

CAPÍTULO 1.

CONCEPTOS BÁSICOS

El problema de la ruta más corta es uno de los problemas más importantes de optimización combinatoria con muchas aplicaciones, tanto directas como subrutinas en otros algoritmos de optimización combinatoria. Los algoritmos para este tipo de problemas han sido estudiados desde la década de los 50's y continúan siendo un área activa de investigación. De hecho, ha sido el objetivo de una investigación extensiva durante muchos años y ha dado como resultado la publicación de un gran número de documentos científicos.

Encontrar la ruta más corta entre dos nodos de una red, en la cual cada arco tiene un costo (o longitud) no negativo es un problema que a menudo se presenta en cierto tipo de actividades. El objetivo es minimizar el costo (tiempo o longitud) total.

El ejemplo más sencillo para explicar el problema de la ruta más corta es tomar el viaje de una persona que quisiera ir de la Ciudad de México a la ciudad de Monterrey, Nuevo León, podría tener varias alternativas dependiendo de sus intereses, es decir, si deseara llegar más rápido (minimizando el tiempo o la distancia) o de una forma más económica (minimizando el costo), toda vez que cada carretera tiene una longitud específica (kms.) y un precio por el derecho de transitar en ella (costo). Entonces, el problema consiste en encontrar la ruta más eficiente (la ruta mínima) con base en la longitud o el costo. Este problema se representa por una red, donde las ciudades son identificadas por nodos y las carreteras por arcos.

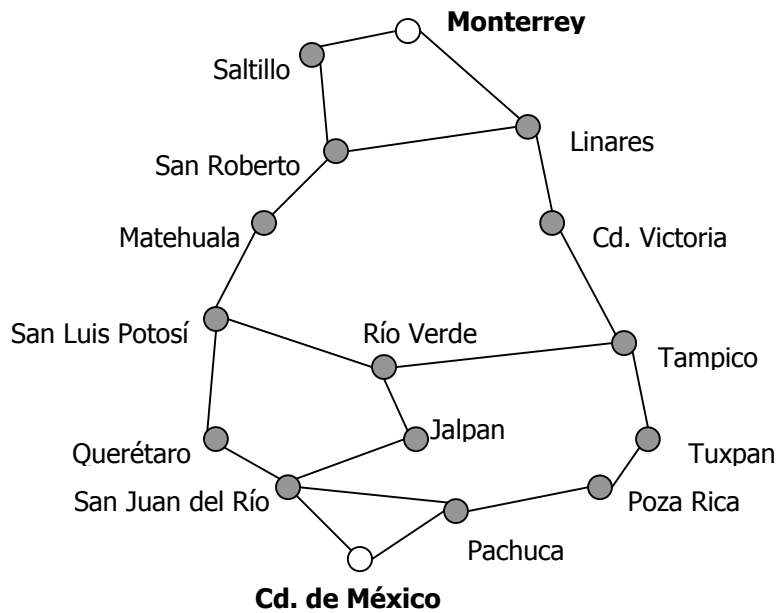


Figura 1.1. Ejemplo

1.1. IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

El problema de la Ruta más Corta es fundamental en muchas áreas, como son: investigación de operaciones, ciencia de la computación e ingeniería. Algunas de las razones son:

- i. La amplia variedad de aplicaciones prácticas como es el envío de algún material entre dos puntos específicos de la forma más eficiente, económica o rápida.
- ii. Existen métodos de solución eficientes, los cuales al ser aplicados a una red con características específicas (acíclica y con costos no negativos), proveen una solución exacta a un tiempo y costo razonables.
- iii. Se puede utilizar como inicio en el estudio de modelos complejos de redes, esto es, cuando no se conoce la estructura de la red se pueden aplicar algoritmos para conocer algunas características de la red (presencia de ciclos negativos).

- iv. Se utiliza frecuentemente como subproblemas (subrutinas) en la solución de problemas combinatorios y redes, así en el caso de problemas para los cuales no existe un algoritmo de solución exacto (p. e. problemas NP-completos), la aplicación de algoritmos de ruta más corta, resultan auxiliares para encontrar una buena solución.

1.2. APLICACIONES

El problema de ruta más corta tiene muchas aplicaciones prácticas, algunas son: encontrar la ruta más corta o más rápida entre dos puntos en un mapa, redes eléctricas, telecomunicaciones, transporte, planeación de tráfico urbano, trasbordo, diseño de rutas de vehículos, planeación de inventarios, administración de proyectos, planeación de producción, horarios de operadores telefónicos, diseño de movimiento en robótica, redes de colaboración entre científicos, reemplazo de equipo, etc.

Además, como se mencionó anteriormente los algoritmos de solución pueden adaptarse en la búsqueda inicial de una solución aproximada de problemas complejos, esto significa que la aplicación consiste precisamente en proveer estructura para varios problemas de optimización combinatoria como: el problema de la mochila, secuencia de alineación en biología molecular (secuenciación del ADN), el problema del agente viajero, etc.

1.3. CONCEPTOS BÁSICOS

En esta sección se introducen conceptos básicos de redes que se utilizarán en el desarrollo del presente trabajo. En la literatura se observa frecuentemente el uso indistinto de *Red* o *Gráfica*.

Gráfica.

$G = (V, E)$, es una gráfica formada por el conjunto de nodos (*vértices*) V y el conjunto de arcos (*aristas*) E .

Gráfica No Dirigida.

En una gráfica no dirigida un arco es un par no ordenado de nodos, las conexiones son bidireccionales, es decir, el orden no importa.

$G = (V, E)$, donde:

$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (c, f), (d, e), (e, f)\}$

Sin embargo, como el orden de los arcos no importa el arco (a, b) también puede considerarse como (b, a) , siendo lo mismo para todos los demás arcos.

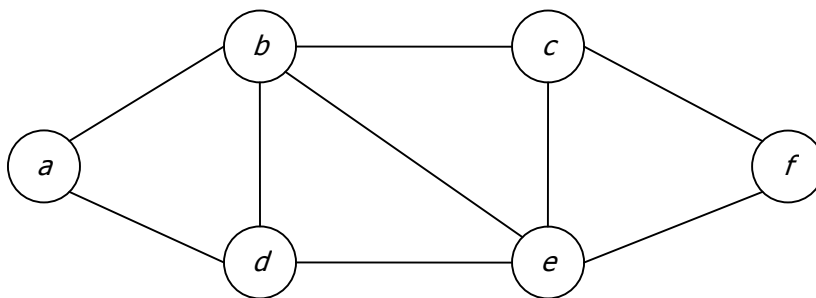


Figura 1.2. Gráfica no dirigida

Gráfica Dirigida o Digráfica.

En una gráfica dirigida un arco es un par ordenado. Esto es, si (a, b) es un arco dirigido, entonces a es el nodo inicial (el arco sale del nodo) y b es el nodo final (el arco entra al nodo). La conexión es únicamente del nodo inicial al nodo final.

$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (c, f), (d, e), (e, f)\}$

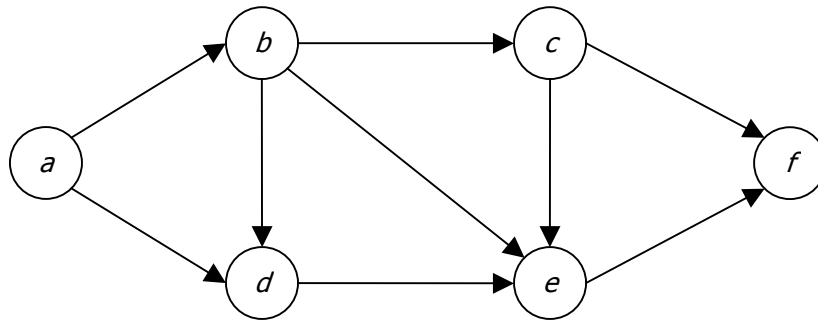


Figura 1.3. Gráfica dirigida o digráfica

Gráfica Simple.

Esta gráfica considera un nodo fuente (únicamente salen arcos) y un nodo sumidero (únicamente entran arcos). No existen arcos múltiples, es decir, dos nodos están conectados por un arco o por ninguno, tampoco existen rizos, esto es, ningún nodo está conectado a sí mismo por un arco.

Por lo general, cuando no se hace especificación se consideran gráficas simples.

Gráfica Múltiple.

Existe la posibilidad de varios arcos entre el mismo par de nodos.

Gráfica Conectada.

Todos los nodos están conectados directa o indirectamente a todos los demás nodos, esto es, existe una ruta desde cualquier nodo a cualquier otro nodo de la red.

Gráfica Bipartita.

Los nodos de la gráfica se dividen en dos conjuntos, con la característica de que todos los arcos conectan a los nodos desde un conjunto al otro.

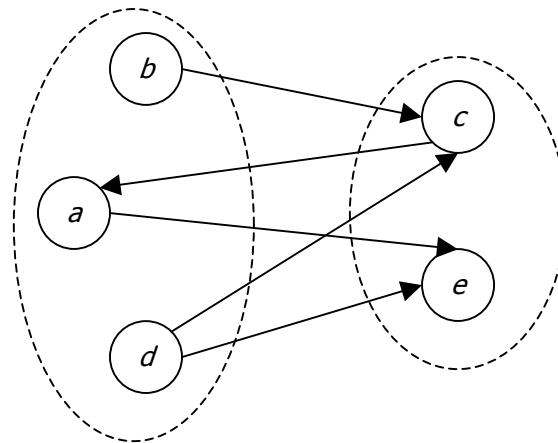


Figura 1.4. Gráfica bipartita

Grado.

Es el número de arcos incidentes en un nodo. En una digráfica existen:

- el grado interior, es el número de arcos que entran en un nodo. En la figura 1.3, el nodo d tiene grado interior de 2.
- y el grado exterior, es el número de arcos que salen de un nodo. En la figura 1.3, el nodo d tiene grado exterior de 1.

Nodos Adyacentes.

Son los nodos conectados por un arco.

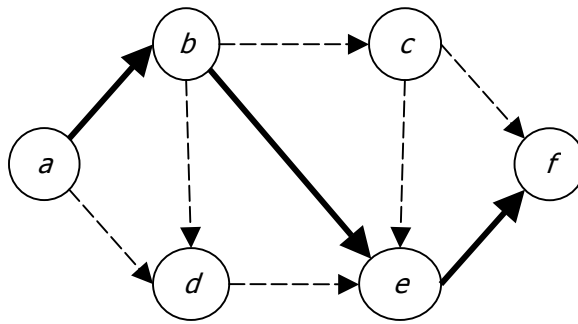
Arcos Incidentes.

Un arco e es incidente en un nodo v si v es el extremo de e .

Ruta.

Una ruta en una gráfica dirigida es una secuencia de nodos y arcos, además se requiere que todos los nodos sean diferentes. En el caso de que algunos nodos o arcos se repitan en la secuencia, se conoce como camino.

En la figura 1.5. (a), se muestra la ruta del nodo a al nodo f , la cual considera los nodos a , b , e y f , y los arcos (a, b) , (b, e) y (e, f) .

Figura 1.5. Ruta del nodo a al nodo f **Longitud de una Ruta.**

La longitud de una ruta con la secuencia de arcos a_1, a_2, \dots, a_n es la suma de las longitudes de todos los arcos de la ruta, $l(a_1) + l(a_2) + \dots + l(a_n)$.

En general, la ruta más corta del nodo a_i al nodo a_j existe si y sólo si existe al menos una ruta entre ambos nodos. La distancia entre los nodos a_i y a_j será la longitud de la ruta más corta $a_i a_j$, y se denotará como $d(a_i, a_j)$. Si la ruta $a_i a_j$ no existe, entonces $d(a_i, a_j)$ es infinito (∞).

Ciclo.

Es un camino donde el nodo inicial y el nodo final coinciden. Si los arcos tienen la misma dirección se conoce como circuito.



Figura 1.6. (a) Camino del nodo c al nodo b , arcos (c, a) , (a, b)
 (b) Circuito del nodo a al nodo a

Gráfica Acíclica.

Una gráfica que no contiene ciclos.

Árbol.

Un árbol es una gráfica conectada que no contiene ciclos.

Bosque.

Es una gráfica sin ciclos, se considera también como un conjunto de árboles.

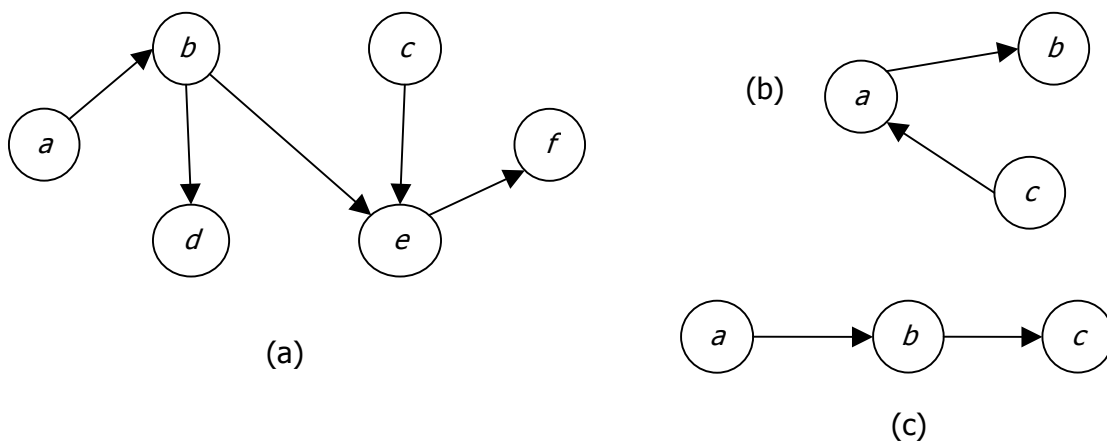


Figura 1.7. Ejemplos de árboles.
(a), (b) y (c) El conjunto de los tres
forma un bosque

Arborescencia.

Es un árbol dirigido con un nodo llamado raíz.

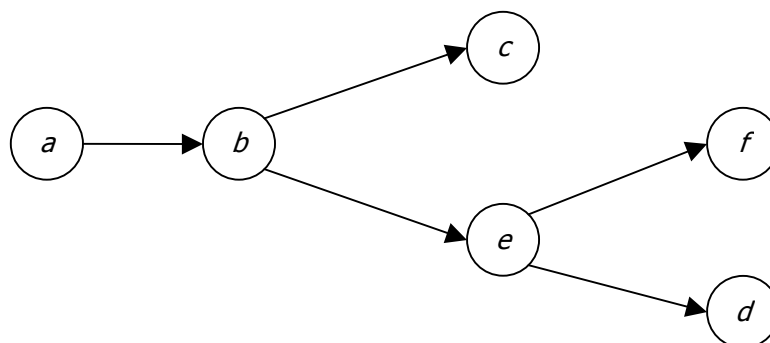


Figura 1.8. Arborescencia de raíz a

Subgráfica.

Es un subconjunto de nodos y arcos de una gráfica. Si un arco se incluye, los dos nodos incidentes también se incluyen.

Subgráfica Expandida.

Una subgráfica que contiene todos los nodos de la gráfica original.

Árbol de Expansión.

Una subgráfica expandida que también es un árbol, es decir, conectada y sin ciclos.

Función de Costo.

Sea c una función que asocia a cada elemento de E un costo respectivo. La función puede representar: costo, distancia, tiempo, etc.

Propiedades de una Gráfica.

⇒ Una gráfica con n nodos y m arcos:

✦ $\sum \text{grados de todos los nodos} = 2m$

✦ $m \leq n(n-1)/2$

⇒ Para una digráfica:

✦ $\sum \text{grados interiores} = \sum \text{grados exteriores} = m$

✦ $m \leq n(n-1)$

⇒ Si G es conectada, $m \geq n-1$

⇒ Si G es un árbol, $m = n-1$

⇒ Si G es un bosque, $m \leq n-1$

Representación Matricial de una Gráfica.

Una gráfica puede representarse matricialmente de las siguientes formas:

Matriz de Incidencia (nodos-arcos).

Es una matriz $n \times m$, (n -nodos y m -arcos). El arco (i, j) tiene los elementos: -1 en el renglón correspondiente al nodo i ; +1 en el renglón correspondiente al nodo j ; 0 en otro caso.

$$e(i, j) = \begin{cases} +1 & \text{si el arco } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si el arco } j \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

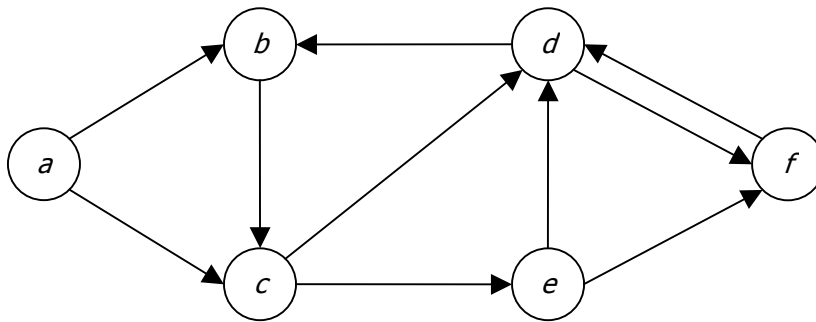


Figura 1.9. Ejemplo

Matriz de incidencia de la red representada en la figura 1.9.

	(a,b)	(a,c)	(b,c)	(c,d)	(c,e)	(d,b)	(d,f)	(e,d)	(e,f)	(f,d)
a	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	-1	0	1	0	0	-1	0	0	0	0
c	0	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0
d	0	0	0	-1	0	1	1	-1	0	-1
e	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0
f	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1

Matriz de Adyacencia (nodos-nodos).

Es una matriz $n \times n$. En la entrada ij toma el valor de 1 si existe conexión del nodo i al nodo j .

$$q(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si existe un arco que sale de } i \text{ y llegue a } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Matriz de adyacencia de la red representada en la figura 1.9.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
 \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

1.4. PLANTEAMIENTO

Dada una red dirigida $G = (V, E, c)$, se denota por $(i, j) \in E$, el arco que conecta al nodo i con el nodo j , y el costo positivo asociado es c_{ij} . La red tiene dos nodos específicos: el nodo fuente s y el nodo sumidero t .

El problema consiste en encontrar la ruta (p) más corta (o de costo mínimo) iniciando en el nodo fuente y terminando en el nodo sumidero, considerando que cada arco (i, j) tiene un costo asociado c_{ij} , es decir, se busca minimizar la función:

$$c(p) = \sum_{(i,j) \in p} c(i, j)$$

1.4.1. PLANTEAMIENTO EN PROGRAMACIÓN LINEAL

El problema de la ruta más corta se puede plantear como el envío de una unidad de flujo del nodo origen 1 al nodo destino t , al mínimo costo. Esto es, $b_1 = 1$, $b_t = -1$, y $b_i = 0$, para $i \neq 1$ ó t . Entonces, el planteamiento es como sigue:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^t x_{ij} - \sum_{k=1}^t x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } t \\ -1 & \text{si } i = t \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ó } 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, t$$

Sin embargo, como las ecuaciones de conservación de flujo son unimodulares, es decir, si existe una solución óptima el método simplex obtendrá valores 1, 0.

Por esta razón la última restricción puede plantearse como:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, t$$

1.5 VARIACIONES DEL PROBLEMA

Las diferentes formas que puede presentar el problema de la ruta más corta son:

- Del nodo fuente s al nodo sumidero t . Para que exista solución se debe cumplir:
 - i. Existe al menos una trayectoria entre s y t .
 - ii. No existen circuitos negativos tales que haya una ruta de s a algún nodo del circuito y otra de algún nodo del circuito a t .
- Del nodo fuente s a todo nodo de la red i . Para que exista solución se debe cumplir:
 - i. Existen rutas de s a i .
 - ii. No existen circuitos negativos en la red.
- Entre todo par de nodos. Para que exista solución se debe cumplir:
 - i. Existe, al menos, una trayectoria entre todo par de nodos.
 - ii. No existen circuitos negativos en la red.

1.6 TIPOS DE PROBLEMAS

Las rutas a encontrar pueden ser:

- a. formadas por un simple arco, (s, t) , o
- b. la ruta del nodo s al nodo t que atraviesa por otros nodos.

Además de forma independiente de la variación del problema, se pueden tener los siguientes casos:

- ⇒ El tipo más sencillo del problema de la ruta más corta es cuando la longitud de cada arco es 1. Esto significa que la longitud de la ruta es exactamente el número de arcos que contiene.
- ⇒ Cuando todos los arcos tienen distancias (costos) no negativas y no existen circuitos en la red.
- ⇒ Cuando no existen ciclos dirigidos.
- ⇒ Cuando no existen ciclos dirigidos con longitudes negativas.
- ⇒ Ruta más corta en gráficas no dirigidas con longitudes de los arcos no negativas. En este caso, se reemplaza cada arco no dirigido uv por dos arcos dirigidos uv y vu , con la misma longitud que uv .
- ⇒ Cuando existen arcos con costos negativos. Actualmente no se conoce un algoritmo que resuelva este tipo de problema polinomialmente, y la teoría de la complejidad computacional parece indicar que no existe un algoritmo.
- ⇒ En gráficas no dirigidas con al menos un arco con longitud negativa. En este caso, al reemplazar el arco uv por uv y vu , juntos forman un ciclo

con longitud negativa. Este tipo de problema es igual que cuando existen arcos con longitudes negativas, es decir, no existe un algoritmo de tiempo polinomial para resolverlo.

La teoría de la Complejidad Computacional sirve para evaluar la eficiencia de los algoritmos, pero también ayuda a clasificar los problemas de tal manera que puede saberse previamente si la búsqueda de un algoritmo es posible o no, evitando así trabajo innecesario.

En el siguiente capítulo se explica esta teoría y los conceptos en que se basa para hacer las clasificaciones.