Graphes et Algorithmes – Partie III
Opérations et représentations

FISA Informatique $1^{ère}$ année

2020 - 2021

INSA
INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
HAUTS-DE-FRANCE

Université
Polytechnique
HAUTS-DE-FRANCE

Opérations et représentations – Plan

- Opérations sur les graphes
  - Opérations simples
  - Sous-structures
  - Transformations
- Ensembles particuliers
- Représentations

Opérations sur les graphes

- Il existe plusieurs types d'opérations
  - Opérations élémentaires sur un graphe

Opérations sur les graphes

- Il existe plusieurs types d'opérations
  - Opérations élémentaires sur un graphe
  - Opérations unaires $\rightarrow$ créent un nouveau graphe à partir d'un graphe initial
  - Opérations binaires $\rightarrow$ créent un nouveau graphe à partir de deux graphes
  - etc.

Opérations élémentaires

- Soit $G = (S, A)$ un graphe
  - Insérer un sommet $i \notin S$: $G' = (S \cup \{i\}, A)$
  - Insérer un arc / une arête $(i, j) \notin A$: $G' = (S, A \cup \{(i, j)\})$

Opérations élémentaires

- Soit $G = (S, A)$ un graphe
  - Insérer un sommet $i \notin S$: $G' = (S \cup \{i\}, A)$
  - Insérer un arc / une arête $(i, j) \notin A$: $G' = (S, A \cup \{(i, j)\})$
  - Supprimer un sommet $i \in S$:

    $$G' = (S - \{i\}, A - \{ i, j : j \in V(i) \})$$

  - Supprimer un arc / une arête $(i, j) \in A$: $G' = (S, A - \{(i, j)\})$

Quelques opérations unaires

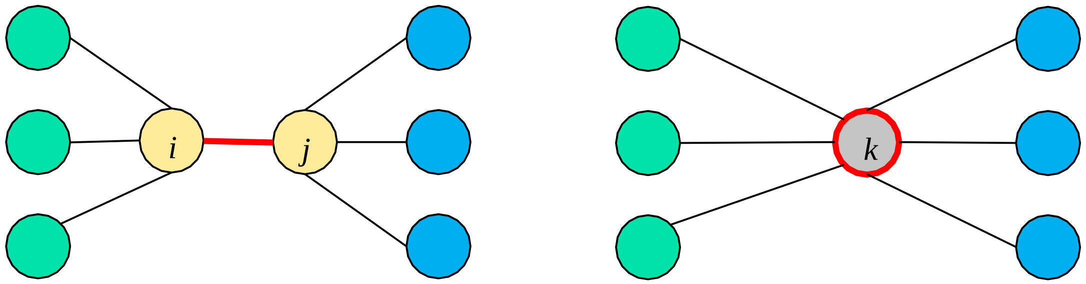
- Contraction d’arête
- Duplication de sommet
- Sous-graphe
- Graphe partiel
- Graphe complémentaire
- Graphe transposé
- Graphe de ligne
- etc.

Contraction d’arête

- Soit $G = (S, A)$ un graphe, une **contraction** d'arête $[i, j]$ consiste à fusionner ses deux extrémités en un sommet k, le graphe devient
  - G' = (S', A') avec S' = S − { i, j } + { k },
  - A' est égal à A mais les occurrences de i et j sont remplacées par k

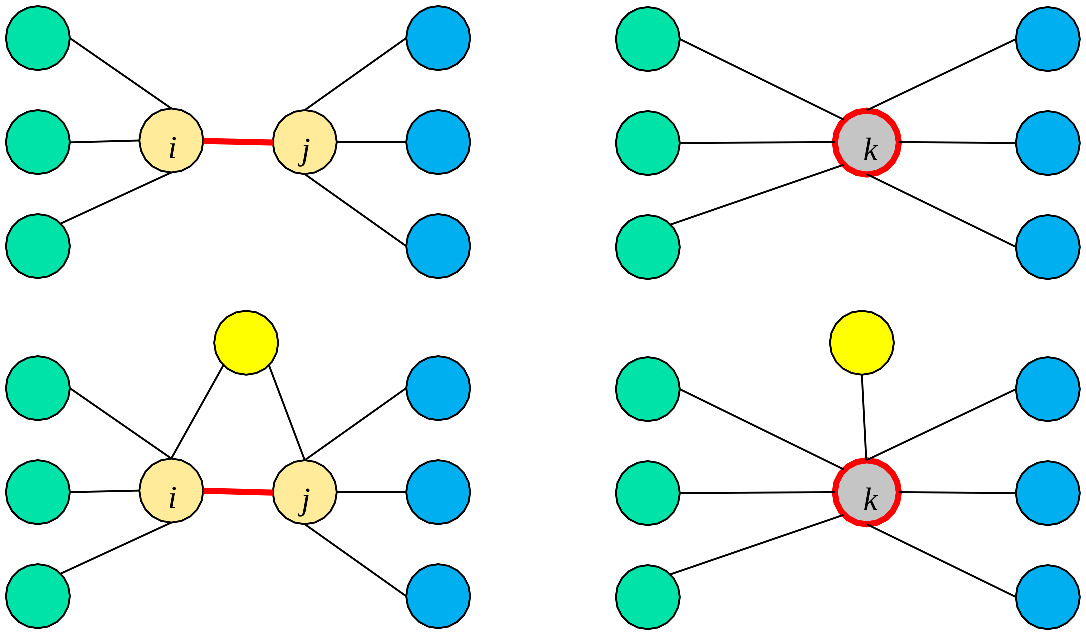
Contraction d'arête

- Soit $G = (S, A)$ un graphe, une **contraction** d'arête $[i, j]$ consiste à fusionner ses deux extrémités en un sommet k, le graphe devient
  - $G' = (S', A')$ avec $S' = S - \{ i, j \} + \{ k \}$,
  - A' est égal à A mais les occurrences de i et j sont remplacées par k



Contraction d’arête

- Soit $G = (S, A)$ un graphe, une **contraction** d'arête $[i, j]$ consiste à fusionner ses deux extrémités en un sommet k, le graphe devient
  - $G' = (S', A')$ avec $S' = S - \{ i, j \} + \{ k \}$,
  - A' est égal à A mais les occurrences de i et j sont remplacées par k



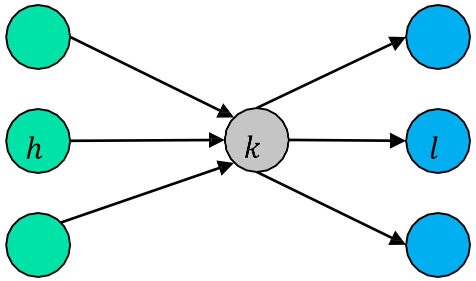
Aggregation

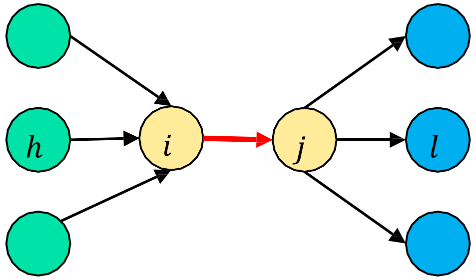
Duplication de sommet

- Soit $G = (S, A)$ un graphe, une **duplication du sommet** k consiste à le remplacer par deux sommets i et j relié par un arc (ou une arête), le graphe devient
  - G' = (S', A') avec S' = S − { k } + { i, j },
  - A' est égal à A + { i, j } et
    - Les arcs (arêtes) (h, k) sont remplacées par (h, i)
    - Les arcs (arêtes) (k, l) sont remplacées par (j, l)

Duplication de sommet

- Soit $G = (S, A)$ un graphe, une **duplication du sommet** k consiste à le remplacer par deux sommets i et j relié par un arc (ou une arête), le graphe devient
  - $G' = (S', A')$ avec $S' = S - \{ k \} + \{ i, j \}$,
  - A' est égal à $A + \{ i, j \}$ et
    - Les arcs (arêtes) (h, k) sont remplacées par (h, i)
    - Les arcs (arêtes) (k, l) sont remplacées par (j, l)





Sous-structures d'un graphe $G = (S, A)$

- Le **sous-graphe** engendré par $S' \subseteq S$ est le graphe

$$G(S') = (S', A \cap (S' \times S'))$$

Sous-structures d'un graphe $G = (S, A)$

- Le **sous-graphe** engendré par $S' \subseteq S$ est le graphe

$$G(S') = (S', A \cap (S' \times S'))$$

- Le **graphe partiel** engendré par $A' \subseteq A$ est le graphe

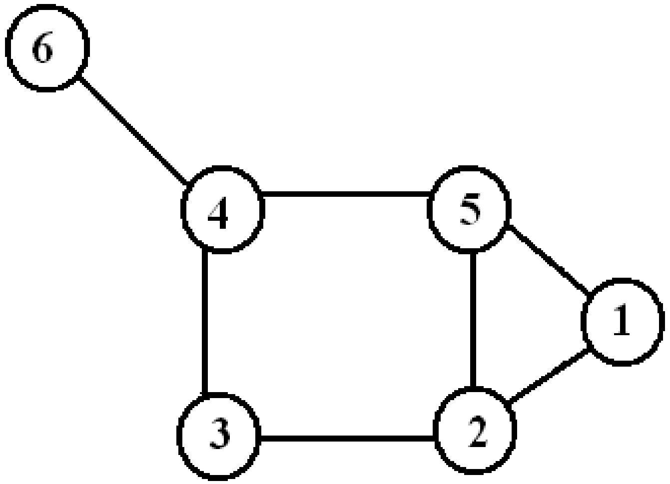
$$G(A') = (S, A')$$

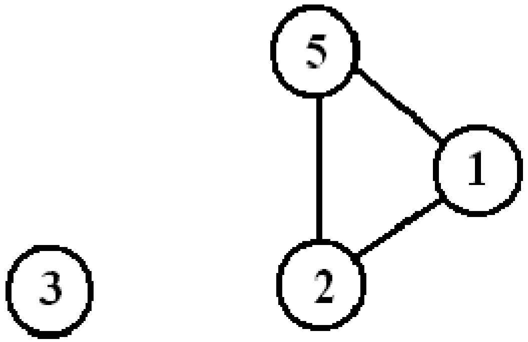
Sous-structures d'un graphe $G = (S, A)$

- Le **sous-graphe** engendré par $S' \subseteq S$ est le graphe
$$G(S') = (S', A \cap (S' \times S'))$$
- Le **graphe partiel** engendré par $A' \subseteq A$ est le graphe
$$G(A') = (S, A')$$
- Un **sous-graphe partiel** de G est un sous-graphe d'un graphe partiel de G
- Un graphe partiel est aussi appelé un **sous-graphe couvrant**

Super graphe de $G = (S, A)$

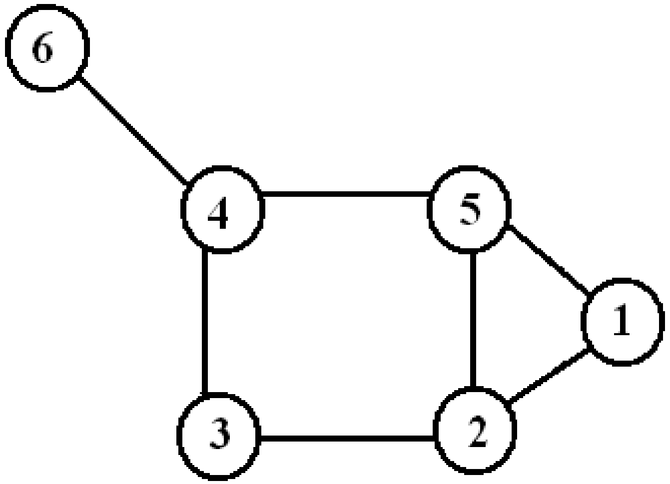
- Un **super graphe** de G est un graphe qui contient G comme graphe partiel

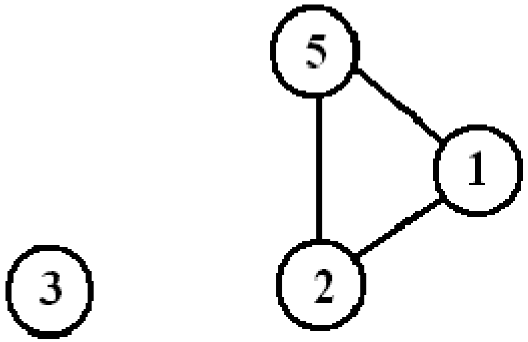




Super graphe de $G = (S, A)$

- Un **super graphe** de G est un graphe qui contient G comme graphe partiel





- **Remarque**
  - Tout graphe simple de n sommets est un sous-graphe couvrant de K_n

Exemple : cartes routières

- Soit G le graphe des routes **nationales et autoroutes**

Exemple : cartes routières

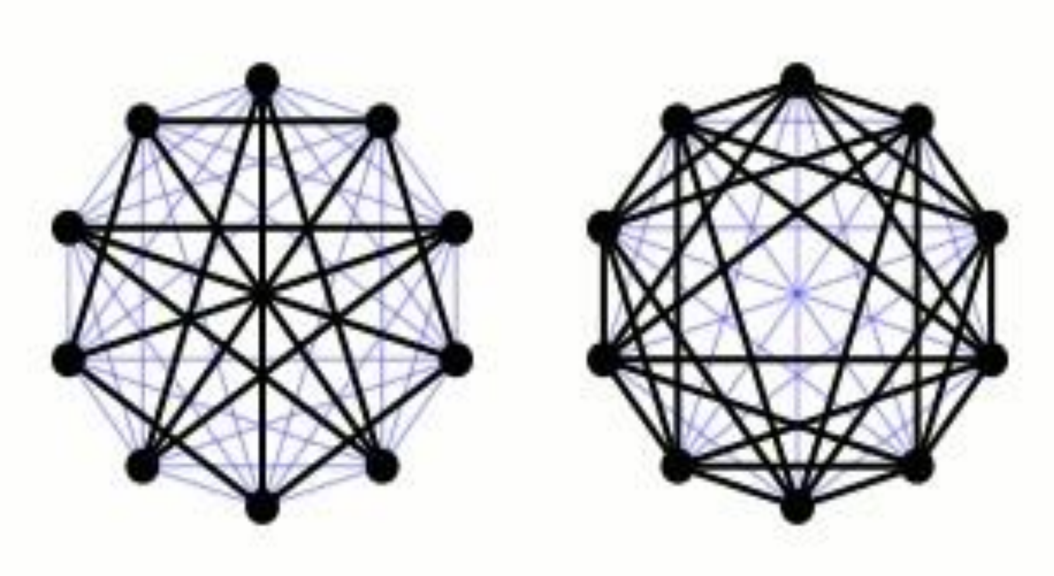
- Soit G le graphe des routes **nationales et autoroutes**
  - La carte d'une **ville** est un sous-graphe
  - La carte des routes **nationales** est un graphe partiel
  - La carte des routes **nationales d'une ville** est un sous-graphe partiel

Graphe complémentaire de $G = (S, A)$

- Le graphe **complémentaire** d'un graphe simple G = (S, A) est le graphe G' = (S, A') tel que $(i, j) \in A \leftrightarrow (i, j) \notin A'$

Graphe complémentaire de $G = (S, A)$

- Le graphe **complémentaire** d'un graphe simple $G = (S, A)$ est le graphe $G' = (S, A')$ tel que $(i, j) \in A \leftrightarrow (i, j) \notin A'$



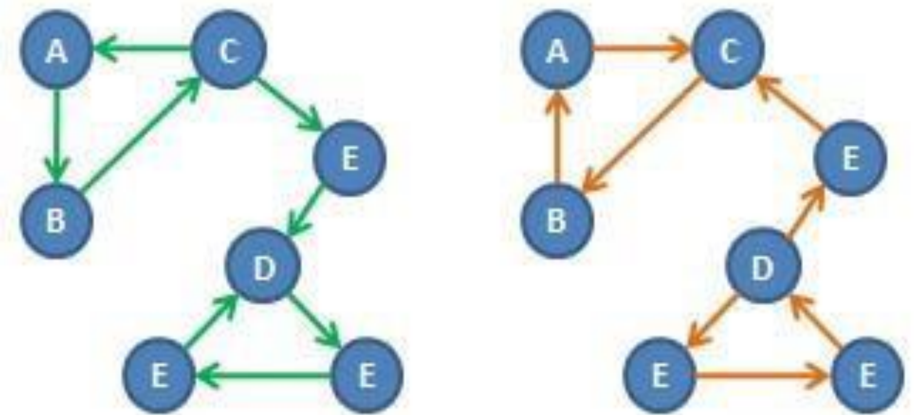
$\rightarrow$ Aussi appelé graphe **inversé**

Graphe transposé de $G = (S, A)$

- Le graphe **transposé** d'un graphe **orienté** $G = (S, A)$ est le graphe $G^{\mathsf{T}} = (S, A^{\mathsf{T}})$ tel que $A^{\mathsf{T}} = \{\, (i, j) : (j, i) \in A\}$

Graphe transposé de $G = (S, A)$

- Le graphe **transposé** d'un graphe **orienté** $G = (S, A)$ est le graphe $G^\mathsf{T} = (S, A^\mathsf{T})$ tel que $A^\mathsf{T} = \{\ (i, j) : (j, i) \in A\}$



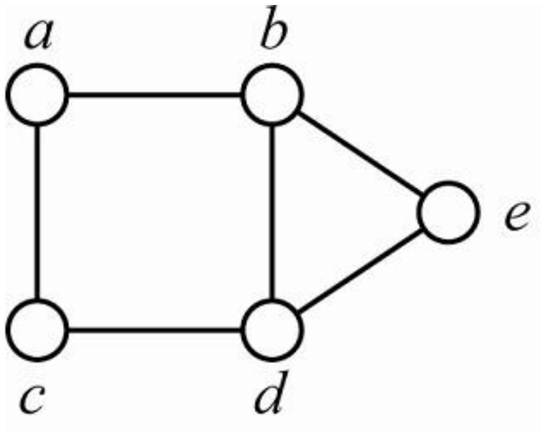
$\rightarrow$ Aussi appelé graphe **inverse**

Graphe de ligne de $G = (S, A)$

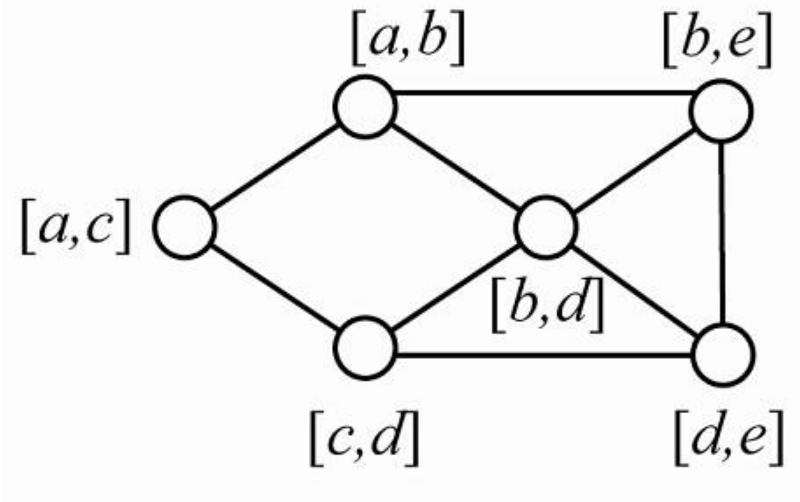
- Le graphe de **ligne** associé à un graphe G = (S, A), noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets représentent les arêtes de G, et tel que deux sommets de $L(G)$ sont reliés par une arête si et seulement si les deux arêtes qu'ils représentent dans G ont une extrémité commune

Graphe de ligne de $G = (S, A)$

- Le graphe de **ligne** associé à un graphe $G = (S, A)$, noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets représentent les arêtes de G, et tel que deux sommets de $L(G)$ sont reliés par une arête si et seulement si les deux arêtes qu'ils représentent dans G ont une extrémité commune



G



$L(G)$

$\rightarrow$ Aussi appelé graphe **adjoint**

Quelques opérations binaires

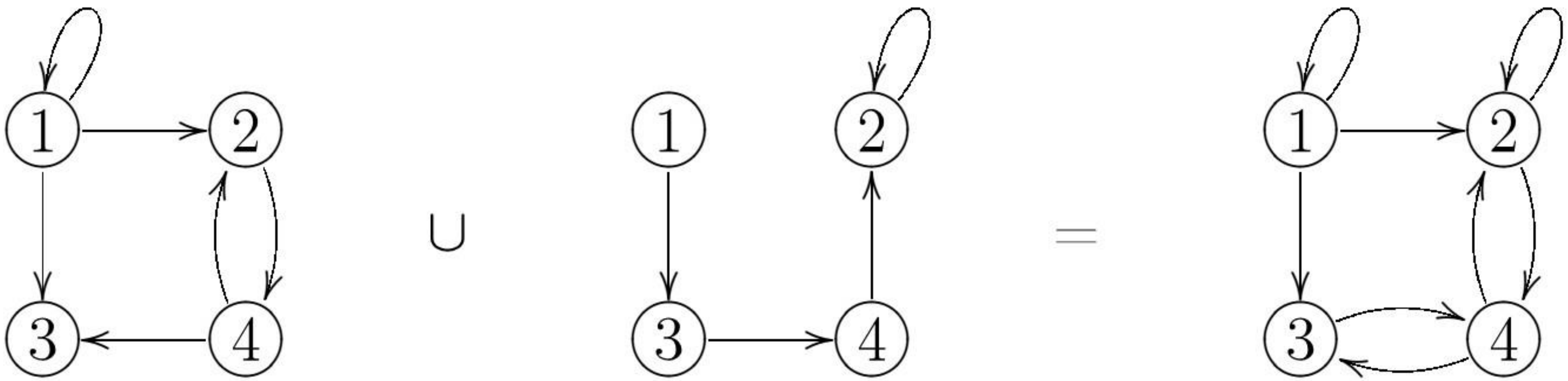
- Union
- Intersection
- Produit cartésien
- etc.

Union de deux graphes

- $G_1 = (S, A_1)$ et $G_2 = (S, A_2)$
- **Union** : $G_1 \cup G_2 = (S, A_1 \cup A_2)$

Union de deux graphes

- $G_1 = (S, A_1)$ et $G_2 = (S, A_2)$
- Union : $G_1 \cup G_2 = (S, A_1 \cup A_2)$

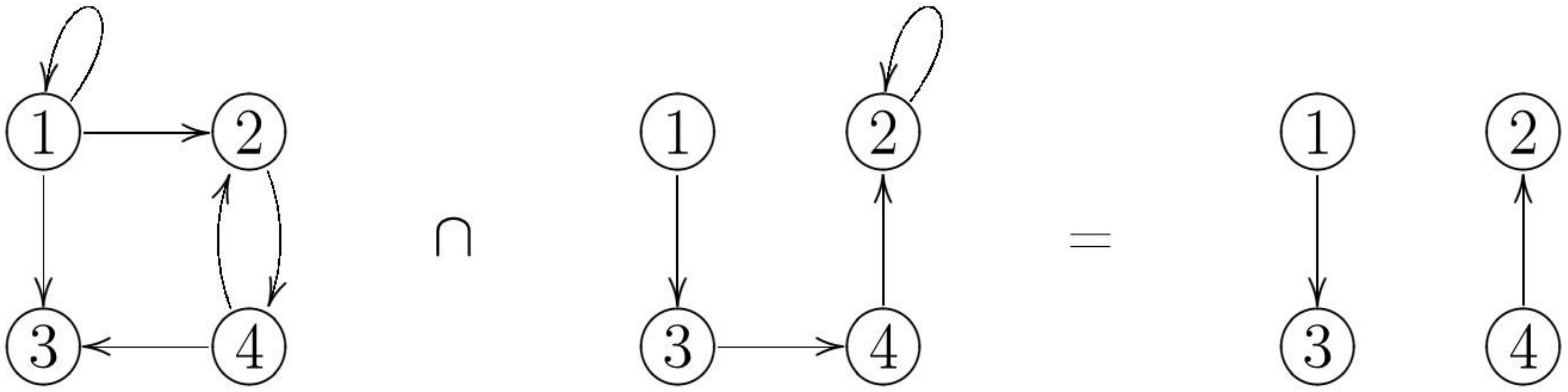


Intersection de deux graphes

- $G_1 = (S, A_1)$ et $G_2 = (S, A_2)$
- **Intersection** : $G_1 \cap G_2 = (S, A_1 \cap A_2)$

Intersection de deux graphes

- $G_1 = (S, A_1)$ et $G_2 = (S, A_2)$
- Intersection : $G_1 \cap G_2 = (S, A_1 \cap A_2)$



Produit cartésien de deux graphes

- Le **produit cartésien** de $G_1 = (S1, A_1)$ et $G_2 = (S2, A_2)$ est défini par

  $G = G_1 \boxdot G_2 = (S, A)$ avec

  $S = S1 \times S2$

  $((i, i'), (j, j')) \in A$ si

  - $i = j$ et $(i', j') \in A_2$, ou
  - $i' = j'$ et $(i, j) \in A_1$

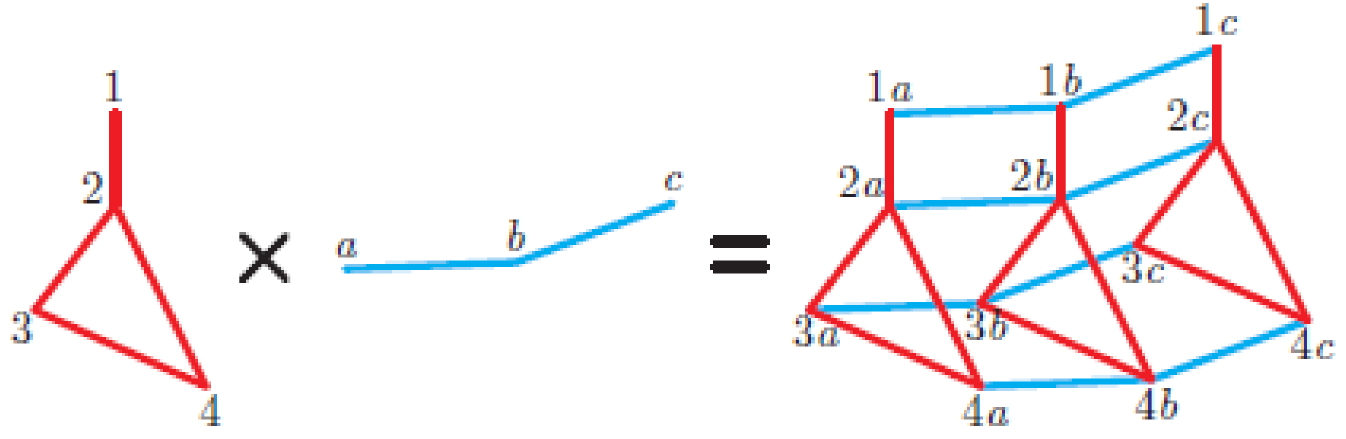
Produit cartésien de deux graphes

- Le **produit cartésien** de $G_1 = (S1, A_1)$ et $G_2 = (S2, A_2)$ est défini par

  $G = G_1 \boxdot G_2 = (S, A)$ avec

  $S = S1 \times S2$

  $((i, i'), (j, j')) \in A$ si
  - $i = j$ et $(i', j') \in A_2$, ou
  - $i' = j'$ et $(i, j) \in A_1$

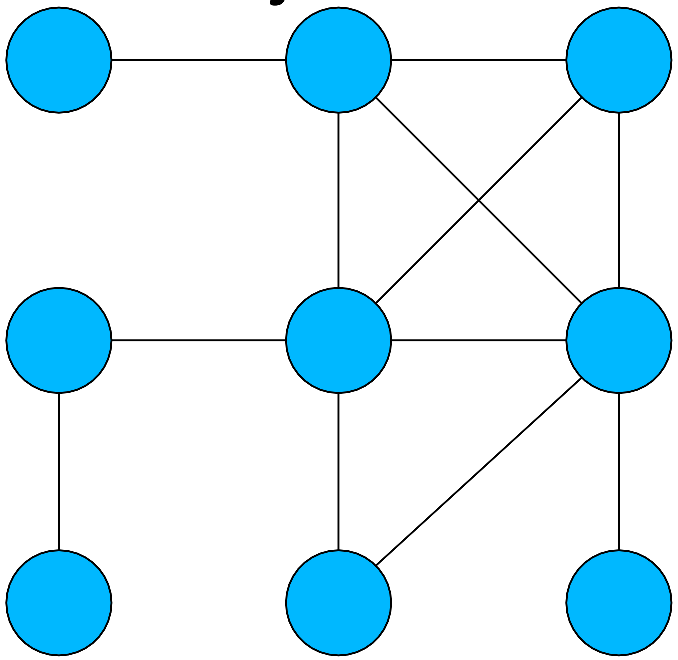


Quelques ensembles particuliers

- Clique
- Arbre couvrant
- Couplage
- Stable
- Transversal

Clique

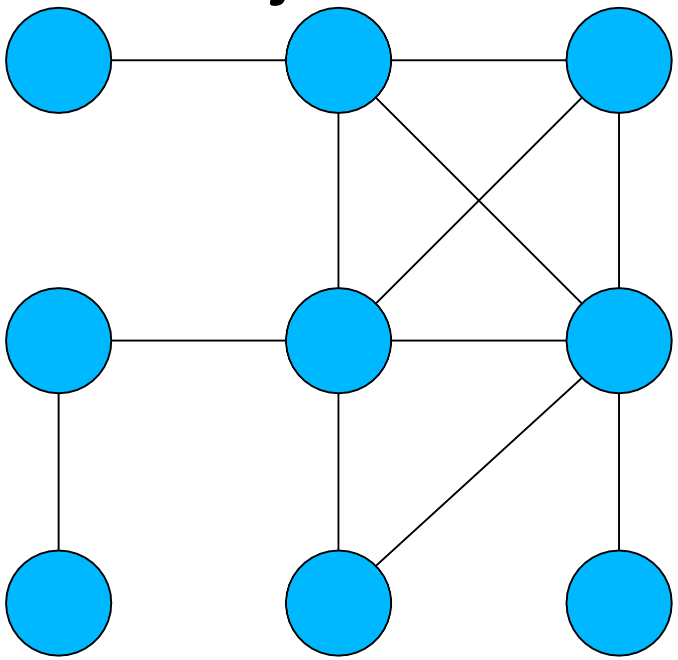
- Une **clique** dans un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble K de sommets deux à deux adjacents



G

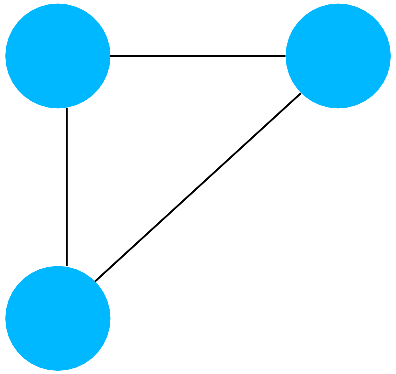
Clique

- Une **clique** dans un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble K de sommets deux à deux adjacents

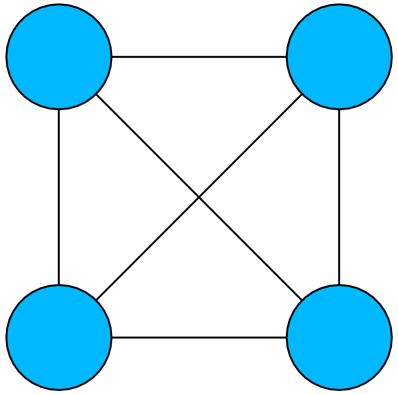


G

$\rightarrow$ sous-graphe complet



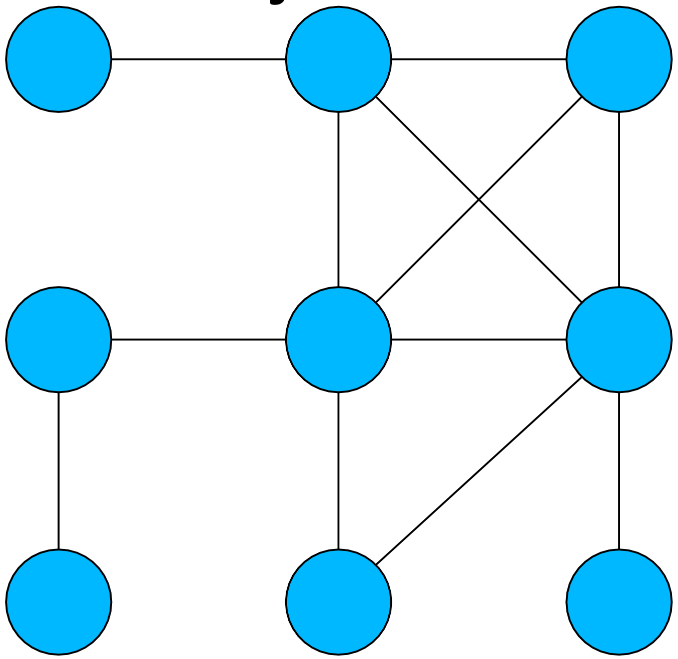
Une clique d'ordre 3



Une clique d'ordre 4

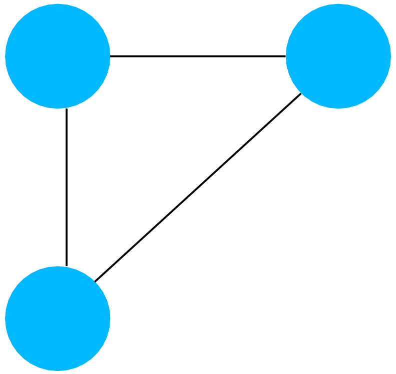
Clique

- Une **clique** dans un graphe G = (S, A) est un ensemble K de sommets deux à deux adjacents

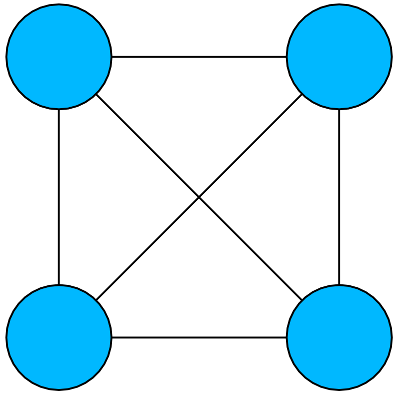


G

$\rightarrow$ sous-graphe complet



Une clique d'ordre 3

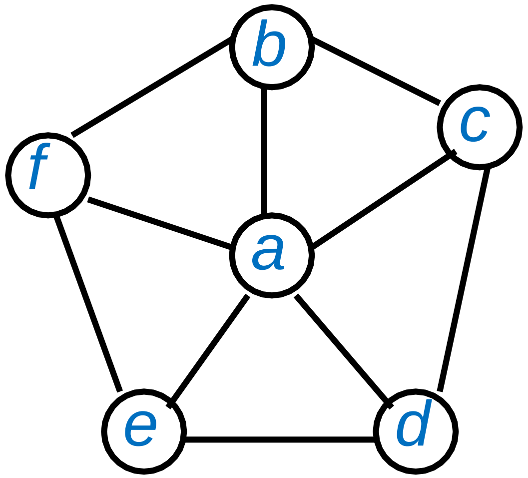


Une clique d'ordre 4

- Cas particulier : une **biclique** est un graphe biparti complet

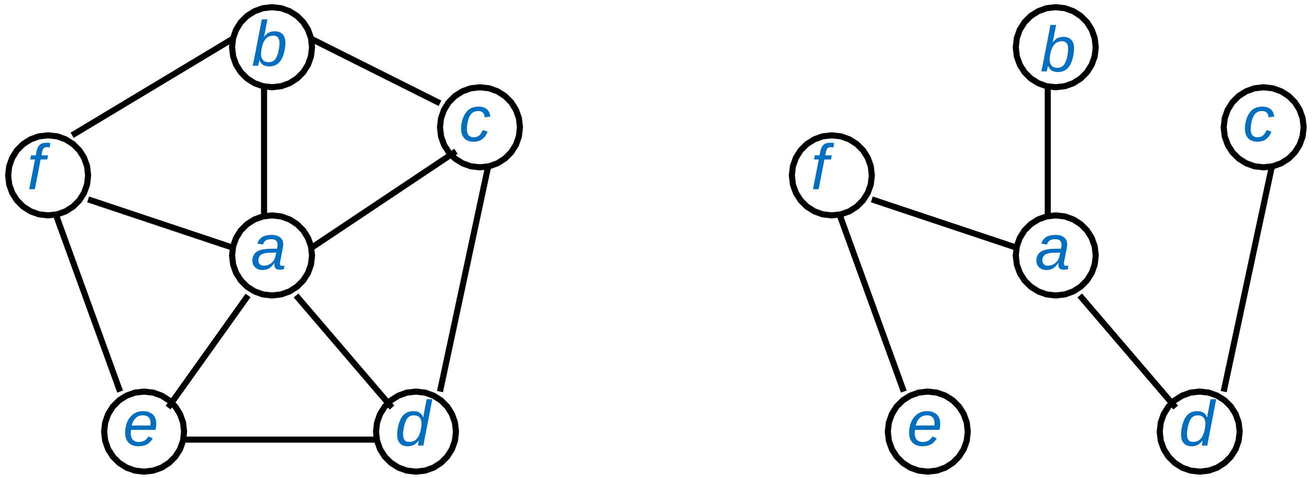
Arbre couvrant

- Un **arbre couvrant** d'un graphe non orienté connexe est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe



Arbre couvrant

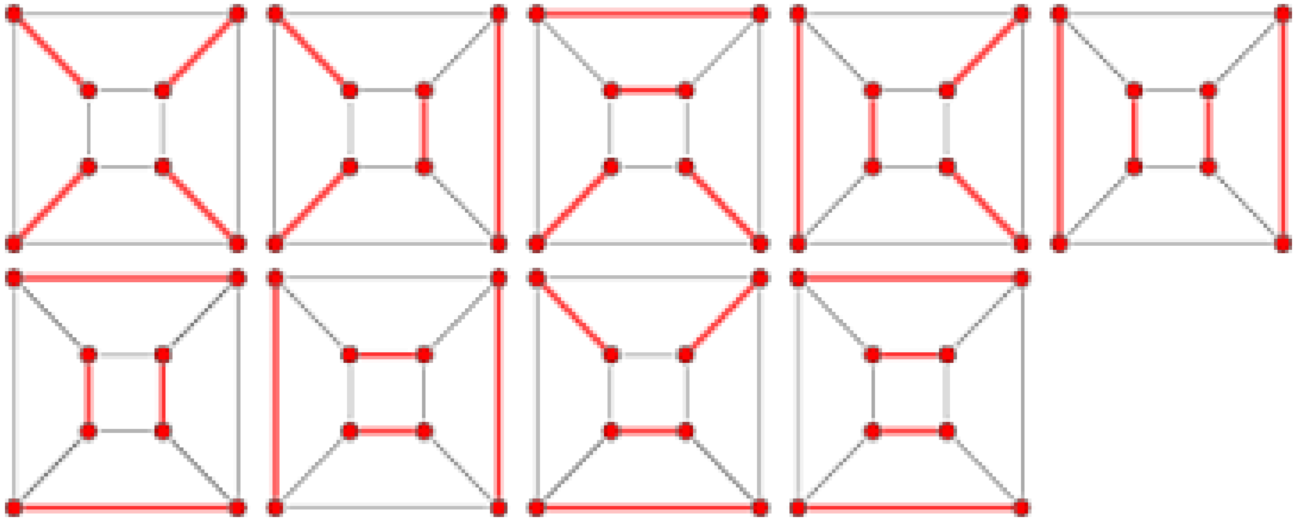
- Un **arbre couvrant** d'un graphe non orienté connexe est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe



$\rightarrow$ sous-graphe acyclique maximal

Couplage

- Un **couplage** dans un graphe non orienté est un ensemble d’arêtes n’ayant aucune extrémité en commun



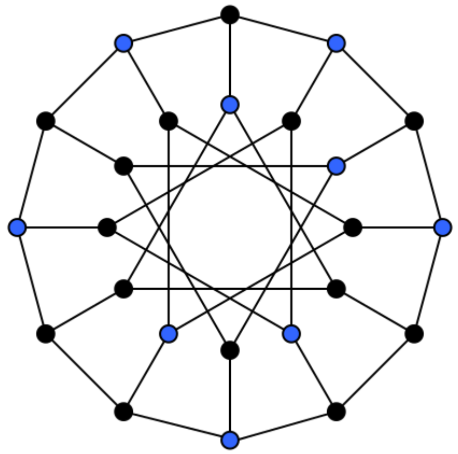
→ Couplage **parfait**

Stable

- Un **stable** dans un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble S' de sommets deux à deux non adjacents

Stable

- Un **stable** dans un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble S' de sommets deux à deux non adjacents
- **Remarque** : le sous-graphe $G(S^{'})$ est vide



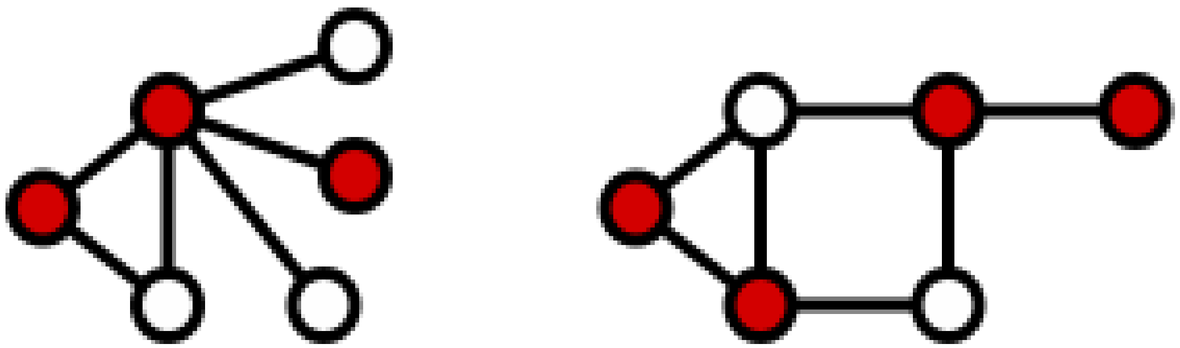
→ Appelé aussi **ensemble indépendant**

Transversal

- Un **transversal** dans un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble S' de sommets tel que toutes les arêtes de G ont au moins une extrémité dans S'

Transversal

- Un **transversal** dans un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble S' de sommets tel que toutes les arêtes de G ont au moins une extrémité dans S'



$\rightarrow$ Appelé aussi **couverture ou support**

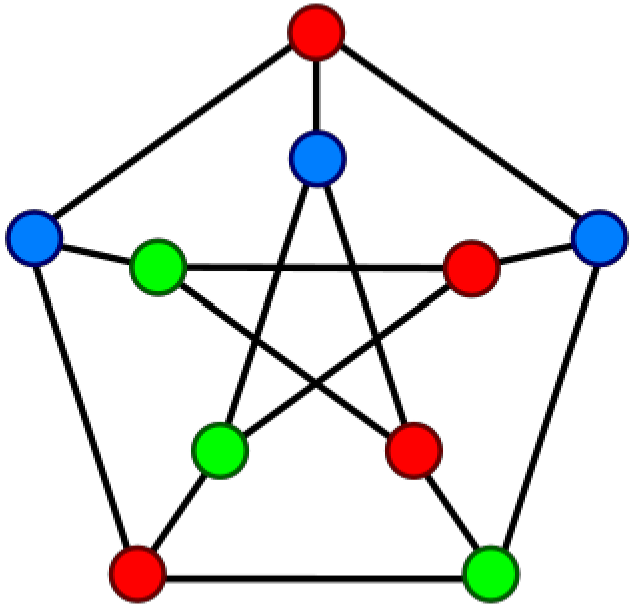
- **Remarque** : le complémentaire d'un transversal est un stable

Coloration de graphe

- La **coloration** d'un graphe consiste à attribuer une couleur à chaque sommet de manière à ce que deux sommets adjacents soient de couleur différente

Coloration de graphe

- La **coloration** d’un graphe consiste à attribuer une couleur à chaque sommet de manière à ce que deux sommets adjacents soient de couleur différente



- Nombre de couleurs = **nombre chromatique** du graphe
- **Remarque** : on peut aussi parfois colorier les arêtes

Exercice (exercice 2 fiche modélisation)

- Une usine fabrique 6 produits chimiques notés *pi*, *i* = 1*, . . . ,* 6. Le stockage de certains d'entre eux dans un même entrepôt présente un réel danger représenté par le tableau ci-dessous dans lequel un « ***oui*** » indique que les deux produits correspondants ne peuvent pas être stockés ensemble. Comment trouver le nombre minimum d'entrepôts nécessaires à l'usine pour stocker l'ensemble des produits à l'aide d'un graphe ?

	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	non	oui	oui	oui	oui
p_2		oui	oui	non	oui
p_3			oui	oui	oui
p_4				non	oui
p_5					non

Exercice (exercice 5 fiche modélisation)

- Trois professeurs notés $P1$, $P2$ et $P3$ devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes notées $C1$, $C2$ et $C3$ en respectant les règles suivantes :

- $P1$ doit donner 2 heures de cours à $C1$ et 1 heure à $C2$;
- $P2$ doit donner 1 heure de cours à $C1$, 1 heure à $C2$ et 1 heure à $C3$;
- $P3$ doit donner 1 heure de cours à $C1$, 1 heure à $C2$ et 2 heures à $C3$.

Comment représenter cette situation par un graphe pour déterminer le nombre minimum de plages horaires nécessaires ?

Représentation d’un graphe

- Eléments de comparaison $\rightarrow$ performance
- Opérations de bases
- Représentations graphique et mathématique
- Matrice d’incidence
- Matrice d’adjacence
- Listes d’adjacence

Performance d’une représentation

- Eléments de complexité
  - Complexité spatiale : espace en mémoire pour le stockage des informations

  $\rightarrow$ Elle varie en fonction de la représentation choisie

Performance d’une représentation

- Eléments de complexité
  - Complexité spatiale : espace en mémoire pour le stockage des informations

  $\rightarrow$ Elle varie en fonction de la représentation choisie
  - Complexité temporelle : temps de réponse aux requêtes (plus ou moins élémentaires)

  $\rightarrow$ Deux sommets sont-ils adjacents ? Quel est le voisinage d’un sommet ?

Performance d’une représentation

- Eléments de complexité
  - Dynamicité : temps de mise à jour de la représentation
    - Ajout / suppression d’une arête (arc)
    - Ajout / suppression d’un sommet (et ses arêtes (arcs) incidentes)
    - Contraction d’arête

Performance d’une représentation

- Eléments de complexité
  - Dynamicité : temps de mise à jour de la représentation
    - Ajout / suppression d’une arête (arc)
    - Ajout / suppression d’un sommet (et ses arêtes (arcs) incidentes)
    - Contraction d’arête

→ **La complexité des algorithmes sur les graphes dépendent en grande partie de la représentation utilisée**

Opérations de bases

- Soit le graphe $G = (S, A)$
  - Insertion d'un sommet $i \notin S$
  - Insertion d'un arc (d'une arête) $(i, j) \notin A$
  - Suppression du sommet $i \in S$
  - Suppression de l'arc (ou arête) $(i, j) \in A$

Opérations de bases

- Soit le graphe $G = (S, A)$
  - Insertion d'un sommet $i \notin S$
  - Insertion d'un arc (d'une arête) $(i, j) \notin A$
  - Suppression du sommet $i \in S$
  - Suppression de l'arc (ou arête) $(i, j) \in A$

- $i \in S$?
- $(i, j) \in A$?

Opérations de bases

- Soit le graphe $G = (S, A)$
  - Insertion d'un sommet $i \notin S$
  - Insertion d'un arc (d'une arête) $(i, j) \notin A$
  - Suppression du sommet $i \in S$
  - Suppression de l'arc (ou arête) $(i, j) \in A$
  - Liste des successeurs $V^+(i)$, des prédécesseurs $V^-(i)$, pour $i \in S$
  - Liste des voisins $V(i)$ pour $i \in S$
  - Demi-degré $d^-(i)$, $d^+(i)$ pour $i \in S$
  - Degré $d(i)$ pour $i \in S$

- $i \in S$?
- $(i, j) \in A$?

Opérations de bases

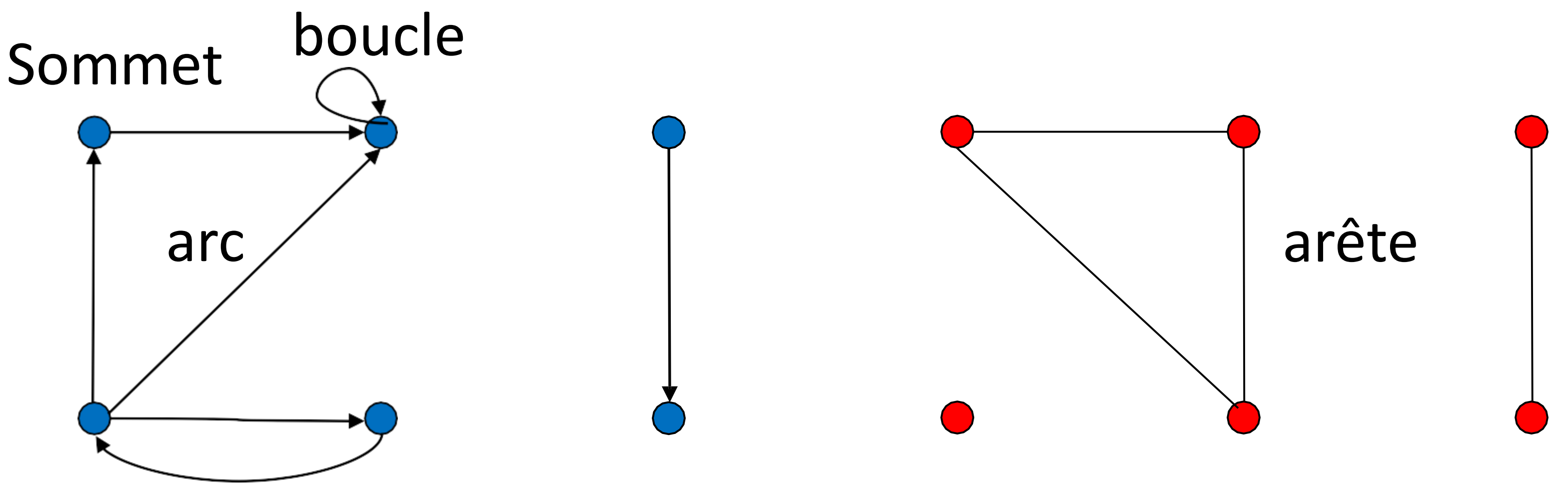
- Soit le graphe $G = (S, A)$
  - Insertion d'un sommet $i \notin S$
  - Insertion d'un arc (d'une arête) $(i, j) \notin A$
  - Suppression du sommet $i \in S$
  - Suppression de l'arc (ou arête) $(i, j) \in A$
  - Liste des successeurs $V^+(i)$, des prédécesseurs $V^-(i)$, pour $i \in S$
  - Liste des voisins $V(i)$ pour $i \in S$
  - Demi-degré $d^-(i)$, $d^+(i)$ pour $i \in S$
  - Degré $d(i)$ pour $i \in S$

- $i \in S$?
- $(i, j) \in A$?

pour $i \in S$
- $j \in V^-(i)$?
- $j \in V^+(i)$?
- $j \in V(i)$?

Représentation **sagittale**

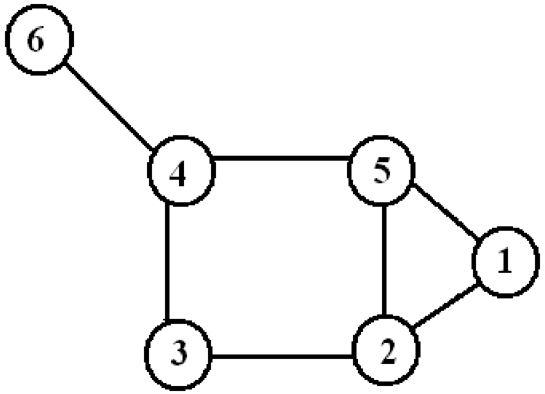
- Un graphe est en ensemble de sommets reliés



- Sommet i : dessiné par un point, un cercle, un carré, un nœud, etc.
- Arc (i, j) : dessiné par une flèche de i vers j
- Arête $[i, j]$: dessinée par une ligne reliant i à j

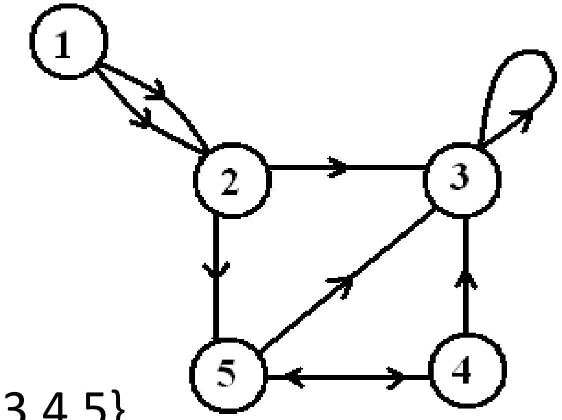
Représentation **ensembliste**

- Un graphe $G = (S, A)$ est défini par
  - $S = \{1, \dots, n\}$ un ensemble de n sommets
  - $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ un ensemble de m arcs / arêtes



S ={1,2,3,4,5,6}

A ={(1,2),(1,5),(2,3),
(2,5),(3,4),(4,5),(4,6)}

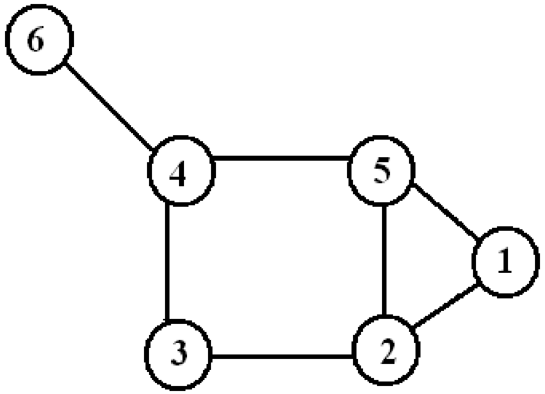


S ={1,2,3,4,5}

A = {(1, 2),(1, 2),(2, 3),(2, 5),(3, 3),
(4, 3),(4, 5),(5, 3),(5, 4)}

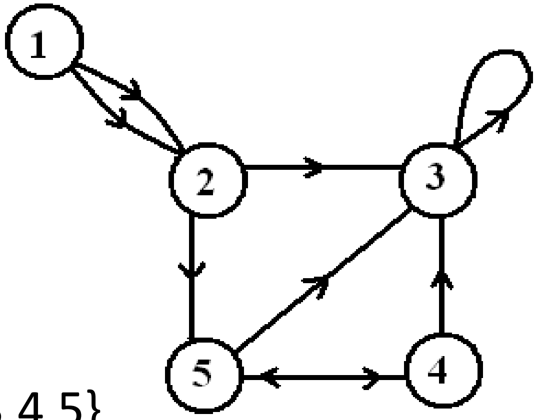
Représentation ensembliste

- Un graphe $G = (S, A)$ est défini par
  - $S = \{1, \dots, n\}$ un ensemble de n sommets
  - $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ un ensemble de m arcs / arêtes



S ={1,2,3,4,5,6}

A ={(1,2),(1,5),(2,3),
(2,5),(3,4),(4,5),(4,6)}



S ={1,2,3,4,5}

A = {(1, 2),(1, 2),(2, 3),(2, 5),(3, 3),
(4, 3),(4, 5),(5, 3),(5, 4)}

Complexité Spatiale : $O(|S| + |A|) = O(n + m)$ → Représentation **compacte**

Représentation matricielle

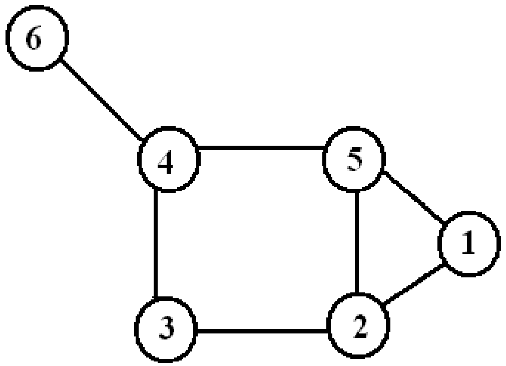
- **Matrice d'incidence**
  - Sommet / **Arêtes**
  - Un graphe **non orienté** G = (S, A) est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

pour $i \in S$ et $a \in A$, $\mathrm{M}[i,a]$ = 1 si i est *extrémité de* a, 0 sinon

Représentation matricielle

- Matrice d'incidence
  - Sommet / Arêtes
  - Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

pour $i \in S$ et $a \in A$, $\mathrm{M}[i,a] = 1$ *si i* est *extrémité de a*, 0 sinon



	1,2	1,5	2,3	2,5	3,4	4,5	4,6
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1

Complexité Spatiale : $O(|S| \times |A|) = O(n\,m)$

Représentation matricielle

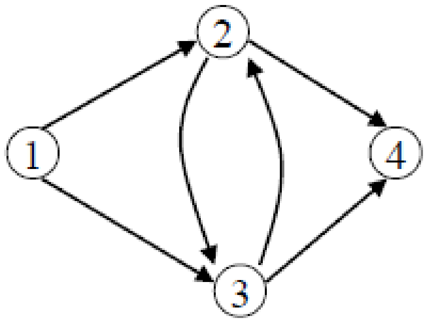
- Matrice d'incidence
  - Sommet / **Arcs**
  - Un graphe **orienté** G = (S, A) est défini par une matrice selon la règle suivante

pour $i \in S$ et $a \in A$, M[i,a] = 1 si i est l'*extrémité initiale* de a,
-1 si i est l'*extrémité finale* de a,
0 sinon

Représentation matricielle

- Matrice d'incidence
  - Sommet / Arcs
  - Un graphe orienté $G = (S, A)$ est défini par une matrice selon la règle suivante

pour $i \in S$ et $a \in A$, $M[i,a] = 1$ *si* i est l'*extrémité initiale* de a,
-1 *si* i est l'*extrémité finale* de a,
0 sinon



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 12 & 13 & 23 & 24 & 32 & 34 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Complexité Spatiale : $O(|S| \times |A|) = O(n\, m)$

Représentation matricielle

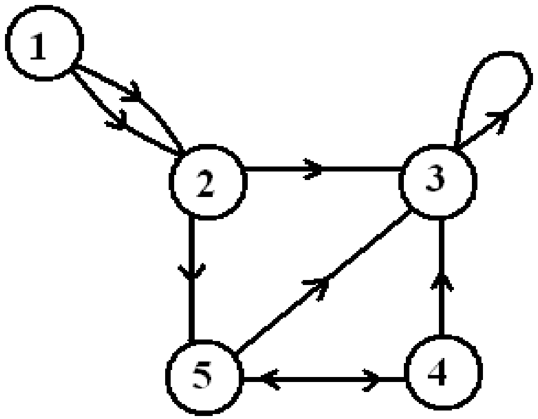
- Matrice d’incidence : cas particuliers
  - **Arêtes multiples** : colonnes avec des entrées identiques puisque ces arêtes sont incidentes aux mêmes paires de sommets

Représentation matricielle

- Matrice d’incidence : cas particuliers
  - Arêtes multiples : colonnes avec des entrées identiques puisque ces arêtes sont incidentes aux mêmes paires de sommets
  - **Boucle** : en utilisant une colonne avec uniquement une valeur à 1, correspondant au sommet incident avec la boucle

Représentation matricielle

- Matrice d'incidence : cas particuliers
  - Arêtes multiples : colonnes avec des entrées identiques puisque ces arêtes sont incidentes aux mêmes paires de sommets
  - Boucle : en utilisant une colonne avec uniquement une valeur à 1, correspondant au sommet incident avec la boucle



	(1,2)	(1,2)	(2,3)	(2,5)	(3,3)	(4,3)	(4,5)	(5,3)	(5,4)
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	1	-1	0	-1	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0	-1
5	0	0	0	-1	0	0	-1	1	1

Représentation matricielle

- Matrice d'**adjacence**
  - Sommet / **Arêtes**
  - Un graphe **non orienté** $G = (S, A)$ est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

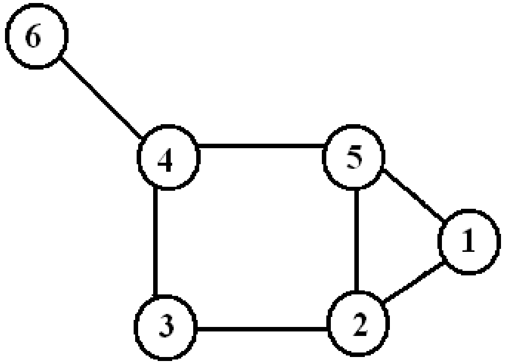
    pour $i, j \in S$ $\quad \mathrm{M}[i,j] = 1 \; si \; (i,\mathrm{j}) \in A,$

    0 sinon

Représentation matricielle

- Matrice d'adjacence
  - Sommet / Arêtes
  - Un graphe non orienté G = (S, A) est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

pour $i, j \in S$ $\quad M[i,j] = 1\ si\ (i,j) \in A,$
0 sinon



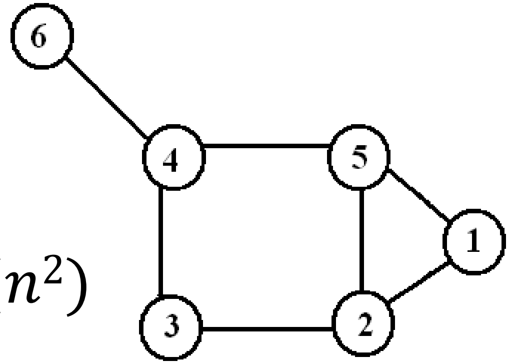
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Représentation matricielle

- Matrice d'adjacence
  - Sommet / Arêtes
  - Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

pour $i, j \in S$ $\quad M[i,j] = 1 \; si \; (i,j) \in A,$

0 sinon



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Complexité Spatiale : $O(|S| \times |S|) = O(n^2)$

$\rightarrow$ Également appelée matrice **d'incidence sommet / sommet**

Représentation matricielle

- Matrice d'adjacence
  - Sommet / **Arcs**
  - Un graphe **orienté** G = (S, A) est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

pour $i, j \in S$ $\quad \mathrm{M}[i,j] = 1\ si\ (i,\mathrm{j}) \in A,$

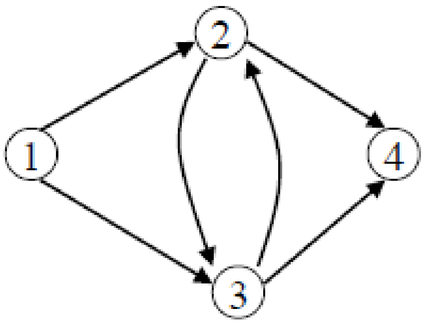
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 0 sinon

Représentation matricielle

- Matrice d'adjacence
  - Sommet / Arcs
  - Un graphe orienté $G = (S, A)$ est défini par une matrice binaire selon la règle suivante

pour $i, j \in S$ $\quad M[i,j] = 1$ si $(i,j) \in A$,

0 sinon



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	0	0

Matrice d’adjacence

- Remarques
  - La représentation dépend de l’ordre des n sommets

  $\rightarrow$ $n!$ matrices d’adjacence possibles

Matrice d’adjacence

- Remarques
  - La représentation dépend de l’ordre des n sommets

  $\rightarrow$ n! matrices d’adjacence possibles
  - Elle permet de représenter des graphes orientés et non orientés
  - Elle est symétrique pour un graphe non orienté $M[i,j] = M[j,i]$

Matrice d'adjacence

- Remarques
  - La représentation dépend de l'ordre des n sommets

  $\rightarrow$ $n!$ matrices d'adjacence possibles
  - Elle permet de représenter des graphes orientés et non orientés
  - Elle est symétrique pour un graphe non orienté $M[i,j] = M[j,i]$
- Gestion des cas particuliers
  - Arêtes multiples : $M[i,j]$ = nombres d'arêtes de i à j
  - Boucle : $M[i,i] = 1$

Matrice d’adjacence

- Remarques
  - La représentation dépend de l’ordre des n sommets

  $\rightarrow$ $n!$ matrices d’adjacence possibles
  - Elle permet de représenter des graphes orientés et non orientés
  - Elle est symétrique pour un graphe non orienté $M[i,j] = M[j,i]$
- Gestion des cas particuliers
  - Arêtes multiples : $M[i,j]$ = nombres d’arêtes de i à j
  - Boucle : $M[i,i] = 1$

$\rightarrow$ Cette représentation facilite la recherche de sous-graphe, l’inversion d’un graphe, etc.

Représentation par listes

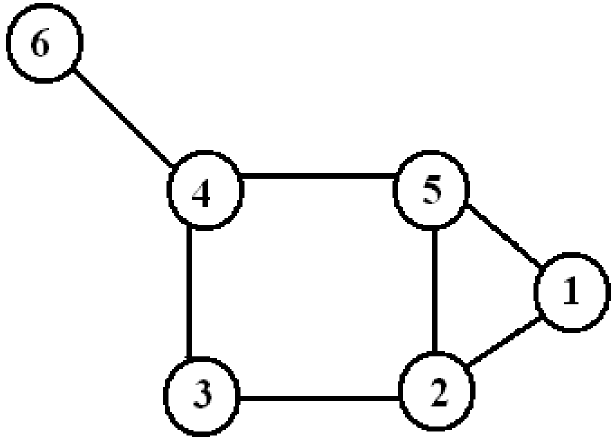
- **Listes d'adjacence**
  - Un graphe **non orienté** $G = (S, A)$ est défini par $G = (S, V)$ où

    $V(i) = \{j \in S : (i, j) \in A\}$

    $\rightarrow$ définition par l'ensemble des voisins de i

Représentation par listes

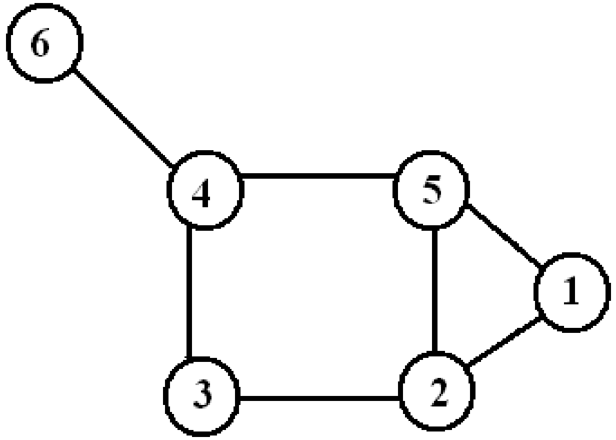
- Listes d'adjacence
  - Un graphe non orienté G = (S, A) est défini par G = $(S,\ V)$ où
    $V(i) = \{j \in S : (i,j) \in A\}$
    $\rightarrow$ définition par l'ensemble des voisins de i



$i \in S$	$V(i)$
1	2,5
2	1,3,5
3	2,4
4	3,5,6
5	1,2,4
6	4

Représentation par listes

- Listes d'adjacence
  - Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est défini par $G = (S, V)$ où $V(i) = \{j \in S : (i,j) \in A\}$
    $\rightarrow$ définition par l'ensemble des voisins de i



$i \in S$	$V(i)$
1	2,5
2	1,3,5
3	2,4
4	3,5,6
5	1,2,4
6	4

Complexité Spatiale : $O(|A|) = O(m)$

$\rightarrow V(i)$ est appelée liste **d'adjacence**

Représentation par listes

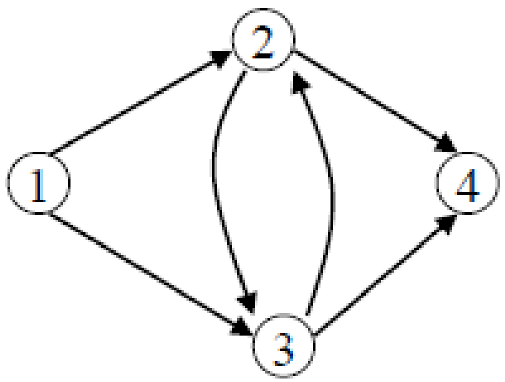
- Listes d'adjacence
  - Un graphe **orienté** G = (S, A) est défini par G = $(S, \boldsymbol{V^{+}})$ où

    $V^+(i) = \{j \in S : (i,j) \in A\}$

    $\rightarrow$ définition par l'ensemble des **successeurs** de i

Représentation par listes

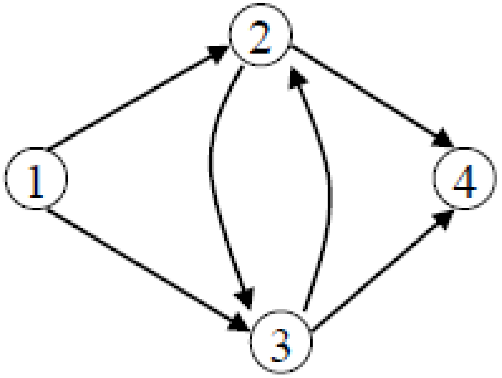
- Listes d'adjacence
  - Un graphe orienté G = (S, A) est défini par G = $(S,\ V^+)$ où
    $V^+(i) = \{j \in S : (i,j) \in A\}$
    $\rightarrow$ définition par l'ensemble des successeurs de i



$i \in S$	$V^+(i)$
1	2,3
2	3,4
3	2,4
4	∅

Représentation par listes

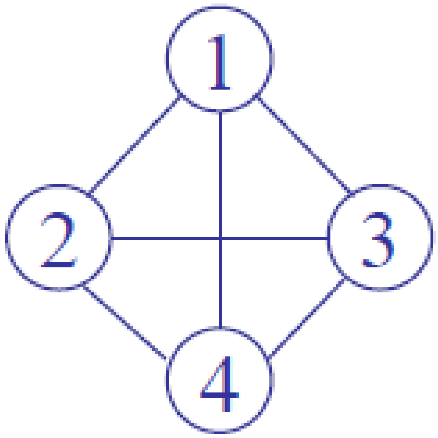
- Listes d'adjacence : **remarque**
  - On peut aussi utiliser la liste des **prédécesseurs**
  - Un graphe orienté $G = (S, A)$ est défini par $G = (S, \boldsymbol{V^-})$ où $V^-(i) = \{j \in S : (i,j) \in A\}$

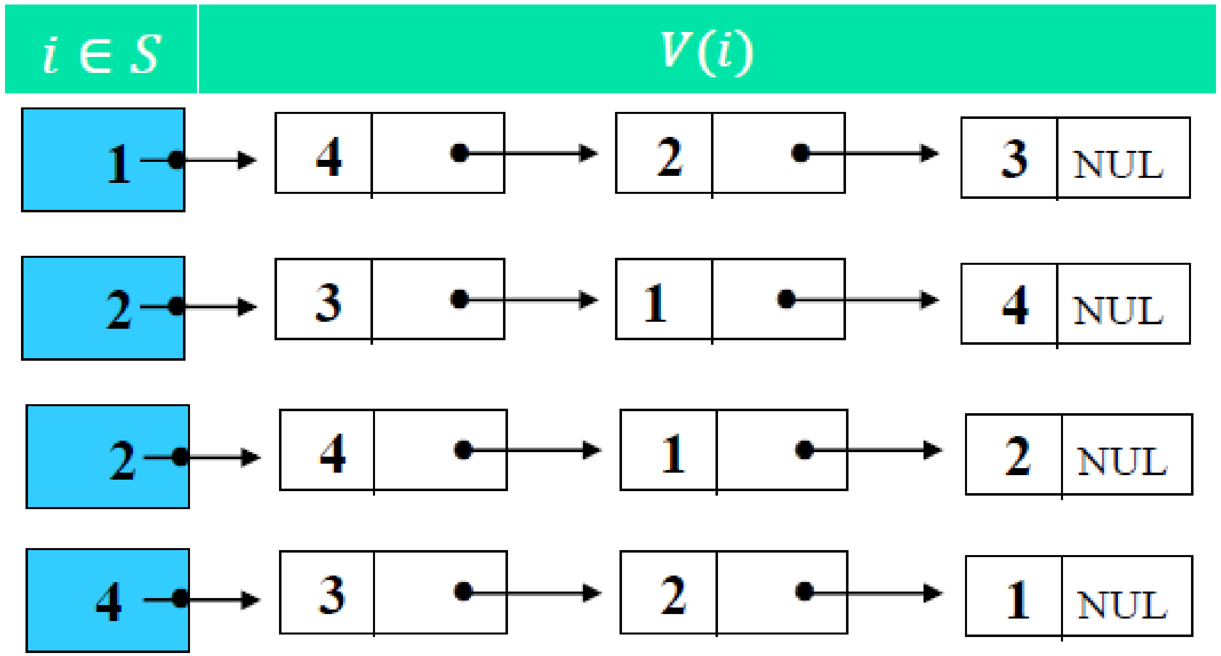


$i \in S$	$V^-(i)$
1	$\emptyset$
2	1,3
3	1,2
4	2,3

Représentation par listes

- Listes d'adjacence : **remarque**
  - L'ordre des voisins (successeurs / prédécesseurs) n'a aucune importance





(Début de) Comparatif : Matrice vs Liste

Opération	Matrice d'adjacence	Listes d'adjacence
$i \in S$?	$O(1)$ ou $O(n)$	$O(1)$ ou $O(n)$
$(i, j) \in A$?	$O(1)$	$O(d(i))$
$j \in V^-(i)$?	$O(1)$	$O(d^-(i))$
$j \in V^+(i)$?	$O(1)$	$O(d^+(i))$
$j \in V(i)$?	$O(1)$	$O(d(i))$
Insérer un sommet dans S	$O(n)$	$O(1)$
Insérer un(e) arc / arête (i, j) dans A	$O(1)$	$O(d(i))$
Supprimer un sommet i de S	$O(n)$	$O(d(i))$
Supprimer l'arc/arête (i, j) de A	$O(1)$	$O(d(i))$
$V^+(i), V^-(i), d^+(i), d^-(i)$ pour $i \in S$	$O(n)$	$O(d^-(i))$ / $O(d^+(i))$
$V(i), d(i)$ pour $i \in S$	$O(n)$	$O(d(i))$

Exercice (exercice 1 fiche représentation et prop.)

- Donner les représentations par matrice d’incidence, matrice d’adjacence et listes d’adjacence des deux graphes suivants, puis déterminer le degré de chaque sommet.