Departamento Académico de Matemáticas

ANÁLISIS MATEMÁTICO

SESIÓN 3

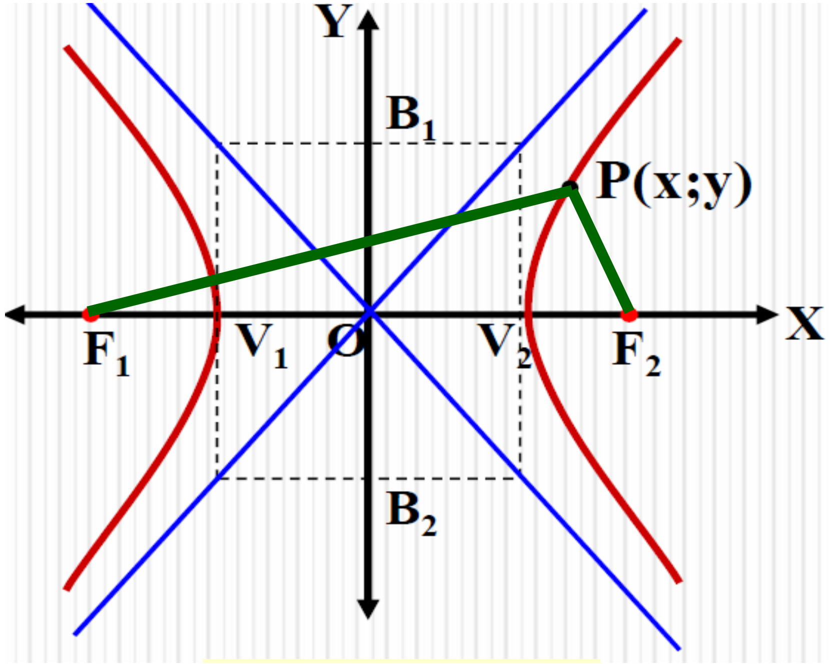
- LA HIPERBOLA

Prof. Yuvi Marcelo Campos Andrade

LA HIPÉRBOLA

La **hipérbola** se define como el lugar geométrico de todos los puntos del plano (P) cuya **diferencia de distancias** a dos puntos fijos, llamados focos (F_1 y F_2), es constante $(2a)$.

$$\left| d(P,F_1) - d(P,F_2) \right| = 2a$$



donde:

- a es una constante
- $a > 0$

ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

Elementos:

Centro: $\boldsymbol{O}$

Vértices: $\boldsymbol{V_1}$ y $\boldsymbol{V_2}$

Focos: $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$

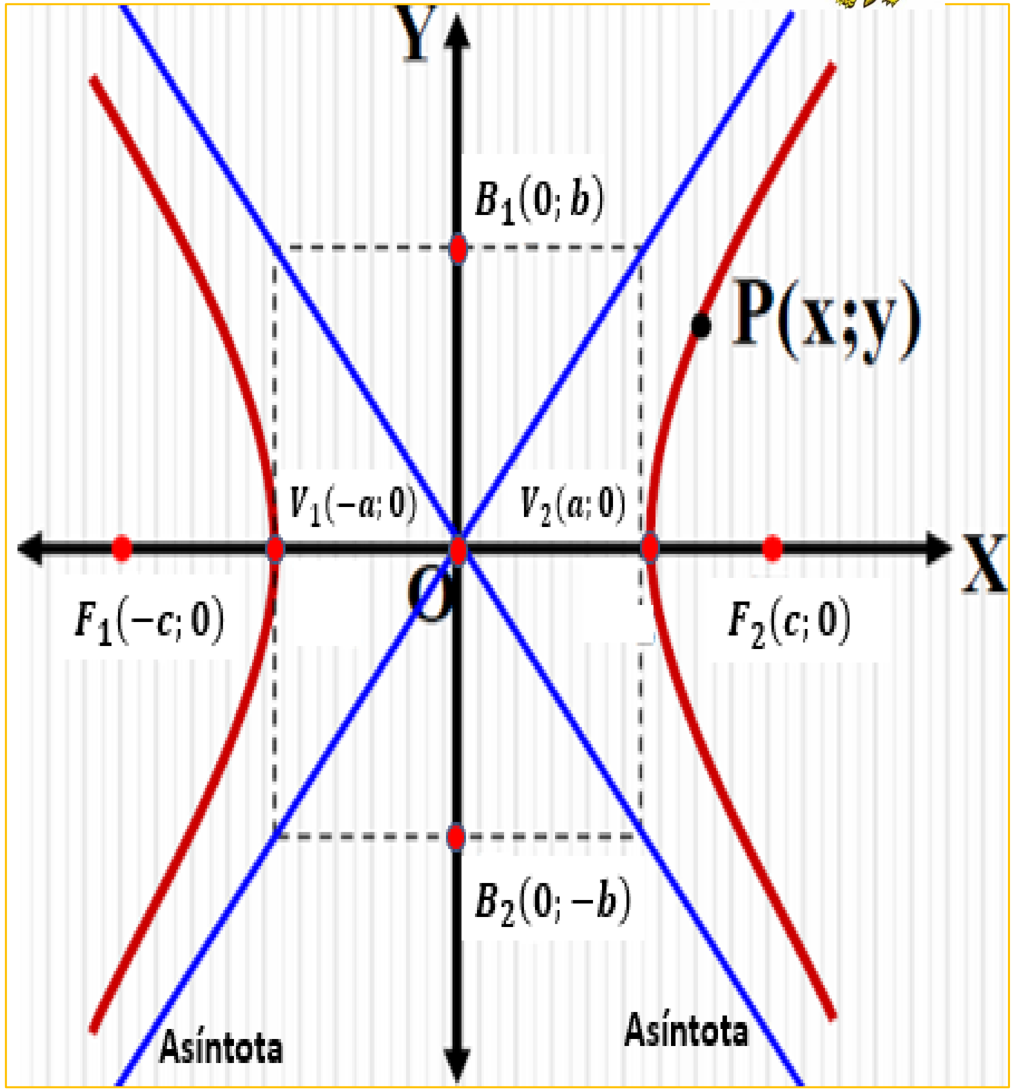
Extremos del eje conjugado: $\boldsymbol{B_1}$ y $\boldsymbol{B_2}$

Eje transverso: $\overline{\boldsymbol{V_1 V_2}}$

Eje focal: $\overline{\boldsymbol{F_1 F_2}}$

Eje conjugado: $\overline{\boldsymbol{B_1 B_2}}$

Asíntotas



CARACTERIATICAS DE LA HIPÉRBOLA

Características:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Longitud del eje transverso: $2a$

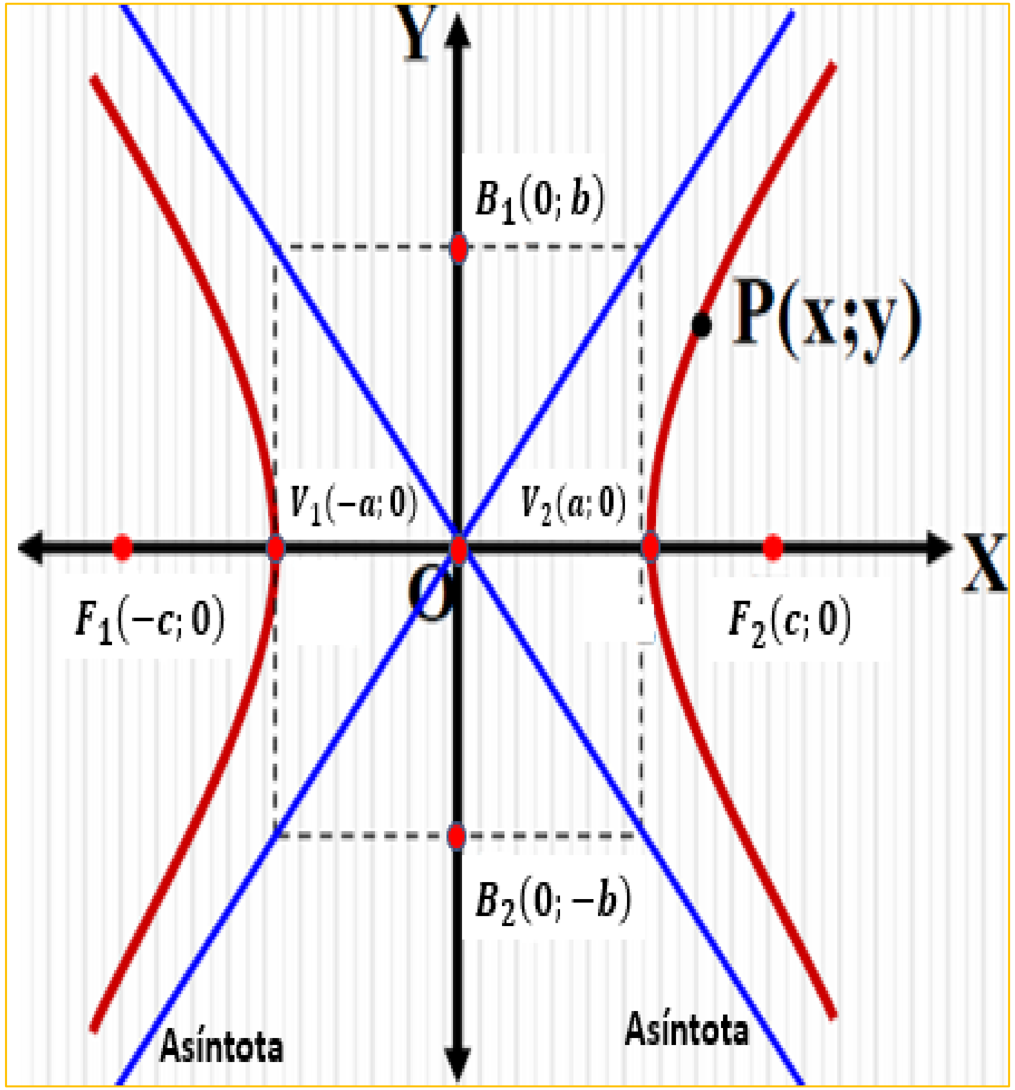
Longitud del eje focal: $2c$

Longitud del eje conjugado: $2b$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Longitud del lado recto:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$



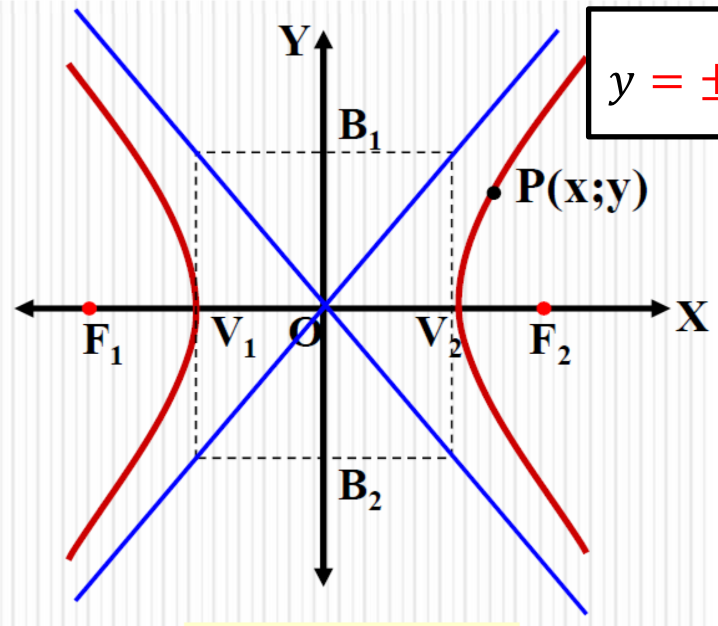
ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA

Cuando **el centro** de la hipérbola es el origen del sistema de coordenadas: $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$

Eje focal en el eje x

Asíntota

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

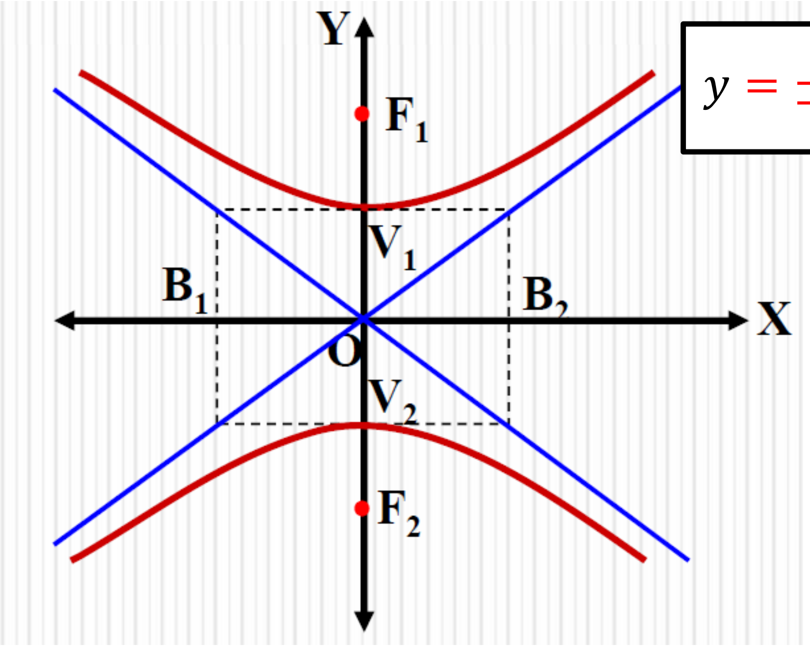


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eje focal en el eje y

Asíntota

$$y = \pm\frac{a}{b}x$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA

$$(1)\quad \boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1}$$

$h=0 \quad a^2=4 \quad b^2=9$

$k=0 \quad a=2 \quad b=3$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$c=\sqrt{2^2+3^2} \Rightarrow c=\sqrt{13}$

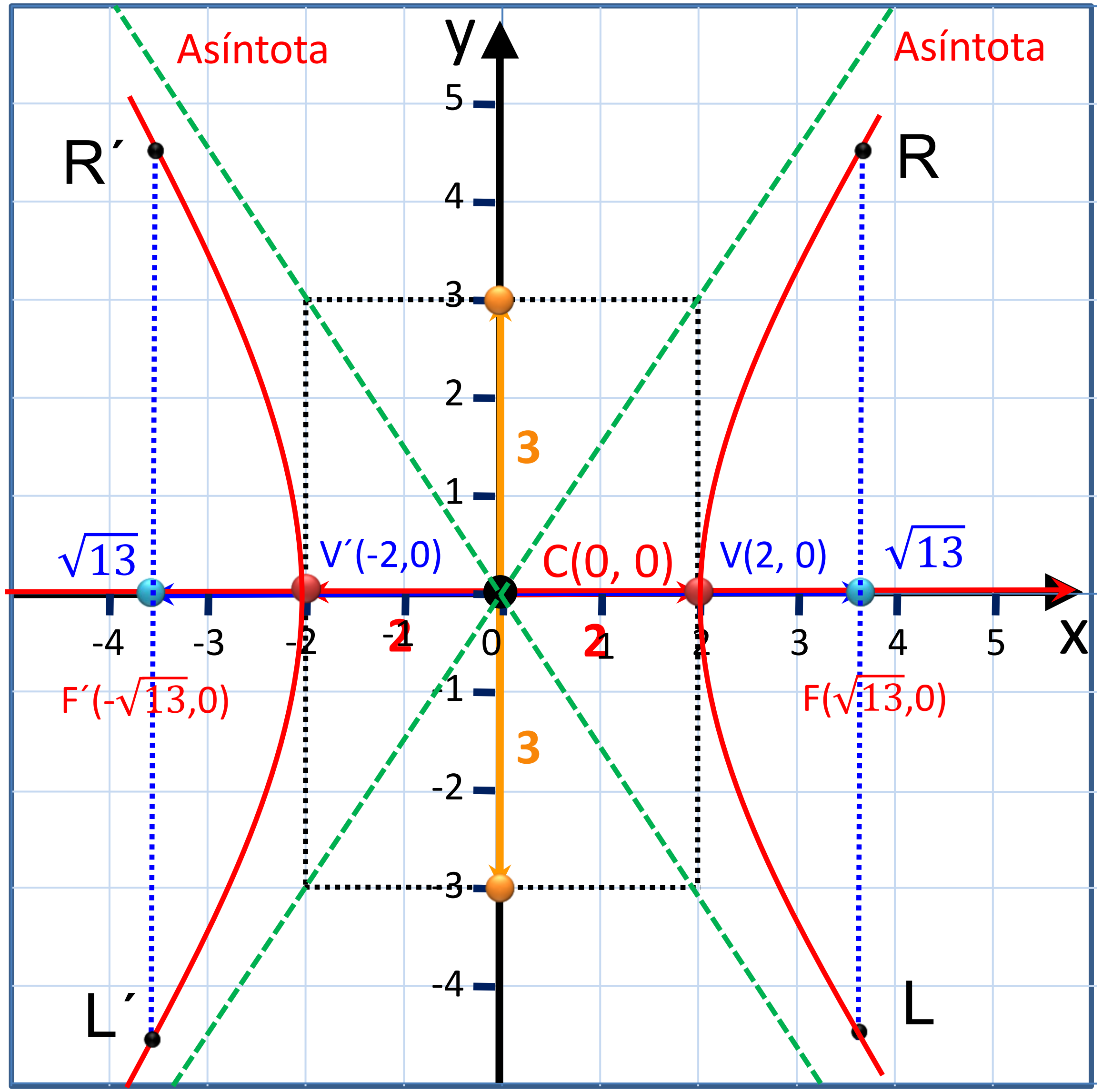
Centro: C(0, 0)

Vértices: V´(-2, 0) V(2, 0)

Focos: F´($-\sqrt{13}$,0) F($\sqrt{13}$,0)

Lado Recto: $LR=\dfrac{2b^2}{a}$

$$LR=\frac{2(3)^2}{2}=9$$



ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA

Grafique y determine las coordenadas de: centro, y las distancias del centro a cada vértice, foco y punto conjugado. (es decir a, b y c).

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Centro (0 , 0)

a^2 = 16 $\quad$ b^2 = 9

a = 4 $\quad$ b = 3

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{16 + 9}$

$c = 5$

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2(9)}{4}$$

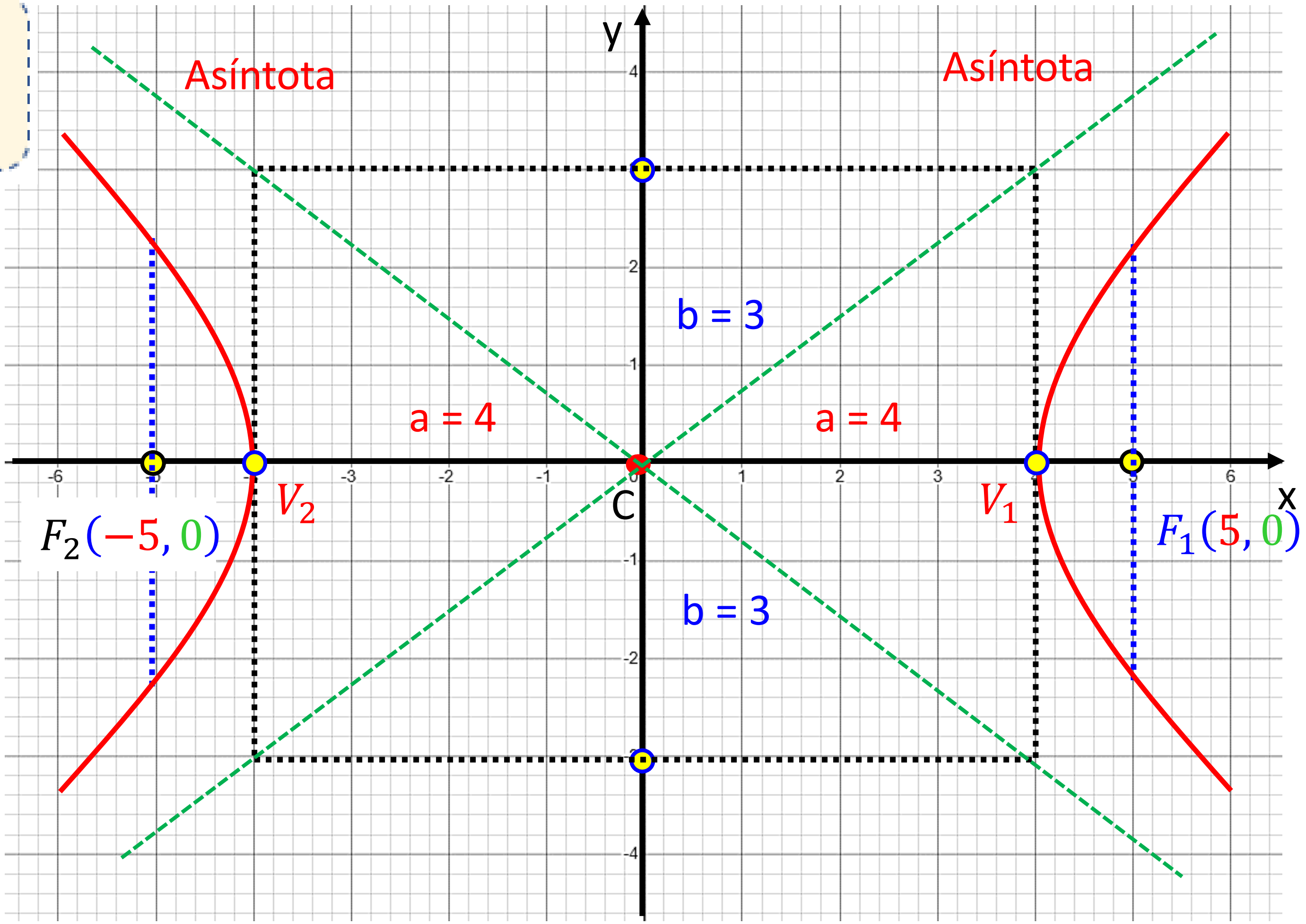
$$LR = 4{,}5$$

Vértices (a , 0) y (- a , 0)

$V_1 = (4\,,0)\;\; y \;\; V_2 = (-4\,,0)$

Focos (c , 0) y (- c , 0)

$F_1 = (5,0)\;\; y \;\; F_2 = (-5,0)$



ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA

Grafique y determine las coordenadas de: centro, y las distancias del centro a cada vértice, foco y punto conjugado. (es decir a, b y c).

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} = 1$$

Centro (0 , 0)

a^2 = 9 b^2 = 4

a = 3 b = 2

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{9 + 4}$

$c = \sqrt{13} = 3{,}6$

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2(4)}{3}$$

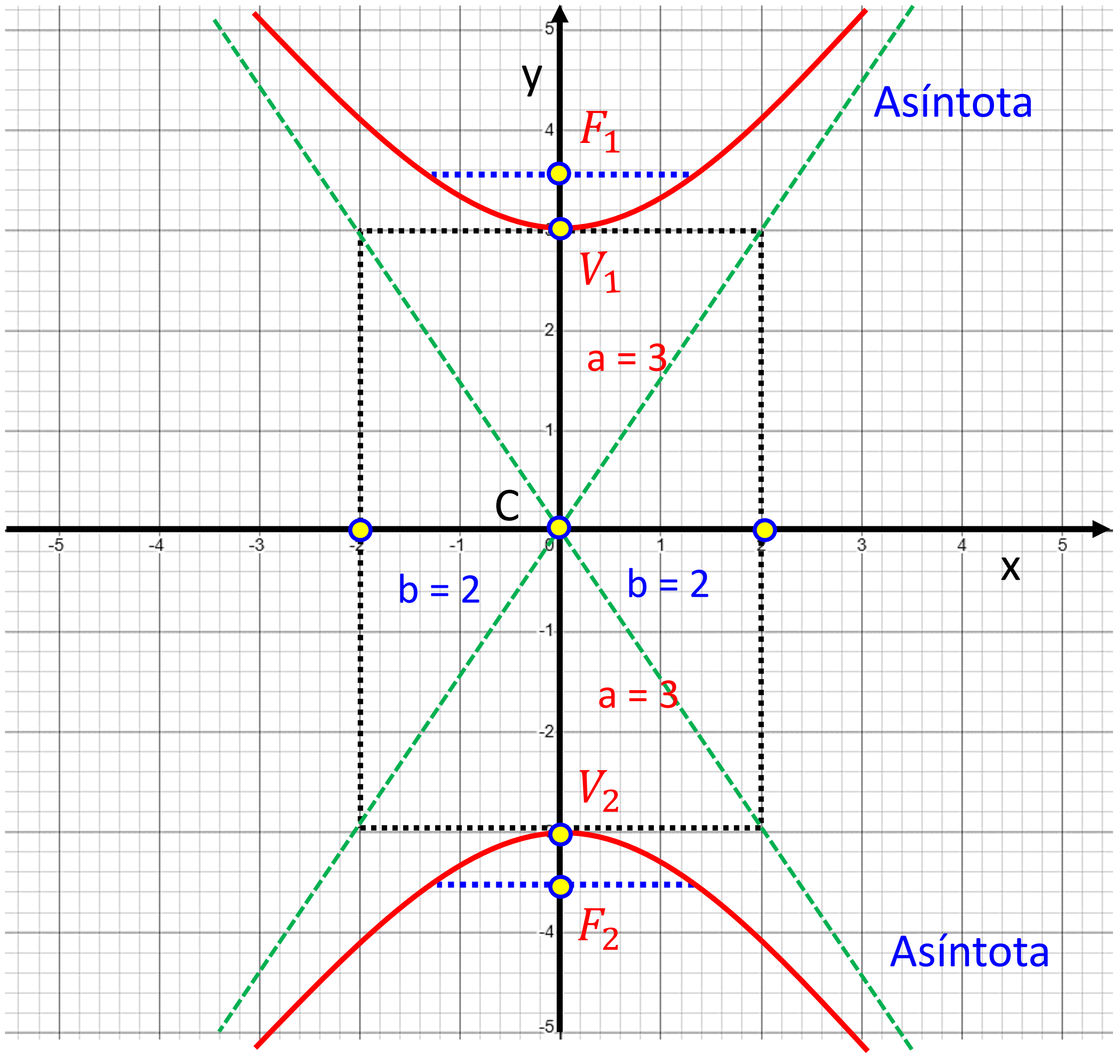
$$LR = 2{,}6$$

Vértices (0 , a) y (0 , - a)

$V_1 = (0\,,3)\ \ y\ \ V_2 = (0\,,-3)$

Focos (0 , c) y (0 , - c)

$F_1 = (0;3{,}6)\ \ y\ \ F_2 = (0;-3{,}6)$



Aprendiendo más sobre HIPÉRBOLA

1. Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$; esboza su gráfica y calcula:

   a) Las coordenadas de los vértices:
   b) Las coordenadas de los focos:
   c) La excentricidad
   d) La longitud del lado recto
   e) La longitud de los ejes transverso y conjugado

Aprendiendo más sobre HIPÉRBOLA

1. Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$; esboza su gráfica y calcula:
   a) Las coordenadas de los vértices: $V_1(4,0)$ $V_2(-4,0)$
   b) Las coordenadas de los focos: $F_1(5,0)$ $F_2(-5,0)$
   c) La excentricidad

Solución:

De la ecuación hallamos "a" y "b"
Dividiendo a la ecuación entre 144

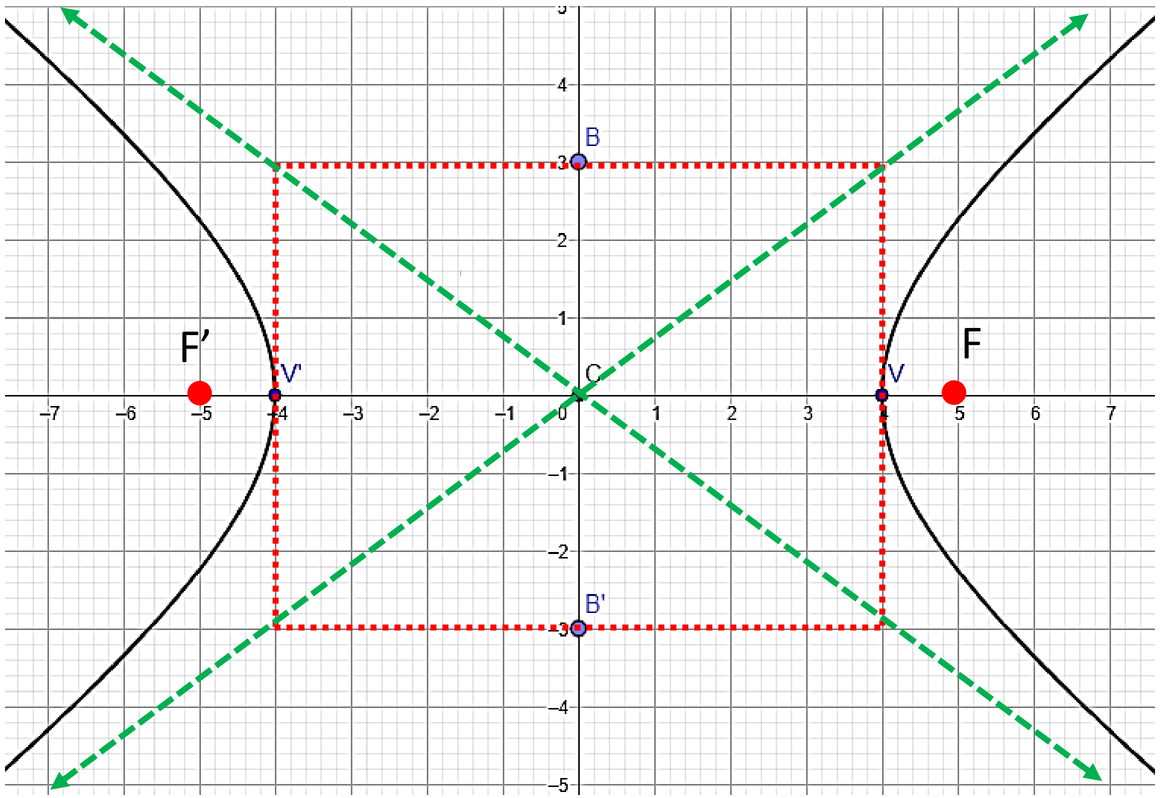
$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16$ $b^2 = 9$
a = 4 b = 3

Calculando "b" en:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4^2 + 3^2$$
$$c^2 = 25 \qquad c = 5$$



Aprendiendo más sobre HIPÉRBOLA

1. Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$; esboza su gráfica y calcula:

   a) Las coordenadas de los vértices:

   b) Las coordenadas de los focos:

   c) La excentricidad

Solución:

$Luego: a = 4; b = 3 \; y \; c = \mathbf{5}$

a) Las coordenadas de los vértices:

V'(-4;0) V(4;0)

b) Las coordenadas de los focos:

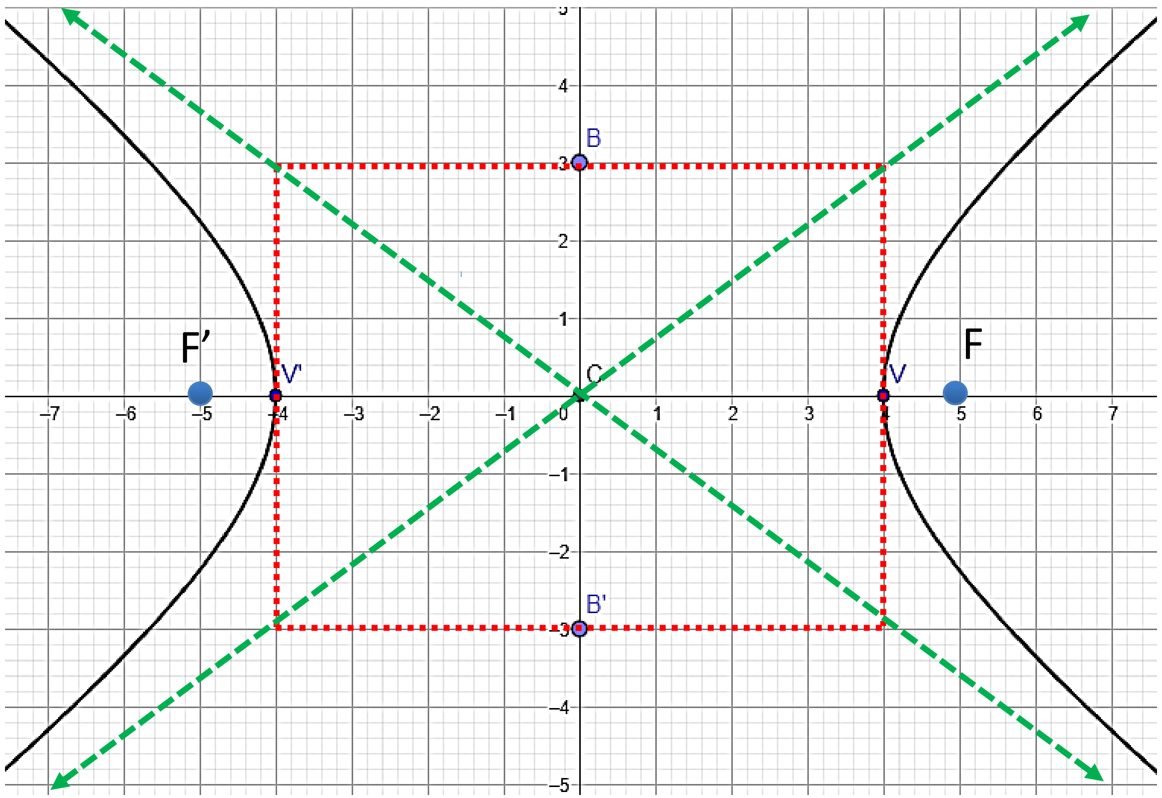
F'(-5;0) F(5;0)

c) La excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

d) La longitud del lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{4} = 4{,}5$$



Aprendiendo más sobre HIPÉRBOLA

1. Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$; esboza su gráfica y calcula:

   e) La longitud del lado recto

   f) La longitud de los ejes transverso y conjugado

Solución:

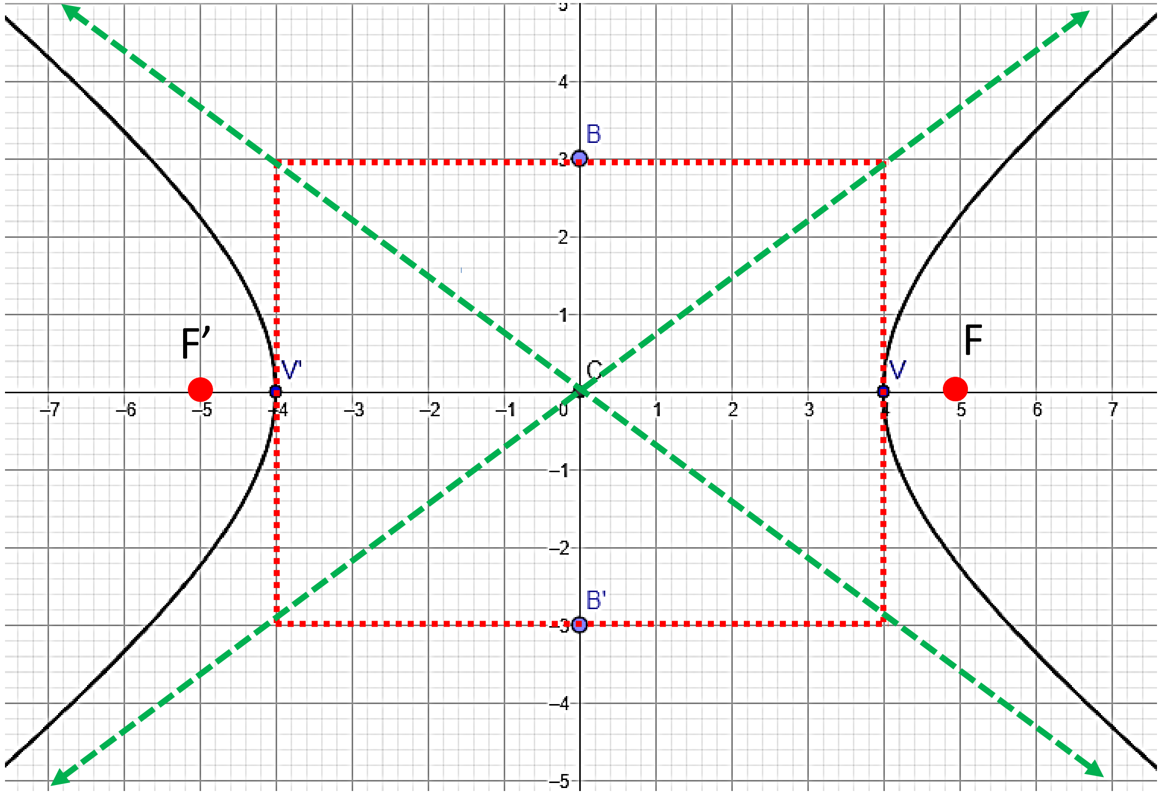
$Luego: a = 4; b = 3 \ y \ c = 5$

e) La longitud de los ejes transverso

$$\boxed{2a = 8}$$

f) La longitud de los ejes conjugado

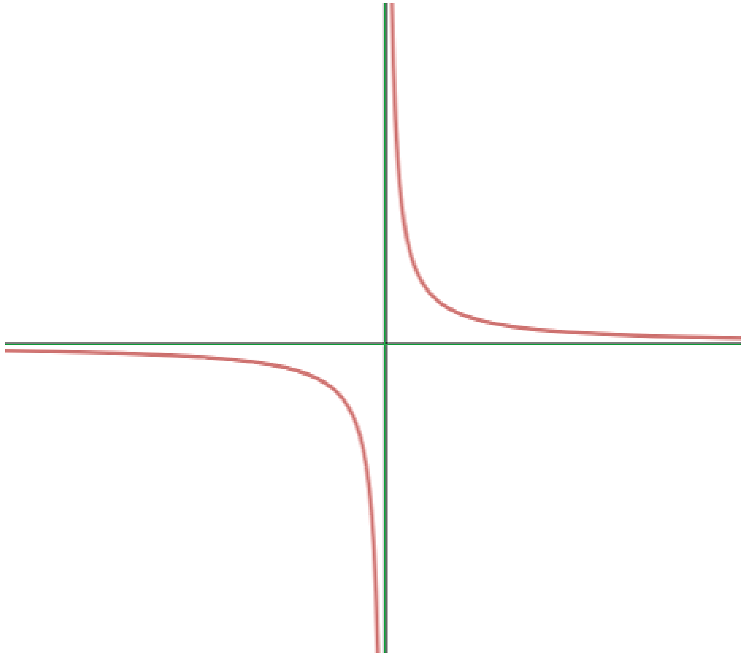
$$\boxed{2b = 6}$$



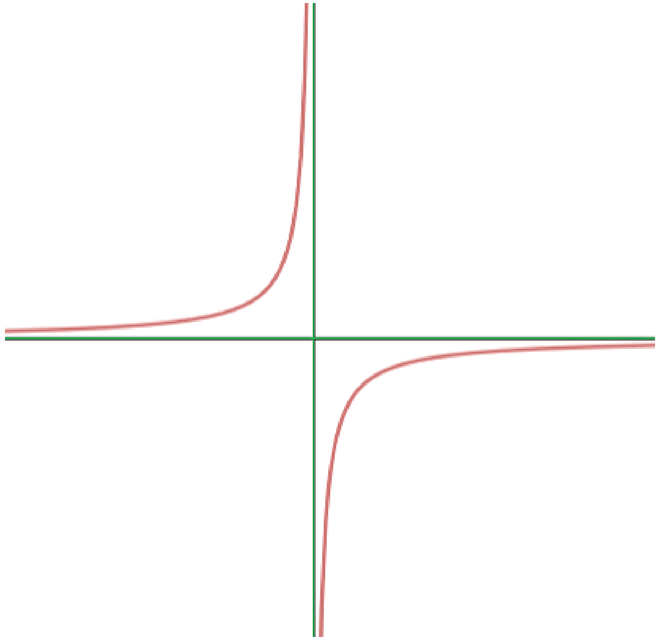
LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Llamamos función de proporcionalidad inversa o hipérbola equilátera a la función $y = f(x) = \frac{k}{x}$ tal que k es la razón de proporcionalidad. Notamos que la función cumple que: $xy = k$

Si k > 0 la gráfica de la función es de la siguiente forma. La función es decreciente.



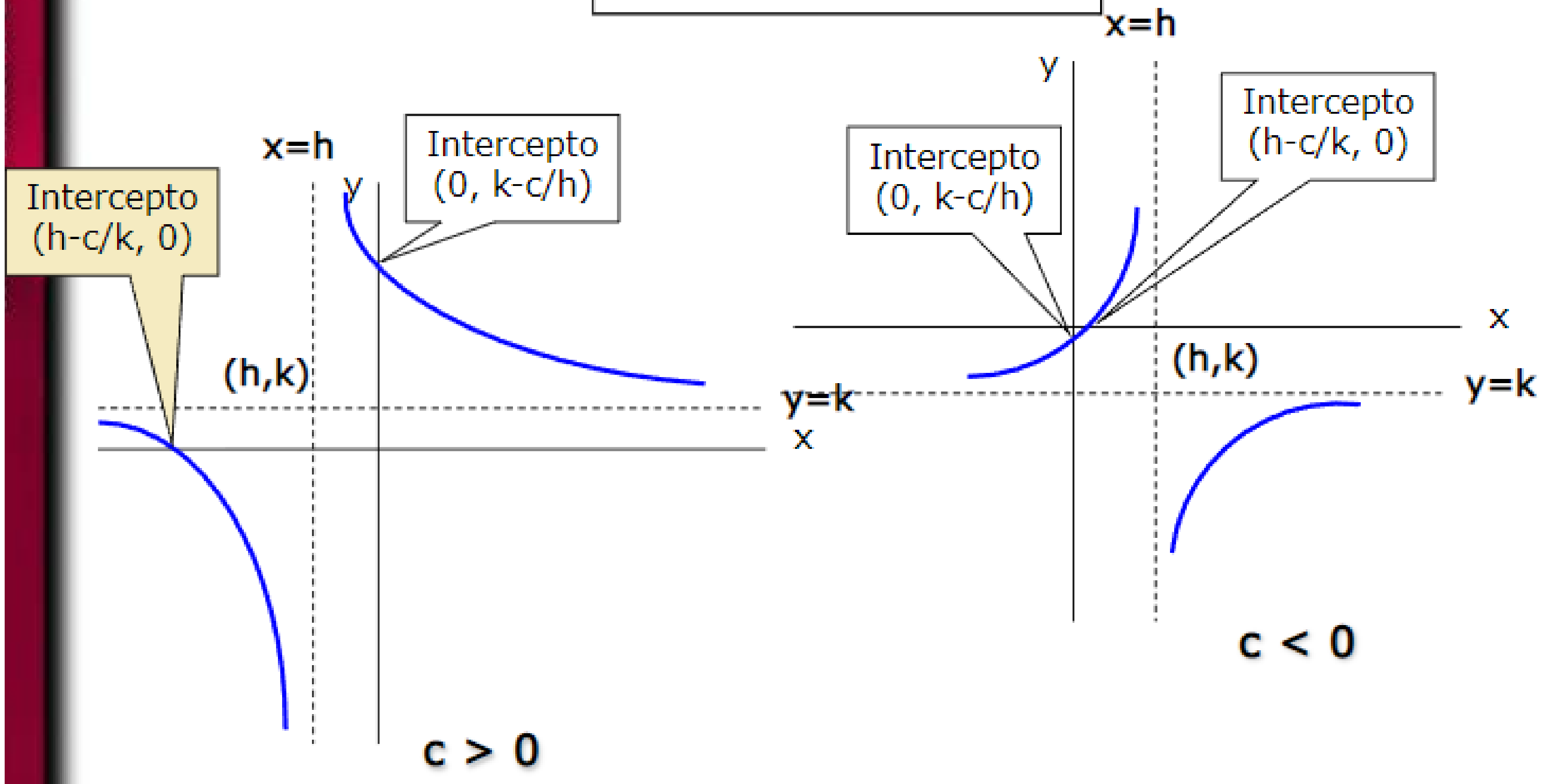
Si k < 0 la gráfica de la función es de la siguiente forma. La función es creciente.



LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

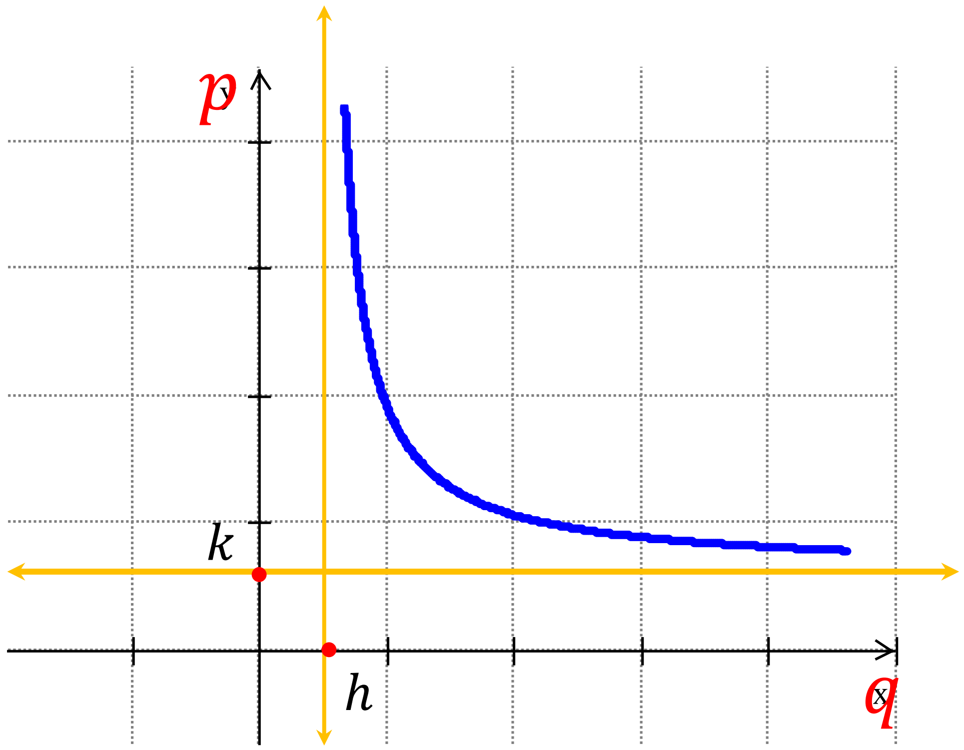
La hipérbola equilátera:

$$\boxed{(x-h)(y-k)=c}$$



APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Cuando estudiemos este tipo de relaciones en unidades posteriores, las llamaremos funciones de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una hipérbola. En la unidad que nos ocupa consideraremos sólo la rama positiva de dicha hipérbola, ya que nos limitamos a valores positivos.



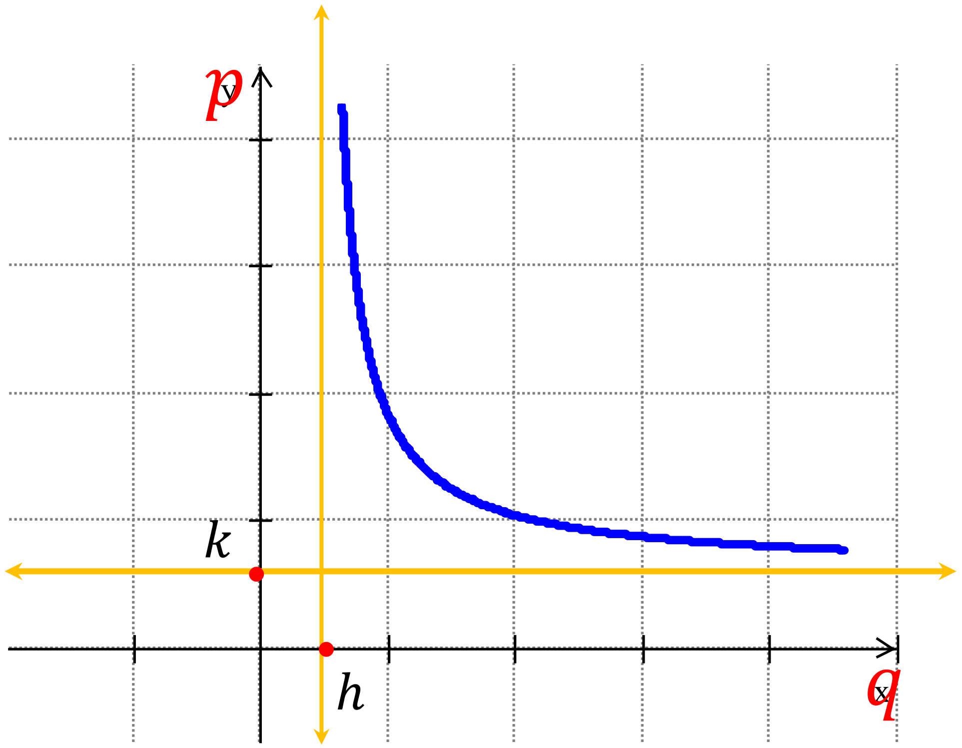
y IP x → yx = k

K = constante

APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Curva de la Demanda

La curva de la demanda muestra la relación entre la cantidad (q) de bienes que los compradores están dispuestos a adquirir y sus determinados precios (p).



Si más elevados son los precios de los bienes y servicios, los compradores consumen menos.

Con frecuencia se le representa con la hipérbola equilátera que está en el primer cuadrante

LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Ejemplo: Obtener el precio y la cantidad en equilibrio para las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: (grafique las curvas)

- $(q+12)(p+6)=169$ … (1)
- $q-p+6=0$ … (2)

Solución:

Despejando en (2)

$p=q+6$

Reemplazando en (1)

$(q+12)(p+6)=169$

$(q+12)(q+6+6)=169$

$(q+12)(q+12)=169$

$(q+12)^2=169$

$q+12=13$

$q=1$

Reemplazando el valor de “q” en (1)

$p=q+6$

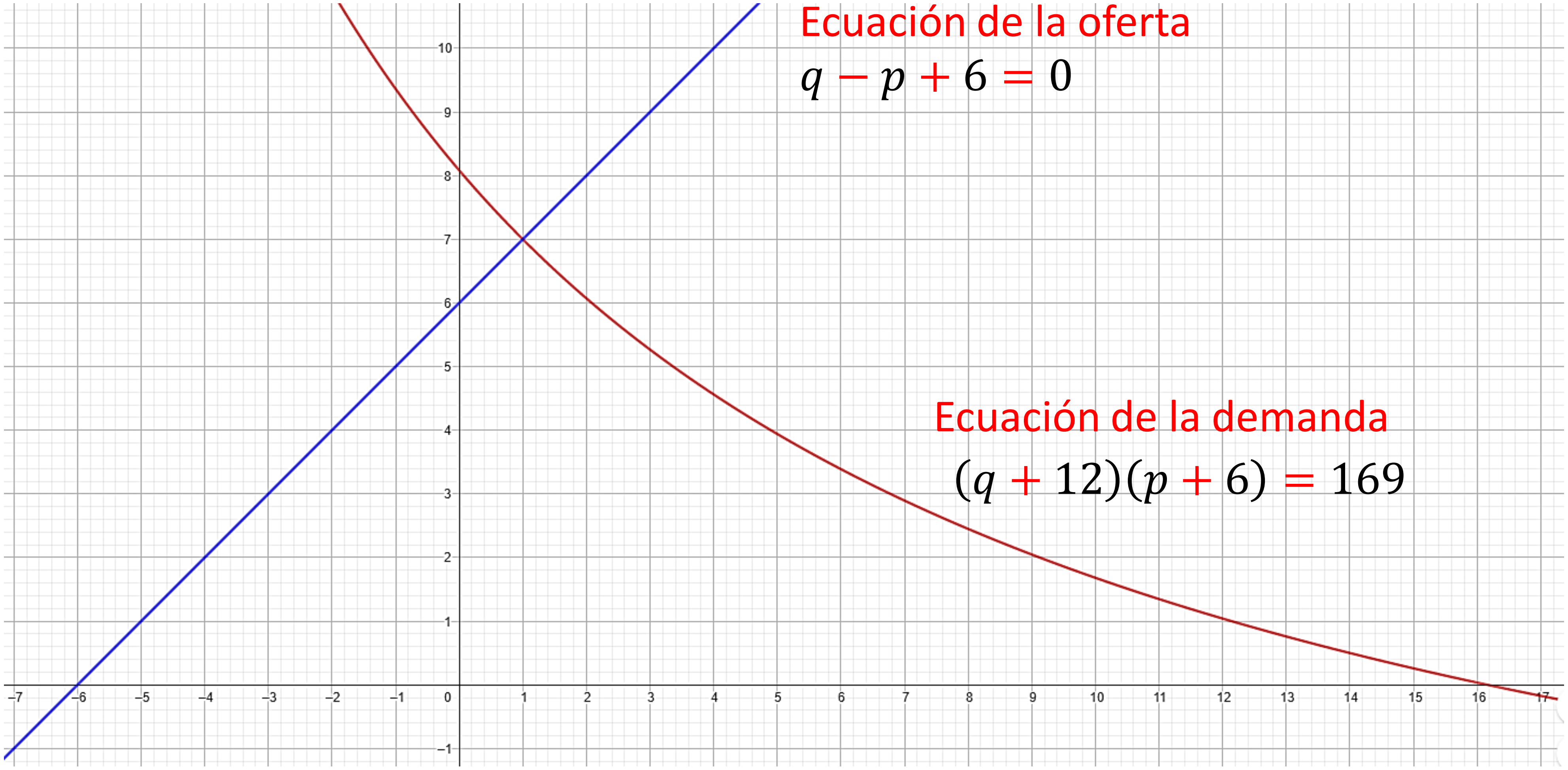
$p=1+6$

$p=7$

LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Gráficas de la oferta y la demanda:

- $(q + 12)(p + 6) = 169$ ... (1)
- $q - p + 6 = 0$ ... (2)



APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

TEORÍA DE LA UTILIDAD ORDINAL

¿Cómo adoptan los consumidores sus decisiones?
La elección de consumo depende

Restricción presupuestaria

Preferencias, a través de las curvas de indiferencia

Explica el comportamiento de los consumidores con supuestos menos rígidos. No requiere medir la utilidad, sino simplemente que el consumidor sea capaz de ordenar varias combinaciones de bienes de forma consistente (que incluye la posibilidad de mostrarse indiferente ante varias alternativas) según sus preferencias.

Las curvas de indiferencias fueron utilizadas por primera vez por el economista británico **Francis Y. Edgeworth**, 1845-1926, aunque fue **Hicks, J.R**. quien hizo popular el análisis de las curvas de indiferencia a partir de 1930.

APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Curvas de indiferencia (utilidad del consumidor)

Una hipérbola equilátera puede ser utilizada para representar las distintas posibilidades de elección de un consumidor tiene para las cuales obtiene un mismo nivel de satisfacción.

Si por ejemplo, la satisfacción de un agente que consumió dos tipos de bienes, viene dada por: $U = xy$

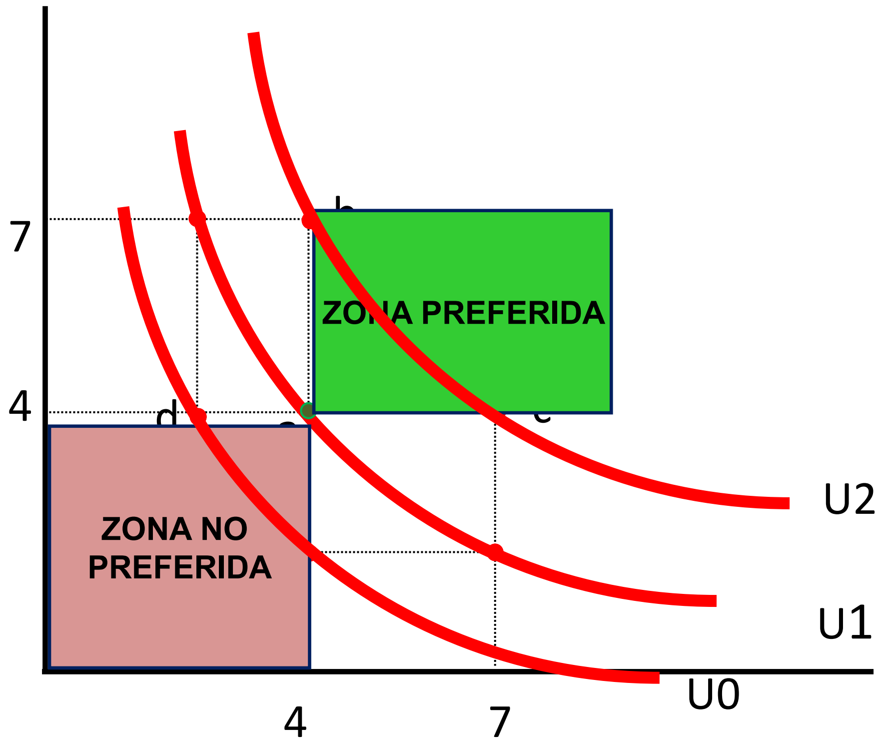
Si queremos conocer todos los puntos (x, y) con los que el consumidor obtiene un nivel de satisfacción igual a 9, debemos graficar la siguiente hipérbola equilátera: $xy = 9$

APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Curvas de indiferencia

Se tienen 2 productos, "x" y "y", de entre los cuales el consumidor puede hacer su elección. Obteniendo la mayor utilidad en el punto mas alejado del origen (I).

Para entender el funcionamiento de las curvas de indiferencia utilizaremos el siguiente ejemplo:



Curva de Indiferencia

APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

cada melón cuesta S/1 y cada piña cuesta S/3

Si tenemos S/10, y tenemos que comprar melones y piñas

1. ¿Cuáles son las posibles combinaciones que la pareja puede elegir?
2. ¿La pareja podrá comprar 2 piñas y 8 melones?
3. ¿La pareja podrá comprar 2 piñas y 3 melones?

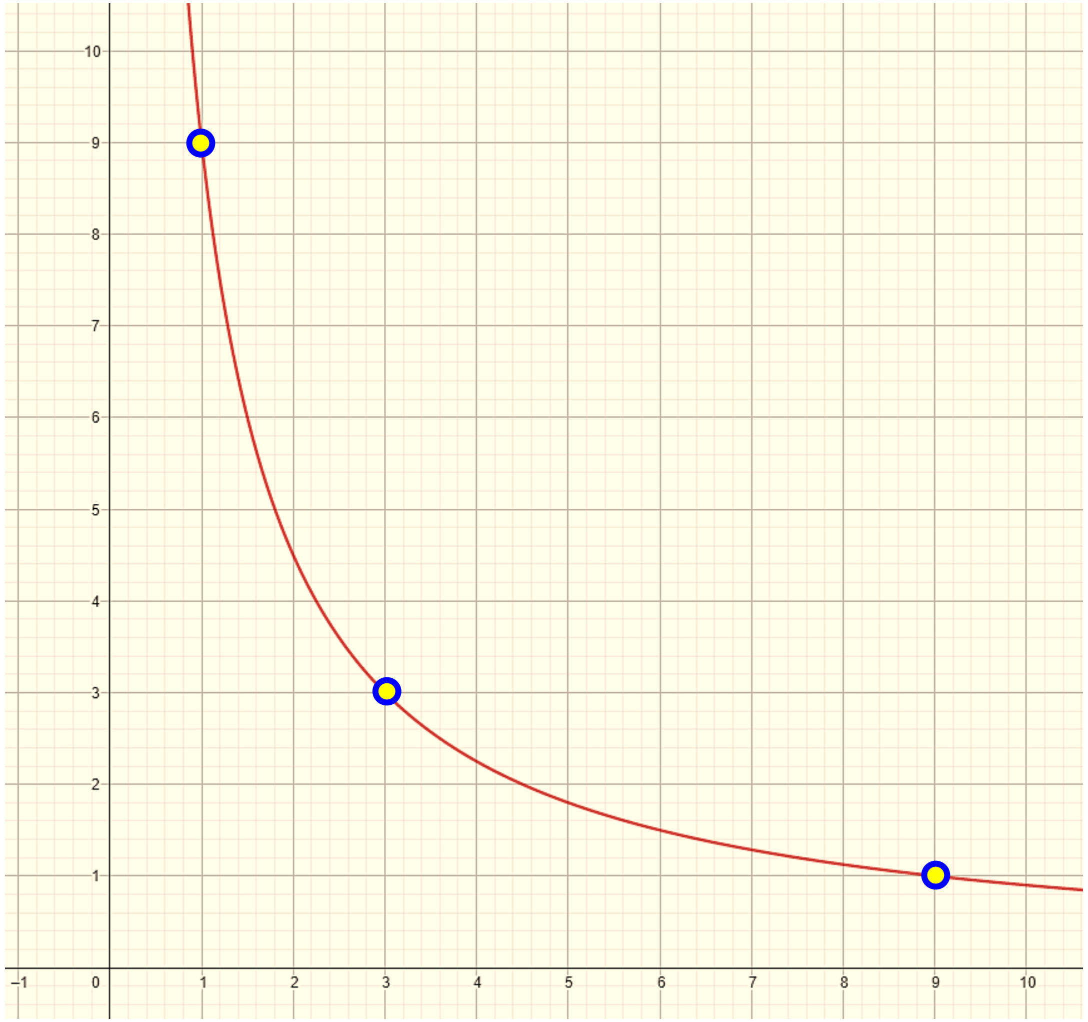
APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Ejemplo: Curvas de indiferencia

Si queremos conocer todos los puntos (x, y) con los que el consumidor obtiene un nivel de satisfacción igual a 9, debemos graficar la siguiente hipérbola equilátera: xy = 9

$$U = 9$$
$$xy = 9$$
$$y = \frac{9}{x}$$

x	y
1	9
3	3
9	1



APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

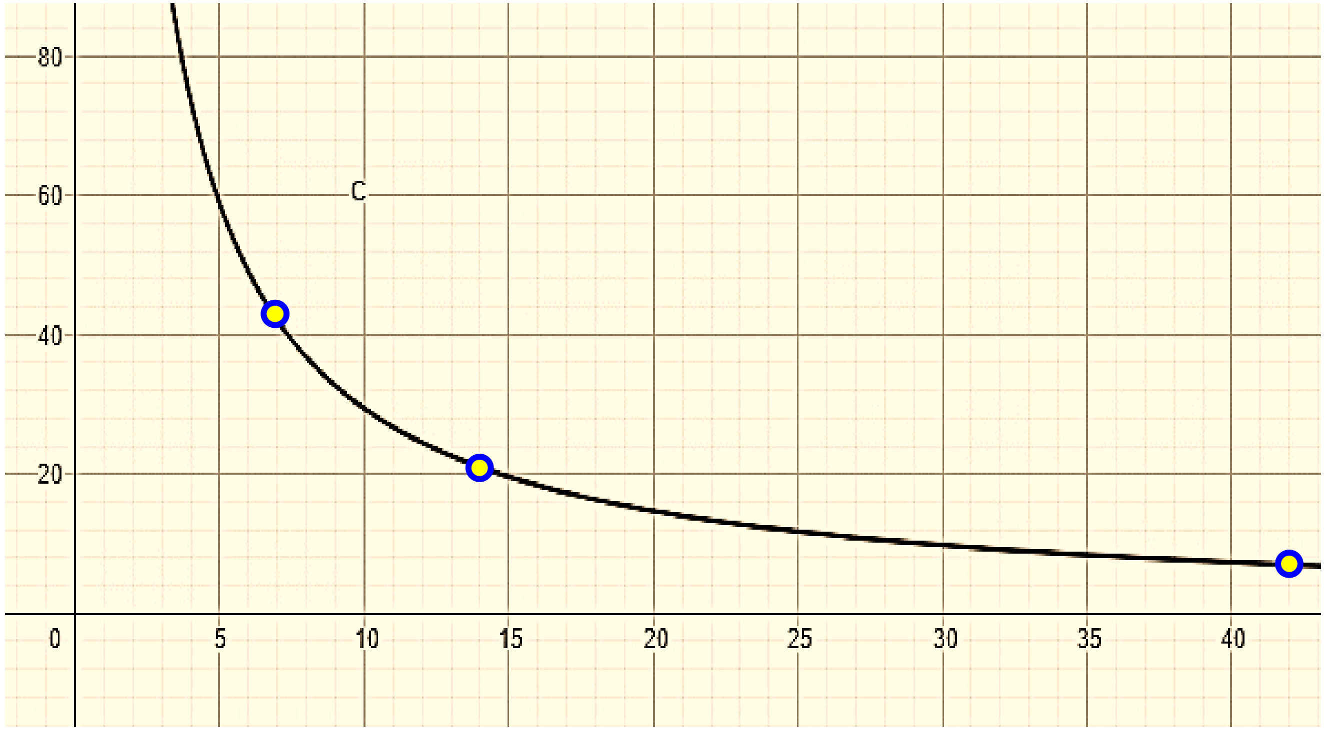
José dispone de 294 soles para comprar USB. ¿Cuántos podrá adquirir si se sabe que el precio es de 42 soles?. ¿Qué debe pasar con el precio, si José desea adquirir 14 USB? ¿A qué precio se debe fijar el USB para adquirir la mayor cantidad posible? Grafique la hipérbola para cada posible compra. (considere el precio como un número natural)

Sea: “x” la cantidad a adquirir
“y” el precio

xy = 294

$$y = \frac{294}{x}$$

x	y
7	42
14	21
42	7



Respuesta: Se debe fijar a 7 soles el USB para adquirir la mayor cantidad posible

APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Un fabricante de juguetes estima que su función de producción es $P = 100x^2y^2$ donde x: es el número de unidades de trabajo (horas-hombres) e y: es el capital (en cientos de soles). Grafique la hipérbola para una producción de 10 000 juguetes y explique qué ocurre con el capital a medida que aumenta el número de horas-hombres. ¿Y viceversa?

$$P = 10\,000$$

$$100x^2y^2 = 10\,000$$

$$(xy)^2 = 100$$

$$xy = 10$$

$$y = \frac{10}{x}$$

x	y
1	10
2	5
5	2
10	1