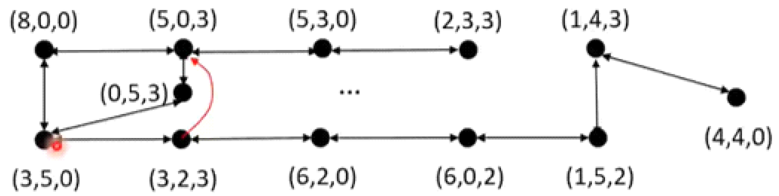
TD 1 - Modélisation

jeudi 18 février 2021 16:55

Exercice 1 :

Jacques dispose d'une bouteille pleine d'une contenance de huit litres ; il a dans sa cave deux bouteilles vides, l'une de cinq litres et une autre de trois litres. Il désire partager le contenu de sa bouteille de huit litres en deux parts de quatre litres chacune, sans utiliser aucun autre moyen de mesure. Indiquez-lui la façon de procéder au moyen d'un graphe.

- Graphe $G = (S, A)$ dans lequel un sommet $s \in S$ correspond à un « état » possible des 3 bouteilles
- 1 **arc** relie s à s' si on peut passer de la situation associée à s à celle modélisée par s'



→ **chemin**

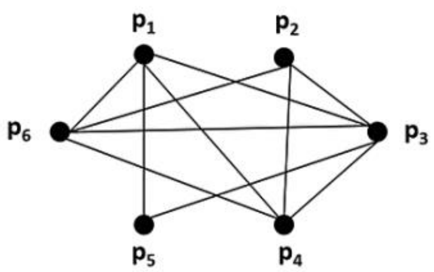
96

Exercice 2 :

Une usine fabrique 6 produits chimiques notés p_i, $i = 1, \ldots, 6$. Le stockage de certains d'entre eux dans un même entrepôt présente un réel danger représenté par le tableau ci-dessous dans lequel un *oui* indique que les deux produits correspondants ne peuvent pas être stockés ensemble. Comment trouver le nombre minimum d'entrepôts nécessaires à l'usine pour stocker l'ensemble des produits à l'aide d'un graphe ?

	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	non	oui	oui	oui	oui
p_2		oui	oui	non	oui
p_3			oui	oui	oui
p_4				non	oui
p_5					non

- Graphe $G = (S, A)$ avec
  - $s \in S = \{p_1, p_2, \ldots, p_6\}$ représente un produit
  - $a = (s, s') \in$ A s'il y a un danger (si s et s'sont incompatibles)



→ graphe de **conflit**

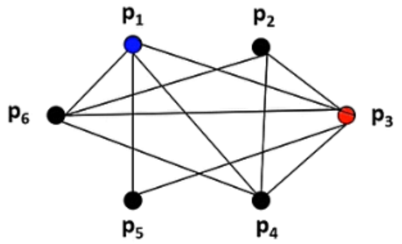
→ **stable**

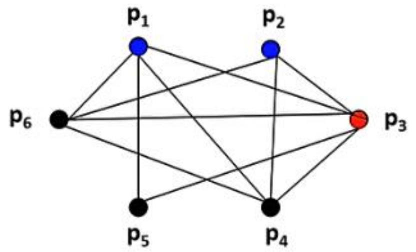
→ coloration du graphe

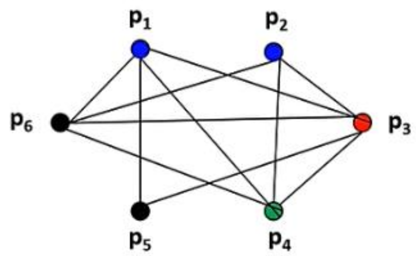
→ coloration du graphe

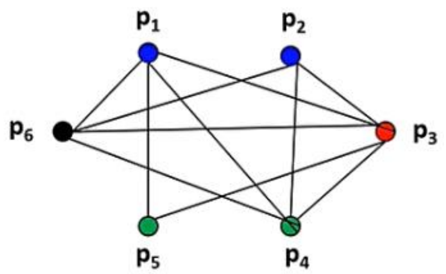
Heuristique de Welsh et Powell :

- considérer le sommet de degré max. et lui attribuer la première couleur.
- prendre le premier sommet non adjacent parmi les sommets restants, dans l'ordre décroissant des degrés, et lui attribuer la même couleur.
- répéter jusqu'à ne plus pouvoir utiliser la couleur.
- recommencer avec une nouvelle couleur (tant qu'il reste des sommets non coloriés).







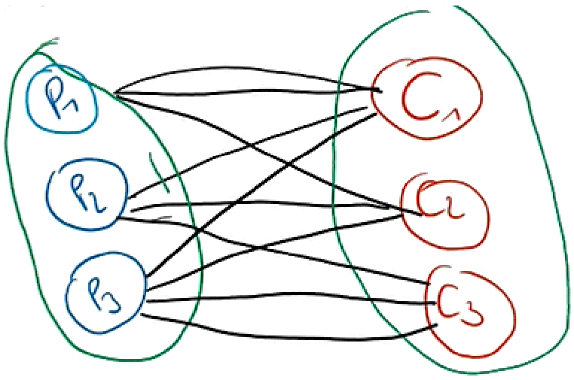


Exercice 5 :

Trois professeurs notés P_1, P_2 et P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes notées C_1, C_2 et C_3 en respectant les règles suivantes :

— P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
— P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
— P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3.

Comment représenter cette situation par un graphe pour déterminer le nombre minimum de plages horaires nécessaires ?



- 2 entités différentes : professeurs et classes, uniquement des « interactions » entre les deux entités

→ Graphe biparti $G = (S, A)$ avec

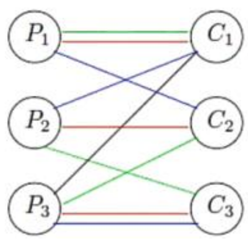
$S = P \cup C, P = \{P_i, i = 1, 2, 3\}$ et $C = \{C_j, j = 1, 2, 3\}$

$a = (P_i, C_j) \in A$ si P_i donne 1h de cours à C_j

→ le graphe **n'est pas simple**, on a autant d'arêtes que d'heures de cours

1

→ **coloration d'arêtes**



	P_1	P_2	P_3
Heure 1 (rouge)	C_1	C_2	C_3
Heure 2 (bleu)	C_2	C_1	C_3
Heure 3 (vert)	C_1	C_3	C_2
Heure 4 (noir)			C_1

Exercice 6 :

Un étudiant distrait s'aperçoit qu'il doit passer, le lendemain matin, un examen d'informatique. Il a la possibilité de réviser le contenu de 2 ou 3 chapitres choisis parmi les 12 vus en cours, ces chapitres n'étant pas totalement indépendants :

Chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nécessite le(s) chap.	-	1	1 et 2	1 et 2	1	-	-	-	-	8	8 et 10	8 et 10

Aider cet étudiant en représentant à l'aide d'un graphe la situation (préoccupante) qui est la sienne.

- Graphe $G = (S, A)$ dans lequel
  - 1 sommet $s \in S$ est associé à chaque chapitre,
  - 1 arc $(s, s') \in A$ s'il est nécessaire d'avoir vu s avant de traiter s'
- L'étudiant ne peut aborder directement que les sommets s tels quel $V^-(s) = \emptyset$, ou ceux pour lesquels il a abordé tous les sommets $s' \in V(s)$

Exercice 7 :

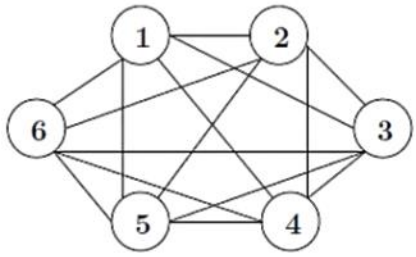
Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ? Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Le graphe $G = (S, A)$ est défini par :

— $S = \{1,2,\ldots,6\}$, un sommet s pour chaque joueur.

— $A = \{(s,s') : s \in S, s' \in S, s \neq s'\}$

Le graphe G est complet ($\Leftrightarrow K_6$)

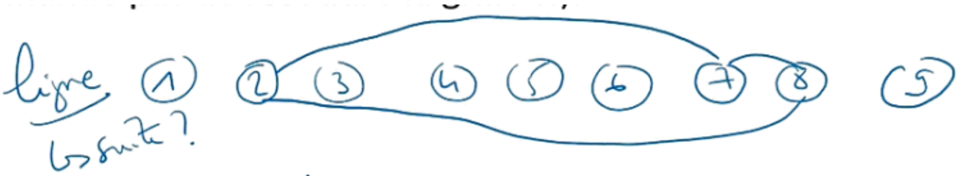


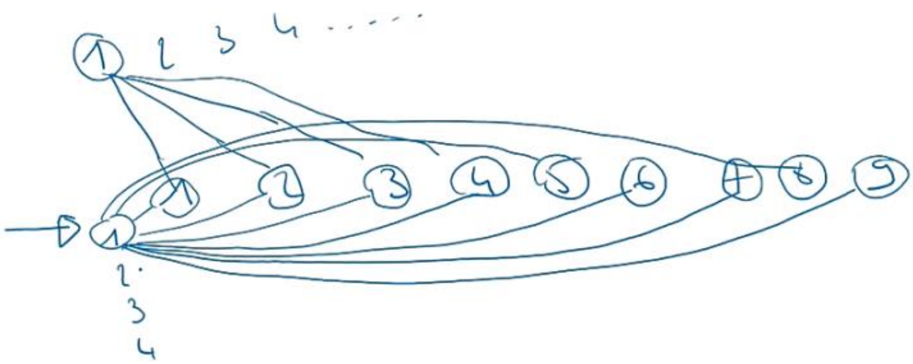
$\sum_{i=1}^{6}(6-i) = \frac{6(6-1)}{2}$ = 15 arêtes

Exercice 9 :

On s'intéresse au jeu du Sudoku classique sur une grille 9×9 dans laquelle les valeurs de 1 à 9 doivent être placées une et une seule fois par ligne, par colonne et par sous-grille de taille 3×3. Certaines cases peuvent être remplies au départ, comme dans l'illustration ci-dessous. Comment exprimer la résolution d'un Sudoku sur une grille donnée à l'aide d'un graphe ? Décrire précisément le graphe (nombre de sommets, nombre d'arcs/arêtes), et le problème correspondant (on ne demande pas de résoudre la grille !!).

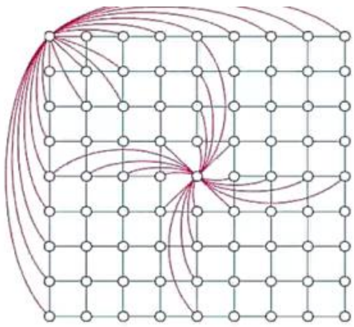
				7	2	8		
			8		5		3	
				9		6		
	4		1				5	3
6		7			4			
3	9			2	8			
1		2					7	
	8		7			2	1	
			2					





- Graphe $G = (S, A)$ avec
  - 1 sommet pour chaque case (81 sommets)
  - 2 sommets associés à deux cases de la même ligne, même colonne ou même sous-grille sont reliés par une **arête** (pas besoin d'orientation ici).

Représentation (**partielle**)



Nombres d'arêtes :

$$\frac{81 \times (8 + 8 + 4)}{2} = 810$$

Exercice 11 :

Monsieur et Madame Dupont organise une soirée chez eux lors de laquelle il y a, en plus d'eux, 3 autres couples. Comme cela arrive fréquemment, certaines personnes se serrent la main pour se saluer. On suppose qu'aucune personne ne se sert la main, ne sert la main de son/sa conjoint(e), et que deux personnes ne se serrent pas la main plusieurs fois. Une fois tous les convives installés, Monsieur Dupont demande à chaque autre personne (dont sa femme), combien de main il/elle a serré. A la surprise générale, chacun donne une réponse différente. Modéliser la situation à l'aide d'un graphe de manière à déterminer combien de mains Monsieur Dupont a serré. Expliquer précisément votre raisonnement pour arriver à la solution.

- On modélise la situation à l'aide d'un graphe $G = (S, A)$ défini par :
- $S = \{p_1, p_2, \dots, p_8\}$, un sommet associé à chaque personne présente.
- $a = (s, s') \in A$ si les personnes représentées par les sommets s et s' se sont serrées la main (pas besoin d'orientation).

Hypothèses :

$0 \leq d(s) \leq 6, \forall s \in S$

Les degrés sont 0, 1, 2, …, 6
(Attention avec M. Dupont)

On considère les sommets dans l'ordre déc. des degrés

$d(p_1) = 6$ et $V(p_1) = \{p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$

$\Rightarrow d(p_8) = 0$ et p_1 en couple avec p_8

Hypothèses :

$0 \leq d(s) \leq 6, \forall s \in S$

Les degrés sont 0, 1, 2, …, 6
(Attention avec M. Dupont)

Même principe avec p_2

$d(p_2) = 5$ et $V(p_2) = \{p_1, p_3, p_4, p_5, p_6\}$

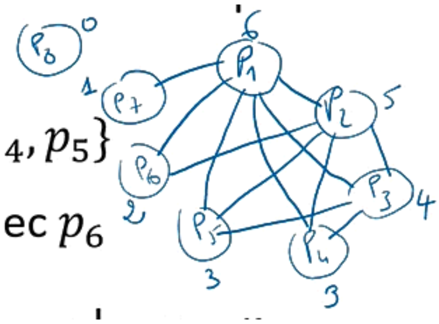
$\Rightarrow d(p_7) = 1$ et p_2 en couple avec p_7

solution.

Hypothèses :

$0 \leq d(s) \leq 6, \forall s \in S$

Les degrés sont 0, 1, 2, ..., 6
(Attention avec M. Dupont)



Idem avec p_3

$d(p_3) = 4$ et $V(p_3) = \{p_1, p_2, p_4, p_5\}$

$\Rightarrow d(p_6) = 2$ et p_3 en couple avec p_6

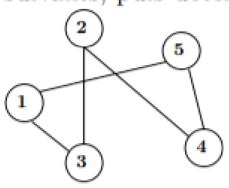
$\Rightarrow d(p_4) = d(p_5) = 3$ et p_4 en couple avec p_5

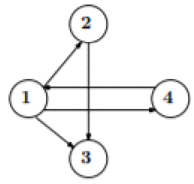
TD2 - Représentation Propriétés

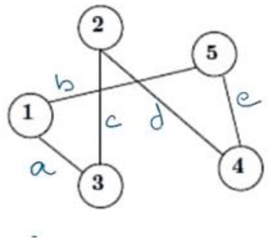
jeudi 18 février 2021 17:14

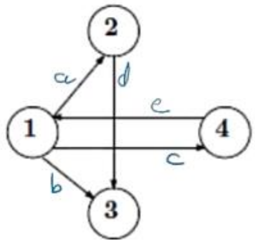
Exercice 1 :

Donner les représentations par matrice d'incidence, matrice d'adjacence et listes d'adjacence des deux graphes suivants, puis déterminer le degré de chaque sommet.









	a	b	c	d	e	
1	1	1	0	0	0	$\rightarrow \Sigma = d(1)$
2	0	0	1	1	0	
3	1	0	1	0	0	
4	0	0	0	1	1	
5	0	1	0	0	1	

2

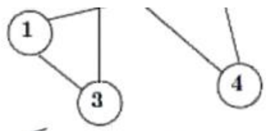
	a	b	c	d	e
1	1	1	1	0	-1
2	-1	0	0	1	0
3	0	-1	0	-1	0
4	0	0	-1	0	1

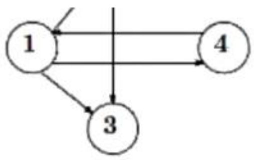
0

$\rightarrow \# 1 = d^+(i)$

$\rightarrow \# -1 = d^-(i)$

22



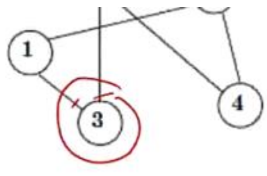


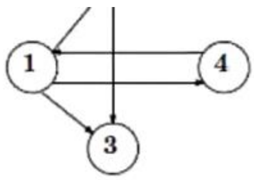
$d(1)$ ↑

	1	2	3	4	5	
1	0	0	1	0	1	$\rightarrow d(1)$
2	0	0	1	1	0	
3	1	1	0	0	0	
4	0	1	0	0	1	
5	1	0	0	1	0	

	1	2	3	4	
1	0	1	1	1	$\rightarrow d^+(1)$
2	0	0	1	0	
3	0	0	0	0	
4	1	0	0	0	

$\hookrightarrow d^-(1)$





1 → [3] → [5 /]
2 → [3] → [4 /]
3 → [1] → [2 /]
4 → [2] → [5 /]
5 → [1] → [4 /]

$d(i)$ = longueur de la liste

pointeur Nul

1 → [2] → [3] → [4 /]
2 → [3 /]
3 ← liste vide
4 → [1 /]

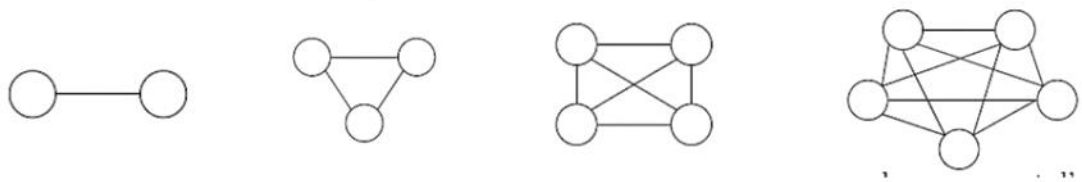
$d^+(i) \Rightarrow$ parcours de la liste i

$d^-(i) \Rightarrow$ parcourir toutes les listes $O(m)$

231

Exercice 6 :

Dessiner les graphes (non orientés) complets d'ordre 2, 3, 4 et 5. Préciser pour chacun le degré de chaque sommet et le nombre total d'arêtes.



Nombre d'arêtes dans K_n: $\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$

On retrouve ce résultat en notant que $d(i) = n-1$ pour chaque sommet $i \in S$, donc :
$|A| = \frac{\sum_{i=1}^{n} d(i)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 7 :

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ? Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

1. On a $S = \bigcup_{d=0}^{\Delta} S_d$ tel que $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, \Delta\}, i \neq j$

$\{S_d\}_{d=0}^{\Delta}$ est une partition de S

$\Rightarrow \sum_{d=0}^{\Delta} |S_d| = |S|$

$\Rightarrow \sum_{d=0}^{\Delta} n_d = n$

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2m$$

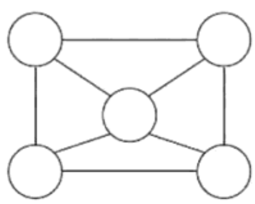
$$\sum_{s \in S} d(s) = \sum_{d=0}^{\Delta} d \times |S_d|$$

2. Par définition on a $\Delta . n_\Delta \leq \sum_{d=0}^{\Delta} d . n_d = 0 \times n_0 + 1 \times n_1 + \dots + \Delta \times n_\Delta = 2m$ (question 1)

Et : $\Delta . n_\Delta > 0$ car $\Delta > 0$.

D'où : $\Delta \leq \Delta . n_\Delta \leq 2m$.

3. Si G est un graphe simple ayant n sommets alors chaque sommet a au plus $n-1$ voisins.

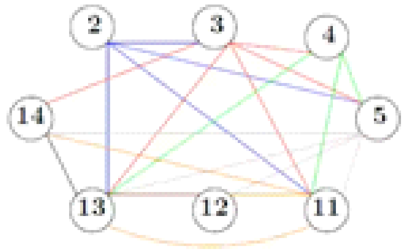


Exercice 8 :

Définir un graphe non orienté $G = (S, A)$ tel que $S = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ et tel que deux sommets i et j sont adjacents si et seulement si $pgcd(i, j) = 1$ ($pgcd$ = plus grand diviseur commun). Quelles est le nombre d'arêtes de G ?

Exercice (exercice 8 fiche représentation & propr.)

- Définir un graphe non orienté $G = (S,A)$ tel que $S = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ et tel que deux sommets i et j sont adjacents si et seulement si $pgcd(i, j) = 1$ ($pgcd$ = plus grand diviseur commun). Quel est le nombre d'arêtes de G ?



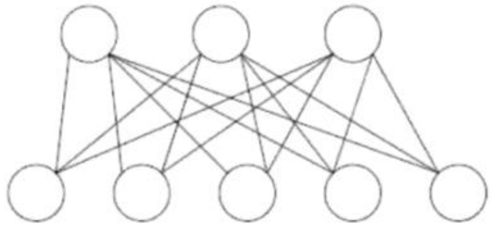
→ 21 arêtes

Exercice 9 :

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté comprenant 8 sommets et 15 arêtes. Tous les sommets de G sont de degré 3 ou 5. Combien de sommets de degré 3 et 5 a le graphe G ? (justifier la réponse) Construire un exemple pour G.

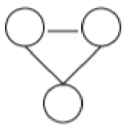
- Posons x le nombre de sommets de degré 3 et y le nombre de sommets de degré 5
- On doit résoudre :
  - $x + y = 8$
  - $3x + 5y = 2 \times 15 = 30$

$\rightarrow (x, y) = (5, 3)$



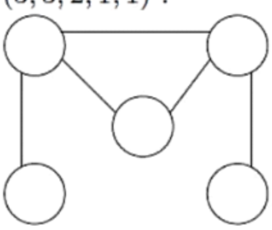
Exercice 10 :

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est dite graphique si on peut trouver un graphe non orienté simple dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Par exemple, la suite $(2, 2, 2)$ est bien graphique :



Les suites suivantes sont-elles graphiques ? (justifier) $(3, 3, 2, 1, 1)$ $(3, 3, 1, 1)$ $(4, 3, 3, 3, 2)$ $(3, 3, 2, 2)$

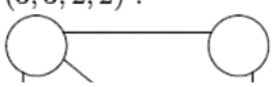
$(3, 3, 2, 1, 1)$:



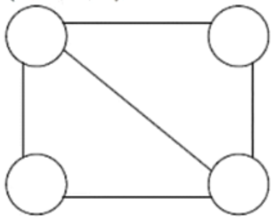
(3, 3, 1, 1) : non. On a 4 sommets. Pour avoir un degré 3 deux sommets doivent être reliés à tous les autres ⇒ les deux derniers sommets sont au moins de degré 2.

(4, 3, 3, 3, 2) : non. La somme des degrés est égale à 15 et doit être égale à $2m$, impossible.

$(3, 3, 2, 2)$:



$(3, 3, 2, 2)$:



Exercice 2 :

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

- Graphe $G = (S, A)$ avec $s \in S$, 1 sommet pour chacun des 15 sommets et $(s, s') \in A$ si s et s' sont connectés (arête car pas d'orientation nécessaire ici)
- 2 solutions
  - Chaque PC a 3 connexions → tous les sommets sont de degré impair → impossible
  - Ou $d(s) = 3, \forall s \in S \Rightarrow \sum_{s \in S} d(s) = 15 \times 3 = 45$

    Or $\sum_{s \in S} d(s) = 2m \Rightarrow$ impossible.

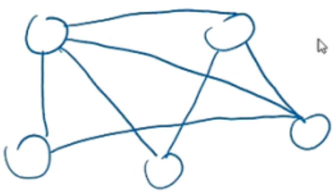
89

Exercice 3 :

Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents. Par convention on considérera qu'une personne n'est pas amie avec elle-même, et que si a est amie avec b, alors b est amie avec a.

- On peut représenter la situation avec un graphe $G = (S, A)$ tel que
  - $s \in S$, un sommet pour chaque personne
  - $(s, s') \in A$ si les personnes s et s' sont amis (pas d'orientation, réciprocité)

$n=5$



- Plusieurs cas possibles :
  - Cas 1 : tout le monde a au moins un ami (présent)
    - $1 \leq d(s) \leq n-1, \forall s \in S$ et il y a n sommets $\xRightarrow{\textit{principe tiroirs}}$ au moins deux sommets de même degré

- Cas 2 : une personne $p \in S$ n'a pas d'ami $d(p) = 0$
  - $1 \leq d(s) \leq n-2, \forall s \in S - \{p\}$ et il y a $(n-1)$ sommets $\Rightarrow$ au moins deux sommets de même degré

- Cas 3 : plusieurs personnes n'ont pas d'amis
  - Les degrés des sommets de ces personnes sont égaux !

Exercice 4 :

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté simple ayant 10 sommets et tel que $3 \leq degre(x) \leq 5$ pour chaque sommet x de S. On suppose que tous les sommets ne sont pas de degré pair, et qu'il n'y a pas deux sommets de degré impair ayant le même degré. Quel est le nombre d'arêtes de G ?

- On pose x, y, z le nombre de sommets de G de degré 3, 4 et 5, respectivement.
- Tous les sommets ne sont pas de degré pair $\Rightarrow x + z \geq 2$.
- D'où $y = 8$, et $m = \frac{(3 \times 1 + 4 \times 8 + 5 \times 1)}{2} = 20$.

Exercice 5 :

Une réception se termine, et les personnes s'en vont en couple. Au moment de se dire au revoir, cent douze poignées de mains sont échangées. On cherche à savoir combien de personnes étaient présentes à cette réception ?

1. Comment modéliser le problème à l'aide d'un graphe ?

2. En déduire une solution, en justifiant.

- Graphe $G = (S, A)$ avec un sommet pour chaque personne et une arête si deux personnes se serrent la main
- G n'a pas de boucle (1 personne ne se serre pas la main), est simple (2 personnes ne se serrent pas la main plusieurs fois)
- On suppose qu'un couple ne se sert pas la main

- Soit $n = |S|$, si chaque personne salue tous les autres on a $d(s) = n - 2, \forall s \in S$.
- D'où $\frac{n \times (n-2)}{2} = 112 \rightarrow n = 16$

Exercice 7 :

Peut-on construire un graphe simple (justifier les réponses) ayant

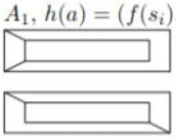
1. 5 sommets et 10 arêtes ?

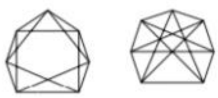
2. 12 sommets et 68 arêtes ?

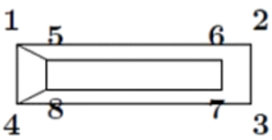
- On applique directement la règle $\sum_{s \in S} d(s) = 2m$
- 2[ème] cas : degré maximum d'un sommet vaut 11 $\rightarrow m \leq \frac{11 \times 12}{2} = 66 \Rightarrow$ pas possible

Exercice 12 :

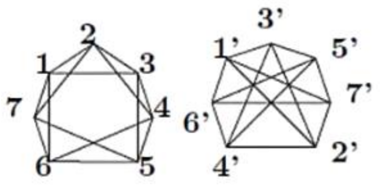
Deux graphes sont isomorphes s'ils représentent la même situation. En d'autres termes, deux graphes $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ sont isomorphes s'il existe deux bijections $f : S_1 \to S_2$ et $h : A_1 \to A_2$, telles que : $\forall a = (s_i, s_j) \in A_1$, $h(a) = (f(s_i), f(s_j)) \in A_2$. Les graphes ci-dessous sont-ils isomorphes ?





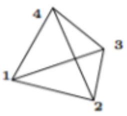


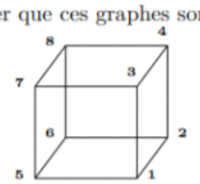
On ne retrouve pas le cycle 1-5-8-4

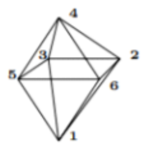


Exercice 13 :

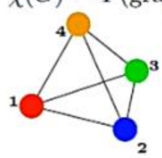
On considère les trois graphes platoniciens suivants. Montrer que ces graphes sont réguliers, trouver leur nombre chromatique. Finalement, montrer que ces graphes sont planaires.

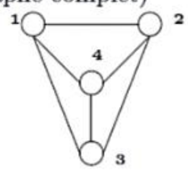




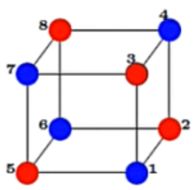


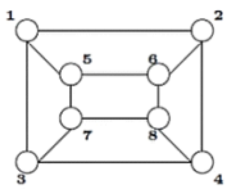
$d(x) = 3$
$\chi(G) = 4$ (graphe complet)



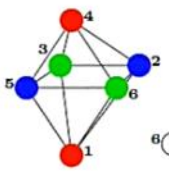


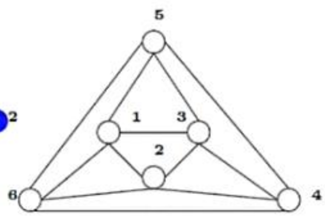
$d(x) = 3$
$\chi(G) = 2$





$d(x) = 4$
$\chi(G) = 3$



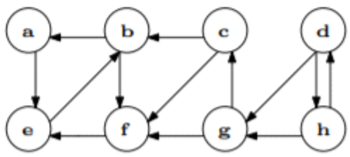


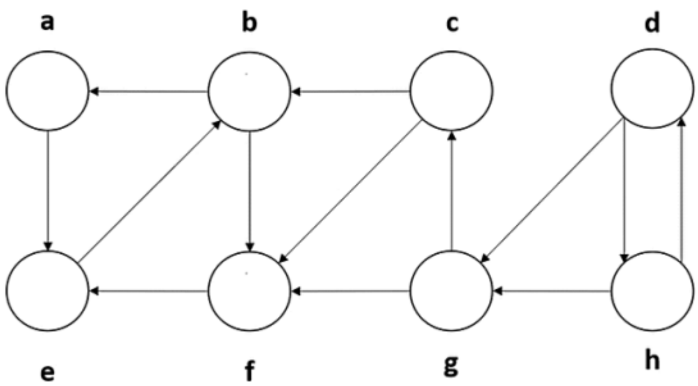
TD 4 - Parcours

vendredi 19 février 2021 10:40

Exercice 1 :

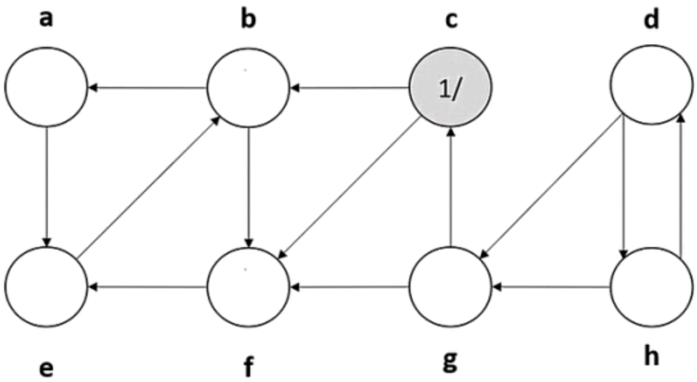
Donner le déroulement de l'algorithme du parcours en profondeur sur le graphe orienté ci-dessous, en prenant pour sommet origine le sommet c. Préciser les dates de découverte et de fin de traitement de chaque sommet.



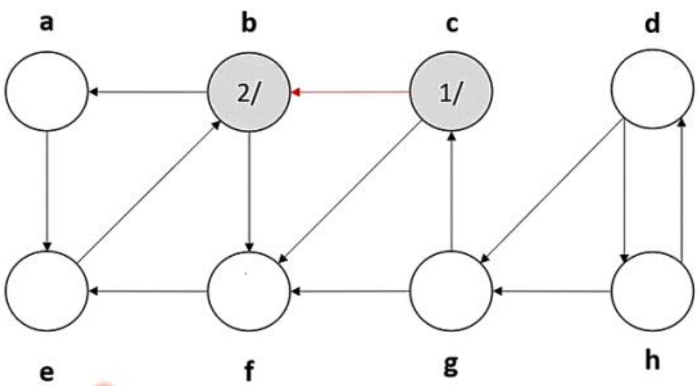



```
procédure PEP (Entrée : G
               Sortie : d, f, p)
   pour x ∈ S faire
      c[x] ← Blanc ;   p[x] ← Nul ;
   fin pour
   temps ← 1;
   pour x ∈ S faire
      si(c[x] = Blanc) alors
            Visiter(x) ;
      fin si
   fin pour
```

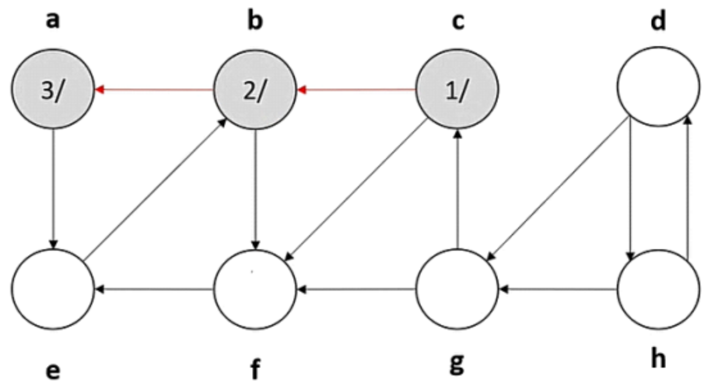
$temps = 1$



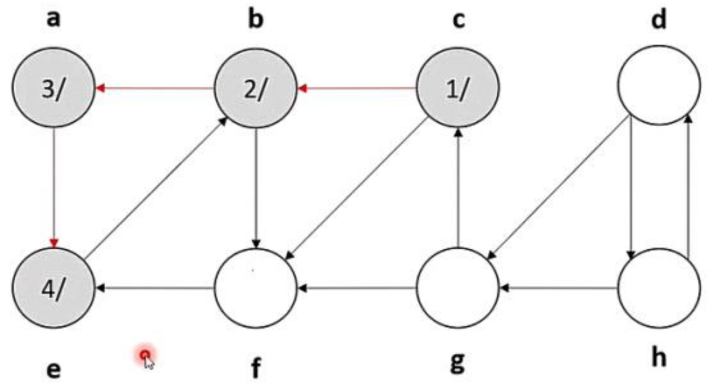
$temps = 2$



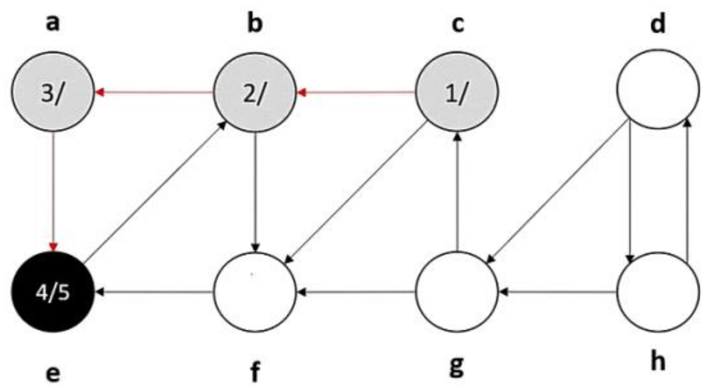
$temps = 3$



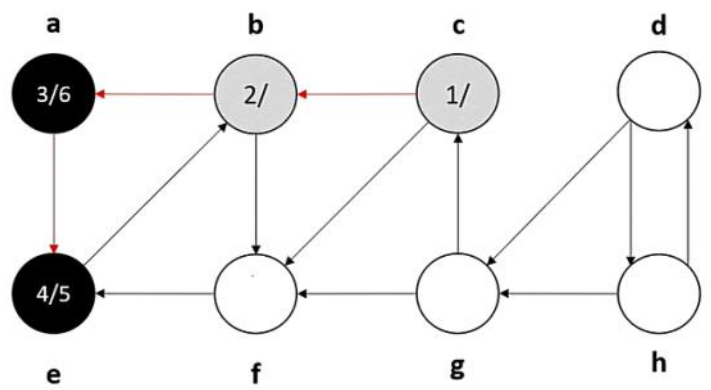
$temps = 4$



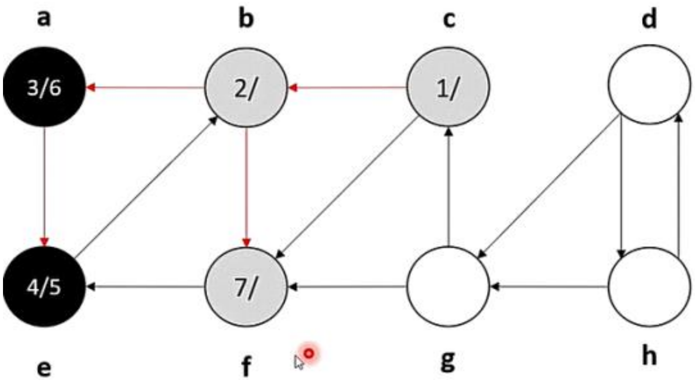
$temps = 5$



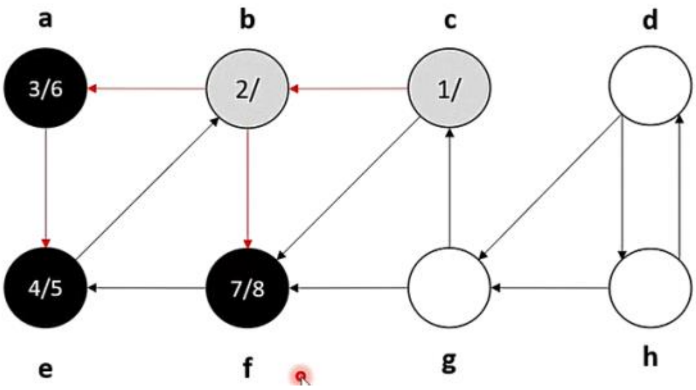
$temps = 6$



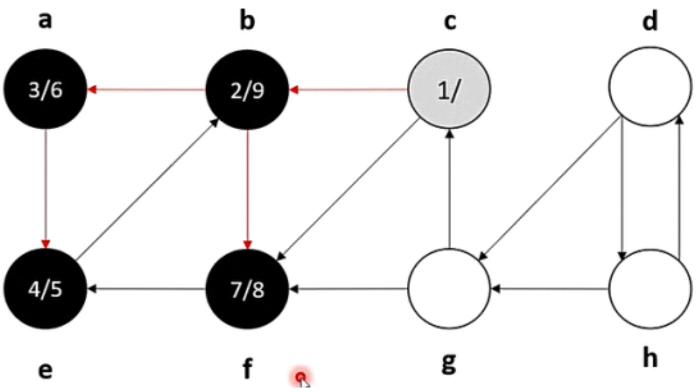
$temps = 7$



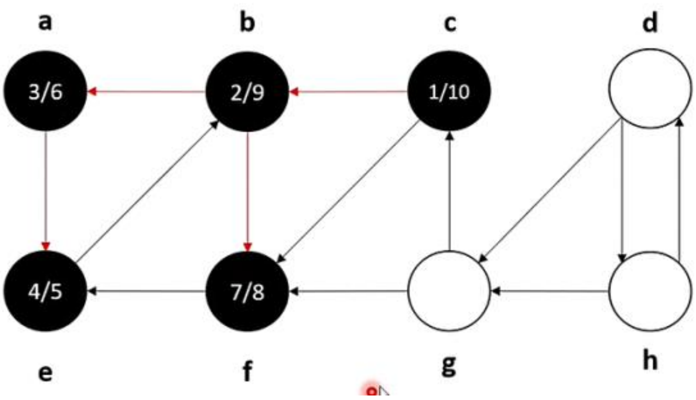
$temps = 8$



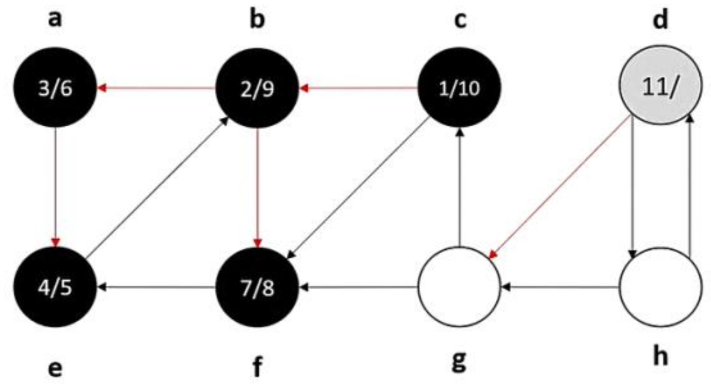
$temps = 9$



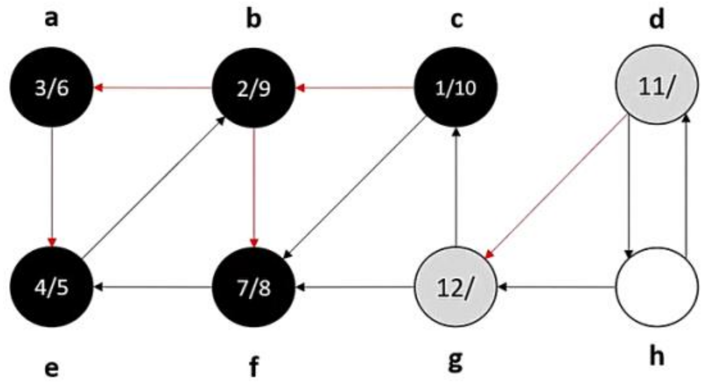
$temps = 10$



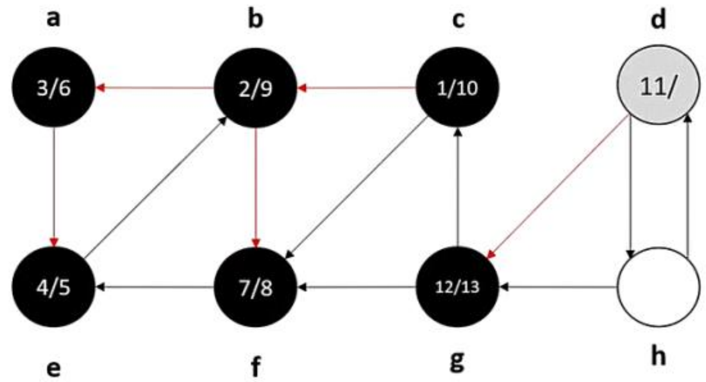
$temps = 11$



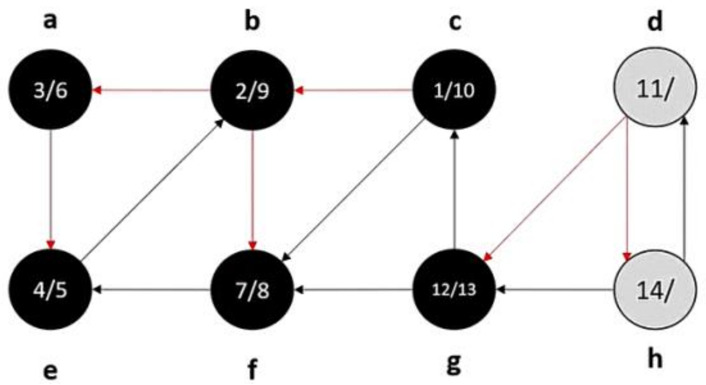
$temps = 12$



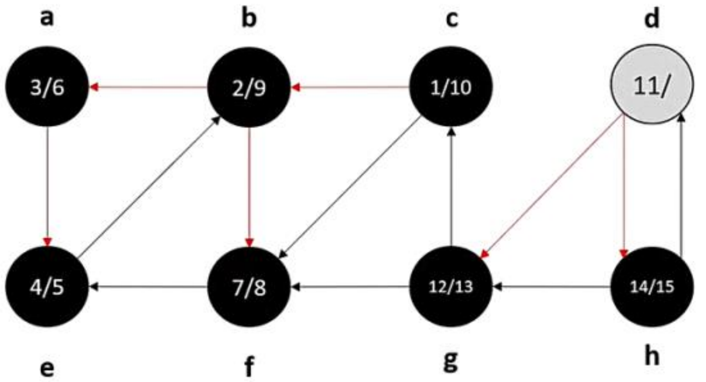
$temps = 13$



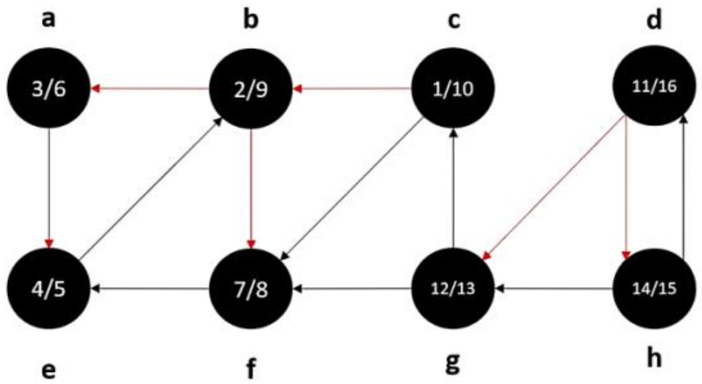
$temps = 14$



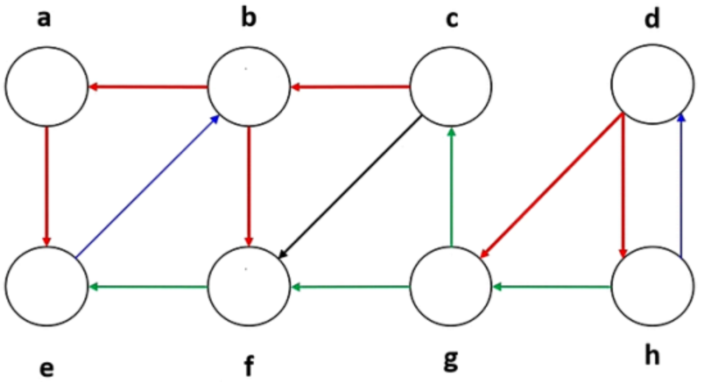
$temps = 15$



$temps = 16$



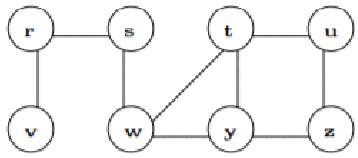
$temps = 17$



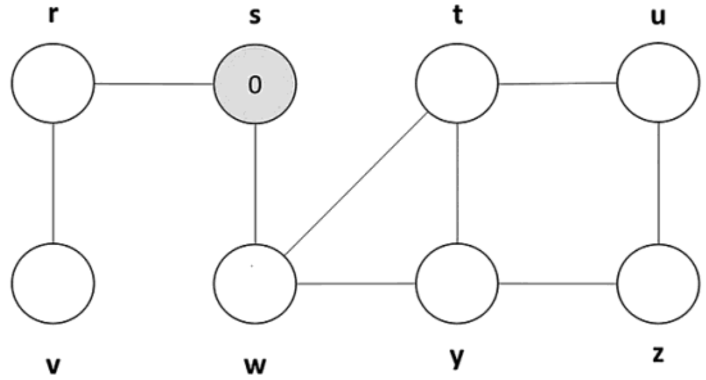
→ : arc de liaison
→ : arc avant
→ : arc arrière
→ : arc transverse

Exercice 3 :

Appliquer l'algorithme de parcours en largeur au graphe non orienté suivant, en partant du sommet s.

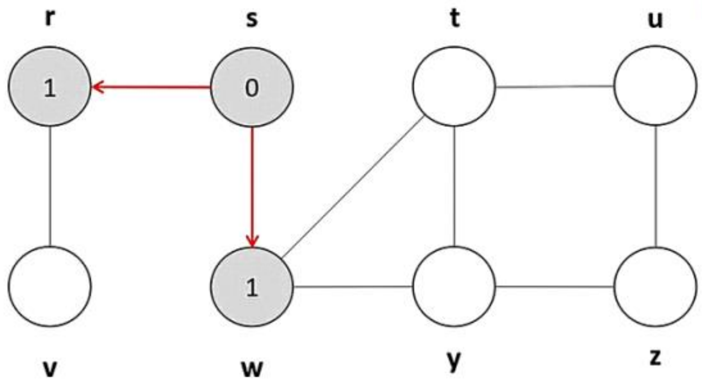


tant du sommet s



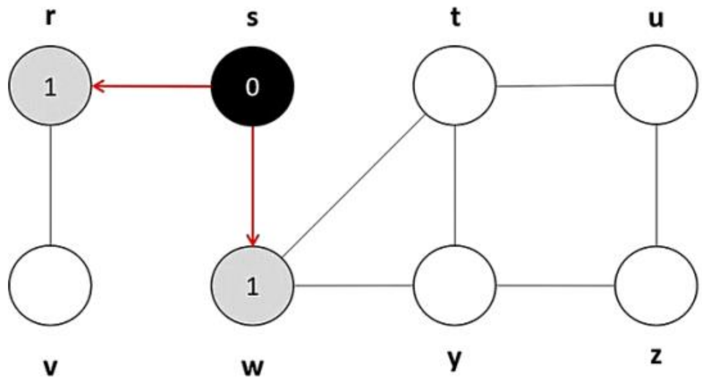

```
procédure PEL (Entrée : G, s ∈ S
                    Sortie : d, p)
  pour x ∈ S – {s} faire
     c[x] ← Blanc ;
     d[x] ← + ∞
     p[x] ← Nul ;
  fin pour
  c[s] ← Gris;  d[s] ← 0;  p[s] ← Nul ;
  F ← ∅ ; enfiler(F, s) ;
```

$F = \{ s \}$



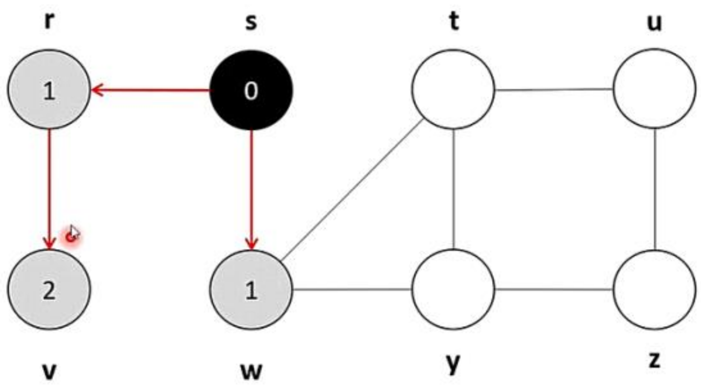

```
tant que F ≠ ∅ faire
      x ← défiler(F);
      pour y ∈ Adj[x] faire
            si (c[y] = Blanc) alors
               c[y] ← gris;
               d[y] ← d[x] + 1;  p[y] ← x;
               enfiler(F, y);
            fin si
      fin pour
      c[x] ← noir;
fin tant que
```

$F = \{ r, w \}$



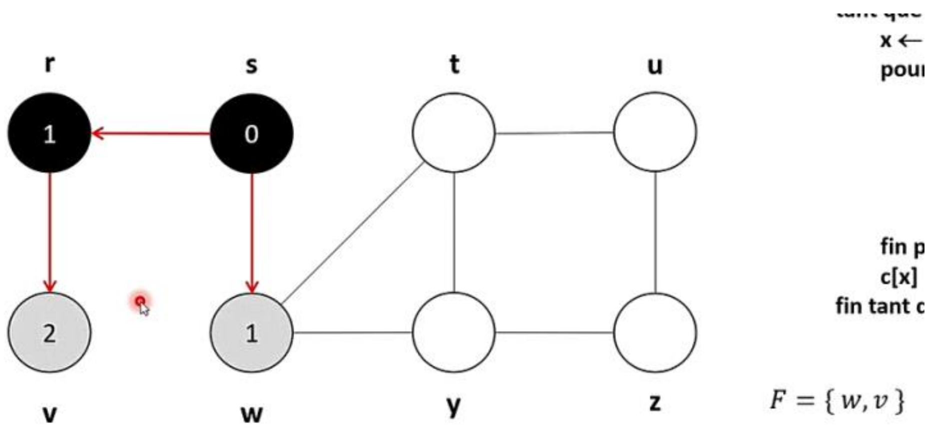

```
pour
fin p
c[x]
fin tant c
```

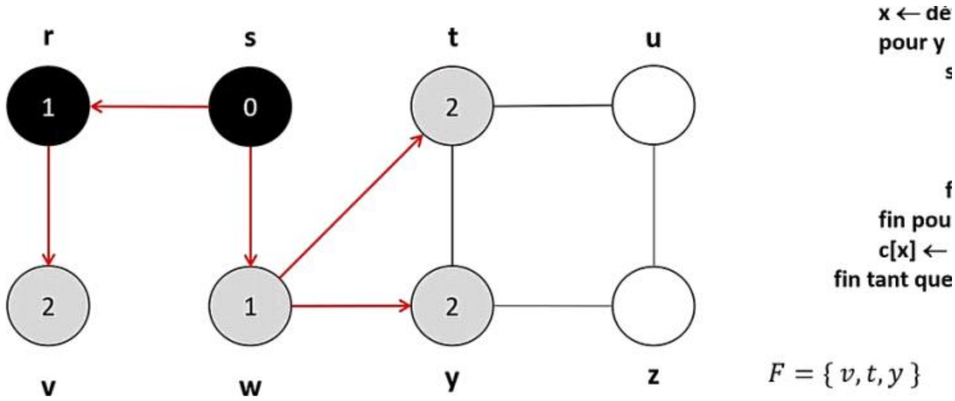
$F = \{ r, w \}$

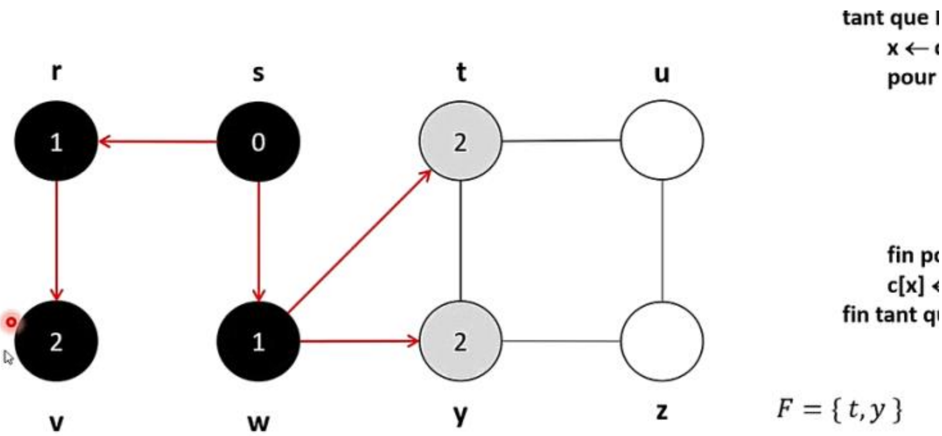


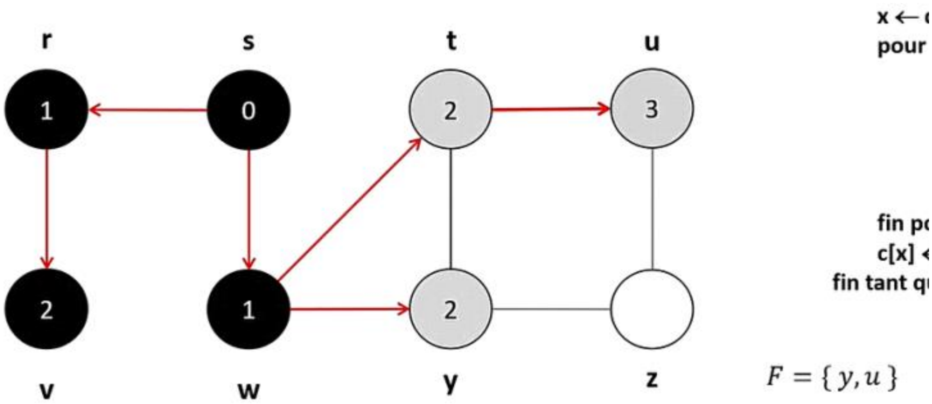

```
x ←
pou
fin p
c[x]
fin tant
```

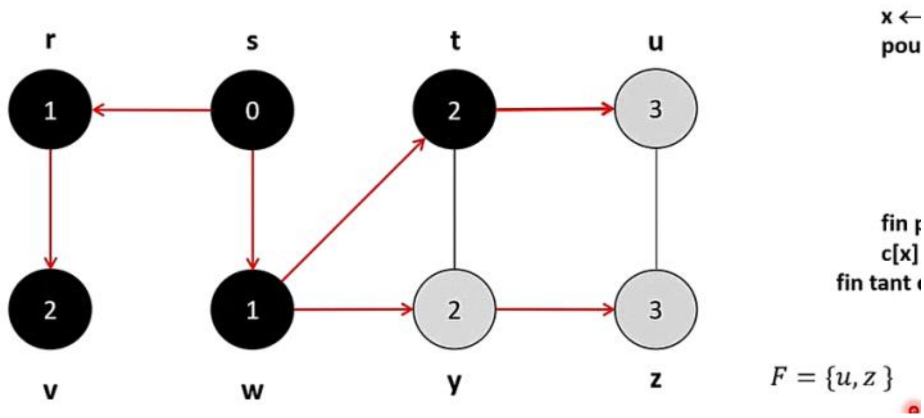
$F = \{ w, v \}$

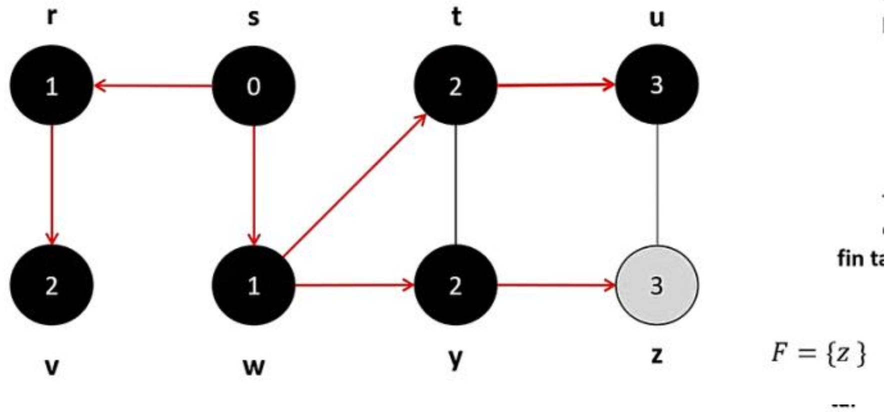

r
s
t
u
1
0
2
1
v
w
y
z
x ←
pour
fin p
c[x]
fin tant
$F = \{ w, v \}$

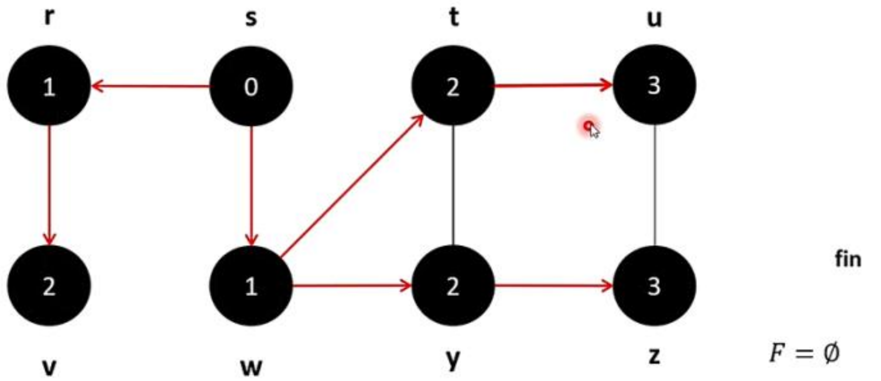

x ←
pour y
r
s
t
u
1
0
2
2
1
2
fin pou
c[x] ←
fin tant que
v
w
y
z
$F = \{ v, t, y \}$


tant que
x ←
pour
r
s
t
u
1
0
2
2
1
2
fin p
c[x]
fin tant q
v
w
y
z
$F = \{ t, y \}$


x ←
pour
r
s
t
u
1
0
2
3
2
1
2
fin p
c[x]
fin tant q
v
w
y
z
$F = \{ y, u \}$



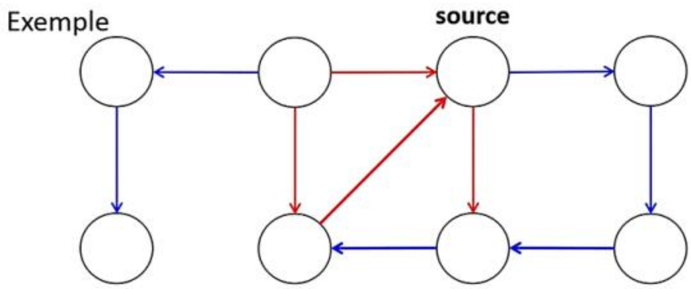




Exercice 4 :

Soit G un graphe orienté sur lequel on effectue un parcours en profondeur d'abord depuis un sommet donné. Ce parcours ne permet pas d'atteindre tous les sommets du graphe : que pouvez-vous en déduire ?

- Soit *G* un graphe orienté sur lequel on effectue un parcours en profondeur d'abord depuis un sommet donné. Ce parcours ne permet pas d'atteindre tous les sommets du graphe : que pouvez-vous en déduire ?



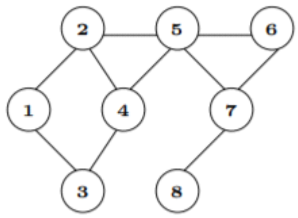
Il existe plusieurs arbres à la fin du parcours
→ forêt

→ le graphe n'est pas fortement connexe

→ conclusion sur la connexité (faible) ?

Exercice 7 :

On considère le graphe non orienté simple $G = (S, A)$ suivant :



1. Dérouler précisément l'algorithme de parcours en profondeur sur ce graphe, en supposant que l'on parte du sommet 1. Donner le graphe de liaison obtenu.

2. Dérouler précisément l'algorithme de parcours en largeur sur le graphe G, en supposant que l'on parte du sommet 5. Donner le graphe de liaison obtenu.

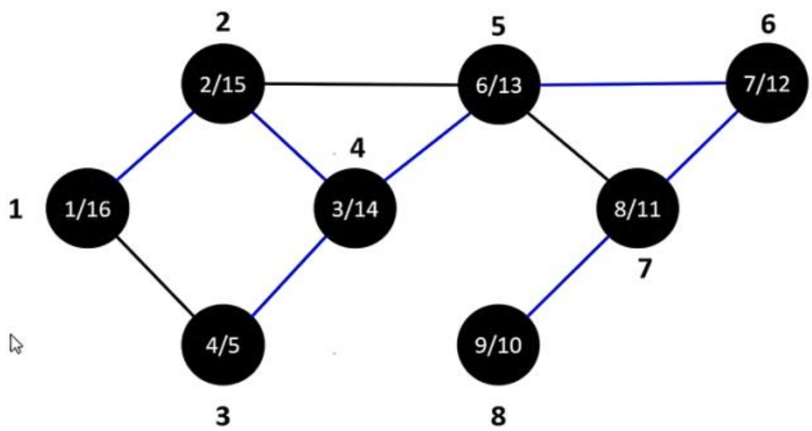
3. On suppose maintenant pouvoir partir de n'importe quel sommet.

a. Est-ce que les listes $L_1 = (2, 5, 4, 3, 1, 6, 7, 8)$ et $L_2 = (5, 7, 8, 2, 4, 1, 3, 6)$ qui donnent l'ordre dans lequel les sommets ont été découverts, peuvent être obtenues par l'algorithme de parcours en profondeur ?

b. Même question pour le parcours en largeur, avec les listes $L_1 = (6, 5, 7, 8, 2, 4, 1, 3)$ et $L_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.

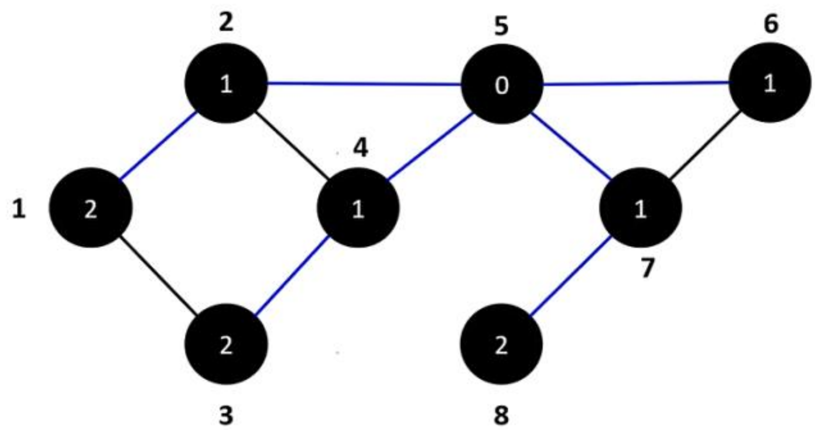
- On considère le graphe non orienté simple $G = (S,A)$ suivant

1. Parcours en profondeur en partant du sommet 1



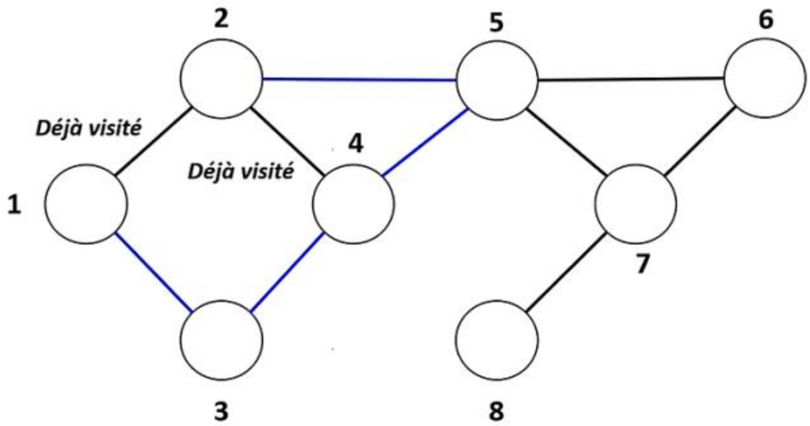
- On considère le graphe non orienté simple $G = (S,A)$ suivant

2. Parcours en largeur en partant du sommet 5



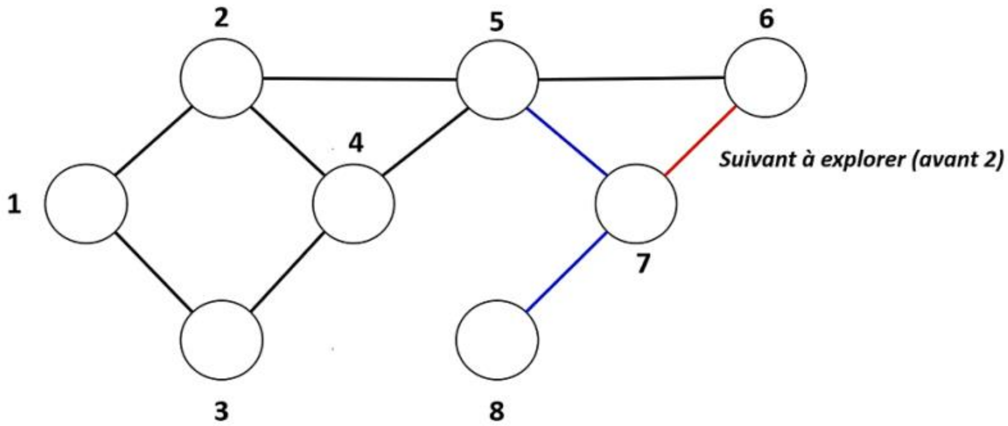
Est-ce que les listes $\color{red}{\mathbf{L_1 = (2, 5, 4, 3, 1, 6, 7, 8)}}$ et $L_2 = (5, 7, 8, 2, 4, 1, 3, 6)$ qui donnent l'ordre dans lequel les sommets ont été découverts, peuvent être obtenues par l'algorithme de parcours en profondeur ?

Oui



Est-ce que les listes $L_1 = (2, 5, 4, 3, 1, 6, 7, 8)$ et $\color{red}{\mathbf{L_2 = (5, 7, 8, 2, 4, 1, 3, 6)}}$ qui donnent l'ordre dans lequel les sommets ont été découverts, peuvent être obtenues par l'algorithme de parcours en profondeur ?

Non

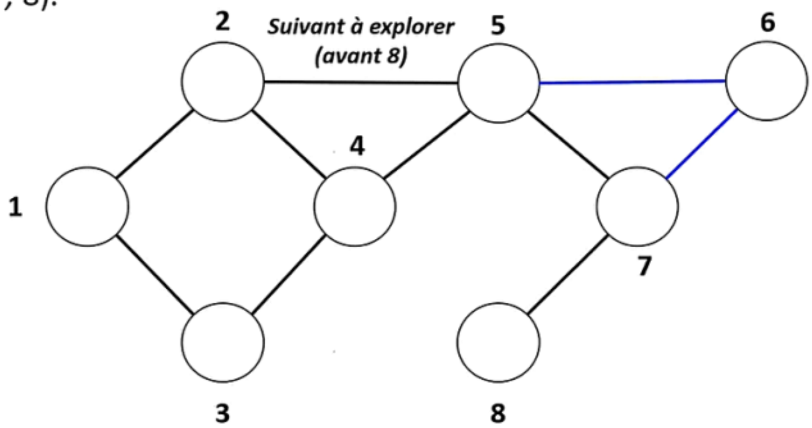


- On considère le graphe non orienté simple $G = (S,A)$ suivant

3. On suppose maintenant pouvoir partir de n'importe quel sommet

Même question pour le parcours en largeur, avec les listes $\color{red}{\mathbf{L_1 = (6, 5, 7, 8, 2, 4, 1, 3)}}$ et $L_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.

Non

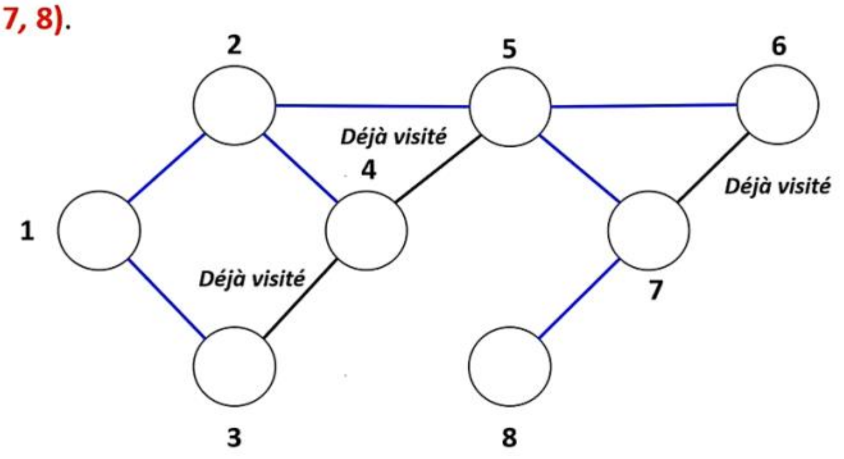


- On considère le graphe non orienté simple $G = (S,A)$ suivant

3. On suppose maintenant pouvoir partir de n'importe quel sommet

Même question pour le parcours en largeur, avec les listes $L_1 = (6, 5, 7, 8, 2, 4, 1, 3)$ et **$L_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$**.

Oui



TD 5 - Connexité

vendredi 19 février 2021 11:56

Exercice 1 :

On considère le graphe $G = (S, A)$ orienté défini par :
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 6), (6, 3), (7, 8), (8, 7)\}$.

1. Rappeler ce qu'est une composante connexe dans un graphe orienté.

2. Quelles sont les composantes connexes de G ? Quelles sont les composantes fortement connexes de G ?

3. Un point d'articulation est un sommet qui augmente le nombre de composantes connexes si on l'enlève. Indiquer quels sont les points d'articulation de G.

4. Un isthme est un arc (ou une arête) qui augmente le nombre de composantes connexes si on l'enlève. Donner un exemple d'isthme dans le graphe G.

5. On appelle connexité-arête d'un graphe **non orienté** G, notée $k(G)$, le nombre minimum d'arêtes à supprimer dans G pour qu'il ne soit plus connexe. Donner un exemple de graphe non orienté avec $k(G) = 3$.

1. Rappeler ce qu'est une composante connexe dans un graphe orienté.

On parle de connexité en général pour les graphes **non orientés**
→ Une composante connexe est un ensemble de sommets qui, lorsqu'ils sont considérés deux à deux, sont joignables par une chaîne

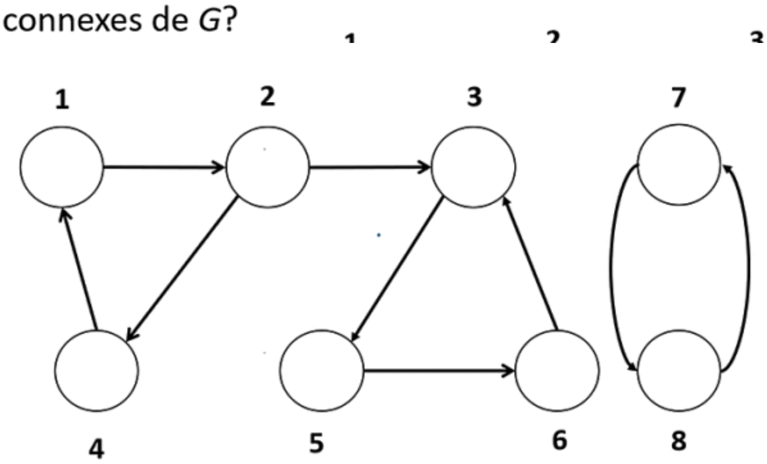
Dans un graphe orienté on définit les composantes connexes en « *oubliant* » l'orientation des arcs
→ On parle alors de **connexité faible**

La **connexité forte** n'est définie que dans les graphes orientés. Deux sommets sont dans la même composante fortement connexe s'il existe un **chemin** permettant de joindre ses deux sommets, **dans les deux sens**

- On considère le graphe $G = (S,A)$ orienté défini par :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 6), (6, 3), (7, 8), (8, 7)\}$.

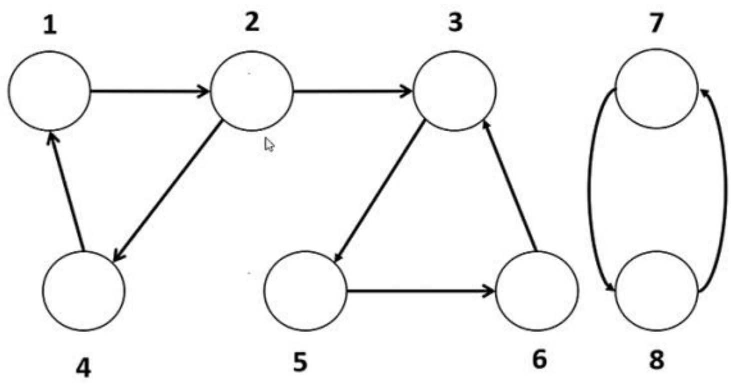
2. Quelles sont les composantes connexes de G? Quelles sont les composantes fortement connexes de G?



CC : { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
{ 7, 8 }

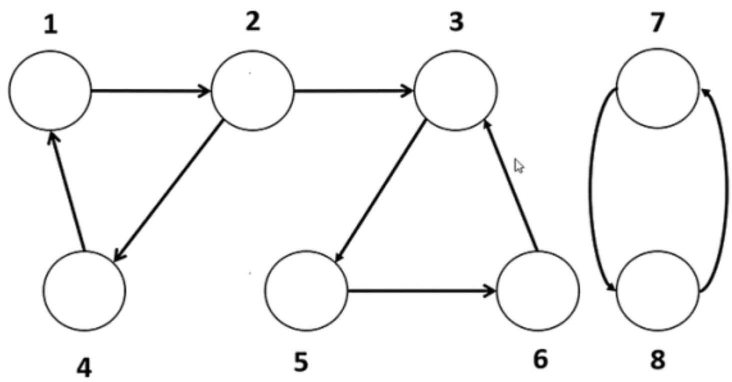
CfC : { 1, 2, 4}
{ 3, 5, 6 }
{ 7, 8 }

3. Un point d'articulation est un sommet qui augmente le nombre de composantes connexes si on l'enlève. Indiquer quels sont les points d'articulation de *G*.



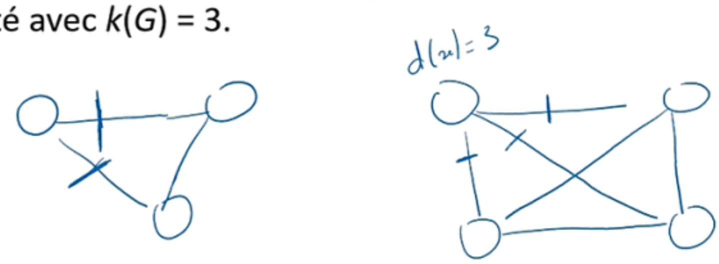
Points d'articulation :
- sommet 2
- sommet 3

4. Un isthme est un arc (ou une arête) qui augmente le nombre de composantes connexes si on l'enlève. Donner un exemple d'isthme dans le graphe *G*.



Isthme :
- arc (2,3)

5. On appelle connexité-arête d'un graphe **non orienté** *G*, notée *k*(*G*), le nombre minimum d'arêtes à supprimer dans *G* pour qu'il ne soit plus connexe. Donner un exemple de graphe non orienté avec *k*(*G*) = 3.



Exercice 2 :

Notons $CC(x)$ la composante connexe d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ contenant le sommet $x \in S$.

1. Montrer que si $y \in CC(x)$ alors $CC(x) = CC(y)$.

2. Montrer que G est connexe si et seulement si $\forall x \in S, CC(x) = S$.

1. Montrer que si $y \in CC(x)$ alors $CC(x) = CC(y)$
   - On réintroduit les notations
     - Soit G =(S, A) un graphe non orienté et soit $x \in S$ un sommet de G
     - $CC(x) = \{ z \in S : \exists$ une chaîne de G reliant x à z $\} = \{ z \in S : x\ \mathcal{C}\ z \}$
   - Pour montrer l'égalité de deux ensembles on peut montrer qu'ils sont inclus l'un dans l'autre
   - Supposons que $y \in CC(x)$ et montrons que $CC(x) = CC(y)$

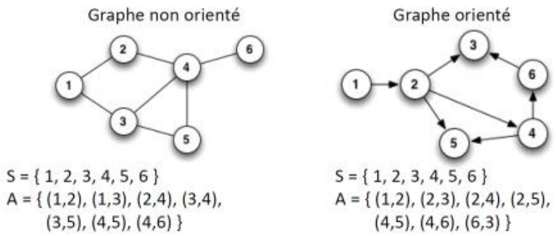
   b. Montrons que $CC(y) \subseteq CC(x)$ (*même principe*)
     - Soit $z \in CC(y)$, on a : $y\ \mathcal{C}\ z$
     - Comme $y \in CC(x)$ on a : $x\ \mathcal{C}\ y$
     - Donc on a : $x\ \mathcal{C}\ z$ car $\mathcal{C}$ est transitive
     - D'où : $z \in CC(x)$ et par suite $CC(y) \subseteq CC(x)$

2. Montrer que G connexe $\Leftrightarrow \forall x \in S, CC(x) = S$
   - Montrons $\Rightarrow$
     - Supposons G connexe
     - On a : $\forall x \in S, \forall y \in S, x\ \mathcal{C}\ y$
     - $\Leftrightarrow \forall x \in S, \forall y \in S, y \in CC(x)$
     - $\Leftrightarrow \forall x \in S, S \subseteq CC(x)$
     - Comme $CC(x) \subseteq S$ par définition, on a bien $CC(x) = S$
   - Montrons $\Leftarrow$
     - Supposons que $\forall x \in S, CC(x) = S$
     - On a : $\forall x \in S, \forall y \in S, y \in CC(x)$
     - $\Leftrightarrow$ G connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconque de S

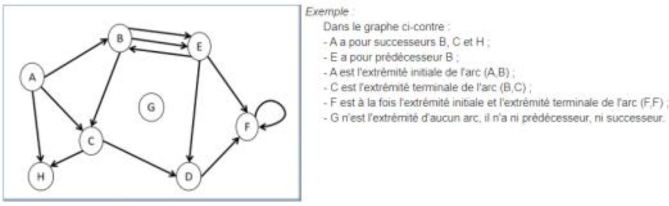
CM

vendredi 19 février 2021 17:11

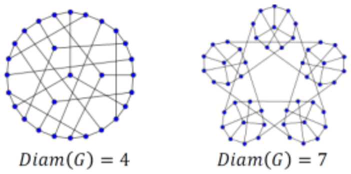
Graphe orienté et non orienté, sommet et arêtes (S et A)



Successeur/prédécesseur/extrémité initiale et terminale



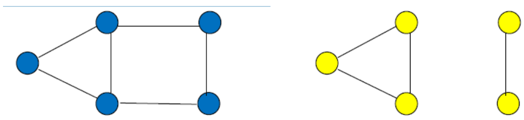
Distance entre deux sommets = longueur d'une plus courte chaîne (en nombre d'arêtes) entre les deux sommets
Le diamètre d'un graphe $G=(S,A)$ est la plus grande distance possible qui puisse exister entre deux de ses sommets, noté $Diam(G)$.



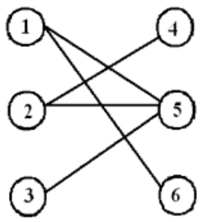
Graphe complet : Chaque sommets sont reliés les uns aux autres, on a m = $\frac{n(n-1)}{2}$, m est le nombre d'arêtes.

Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin de n'importe quel sommet vers n'importe quel autre.

Un graphe non orienté est connexe si deux sommets quelconques sont connectés par une chaîne.

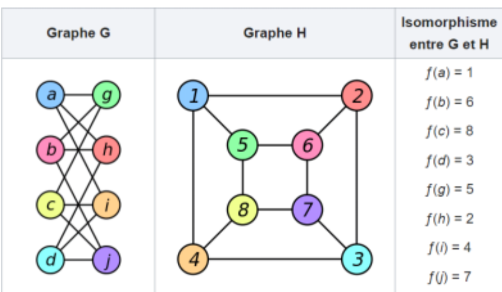


Un graphe G = (S,A) est biparti si S peut être partitionné en 2 classes $S1$ et $S2$ tels que 2 sommets de la même classe ne soient jamais adjacents



Il est dit biparti complet (ou biblique) s'il est biparti et qu'il contient le nombre maximal d'arêtes.

Un isomorphisme entre $G=(S,A)$et $G'=(S',A')$est une bijection $f:S\to S'$telle que $(i,j)\in A \leftrightarrow (f(i),f(j))\in A'$.



Parcours en largeur de G = (S,A)

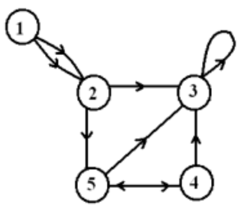
On utilise des couleurs pour suivre la progression de l'algorithme
Blanc : sommet pas encore découvert
Gris : sommet découvert mais pas encore terminé
Noir : sommet terminé
On note $\boldsymbol{c[i]}$la couleur du sommet $\boldsymbol{i \in S}$

Le nombre de sommets de degré impair est pair

m = $\frac{n(n-1)}{2}$

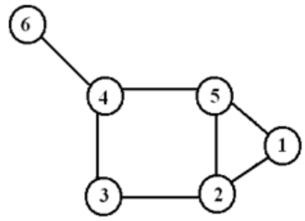
$\sum d(s) = 2m \;\; ou\ m\ est\ le\ nombre\ de\ connexions$

Degré :
Graphe orienté : d^+i = nombre d'arcs sortants de i
d^-i = nombre d'arcs entrants en i
$d(i) = d^-i + d^+i$



$d^+(1) = 2$
$d^-(1) = 0$
$d^+(2) = 2$
$d^-(2) = 2$
$d^+(3) = 1$
$d^-(3) = 4$
$d^+(4) = 2$
$d^-(4) = 1$
$d^+(5) = 2$
$d^-(5) = 2$

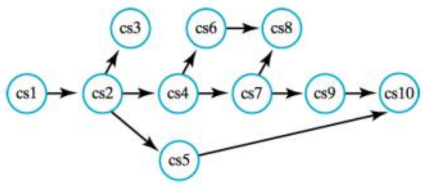
Graphe non-orienté : $d(i)$ = nombre d'arêtes incidentes à i



$d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 1$

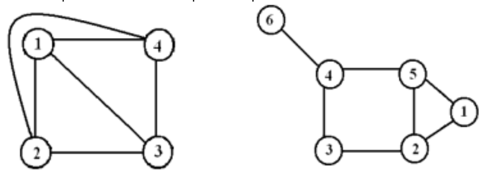
Une chaîne (un chemin) élémentaire est une chaîne (un chemin) ne passant par deux fois par un même sommet
Une chaîne (un chemin) simple est une chaîne (un chemin) ne passant pas deux fois par une même arête (un même arc)

Un graphe $G=(S,A)$ orienté est acyclique s'il ne contient pas de circuit

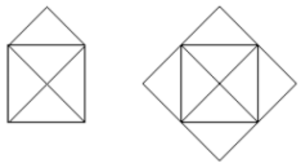


Peut être vu comme une hiérarchie

Un graphe est planaire si on peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes se croisent



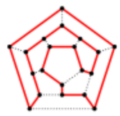
Un circuit (cycle) eulérien est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque arc (arête) du graphe considéré. $G=(S,A)$est Eulérien s'il admet un circuit (cycle) eulérien.



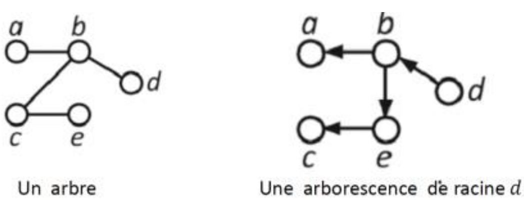
Tracer sans lever le crayon

Un circuit (cycle) hamiltonien est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque sommet du graphe considéré. $G=(S,A)$est Hamiltonien s'il admet un circuit (cycle) hamiltonien

- $\forall i \in S, d(i) \geq \frac{n}{2}$ Théorème de Dirac (1952)
- $\forall (i,j) \notin A, d(i) + d(j) \geq n$ Théorème d'Ore (1960)

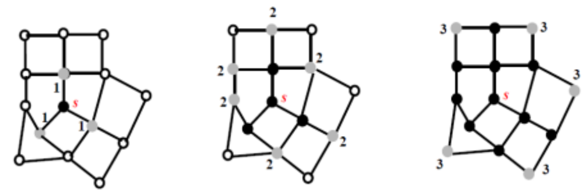


Un arbre est un graphe connexe sans cycle
Une arborescence est un arbre orienté possédant une unique racine
Une racine est un sommet $r$tel qu'il existe un chemin de r à $i$pour tout $i \neq r$



Graphe orienté	Graphe non orienté
Sommet	Sommet
Arc	Arête
Chemin	Chaîne

On utilise des couleurs pour suivre la progression de l'algorithme
Blanc : sommet pas encore découvert
Gris : sommet découvert mais pas encore terminé
Noir : sommet terminé
On note $c[i]$la couleur du sommet $i∈S$



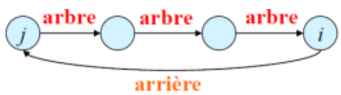
procédure PEL (Entrée : G, s ∈ S
Sortie : d, p)
pour x ∈ S – {s} faire
c[x] ← Blanc ;
d[x] ← + ∞
p[x] ← Nul ;
fin pour
c[s] ← Gris; d[s] ← 0; p[s] ← Nul ;
F ← ∅ ; enfiler(F, s) ;
} Initialisation

$c[i]$: couleur de $i \in S$
Blanc : Non découvert
Gris : Découvert
Noir : Terminé
F : file des sommets Gris

Entrée : Un graphe $G = (S, A)$ et
Une source $s \in S$
Sortie
$d[i]$: distance de s à $i \in S$
$p[i]$: prédécesseur de i

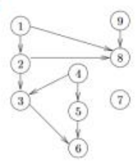
Traitement {
tant que F ≠ ∅ faire
x ← défiler(F);
pour y ∈ $Adj[x]$ faire
si (c[y] = Blanc) alors
c[y] ← gris;
d[y] ← d[x] + 1; p[y] ← x;
enfiler(F, y);
fin si
fin pour
c[x] ← noir;
fin tant que

G possède un circuit si et seulement si il existe un arc arrière dans un parcours en profondeur de G.

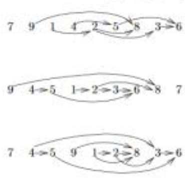


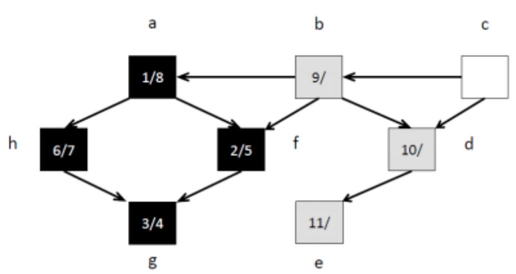
Tri topologique :
Retourne une liste chainée

Proposez un tri topologique du graphe



Solution simple
Voici trois tris topologiques possibles.





Sommet	Sommet
Arc	Arête
Chemin	Chaîne
Circuit	Cycle
Successeur	Voisin
Prédécesseur	Voisin
Voisin	Voisin
Extrémité Initiale	Extrémité
Extrémité Terminale	Extrémité
Demi-degré	Degré
Degré	Degré
Forte Connexité	Connexité

Parcours en profondeur de G = (S,A)

En sortie de l'algorithme
- pour tout $i∈S$
  - $d[i]$ = date de découverte du sommet i(passage du blanc au gris)
  - $f[i]$ = date de fin de traitement du sommet i(passage du gris au noir)
  - $p[i] = j$,i a été découvert en scannant la liste d'adjacence de j
- L'algorithme utilise la même convention des couleurs
- Utilise aussi une variable globale , temps

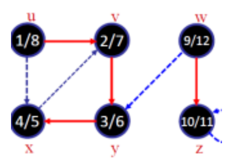
$c[i]$: couleur de $i \in S$
Blanc : Non découvert
Gris : Découvert
Noir : Terminé

Entrée : Un graphe $G = (S, A)$
Sortie
$d[i]$: date de découverte de s à $i \in S$
$f[i]$: date de fin de traitement de s à $i \in S$
$p[i]$: prédécesseur de i

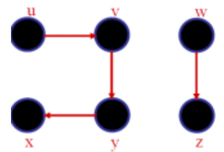
procédure PEP (Entrée : G
Sortie : d, f, p)
pour x ∈ S faire
c[x] ← Blanc ; p[x] ← Nul ;
fin pour
temps ← 1;
} Initialisation
pour x ∈ S faire
si(c[x] = Blanc) alors
Visiter(x) ;
fin si
fin pour
} Traitement

Procédure Visiter(x)
Traitement {
c[x] ← Gris ;
d[x] ← temps ; temps ← temps + 1;
pour y ∈ $Adj[x]$ faire
si (c[y] = Blanc) alors
p[y] ← x;
Visiter(y);
fin si
fin pour
c[x] ← Noir;
f[x] ← temps ; temps ← temps + 1;

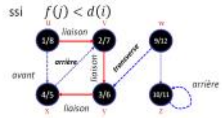
$Adj[j] = V^+(i)\ ou\ V(i)$
si G orienté ou non



- Arcs de liaison <=> arcs de la forêt
  → (i,j)est un arc de liaison si ja été découvert pendant le parcours de l'arc (i,j)
- Arc arrière ⇔ (i,j) reliant i à un ancêtre j dans un arbre
  remarque : les boucles sont considérées comme des arcs arrière
- Arc avant ⇔ (i,j)pas de liaison et qui relie ià un descendant j dans un arbre
- Arc transverse : tous les autres arcs
  -> ils peuvent relier deux sommets d'un même arbre, du moment que l'un des sommets n'est pas un ancêtre de l'autre
  -> ils peuvent aussi relier deux sommets appartenant à des arbres différents

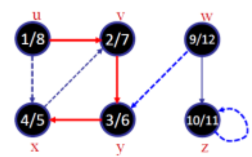


Classification des arcs : **sur l'exemple**
- Liaison si l'arc est dans la forêt
- Arc arrière ssi $d(j) < d(i) < f(i) < f(j)$
- Arc avant ssi $d(i) < d(j) < f(j) < f(i)$
- Arc de traverse ssi $f(j) < d(i)$



Théorème des parenthèses :

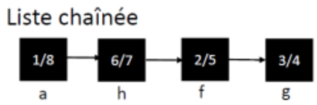
Soit l'intervalle I_s=[d[s],f[s]] défini pour $s∈S$.
Alors, pour tout $i,j∈S$, une et une seule des trois conditions suivantes est vérifiée
1. $Ii∩Ij=∅$, et ni i ni j n'est un descendant de l'autre
2. $Ii⊆Ij$, et i est un descendant de j
3. $Ij⊆Ii$, et j est un descendant de i



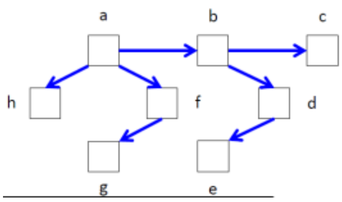
$$(u(v(y(xx)y)v)u)(w(zz)w)$$

Soit G=(S,A) un graphe orienté sans circuit. Soit un sommet $i∈S$
- On dit que i est une source si $d^-(i)$=0
- On dit que i est un puits si $d^+(i)$=0

Propriétés d'un graphe sans circuit
- G sans circuit tout chemin de longueur > 0 est élémentaire
- G sans circuit il existe une source set un puits ndans S



Arbre du parcours en largeur

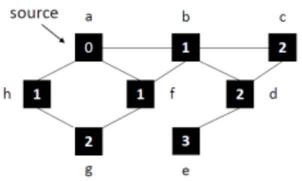


F =	b f h
$d[i]$ =	1 1 1
$p[i]$ =	a a a

F =	f h c d
$d[i]$ =	1 1 2 2
$p[i]$ =	a a b b

F =	h c d g
$d[i]$ =	1 2 2 2
$p[i]$ =	a b b f

F =	g e
$d[i]$ =	2 3
$p[i]$ =	f d



i	a	b	c	d	e	f	g	h
$d[i]$	0	1	2	2	3	1	2	1
$p[i]$	∅	a	b	b	d	a	f	a

Matrice d'incidence :

La matrice d'incidence est une matrice $n \times p$, où n est le nombre de sommets du graphe et p est le nombre de liens (arêtes ou arcs).

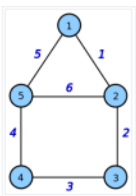
Cette matrice est définie de deux façons différentes selon que le graphe est orienté ou non orienté.

1. Si le graphe est orienté, le coefficient de la matrice d'incidence en ligne et en colonne vaut :
   - **-1** si l'arc sort du sommet
   - **1** si l'arc entre dans le sommet
   - **0** sinon
2. Si le graphe est non orienté, le coefficient de la matrice d'incidence en ligne et en colonne vaut :

- **1** si le sommet est une extrémité de l'arête
- **2** si l'arête est une boucle sur
- **0** sinon

Prenons le cas du graphe ci-contre. Il possède 5 sommets et 6 arêtes, la matrice d'incidence aura donc 5 lignes et 6 colonnes :

- le sommet *1* est l'aboutissement des arêtes *1* et *5*
- le sommet *2* est l'aboutissement des arêtes *1*, *2* et *6*
- le sommet *3* est l'aboutissement des arêtes *2* et *3*
- le sommet *4* est l'aboutissement des arêtes *3* et *4*
- le sommet *5* est l'aboutissement des arêtes *4*, *5* et *6*



Un graphe non orienté.

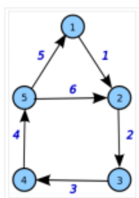
ce qui donne la matrice d'incidence :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que chaque colonne a une somme égale à 2, puisque chaque arête a deux extrémités.

Prenons le cas du graphe ci-contre. Il possède 5 sommets et 6 arcs, la matrice d'incidence aura donc 5 lignes et 6 colonnes :

- le sommet *1* est l'aboutissement des arcs *1* (qui sort) et *5* (qui entre)
- le sommet *2* est l'aboutissement des arcs *1* (qui entre), *2* (qui sort) et *6* (qui entre)
- le sommet *3* est l'aboutissement des arcs *2* (qui entre) et *3* (qui sort)
- le sommet *4* est l'aboutissement des arcs *3* (qui entre) et *4* (qui sort)
- le sommet *5* est l'aboutissement des arcs *4* (qui entre), *5* (qui sort) et *6* (qui sort)



Un graphe orienté.

ce qui donne la matrice d'incidence :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le graphe transposé d'un graphe orienté $G=(S,A)$ est $G^{\top}=(S,A^{\top})$avec $A^{\top}=\{(i,j):(j,i)\in A\}$

- On dit que i est une source si $d^-(i)=0$
- On dit que i est un puits si $d^+(i)=0$

Propriétés d'un graphe sans circuit

- G sans circuit tout chemin de longueur > 0 est élémentaire
- G sans circuit il existe une source $s$et un puits $p$dans S
- G sans circuit tout sous graphe de Gest sans circuit

Hiérarchie :

$I = S, k = 0$

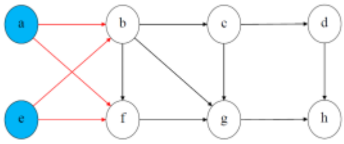
Tant que $I \neq \emptyset$ **faire**

$N_k = \{i \in I : V^-_{G(I)}(i) = \emptyset\}$

$I = I - N_k$

$k + 1$

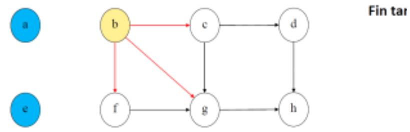
Fin tant que



$N_0 = \{i \in I : V^-_{G(I)}(i) = \emptyset\} = \{a, e\}$

$I = \{a, e\}$

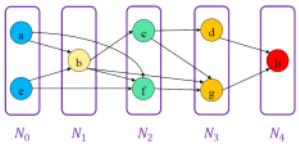
$G(I) = (S - I, A - \{(a,b),(a,f),(e,b),(e,f)\})$



$N_1 = \{i \in I : V^-_{G(I)}(i) = \emptyset\} = \{b\}$

$I = \{a, e, b\}$

$G(I) = (S - I, A - \{(a,b),(a,f),(e,b),(e,f),(b,c),(b,f),(b,g)\})$

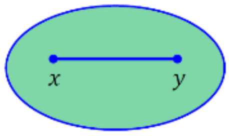


Convexité :

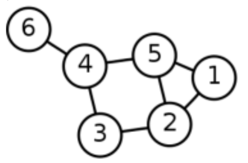
Un ensemble Eest convexe si le segment de ligne joignant deux éléments quelconques de E est également dans E.

Fonction convexe :

Une fonction $f$est convexe sur un ensemble E si pour tout $x,y\in E$, et tout $\alpha\in[0,1]$, on a $f(\alpha x+1-\alpha y)\leq\alpha f(x)+1-\alpha f(y)$



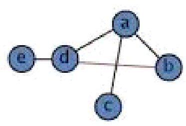
Un sous graphe convexe d'un graphe non orienté Gest un sous graphe qui contient chaque plus court chemin entre deux des sommets de G. Exemple en dessous, pour le chemin 2-3-4, il manque un chemin qui est 2-5-4 donc pas convexe



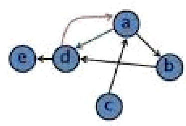
Le triangle formé par les sommets 1-2-5 (**cycle**) **est convexe**

Le chemin < 2 – 3 – 4 > **n'est pas convexe**
→ il n'inclut pas un des deux plus courts chemins de 2 à 4

Matrice d'adjacence :

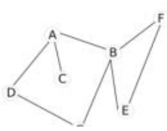


	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	0
b	1	0	0	1	0
c	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	1
e	0	0	0	1	0



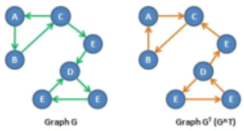
	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	0	0	0	1	0
c	1	0	0	0	0
d	1	0	0	0	1
e	0	0	0	0	0

Liste d'adjacence :

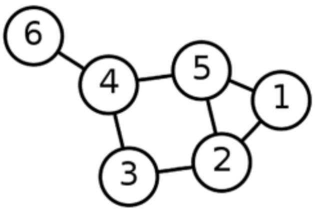


$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Le graphe transposé d'un graphe orienté $G=(S,A)$ est $G^T=(S,A^T)$avec $A^T=\{(i,j):(j,i)\in A\}$



Un sous-graphe convexe d'un graphe non orienté G est un sous-graphe qui contient chaque plus court chemin entre deux des sommets de G.

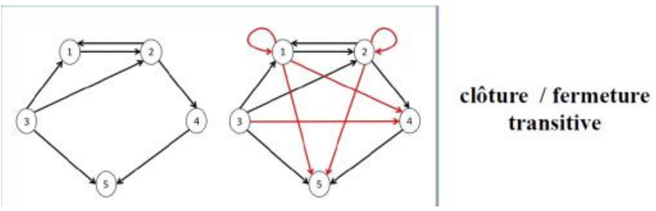


Le triangle formé par les sommets 1-2-5 est convexe.
Le chemin <2-3-4> n'est pas convexe car il n'inclut pas tous les plus court chemin de 2 à 4 (pas 2-5-4)

La fermeture transitive d'un graphe orienté (resp . non orienté) $G=(S,A)$est un graphe $G*=(S,A*)$tel que $\forall i,j\in S$

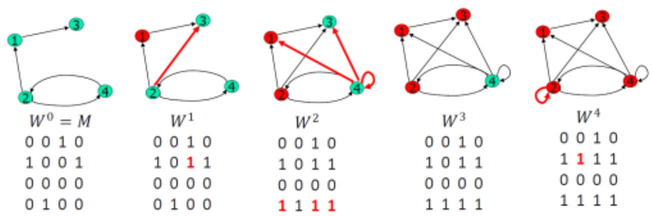
- $(i,j) \in A^* \leftrightarrow$ il existe un chemin (resp . une chaîne) de ià j
- $(i,j) \in A^* \leftrightarrow j\in V^{+*}i$ resp . $j\in V*i$

Cette fermeture transitive permet de détecter les chemins qui existent et ceux qui n'existent pas.

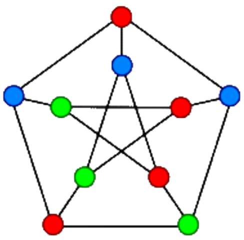


G est fortement connexe (connexe) si et seulement si ***G****est complet

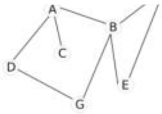
Algorithme de Warshall :
→ But : déterminer la fermeture transitive d'un graphe
$G=S,A\to M$ sa matrice d'adjacence
$G*=S,A*\to M*$sa matrice d'adjacence



Le nombre chromatique est le nombre minimal de couleurs qu'on doit utiliser pour colorer tous les sommets d'un graphe en s'assurant que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.

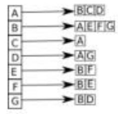


X(G) = 3



graphe cartographie

Voici la liste d'adjacence de ce graphe :

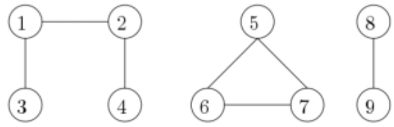


liste d'adjacence du graphe cartographie

Notation :
Ensemble des successeurs d'un sommet i : $V^+(i)$
Ensemble des prédécesseurs d'un sommet i : $V^-(i)$
Ensemble des voisins d'un sommet $i\in S$: $V(i)=V^-(i) \cup V^+(i)$

Sommets accessibles depuis i :
Soit k un entier, soit $i\in S$, on note $V^{+k}(i)=V^+(V^{+(k-1)}(i))$ le +k équivaut au nombre d'arc qu'il fait emprunter à partir du sommet i.
Convention $V^{+0}(i) = V^{-0}(i) = V^0(i) = \{i\}$
$V^*(i) = V^k(i)$
G **est connexe ssi** ***V*(i)=S***

G**est connexe ssi** ***G*** **possède une seule composante connexe**



$C(1) = \{ x \in S \mid 1\ C\ x \}$
$= \{ 1, 2, 3, 4 \}$

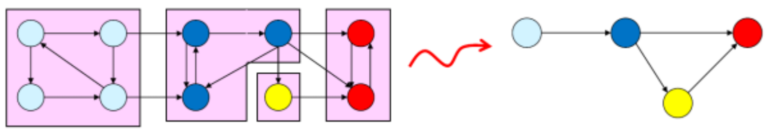
$C(5) = C(6) = C(7)$

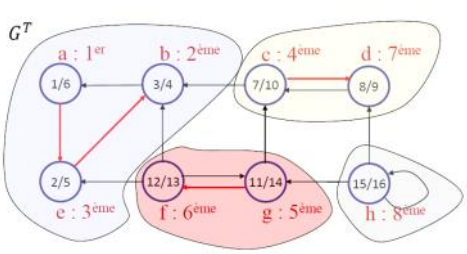
$C(8) = C(9)$

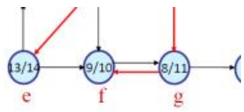
$C(2) = C(3) = C(4) = C(1)$

C(1), C(2), C(3), C(4) sont dans le même composante connexe, ils ont donc la même relation d'équivalence.
Ici, 3 composantes connexes donc le graphe n'est pas connexe

Graphe réduit :
On appelle graphe réduit de G le graphe Gr dont les sommets c1, . . . , cp sont les composantes fortement connexes de G, et il existe un arc entre ci et cj si et seulement s'il existe au moins un arc entre un sommet de Gi et un sommet de Gj dans le graphe G. On véri e que le graphe Gr est sans circuit. Le graphe réduit est acyclique







Le graphe réduit de G