www.unitru.edu.pe

Departamento Académico de Matemáticas

ANÁLISIS MATEMÁTICO

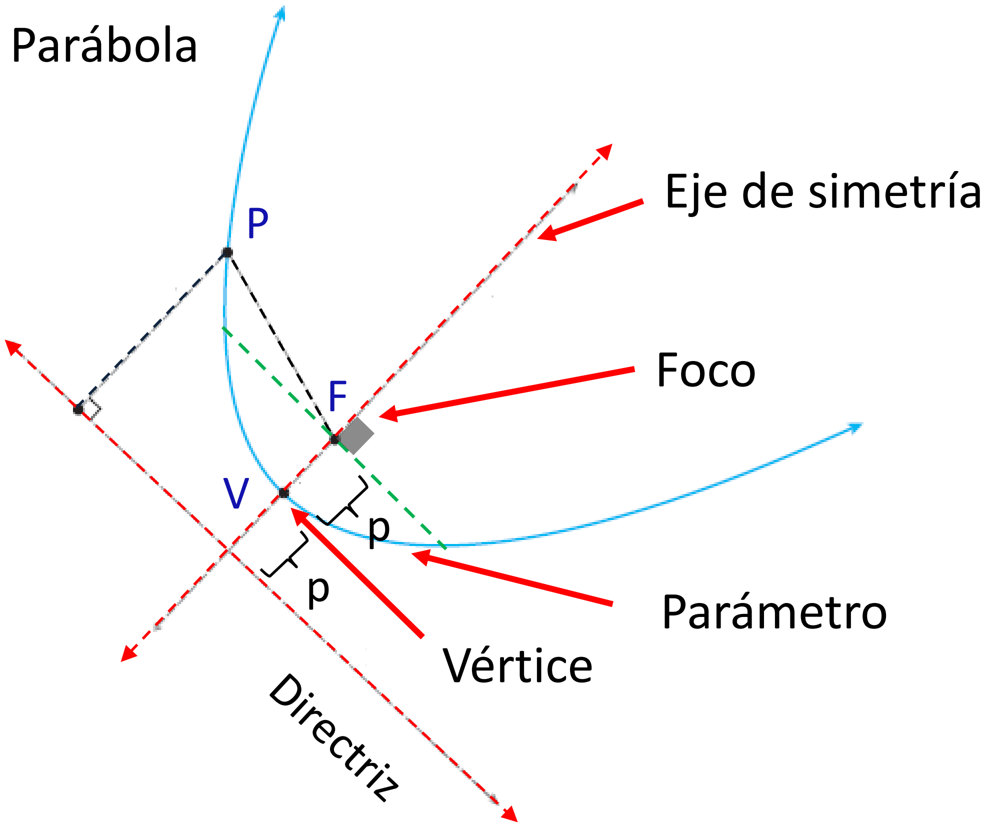
SESIÓN 3

- LA PARÁBOLA
- LA ELIPSE

Prof. Yuvi Marcelo Campos Andrade

DEFINICIÒN DE UNA PARÀBOLA

Una parábola es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de una recta fija (**directriz**) y un punto fijo (**foco**).

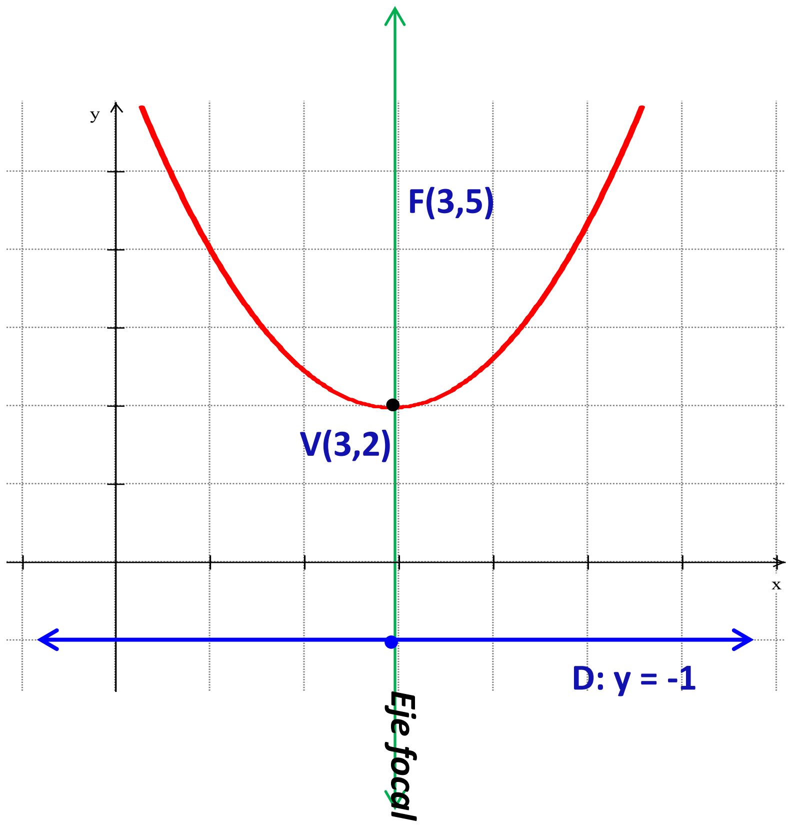


- **Vértice** : punto medio entre el Foco y la Directriz .
- **Eje de simetría** (Eje focal): recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
- ***p :*** distancia entre el foco y el vértice se llama distancia focal

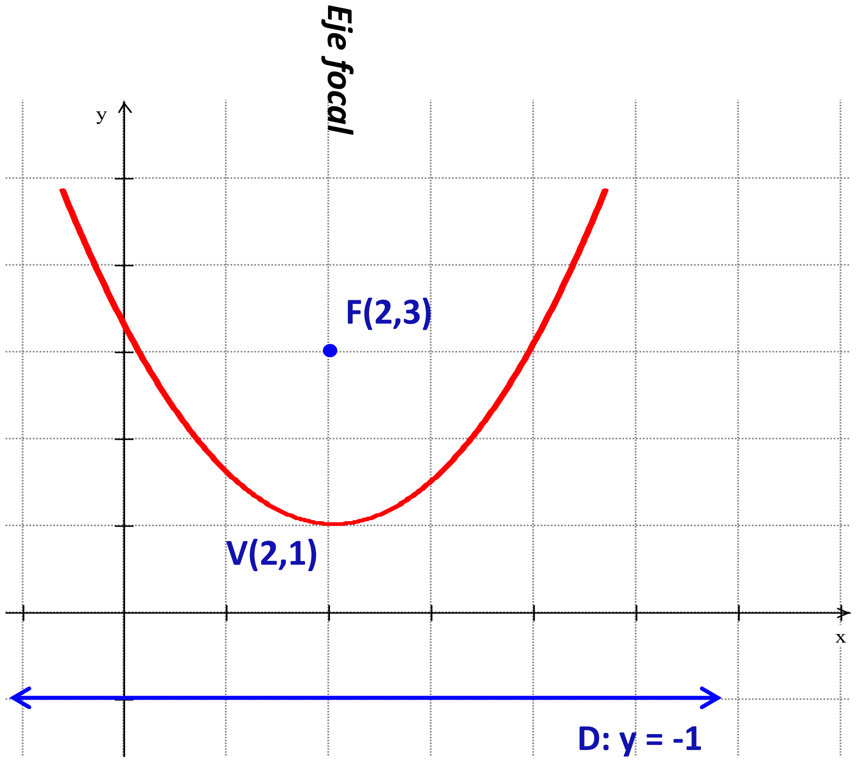
ELEMENTOS DE LA PARÀBOLA

Ejemplo:

Parábola con parámetro p = 3, foco y su ecuación de directriz

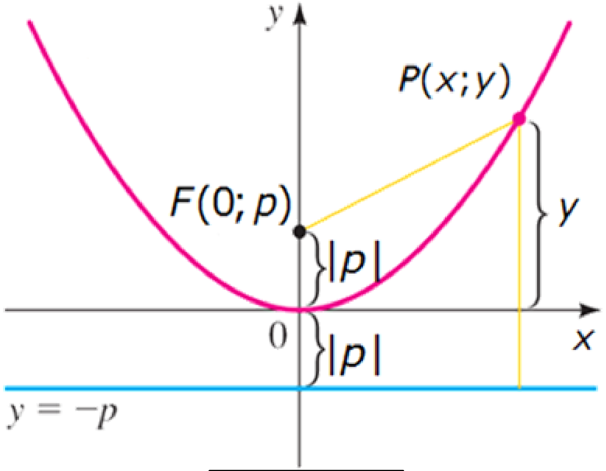


Parábola con parámetro p = 2, foco y su ecuación de directriz



ECUACIÒN CANÒNICA-V(0,0)

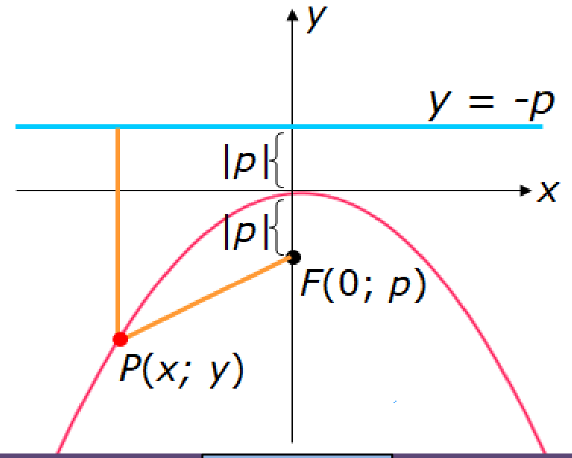
p > 0



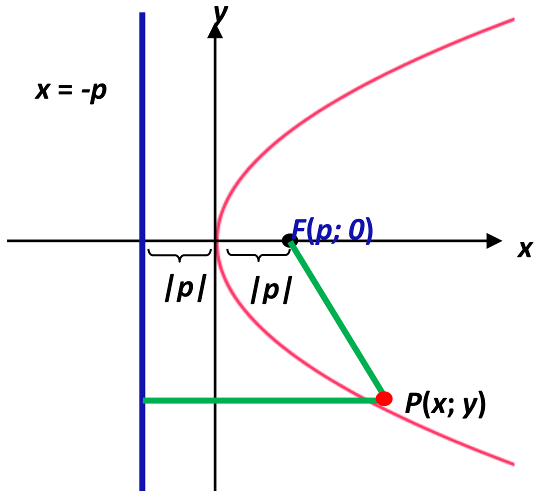
$$x^2 = 4py$$

Eje focal paralelo al eje Y

p < 0



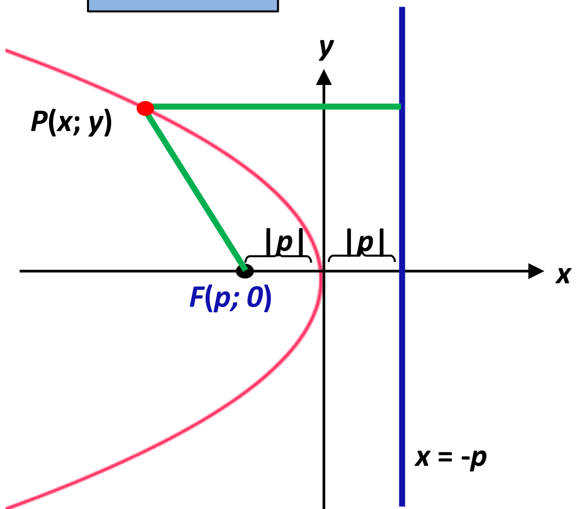
p > 0



$$y^2 = 4px$$

Eje focal paralelo al eje X

p < 0



Parábola

Ejemplo 1: Determine el foco, la directriz y el ancho focal (lado recto) de la parábola: $x^2 = 6y$

Solución

$x^2 = 6y$ de:

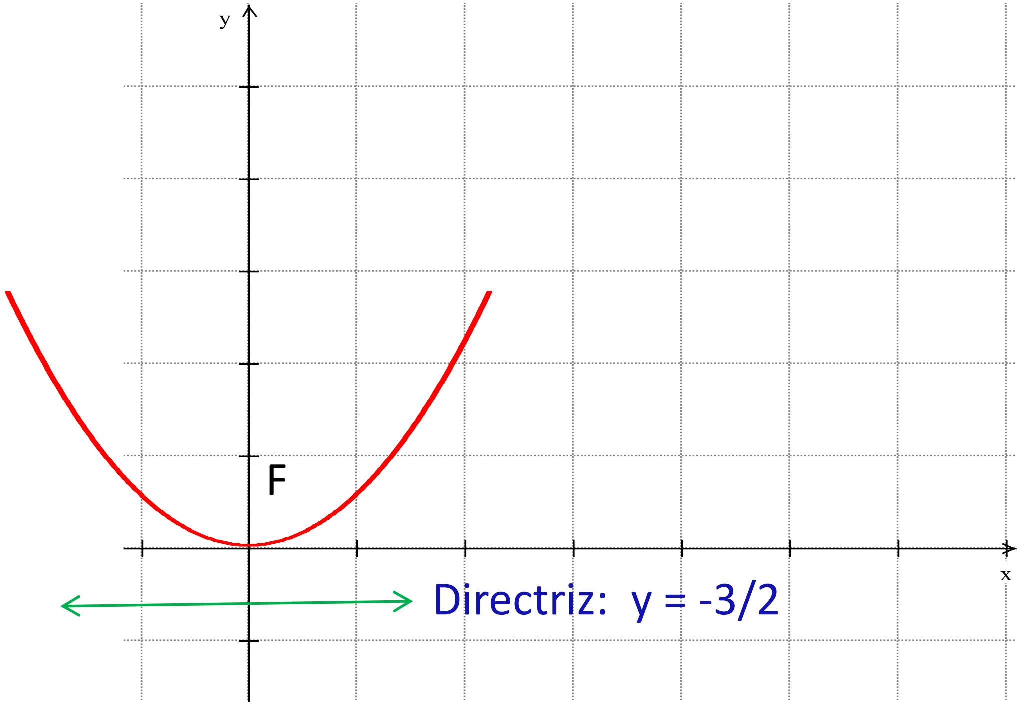
$x^2 = 4py$

El ancho focal es
LR = |4p| , con p en distancia

Luego: 4p = 6 ⇒ p = 3/2

vértice: V= (0;0)

Foco : F = (0; 3/2)



Parábola

Ejemplo 2: Determine el foco, la directriz y el parámetro de la parábola:

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

Solución

Despejando el término cuadrático

$$x^2 = -2y$$

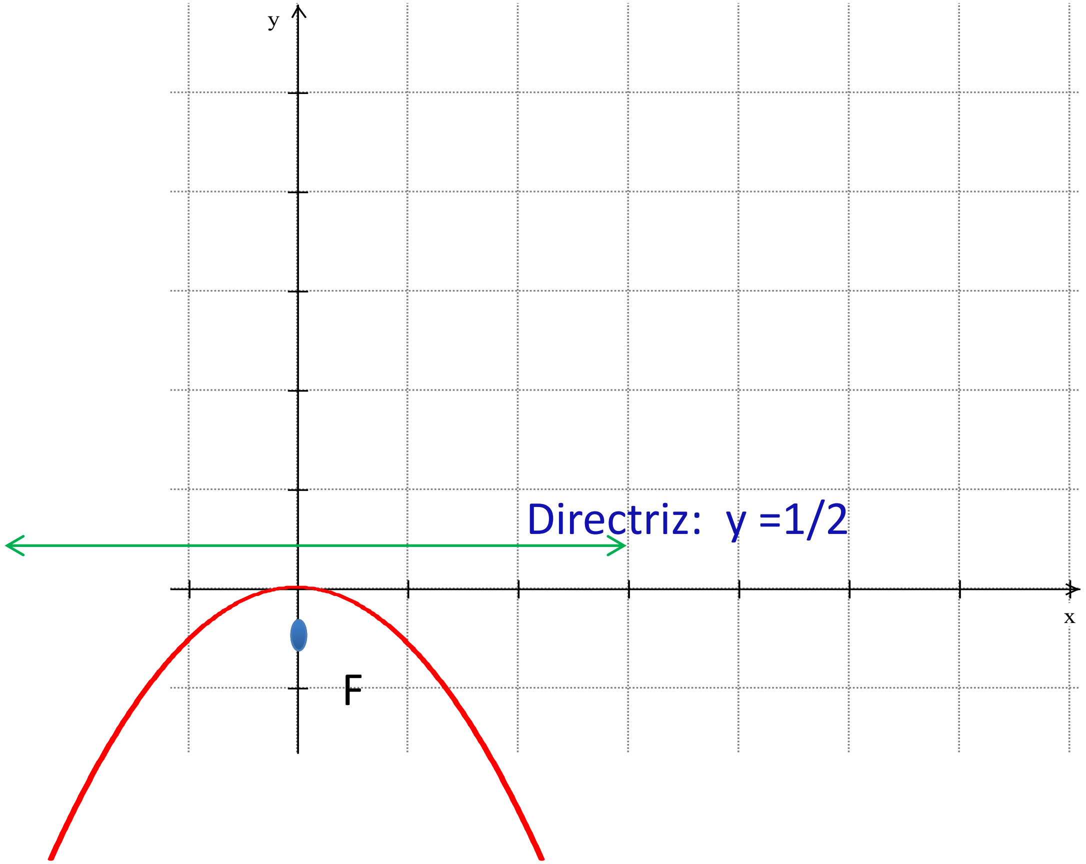
$$x^2 = 4py$$

El lado recto o ancho focal es LR = |4p| con p en distancia

Luego: 4p = -2 → p = -1/2

vértice: V= (0;0)

Foco : F = (0; -1/2)



Parábola

Ejemplo 3: Determine el foco, la directriz y el ancho focal de la parábola:

$$y^2 = -8x$$

Solución

$y^2 = -8x$ de:

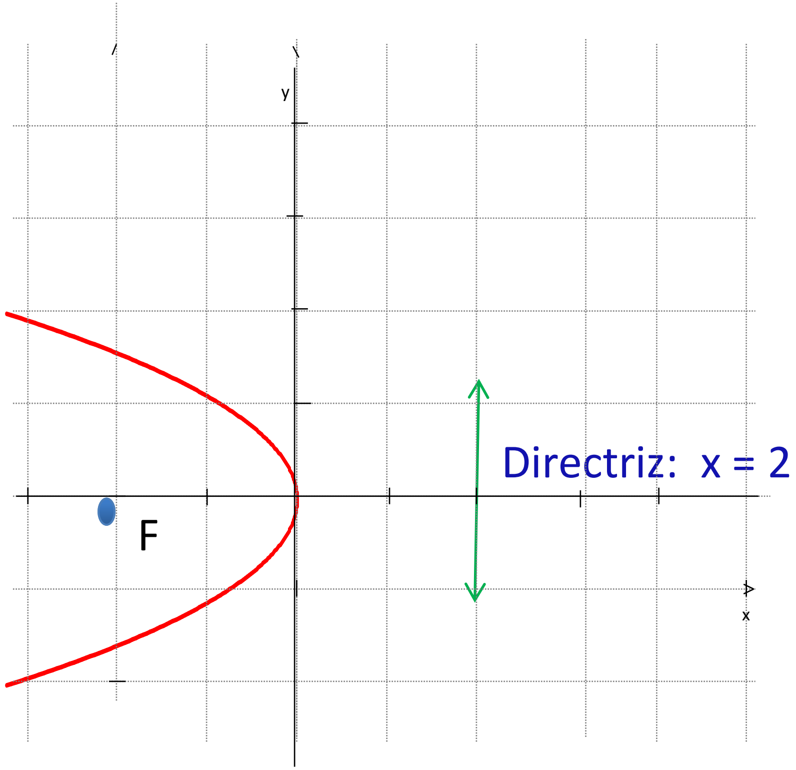
$y^2 = 4px$

El lado recto o ancho focal es LR = 4p con p en distancia

Luego: 4p = - 8 ➡ p = -2

vértice: V= (0;0)

Foco : F = (-2; 0)

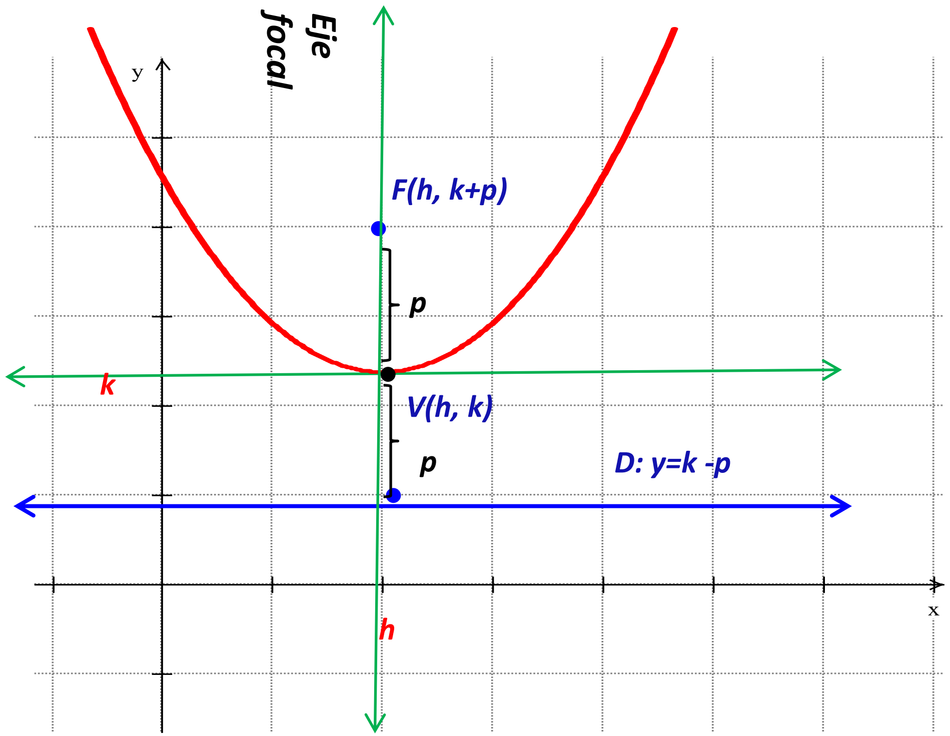


ECUACIÒN ORDINARIA-V(h,k)

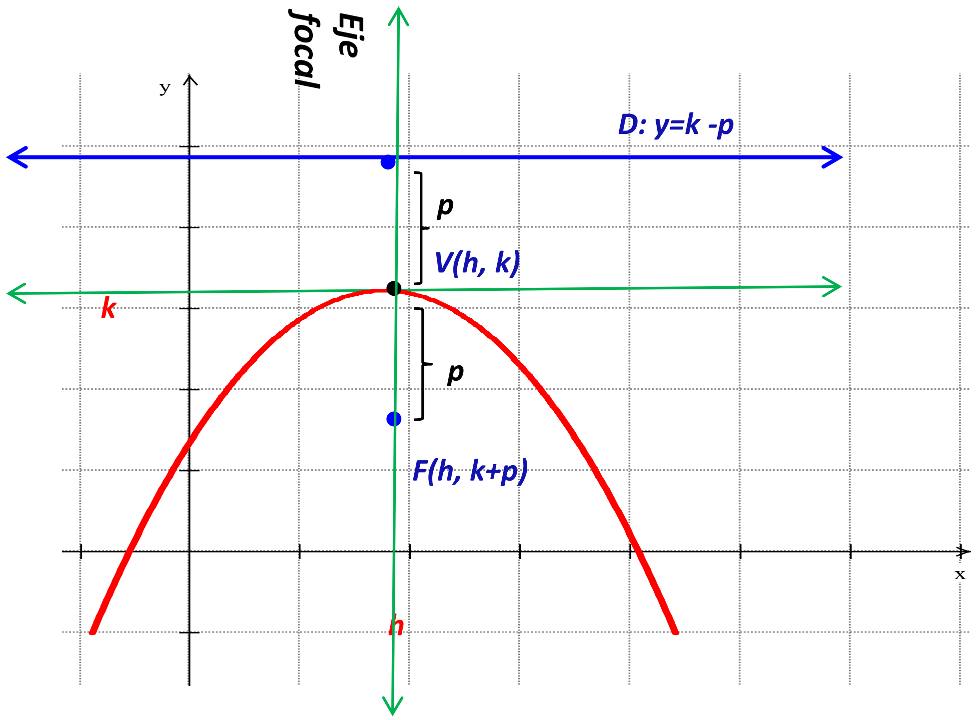
Eje focal paralelo al eje Y

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

P > 0



P < 0

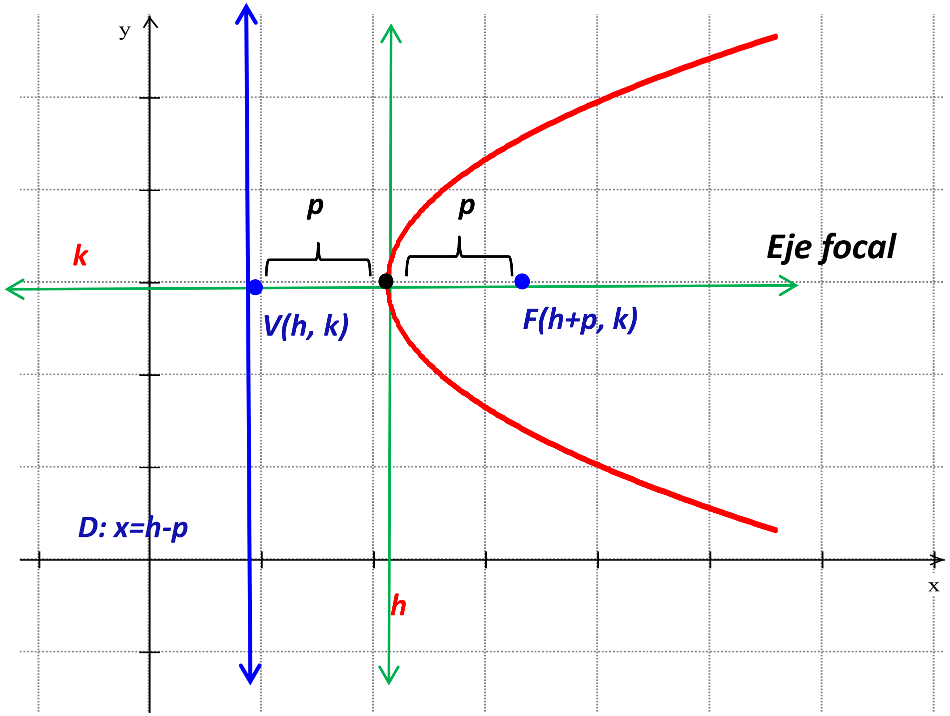


ECUACIÒN ORDINARIA-V(h,k)

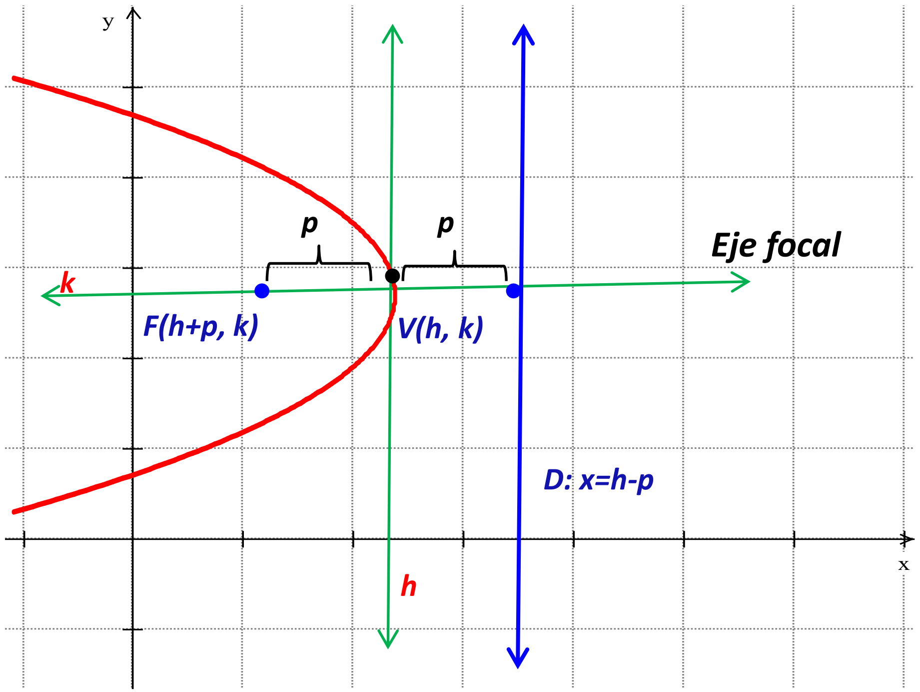
Eje focal paralelo al eje X

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

P > 0



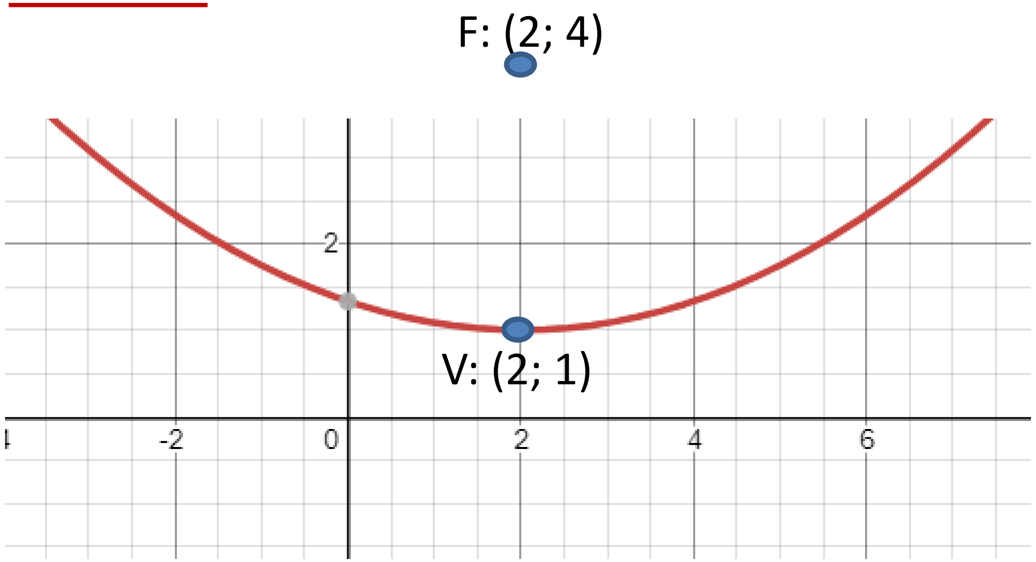
P < 0



Parábola

Ejemplo 4: Halle la ecuación de la parábola con Vértice (2,1) y Foco (2,4)

Solución



Su ecuación tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Reemplazando los valores:

$$(x-2)^2 = 4(3)(y-1)$$

Ecuación ordinaria:

$$(x-2)^2 = 12(y-1)$$

Vértice (2;1) = (h; k)

Foco (2; 4) = (h; k+p)

k+p = 4

1+p=4

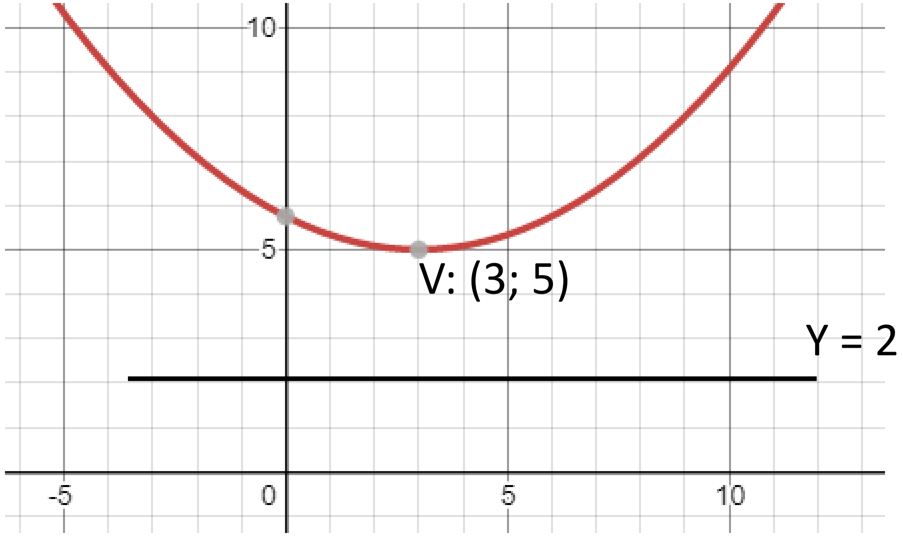
P=3

h = 2 ; k= 1 ; p = 3

Parábola

Ejemplo 5: Halle la ecuación de la parábola con Vértice (3,5) y directriz y = 2

Solución



Su ecuación tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Reemplazando:

$$(x-3)^2 = 4(3)(y-5)$$

$$(x-3)^2 = 12(y-5)$$

Vértice= (h; k) = (3;5)

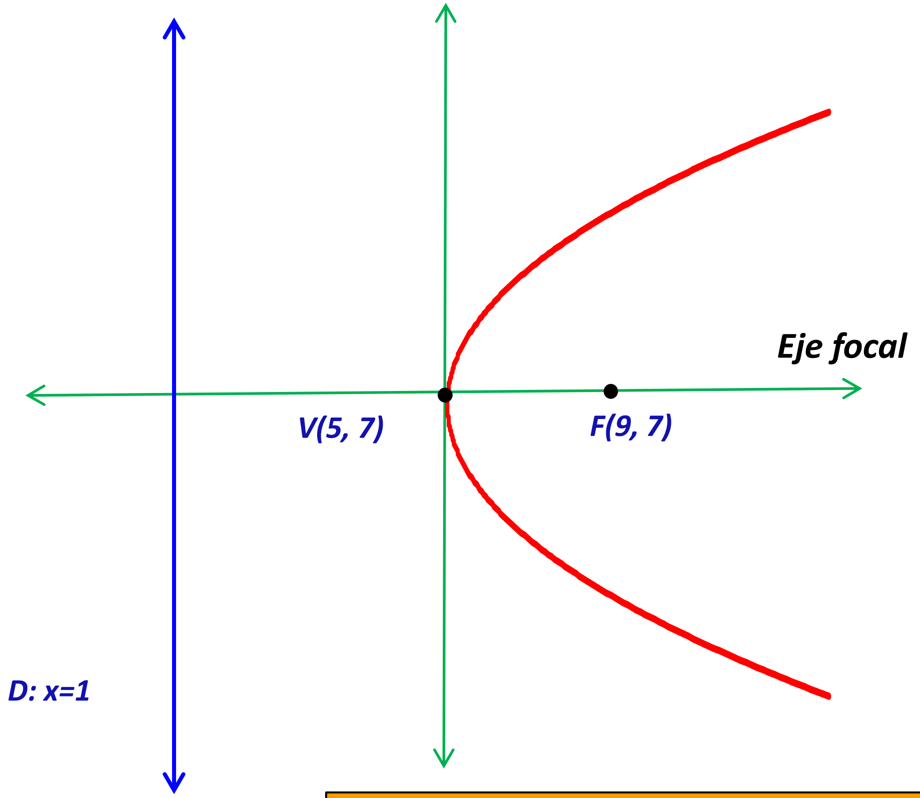
directriz y = 2

h = 3 ; k= 5

p = 3 ; p distancia de la directriz al vértice P = 5-2 eje focal paralelo a Y

Parábola

Ejemplo 6: Encuentre la ecuación de la parábolas mostradas:

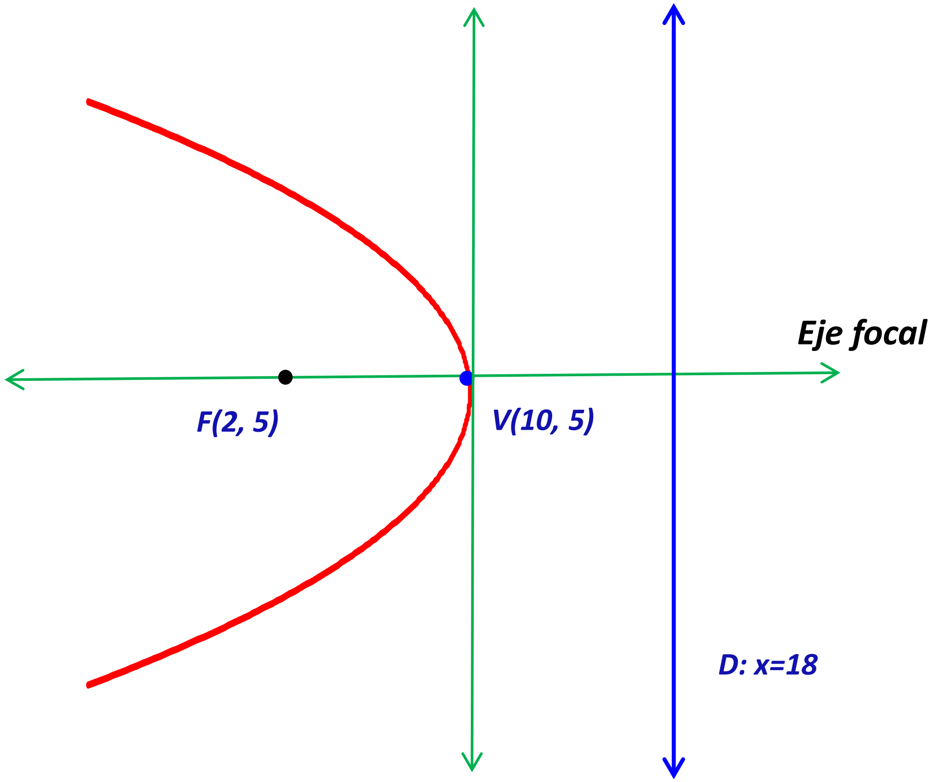


Solución

P=4

$$(y-7)^2 = 4(4)(x-5)$$

$$(y-7)^2 = 16(x-5)$$



Solución

P=-8

$$(y-5)^2 = 4(-8)(x-10)$$

$$(y-5)^2 = -32(x-10)$$

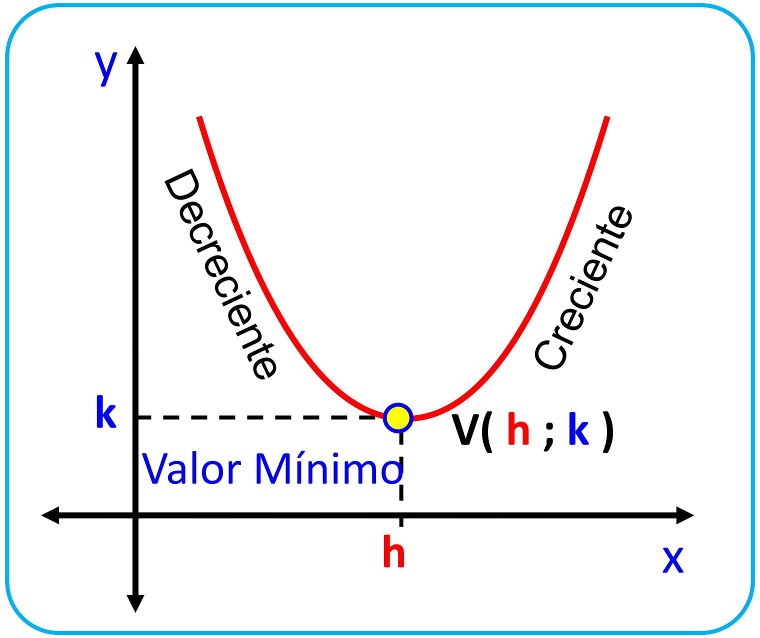
VALOR MÍNIMO Y MÁXIMO DE UNA PARÁBOLA

El valor máximo o mínimo de una parábola se puede observar en su vértice.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$f(x) = \boxed{2x^2} + 4x + 8$

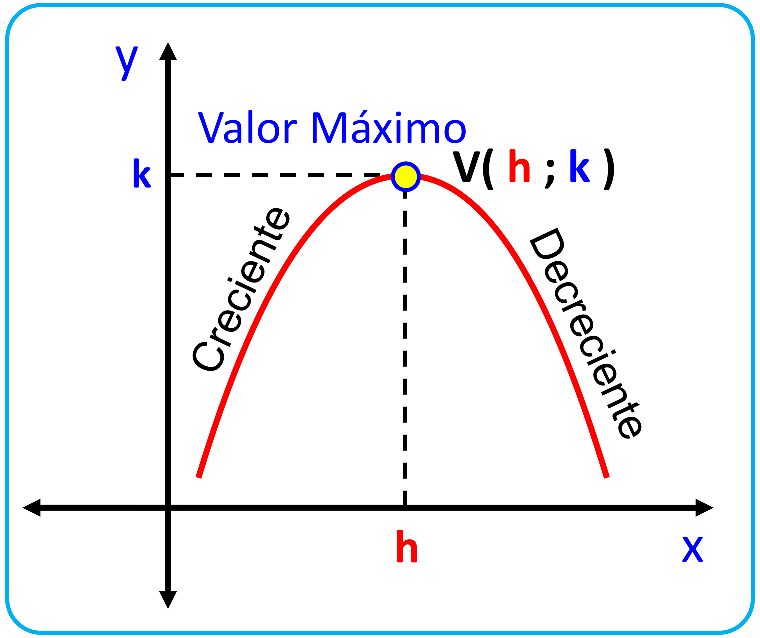
Si $a > 0$, La parábola se abre hacia arriba



En el vértice V(h ; k) se ubica el valor mínimo k.

$f(x) = \boxed{-3x^2} + 5x + 2$

Si $a < 0$, La parábola se abre hacia abajo.



En el vértice V (h ; k) se ubica el valor máximo k.

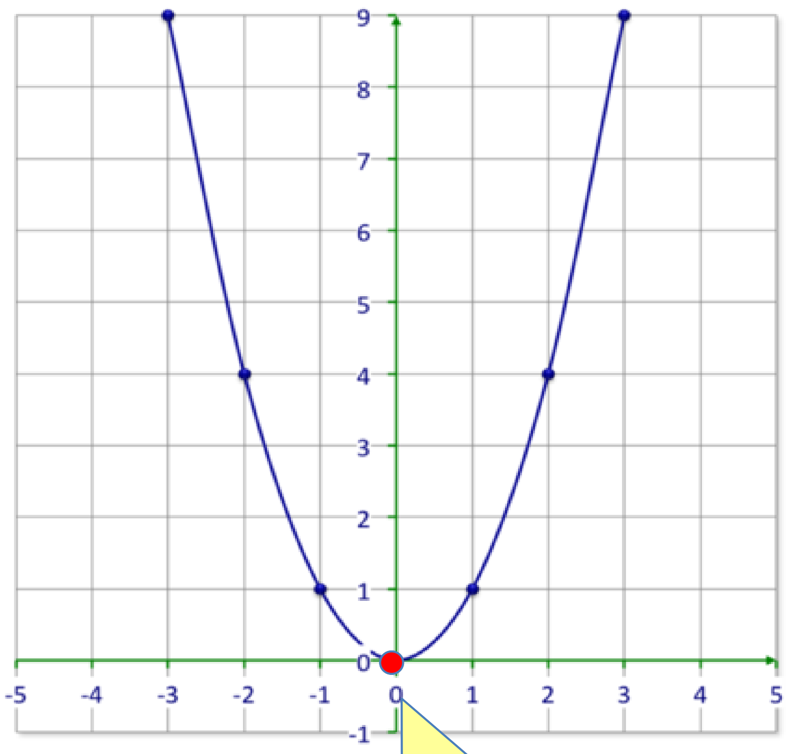
VÉRTICE UNA PARÁBOLA

Corresponde al punto **máximo** (∩) o **mínimo** (∪) de la **parábola**.

Si la ecuación de la parábola tiene la forma: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

La Fórmula del vértice viene dada por:

$$V(h,k) = \left(-\frac{b}{2a} ; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



Vértice de la parábola.

Donde:

$$\boxed{h = -\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

La parábola es:

cóncava hacia arriba si a > 0

cóncava hacia abajo si a < 0.

APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

Cierta empresa tiene ingresos mensuales por la venta de x unidades producidas de $I(x) = 1000 + 80x - 0{,}02x^2$.

Determine:

Solución: $y = ax^2 + bx + c$

a) El nivel de ventas para maximizar el ingreso

Aplicamos la fórmula del vértice:

$$h = \frac{-b}{2a} \qquad h = \frac{-80}{2(-0{,}02)}$$

$$\boxed{h = 2\,000}$$

Por lo tanto, el nivel de ventas que maximizar el ingreso es de 2 000 unidades.

APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

Cierta empresa tiene ingresos mensuales por la venta de x unidades producidas de $I(x) = 1000 + 80x - 0{,}02x^2$.

Determine:

Solución: $y = ax^2 + bx + c$

b) El máximo ingreso

De la ecuación:

$$\mathrm{I} = 1000 + 80x - 0{,}02x^2$$

Reemplazando los valores de a, b y c en k:

$a = -0{,}02$ $\quad b = 80$ $\quad c = 1000$

$$\boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

$$k = \frac{4(-0{,}02)(1000) - (80)^2}{4(-0{,}02)}$$

$$k = \frac{-80 - 6400}{-0{,}08}$$

$$\boxed{k = 81000}$$

El ingreso máximo es de S/ 81 000.

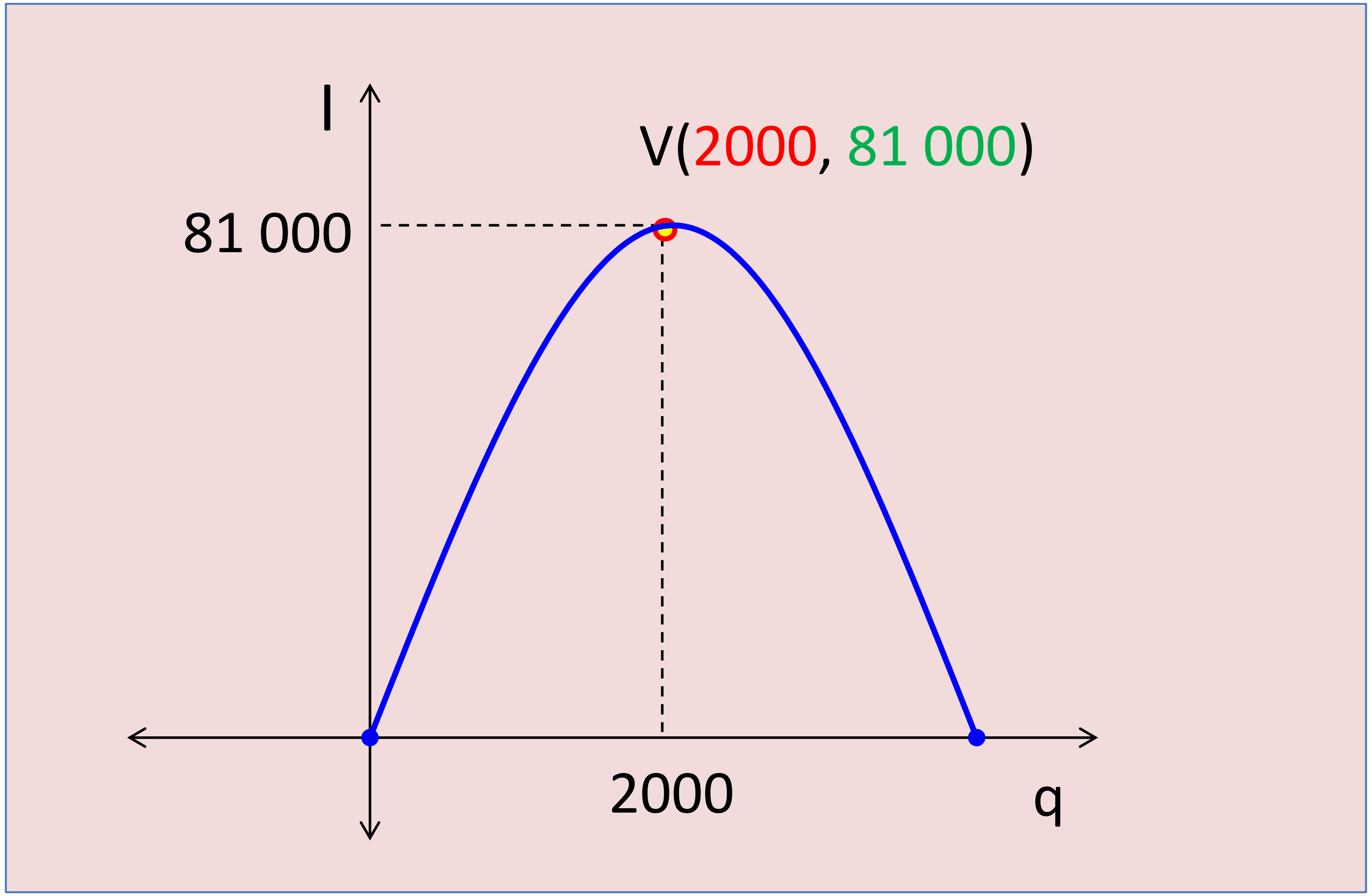
$$V(2000, 81\ 000)$$

APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

b) Gráfica de la función ingreso

$$I = 1000 + 80x - 0{,}02x^2$$

$$a < 0$$



APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

El costo promedio por unidad, (soles) al producir x unidades de cierto artículo es

$C = 6000 - 24x + 0{,}03x^2$

Determine

a) El número de unidades producidas que minimiza el costo.
b) El costo mínimo por unidad
c) Graficar la función de costo

Solución:

a) El número de unidades producidas que minimiza el costo.

Aplicamos la fórmula del vértice: $V = (h, k)$

$$\boxed{h = \frac{-b}{2a}} \qquad h = \frac{-(-24)}{2(0{,}03)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 400}$$

Por lo tanto, el número de unidades producidas que minimiza el costo es de 400.

APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

$$y = ax^2 + bx + c$$

b) El costo mínimo por unidad

De la ecuación: $C = 600 - 24x + 0{,}03x^2$

Reemplazando los valores de a, b y c en k:

$a = 0{,}03 \qquad b = -24 \qquad c = 600$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad k = \frac{4(0{,}03)(600) - (-24)^2}{4(-0{,}03)}$$

$$k = \frac{72 - 576}{-0{,}12} \qquad k = \frac{-504}{-0{,}12}$$

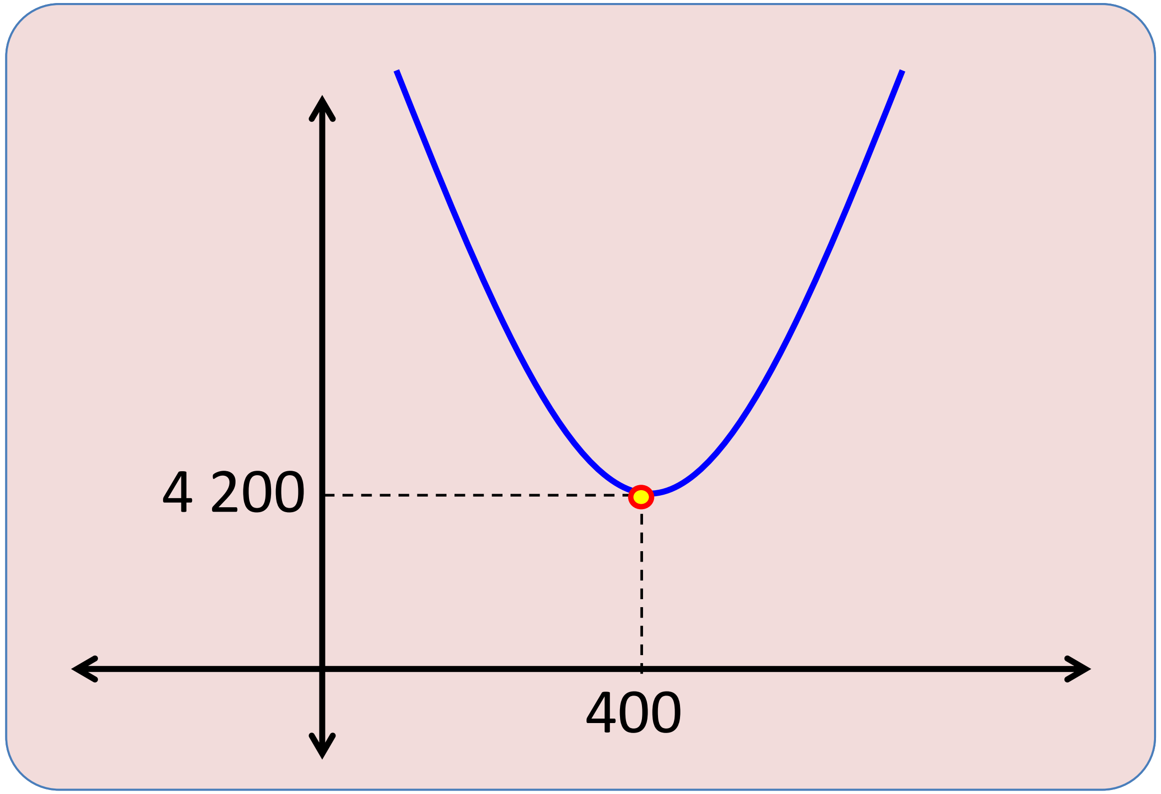
$$k = 4\,200 \qquad \boxed{V(400, 4\,200)}$$

El costo mínimo por unidad es de S/ 4 200.

APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

c) Graficar la función de costo $C = 6000 - 24x + 0{,}03x^2$

$\boxed{a > 0}$



UTILIDAD MÁXIMA

Si las utilidades en (y) soles, en un estudio jurídico, se obtienen por atender (x) casos, está dada por la expresión: $U(x) = -2x^2 + 400x - 18000$

a. ¿Cuántos casos se debe atender para alcanzar la máxima utilidad?

b. ¿Cuál es la utilidad máxima?

Solución:

De la expresión hallamos el vértice.

$$U(x) = -2x^2 + 400x - 18000$$

a = -2 ; b = 400

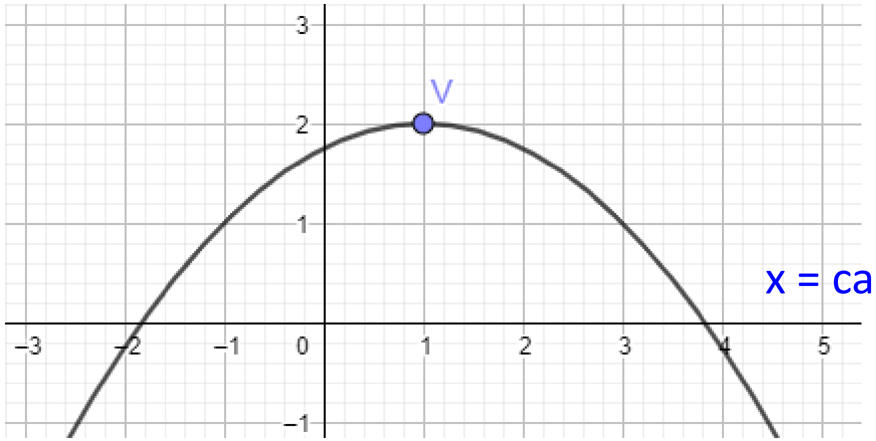
$$V\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2(-2)} = 100$$

$$k = f(100) = -2(100)^2 + 400(100) - 18000$$

$$k = 2000 \qquad V(100; 2000)$$

y = utilidad



x = casos

a. Se debe atender 100 casos

b. La utilidad máxima es de 2000 soles

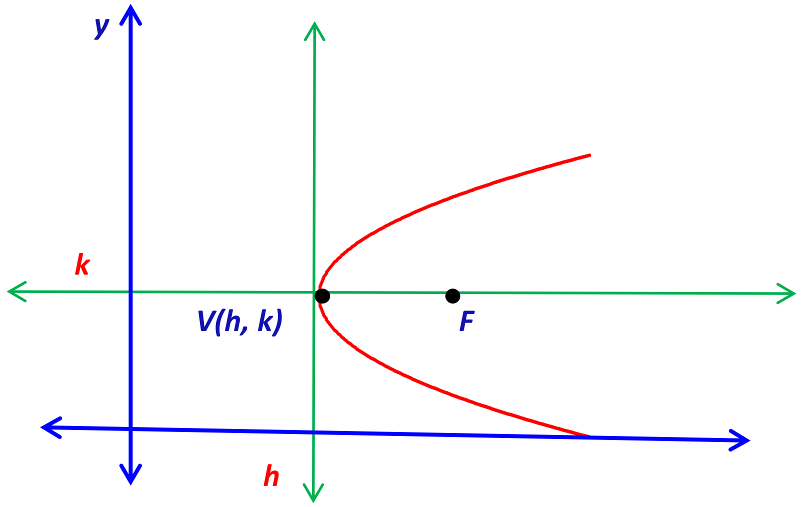
Ecuación general de la parábola

Si consideramos una parábola con vértice V(0,0), su ecuación canónica es

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

Si le aplicamos una traslación T(h,k), obtenemos la ecuación ordinaria de la parábola con vértice V(h,k):

$$\boldsymbol{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$



Por efecto de la traslación, el nuevo eje focal se mantiene paralelo al eje X. La ecuación principal permite conocer de inmediato las coordenadas de su vértice, el valor de p y, por lo tanto, la medida del lado recto.

Desarrollado los cuadrados de binomios y ordenando la ecuación principal, se obtiene la **ecuación general de la parábola:**

$$\boldsymbol{y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

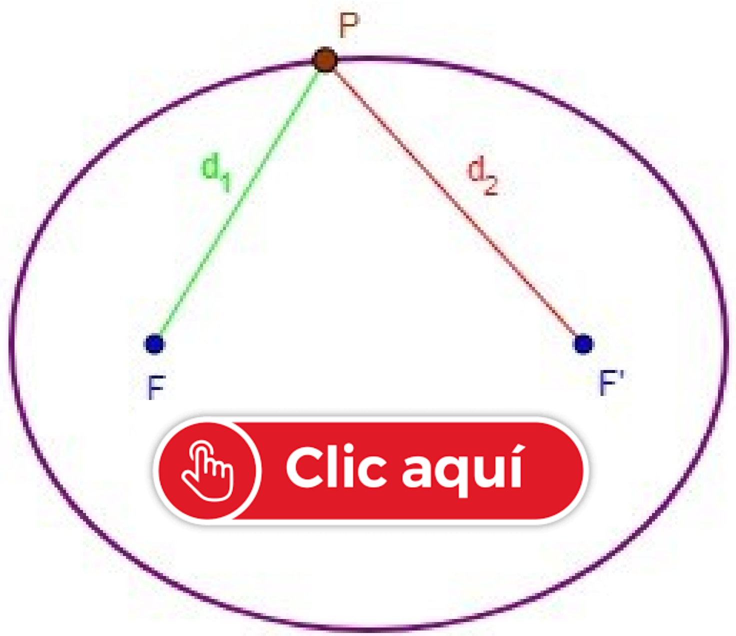
D=-4p **E=-2k** **F=** $\boldsymbol{k^2 + 4ph}$

LA ELIPSE

DEFINICIÓN:

Una elipse es el conjunto de puntos cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a 2a.

$$\boxed{\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = k}$$



LA ELIPSE - ELEMENTOS

FOCOS: F y F’

CENTRO DE LA ELIPSE: O

VÉRTICES: A y A’
SEMIEJE MAYOR: OA=OA’

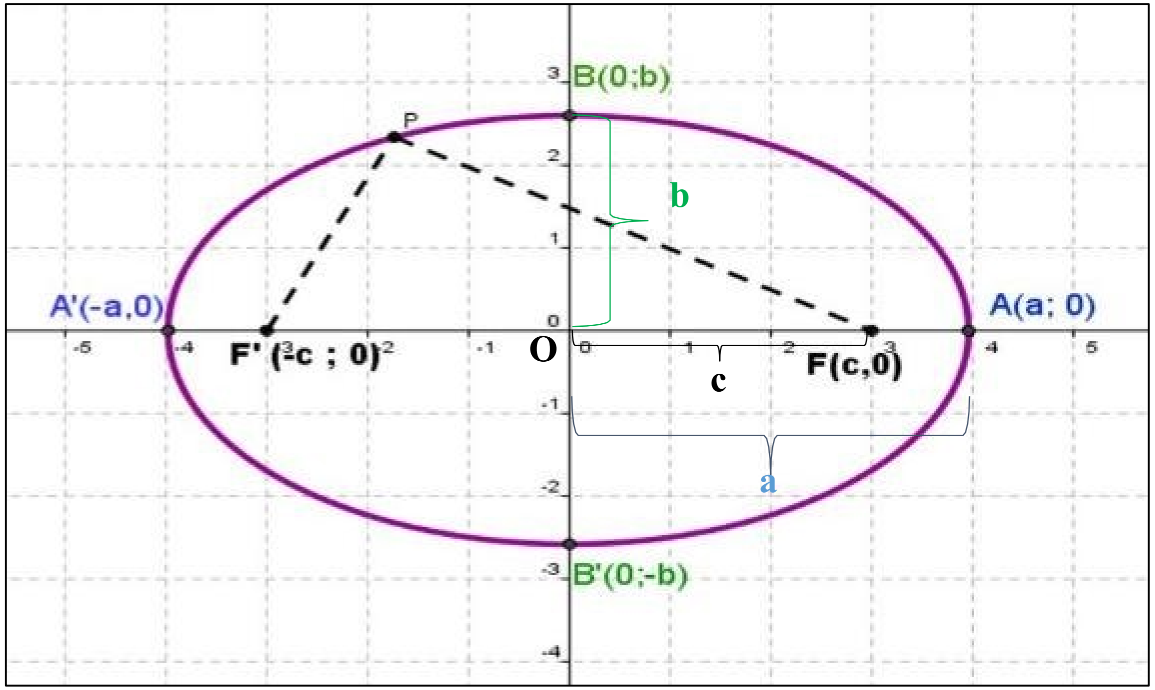
SEMIEJE MENOR: OB=OB’

SEMIDISTANCIA FOCAL: OF=OF’

Se cumple: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Excentricidad de la elipse (0<exc<1)

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$



LA ELIPSE - ELEMENTOS

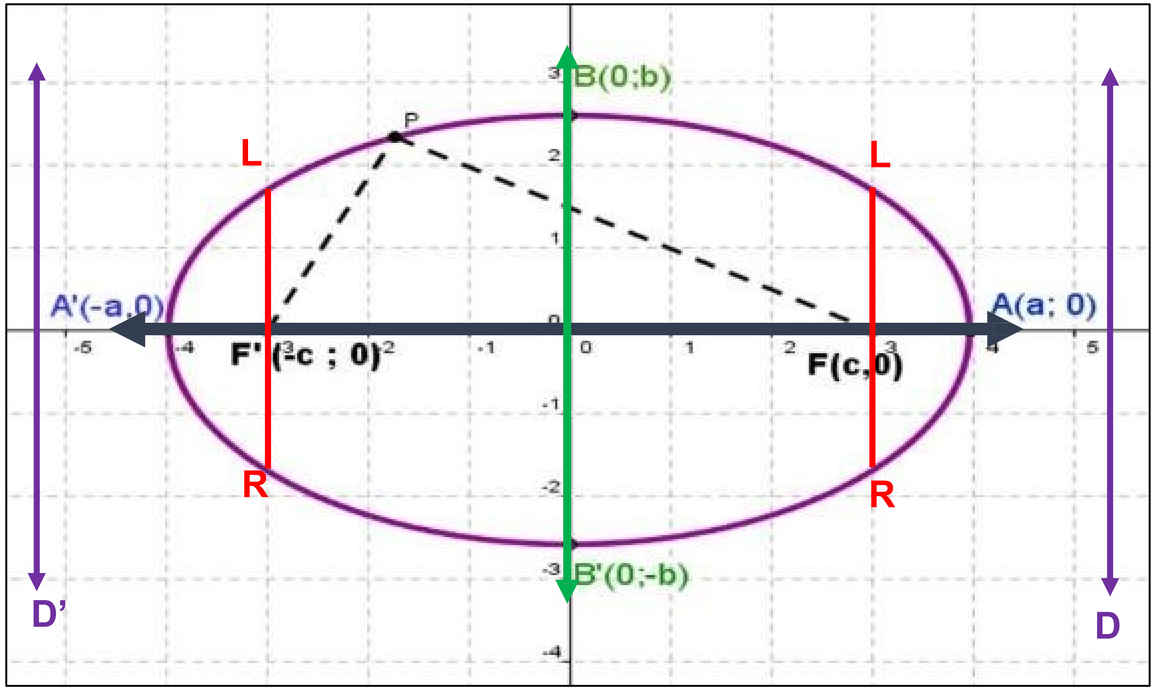
EJE FOCAL:
Es la recta que pasa por los focos

EJE NORMAL:
Es la recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal

LADO RECTO: Segmento $\overline{LR}$

$$Lado\ Recto = \frac{2b^2}{a}$$

DIRECTRIZ: Rectas D y D'



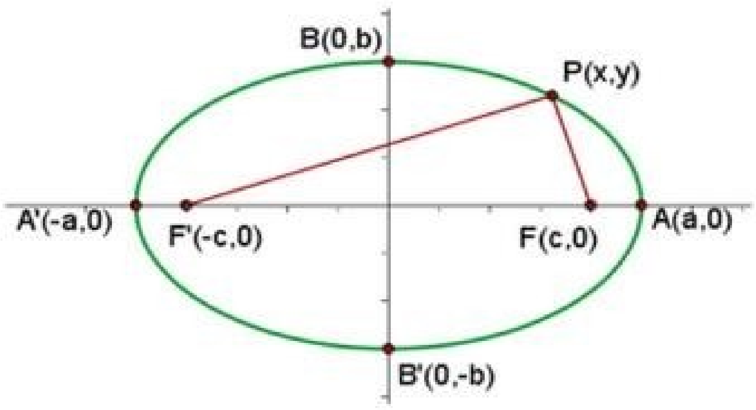
ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE

1) Centro en el Origen y eje Focal en el eje x

su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ecuación de la directriz $x=\pm\frac{a^2}{c}$

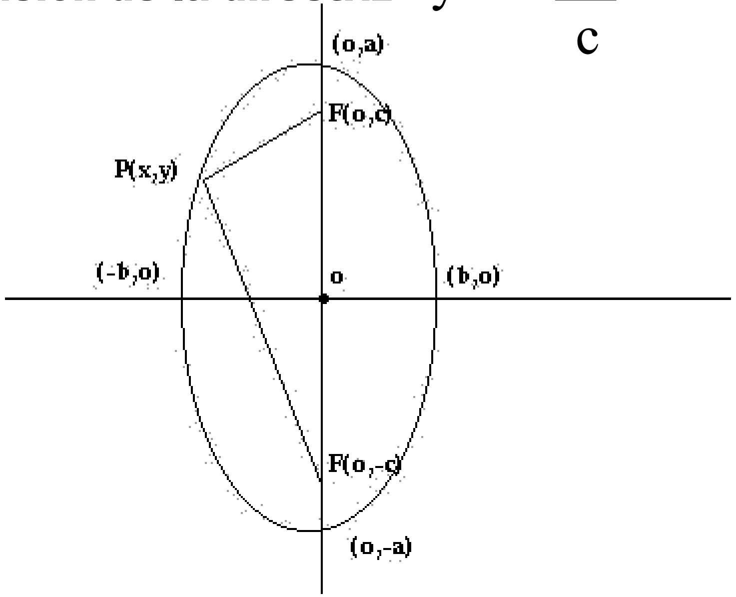


2) Centro en el Origen y eje Focal en el eje y

su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Ecuación de la directriz $y=\pm\frac{a^2}{c}$



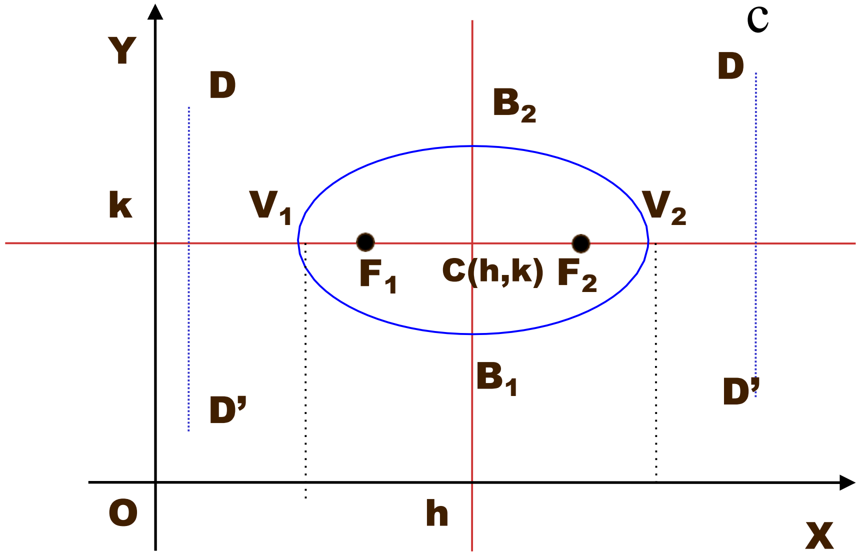
ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE

1) Centro (h;k) y eje Focal paralelo al eje x ;

su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=}$$

Ecuación de la directriz $x = h \pm \frac{a^2}{c}$

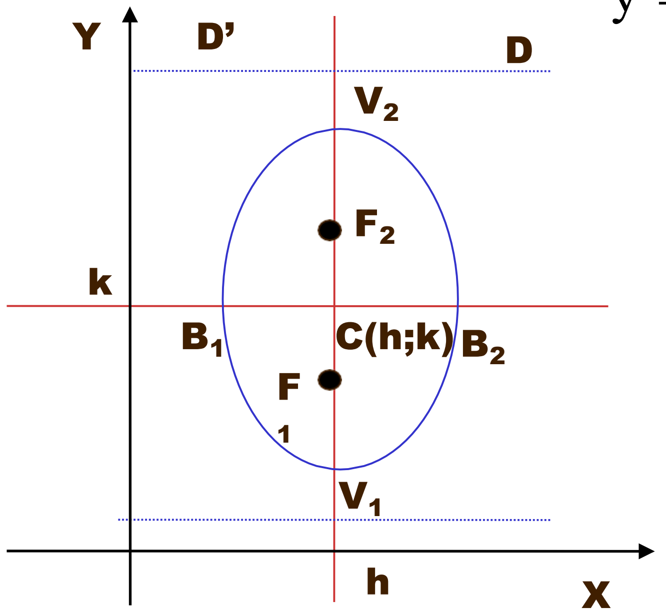


2) Centro (h;k) y eje Focal paralelo al eje y

su ecuación es

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=}$$

Ecuación de la directriz $y = k \pm \frac{a^2}{c}$



ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

Partimos de:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=}$$

o

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=}$$

Resolvemos y obtenemos:

$$\boldsymbol{Ax^2} + \mathrm{C}\boldsymbol{y^2} + \mathrm{D}\boldsymbol{x} + \mathrm{E}\boldsymbol{y} + \mathrm{F} = \mathbf{0}$$

A $\neq$ C y son del mismo signo

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Dy + F = 0$

Si en las ecuaciones $(I)\ldots\ \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y $(II)\ldots\ \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ multiplicamos por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados, trasponemos y ordenamos términos, se obtiene la ecuación de la elipse en FORMA GENERAL $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuyos ejes son paralelos a los coordenados, los coeficientes A y C son distintos de cero, diferentes numéricamente y del mismo signo, los coeficientes de primer grado D y E indican que el centro de la elipse está fuera del origen, si $D = 0$ el centro se localiza sobre el eje "y", si $E = 0$ estará sobre el eje "x", el término independiente F indica que la elipse no pasa por el origen y si $F = 0$ la elipse si pasa por el origen.

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1) Determine las coordenadas del vértice y focos, la excentricidad, y la longitud del lado recto de la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$

2) Grafique la elipse de ecuación $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$, determine las ecuaciones de las rectas directrices.

3) Determine la ecuación de la elipse a partir de los datos dados:
Centro en (-3; 4), longitud del eje mayor igual a 6 y longitud del eje menor igual a 4, con eje focal paralelo al eje X.

CONCLUSIONES

- **La elipse es un lugar geométrico cuya propiedad consiste en que la suma de las distancias de sus puntos a dos puntos fijos (focos) es constante.**

- **Para determinar la ecuación de toda elipse nos basamos en tres de sus elementos: las coordenadas de su centro (C), el valor del semieje mayor (a) y el valor del semieje menor "b".**