МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» дневной и заочной форм обучения

Часть 2



УДК 004:531 ББК 32.973.202:22.21 К63

Рекомендовано к изданию учебно-методическим отделом Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «24» октября 2022 г., протокол № 4

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский; ассистент А. Н. Юманова

Рецензент О. В. Благодарная

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Компьютерное моделирование и инженерный анализ» для студентов специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» дневной и заочной форм обучения к выполнению лабораторных работ.

Учебно-методическое издание

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Ответственный за выпуск Д. И. Якубович

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60×84 /16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение: Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/156 от 07.03.2019. Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский университет, 2023

Содержание

1.3 Анализ напряженно-деформированного состояния балки посредством использования конечно-элементного подхода	1 Расчет балки на изгиб	5
1.2 Построение конечно-элементной модели балки при статическом нагружении на изгиб	1.1 Создание твердотельной модели балки, при необходимости	
1.2 Построение конечно-элементной модели балки при статическом нагружении на изгиб	сборки, работающей на изгиб	5
1.3 Анализ напряженно-деформированного состояния балки посредством использования конечно-элементного подхода	1.2 Построение конечно-элементной модели балки при статическом	
1.4 Проведения расчета рассматриваемой балки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов»	нагружении на изгиб	12
1.4 Проведения расчета рассматриваемой балки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов»	1.3 Анализ напряженно-деформированного состояния балки	
1.4 Проведения расчета рассматриваемой балки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов»	посредством использования конечно-элементного подхода	17
1.5 Осуществление сопоставительного анализа балки, выполненного с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов	1.4 Проведения расчета рассматриваемой балки с использованием	
использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов	подходов курса «Сопротивление материалов»	23
конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов	1.5 Осуществление сопоставительного анализа балки, выполненного с	
конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов	использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом	
выполненных расчетов	конечных элементов, при необходимости провести корректировку	
напряженно-деформированного анализа балки, подверженной нагружению на изгиб		2
напряженно-деформированного анализа балки, подверженной нагружению на изгиб		
на изгиб		
3 Сопоставительный анализ стойки на устойчивость		2
модели стойки при анализе на устойчивость	3 Сопоставительный анализ стойки на устойчивость	2
3.2 Проведение расчета при определении запаса устойчивости стойки с использованием МКЭ	3.1 Создание твердотельной модели и построение конечно-элементной	
использованием МКЭ	<u>-</u>	2
использованием МКЭ		
использованием подходов курса «Сопротивление материалов»		2
использованием подходов курса «Сопротивление материалов»	3.3 Выполнение расчета по определению запаса устойчивости стойки с	
3.4 Осуществление сопоставительного анализа результатов расчетов стойки, выполненных с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов		2
материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов	3.4 Осуществление сопоставительного анализа результатов расчетов	
корректировку выполненных расчетов	стойки, выполненных с использованием подходов курса «Сопротивление	
4 Оформление отчета о проведенном сопоставительном анализе стойки на устойчивость с использованием обоих подходов	материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести	
на устойчивость с использованием обоих подходов. 5 Сопоставительный анализ балки, подверженной удару падающим грузом. 5.1 Формирование твердотельной модели балки, подверженной удару падающим грузом. 5.2 Построение конечно-элементной модели расчета балки при ударе падающим грузом. 5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно-деформированного состояния балки при ударе падающим грузом. 5.4 Расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с	корректировку выполненных расчетов	3
5 Сопоставительный анализ балки, подверженной удару падающим грузом. 5.1 Формирование твердотельной модели балки, подверженной удару падающим грузом. 5.2 Построение конечно-элементной модели расчета балки при ударе падающим грузом. 5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно-деформированного состояния балки при ударе падающим грузом	4 Оформление отчета о проведенном сопоставительном анализе стойки	
грузом. 5.1 Формирование твердотельной модели балки, подверженной удару падающим грузом. 5.2 Построение конечно-элементной модели расчета балки при ударе падающим грузом. 5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно-деформированного состояния балки при ударе падающим грузом. 5.4 Расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с	на устойчивость с использованием обоих подходов	3
5.1 Формирование твердотельной модели балки, подверженной удару падающим грузом	5 Сопоставительный анализ балки, подверженной удару падающим	
падающим грузом	грузом	3
5.2 Построение конечно-элементной модели расчета балки при ударе падающим грузом 3 5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно- деформированного состояния балки при ударе падающим грузом 4 5.4 Расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с 5	5.1 Формирование твердотельной модели балки, подверженной удару	
5.2 Построение конечно-элементной модели расчета балки при ударе падающим грузом 3 5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно- деформированного состояния балки при ударе падающим грузом 4 5.4 Расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с 5		3
5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно- деформированного состояния балки при ударе падающим грузом		
5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно- деформированного состояния балки при ударе падающим грузом		3
деформированного состояния балки при ударе падающим грузом		
5.4 Расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с	•	4
	использованием подходов курса «Сопротивление материалов»	4

5.5 Проведение сопоставительного анализа результатов расчета балки	
при ударе падающим грузом, выполненных с использованием подходов	
курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при	
необходимости провести корректировку выполненных расчетов	47
6 Оформление отчета о проведенном сопоставительном анализе балки,	
подверженной удару падающим грузом с использованием обоих подходов	48
Список литературы	48

1 Расчет балки на изгиб

1.1 Создание твердотельной модели балки, при необходимости сборки, работающей на изгиб

Цель работы: создание твердотельной модели балки, при необходимости сборки, работающей на изгиб.

По одной из схем нагружения и закрепления балок, приведенных в таблице 1.1, а также учитывая, что поперечное сечение имеет форму, представленную в таблице 1.2, необходимо:

- 1) построить твердотельную модель данного изделия;
- 2) произвести препроцессорную подготовку конечно-элементной модели объекта анализа;
- 3) осуществить расчет созданной модели. При необходимости провести корректировку модели;
 - 4) выполнить постпроцессорное обследование результатов расчета.

Таблица 1.1 – Схемы нагружения и закрепления балок

Номер	Схема нагружения балки	Изгибающий	Прогиб
схемы	Слема пагружения балки	момент	в пролете
0	$ \begin{array}{c c} Fab^{2} \\ \hline l \\ \hline F \\ \hline I \\ \hline I \\ I \\$	Максимальное значение изгибающего момента M_{max} определить из эпюры моментов для конкретных значений нагрузки и места ее приложения	_
1	R_A R_B θ_A θ_B θ_B θ_B	$M_{\max} = \frac{Fab}{l}$ при $z = a$	$w_{\max} = -\frac{Fa^2b^2}{3EJ_xl}$ при $z = a$
2	R_A Q R_A Q	$M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8}$ при $z = \frac{l}{2}$	$w_{\text{max}} = -\frac{5ql^4}{384EJ_x}$ при $z = \frac{l}{2}$
3	Q Q Q Q Q Q Q Q Q Q	$M_{\text{max}} = \frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{l} \right)^2$ при $z = \frac{a}{2} \left(2 - \frac{a}{l} \right)$	

Окончание таблицы 1.1

Номер схемы	Схема нагружения балки	Изгибающий момент	Прогиб в пролете
4	V_{max} 0,519 l R_{R} R_{R} R_{B} Z	$M_{\rm max} = 0.064 q l^2$ при $z = 0.577 l$	$w_{\text{max}} = -0,00652 \frac{ql^4}{EJ_x}$ при $z = 0,519l$
5	R_A θ_A M_B R_B A A B B A	$M_{1} = -\frac{M_{o}a}{l};$ $M_{2} = \frac{M_{o}b}{l}$	$w = \frac{M_o \ell^2}{3EJ_x} \times \left(3\frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - 2\frac{a^3}{l^3}\right)$ при $z = a$
6	$\frac{1}{8}ql^{2}$ $\frac{5}{8}ql$ $\frac{3}{8}ql$	$M = \frac{9}{128}ql^2$ при $z = l - \frac{3}{8}l$	-
7	Fab(l+b) F I	Максимальное значение изгибающего момента M_{max} определить из эпюры моментов для конкретных значений нагрузки и места ее приложения	_
8	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{12}$ при $z = 0, z = l$	_
9	$ \begin{array}{c c} \hline Fl \\ \hline 8 \\ \hline F/2 \end{array} $ $ \begin{array}{c c} \hline Fl \\ \hline 8 \\ \hline F/2 \end{array} $ $ \begin{array}{c c} \hline Fl \\ \hline 8 \\ \hline F/2 \end{array} $	$M_{\max} = \frac{Fl}{8}$ при $z = 0$, $z = \frac{l}{2}$, $z = l$	_

Таблица 1.2 – Формы поперечных сечений и их геометрические характеристики

_		
Номер	Форма поперечного сечения	Геометрические характеристики
схемы		поперечного сечения
0	Прямоугольник с центральным отверстием	Моменты сопротивления W_x и W_y
	\mathcal{Y}_1 $\stackrel{\blacktriangle}{}$ ${}$	$J_{x} = \frac{bh^{3}}{12} - \frac{\pi d^{4}}{64};$
	↑ ↑	
	\sim a	$u = (bh^3 - \pi d^4)2$
	∠	$W_{x} = \left(\frac{bh^{3}}{12} - \frac{\pi d^{4}}{64}\right) \frac{2}{h};$
	λ^{\pm}	` ′
		$W_{y} = \left(\frac{hb^{3}}{12} - \frac{\pi d^{4}}{64}\right) \frac{2}{b}$
	x_n x_n	(12 64) b
	b	
1	Симметричный двутавр, составленный	Моменты сопротивления W_x и W_y
	из прямоугольников	$J_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12}; J_y = \frac{hb_1^3 + 2h_1B^3}{12};$
	<i>y</i> • ↓	$J_x = \frac{12}{12}$; $J_y = \frac{12}{12}$;
		$BH^3 - 2hh^3$ $hh^3 + 2hR^3$
	\rightarrow \downarrow b_1 \uparrow \sim	$W_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{6H}$; $W_y = \frac{hb_1^3 + 2h_1B^3}{6B}$
	<i>b</i> − 1 c − − − 1 →	OII OD
	<u> </u>	
	X_n	
2	Симметричный тавр, составленный	Моменты сопротивления W_x и W_y
	из прямоугольников	$A = (B - b) \cdot d + b \cdot h;$
	V.♠	,
	B B	$y_{_{\theta}} = \frac{(B-b)\frac{d^{2}}{2} + b\frac{h^{2}}{2}}{(B-b)d + bh};$
	X_n X_n	$v = \frac{(2 - 3)^2 + 3^2}{2}$:
	'B	(B-b)d+bh
	i	$d^3 hh^3$
	_ 	$J_{x} = (B-b)\frac{d^{3}}{3} + \frac{bh^{3}}{3} - Ay_{e}^{2};$
		5 5
	↓ : 	$W_{x,H} = \frac{J_x}{h - y_e}; W_{x,e} = \frac{J_x}{y_e};$
		- 0
		$J_{min} = J_y = \frac{(h-d)b^3}{12} + \frac{db^3}{12}$
		$J_{min} = J_y = \frac{12}{12} + \frac{12}{12}$
3	Прямоугольник	Моменты сопротивления W_x и W_y
	$y_1 \star y_{\bullet}$	•
		$J_x = \frac{bh^3}{12}; \ J_y = \frac{hb^3}{12};$
	1 1	12 12
		$W_{x} = \frac{bh^{2}}{6}$; $W_{y} = \frac{hb^{2}}{6}$
	<u>√</u> √	6 6
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left \right x$	
	x_n x_n x_1	
	$x_n : x_n$	
	<u> </u>	

Продолжение таблицы 1.2

Номер	Форма поперечного сечения	Геометрические характеристики
схемы	•	поперечного сечения
4	Полый прямоугольник y b_1 x_n b_2 x_n b_3 x_n	Моменты сопротивления W_x и W_y $J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1b_1^3}{12};$ $W_x = \frac{1}{6} \left(bh^2 - \frac{b_1h_1^3}{h} \right);$ $W_y = \frac{1}{6} \left(hb^2 - \frac{h_1b_1^3}{b} \right)$
5	Равнобедренная трапеция	Момент сопротивления $W_{x,\mu}$ и $W_{y,e}$
	b_{6}	$J_{x} = \frac{h^{3} \left(b_{H}^{2} + 4b_{H}b_{g} + b_{g}^{2}\right)}{36 \left(b_{g} + b_{H}\right)};$
	b_H	$W_{x,H} = \frac{J_x}{y_H}; W_{x,e} = \frac{J_x}{y_e};$ $y_e = \frac{2b_H + b_e}{3(b_H + b_e)}h$
	<i>□ H □ H</i>	
6	Круг со срезанными сегментами сверху и снизу	Моменты сопротивления W_x и W_y $J_x = 0.0395d^4$; $J_y = 0.0485d^4$;
	$\begin{array}{c c} & & & \\ & & & &$	$W_x = 0.088d^3; W_y = 0.097d^3$
7	Круг со срезанным сегментом сверху y $d/2$ x	Момент сопротивления W_x $J_x \approx 0.044 d^4;$ $W_x \approx 0.092 d^3$
	0,933 C	

Окончание таблицы 1.2

Номер схемы	Форма поперечного сечения	Геометрические характеристики поперечного сечения
8	Круг со срезанными сегментами с четырех сторон у	Моменты сопротивления W_x и W_y $J_x = J_y = 0.038d^4$; $W_x = W_y = 0.087d^3$
9	Квадрат с центральным отверстием y_1 y x_1 x_2 x_3 x_4 $x_$	Моменты сопротивления W_x и W_y $J_x = J_y = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64};$ $W_x = W_y = \left(\frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64}\right) \frac{2}{a}$

Исходные данные к проведению численного анализа взять из таблиц 1.1–1.3 (по трем последним цифрам номера зачетной книжки).

Процесс конечно-элементного анализа балки, подверженной поперечному изгибу, полностью аналогичен тому, который был рассмотрен в случае расчета ступенчатого бруса.

Следует отметить, что приведенные в таблице 1.1 сведения о распределении эпюр изгибающих моментов и формулы для определения максимальных изгибающих моментов $M_{\rm max}$, а также значений максимальных прогибов $w_{\rm max}$ приведены для проведения последующего сопоставительного анализа.

В таблице 1.2 приведены формулы для определения моментов сопротивления W_x и осевых моментов J_x , необходимых в последующем для проведения сопоставительного анализа при определении максимальных нормальных напряжений и максимальных прогибов балки (если эти сведения приведены в таблице для данного поперечного сечения). Во всех вариантах анализа предполагается, что для материала балки модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Исходные данные к конечно-элементному анализу балки приведены в таблице 1.3 аналогично тому, как это делалось в [8, таблица 4.1].

Таблица 1.3 – Исходные данные для анализа поперечного изгиба балки

	Расчетная							
Номер	схема балки	l,	<i>a</i> ,	b,	F,	M,	q,	Номер схемы поперечного сечения
строки	(см. табли-	M	M	M	кН	кН·м	кН/м	по таблице 1.2 и его размеры
	цу 1.1)							
0	0	3,0	2,0	1	3,9	5,9	1,1	<u>№</u> 0
								(h = 0.13 m; b = 0.08 m; d = 0.06 m)
1	1	2,1	1,1	1	3	5,0	2	№ 1
								(H = 0.1 м; B = 0.05 м; h = 0.09 м;
								b = 0.02 m
2	2	2,2	1,2	1	3,1	5,1	1,9	№ 2
								(h = 0.12 м; B = 0.06 м; d = 0.006 м;
								b = 0.01 m
3	3	2,3	1,3	1	3,2	5,2	1,8	№ 3
								(h = 0.11 m; b = 0.055 m)
4	4	2,4	1,4	1	3,3	5,3	1,7	№ 4
								$(h = 0.12 \text{ м}; b = 0.06 \text{ м}; h_I = 0.11 \text{ м};$
								$b_I = 0.05 \text{ M}$
5	<u>5</u>	2,5	1,5	1	3,4	5,4	1,6	№ 5
								$(h = 0.13 \text{ m}; b_{H} = 0.2 \text{ m}; b_{g} = 0.1 \text{ m})$
6	6	2,6	1,6	1	3,5	5,5	1,5	№ 6
								(h = 0.866d; d = 0.15 m; b = d/2)
7	7	2,7	1,7	1	3,6	5,6	1,4	№ 7
								(d = 0.12 M)
8	8	2,8	1,8	1	3,7	5,7	1,3	№ 8
								(d = 0.1299 m; h = 0.1 m)
9	9	2,9	1,9	1	3,8	5,8	1,2	№ 9
								(a = 0.11 m; d = 0.08 m)
	a	a	a	a	В	В	В	б

На первом этапе в оболочке SolidWorks создается твердотельная модель исследуемого объекта. При этом, как правило, выполняются операции создания эскиза (например, прямоугольного поперечного сечения рассматриваемого стержня) (рисунок 1.1), а затем создается непосредственно твердотельная модель изделия (в данном случае посредством операции «вытянутая бобышка / основание») (рисунок 1.2). На основании использования средств SolidWorks могут быть также заданы механические свойства материала, из которого изготовлен исследуемый объект. В базе данных этого программного продукта имеется обширная библиотека механических свойств различных материалов.

В рассматриваемом примере в качестве материала детали выбрана «простая углеродистая сталь» (см. рисунок 1.2).

Следует иметь в виду, что в оболочке COSMOSWorks (Simulation) также присутствует возможность задания механических свойств материала, в том числе и уникальных, зависимых от различных параметров, например, температуры.

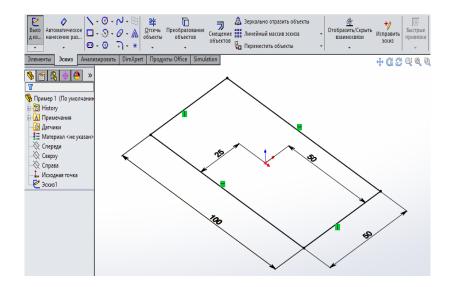


Рисунок 1.1 – Эскиз прямоугольного поперечного сечения стержня размером 100×50 мм

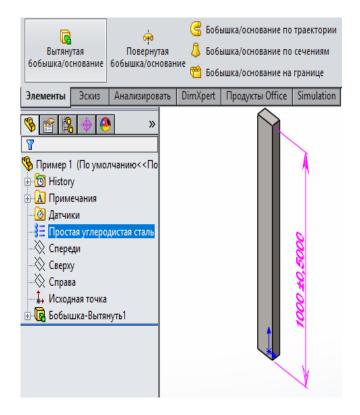


Рисунок 1.2 — Твердотельная модель стержня, длина которого составляет 1000 мм, состоящего из материала «простая углеродистая сталь»

Контрольные вопросы

- 1 Какая последовательность при построении твердотельной модели данного изделия?
- 2 Как задать механические свойства материала в среде SolidWorks, из которого изготовлен исследуемый объект?

1.2 Построение конечно-элементной модели балки при статическом нагружении на изгиб

Цель работы: построение конечно-элементной модели балки при статическом нагружении на изгиб.

После создания твердотельной модели объекта активизируется оболочка Simulation, при этом в контекстном меню предлагается выбрать тип проводимого исследования (в приведенном примере (рисунок 1.3) выбран «статический анализ»).

Вслед за выполнением этой операции слева на экране под менеджером оболочки SolidWorks появляется менеджер проекта Simulation (рисунок 1.4).

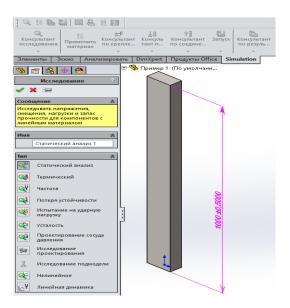


Рисунок 1.3 – Выбор типа анализа для проведения исследования изделия

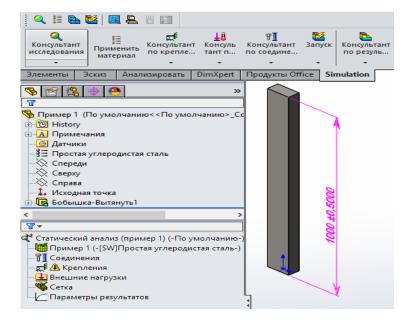


Рисунок 1.4 – Расположение «менеджеров оболочки» SolidWorks и Simulation

Менеджер Simulation представляет собой типичное для современных программных продуктов дерево, корень которого — это тип проводимого анализа, а ветви первого уровня — это блоки, обеспечивающие выполнение определенного типа действий (рисунок 1.5). При щелчке правой кнопкой мыши по какому-либо элементу появляется контекстное меню, содержащее функции, доступные для работы с данным объектом.

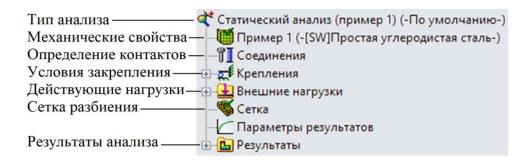


Рисунок 1.5 – Внешний вид менеджера Simulation для статического анализа

Ветви второго уровня растут, соответственно, из «корней» ветвей первого уровня (рисунок 1.6).

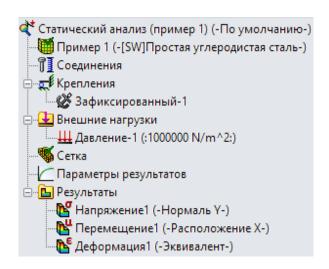


Рисунок 1.6 – Информация, содержащаяся в ветвях второго уровня

Как видно из рисунка 1.6, на ветвях второго уровня представлены сведения о характере закрепления обследуемого изделия, приложенной к нему нагрузке, результатах проводимых исследований (напряжения, перемещения, деформации). Посредством щелчка правой кнопкой мыши по какому-либо элементу появляется контекстное меню, содержащее, например, функции, представленные на рисунке 1.7, позволяющие выполнять определенные операции над объектом коррекции.

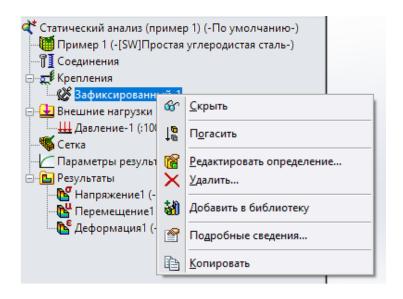


Рисунок 1.7 – Контекстное меню по корректировке введенных ранее исходных данных

Приведенные в контекстном меню термины (см. рисунок 1.7) означают следующие действия:

- «Скрыть» не отображать данную информацию на графическом представлении модели (в данном примере это место и характер закрепления);
- «Погасить» не использовать эту информацию при расчете, но в памяти она сохраняется;
- «Редактировать определение» осуществлять корректировку введенной ранее информации;
 - «Удалить» стереть представленную ранее информацию;
- «Добавить в библиотеку» сохранить эту информацию в библиотеке примера;
- «Подробные сведения» приводится подробная информация об используемых в примере условиях;
- «Копировать» осуществляется копирование данной информации в буферную память с целью последующего использования в другом исследовании данного объекта.

Функция «Редактировать определение» позволяет произвести корректировку вводимой ранее информации об объекте исследования, щелкнув на этом элементе левой кнопкой мыши. В результате предоставляется возможность увидеть существующую информацию и возможные варианты изменений (рисунок 1.8).

После введения всей необходимой информации о предлагаемой модели исследования на графической части экрана высвечивается модель исследуемого объекта с изображением действующей нагрузки и условиями закрепления (рисунок 1.9).

Важным этапом решения задачи механики твердого деформируемого тела методом конечных элементов является «сетка» разбиения изделия на конечные элементы. Пример контекстного меню по созданию сетки разбиения модели на конечные элементы и сопутствующие операции представлен на рисунке 1.10.

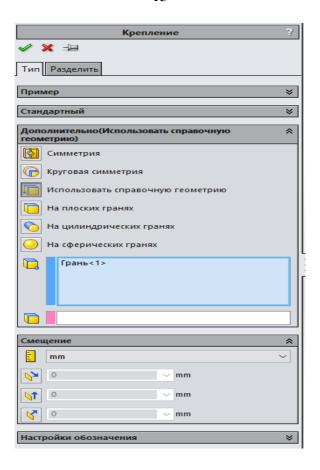


Рисунок 1.8 — «Редактирование определения» (условий закрепления) в рассматриваемом примере исследований

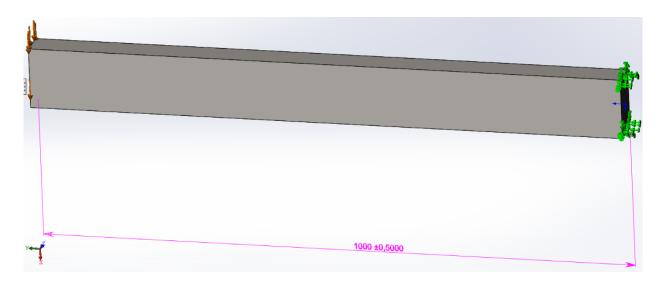


Рисунок 1.9 — Модель исследуемого объекта с изображением действующей нагрузки и условиями закрепления

Воспользоваться разбиением на элементы по умолчанию, которое предлагает программа при нажатии левой клавишей мыши на элементе «Создать сетку» (рисунок 1.11).

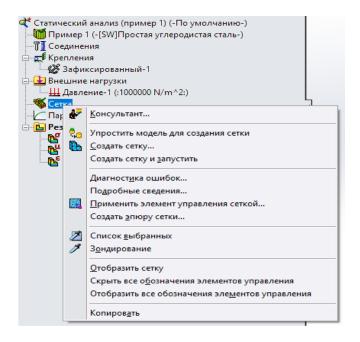


Рисунок 1.10 — Контекстное меню по созданию сетки разбиения модели на конечные элементы и сопутствующие операции

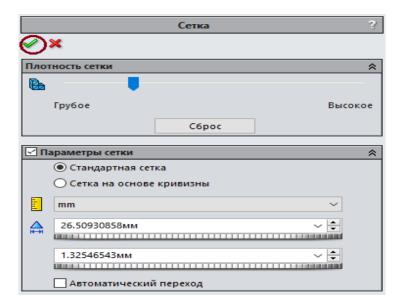


Рисунок 1.11 – Меню по определению параметров сетки разбиения модели на конечные элементы

В результате выполнения этой операции будет показано меню с предложением плотности сетки разбиения, полученной автоматически (см. рисунок 1.11).

При согласии с этим предложением посредством нажатия «зеленой галочки», выделенной на рисунке 1.11 коричневым кружком, произойдет разбиение модели на элементы. Затем, после нажатия клавиши «Отобразить сетку» (см. рисунок 1.10), в графической части экрана высветится конечно-элементная модель исследуемого объекта (рисунок 1.12).

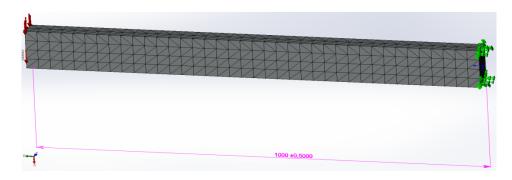


Рисунок 1.12 — Конечно-элементная модель консольно-закрепленной балки, нагруженной на свободном конце поперечной нагрузкой, равномерно распределенной по плоскости торца

Контрольные вопросы

- 1 Что представляет менеджер Simulation?
- 2 Какие действия содержит контекстное меню по корректировке введенных ранее исходных данных?

1.3 Анализ напряженно-деформированного состояния балки посредством использования конечно-элементного подхода

Цель работы: анализ напряженно-деформированного состояния балки посредством использования конечно-элементного подхода.

После введения всей информации о конечно-элементной модели исследуемого объекта можно перейти непосредственно к расчетной части анализа, когда формируются матрицы жесткости всех конечных элементов, входящих в модель, объединенная матрица жесткости всей системы в целом и производится решение системы линейных алгебраических уравнений с определением векторстолбца перемещений всех узловых точек модели.

Настройка параметров расчетной части исследования осуществляется посредством щелчка правой клавиши мыши по корню дерева менеджера Simulation в том месте, где обозначается тип анализа. В результате высвечивается контекстное меню, представленное на рисунке 1.13.

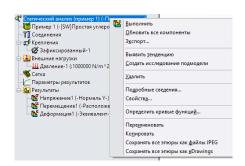


Рисунок 1.13 – Контекстное меню проводимого анализа

Посредством щелчка левой клавишей мыши по пункту контекстного меню «Выполнить» (см. рисунок 1.13) происходит запуск программы расчета задачи с параметрами «по умолчанию». Если есть необходимость произвести коррекцию параметров расчета, то в этом случае нажатие левой клавиши на разделе «Свойства» приведет к появлению нового меню, отображенного на рисунке 1.14.

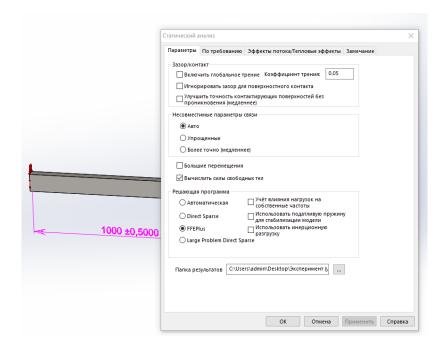


Рисунок 1.14 – Меню параметров статического анализа

В таблице 1.4 приведена справка по диалоговому окну «Статический анализ».

Таблица 1.4 – Диалоговое окно «Статический анализ»

Действие	Назначение
	Зазор/контакт
Включить глобальное трение	Позволяет включить или пренебречь влиянием трения условий глобального контакта. Настоящий флажок не управляет условиями локального контакта. Программное обеспечение рассчитывает силы статического трения путем умножения сил по нормали, образующихся на контактирующих площадях, на заданный коэффициент трения. Направление силы трения в местоположении противоположно направлению движения в этом местоположении
Коэффициент трения	Устанавливается коэффициент статического трения для условий глобального контакта. Для условий локального контакта коэффициент трения задан в PropertyManager «Набор контактов» для каждого условия. Коэффициент трения должен быть между 0 и 1,0
Игнорировать зазор для поверхностного контакта	Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа учитывает по умолчанию условия контакта вне зависимости от начального расстояния между определенной пользователем пары поверхностей

Продолжение таблицы 1.4

Действие	Назначение
Улучшить точность	Настоящий метод дает непрерывные и более точные напряжения в
контактирующих	областях контактов без проникновения. Этот метод используется
поверхностей без	при определении контактов между гранями и гранями или
проникновения	гранями и кромками. Он также гарантирует сходимость при
(медленнее)	использовании h -адаптивного метода. Когда выбран настоящий
	параметр, программному обеспечению может потребоваться
	больше времени для решения задачи. Настоящий метод в
	литературе называется «строительный контакт»
	Несовместимые параметры связи
Авто	Если связанный контакт поверхности к поверхности по умол-
	чанию значительно снижает производительность решения, решаю-
	щая программа переключается на связанный контакт узла к по-
	верхности автоматически. Автоматическое переключение доступ-
	но для статических, частотных, линейных динамических исследо-
	ваний и исследований потери устойчивости
Упрощенные	Программа корректирует контакт связи поверхностей по умол-
	чанию и переходит к контакту связи узлов. Выберите этот пара-
	метр только в случаях возникновения проблем с быстродействием
	при решении моделей с большим количеством контактирующих
	поверхностей. Если для анализа 2D-упрощения выбран этот
	параметр, программа применяет контакт связи узлов к кромке
Более точно	Постановка задачи для поверхностного контакта по умолчанию
(медленнее)	занимает намного больше времени, чем постановка задачи для
	контакта узлов. Для анализа 2D-упрощения решающая программа
	применяет контакт связи кромок
	Дополнительные параметры
Большие	Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа
перемещения	прикладывает нагрузки постепенно, равномерно и ступенчато до
	их полных значений, выполняя итерации контакта на каждом
	шаге. Количество шагов определяется программой внутренне.
	Этот параметр не доступен для исследований 2D-упрощения
Вычислить силы	Выберите этот флажок, чтобы инструктировать прикладную прог-
свободных тел	рамму о подготовке масштабной сетки равновесия сил в каждом
	узле. После запуска исследования с этим установленным флажком
	нажмите правой кнопкой мыши папку «Результаты» и выберите
	«Вывести силы реакции», чтобы вывести список сил, которые
	действуют на грани, кромке и вершине. Силы могут исходить от
	контакта, внешних нагрузок, ограничений или соединителей. Этот
	параметр не доступен для исследований 2D-упрощения
	Решающая программа
Позво	оляет задать решающую программу для использования
	при выполнении статического анализа
Автоматический	Программное обеспечение выбирает решающую программу на
	основе типа исследования, параметров анализа, условий контакта
	и т. п. Некоторые параметры и условия применимы только либо
	для Direct Sparse, либо для FFEPlus
Direct Sparse	Установите флажок этого параметра для использования решаю-
	щей программы Direct Sparse

Окончание таблицы 1.4

Действие	Назначение
FFEPlus	Используйте решающую программу FFEPlus, чтобы запустить исследование. Настоящая решающая программа использует усовершенствованное переупорядочение матрицы, что делает ее более эффективной для больших задач
Large Problem Direct Sparse	Использование улучшенных алгоритмов распределения памяти помогает решающей программе Large Problem Direct Sparse в обработке проблем моделирования, сложность которых превышает возможности физической памяти вашего компьютера. При первоначальном выборе решающей программы Direct Sparse и в связи с ограниченными ресурсами памяти при отыскании решения, отличного от базового, отображается предупреждение о необходимости переключения на Large Problem Direct Sparse
Учёт влияния нагрузок на собственные частоты	Включите этот параметр, чтобы учитывать влияние нагрузки в своей плоскости при расчете жесткости
Использовать незакаленную пружину для стабилизации модели	Установите флажок у этого параметра; чтобы инструктировать программу необходимо добавить мягкие пружины, прикрепленные к основанию для предотвращения неустойчивости. Если приложить нагрузки к неустойчивой конструкции, она будет перемещаться и/или вращаться как твердое тело. Вы должны применить соответствующие ограничения, чтобы предотвратить движение твердого тела
Использовать инерционную разгрузку	Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа автоматически прикладывает инерционные силы, чтобы уравновесить несбалансированную внешнюю нагрузку. Настоящий параметр является в особенности полезным, когда вы импортируете нагрузки из пакета движения (SolidWorks Motion), где внешние нагрузки могут быть немного не сбалансированы. Когда у настоящего параметра установлен флажок, можно решать структурные задачи без необходимости применять ограничения или активизировать параметр «мягкая пружина», чтобы стабилизировать модель от перемещений твердого тела

После проведения расчета, посредством щелчка левой клавишей мыши по дереву менеджера Simulation в том месте, где высвечивается пункт «Результаты» (рисунок 1.15), будет раскрыто меню, использование которого позволит просмотреть итоги численного анализа.

Для проведенного анализа программа исследования представила три типа результирующих параметров — напряжения, перемещения и деформации. Дважды щелкнув левой клавишей мыши по соответствующему параметру, представленному в данном меню, можно получить картину распределения данной физической величины по поверхности расчетной модели. При этом распределение параметра изображается в цвете с одновременным представлением шкалы значений. На рисунках 1.16-1.18 приведено распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки σ_{ν} , перемещений балки в вертикальном направлении UX

и относительных линейных деформаций ε_{y} в направлении, перпендикулярном поперечному сечению.

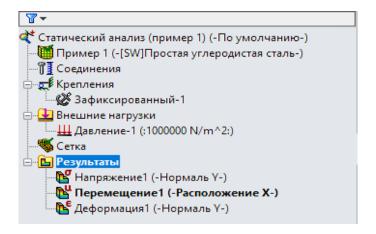


Рисунок 1.15 – Меню пункта «Результаты» после проведения расчета

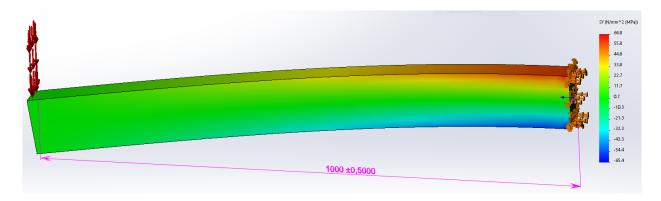


Рисунок 1.16 — Распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

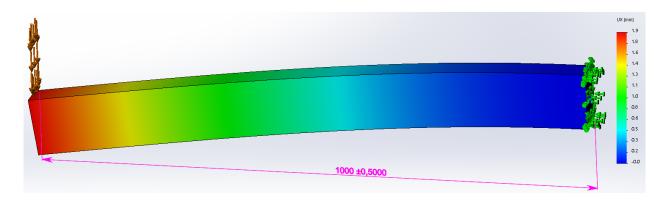


Рисунок 1.17 – Перемещения точек поверхности балки в вертикальном направлении

Следует отметить, что при подготовке картины распределения соответствующего параметра по поверхности разработанной модели SolidWorks Simulation предоставляет большие возможности в формировании и виде выводимой информации. Для этого необходимо правой клавишей мыши щелкнуть по пункту меню, в котором указан физический параметр, выводимый в качестве

рисунка, в результате высветится еще одно меню, разделами которого являются пункты предлагаемого редактирования (рисунок 1.19).

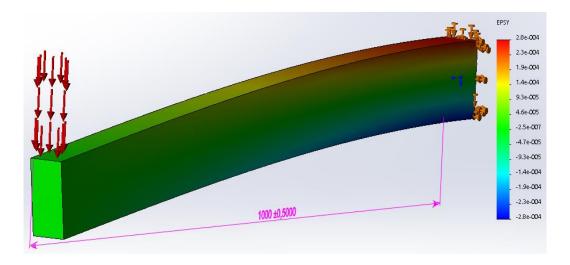


Рисунок 1.18 — Распределение относительных линейных деформаций ε_y в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

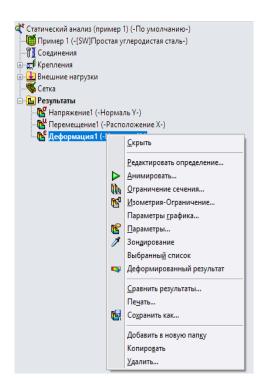


Рисунок 1.19 – Пункты возможного редактирования выводимой графической информации о результатах анализа

Контрольные вопросы

- 1 Каким образом осуществляется настройка параметров расчетной части исследования?
- 2 Какие три типа результирующих параметров для проведенного анализа программа исследования представляет?

1.4 Проведения расчета рассматриваемой балки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов»

Цель работы: проведение расчета рассматриваемой балки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов».

В данной лабораторной работе необходимо определить максимальные напряжения σ_{max} , возникающие в балке, используя подходы курса «Сопротивление материалов»:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{r}}.$$

Значения $M_{\rm max}$ и W_x следует вычислить по формулам, приведенным в таблицах 1.1-1.3.

Кроме того, для расчетных схем балки 1-5 (см. таблицу 1.1) вычислить максимальные прогибы балки $w_{\rm max}$. Затем полученные данные сопоставить с результатами численного анализа, проведенного в подразделе 1.3.

Для рассматриваемой схемы нагружения балки и ее габаритных размеров (см. рисунки 1.1, 1.2 и 1.9) значения максимального изгибающего момента $M_{\rm max}$, осевого момента J_x и момента сопротивления W_x будут соответственно равны

$$M_{\max} = F \cdot l = P \cdot A \cdot L = P \cdot h \cdot b \cdot l = 10000000 \cdot 100 \cdot 50 \cdot 1000 \cdot 10^{-9} = 5000 \text{ H} \cdot \text{m};$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3 \cdot 10^{-12}}{12} = 4,17 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4;$$

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{50 \cdot 100^2 \cdot 10^{-9}}{6} = 0.83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3,$$

где F — сосредоточенная нагрузка, прикладываемая к свободному краю балки;

Р – распределенная по торцу свободного края балки нагрузка;

 $A,\ h$ и b — площадь и габаритные размеры поперечного сечения балки соответственно.

Здесь следует отметить, что в каждом конкретном случае схемы закрепления и нагружения балки, а также формы и размеров поперечного сечения расчеты методами «Сопротивления материалов» будут существенно различаться.

Контрольные вопросы

- 1 Каким образом определить максимальные напряжения, возникающие в балке?
- 2 По какой формуле определяется максимальный прогиб балки для Вашего случая?
- 1.5 Осуществление сопоставительного анализа балки, выполненного с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов

Цель работы: осуществить сопоставительный анализ балки, выполненный с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов.

На основании данных расчетов, проведенных в подразделе 1.4, максимальные нормальные напряжения, возникающие в консольной балке, под действием поперечной нагрузки, приложенной к свободному концу, будут равны

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_{x}} = \frac{5000}{0.83 \cdot 10^{-4}} = 60.24 \text{ M}\Pi \text{a}.$$

Вместе с тем, как видно из рисунка 1.16, максимальные нормальные напряжения, полученные посредством использования метода конечных элементов, $\sigma_{max} = 66.8$ МПа, что отличается от значений, полученных подходом курса «Сопротивление материалов» на 9.8 %. Такое расхождение обусловлено тем, что максимальные напряжения по данной схеме нагружения возникают в заделке, где сказывается краевой эффект, который в курсе «Сопротивление материалов» не учитывается.

Максимальный прогиб в консольной балке определяется следующим выражением:

$$w_{\text{max}} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x} = \frac{P \cdot A \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x} = \frac{10^6 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^3 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 2, 1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4, 17 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ M} = 1,9 \text{ MM}.$$

Этот результат практически полностью совпадает с данными, приведенными на рисунке 1.17, что подтверждает верность разработанной конечно-элементной модели.

Контрольные вопросы

1 Каков процент расхождения при расчете подходом курса «Сопротивление материалов» по сравнению к методу конечных элементов в Вашем случае?

2 По какой формуле определяется максимальный прогиб в консольной балке?

2 Оформление отчета о проведенном сопоставительном анализе напряженно-деформированного анализа балки, подверженной нагружению на изгиб

Цель работы: оформить отчет о проведенном сопоставительном анализе напряженно-деформированного анализа балки, подверженной нагружению на изгиб.

В данной лабораторной работе необходимо по результатам проведенных расчетов, представленных в подразделах 1.1–1.5, сформировать заключительный отчет о сопоставительном анализе балки, подверженной нагружению на изгиб. Данный отчет выполнить в текстовом редакторе Word по аналогии с информацией, представленной в подразделах 1.1–1.5 данных методических рекомендаций.

Отчет должен завершаться выводами о проделанном сопоставительном анализе.

3 Сопоставительный анализ стойки на устойчивость

3.1 Создание твердотельной модели и построение конечно-элементной модели стойки при анализе на устойчивость

Цель работы: создать твердотельную модель и построить конечноэлементную модель стойки при анализе на устойчивость.

Требуется определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости n_v для стойки, закрепленной и нагруженной, как показано на рисунке 3.1.

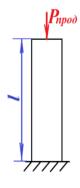


Рисунок 3.1 — Расчетная схема для определения критической силы центрально-сжатой стойки

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$n_{y} = \frac{P_{\kappa p}}{P_{3AII}}$$

где $P_{\kappa p}$ и P_{3AJ} – критическая и заданная силы соответственно.

Длина стойки l, величина заданной нагрузки $P_{3AД}$, схема поперечного сечения и его размеры необходимо выбрать из таблиц 3.1 и 1.2 (по трем последним цифрам номера зачетки).

Таблица 3.1 – Исходные данные для анализа устойчивости стойки

		1	
Номер строки	Сжимающая	<i>l</i> , м	Номер схемы поперечного сечения
тюмер строки	нагрузка P_{3AJ} , Н	ι, Ινι	по таблице 1.2 и его размеры
0	190000	3,0	№ 0
			(h = 0.13 м; b = 0.08 м; d = 0.06 м)
1	100000	2,1	№ 1
			(H = 0.1 м; B = 0.05 м; h = 0.09 м; b = 0.02 м)
2	110000	2,2	№ 2
			(h = 0.12 м; B = 0.06 м; d = 0.006 м; b = 0.01 м)
3	120000	2,3	№ 3
			(h = 0.11 m; b = 0.055 m)
4	130000	2,4	№ 4
			$(h = 0.12 \text{ м}; b = 0.06 \text{ м}; h_1 = 0.11 \text{ м}; b_1 = 0.05 \text{ м})$
5	140000	2,5	№ 5
			$(h = 0.13 \text{ m}; b_{\scriptscriptstyle H} = 0.2 \text{ m}; b_{\scriptscriptstyle \theta} = 0.1 \text{ m})$
6	150000	2,6	№ 6
			(h = 0.12 м; d = 0.15 м; b = d/2)
7	160000	2,7	№ 7
			(d = 0.12 M)
8	170000	2,8	№ 8
			(d = 0.12 M; h = 0.1 M)
9	180000	2,9	№ 9
			(a = 0.11 m; d = 0.08 m)
	б	В	a
 			l .

Контрольные вопросы

- 1 По какой формуле Вы определяли коэффициент запаса устойчивости?
- 2 Каким образом Вы определяли критическую силу?

3.2 Проведение расчета при определении запаса устойчивости стойки с использованием МКЭ

Цель работы: провести расчет при определении запаса устойчивости стойки с использованием МКЭ.

На рисунке 1.3 были приведены различные типы проводимого в Simulation анализа. Среди них имеется анализ по проверке «Потери устойчивости». Этот анализ позволяет определить величину критической нагрузки, при которой изделие теряет устойчивость, а также соответствующую ей форму потери устойчивости. Далее предлагается пример расчета центрально-сжатого продольной силой стержня на предмет потери устойчивости. Твердотельная модель анализируемого в этом примере объекта была идентична той, что рассматривалась в статическом анализе расчета балки на изгиб. Это лишний раз подчеркивает возможности программного обеспечения Simulation по всестороннему анализу изделия без дополнительных трудозатрат по подготовке геометрической модели в каждом конкретном случае.

На рисунке 3.2 приведена предлагаемая для расчета модель продольно сжатого стержня усилием 100000 H, прямоугольного поперечного сечения 50 × 100 мм, длиной 1000 мм, нижний край которого жестко защемлен. Кроме того, на рисунке 3.2 представлено дерево менеджера Simulation применительно к расчетам по проверке потери устойчивости. Сетка разбиения данной модели на конечные элементы осталась прежней, поэтому она не приводится в предлагаемом графическом материале.

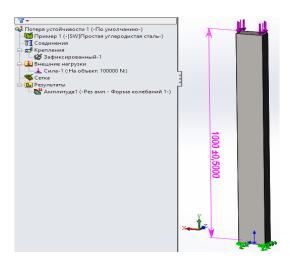


Рисунок 3.2 — Модель расчета продольно сжатого стержня усилием 100000 H, прямоугольного поперечного сечения 50×100 мм, длиной 1000 мм, нижний край которого жестко защемлен, и дерево менеджера Simulation применительно к расчетам по проверке потери устойчивости

Для проведения расчета на устойчивость в разделе контекстного меню «Свойства» (рисунок 3.3) необходимо указать количество используемых форм потери устойчивости. Как правило, первая форма потери устойчивости является наиболее информативной с точки зрения определения наименьшей

критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости. Остальные параметры можно оставить «по умолчанию».

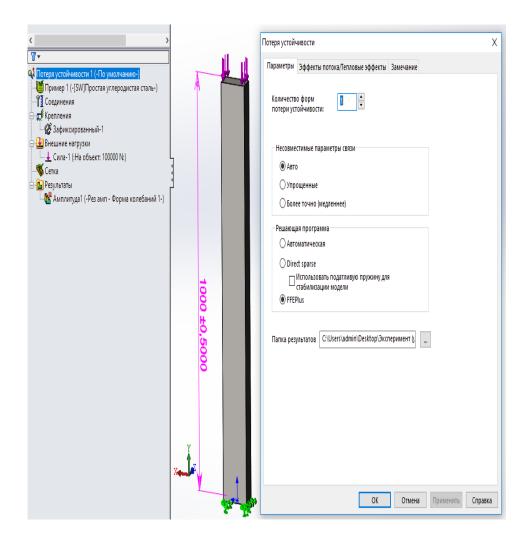


Рисунок 3.3 – Параметры контекстного меню «Свойства» при проведении расчетов на устойчивость

После проведения завершающего расчета посредством щелчка левой клавишей мыши по дереву менеджера Simulation в том месте, где высвечивается пункт «Результаты» (рисунок 3.4), будет раскрыто меню, использование которого позволит просмотреть итоги численного анализа на возможную потерю устойчивости объекта. Дважды щелкнув левой клавишей мыши по разделу меню (в данном примере это «Амплитуда 1») на мониторе появится картинка (см. рисунок 3.4) с информацией о форме потери устойчивости и значении коэффициента запаса устойчивости n_y . Как видно, в рассматриваемом примере (см. рисунок 3.4) коэффициент запаса устойчивости $n_y = 5,41$.

Числовые значения эпюры формы (колебаний/амплитуд «РЕЗАМП») показывают относительные (безразмерные) значения амплитуд для рассматриваемой формы. Здесь параметр «РЕЗАМП» представляет собой результирующую амплитуду без привязки, к какой-либо координатной оси.

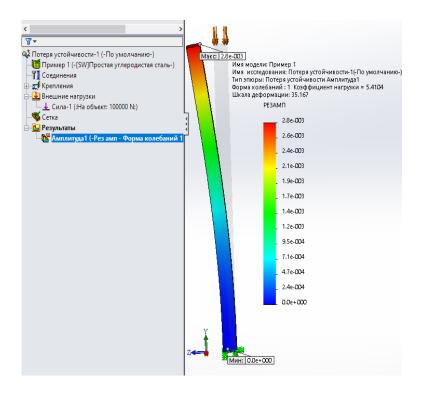


Рисунок 3.4 — Форма потери устойчивости, наложенная на недеформированное состояние и числовые значения эпюры формы (колебаний/амплитуд «РЕЗАМП»)

Контрольные вопросы

- 1 Что необходимо указать для проведения расчета на устойчивость в разделе контекстного меню «Свойства»?
- 2 Что представляет собой параметр «РЕЗАМП» при выполнении данной лабораторной работы?

3.3 Выполнение расчета по определению запаса устойчивости стойки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов»

Цель работы: выполнить расчет по определению запаса устойчивости стойки с использованием подходов курса «Сопротивление материалов».

Определим теперь величину критического усилия $P_{\kappa p}$ и запас устойчивости n_y , полученные на основании использования подходов «Сопротивления материалов». Для приведенного поперечного сечения стойки минимальный осевой момент инерции

$$I_{\min} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{50^3 \cdot 100}{12} 10^{-12} = 10,42 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4.$$

Заданному характеру закрепления колонны соответствует коэффициент, учитывающий условия закрепления, равный $\mu=2$.

Минимальный радиус инерции принимает следующее значение:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{10,42 \cdot 10^{-7}}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = 1,69 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Тогда максимальная гибкость колонны

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\text{min}}} = \frac{2 \cdot 1}{1,69 \cdot 10^{-2}} = 118.$$

Контрольные вопросы

- 1 По какой формуле Вы определяли минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стойки?
 - 2 Чему равна в Вашем случае максимальная гибкость колонны?
- 3.4 Осуществление сопоставительного анализа результатов расчетов стойки, выполненных с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов

Цель работы: осуществить сопоставительный анализ результатов расчетов стойки, выполненных с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов.

Для полученного значения гибкости стальной колонны критическая величина сжимающей нагрузки может быть определена с помощью формулы Эйлера:

$$P_{\kappa p} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{\left(\mu \cdot l\right)^2} = \frac{3.14^2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 10.42 \cdot 10^{-7}}{\left(2 \cdot 1\right)^2} = 539370 \text{ H}.$$

Тогда запас устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\kappa p}}{P_{24.77}} = \frac{539370}{100000} = 5,393.$$

Данные, полученные с использованием методов, предлагаемых в курсе «Сопротивление материалов», достаточно хорошо согласуются с результатами конечно-элементного анализа, проведенного в оболочке COSMOSWorks (Simulation), расхождение составляет 0,31 %, что лишний раз подтверждает право на существование обоих подходов.

Контрольные вопросы

- 1 Чему равен в Вашем случае запас устойчивости?
- 2 Чему равно расхождение данных, полученных с использованием методов, предлагаемых в курсе «Сопротивление материалов», и данных, проведенных в оболочке COSMOSWorks (Simulation)?

4 Оформление отчета о проведенном сопоставительном анализе стойки на устойчивость с использованием обоих подходов

Цель работы: оформить отчет о проведенном сопоставительном анализе стойки на устойчивость с использованием обоих подходов.

В данной лабораторной работе необходимо, по результатам проведенных расчетов, представленных в подразделах 3.1–3.4, сформировать заключительный отчет о сопоставительном анализе стойки на устойчивость. Данный отчет выполнить в текстовом редакторе Word по аналогии с информацией, представленной в подразделах 3.1–3.4 данных методических рекомендаций.

Отчет должен завершаться выводами о проделанном сопоставительном анализе.

5 Сопоставительный анализ балки, подверженной удару падающим грузом

5.1 Формирование твердотельной модели балки, подверженной удару падающим грузом

Цель работы: сформировать твердотельную модель балки, подверженной удару падающим грузом.

Для расчетных схем, приведенных на рисунке 5.1, а также данных, представленных в таблице 5.1, необходимо провести анализ напряженно-деформированного состояния балки, подверженной поперечному удару грузом массой m.

		ı	1	I	T
Номер	Схема по	<i>l</i> , м	m, кг	h_m , м	Номер схемы поперечного сечения
строки	рисунку 5.1	ι, Μ	111, KI	rim, M	по таблице 1.2 и его размеры
0	0	3,0	3,0	0,50	№ 0
		·		·	(h = 0.13 м; b = 0.08 м; d = 0.06 м)
1	1	2,1	2,1	0,41	№ 1
					(H = 0.1 m; B = 0.05 m; h = 0.09 m; b = 0.02 m)
2	2	2,2	2,2	0,42	№ 2
					(h = 0.12 m; B = 0.06 m; d = 0.006 m; b = 0.01 m)
3	3	2,3	2,3	0,43	№ 3
					(h = 0.11 m; b = 0.055 m)
4	4	2,4	2,4	0,44	№ 4
					(h = 0.12 m; b = 0.06 m;
					$h_I = 0.11 \text{ m}; b_I = 0.05 \text{ m}$
5	5	2,5	2,5	0,45	№ 5
					$(h = 0.13 \text{ m}; b_{\scriptscriptstyle H} = 0.2 \text{ m}; b_{\scriptscriptstyle \theta} = 0.1 \text{ m})$
6	6	2,6	2,6	0,46	№ 6
					(h = 0,12 м; d = 0,15 м; b = d/2)
7	7	2,7	2,7	0,47	№ 7
					(d = 0.12 M)
8	8	2,8	2,8	0,48	№ 8
					(d = 0.12 m; h = 0.1 m)
9	9	2,9	2,9	0,49	№ 9
					(a = 0.11 m; d = 0.08 m)
	0	5	ъ	0	n.

Таблица 5.1 – Исходные данные для анализа поперечного удара по балке

Следует отметить, что в приведенных исходных данных форма поперечного сечения также стала другой.

На рисунке 5.2 приведено обозначение габаритных размеров падающего груза в форме параллелепипеда.

Габаритный размер падающего груза B_G принимается равным ширине верхней поверхности балки (данные взять из таблицы 5.1, а также данных соответствующего поперечного сечения балки). Габаритный размер падающего груза, совпадающий по направлению (см. рисунок 5.2) с осью балки l_G , принимается равным $l_G = 60\,$ мм.

Размер груза $h_{G.}$, м, определяется с помощью выражения

$$h_G = 2.14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m}{B_G}$$
,

где m – вес падающего груза (данные взять из таблицы 1.1).

Материал, из которого изготовлена балка, — сталь Ст3, модуль упругости $E=2\cdot 10^5$ МПа.

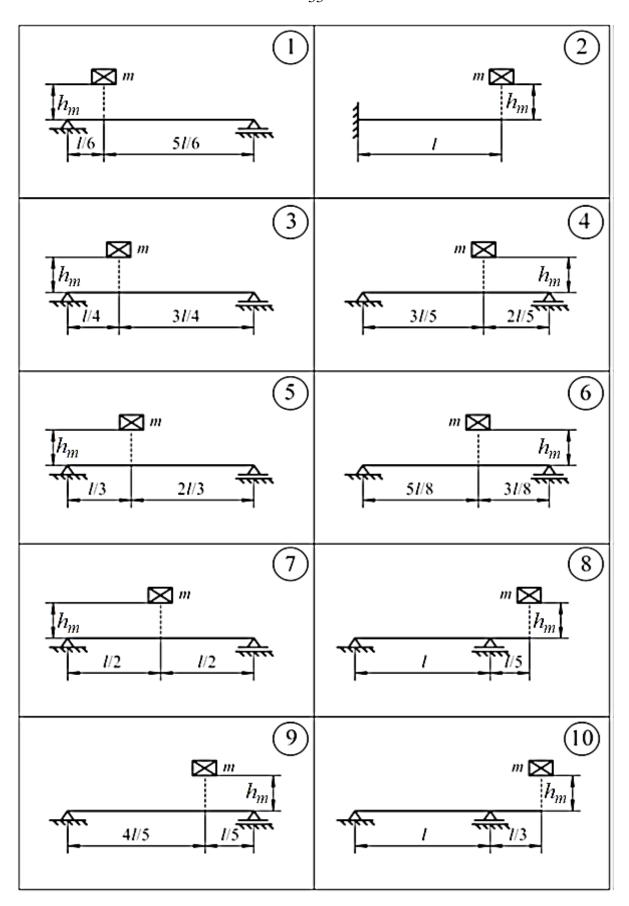


Рисунок 5.1 – Расчетные схемы для анализа поперечного удара по балке

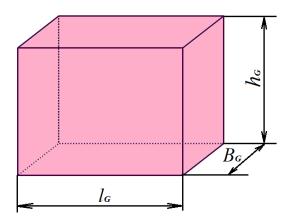


Рисунок 5.2 – Габаритные размеры падающего на балку в поперечном направлении груза

Контрольные вопросы

- 1 Чему принимается равным габаритный размер падающего груза?
- 2 По какой формуле определяется размер груза?

5.2 Построение конечно-элементной модели расчета балки при ударе падающим грузом

Цель работы: построить конечно-элементную модель расчета балки при ударе падающим грузом

Схема нагружения балки ударом представлена на рисунке 5.3.

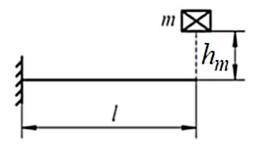


Рисунок 5.3 – Схема нагружения балки ударом

При этом характерные параметры этой схемы имеют следующие значения: $l=3\,\mathrm{m};\,m=2\,\mathrm{kr};\,h_m=0,5\,\mathrm{m}.$

Поперечное сечение балки представляет собой симметричный тавр, состоящий из прямоугольников (рисунок 5.4).

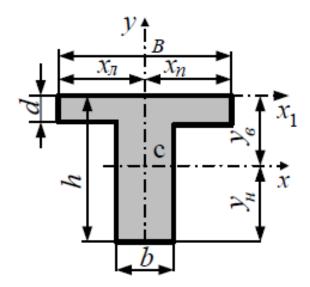


Рисунок 5.4 – Форма поперечного сечения рассматриваемой балки

Габаритные размеры данного поперечного сечения имеют следующие значения: h=0.12 м; B=0.06 м; d=0.006 м; b=0.01 м.

Поскольку в методе конечных элементов предполагается, что все детали сборки находятся в контакте, то взаимодействие соударяющейся массы с балкой рассматривается только с момента соприкасания их. В этот момент груз, падающий с высоты h_m , приобретает скорость v_m , величину которой можно определить из равенства потенциальной энергии груза, находящегося на высоте h_m , и приобретаемой кинетической энергии этого груза в момент соприкосновения с балкой:

$$m \cdot g \cdot h_m = \frac{m \cdot v_m^2}{2}.$$

В результате элементарных преобразований может быть получено следующее выражение:

$$v_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Таким образом, скорость груза v_m , падающего с высоты $h_m=0.5\,$ м, будет равна

$$v_m = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = 3.13 \text{ m/c}.$$

Кроме этих данных, для построения твердотельной модели исследуемого объекта необходимо также определить габаритные размеры падающего груза (см. рисунок 5.2) в соответствии с тем, что масса этого груза составляет m=2 кг.

Как уже отмечалось в подразделе 5.1, габаритный размер груза, совпадаю-

щий по направлению с осью балки, принимаем равным $l_G = 60$ мм. Поперечный размер B_G принимается равным ширине верхней поверхности балки, т. е. в нашем случае

$$B_G = B = 0.06$$
 M.

Размер груза h_G определяется исходя из соображений равенства этого объема металла, в нашем случае массе m=2 кг. Для определения данного параметра используется выражение

$$h_G = 2,14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m}{B_G} = 2,14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2}{0,06} = 0,0713 \text{ m}.$$

Используя данные габаритные размеры балки и груза, была создана твердотельная модель этой сборки (рисунок 5.5).

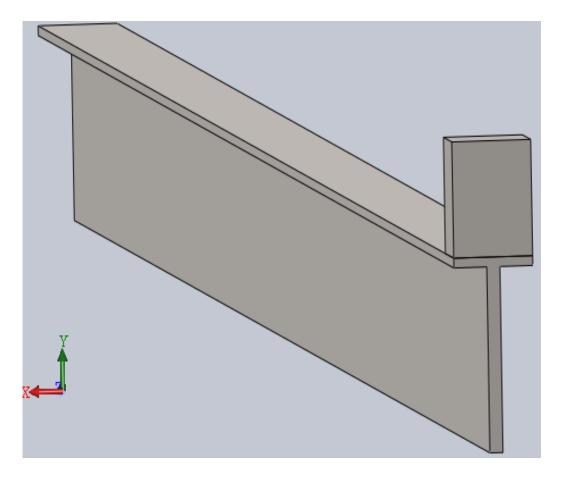


Рисунок 5.5 – Твердотельная модель сборки балки и груза

Для проведения такого рода исследования – нагружения балки посредством удара падающим грузом – был выбран из предлагаемых COSMOSWorks (Simulation) типов анализов (таблица 5.2) нелинейный динамический анализ.

Таблица 5.2 – Типы проводимых в Simulation анализов и их обозначения

Тип исследования	Значок исследования	Тип исследования	Значок исследования
Статический	₫*	Модальная временная диаграмма	~
Частотный анализ	~	Гармонический анализ	~
Потеря устойчивости	₹	Случайные колебания	₩.
Термический анализ	*	Спектр реакции	7
Исследование проектирования	±€	Анализ на ударную нагрузку	8=
Нелинейный статический анализ	Ľ <u>≣</u>	Усталость	₽
Нелинейный динамический анализ	۵	Конструкция сосуда, работающего под давлением	ą j

Использование такого типа анализа обусловлено тем, что взаимодействие двух соударяемых тел происходит на протяжении определенного промежутка времени, хоть и весьма малого, и это взаимодействие явно не носит линейный характер.

Настройка параметров расчетной части исследования осуществляется посредством щелчка правой клавиши мыши по корню дерева менеджера Simulation в том месте, где обозначается тип анализа. В результате высвечивается контекстное меню, представленное на рисунке 5.6.

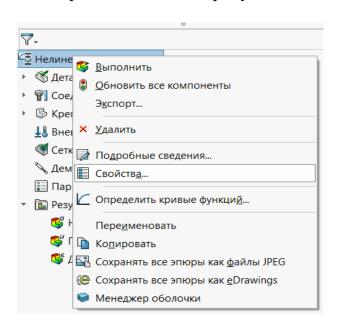


Рисунок 5.6 – Настройка параметров расчетной части нелинейного динамического анализа

После нажатия левой клавишей мыши на позиции Свойства появится новое диалоговое окно (рисунок 5.7).

В этом диалоговом окне необходимо обязательно указать время начала и окончания динамического взаимодействия исследуемого процесса. В данном примере (см. рисунок 5.7) началу соответствовала нулевая отметка, а концу — значение 0,01 с. Временной интервал при проведении такого анализа первоначально назначается интуитивно, на основании умозрительного представления об инерционных свойствах соударяемых тел. После проведения первого расчета и отладки конечно-элементной модели более подробно анализируется характер деформирования соударяемых тел за весь рассматриваемый период времени.

	Эффекты потока/Тепловые эффекты Замечание
Парам	етры интервала
	емя начала 0 Повторный запуск
	ремя окончания 0.01
	запуска анализа
) Автоматически (автоинтервал)
	Лачальный временной 0.0001 инкремент
	Мин 1е-008 Макс 0.01 Число регулировок 5
_ v	етры нелинейности геометрии спользовать состав для большого смещения бновить направление нагрузки с отклонением (Применимо при ваномерном давлении и нормальной силе).
	авномерном давлении и пормальной силе). араметр большой деформации
Решан	ощая программа Несовместимые параметры связи
FFEP	us Упрощенные Более точно (медленнее)
Папка	результатов D:\Книги по МКЭ\Конспект_по_МКЭ\Удар\КЭ_и Дополнительные параметры

Рисунок 5.7 – Диалоговое окно настройки расчетной части

Процесс соударения тел принято разделять на две фазы, в первой фазе тела после соприкосновения продолжают сближаться, деформации растут, также растут и усилия взаимодействия между телами. Во второй фазе за счет наличия сил упругости деформации уменьшаются, становятся меньше и силы взаимодействия между телами. Наибольший интерес с точки зрения напряженно-деформированного состояния анализируемых изделий представляет момент времени, когда силы взаимодействия принимают наибольшие значения. Для рассматриваемого типа примеров такой момент настает при переходе от первой фазы удара ко второй.

Момент перехода от первой фазы ко второй устанавливается посредством рассмотрения результатов расчета, включая операцию *Зондирование*.

Все остальные опции диалогового окна настройки расчетной части (см. рисунок 5.7) можно принять по умолчанию.

Поскольку в данном примере рассматривается сборка, состоящая из двух деталей — балки и падающего на нее груза, то необходимо при построении конечно-элементной модели указать условия *Соединения* этих двух деталей по плоскости контакта (рисунок 5.8). Как видно из данного рисунка, детали по плоскости соприкосновения назначены *Связанными*.

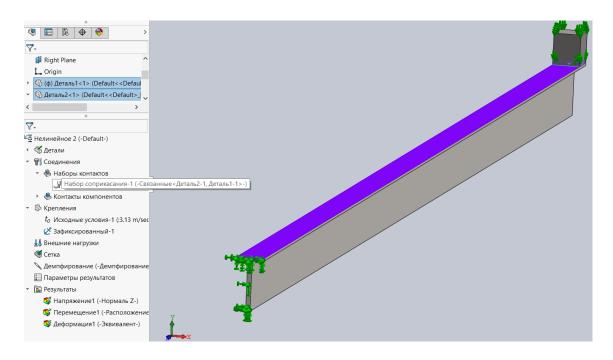


Рисунок 5.8 – Условия соединения в зоне контакта верхней поверхности балки и груза

Кроме того, из рисунка 5.8 видно, что левый торец балки жестко закреплен. Необходимо также задать силовое воздействие одной детали на другую, что можно сделать, используя опцию Внешние нагрузки, щелкнув на ней правой клавишей мыши. В результате появится еще одно всплывающее меню (рисунок 5.9). Одна из опций данного меню — Исходные условия. С помощью этой опции можно задать скорость падающего груза в начальный момент соприкосновения с балкой. При падении с высоты h=0.5 м груз приобретет скорость

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = 3.13 \text{ m/c}.$$

Это значение и указано в опции Исходные условия (рисунок 5.10).

Далее процедура конечно-элементного анализа рассматриваемой задачи близка к тем, которые проводились в предыдущих задачах — построение сетки разбиения конечно-элементной модели (рисунок 5.11) и проведение заключительного расчета.

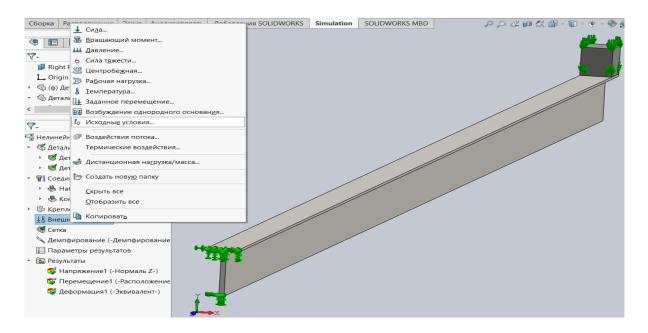


Рисунок 5.9 – Задание опции *Исходные условия* в момент соприкосновения груза с балкой

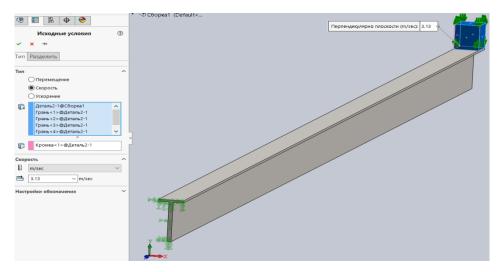


Рисунок 5.10 – Опция *Исходные условия* для разработанной конечно-элементной модели

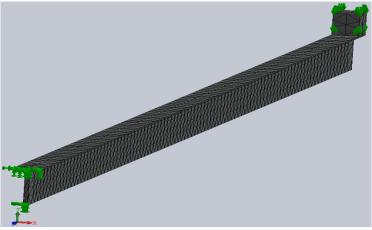


Рисунок 5.11 — Сетка разбиения модели на конечные элементы, условия закрепления и начальные условия в момент соприкосновения груза с балкой

Контрольные вопросы

- 1 Какой тип анализов нагружения балки посредством удара падающим грузом был выбран в COSMOSWorks (Simulation)?
 - 2 На сколько фаз принято разделять процесс соударения тел?
- 3 При помощи какой опции задаем силовое воздействие одной детали на другую?

5.3 Осуществление полного цикла анализа напряженно-деформированного состояния балки при ударе падающим грузом

Цель работы: осуществить полный цикл анализа напряженнодеформированного состояния балки при ударе падающим грузом.

На рисунках 5.12 и 5.13 приведены эпюры распределения прогибов в вертикальном направлении и нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки в момент пиковых значений этих параметров, т. е. при t=0,01 с.

Как видно из рисунка 5.13, наибольшие значения напряжений имеют место в области, прилегающей к заделке. В связи с этим напряженное состояние данной зоны было более подробно исследовано с помощь применения операции Зондирование (рисунок 5.14).

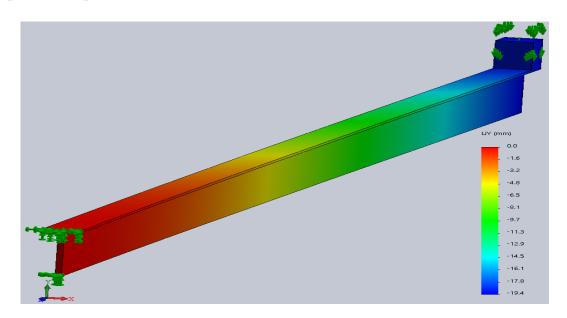


Рисунок 5.12 – Максимальный прогиб балки в процессе поперечного удара

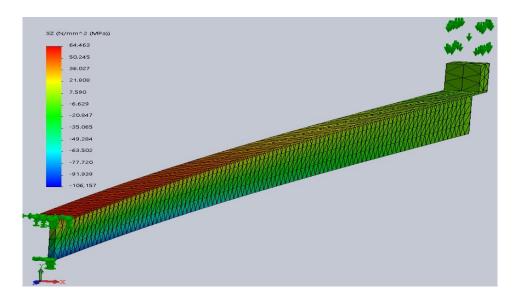


Рисунок 5.13 — Распределение нормальных напряжений по наружной поверхности балки в момент наибольшего деформирования ее

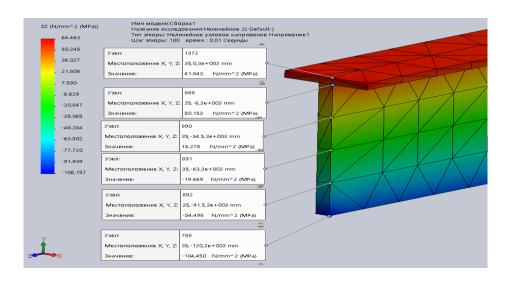


Рисунок 5.14 — Значения нормальных напряжений в узловых точках конечно-элементной модели в поперечном сечении балки, непосредственно прилегающем к заделке

Посредством использования этой опции на экран выводится информация о значении анализируемого параметра (напряжения, перемещения или деформации) в узловой точке конечно-элементной модели (см. рисунок 5.14). При этом предварительно должна быть активизирована соответствующая эпюра, которая построена с сеткой разбиения модели на конечные элементы (см. рисунок 5.14). В результате выполнения данных действий на экране появится белый прямоугольник, в пределах которого будет представлена следующая информация: номер узловой точки, три координаты в пространстве данной узловой точки и значение анализируемого параметра в месте ее расположения. На рисунке 5.14 приведена подобная информация о шести узловых точках сечения балки, непосредственно прилегающего к заделке.

Операция Зондирование выполняется следующим образом. После того как была построена эпюра соответствующего параметра совместно с сеткой разбиения, необходимо щелкнуть правой клавишей мыши на Дереве конструирования в том месте, где указаны результаты. В результате появится новое контекстное меню (рисунок 5.15), одним из разделов которого будет Зондирование.

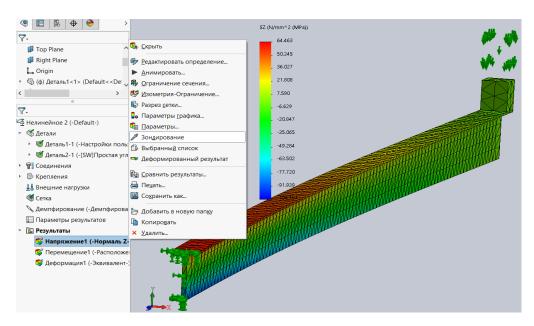


Рисунок 5.15 – Контекстное меню с операцией Зондирование

Далее, щелкнув левой клавишей мыши на операции Зондирование, появится новое окно, представляющее собой таблицу (рисунок 5.16), в которую будет заноситься информация об узловой точке, указанной посредством использования мыши, и значение анализируемого параметра в ней. Одновременно на экране в белом прямоугольнике появится аналогичная информация. Белый прямоугольник с информацией легко «перетаскивается» в любое удобное для пользователя место на экране.

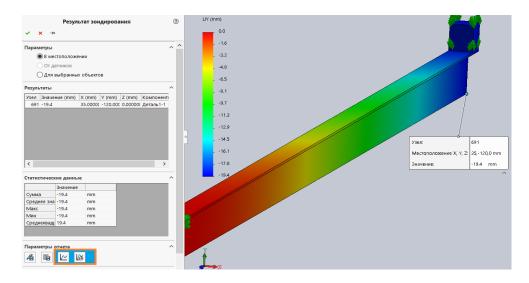


Рисунок 5.16 – Таблица результатов Зондирования

В нижней части таблицы будут приведены параметры отчета, среди них синей заливкой выделены два графика. Левый из них позволяет в виде графика изобразить изменение параметра эпюры при переходе от одной узловой точки к другим. Правая иконка выводит информацию об изменении параметра эпюры в рассматриваемой узловой точке за весь интервал силового воздействия на объекты, т. е. в нашем случае за весь период t = 0.01 с (рисунок 5.17).

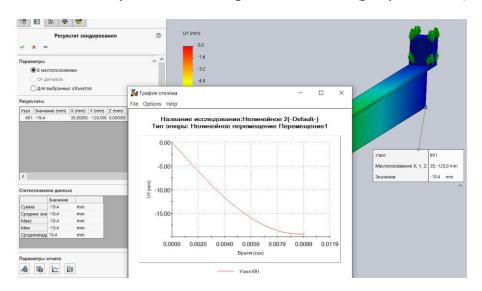


Рисунок 5.17 – График прогиба балки в зоне падения груза за активную фазу удара

На рисунке 5.17 приведен график изменения прогиба за активную фазу удара в узловой точке балки, находящейся непосредственно под падающим грузом. Как видно из приведенного графика, активная фаза взаимодействия падающего груза и балки пройдена и, следовательно, интервала времени t=0.01 с вполне достаточно для анализа напряженно-деформированного состояния балки с позиций прочности.

Контрольные вопросы

- 1 Каким образом выполняется операция зондирование?
- 2 Как задается интервал времени?

5.4 Расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с использованием подходов курса «Сопротивление материалов»

Цель работы: выполнить расчет балки при поперечном ударе падающим грузом с использованием подходов курса «Сопротивление материалов».

При проведении сопоставительного анализа балки, подверженной нагружению ударом, используя подходы курса «Сопротивление материалов», прежде всего, необходимо определить следующие геометрические характеристики:

- площадь поперечного сечения

$$A = (B - b) \cdot d + bh;$$

- координату центра тяжести поперечного сечения

$$y_{e} = \frac{(B-b)\frac{d^{2}}{2} + b\frac{h^{2}}{2}}{(B-b)d + bh};$$

- осевой момент инерции сечения

$$J_x = (B-b)\frac{d^3}{3} + \frac{bh^3}{3} - Ay_e^2;$$

- момент сопротивления нижнего края поперечного сечения

$$W_{x,H} = \frac{J_x}{h - y_{\epsilon}};$$

- момент сопротивления верхнего края поперечного сечения

$$W_{x,e} = \frac{J_x}{y_e}.$$

Учитывая, что габаритные размеры рассматриваемого поперечного сечения имеют значения $h=0.12\,$ м; $B=0.06\,$ м; $d=0.006\,$ м; $b=0.01\,$ м, то в результате получим следующие значения геометрических характеристик:

$$A = (0.06 - 0.01)0.006 + 0.01 \cdot 0.12 = 0.0015 \text{ m}^2;$$

$$y_B = \frac{(0.06 - 0.01)\frac{0.006^2}{2} + 0.01\frac{0.12^2}{2}}{(0.06 - 0.01)0.006 + 0.01 \cdot 0.12} = 0.0486 \text{ m};$$

$$(0.06 - 0.01)\frac{0.006^3}{2} = 0.015 \cdot 0.0$$

$$J_{x} = (0,06 - 0,01) \frac{0,006^{3}}{3} + \frac{0,01 \cdot 0,12^{3}}{3} - 0,0015 \cdot 0,0486^{2} = 2221 \cdot 10^{9} \text{ m}^{4};$$

$$W_{xH} = \frac{2221 \cdot 10^{-9}}{0,12 - 0,0486} = 31,09 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{3};$$

$$W_{xg} = \frac{2221 \cdot 10^{-9}}{0.0486} = 45,68 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Максимальный изгибающий момент при заданной схеме закрепления балки (см. рисунок 5.3) в случае, когда груз неподвижно расположен на свободном краю балки, будет равен

$$M_{cm}^{\text{max}} = G \cdot l = 20 \cdot 3 = 60 \text{ H} \cdot \text{m}.$$

Тогда максимальные напряжения, возникающие в заделке при статическом нагружении грузом G:

$$\sigma_{cm.H}^{\text{max}} = \frac{M_{cm}^{\text{max}}}{W_{s.H}} = \frac{60}{31,09 \cdot 10^{-6}} = -1,93 \text{ M}\Pi\text{a};$$

$$\sigma_{cm.s}^{\text{max}} = \frac{M_{cm}^{\text{max}}}{W_{x.s}} = \frac{60}{45,68 \cdot 10^{-6}} = 1,31 \text{ M}\Pi a.$$

Для консольно-закрепленной балки, нагруженной сосредоточенной силой на свободном краю, статический прогиб может быть определен с помощью выражения

$$\Delta_{cm} = \frac{G \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x} = \frac{20 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,221 \cdot 10^{-6}} = 40,522 \cdot 10^{-5} \text{ m} \approx 0,405 \text{ mm}.$$

Следует отметить, что только для данной схемы нагружения (см. рисунок 5.3) можно использовать формулу для определения Δ_{cm} , во всех остальных вариантах схем нагружения необходимо строить единичные и грузовые эпюры моментов при статическом нагружении, а затем, используя правило Верещагина, определять статический прогиб.

В дальнейшем, зная величину статического перемещения Δ_{cm} , определяется динамический коэффициент

$$K_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0.5}{40.522 \cdot 10^{-5}}} = 50.69.$$

Используя значение динамического коэффициента, в последующем могут быть определены величины максимальных напряжений и динамического прогиба, применяя следующие соотношения:

$$\sigma_{\partial,\mu}^{\text{max}} = \sigma_{cm,\mu}^{\text{max}} \cdot K_{\partial} = -1,93 \cdot 50,69 = -97,83 \text{ M}\Pi a;$$

$$\sigma_{o.s.}^{\text{max}} = \sigma_{cm.s.}^{\text{max}} \cdot K_o = 1,31 \cdot 50,69 = 66,4 \text{ M}\Pi a;$$

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{cm} \cdot K_{\partial} = 0,405 \cdot 50,69 = 20,53$$
 mm.

Контрольные вопросы

- 1 Какие геометрические характеристики определяются при проведении сопоставительного анализа балки?
- 2 Как определяются величины максимальных напряжений и динамического прогиба?
- 5.5 Проведение сопоставительного анализа результатов расчета балки при ударе падающим грузом, выполненных с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов

Цель работы: провести сопоставительный анализ результатов расчета балки при ударе падающим грузом, выполненных с использованием подходов курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов, при необходимости провести корректировку выполненных расчетов.

Сопоставление результатов расчета, выполненного с помощью компьютерной системы SolidWorks, с данными, полученными в результате использования курса «Сопротивление материалов», сведено в таблицу 5.3.

Такой процент расхождения результатов расчета может объясняться рядом причин:

- использовалась достаточно грубая сетка разбиения модели на конечные элементы;
- в основу теории удара в курсе «Сопротивление материалов» положен ряд допущений, которые в SolidWorks Simulation не применяются;
- в месте заделки балки, а также зоне падения груза, может оказывать большое влияние краевой эффект, который в курсе «Сопротивление материалов» не учитывается.

Таблица 5.3 – Сопоставление результатов расчетов, полученных с помощью SolidWorks, и расчетных методов, представленных в курсе «Сопротивление материалов»

Метод анализа	Максимальное напряжение	Максимальное напряжение	Максимальный
напряженно-	на верхних волокнах балки	на нижних волокнах балки	прогиб балки
деформированного	сечения, прилегающего	сечения, прилегающего	в зоне падения
состояния балки	к заделке, $\sigma_{\partial.s}^{\max}$, МПа	к заделке, $\sigma_{\partial.H}^{\max}$, МПа	груза Δ_{∂} , мм
SolidWorks	61,8	- 104,4	19,4
Сопротивление	66,4	- 97,83	20,53
материалов			
Процент	6,9	6,3	5,5
расхождения			

6 Оформление отчета о проведенном сопоставительном анализе балки, подверженной удару падающим грузом с использованием обоих подходов

Цель работы: оформить отчет о проведенном сопоставительном анализе балки, подверженной удару падающим грузом с использованием обоих подходов.

В данной лабораторной работе необходимо, по результатам проведенных расчетов, представленных в подразделах 5.1–5.5, сформировать заключительный отчет о сопоставительном анализе балки, подверженной поперечному удару падающим грузом. Данный отчет выполнить в текстовом редакторе Word по аналогии с информацией, представленной в подразделах 5.1–5.5 данных методических рекомендаций.

Отчет должен завершаться выводами о проделанном сопоставительном анализе.

Список литературы

- 1 **Алямовский, А. А.** SolidWorks Simulation. Инженерный анализ для профессионалов: задачи, методы, рекомендации / А. А. Алямовский. Москва: ДМК Пресс, 2015. 562 с.: ил.
- 2 NX Advanced Simulation. Инженерный анализ / П. С. Гончаров [и др.]. Москва: ДМК Пресс, 2012. 504 с.: ил.
- 3 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. Ч. 1. 289 с.: ил.
- 4 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. Ч. 2. 281 с.: ил.
- 5 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. Москва: Юрайт, 2016. 413 с.
- 6 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна. 2-е изд., испр. и доп. Москва: ИНФРА-М, 2011.-638 с.
- 7 **Миронов**, **Л. П.** Краткий курс сопротивления материалов: учебное пособие / Л. П. Миронов. Хабаровск: ДВГУПС, 2011. 117 с.
- 8 Компьютерное моделирование и инженерный анализ: методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» дневной и заочной форм обучения: в 2 ч. / Сост. В. А. Попковский, А. Н. Юманова. Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. Ч. 1. 48 с.