Лабораторная работа № 1.
Задача оптимального выбора. Параметрическая оптимизация.

Цель работы: изучение этапов формализации задач и построения оптимизационных моделей.

1. Теоретические сведения.

При решении различных задач важным является этап формализации задачи, когда составляется её математическая модель и выбирается критерий, по которому производится оптимизация.

В процессе проектирования обычно ставится задача определения наилучших, в некотором смысле, значений параметров или структуры объектов. Такая задача называется ***оптимизационной***. Если оптимизация связана с расчётом оптимальных значений параметров при заданной структуре объекта, то она называется ***параметрической оптимизацией***. Задача выбора оптимальной структуры является ***структурной оптимизацией***.

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется следующим образом: среди элементов $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, образующих множество допустимых значений D, найти такой элемент X^*, который заданной целевой функции $f(X)$ доставляет экстремальное значение $f(X^*)$.

Для того чтобы поставить задачу оптимизации, необходимо задать:

1) целевую функцию – отображение $f: D \to \mathbb{R}$;

2) критерий поиска – $\max$ или $\min$;

3) допустимое множество – множество $D=\left\{X \mid g_i(X) \le 0,\ i=\overline{1,m}\right\} \subset \mathbb{R}^n$, где $g_i(X)$ – заданные функции.

2. Постановка задачи.

Предприятие выпускает продукцию трёх видов: $П_1$, $П_2$ и $П_3$. При этом используется два вида ресурсов: P_1 и P_2. На производство единицы продукции $П_1$ требуется a_1 единиц ресурса P_1 и b_1 единиц ресурса P_2, на производство единицы продукции $П_2$ – a_2 и b_2 единиц тех же ресурсов, на производство единицы продукции $П_3$ – a_3 и b_3 единиц тех же ресурсов. Объём ресурсов P_1 и P_2 составляет соответственно c_1 и c_2 единиц. Прибыль от реализации единиц продукции $П_1$, $П_2$ и $П_3$ составляет соответственно d_1, d_2 и d_3 денежных единиц. Требуется составить математическую модель задачи по показателю эффективности – прибыли от реализации продукции.

3. Варианты заданий.

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	d_1	d_2	d_3
1	4	2	5	1	2	4	16	10	3	2	1
2	8	5	4	2	5	5	60	20	2	3	4
3	3	7	3	9	7	1	42	84	3	4	5
4	2	5	2	7	5	2	30	55	3	1	2
5	4	6	1	8	6	3	48	90	2	4	3
6	3	4	5	9	4	4	28	52	3	2	5
7	6	7	4	9	7	5	63	75	5	3	1
8	2	3	3	6	3	1	18	30	2	1	3
9	3	7	2	8	7	2	35	84	4	3	2
10	3	5	1	6	5	3	25	40	2	1	2
11	6	4	5	2	4	4	40	24	3	2	3
12	3	3	4	9	3	5	24	42	2	1	4
13	6	4	3	2	4	1	44	28	4	2	3
14	1	3	2	7	3	2	21	39	3	2	3
15	3	5	1	9	5	3	25	55	2	2	1
16	7	4	5	3	4	4	48	32	3	3	4
17	4	6	4	8	6	5	72	96	5	2	3
18	7	5	3	3	5	1	70	50	2	4	2
19	9	6	2	4	6	2	90	60	4	3	4
20	2	4	1	7	4	3	32	52	3	2	3
21	4	2	5	6	1	4	55	37	5	4	2

4. Контрольные вопросы.

1. Какая задача называется оптимизационной?
2. Какая оптимизация называется параметрической?
3. Что такое целевая функция?
4. Что такое множество допустимых значений?

Лабораторная работа № 2.
Аналитические и имитационные модели.

Цель работы: изучение этапов аппроксимации таблично заданной функции методом наименьших квадратов.

1. Теоретические сведения.

Одним из наиболее универсальных видов моделирования является математическое, которое ставит в соответствие моделируемому процессу систему математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания физической модели.

Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала. Математические модели в количественной форме с помощью логико-математических конструкций описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

По принципам построения математические модели разделяют на ***аналитические*** и ***имитационные***.

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей. Аналитическое представление подходит лишь для простых и сильно идеализированных задач и объектов, которые, как правило, имеют мало общего с реальной действительностью, но обладают высокой общностью. По мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему, что приводит к использованию имитационного моделирования.

В имитационном моделировании функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Имитационное моделирование позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса или системы в определенные моменты времени.

Одним из простых примеров математического моделирования является ***аппроксимация***, которая позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов.

Например, при обработке экспериментальных данных получен ряд значений переменных x и y, однако характер функциональной зависимости между ними остаётся неизвестным. Требуется по полученным данным найти аналитическое выражение зависимости y от x.

Пусть экспериментальные результаты представлены таблицей и имеется предположение, что график зависимости представляет собой параболу.

Запишем эмпирическую зависимость y от x, т.е. уравнение параболы

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Найдём коэффициенты a, b, c таким образом, чтобы

$$y_k \approx ax_k^2 + bx_k + c \quad \left(k = \overline{1, n}\right).$$

Возникают невязки (погрешности) $y_k - \left(ax_k^2 + bx_k + c\right)$. Рассмотрим квадраты невязок и сумму их квадратов

$$S(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)^2. \tag{2}$$

Подберём коэффициенты a, b, c так, чтобы сумма квадратов невязок оказалась минимальной, т.е. функция (2) приняла наименьшее значение. В этом состоит суть ***метода наименьших квадратов*** построения эмпирических формул.

Стационарную точку функции $S(a,b,c)$ найдём из необходимого условия экстремума:

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0, \\ S'_c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} 2\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)\cdot\left(-x_k^2\right) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} 2\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)\cdot\left(-x_k\right) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} 2\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)\cdot\left(-1\right) = 0. \end{cases}$$

Запишем последнюю систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^4 + b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\cdot x_k^2, \\ a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\cdot x_k, \\ a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + c\cdot n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k. \end{cases} \tag{3}$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (3), найдём стационарную точку (a,b,c), в которой функция (2) принимает наименьшее значение. Подставив найденные значения в (1), получим искомую эмпирическую формулу.

Замечание. Вычисление коэффициентов при a, b, c в системе (3) производят, как правило, в табличной форме.

2. Постановка задачи.

Заменить таблично заданную функцию многочленом второй степени. Выполнить рисунок таблично заданной функции и полученной функции.

3. Варианты заданий.

x_k	Значения $y_k = y(x_k)$									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0,1	6,72	4,67	4,25	6,27	5,85	5,52	5,59	4,92	5,01	6,35
0,2	6,25	4,49	3,56	6,29	5,36	5,36	4,89	4,96	4,49	6,21
0,3	6,06	4,92	3,15	6,91	5,15	5,79	4,46	5,59	4,26	6,66
0,4	6,01	4,84	2,88	7,04	5,08	5,75	4,17	5,75	4,17	6,64
0,5	6,05	4,96	2,73	7,36	5,12	5,89	3,97	6,09	4,17	6,86
0,6	6,12	4,86	2,55	7,46	5,15	5,81	3,77	6,21	4,22	6,74
0,7	5,87	5,13	2,08	7,93	4,88	6,13	3,31	6,72	3,91	7,05
0,8	5,86	4,96	1,85	7,96	4,85	5,95	3,06	6,75	3,86	6,92
0,9	6,04	4,82	1,81	8,02	5,01	5,83	2,99	6,83	4,04	6,82
1,0	5,84	4,96	1,39	8,36	4,79	5,99	2,56	7,19	3,76	7,05
1,1	6,19	5,14	1,52	8,74	5,12	6,19	2,67	7,59	4,07	7,22
1,2	6,19	4,67	1,33	8,47	5,08	5,74	2,43	7,34	4,03	6,79
1,3	6,13	4,93	1,02	8,93	5,02	6,02	2,13	7,82	3,93	7,09
1,4	6,37	4,64	1,04	8,84	5,24	5,75	2,13	7,75	4,13	6,84
1,5	6,64	4,63	1,09	9,03	5,49	5,76	2,16	7,96	4,36	6,87
1,6	6,97	4,72	1,27	9,32	5,82	5,87	2,25	8,27	4,65	7,09
1,7	6,85	4,19	0,86	8,99	5,66	5,36	1,89	7,96	4,49	6,51
1,8	7,36	3,92	1,15	8,88	6,15	5,09	2,16	7,89	4,96	6,26
1,9	7,44	3,71	1,01	8,91	6,21	4,92	2,01	7,92	5,03	6,11
2,0	7,86	3,42	0,99	9,02	6,59	4,67	1,94	8,07	5,34	5,87
2,1	8,39	2,91	1,32	8,71	7,11	4,18	2,23	7,78	5,83	5,43
2,2	8,52	2,63	1,21	8,65	7,21	3,89	2,12	7,69	5,92	5,16
2,3	8,72	2,44	1,19	8,64	7,39	3,75	2,08	7,75	6,08	5,04
2,4	9,24	1,86	1,49	8,26	7,89	3,19	2,36	7,39	6,56	4,52
2,5	9,64	1,79	1,87	8,39	8,47	3,14	2,72	7,54	7,12	4,47
2,6	9,83	1,33	1,64	8,13	8,44	2,71	2,47	7,34	7,07	4,05
2,7	9,59	0,77	2,18	7,77	9,18	2,16	2,99	6,96	7,79	3,53
2,8	9,84	0,47	2,21	7,67	9,41	1,88	3,08	6,88	8,02	3,27
2,9	9,41	0,17	2,56	7,57	9,96	1,61	3,33	6,76	8,53	3,01
3,0	9,99	4,67	4,25	6,27	5,85	5,52	5,63	4,92	5,09	6,35

x_k	Значения $y_k = y(x_k)$										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
0,1	6,97	3,55	4,17	7,16	8,36	2,16	3,36	7,95	9,77	0,75	2,57
0,2	6,24	3,61	3,64	7,04	7,61	2,24	2,81	7,85	9,06	0,85	2,05
0,3	5,79	4,26	3,39	7,51	7,14	2,91	2,54	8,34	8,51	1,54	1,71
0,4	5,48	4,44	3,28	7,51	6,81	3,11	2,41	8,36	8,16	1,76	1,56
0,5	5,26	4,78	3,26	7,69	6,57	3,49	2,37	8,56	7,93	2,16	1,51
0,6	5,07	4,94	3,27	7,65	6,36	3,65	2,36	8,54	7,67	2,34	1,47
0,7	4,56	5,45	2,96	7,98	5,83	4,18	2,03	8,89	7,12	2,89	1,12
0,8	4,29	5,52	2,89	7,87	5,54	4,27	1,94	8,81	6,81	3,03	1,01
0,9	4,21	5,62	3,01	7,79	5,44	4,39	2,04	8,74	6,69	3,14	1,09
1,0	3,75	6,05	2,75	7,99	4,96	4,79	1,76	8,96	6,19	3,56	0,79
1,1	3,84	6,42	3,04	8,23	5,03	5,23	2,03	9,22	6,24	4,02	1,04
1,2	3,58	6,19	2,98	7,82	4,75	5,02	1,95	8,83	5,94	3,83	0,94
1,3	3,26	6,69	2,86	8,14	4,41	5,54	1,81	9,17	5,58	4,37	0,78
1,4	3,24	6,64	3,04	7,91	4,37	5,51	1,97	8,96	5,52	4,36	0,92
1,5	3,25	6,87	3,25	7,96	4,36	5,76	2,16	9,03	5,49	4,63	1,09
1,6	3,32	7,25	3,52	8,11	4,41	6,11	2,41	9,20	5,52	5,02	1,32
1,7	2,94	6,91	3,34	7,64	4,01	5,84	2,21	8,75	5,13	4,75	1,11
1,8	3,19	6,86	3,79	7,41	4,24	5,81	2,64	8,54	5,31	4,74	1,51
1,9	3,01	6,91	3,81	7,28	4,04	5,88	2,64	8,43	5,09	4,83	1,49
2,0	2,91	7,10	4,11	7,11	3,90	6,11	2,90	8,30	4,91	5,10	1,71
2,1	3,18	6,83	4,58	6,76	4,15	5,86	3,35	7,87	5,14	4,87	2,14
2,2	3,05	6,76	4,65	6,41	4,04	5,81	3,41	7,64	4,97	4,84	2,17
2,3	2,99	6,84	4,79	6,31	3,92	5,91	3,52	7,56	4,87	4,96	2,27
2,4	3,25	6,54	5,25	5,79	4,16	5,59	3,96	7,06	5,09	4,66	2,69
2,5	3,59	6,67	5,79	5,78	4,48	5,78	4,48	7,07	5,39	4,87	3,19
2,6	3,32	6,45	5,72	5,38	4,19	5,58	4,39	6,69	5,08	4,69	3,08
2,7	3,82	6,13	6,42	4,88	4,67	5,28	5,07	6,21	5,54	4,41	3,74
2,8	3,81	6,07	6,61	4,64	4,64	5,24	5,24	5,99	5,49	4,39	3,89
2,9	4,12	6,01	7,12	4,32	4,93	5,15	5,73	5,77	5,76	4,37	4,36
3,0	6,97	3,55	4,17	7,16	8,36	2,16	3,36	7,95	9,77	0,75	2,57

4. Контрольные вопросы.

1. Что такое математическое моделирование?
2. Какие модели называют аналитическими?
3. Какие модели называют имитационными?
4. В чём состоит метод наименьших квадратов?
5. Как найти параметры функции в методе наименьших квадратов?

Лабораторная работа № 3.
Законы распределения случайных величин.

***Цель работы*:** изучение этапов статистической обработки данных эксперимента и установления закона распределения случайной величины.

1. Теоретические сведения.

Пусть требуется изучить данную совокупность объектов относительно некоторого признака. Каждый такой признак (или их комбинации) образует случайную величину, за которой производятся наблюдения.

Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом, называется ***генеральной совокупностью***. Совокупность объектов, случайным образом отобранных из генеральной совокупности, называется ***выборочной совокупностью*** (или ***выборкой***). Число объектов в генеральной или выборочной совокупности называется её ***объёмом***.

Пусть по генеральной совокупности изучается случайная величина X. С этой целью из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n. Расположение значений случайной величины X по неубыванию называется ***ранжированием статистических данных***. Полученная таким образом последовательность значений называется ***дискретным вариационным рядом***.

Предположим, что случайная величина X приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз – значение x_2, …, n_k раз – значение x_k; при этом $n_1+n_2+...+n_k=n$. Значения x_1, x_2, …, x_k называются ***вариантами***. Числа n_1, n_2, …, n_k, показывающие, сколько раз встречаются соответствующие им варианты, называются ***частотами***, а числа $\omega_i=\frac{n_i}{n}$ – ***относительными частотами***.

Перечень вариант и соответствующих им частот называется ***статистическим распределением выборки по частотам*** или ***статистическим рядом***. Статистическое распределение записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит варианты, а вторая – соответствующие им частоты.

Распределение выборки, задаваемое статистическим рядом, называется ***эмпирическим распределением случайной величины*** X.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,n_1), (x_2,n_2), ... , (x_k,n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Затем точки (x_i,n_i) последовательно соединяют отрезками прямых.

Полигон частот можно использовать для подбора модели распределения изучаемой случайной величины X.

Эмпирической функцией распределения называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Эмпирическую функцию распределения удобно находить в виде $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n – объём выборки, n_x – число наблюдений, меньших $x \in \mathbb{R}$.

Если X – дискретная случайная величина, то $F^*(x)$ – ступенчатая функция; её скачки соответствуют наблюдаемым значениям и равны относительным частотам этих значений:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ \omega_1, & x_1 < x \le x_2; \\ \omega_1 + \omega_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, & x_3 < x \le x_4; \\ \ldots \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_k = 1, & x > x_k. \end{cases}$$

Несмещённой и состоятельной точечной оценкой математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности является ***выборочная средняя*** $\overline{x}_B$, которая вычисляется по формуле:

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n} \cdot \left(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i.$$

Несмещённой и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$ генеральной совокупности является ***исправленная выборочная дисперсия*** S^2, которая вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_B \right)^2 n_i.$$

2. Постановка задачи.

В результате проведения эксперимента получена выборка с числовыми данными. По данному статистическому материалу необходимо:

– составить дискретный статистический ряд распределения частот;

– построить полигон частот;

– построить эмпирическую функцию распределения и её график;

– найти несмещённые и состоятельные точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности;

– на основании полученных результатов выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности.

3. Варианты заданий.

Для формирования выборки выбрать из таблицы указанные строки:

1) строки 1 – 20;
2) строки 3 – 22;
3) строки 5 – 24;
4) строки 7 – 26;
5) строки 9 – 28;
6) строки 11 – 30;
7) строки 13 – 32;
8) строки 15 – 34;
9) строки 17 – 36;
10) строки 19 – 38;
11) строки 21 – 40;
12) строки 23 – 42;
13) строки 25 – 44;
14) строки 27 – 46;
15) строки 29 – 48;
16) строки 31 – 50;
17) строки 33 – 52;
18) строки 35 – 54;
19) строки 37 – 56;
20) строки 39 – 58;
21) строки 41 – 60.

№	**Экспериментальные данные**														
1	69	52	62	75	72	60	66	69	57	61	65	58	56	65	70
2	70	65	73	54	53	75	73	64	54	51	74	52	58	58	60
3	74	51	62	61	51	59	70	66	53	51	51	67	58	57	57
4	53	52	71	51	55	74	75	52	62	53	53	61	54	60	68
5	64	59	69	51	69	69	59	63	59	61	64	60	53	72	67
6	59	74	68	55	74	73	53	74	75	64	51	52	74	55	62
7	67	69	70	61	69	63	54	52	51	63	63	64	73	65	61
8	64	73	59	57	52	58	55	54	56	54	68	57	56	67	62
9	67	59	55	62	69	73	75	73	75	75	61	62	64	58	51
10	74	72	74	58	53	51	66	58	54	72	61	72	54	67	64
11	65	58	72	69	70	66	66	69	63	65	69	74	52	58	56
12	52	57	52	51	65	55	51	55	62	55	52	73	51	55	64
13	64	69	72	61	62	67	51	53	60	64	68	54	62	69	62
14	68	71	68	70	71	57	75	72	62	62	51	63	59	51	67
15	73	65	60	70	51	72	61	52	75	71	66	68	75	52	62
16	61	70	57	53	64	53	59	64	74	71	75	74	58	59	75
17	74	56	65	58	75	65	55	61	66	54	56	56	71	55	58
18	57	65	53	64	68	67	67	52	55	66	72	54	65	54	63
19	64	52	68	53	60	68	68	65	53	59	68	59	64	64	63
20	72	71	53	74	60	70	66	52	72	70	67	68	74	56	71
21	61	70	73	54	73	58	71	65	72	74	73	65	57	62	53
22	70	59	74	73	58	58	68	73	60	64	67	51	56	66	57
23	52	51	51	75	54	73	57	75	63	53	73	61	67	55	72
24	70	74	55	69	71	62	52	63	60	61	52	51	61	57	67
25	67	59	67	68	59	71	66	66	70	53	69	68	63	60	72
26	60	55	71	65	73	66	51	74	54	61	59	55	61	70	62
27	53	62	71	69	54	54	65	69	70	60	72	63	53	60	73
28	74	69	52	70	58	75	61	59	73	64	69	57	69	55	52

№	Экспериментальные данные														
29	56	57	63	51	51	67	55	65	61	74	75	57	61	52	66
30	58	51	59	60	70	67	59	56	75	57	69	68	64	63	73
31	65	68	54	53	69	55	69	74	70	54	72	69	60	58	71
32	51	66	71	60	51	66	51	60	71	51	67	65	69	55	53
33	66	70	70	70	72	64	74	66	62	68	69	58	62	54	66
34	58	54	57	53	64	57	69	64	66	65	64	57	55	57	62
35	57	73	57	51	67	53	65	66	68	51	58	62	59	70	65
36	74	52	69	55	55	57	62	74	71	53	63	59	59	67	66
37	71	73	63	52	74	55	55	63	70	73	63	53	59	71	72
38	74	70	74	67	75	53	74	61	51	69	64	64	53	72	55
39	69	68	53	57	69	52	61	74	65	55	71	53	57	54	74
40	54	53	68	52	70	68	54	68	54	55	62	67	68	65	64
41	73	59	56	51	65	75	52	51	73	66	55	68	68	62	72
42	66	65	75	59	66	69	51	70	62	54	74	74	70	67	64
43	58	64	72	64	64	62	63	66	62	61	56	67	54	74	53
44	51	64	68	75	73	58	69	73	53	55	52	52	54	71	68
45	67	54	56	64	68	70	75	56	60	61	66	66	52	69	64
46	55	70	53	72	69	75	55	62	72	57	67	74	58	70	69
47	51	62	73	56	75	65	51	74	71	61	59	61	51	61	55
48	64	65	74	66	62	68	66	66	55	62	72	71	60	55	66
49	54	55	52	52	61	51	67	61	74	62	71	58	73	72	69
50	52	60	58	51	51	69	68	66	60	72	53	56	67	63	61
51	58	67	65	59	68	51	59	60	62	58	71	58	65	68	54
52	58	70	63	66	70	63	60	62	54	69	59	56	75	51	68
53	60	58	59	75	66	52	75	75	61	61	57	56	69	71	74
54	72	54	68	59	70	63	72	54	74	51	72	57	56	71	57
55	74	56	65	57	55	55	59	55	54	69	66	61	75	59	56
56	73	55	60	66	64	54	54	61	57	52	61	54	59	67	75
57	66	65	56	55	72	60	60	55	65	63	73	56	73	72	65
58	54	70	70	64	61	58	68	64	69	75	66	55	53	75	71
59	53	65	60	58	70	56	68	54	60	57	67	58	63	65	55
60	52	69	74	71	58	60	54	75	73	73	74	64	52	52	63

4. Контрольные вопросы.

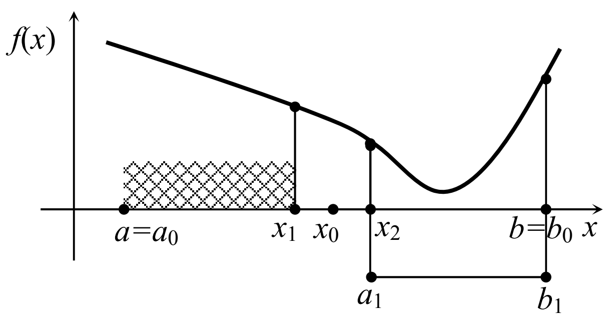
1. Что называется генеральной и выборочной совокупностями?
2. Что называется статистическим рядом?
3. Как построить полигон частот?
4. Что называется эмпирической функцией распределения?

Лабораторная работа № 4.
Линейный поиск.

Цель работы: изучение методов одномерной оптимизации.

1. Теоретические сведения.

Пусть на интервале $[a,b]$ функция $y = f(x)$ имеет единственный экстремум, причём слева и справа от экстремума она либо строго убывающая, либо строго возрастающая. Требуется с заданной точностью ε на отрезке $[a,b]$ найти экстремум функции $f(x)$. Такая задача называется ***оптимизацией функции***, а поиск минимума функции называется её ***минимизацией***.



Простейшим методом одномерной безусловной оптимизации функций является ***метод дихотомии***. Он является методом прямого поиска, в котором при поиске экстремума целевой функции используются только вычисленные значения целевой функции.

Алгоритм метода дихотомии.

1. Находим координату центра интервала неопределённости $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

2. Находим точки, равноотстоящие от x_0 на $\dfrac{\varepsilon}{2}$: $x_1 = x_0 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $x_2 = x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3. Находим значения функции в точках x_1 и x_2: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$.

4. Пусть $y_1 > y_2$. Отбрасываем часть отрезка левее x_2, т.к. там минимума нет, т.е. рассматриваем интервал от $a_1 = x_2$ до $b_1 = b_0$.

5. Повторяем процесс, пока длина интервала $[a_n, b_n]$ больше 2ε.

6. В качестве результата берётся значение $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$.

Ещё одним простым методом одномерной безусловной оптимизации функций является ***метод Фибоначчи***. Он относится к симметричным методам, в которых на каждом шаге используются данные, полученные ранее. При этом вычисляется значение целевой функции в двух точках x_1 и x_2, симметричных относительно середины отрезка $[a,b]$. Далее выбирается один из отрезков $[a,x_2]$ и $[x_1,b]$, содержащий вторую точку. Для выбора точки x_1 используются числа Фибоначчи: F_0, F_1, F_2, $F_3,\ldots$, где $F_0 = F_1 = 1$, $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ $(i = 2,3,\ldots)$.

Точка x_1 определяется из соотношения $\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{F_{N-2}}{F_N}$, где количество чисел N задаётся заранее. Отсюда получаем $x_1 = a + (b-a)\cdot\frac{F_{N-2}}{F_N}$. Точка x_1 делит отрезок $[a,b]$ на две неравные части, при этом отношение меньшей части к большей равно $\frac{F_{N-2}}{F_{N-1}}$.

Из условия симметричности точек x_1 и x_2 получаем $x_2 = b - (b-a)\cdot\frac{F_{N-2}}{F_N} = a + (b-a)\cdot\frac{F_{N-1}}{F_N}$ и $x_1 < x_2$. После сравнения значений $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ остаётся отрезок $[a,x_2]$ с внутренней точкой x_1 или отрезок $[x_1,b]$ с внутренней точкой x_2. Причём эта точка делит новый отрезок на такие части, что отношение меньшей части к большей равно $\frac{F_{N-3}}{F_{N-2}}$.

Таким образом, остающаяся точка каждый раз делит отрезок на части в пропорциях, определяемых числами Фибоначчи. На k-м шаге это отношение есть $\frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k}}$, а длины меньшей и большей частей соответственно равны $l_k = \frac{F_{N-k-1}}{F_N}\cdot(b-a)$ и $L_k = \frac{F_{N-k}}{F_N}\cdot(b-a)$.

Алгоритм метода Фибоначчи.

1. Задаём количество N чисел и малое положительное число ε.
2. Вычисляем числа Фибоначчи F_0, $F_1,\ldots,F_N$.
3. Вычисляем $x_1 = a + (b-a)\cdot\frac{F_{N-2}}{F_N}$, $x_2 = a + (b-a)\cdot\frac{F_{N-1}}{F_N}$, а затем $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.
4. Если $y_1 \le y_2$, то полагаем $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ и находим $x_1 = a + b - x_2$, $y_1 = f(x_1)$. Если же $y_1 > y_2$, то полагаем $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и находим $x_2 = a + b - x_1$, $y_2 = f(x_2)$.

Повторяем 4-й шаг $(N-3)$ раз.

5. Если $y_1 < y_2$, то полагаем $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, иначе $a = x_1$.
6. Вычисляем $x_1 = x_2 - \varepsilon$, $y_1 = f(x_1)$.
7. Находим итоговый отрезок: если $y_1 < y_2$, то $b = x_2$, иначе $a = x_1$.
8. Вычисляем $x_{\min} = \dfrac{a+b}{2}$ и $y_{\min} = f(x_{\min})$.

2. Постановка задачи.

Найти минимум функции $y = f(x)$ на заданном отрезке $[a,b]$ методом дихотомии с точностью $\varepsilon = 0,01$ и методом Фибоначчи при $N = 30$.

3 Варианты заданий.

1) $y = 0,95x^2 - 5,225x + 9,36$, $[1;6]$;
2) $y = 0,55x^2 - 3,421x + 6,87$, $[2;7]$;
3) $y = 0,22x^2 - 0,995x + 5,06$, $[1;6]$;
4) $y = 0,79x^2 - 4,661x + 9,88$, $[1;6]$;
5) $y = 0,25x^2 - 1,365x + 5,30$, $[1;6]$;
6) $y = 0,27x^2 - 0,945x + 7,65$, $[0;5]$;
7) $y = 0,85x^2 - 4,148x + 7,71$, $[1;6]$;
8) $y = 2,24x^2 - 7,392x + 8,96$, $[0;5]$;
9) $y = 1,17x^2 - 6,435x + 10,73$, $[1;6]$;
10) $y = 1,36x^2 - 4,488x + 5,82$, $[0;5]$;
11) $y = 0,98x^2 - 5,782x + 10,68$, $[1;6]$;
12) $y = 2,48x^2 - 9,176x + 11,68$, $[0;5]$;
13) $y = 0,53x^2 - 3,763x + 10,13$, $[2;7]$;
14) $y = 2,35x^2 - 5,875x + 4,67$, $[0;5]$;
15) $y = 0,29x^2 - 1,305x + 2,52$, $[1;6]$;
16) $y = 0,22x^2 - 1,474x + 5,79$, $[2;7]$;
17) $y = 0,45x^2 - 4,995x + 15,08$, $[3;8]$;
18) $y = 0,13x^2 - 0,559x + 1,56$, $[1;6]$;
19) $y = 0,44x^2 - 2,772x + 5,17$, $[1;6]$;
20) $y = 0,96x^2 - 6,432x + 12,18$, $[2;7]$;
21) $y = 1,85x^2 - 6,549x + 6,68$, $[0;5]$.

4. Контрольные вопросы.

1. Что такое минимизация функции?
2. Каким условиям должна удовлетворять минимизируемая функция?
3. В чём заключается метод дихотомии?
4. В чём заключается метод Фибоначчи?