无向图的连通性

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

无向图的连通性

现在，我们从之前对于两个具体结点间可达的研究过渡到对于图的整体特性的研究。

Definition

若无向图 G 中的任何两个结点都是可达的，则称 G 是连通图，否则称 G 是非连通图或分离图。

无向图的连通性

现在，我们从之前对于两个具体结点间可达的研究过渡到对于图的整体特性的研究。

Definition

若无向图 G 中的任何两个结点都是可达的，则称 G 是连通图，否则称 G 是非连通图或分离图。

- 无向完全图 $K_n(n \geqslant 1)$ 都是连通图;

无向图的连通性

现在，我们从之前对于两个具体结点间可达的研究过渡到对于图的整体特性的研究。

Definition

若无向图 G 中的任何两个结点都是可达的，则称 G 是连通图，否则称 G 是非连通图或分离图。

- 无向完全图 $K_n (n \geqslant 1)$ 都是连通图;
- 多于一个结点的零图都是非连通图。

无向图的连通性

现在，我们从之前对于两个具体结点间可达的研究过渡到对于图的整体特性的研究。

Definition

若无向图 G 中的任何两个结点都是可达的，则称 G 是连通图，否则称 G 是非连通图或分离图。

- 无向完全图 $K_n(n \geqslant 1)$ 都是连通图;
- 多于一个结点的零图都是非连通图。
- 非平凡无向线图 G 是连通图当且仅当它的可达性矩阵 P 的所有元素均为 1。

无向图结点间的可达关系

Theorem

无向图 $G=<V,E>$ 中结点之间的可达关系 $R=\{<u,v>|u,v\in V,u$到v可达$\}$, 则 R 是 V 上的等价关系.

无向图结点间的可达关系

Theorem

无向图 $G=<V,E>$ 中结点之间的可达关系 $R=\{<u,v>|u,v\in V,u\text{到}v\text{可达}\}$, 则 R 是 V 上的等价关系.

Proof.

可见，R 是 V 上的等价关系。 □

无向图结点间的可达关系

Theorem

无向图 $G=<V,E>$ 中结点之间的可达关系 $R=\{<u,v>|u,v\in V,u$到v可达$\}$, 则 R 是 V 上的等价关系.

Proof.

1. 对任意 $v\in V$，由于规定任何结点到自身总是可达的，因此 $<v,v>\in R$，故 R 是自反的；

可见，R 是 V 上的等价关系。 □

无向图结点间的可达关系

Theorem

无向图 $G=<V,E>$ 中结点之间的可达关系 $R=\{<u,v>|u,v\in V, u\text{到}v\text{可达}\}$, 则 R 是 V 上的等价关系.

Proof.

1. 对任意 $v\in V$，由于规定任何结点到自身总是可达的，因此 $<v,v>\in R$，故 R 是自反的；
2. 对任意 $u,v\in V$，若 $<u,v>\in R$，则 u 到 v 可达，即存在从 u 到 v 的通路，由于 G 是无向图，因此该通路也是从 v 到 u 的通路，从而 v 到 u 可达，即 $<v,u>\in R$，故 R 是对称的；

可见，R 是 V 上的等价关系。 □

无向图结点间的可达关系

Theorem

无向图 $G=<V,E>$ 中结点之间的可达关系 $R=\{<u,v>|u,v\in V, u\text{到}v\text{可达}\}$, 则 R 是 V 上的等价关系.

Proof.

1. 对任意 $v\in V$，由于规定任何结点到自身总是可达的，因此 $<v,v>\in R$，故 R 是自反的；
2. 对任意 $u,v\in V$，若 $<u,v>\in R$，则 u 到 v 可达，即存在从 u 到 v 的通路，由于 G 是无向图，因此该通路也是从 v 到 u 的通路，从而 v 到 u 可达，即 $<v,u>\in R$，故 R 是对称的；
3. 对任意 $u,v,w\in V$，若 $<u,v>\in R$，$<v,w>\in R$，则 u 到 v 可达，v 到 w 可达，即存在从 u 到 v 的通路和从 v 到 w 的通路，于是存在从 u 经过 v 到 w 的通路，即 u 到 w 是可达的，即 $<u,w>\in R$，故 R 是传递的。

可见，R 是 V 上的等价关系。 □

可达关系-> 连通分支

Definition

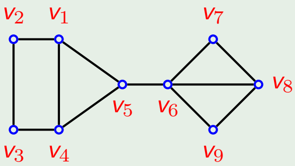
无向图 $G =< V, E >$ 中结点之间的可达关系 R 的每个等价类导出的子图都称为 G 的一个连通分支。用 $p(G)$ 表示 G 中的连通分支个数。

可达关系-> 连通分支

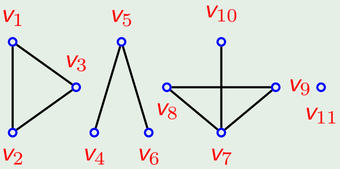
Definition

无向图 $G=<V,E>$ 中结点之间的可达关系 R 的每个等价类导出的子图都称为 G 的一个连通分支。用 $p(G)$ 表示 G 中的连通分支个数。

Example



$p(G_1)=1$



$p(G_2)=4$

点割集与边割集

对于图的连通性而言，不同结点或边的”重要性”是不同的，比如在通信网络中，有的结点或边出现中断，会对整个连通性的影响至关重要，而有的则不影响全局。另外，也存在一部分结点联合起来，从而对于整个图的连通性起关键作用。

图的删除操作

对于一个无向图 G，

- $G - e$ 表示从图 G 中删除边 e，$G - E'$ 表示从图 G 中删除边的集合 E' 中所有边。

点割集与边割集

对于图的连通性而言，不同结点或边的" 重要性" 是不同的，比如在通信网络中，有的结点或边出现中断，会对整个连通性的影响至关重要，而有的则不影响全局。另外，也存在一部分结点联合起来，从而对于整个图的连通性起关键作用。

图的删除操作

对于一个无向图 G，

- $G-e$ 表示从图 G 中删除边 e，$G-E'$ 表示从图 G 中删除边的集合 E' 中所有边。
- $G-v$ 表示从图 G 中删除结点 v 及其关联的所有边，$G-V'$ 表示从图 G 中删除结点集合 V' 中所有结点以及这些结点关联的所有的边。

点割集

Definition

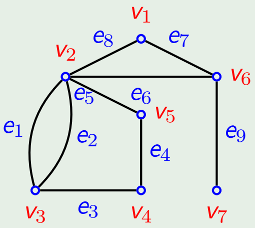
设无向图 $G=<V,E>$，若存在结点子集 $V'\subset V$, 使得 $p(G-V')>p(G)$, 而对于任意的 $V''\subset V'$, 均有 $p(G-V'')=p(G)$，则称 V' 为 G 的一个**点割集**。特别地，若点割集中只有一个结点 v，则称 v 为**割点**。

点割集

Definition

设无向图 $G=<V,E>$，若存在结点子集 $V'\subset V$, 使得 $p(G-V')>p(G)$, 而对于任意的 $V''\subset V'$, 均有 $p(G-V'')=p(G)$，则称 V' 为 G 的一个**点割集**。特别地，若点割集中只有一个结点 v，则称 v 为**割点**。

Example

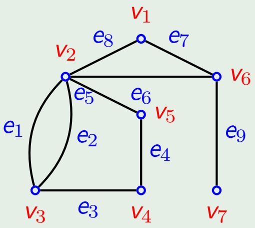


点割集

Definition

设无向图 $G =< V, E >$，若存在结点子集 $V' \subset V$, 使得 $p(G - V') > p(G)$, 而对于任意的 $V'' \subset V'$, 均有 $p(G - V'') = p(G)$，则称 V' 为 G 的一个**点割集**。特别地，若点割集中只有一个结点 v，则称 v 为**割点**。

Example



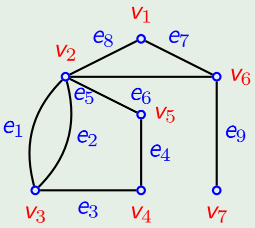
- $\{v_3, v_5\}$ $\{v_2\}$ $\{v_6\}$ 为点割集;

点割集

Definition

设无向图 $G =< V, E >$，若存在结点子集 $V' \subset V$, 使得 $p(G - V') > p(G)$, 而对于任意的 $V'' \subset V'$, 均有 $p(G - V'') = p(G)$，则称 V' 为 G 的一个**点割集**。特别地，若点割集中只有一个结点 v，则称 v 为**割点**。

Example



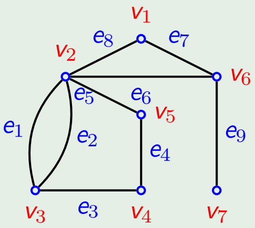
- $\{v_3, v_5\}$ $\{v_2\}$ $\{v_6\}$ 为点割集;
- v_2, v_6 是割点;

点割集

Definition

设无向图 $G=<V,E>$，若存在结点子集 $V' \subset V$, 使得 $p(G-V') > p(G)$, 而对于任意的 $V'' \subset V'$, 均有 $p(G-V'') = p(G)$，则称 V' 为 G 的一个**点割集**。特别地，若点割集中只有一个结点 v，则称 v 为**割点**。

Example



- $\{v_3, v_5\}$ $\{v_2\}$ $\{v_6\}$ 为点割集;
- v_2, v_6 是割点;
- $\{v_2, v_4\}$ $\{v_1, v_6\}$ 都不是点割集.

边割集

Definition

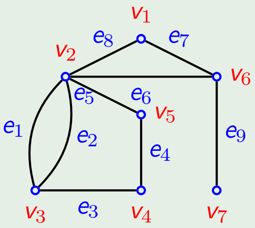
设无向图 $G =< V, E >$，若存在边的子集 $E' \subset E$, 使得 $p(G - E') > p(G)$, 而对于任意的 $E'' \subset E'$, 均有 $p(G - E'') = p(G)$，则称 E' 为 G 的一个边割集。特别地，若边割集中只有一条边 e，则称 e 为割边。

边割集

Definition

设无向图 $G=<V,E>$，若存在边的子集 $E' \subset E$, 使得 $p(G-E') > p(G)$, 而对于任意的 $E'' \subset E'$, 均有 $p(G-E'') = p(G)$，则称 E' 为 G 的一个**边割集**。特别地，若边割集中只有一条边 e，则称 e 为**割边**。

Example

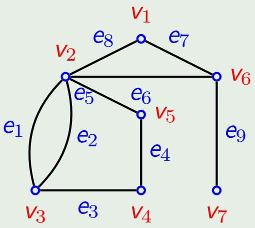


边割集

Definition

设无向图 $G =< V, E >$，若存在边的子集 $E' \subset E$, 使得 $p(G - E') > p(G)$, 而对于任意的 $E'' \subset E'$, 均有 $p(G - E'') = p(G)$，则称 E' 为 G 的一个**边割集**。特别地，若边割集中只有一条边 e，则称 e 为**割边**。

Example



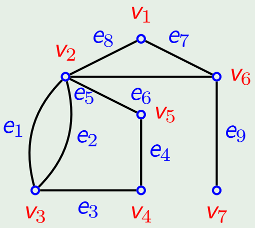
- $\{e_3, e_4\}$，$\{e_4, e_5\}$，$\{e_1, e_2, e_3\}$，$\{e_1, e_2, e_4\}$，$\{e_9\}$ 为边割集;

边割集

Definition

设无向图 $G = < V, E >$，若存在边的子集 $E' \subset E$, 使得 $p(G - E') > p(G)$, 而对于任意的 $E'' \subset E'$, 均有 $p(G - E'') = p(G)$，则称 E' 为 G 的一个边割集。特别地，若边割集中只有一条边 e，则称 e 为割边。

Example



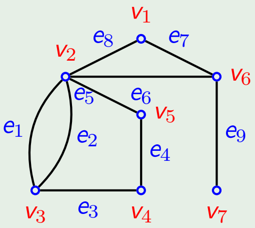
- $\{e_3, e_4\}$，$\{e_4, e_5\}$，$\{e_1, e_2, e_3\}$，$\{e_1, e_2, e_4\}$，$\{e_9\}$ 为边割集;
- e_9 是割边;

边割集

Definition

设无向图 $G =< V, E >$，若存在边的子集 $E' \subset E$, 使得 $p(G - E') > p(G)$, 而对于任意的 $E'' \subset E'$, 均有 $p(G - E'') = p(G)$，则称 E' 为 G 的一个边割集。特别地，若边割集中只有一条边 e，则称 e 为割边。

Example



- $\{e_3, e_4\}$，$\{e_4, e_5\}$，$\{e_1, e_2, e_3\}$，$\{e_1, e_2, e_4\}$，$\{e_9\}$ 为边割集;
- e_9 是割边;
- $\{e_6, e_7, e_9\}$，$\{e_1, e_2, e_5, e_6, e_9\}$ 都不是边割集.

点连通度与边连通度

在连通的无向图中，由点割集和边割集可知，其连通的程度也有较大差异，这一点可用点连通度和边连通度来表示。

Definition

设无向连通图$G=<V,E>$，

点连通度与边连通度

在连通的无向图中，由点割集和边割集可知，其连通的程度也有较大差异，这一点可用点连通度和边连通度来表示。

Definition

设无向连通图$G=<V,E>$，

- 称 $\kappa(G)=min\{|V'||V'$为 G 的点割集或$G-V'$为平凡图$\}$ 为 G 的点连通度，若 $\kappa(G)\geqslant k$, 则称 G 为 k- 连通图。

点连通度与边连通度

在连通的无向图中，由点割集和边割集可知，其连通的程度也有较大差异，这一点可用点连通度和边连通度来表示。

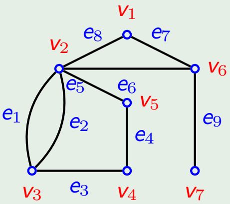
Definition

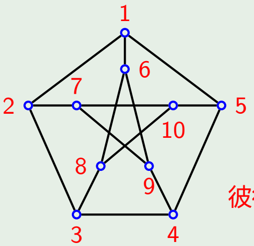
设无向连通图$G =< V, E >$，

- 称 $\kappa(G) = min\{|V'||V'$为 G 的点割集或$G - V'$为平凡图$\}$ 为 G 的点连通度，若 $\kappa(G) \geqslant k$, 则称 G 为 k- 连通图。
- 称 $\lambda(G) = min\{|E'||E'$为 G 的边割集$\}$ 为 G 的边连通度，若 $\lambda(G) \geqslant k$, 则称 G 为 k 边-连通图。

点连通度与边连通度

Example

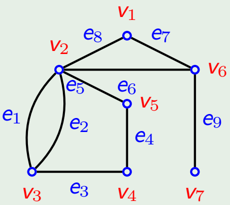


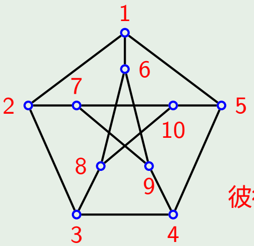


彼得森图

点连通度与边连通度

Example



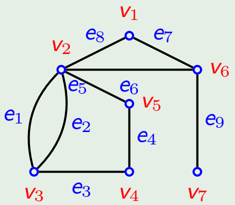


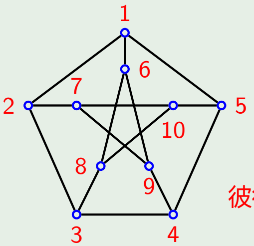
彼得森图

- 点连通度 1，是 1-连通图;

点连通度与边连通度

Example



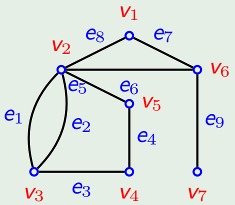


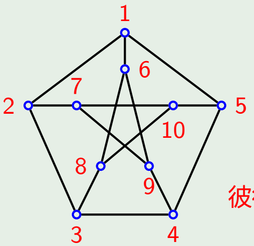
彼得森图

- 点连通度 1，是 1-连通图;
- 边连通度 1，是 1 边-连通图;

点连通度与边连通度

Example



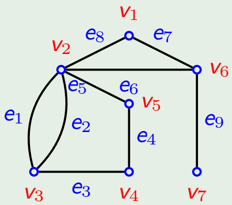


彼得森图

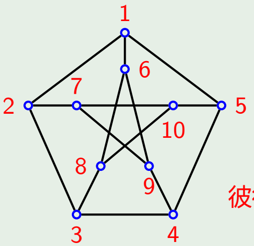
- 点连通度 1，是 1-连通图;
- 边连通度 1，是 1 边-连通图;
- 不是 2-连通图，也不是 2 边-连通图.

点连通度与边连通度

Example



- 点连通度 1，是 1-连通图;
- 边连通度 1，是 1 边-连通图;
- 不是 2-连通图，也不是 2 边-连通图.

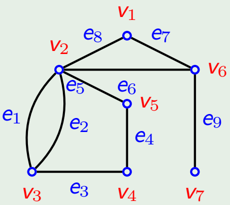


彼得森图

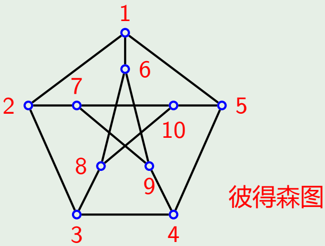
- 点连通度 3，是 1-,2-,3-连通图;

点连通度与边连通度

Example



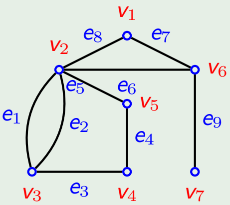
- 点连通度 1，是 1-连通图；
- 边连通度 1，是 1 边-连通图；
- 不是 2-连通图，也不是 2 边-连通图.



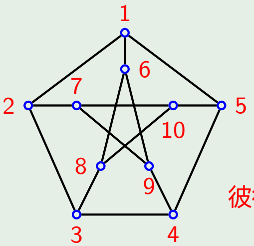
- 点连通度 3，是 1-,2-,3-连通图；
- 边连通度 3，是 1 边-,2 边-,3 边-连通图；

点连通度与边连通度

Example



- 点连通度 1，是 1-连通图；
- 边连通度 1，是 1 边-连通图；
- 不是 2-连通图，也不是 2 边-连通图.



彼得森图

- 点连通度 3，是 1-,2-,3-连通图；
- 边连通度 3，是 1 边-,2 边-,3 边-连通图；
- 不是 4-连通图，也不是 4 边-连通图.

点连通度与边连通度

☞

- 若 G 是平凡图，则 $V' = \varnothing$，$E' = \varnothing$, 所以 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$;

点连通度与边连通度

☞

- 若 G 是平凡图，则 $V' = \varnothing$，$E' = \varnothing$, 所以 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$;
- 若 G 是完全图 K_n，则 G 无点割集。当删除 $n-1$ 个结点后成为平凡图，因而 $\kappa(G) = n-1$。显然，$\lambda(G) = n-1$;

点连通度与边连通度

☞

- 若 G 是平凡图，则 $V' = \varnothing$，$E' = \varnothing$, 所以 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$;
- 若 G 是完全图 K_n，则 G 无点割集。当删除 $n-1$ 个结点后成为平凡图，因而 $\kappa(G) = n-1$。显然，$\lambda(G) = n-1$;
- 若 G 中存在割点，则 $\kappa(G) = 1$。若 G 中存在割边，则 $\lambda(G) = 1$。

点连通度与边连通度

☞

- 若 G 是平凡图，则 $V' = \varnothing$，$E' = \varnothing$, 所以 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$;
- 若 G 是完全图 K_n，则 G 无点割集。当删除 $n-1$ 个结点后成为平凡图，因而 $\kappa(G) = n-1$。显然，$\lambda(G) = n-1$;
- 若 G 中存在割点，则 $\kappa(G) = 1$。若 G 中存在割边，则 $\lambda(G) = 1$。
- 若 G 是非连通图，因为不用删除结点或边就已经不连通了，所以规定非连通图的点连通度和边连通度均为 0。

THE END, THANKS!