Series y sucesiones: Criterios de convergencia

Alex - October 21, 2025

🍀 Y la que converja. 🍀

Antes de comenzar

Estas técnicas pueden ser usadas cuando solo se quiere saber si una serie converge o diverge y no el resultado específico.

Criterio de la razón

El criterio consiste en que si tienes una sucesión puedes plantear este límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Si $r > 1$ La serie diverge, si $r < 1$ converge, y si $r = 1$ el criterio no es concluyente.

Criterio de la integral

Si se tiene una sucesión y sacamos su termino a_n en una función $a_n = f(x)$, siempre que $f(x)$ sea continua, positiva y decreciente en $[1, \infty]$ podemos decir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) \text{ converge}$$

Criterio de la raiz

content...

Criterio de comparación

Si tengo dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con terminos positivos, este criterio dicta que:

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $a_n < b_n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y $a_n > b_n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ahora a practicar

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{2}{3})^n$$

Sacamos constante y trabajamos facilmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{2}{3})^n = 4\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$$

Luego cambiamos los índices y ajustamos para trabajar con la fórmula anterior:

$$4\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = 4(\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n - (\frac{2}{3})^0)$$

Y ahora sí, reemplazamos nuestra fórmula general:

$$c = 4(\tfrac{1}{1-r} - 1)$$
$$c = 4(\tfrac{1}{1-2/3} - 1)$$
$$c = 4(3 - 1) = 8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n})$$

Parece dificil, pero podemos trabajarla para que mejore:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$$

Y seguido de esto cambiamos los índices:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$$

Y ya queda esto bien pelado:

$$c = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1-1/2}) + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{1-1/3})$$
$$c = 1 + 1/2 = 3/2$$