Лабораторная работа № 9
Метод множителей Лагранжа

***Цель работы*:** изучение метода множителей Лагранжа.

1. Постановка задачи.

Найти минимальное и максимальное значение функции z при заданных ограничениях методом множителей Лагранжа.

2. Теоретические сведения.

Метод отыскания условного экстремума функции нескольких переменных $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ в задачах с ограничениями в виде равенств при отсутствии требований неотрицательности и целочисленности переменных называется ***методом множителей Лагранжа.***

Пусть все ограничения имеют вид равенств

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = b_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Преобразуем их к виду $b_j - \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Будем полагать, что функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Объединив функцию $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ с ограничениями, используя неотрицательные постоянные множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, образуем вспомогательную функцию

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{2}$$

Справедлива следующая ***теорема***: если функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ достигает своего экстремума при условиях (1) в точке $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, что для функции $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ в точке $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ выполняются необходимые условия безусловного экстремума, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Функция $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ называется ***функцией Лагранжа***, а числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – ***неопределенными множителями Лагранжа***.

Таким образом, вычисление условного экстремума функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ сводится к отысканию безусловного экстремума функции Лагранжа (2). Задача состоит в нахождении $n + m$ неизвестных, включающих n переменных x_i и m множителей Лагранжа. Для их определения используется система из m ограничений и n уравнений (3), являющихся условиями экстремума функции Лагранжа.

Обобщением классического метода неопределенных множителей Лагранжа на задачи с ограничениями в виде неравенств вида $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$ и ограничениями на знак переменных $x_i \ge 0$ является теорема Куна – Таккера.

Пусть имеется следующая задача:

$$\min\left\{F(x_1, x_2, ...x_n) \mid g_j(x_1, x_2, ...x_n) \le 0,\, x_i \ge 0\right\}, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ – выпуклые функции n переменных.

Введем функцию Лагранжа (2), используя совокупность неопределенных множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Теорема Куна – Таккера: пусть существует вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ такой, что $x_i \ge 0$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$. Тогда для того, чтобы вектор $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ был оптимальным решением задачи (4), необходимо и достаточно, чтобы существовал неотрицательный m-мерный вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ такой, что

$$L(x^*, \lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x, \lambda^*) \quad \forall x \ge 0, \forall \lambda \ge 0. \tag{5}$$

Выражение (5) означает, что функция L в точке (x^*, λ^*) при фиксированном x^* имеет глобальный максимум в области $\lambda \ge 0$ при $\lambda = \lambda^*$, а при фиксированном λ^* она имеет глобальный минимум в области $x \ge 0$ при $x = x^*$. Экстремальная точка (x^*, λ^*) с такими свойствами называется ***седловой точкой***, а теорему Куна – Таккера часто называют ***теоремой о седловой точке***. Итак, задаче (4) минимизации $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствует задача нахождения седловой точки (минимаксная задача) для функции L, в которой из всех ограничений сохраняются только ограничения на знак.

Если $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются дифференцируемыми функциями, то условия теоремы Куна – Таккера записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} \ge 0, \\ x_i^* \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ x_i^* \ge 0, i = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} \le 0, \\ \lambda_j^* \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ \lambda_j^* \ge 0, j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{7}$$

Для точек, где $x_i > 0$, в точке минимума должно выполняться условие $\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*,\lambda^*} = 0$, а на границе области, где $x_i = 0$, отклонения от оптимальной точки возможны только в сторону увеличения x_i, при этом $\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*,\lambda^*} > 0$.

Аналогично по переменной λ для внутренних точек $(\lambda > 0)$ выполняется равенство нулю производной, а для граничных точек $(\lambda = 0)$ первая производная для случая максимума должна быть неположительной, т. е. $\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*,\lambda^*} < 0$.

Условия (6) и (7) эквивалентны (5), т. е. являются необходимыми и достаточными для оптимальности x^* в случае выпуклости $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и всех ограничений задачи. Если имеется в виду седловая точка с максимумом по x и минимумом по λ, то знаки неравенств в первых строчках систем (6) и (7) изменяются на противоположные.

3. Варианты заданий.

1) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 < 0$;

2) $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 < 0$;

3) $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad x^2 + y^2 + 10x - 4y + 12 < 0$;

4) $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 < 0$;

5) $z = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{57}{5}, \quad x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 < 0$;

6) $z = -\frac{5}{26}x - \frac{25}{26}y + \frac{145}{13}, \quad x^2 + y^2 + 4x + 12y + 14 < 0$;

7) $z = -\frac{25}{29}x - \frac{10}{29}y + \frac{275}{29}, \quad x^2 + y^2 + 8x - 6y - 4 < 0$;

8) $z = -\frac{25}{34}x - \frac{15}{34}y + \frac{190}{17}, \quad x^2 + y^2 - 12x + 8y + 18 < 0$;

9) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 < 0$;

10) $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 < 0$;

11) $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad x^2 + y^2 + 10x + 4y + 12 < 0$;

12) $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 < 0$;

13) $z=-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{57}{5}, \quad x^2+y^2+10x-8y+16<0$;

14) $z=-\frac{5}{26}x-\frac{25}{26}y+\frac{145}{13}, \quad x^2+y^2-4x+12y+14<0$;

15) $z=-\frac{25}{29}x-\frac{10}{29}y+\frac{275}{29}, \quad x^2+y^2+8x+6y-4<0$;

16) $z=-\frac{25}{34}x-\frac{15}{34}y+\frac{190}{17}, \quad x^2+y^2-12x-8y+18<0$;

17) $z=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+12, \quad x^2+y^2-4x+8y+10<0$;

18) $z=-\frac{10}{13}x-\frac{15}{13}y+\frac{105}{13}, \quad x^2+y^2+2x-4y-8<0$;

19) $z=-\frac{20}{17}x-\frac{5}{17}y+\frac{195}{17}, \quad x^2+y^2-10x-4y+12<0$;

20) $z=-x-\frac{1}{2}y+\frac{17}{2}, \quad x^2+y^2+6x+2y-10<0$;

21) $z=-\frac{25}{34}x-\frac{15}{34}y+\frac{190}{17}, \quad x^2+y^2-12x+8y+18<0$.

4. Контрольные вопросы

1. В чём состоит метод множителей Лагранжа?
2. Как формулируется теорема Куна-Таккера?