Calculo I: Sustituciones trigonométricas

Alex - October 21, 2025

🌙 Una guía para integrar con triángulos. 🌙

Antes de comenzar

Al momento de integrar nos encontraremos con sumas y diferencias de cuadrados. En estos casos una posible solución podría ser una sustitución trigonométrica.

Para términos de la forma no factorizable:

$$ax^2 + bx + c$$

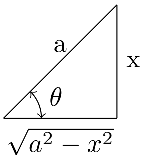
Se pueden completar cuadrados y aplicar la sustitución cuando sea lo más conveniente.

Sustitución trigonométrica

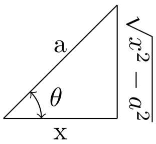
Consiste en reescribir los términos de la forma anterior a partir del teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

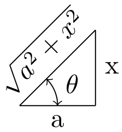
Con esto podremos expresar a la función en términos de un angulo θ:



$x = a \sin\theta$



$x = a \sec\theta$



$x = a \tan\theta$

Cambiando a x y a de lugar se puede trabajar con las otras tres funciones trigonométricas mas.

Al final la mejor sustitución dependerá del problema, sin embargo, comúnmente se calculan x y dx así como la suma o diferencia de cuadrados con respecto a θ.

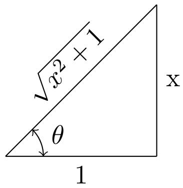
”La tabla 11” ✂️

¿Alguna vez te ha pasado que no puedes memorizar todas esas tablas de integrales? Al final resulta que con un poco de sustituciones esto no es necesario.

🔥 ¿Cómo resolverías esta integral? 🔥

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Primero construimos un triangulo rectángulo a partir de la suma de cuadrados que encontramos:



Se realizan los cálculos con las funciones que más nos convengan:

$$\tan\theta = x, \quad \sec^2\theta d\theta = dx$$
$$\sec\theta = \sqrt{x^2+1}$$

Reemplazamos lo que calculamos en la integral:

$$\int \frac{1}{\sec\theta} \sec^2\theta d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

Resolvemos la integral resultante:

$$\int \sec\theta d\theta =$$

$$\int \sec\theta \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\tan\theta + \sec\theta} d\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\tan\theta + \sec\theta} d\theta$$

¿Notaste algún patrón? Ahora podemos hacer una sustitución simple:

$$Sust. \quad u = \tan\theta + \sec\theta$$
$$du = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\tan\theta + \sec\theta| + C$$

Por ultimo deshacemos las sustituciones hasta llegar a términos de x:

$$\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$$