Series y sucesiones: Series geométricas

Alex - October 21, 2025

🍀 Una guía para que converja. 🍀

Antes de comenzar

Estas son series muy simples, donde cada termino se obtiene multiplicando el anterior por una razón constante r:

$$\begin{cases} a_n = ra_{n-1} \\ a_0 = b \end{cases}$$

Esta serie es divergente si:

$$|r| \geq 1$$

Hallando la formula a_n

Para esta operación se tiene en cuent la forma espandida de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = y = 1 + r + r^2 ... + r^n$$

Luego se hace una multiplicación y se restan las dos expansiones para que colapsen:

$$\begin{gathered} yr = r + r^2 + r^3 ... + r^n + r^{n+1} \\ y = 1 + r + r^2 ... + r^n \\ y - yr = 1 + r^{n+1} \\ y(1-r) = 1 + r^{n+1} \\ y = \frac{1+r^{n+1}}{1-r} \end{gathered}$$

Y analizando los casos de r^n podemos encontrar una fórmula final muy simple:

$$\begin{cases} |r| < 1 \Rightarrow 0 \\ r > 1 \Rightarrow \infty \\ r = 1 \Rightarrow 1 \\ r \leq -1 \Rightarrow NaN \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, |r| < 1$$

Ahora a practicar

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{2}{3})^n$$

Sacamos constante y trabajamos facilmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{2}{3})^n = 4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$$

Luego cambiamos los índices y ajustamos para trabajar con la fórmula anterior:

$$4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = 4(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n - (\frac{2}{3})^0)$$

Y ahora sí, reemplazamos nuestra fórmula general:

$$\begin{gathered} c = 4(\frac{1}{1-r} - 1) \\ c = 4(\frac{1}{1-2/3} - 1) \\ c = 4(3-1) = 8 \end{gathered}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n} + 3^{-n})$$

Parece dificil, pero podemos trabajarla para que mejore:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n} + 3^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$$

Y seguido de esto cambiamos los índices:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$$

Y ya queda esto bien pelado:

$$\begin{gathered} c = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-1/2}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{1-1/3}) \\ c = 1 + 1/2 = 3/2 \end{gathered}$$