Calculo I: Fracciones parciales

Alex - October 21, 2025

🌟 Una guía para dividir fracciones. 🌟

Antes de comenzar

En algunos casos al integrar encontraremos fracciones como esta:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

En estos casos una posible solución podría ser separar la fracción en una suma de fracciones parciales.

Fracciones impropias

Una fracción se llama impropia cuando $n \geq m$, en este caso se dividen los polinomios:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde $C(x)$ es el cociente de la división y $R(x)$ el residuo

Fracciones propias

Una fracción se llama propia cuando $n < m$. En este caso se debe comprobar si $Q_m(x)$ es un polinomio factorizable en términos de la forma $(x-a)^k, (x^2+bx+c)^k, k \geq 1$, si lo anterior se cumple se realiza una descomposición en fracciones parciales.

Descomposición en fracciones parciales

Consiste en reescribir una fracción como una suma finita de fracciones mas simples. Dependiendo se los factores de $Q(x)$ se escribe la suma así para cada uno:

$(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
$(x^2+bx+c)^k$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}$

Tenga en cuenta que si hay multiples tipos de factores se escribe una combinación de los casos

Para hallar las constantes se iguala la suma con la fracción original, por ejemplo:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3x+B_1}{x^2+1}$$

Luego se multiplica para quitar los denominadores y se factoriza la expresión con respecto a x:

$$\begin{aligned} 1 &= A_1x(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (A_3x+B_1)x^2 \\ &= x^3(A_1+A_3) + x^2(A_2+B_1) + A_1x + A_2 \end{aligned}$$

Al final se obtiene a partir de la igualdad de polinomios un sistema de ecuaciones para despejar las constantes.

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 0 \\ A_2 + B_1 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 0 \\ B_1 = -1 \end{cases}$$

Por ultimo se reemplazan las constantes para revelar el resultado:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$