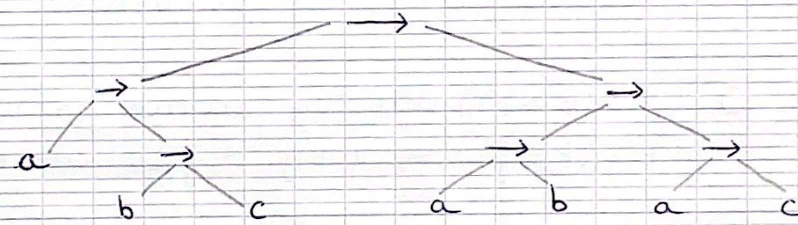
TD n° 1 : Programmation Logique

Exercice n° 1

La formule $\varphi = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ est-elle une tautologie ? Est-elle satisfiable ? Si oui, donner un modèle.

Rq : une tautologie est une formule toujours vraie
satisfiable si la formule peut être rendue vraie au moins 1 fois

Méthode 1 : Table de vérité



nombre de ligne = nombre de variable ^3

a	→	b	→	c	→	a	→	b	→	a	→	c
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	f	f	t	t	t	t	f	t	f	f
t	t	f	t	t	t	t	f	f	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f	t	t	t	t	t	f	t	t	t	f	t	t
f	t	t	f	f	t	f	t	t	t	f	t	f
f	t	f	t	t	t	f	t	f	t	f	t	t
f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f

Rq :
$t \to f$: f
$t \to t$: t
$f \to f$: t
$f \to t$: t

La formule est toujours vraie = tautologie

Un modèle de φ peut être $a = t$, $b = t$ et $c = t$

Pour remplir le tableau on remplit a, b et c puis on remonte l'arbre : premier niveau
deuxième niveau
troisième niveau

Methode 2 : Raisonnement par l'absurde.

Pour être une tautologie φ doit être vraie.

On suppose que φ soit fausse

Pour que φ soit fausse $((a \to b) \to (a \to c))$ doit être fausse

$(a \to (b \to c))$ doit être vraie

Si $((a \to b) \to (a \to c))$ doit être fausse donc :

$(a \to b) =$ vraie donc $t \to b = t$ donc $b =$ vrai

$(a \to c) =$ faux donc $c =$ faux

$a =$ vrai

Or $(a \to (b \to c))$ doit être vrai avec les valeurs trouvées avant :

$(t \to (t \to f)) \to t \to f =$ false : contradiction

Methode 3 : Quinn

$\varphi = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$

$a = t$ | $a = f$

$(t \to (b \to c)) \to ((t \to b) \to (t \to c))$

$\underbrace{(b \to c) \to \underbrace{(b \to c)}}$

$(b \to c) \to (b \to c)$

$b = t$ | $b = f$

$\underbrace{(t \to c) \to (t \to c)}$

$c \to c$

$c = t$ | $c = f$

$t \to t = t$

$f \to f = t$

$(f \to c) \to (f \to c)$

$t \to t = t$

$(f \to (b \to c)) \to ((f \to b) \to (f \to c))$

$t \quad t \quad t$

$t \to \underbrace{(t \to t)}_{t}$

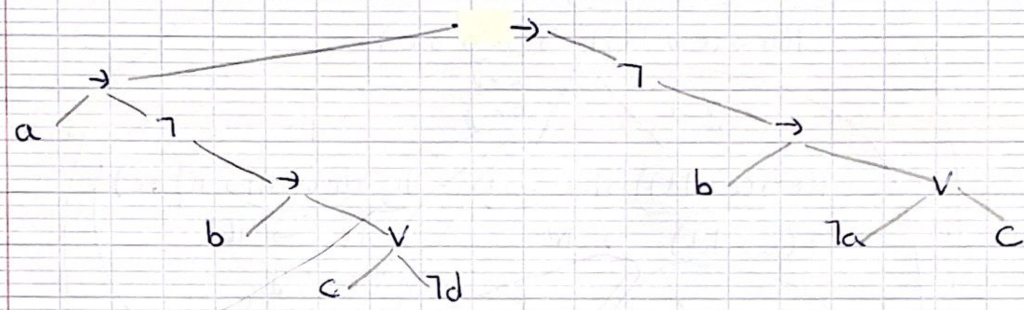
$t \to t = t$

toutes les feuilles sont vraies, la formule φ est vraie

Exercice n°2 :

La formule $\varphi = (a \to \neg(b \to (c \vee \neg d))) \to \neg(b \to (\neg a \vee c))$ est elle une tautologie ? si oui est-elle satisfiable, donner le modèle.

Méthode n°1 : table de vérité



a	→	¬	b	→	c	v	¬d	→	¬	b	→	¬a	v	c
t	f	f	t	t	t	t	f	t	f	t	t	f	t	t
t	f	f	t	t	t	t	t	t	f	t	t	f	t	t
t	t	t	t	f	f	f	f	t	t	t	f	f	f	f
t	t	t	t	f	f	t	t	t	t	t	f	f	f	f
t	f	f	f	t	t	t	f	t	f	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	t	t	t	t	f	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	f	f	f	t	f	f	t	f	f	f
t	f	f	f	t	f	t	t	t	f	f	t	f	f	f
f	t	f	t	t	t	t	f	f	f	t	t	t	t	t
f	t	f	t	t	t	t	t	f	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	f	f	f	f	f	f	t	t	t	t	f
f	t	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	t	t	f
f	t	f	f	t	t	t	f	f	f	f	t	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t	t	f	f	f	t	t	t	t
f	t	f	f	t	f	f	f	f	f	f	t	t	t	f
f	t	f	f	t	f	t	t	f	f	f	t	t	t	f

On peut simplifier $\underline{\varphi = a}$.

Méthode n°2 : Quinn

$[a \to \neg(b \to (c \vee \neg d))] \to \neg[b \to (\neg a \vee c)]$

$a = t$

$a = f$

$[t \to \neg(b \to (c \vee \neg d))] \to \neg[b \to (\neg t \vee c)]$

$\neg(b \to (c \vee \neg d)) \to \neg(b \to c)$

$b = t$

$b = f$

$\neg(t \to (c \vee \neg d)) \to \neg(t \to c)$

$\neg(c \vee \neg d) \to \neg c$

$c = t$

$\neg(t \vee \neg d) \to \neg t$

$\neg t \to f$

$f \to f =$ vrai

$c = f$

$\neg(f \vee \neg d) \to \neg f$

$\neg(f \vee \neg d) \to t$

$d = t$

$\neg(f \vee \neg t) \to t$

$t \to t =$ vrai

$d = f$

$\neg(f \vee \neg f) \to t$

$f \to t =$ vrai

$\neg(f \to (c \vee \neg d)) \to \neg(f \to c)$

$\neg t \to \neg t$

$f \to f$

vrai

pour $a = f$:

$[f \to \neg(b \to (c \vee \neg d))] \to \neg(b \to (\neg f \vee c))$

$t \to \neg(b \to t)$

t

f

$t \to f =$ faux

Conclusion : si a est vrai φ = vrai

faux

TD n°1 : Programmation logique

Méthode n°3 : L'Absurde

$\varphi = (a \to \neg(b \to (c \vee \neg d))) \to \neg(b \to (\neg a \vee c)]$

Si φ est une tautologie, φ est vraie.

On veut φ = faux donc

(1) $(a \to \neg(b \to (c \vee \neg d)))$ = vrai

(2) $\neg(b \to (\neg a \vee c))$ = faux $\Leftrightarrow$ $(b \to (\neg a \vee c))$ = vrai

si on prend b = vrai

c = vrai alors (2) vrai

Si on reprend (1) avec b = vrai et c = vrai

$a \to \neg(t \to (t \vee \neg d)))$

$a \to \neg(t \to t)$

$a \to \neg t$

$a \to f$

si a est vrai alors φ est fausse

si a est faux alors φ est vraie

Exercice n°3

Mettre sous forme FNC la formule suivante :

$\varphi = [a \to b \to (c \vee \neg d))] \to \neg(b \to (\neg a \vee c))$

Rappel : FNC = forme normale conjonctive $(\vee) \wedge (\vee) \wedge (\vee)$

$\varphi = (\neg a \vee (\neg b \vee c \vee \neg d)) \to \neg(b \to (\neg a \vee c))$

$\varphi = (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \to \neg(\neg b \vee \neg a \vee c)$

$\varphi = \neg(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \vee \neg(\neg b \vee \neg a \vee c)$

distributivité

$\varphi = (a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (b \wedge a \wedge \neg c)$ (= FNA $(\wedge) \vee (\wedge)$)

$\varphi = (a \vee b) \wedge (a \vee a) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee b) \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee b) \wedge (\neg c \vee a)$
$\wedge (\neg c \vee \neg c) \wedge (d \vee b) \wedge (d \vee a) \wedge (d \vee \neg c)$

$\varphi = (a \vee b) \wedge a \wedge (a \vee \neg c) \wedge b \wedge (b \vee \neg c) \wedge (d \vee \neg c) \wedge (d \vee a) \wedge (d \vee b) \wedge \neg c$

Application de l'algo de DAVIS et PUTMAN.

φ sous forme clausale :

Ensemble des clauses : $\{ \cancel{a}, \cancel{b}, \neg\cancel{a}, a\cancel{\vee} b, a\cancel{\vee}\neg c, b\cancel{\vee}\neg c, d\cancel{\vee} b, d\cancel{\vee} a, d\cancel{\vee}\neg c \}$

Dans l'algorithme si on a une clause = à un terme $(a, b, c \ldots)$ on peut la supprimer et supprimer ttes les clauses ds laquelle elle apparait.

On obtient un ensemble vide, cela signifie que φ est satisfiable.

Exercice n° 4 :

On souhaite équiper un coffre fort avec N serrures et attribuer les clefs de ces serrures à A, B, C, D et E de manière que (A et B) ou (A, C et D) ou (B, D et E) doivent être présents pour pouvoir ouvrir.

Les clefs peuvent être dupliquées.

Quelle est la valeur de N minimale et comment répartir les clefs ?

On peut écrire $\varphi = (A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E)$ = FNC

Mise sous forme FND :

$\varphi = (A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E)$

$\varphi = (A \vee A \vee D) \wedge (A \vee A \vee B) \wedge (A \vee A \vee E) \wedge (A \vee C \vee B) \wedge (A \vee C \vee D) \wedge (A \vee C \vee E) \wedge (A \vee D \vee B) \wedge$
$(A \vee D \vee D) \wedge (A \vee D \vee E) \wedge (B \vee A \vee D) \wedge (B \vee A \vee B) \wedge (B \vee A \vee E) \wedge (B \vee C \vee B) \vee (B \vee C \vee D) \wedge$
$(B \vee C \vee E) \wedge (B \vee D \vee B) \wedge (B \vee D \vee D) \wedge (B \vee D \vee E)$

$\varphi = (A \vee D) \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee E) \wedge (A \vee C \vee B) \wedge (A \vee C \vee D) \wedge (A \vee C \vee E) \wedge (A \vee D \vee B) \wedge (A \vee D) \wedge$
$(B \vee D) \wedge (A \vee D \vee E) \wedge (B \vee A \vee D) \wedge (B \vee A) \wedge (B \vee A \vee E) \wedge (B \vee C) \vee (B \vee C \vee D)$
$\wedge (B \vee C \vee E) \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee D \vee E)$

$\varphi = (A \vee D) \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee C)$

on a besoin de 5 serrures

	A	B	C	D	E	
1	x	x				A∨B
2	x			x		A∨D
3	x				x	A∨E
4		x	x			B∨C
5		x		x		B∨D

La serrure A aura les clés 1,2 et 3
B aura les clés 1,4 et 5
C aura la clé 4
D aura les clés 2 et 5
E aura la clé 3