二元关系

关系的性质 (一) Lijie Wang

白反性与反白反

对称性与反对称

关系的性质 (一)

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对

性

传递性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

• 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);

关系的性质 (-

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对

1.1.

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

- 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);
- ② 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \notin R$, 那么称 R 在 A 上是反自反的(antireflexive), 或称 R 具有反自反性(antireflexivity);

关系的性质 (

Lijie Wang

自反性与反自愿

对称性与反对

性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

- 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);
- ② 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \notin R$, 那么称 R 在 A 上是反自反的(antireflexive), 或称 R 具有反自反性(antireflexivity);

Example

关系的性质(

Lijie Wang

自反性与反自愿

对称性与反对称

性

生油州

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

- 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);
- ② 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $< x, x > \notin R$, 那么称 R 在 A 上是反自反的(antireflexive), 或称 R 具有反自反性(antireflexivity);

Example

• 同姓关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是自反的关系;

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

- 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $\langle x, x \rangle \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);
- ② 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $\langle x, x \rangle \notin R$, 那么称 R 在 A 上是反自反的(antireflexive), 或称 R 具有反自反性(antireflexivity);

Example

- 同姓关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是自反的关系;
- 父子关系, 小干关系, 真包含关系都是反自反的关系,

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

5.递性

Example

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和

生

等递性

Example

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 R, S 和 T 如下:

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和

性

長選性

Example

- **①** $R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <3, 3> \};$ 自反
- **2** $S = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \};$

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和

性

長選性

Example

- **0** $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \};$
- ② S = {<1,2>,<2,3>,<3,1>}; 反自反
- $T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}.$

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和

性

長選性

Example

- **0** $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \};$
- ② S = {<1,2>,<2,3>,<3,1>}; 反自反
- **③** T = {<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>,<3,3>}. 非自反,非反自反

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和

性

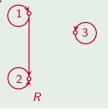
も递性

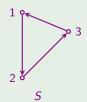
Example

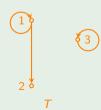
设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 R, S 和 T 如下:

- **0** $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \};$
- ② S = {<1,2>,<2,3>,<3,1>}; 反自反

关系图:







关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

-

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☞ 总结
 - 存在既不是自反的也不是反自反的关系;

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

_

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 存在既不是自反的也不是反自反的关系:
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系图中每个结点都有自环, 关系 R 是反自反的当且 仅当 R 的关系图中每个结点都无自环;

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和 ***

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 存在既不是自反的也不是反自反的关系:
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系图中每个结点都有自环, 关系 R 是反自反的当且 仅当 R 的关系图中每个结点都无自环;
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系矩阵的主对角线上全为 1, 关系 R 是反自反的当且仅当 R 的关系矩阵的主对角线上全为 0.

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

Lijie Wang

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

● 如果对任意的 x, y ∈ A, 如果 < x, y > ∈ R, 那么 < y, x > ∈ R, 则称 R 是对称 的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);

Definition

Lijie Wang

对称性与反对称

设 R 是集合 A 上的关系.

- ① 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 那么 $\langle y, x \rangle \in R$, 则称 R 是对称的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);
- ② 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$, 那么 x = y, 则称 R 是反 对称的(antisymmetric), 或称 R 具有反对称性(antisymmetry);



Lijie Wang

对称性与反对称

- **①** 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 那么 $\langle y, x \rangle \in R$, 则称 R 是对称 的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);
- ② 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$, 那么 x = y, 则称 R 是反 对称的(antisymmetric), 或称 R 具有反对称性(antisymmetry);

Example

关系的性质(

Lijie Wang

对称性与反对称

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

- 如果对任意的 x, y ∈ A, 如果 < x, y > ∈ R, 那么 < y, x > ∈ R, 则称 R 是对称 的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);
- ② 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, x > \in R$, 那么 x = y, 则称 R 是反对称的(antisymmetric), 或称 R 具有反对称性(antisymmetry);

Example

• 同姓关系, 朋友关系, 同余关系都是对称的关系;

Lijie Wang

对称性与反对称

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

- **①** 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 那么 $\langle y, x \rangle \in R$, 则称 R 是对称 的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);
- ② 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$, 那么 x = y, 则称 R 是反 对称的(antisymmetric), 或称 R 具有反对称性(antisymmetry);

Example

- 同姓关系. 朋友关系. 同余关系都是对称的关系:
- 父子关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是反对称的关系.

关系的性质 (一)

Lijie Wang

目及性与反目反 性

对称性与反对积

与弟性

Example

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自愿

对称性与反对

性

長递性

Example

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对

性

专递性

Example

- **1** $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \};$
- $S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \};$

Lijie Wang

对称性与反对称

Example

①
$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \};$$
 对称

$$T = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 4> \};$$

Lijie Wang

对称性与反对称

Example

- 对称 \mathbf{Q} $R = \{ < 1, 1 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 4, 4 > \}$:
- **2** $S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \};$ 反对称
- 非对称, 非反对称 **3** $T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle \};$
- **4** $V = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}.$

Lijie Wang

对称性与反对称

Example

- 对称 \mathbf{Q} $R = \{ < 1, 1 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 4, 4 > \}$:
- **2** $S = \{ <1, 1>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 4> \};$ 反对称
- **3** $T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle \};$ 非对称, 非反对称
- **4** V={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>}. 对称, 反对称

Lijie Wang

对称性与反对称

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

- 对称 \mathbf{Q} $R = \{ < 1, 1 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 4, 4 > \}$:
- **2** $S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \};$ 反对称
- **⑤** $T = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\};$ 非对称, 非反对称
- **4** $V = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}.$ 对称. 反对称

存在既不是对称的也不是反对称的关系,也存在既是对称又是反对称的关系;

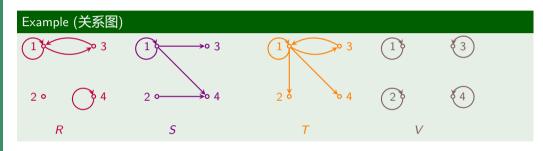
关系的性质 (一 Lijie Wang

.....

性

对称性与反对称 #*

-

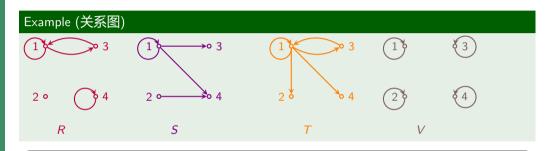


关系的性质 (-Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

1±



关系图判定法:关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系图中,任何一对结点之间,要么有方向相反的两条边,要么无边,关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系图中,任何一对结点之间至多只有一条边。

Lijie Wang

Example (关系矩阵)

$$M_{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

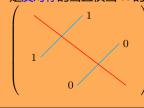
对称性与反对称

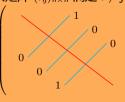
- 146 tot

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系矩阵判定法:关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵,关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $i\neq j$ 时, $r_{ij}=0$ 或 $r_{ij}=0$.





传递性

关系的性质 (一

Lijie Wang

性 对称性与反对称

传递性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系. 对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 那么 $< x, z > \in R$, 则称 R 是传递的(transitive), 或称 R 具有传递性(transitivity);

传递性

关系的性质 (一

Lijie Wang

士 对称性与反对称 #

传递性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系. 对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 那么 $< x, z > \in R$, 则称 R 是传递的(transitive), 或称 R 具有传递性(transitivity);

Example

Definition

Lijie Wang

传递性

设 R 是集合 A 上的关系. 对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 那么 $< x, z > \in R$, 则称 R 是传递的(transitive), 或称 R 具有传递性(transitivity);

Example

• 同姓关系, 小于关系, 包含关系, 整除关系, 飞机航线的可达关系都是传递的关系;



Definition

Lijie Wang

传递性

设 R 是集合 A 上的关系. 对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 那么 $< x, z > \in R$, 则称 R 是传递的(transitive), 或称 R 具有传递性(transitivity);

Example

- 同姓关系, 小于关系, 包含关系, 整除关系, 飞机航线的可达关系都是传递的关系;
- 父子关系, 朋友关系, 婚姻关系, 飞机航线的直达关系都不是传递的关系.

关系的性质 (一)

Lijie Wang

反性与反自反

对称性与反对称

性

专递性

Example

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对和

性

長递性

Example

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

性

专递性

Example

- **①** $R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3> \};$ 传递
- ② $S = \{ <1, 2 > \};$

Lijie Wang

传递性

Example

- 传递 \blacksquare R = {< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 3 >, < 1, 3 >};
- ② S = {< 1, 2 >}; 传递
- **3** $T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$:

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

生

传递性

Example

- **①** $R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3> \};$ 传递
- ② S = {< 1,2>}; 传递
- **③** T = {<1,1>,<1,2>,<2,3>}; 非传递

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

生

传递性

Example

- **①** $R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3> \};$ 传递
- ② S = {<1,2>}; 传递
- **③** T = {<1,1>,<1,2>,<2,3>}; 非传递
- 4 $V = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}.$ 非传递

关系的性质 (一

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

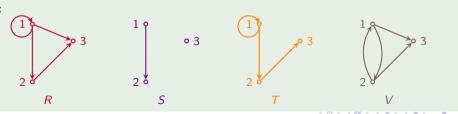
夢生

Example

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

- **①** $R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3> \};$ 传递
- ② S = {<1,2>}; 传递
- **3** $T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \};$ 非传递
- **4** V = {<1,2>,<2,3>,<1,3>,<2,1>}. 非传递

关系图:



关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

性

传递性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自然

对称性与反对称 性

传递性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

• 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系图中,任何三个不同结点 x, y, z 之间,若从 x 到 y 有一条边存在,从 y 到 z 有一条边存在,则从 x 到 z 一定有一条边存在;

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自愿

对称性与反对称 性

传递性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系图中, 任何三个不同结点 x, y, z 之间, 若从 x 到 y 有一条边存在, 从 y 到 z 有一条边存在, 则从 x 到 z 一定有一条边存在;
- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系矩阵中,对任意 $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$,若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{ik} = 1$,必有 $r_{ik} = 1$.

关系的性质 (一)

Lijie Wang

自反性与反自反

对称性与反对称

传递性



THE END, THANKS!