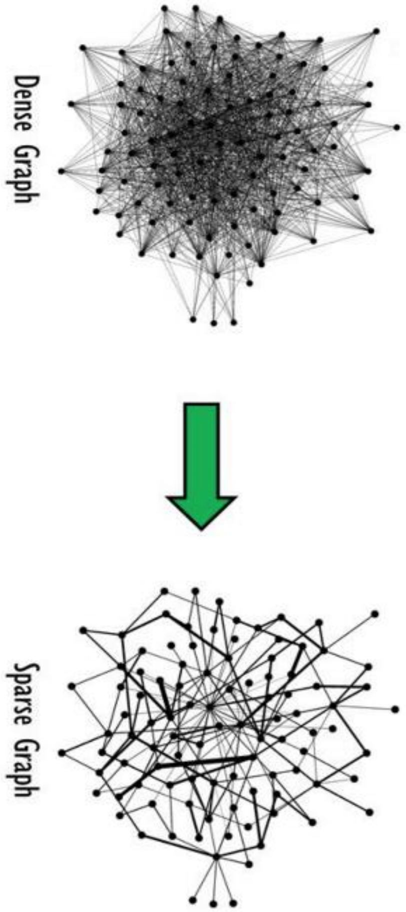
- Pour une arête $a = [i, j]$, les sommets i et j sont ses **extrémités**
- Pour un arc $a = (i, j)$
  - i est son **extrémité initiale**, et
  - j est son **extrémité terminale**

Adjacence / Incidence

- Pour une arête $a = [i, j]$, les sommets i et j sont ses **extrémités**
- Pour un arc $a = (i, j)$
  - i est son **extrémité initiale**, et
  - j est son **extrémité terminale**
- Deux sommets i et j sont **adjacents** si $(i, j) \in A$
- Deux arcs (ou arêtes) sont dits adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune
- Un arc (ou arête) est dit **incident** à ses extrémités

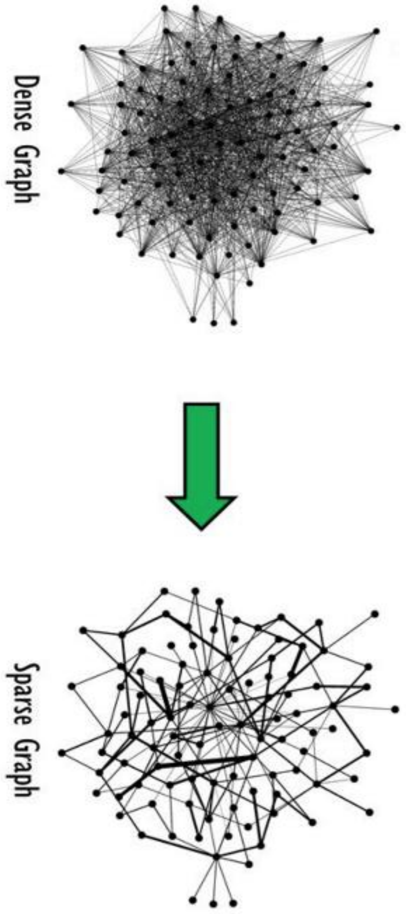
Graphe dense / creux

- Sommet
  - S est l'ensemble des sommets
  - n nombre de sommets ($n = |S|$)
- Lien : Arc / Arête
  - A est l'ensemble des arcs / arêtes
  - m nombre d'arcs / arêtes ($m = |A|$)



Graphe dense / creux

- Sommet
  - S est l'ensemble des sommets
  - n nombre de sommets ($n = |S|$)
- Lien : Arc / Arête
  - A est l'ensemble des arcs / arêtes
  - m nombre d'arcs / arêtes ($m = |A|$)
- **Si $\boldsymbol{G}$ est $\boldsymbol{1 - graphe}$**, on a
  - $m = |A| \leq |S \times S| = |S|^2 = n^2$
  - G est $dense$ si $m \cong n^2$
  - G est $creux$ si $m \ll n^2$



Successeur / Prédécesseur

- Soit $G = (S, A)$ un graphe **orienté**
  - Ensemble des successeurs d'un sommet $i \in S$
  $$V^+(i) = \{j \in S : (i, j) \in A\}$$
  - Ensemble des prédécesseurs d'un sommet $i \in S$
  $$V^-(i) = \{j \in S : (j, i) \in A\}$$
  - Ensemble des voisins d'un sommet $i \in S$
  $$V(i) = V^-(i) \cup V^+(i)$$

Successeur / Prédécesseur

- Soit $G = (S, A)$ un graphe **orienté**
  - Ensemble des successeurs d'un sommet $i \in S$
  $$V^+(i) = \{j \in S : (i, j) \in A\}$$
  - Ensemble des prédécesseurs d'un sommet $i \in S$
  $$V^-(i) = \{j \in S : (j, i) \in A\}$$
  - Ensemble des voisins d'un sommet $i \in S$
  $$V(i) = V^-(i) \cup V^+(i)$$
- V est une application multivoque : à chaque $i \in S$ on fait correspondre un sous-ensemble $V(i) \subseteq S$

Degré

- Soit $G = (S, A)$ un graphe **orienté**
  - Demi-degré extérieur d'un sommet $i \in S$: $d^+(i) = |V^+(i)|$
  - Demi-degré intérieur d'un sommet $i \in S$: $d^-(i) = |V^-(i)|$
  - Degré d'un sommet $i \in S$: $d(i) = |V(i)|$

Degré

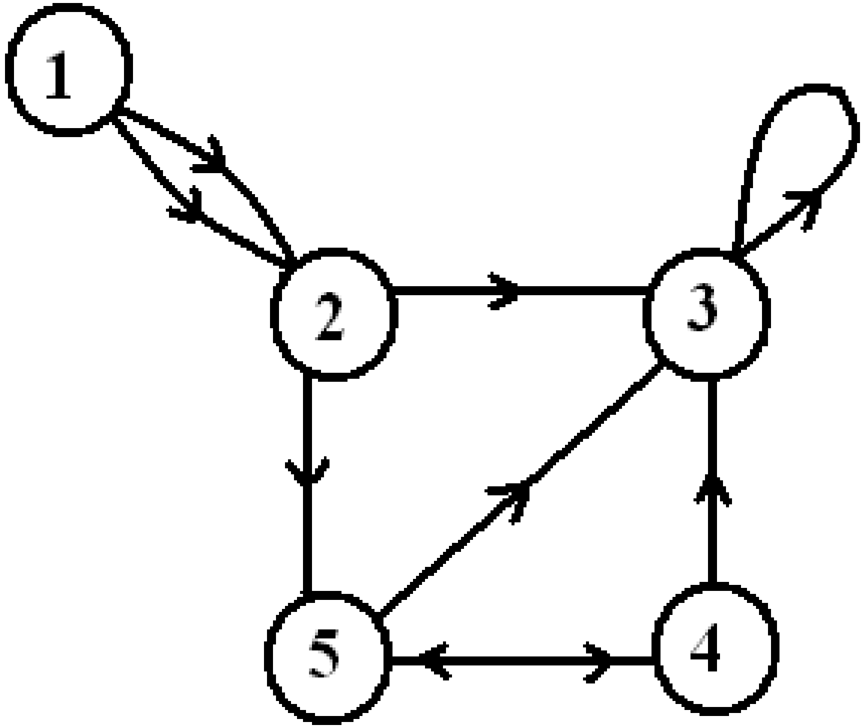
- Soit $G = (S, A)$ un graphe **orienté**
  - Demi-degré extérieur d'un sommet $i \in S$: $d^+(i) = |V^+(i)|$
  - Demi-degré intérieur d'un sommet $i \in S$: $d^-(i) = |V^-(i)|$
  - Degré d'un sommet $i \in S$: $d(i) = |V(i)|$
- Si G est un graphe simple (sans boucle), on a

$$d(i) = d^-(i) + d^+(i)$$

$$d^-(i), d^+(i) \leq n - 1$$

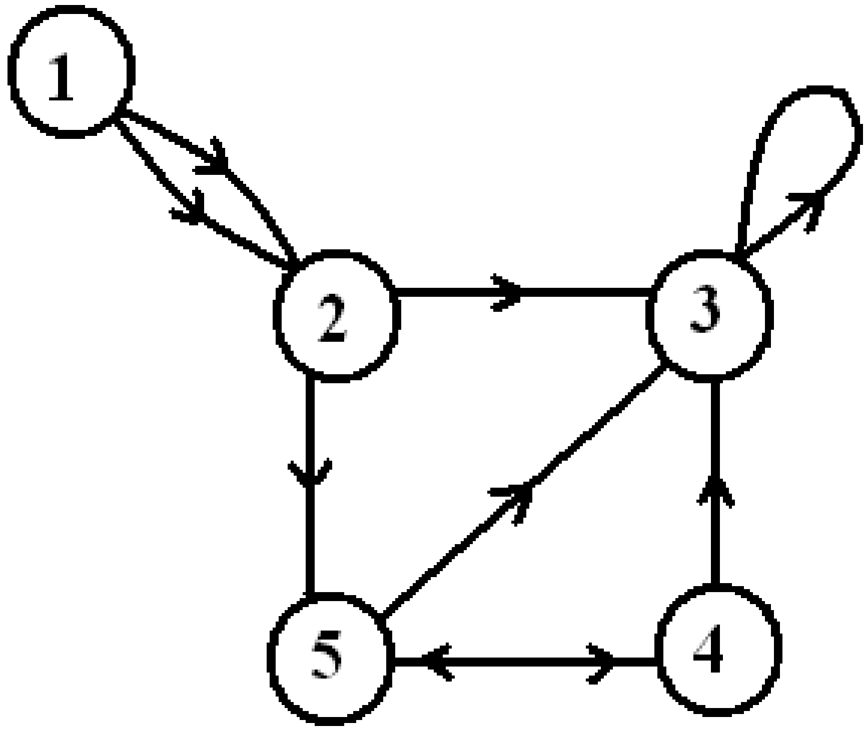
Degré : illustration

- $d^{+}(i) =$ nombre d'arcs sortants de i
- $d^{-}(i) =$ nombre d'arcs entrants en i



Degré : illustration

- $d^+(i)$ = nombre d'arcs sortants de i
- $d^-(i)$ = nombre d'arcs entrants en i



$d^+(1) = 2$
$d^-(1) = 0$
$d^+(2) = 2$
$d^-(2) = 2$
$d^+(3) = 1$
$d^-(3) = 4$
$d^+(4) = 2$
$d^-(4) = 1$
$d^+(5) = 2$
$d^-(5) = 2$

Cas du graphe non orienté

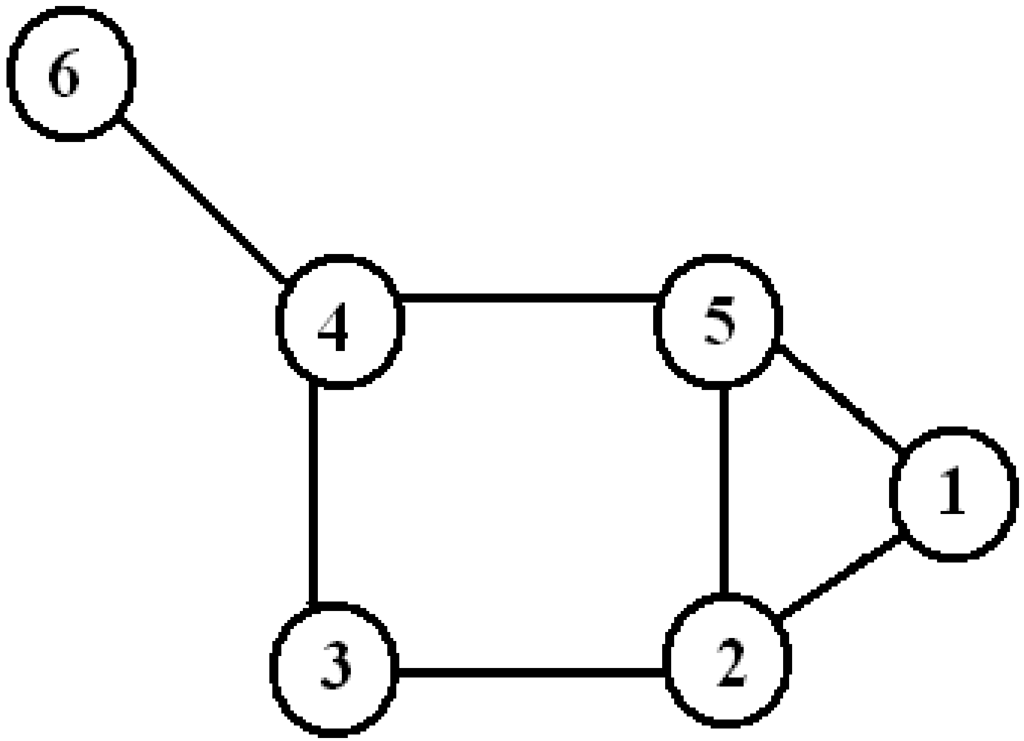
- Soit $G = (S, A)$ un graphe **non orienté**
- On parle de
  - l'ensemble des voisins d'un sommet $i \in S$
  $$V(i) = \{j \in S : [i, j] \in A\}$$
  - du degré d'un sommet $i \in S$
  $$d(i) = |V(i)|$$

Cas du graphe non orienté

- Soit $G = (S, A)$ un graphe **non orienté**
- On parle de
  - l'ensemble des voisins d'un sommet $i \in S$
  $$V(i) = \{j \in S : [i, j] \in A\}$$
  - du degré d'un sommet $i \in S$
  $$d(i) = |V(i)|$$
- Si G est un graphe simple (sans boucle), on a
$$d(i) \leq n - 1$$

Degré : illustration

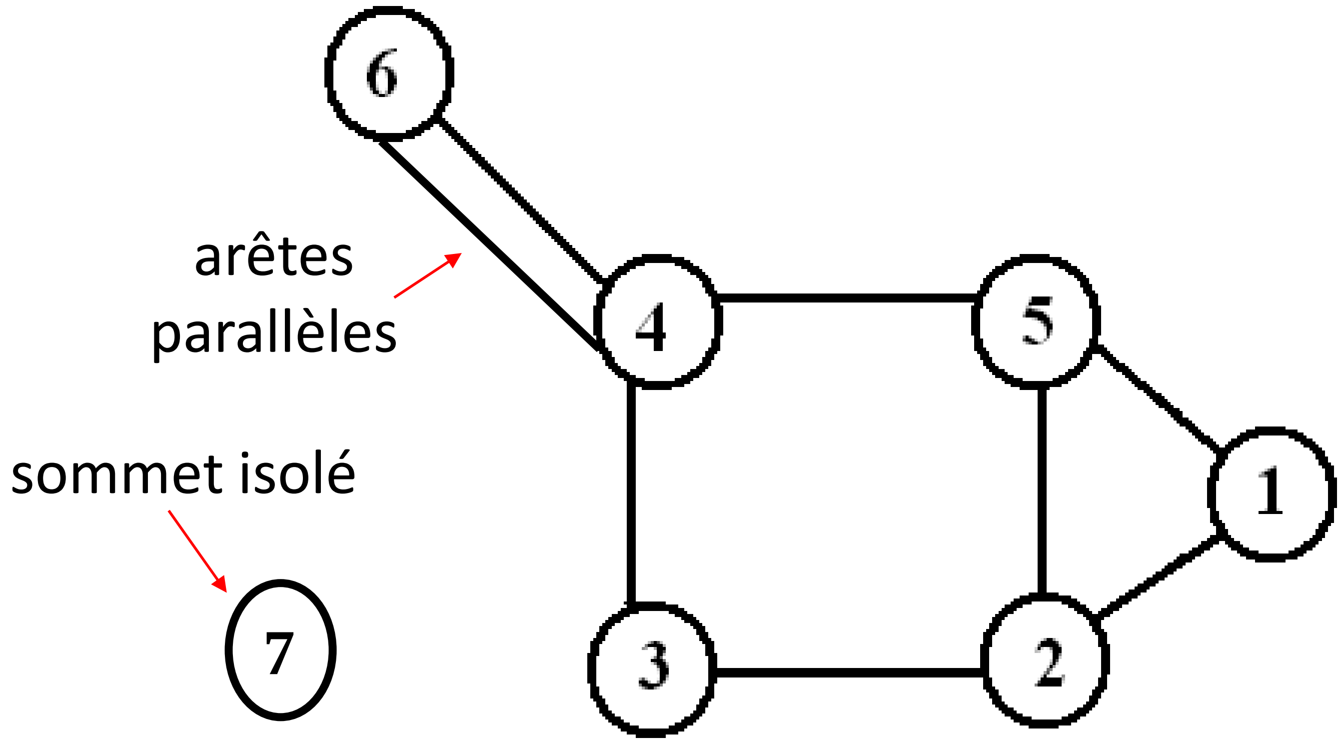
- $d(i)$ = nombre d'arêtes incidentes à i



$d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 1$

Degré : illustration

- $d(i)$ = nombre d'arêtes incidentes à i



$d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 4$
$d(5) = 3$
$d(6) = 2$
$d(7) = 0$

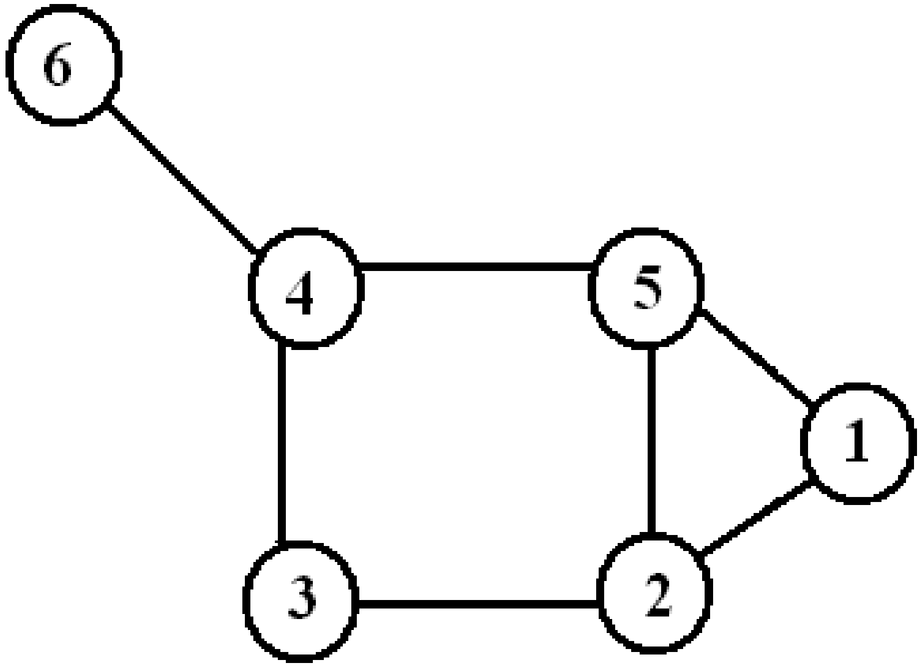
- Un sommet i est dit **isolé** si $d(i) = 0$

Voisins d'un sous-ensemble

- Si $I \subseteq S$, on note $V(I) = \bigcup_{i \in I} V(i)$
- Si $j \notin I$ et $j \in V(I)$, on dit que j est adjacent à I

Voisins d'un sous-ensemble

- Si $I \subseteq S$, on note $V(I) = \bigcup_{i \in I} V(i)$
- Si $j \notin I$ et $j \in V(I)$, on dit que j est adjacent à I



$$V(\{2,5\}) = \{1,3,4\}$$

Exercice (exercice 6 fiche modélisation)

- Un étudiant distrait s'aperçoit qu'il doit passer, le lendemain matin, un examen d'informatique. Il a la possibilité de réviser le contenu de 2 ou 3 chapitres choisis parmi les 12 vus en cours, ces chapitres n'étant pas totalement indépendants :

Chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nécessite le(s) chap.	-	1	1 et 2	1 et 2	1	-	-	-	-	8	8 et 10	8 et 10

Aider cet étudiant en représentant à l'aide d'un graphe la situation (préoccupante) qui est la sienne.

Exercice (exercice 8 fiche représentation & propr.)

- Définir un graphe non orienté $G = (S,A)$ tel que $S = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ et tel que deux sommets i et j sont adjacents si et seulement si $pgcd(i, j) = 1$ ($pgcd$ = plus grand diviseur commun). Quel est le nombre d'arêtes de G ?

Propriétés

- Soit un graphe simple $G = (S, A)$ d'ordre n avec m arcs / arêtes, on a

$$\sum_{i \in S} d^-(i) = \sum_{i \in S} d^+(i) = |A| = m$$

$$\sum_{i \in S} d(i) = 2|A| = 2m$$

Propriétés

- Soit un graphe simple $G = (S, A)$ d'ordre n avec m arcs / arêtes, on a

$$\sum_{i \in S} d^-(i) = \sum_{i \in S} d^+(i) = |A| = m$$

$$\sum_{i \in S} d(i) = 2|A| = 2m$$

- Conséquence
  - Le nombre de sommets de degré impair est pair

Exercice (exercice 9 fiche représentation & propr.)

- Soit G = (S,A) un graphe non orienté comprenant 8 sommets et 15 arêtes. Tous les sommets de G sont de degré 3 ou 5. Combien de sommets de degré 3 et 5 a le graphe G ? (justifier la réponse) Construire un exemple pour G.

Exercice (exercice 7 fiche propriétés)

- Peut-on construire un graphe simple (justifier les réponses) ayant
    1. 5 sommets et 10 arêtes ?
    2. 12 sommets et 68 arêtes ?

Exercice (exercice 2 fiche propriétés)

- Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice (exercice 1 fiche modélisation)

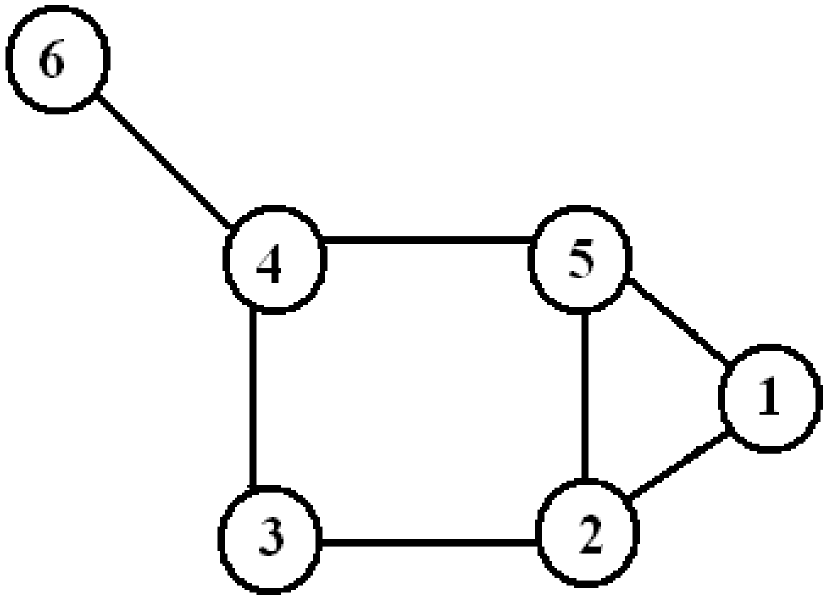
- Jacques dispose d’une bouteille pleine d’une contenance de huit litres ; il a dans sa cave deux bouteilles vides, l’une de cinq litres et une autre de trois litres. Il désire partager le contenu de sa bouteille de huit litres en deux parts de quatre litres chacune, sans utiliser aucun autre moyen de mesure. Indiquez-lui la façon de procéder au moyen d’un graphe.

Chaîne / chemin élémentaire

- Une chaîne (un chemin) **élémentaire** est une chaîne (un chemin) ne passant pas deux fois par un même sommet
- Une chaîne (un chemin) **simple** est une chaîne (un chemin) ne passant pas deux fois par une même arête (un même arc)

Chaîne / chemin élémentaire

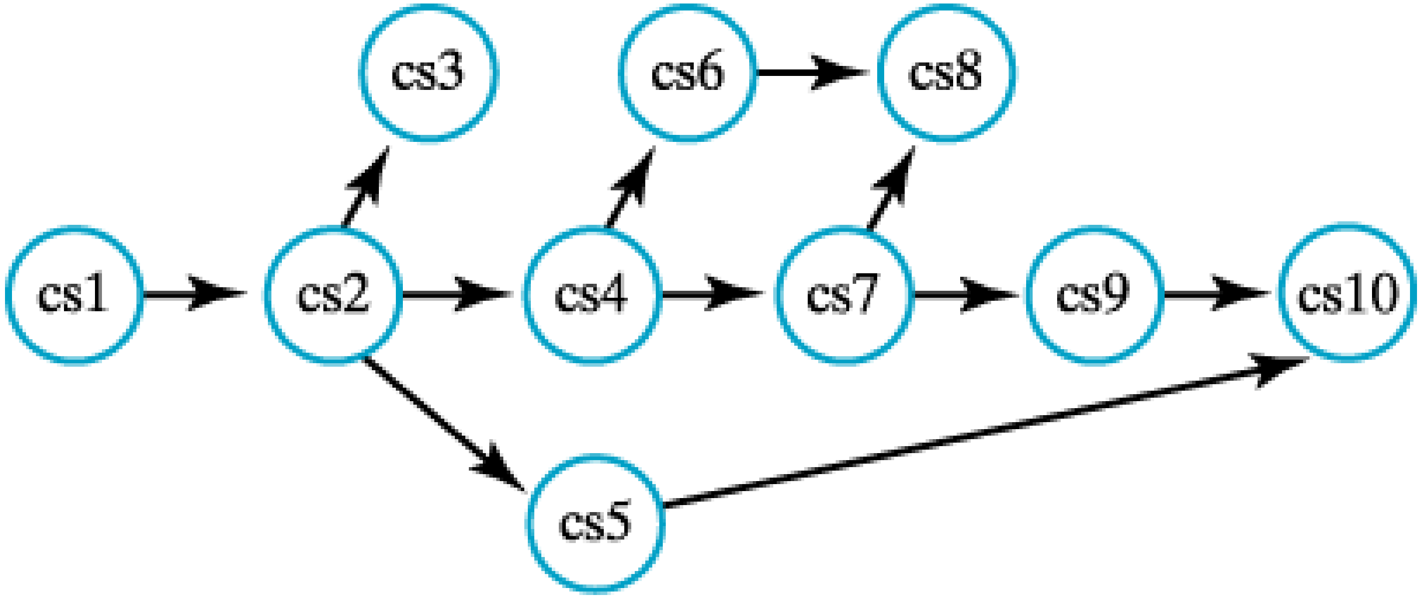
- Une chaîne (un chemin) **élémentaire** est une chaîne (un chemin) ne passant pas deux fois par un même sommet
- Une chaîne (un chemin) **simple** est une chaîne (un chemin) ne passant pas deux fois par une même arête (un même arc)



1,2,5,2,3,4 1,2,5,2,3,2,1 1,2,3,4,6

Graphe acyclique

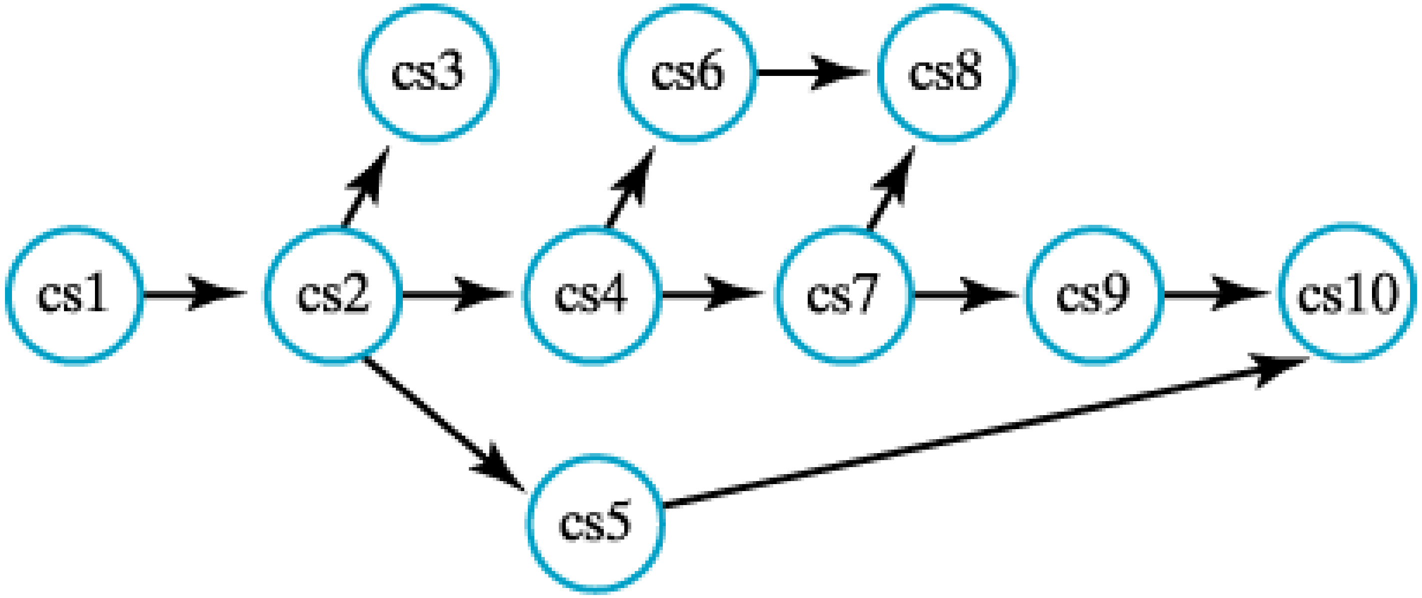
- Un graphe $G = (S, A)$ **orienté** est **acyclique** s'il ne contient pas de circuit



$\rightarrow$ peut être vu comme une **hiérarchie**

Graphe acyclique

- Un graphe $G = (S, A)$ **orienté** est **acyclique** s'il ne contient pas de circuit



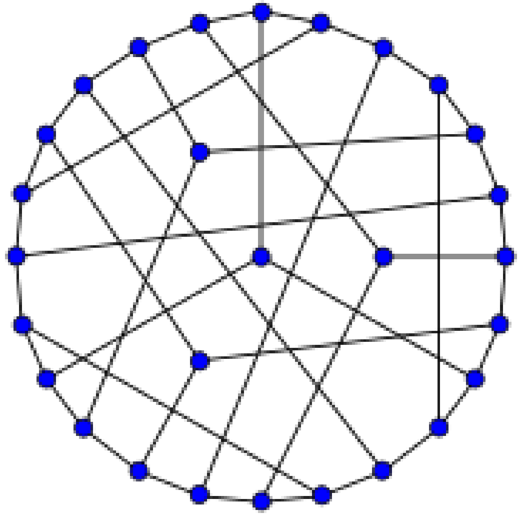
- **Remarque** : cas non orienté ⇔ **arbre**

Distance / diamètre

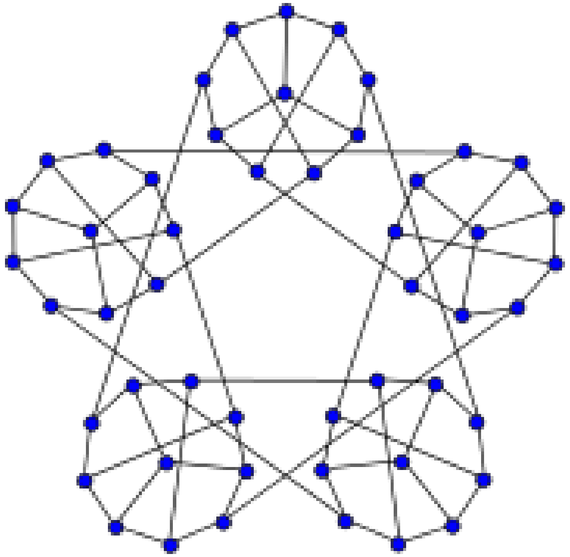
- Distance entre deux sommets = longueur d’une plus courte chaîne (en nombre d’arêtes) entre les deux sommets
- Le **diamètre** d'un graphe $G = (S, A)$ est la plus grande distance possible qui puisse exister entre deux de ses sommets, noté $Diam(G)$

Distance / diamètre

- Distance entre deux sommets = longueur d'une plus courte chaîne (en nombre d'arêtes) entre les deux sommets
- Le **diamètre** d'un graphe $G = (S, A)$ est la plus grande distance possible qui puisse exister entre deux de ses sommets, noté $Diam(G)$



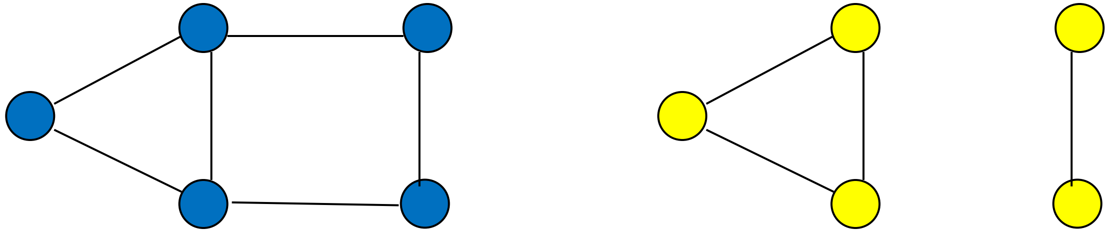
$Diam(G) = 4$



$Diam(G) = 7$

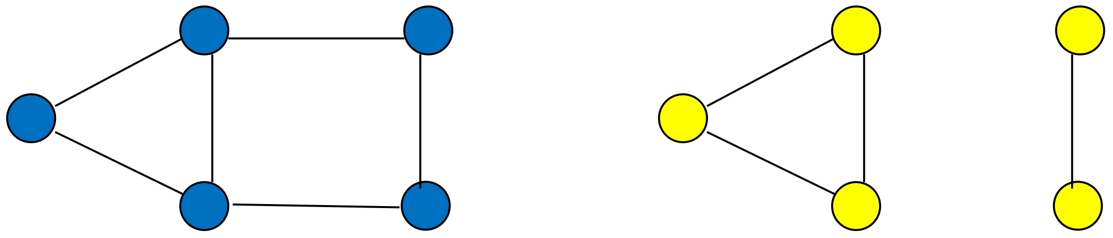
Notion de connexité

- Un graphe **non orienté** est **connexe** si deux sommets quelconques sont connectés par une chaîne



Notion de connexité

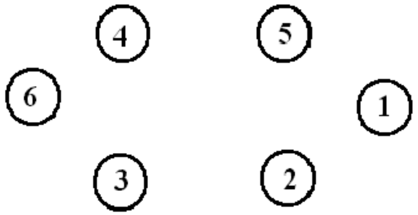
- Un graphe **non orienté** est **connexe** si deux sommets quelconques sont connectés par une chaîne



- Un graphe **orienté** est **fortement connexe** s'il existe un chemin de n'importe quel sommet ver n'importe quel autre

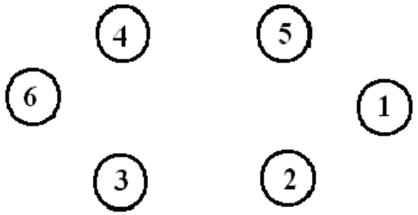
Graphes particuliers

- Graphe nul
  - $S = \emptyset$ donc $A = \emptyset$
- Graphe vide
  - $A = \emptyset$

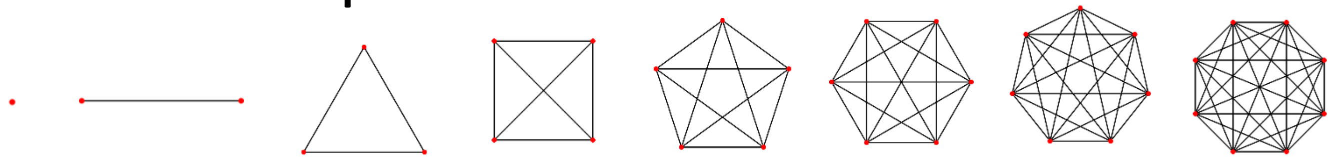


Graphes particuliers

- Graphe nul
  - $S = \emptyset$ donc $A = \emptyset$
- Graphe vide
  - $A = \emptyset$

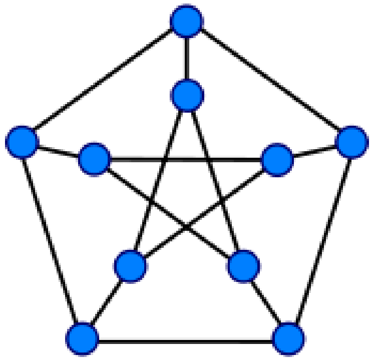


- Graphe **complet**
  - Graphe simple non orienté $G = (S, A)$ d'ordre $n = |S|$
  - Tout couple de sommets disjoints est relié par une arête
  - Noté K_n et $m = |A| = \frac{n(n-1)}{2}$



Graphes particuliers

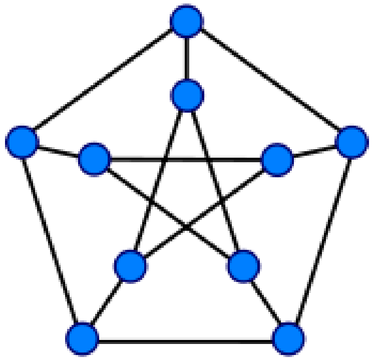
- Graphe ***k*-régulier**
  - Graphe connexe
  - $d(i) = k$ pour chaque *i* de *S*
  - $\delta(G) = \Delta(G)$ avec
    - $\delta(G) = \min\{d(i) : i \in S\}$
    - $\Delta(G) = \max\{d(i) : i \in S\}$



Graphe de Petersen

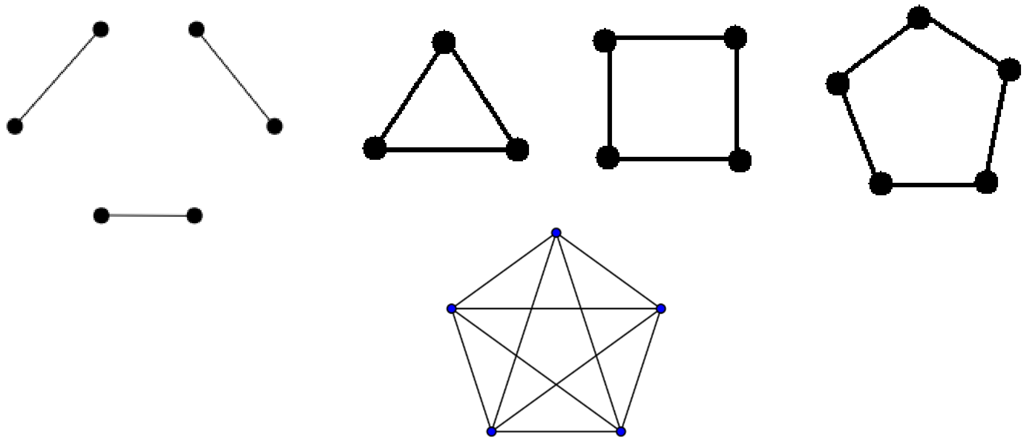
Graphes particuliers

- Graphe ***k*-régulier**
  - Graphe connexe
  - $d(i) = k$ pour chaque *i* de *S*
  - $\delta(G) = \Delta(G)$ avec
    - $\delta(G) = \min\{d(i) : i \in S\}$
    - $\Delta(G) = \max\{d(i) : i \in S\}$



Graphe de Petersen

- Graphes réguliers spéciaux
  - 0-régulier (graphe vide)
  - 1-régulier
  - 2-régulier
  - (n-1)-régulier



Exercice (exercice 6 fiche représentation et prop.)

- Dessiner les graphes (non orientés) complets d'ordre 2, 3, 4 et 5. Préciser pour chacun le degré de chaque sommet et le nombre total d'arêtes.

Exercice (exercice 7 fiche modélisation)

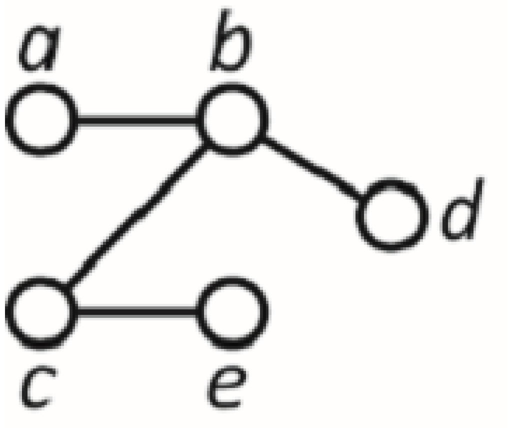
- Un tournoi d’échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ? Si chaque joueur ne joue qu’un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Graphes particuliers

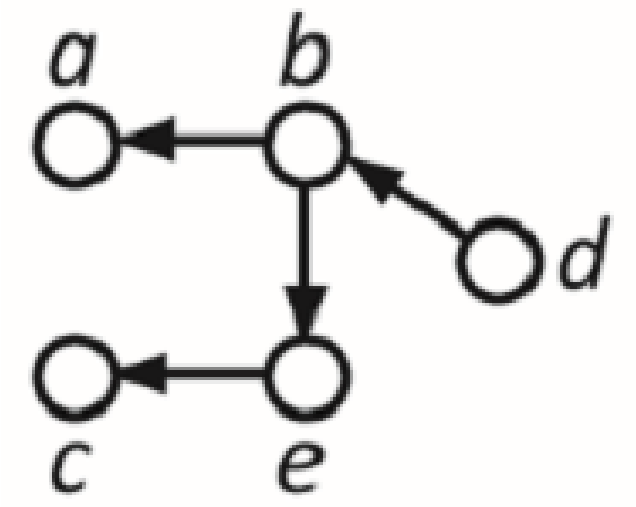
- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle
- Une **arborescence** est un arbre orienté possédant une unique racine

Graphes particuliers

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle
- Une **arborescence** est un arbre orienté possédant une unique racine
- Une **racine** est un sommet r tel qu'il existe un chemin de r à i pour tout $i \neq r$



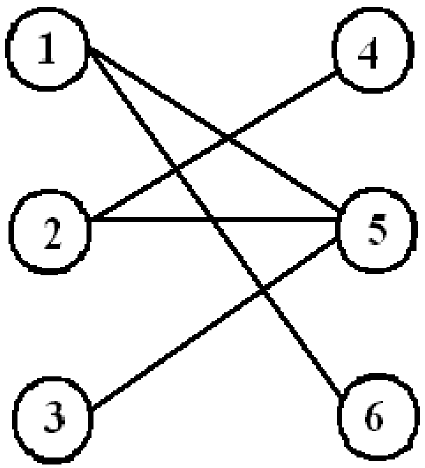
Un arbre



Une arborescence de racine d

Graphes particuliers

- Un graphe $G = (S, A)$ est **biparti** si S peut être partitionné en 2 ***classes*** S_1 et S_2 tels que 2 sommets de la même classe ne soient **jamais** adjacents



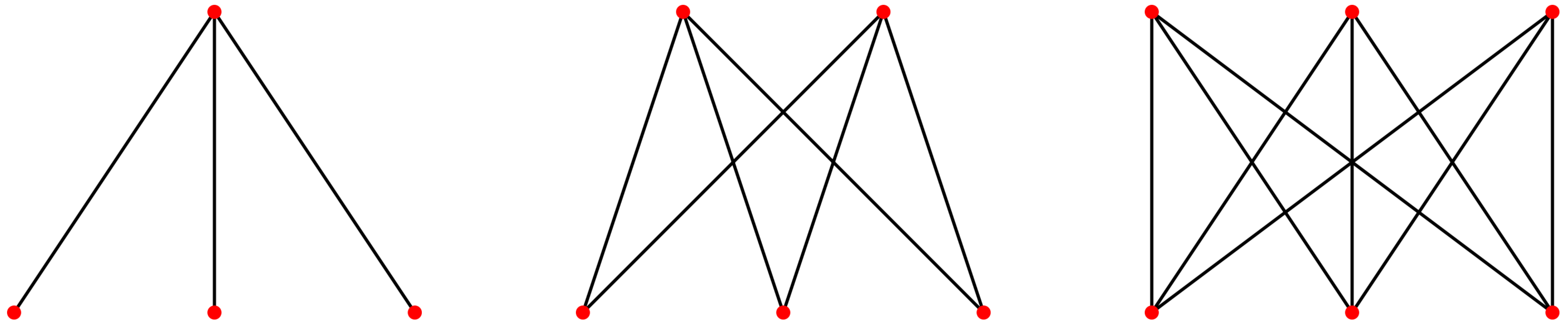
- Un graphe biparti permet de représenter une relation binaire entre S_1 et S_2

Graphes particuliers

- Un graphe $G = (S, A)$ est dit **biparti complet** (ou **biclique**) s'il est biparti et contient le nombre maximal d'arêtes
  - Il existe une partition de S en 2 $classes$ S_1 et S_2 telle que $A = S_1 \times S_2$
  - Il est noté $K_{n,m}$ si $n = |S_1|$ et $m = |S_2|$

Graphes particuliers

- Un graphe $G = (S, A)$ est dit **biparti complet** (ou **biclique**) s'il est biparti et contient le nombre maximal d'arêtes
  - Il existe une partition de S en 2 $classes$ S_1 et S_2 telle que $A = S_1 \times S_2$
  - Il est noté $K_{n,m}$ si $n = |S_1|$ et $m = |S_2|$

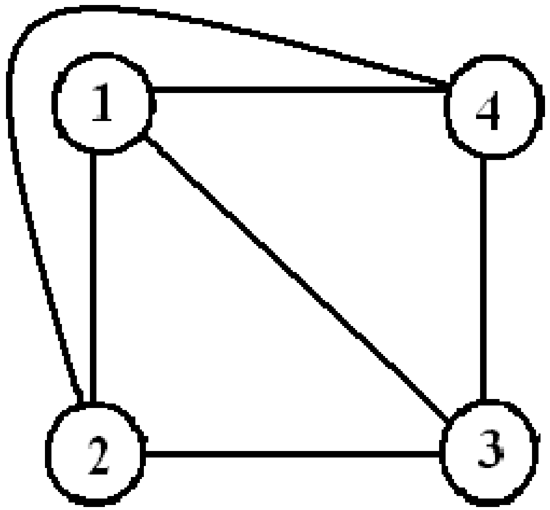


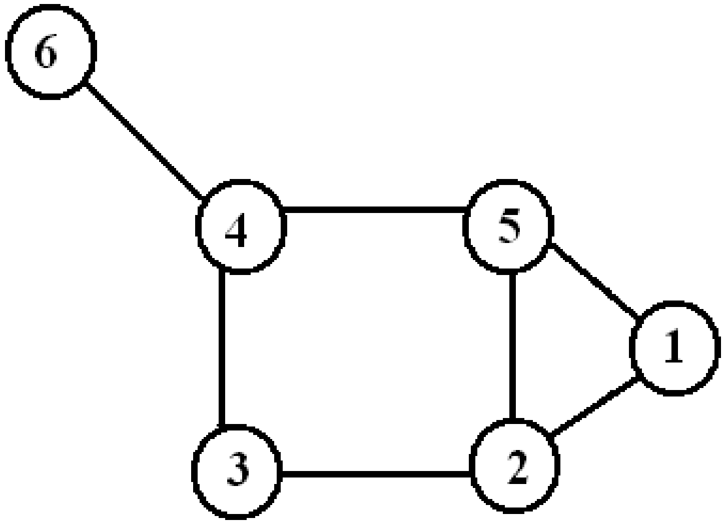
Graphes particuliers

- Un graphe est **planaire** si on peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes se croisent
  - K_4 est le plus grand graphe complet planaire

Graphes particuliers

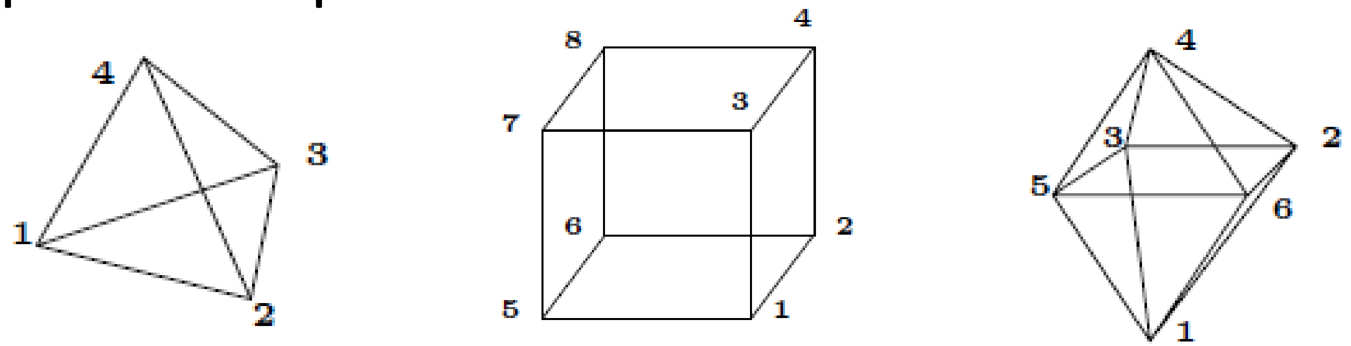
- Un graphe est **planaire** si on peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes se croisent
  - K_4 est le plus grand graphe complet planaire





Exercice (exercice 13 fiche propriétés)

- On considère les trois graphes platoniciens suivants. Montrer que ces graphes sont réguliers, trouver leur nombre chromatique. Finalement, montrer que ces graphes sont planaires.

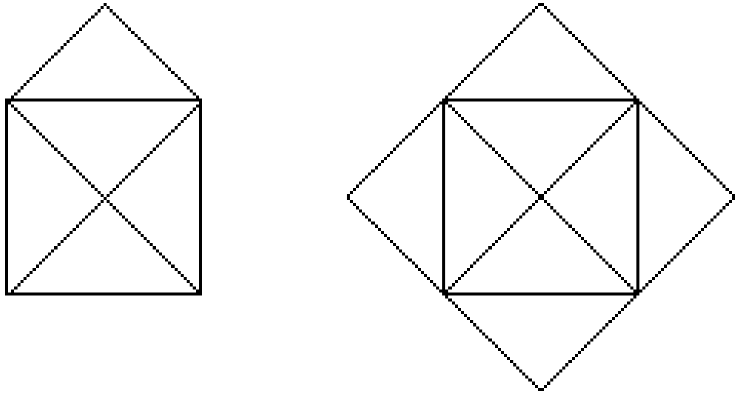


Graphes particuliers

- Un circuit (cycle) **eulerien** est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque arc (arête) du graphe considéré
- $G = (S, A)$ est **Eulérien** s'il admet un circuit (cycle) eulérien

Graphes particuliers

- Un circuit (cycle) **eulérien** est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque arc (arête) du graphe considéré
- $G = (S, A)$ est **Eulérien** s'il admet un circuit (cycle) eulérien
- **Théorème d'Euler (1736) :** un graphe connexe est Eulérien si et seulement si $d(i)$ est pair pour tout $i \in S$
  - Un graphe Eulérien peut être tracé sans lever le crayon

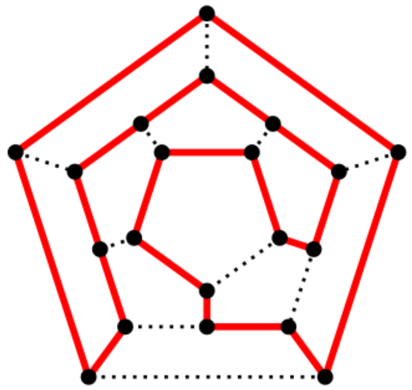


Graphes particuliers

- Un circuit (cycle) **hamiltonien** est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque sommet du graphe considéré
- $G = (S, A)$ est **Hamiltonien** s'il admet un circuit (cycle) hamiltonien

Graphes particuliers

- Un circuit (cycle) **hamiltonien** est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque sommet du graphe considéré
- $G = (S, A)$ est **Hamiltonien** s'il admet un circuit (cycle) hamiltonien
- Un graphe simple avec $n = |S| \geq 3$ est Hamiltonien si
  - $\forall i \in S, d(i) \geq \frac{n}{2}$ Théorème de Dirac (1952)
  - $\forall (i,j) \notin A, d(i) + d(j) \geq n$ Théorème d'Ore (1960)

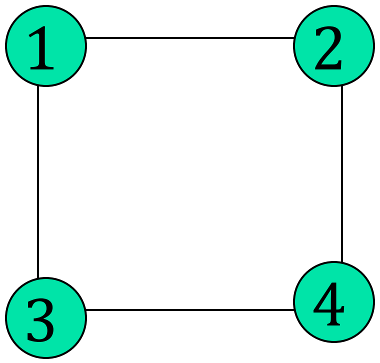


Isomorphisme

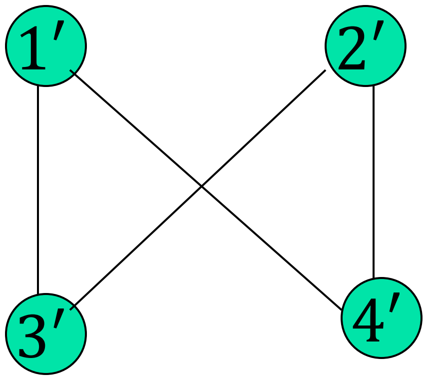
- Un **isomorphisme** entre $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ est une bijection $f : S \to S'$ telle que $(i, j) \in A \leftrightarrow (f(i), f(j)) \in A'$

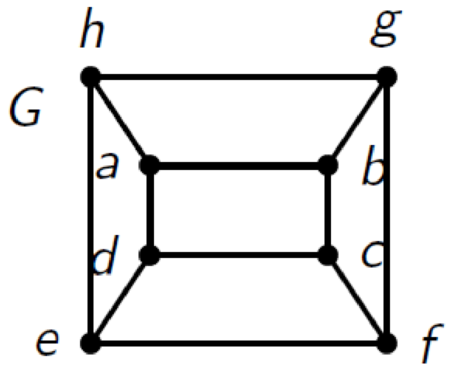
Isomorphisme

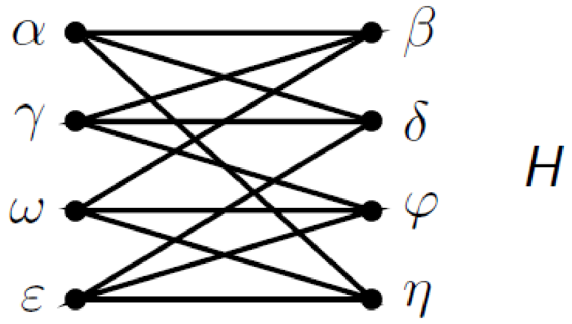
- Un **isomorphisme** entre $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ est une bijection $f: S \to S'$ telle que $(i, j) \in A \leftrightarrow (f(i), f(j)) \in A'$



$$i' = f(i)$$

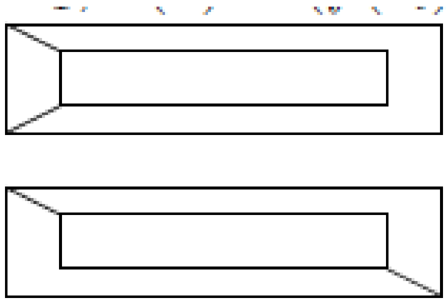


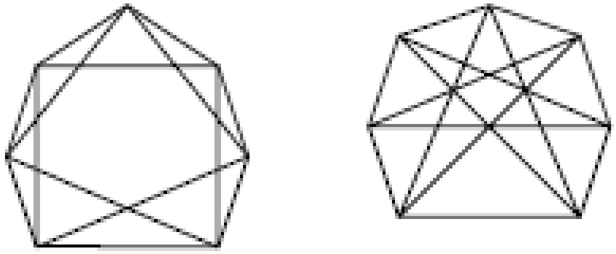




Exercice (exercice 12 fiche propriétés)

- Deux graphes sont isomorphes s'ils représentent la même situation. En d'autres termes, deux graphes $G1 = (S1,A1)$ et $G2 = (S2,A2)$ sont isomorphes s'il existe deux bijections $f : S1 \rightarrow S2$ et $h : A1 \rightarrow A2$, telles que : $\forall a = (si, sj) \in A1$, $h(a) = (f(si), f(sj)) \in A2$. Les graphes ci-dessous sont-ils isomorphes ?





Terminologie : récapitulatif

Graphe orienté	Graphe non orienté
Sommet	Sommet
Arc	Arête
Chemin	Chaîne
Circuit	Cycle
Successeur	Voisin
Prédécesseur	Voisin
Voisin	Voisin
Extrémité Initiale	Extrémité
Extrémité Terminale	Extrémité
Demi-degré	Degré
Degré	Degré
Forte Connexité	Connexité