二元关系

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

关系的幂运算

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Definition

设 R 是集合 A 上的关系,则 R 的 n 次幂,记为 R^n ,定义如下:



关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛的

Definition

设 R 是集合 A 上的关系,则 R 的 n 次幂,记为 R^n ,定义如下:



关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Definition

设 R 是集合 A 上的关系,则 R 的 n 次幂,记为 R^n ,定义如下:

- **2** $R^1 = R$;



关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

冥运管的收敛*

Definition

设 R 是集合 A 上的关系,则 R 的 n 次幂,记为 R^n ,定义如下:

- **2** $R^1 = R$;
- $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n.$

Ŧ

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

嘉运算的收敛性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系,则 R 的 n 次幂,记为 R^n ,定义如下:

- $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n.$

3

• R" 仍然是 A 上的关系, 表示 R 多次自我复合的结果;

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

冥运管的收敛性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系,则 R 的 n 次幂,记为 R^n ,定义如下:

- **1** $R^0 = I_A$;
- **2** $R^1 = R$;

F

- R" 仍然是 A 上的关系, 表示 R 多次自我复合的结果;
- $R^{m+n} = R^m \circ R^n = R^n \circ R^m = R^{n+m}$, $(R^m)^n = R^{mn}, m, n \in \mathbb{N}$;

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

冥运管的收敛机

Example

设 $R = \{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系,考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$:

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

=>= *****

Example

设 R = {<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>} 是定义在集合

 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系,考察 $R^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$R^1 = R$$
,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

コンニを行うわけっそか

Example

设 R = {<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>} 是定义在集合

 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系,考察 $R^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$R^1=R$$
,

$$R^2 = R \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

寒 云管的此 敛

Example

设 R = {<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>} 是定义在集合

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
 上的关系,考察 $R^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$R^1=R$$
,

$$R^2 = R \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \}$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

=>= 400 45 15 05

Example

设 R = {<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>} 是定义在集合

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
 上的关系,考察 $R^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$R^1=R$$
,

$$R^2 = R \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 5>, <3, 6> \}$$
 ,

$$\textit{R}^4 = \textit{R}^3 \circ \textit{R} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$$
 ,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

裏法質的收敛!

设 R = {<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>} 是定义在集合

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
 上的关系,考察 $R^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$R^1=R$$
,

$$R^2 = R \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$$

$$\textit{R}^3 = \textit{R}^2 \circ \textit{R} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$$
 ,

$$R^4 = R^3 \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <2, 6> \}$$

$$R^5 = R^4 \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <1, 6> \}$$
 ,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

夏运管的收敛 🕏

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
 上的关系,考察 $R^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$R^1=R$$
,

$$R^2 = R \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$$
,

$$\textit{R}^3 = \textit{R}^2 \circ \textit{R} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$$
 ,

$$R^4 = R^3 \circ R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle \}$$

$$R^5 = R^4 \circ R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle \}$$

$$R^6 = R^5 \circ R = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <1, 6> \} = R^5$$

 $R^7 = R^6 \circ R = R^5$.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

更;示管的Jb/sb/

设
$$R = \{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$$
 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系,考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$: $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$, $R^3 = R^2 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$, $R^4 = R^3 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$, $R^5 = R^4 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$, $R^6 = R^5 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\} = R^5$.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

国际管的收敛

设
$$R = \{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$$
 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系,考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$: $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$, $R^3 = R^2 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$, $R^4 = R^3 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$, $R^5 = R^4 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$, $R^6 = R^5 \circ R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}$, $R^6 = R^6 \circ R = R^5$, ... $R^7 = R^6 \circ R = R^5$, ... $R^7 = R^6 \circ R = R^5$,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Example

设 $S = \{ <1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6> \}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系, 考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$:

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

关系, 考察
$$S^n(n=1,2,3,\cdots)$$
:

$$S^1=S$$
,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

. . .

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

=>= 400 45 115 45

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$${\it S}^1 = {\it S}, \ {\it S}^2 = {\it S} \circ {\it S} = \{<1,3>, <2,4>, <3,5>, <4,6>\},$$

$$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \},$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

$${\it S}^3 = {\it S} \circ {\it S} \circ {\it S} = {\it S}^2 \circ {\it S} = \{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}, \ {\it S}^4 = {\it S}^3 \circ {\it S} = \{<1,5>,<2,6>\},$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

=>= 400 45 115 45

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

$$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{ <1, 4>, <2, 5>, <3, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{ <1, 5>, <2, 6> \}, \quad S^4 = S^3$$

$$S^5 = S^4 \circ S = \{ \langle 1, 6 \rangle \},$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

$$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{<1,5>,<2,6>\},$$

$$S^5 = S^4 \circ S = \{ \langle 1, 6 \rangle \}, S^6 = S^5 \circ S = \emptyset,$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

$${\it S}^{3} = {\it S} \circ {\it S} \circ {\it S} = {\it S}^{2} \circ {\it S} = \{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}, \ {\it S}^{4} = {\it S}^{3} \circ {\it S} = \{<1,5>,<2,6>\},$$

$$S^5 = S^4 \circ S = \{ \langle 1, 6 \rangle \}, S^6 = S^5 \circ S = \emptyset, S^7 = \emptyset,$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{S}, \ \mathbf{S}^2 = \mathbf{S} \circ \mathbf{S} = \{<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\},$$

$$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}, \quad S^4 = S^3 \circ S = \{<1,5>,<2,6>\},$$

$$S^5 = S^4 \circ S = \{ \langle 1, 6 \rangle \}, S^6 = S^5 \circ S = \emptyset, S^7 = \emptyset, \cdots S^n = \emptyset (n > 5);$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

塞运算的收敛f

Example

设 $S = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的

关系, 考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$:

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

$${\it S}^{3} = {\it S} \circ {\it S} \circ {\it S} = {\it S}^{2} \circ {\it S} = \{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}, \ {\it S}^{4} = {\it S}^{3} \circ {\it S} = \{<1,5>,<2,6>\},$$

$$S^5=S^4\circ S=\{<1,6>\}$$
, $S^6=S^5\circ S=\varnothing$, $S^7=\varnothing$, \cdots $S^n=\varnothing(n>5)$;

☞ 由前例可见

• R" 的基数并非随着 n 的增加而增加 , 而是呈递减趋势;

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

Example

设 $S = \{ <1,2>, <2,3>, <3,4>, <4,5>, <5,6> \}$ 是定义在集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上的 关系. 考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$:

$$S^1 = S$$
, $S^2 = S \circ S = \{ <1, 3>, <2, 4>, <3, 5>, <4, 6> \}$,

$${\it S}^{3} = {\it S} \circ {\it S} \circ {\it S} = {\it S}^{2} \circ {\it S} = \{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}, \ {\it S}^{4} = {\it S}^{3} \circ {\it S} = \{<1,5>,<2,6>\},$$

$$S^5=S^4\circ S=\{<1,6>\},\ S^6=S^5\circ S=\varnothing,\ S^7=\varnothing,\ \cdots\ S^n=\varnothing(n>5)$$
;

☞ 由前例可见

- R" 的基数并非随着 n 的增加而增加 , 而是呈递减趋势;
- 当 $n \geqslant |A|$ 时,则 $R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合,且 |A|=n,R 是 A 上的关系,则 $\bigcup_{i=0}^{\infty}R^{i}=\bigcup_{i=0}^{n}R^{i}$.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合, 且 |A| = n, R 是 A 上的关系, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i.$$

Proof.

显然有
$$\bigcup_{i=1}^{n} R^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i}$$
.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合, 且 |A| = n, R 是 A 上的关系,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i.$$

Proof.

显然有
$$\bigcup_{i=1}^n R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty R^i$$
. 下面仅证明 $\bigcup_{i=1}^\infty R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$.

Lijie Wang

Theorem

设 A 是有限集合, 且 |A| = n, R 是 A 上的关系, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i.$$

Proof.

显然有
$$\bigcup_{i=1}^{n} R^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i}$$
. 下面仅证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$. 因为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = (\bigcup_{i=1}^{n} R^{i}) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^{i})$, 所以只要证明 $\forall k > n, R^{k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$ 即可。

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合,且 |A| = n, R 是 A 上的关系,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i.$$

Proof.

显然有 $\bigcup_{i=1}^n R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty R^i$. 下面仅证明 $\bigcup_{i=1}^\infty R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$.

因为
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = (\bigcup_{i=1}^n R^i) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i)$$
,所以只要证明 $\forall k > n, R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 即可。对任意 $< a, b > \in R^k$,由复合运算定义可知,存在 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1} \in A$,使得

 $< a, a_1 > \in R, < a_1, a_2 > \in R, < a_2, a_3 > \in R, ..., < a_{k-1}, b > \in R$

至少有两个元素相同.

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合,且 |A| = n, R 是 A 上的关系,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i.$$

Proof.

显然有 $\bigcup_{i=1}^n R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty R^i$. 下面仅证明 $\bigcup_{i=1}^\infty R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$.

因为
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = (\bigcup_{i=1}^{n} R^i) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i)$$
,所以只要证明 $\forall k > n, R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ 即可。 对任意 $< a, b > \in R^k$ 中复合运管定义可知,存在 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{k+1} \in A^k$

对任意 $< a, b > \in R^k$, 由复合运算定义可知, 存在 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1} \in A$, 使得

$$< a, a_1 > \in R, < a_1, a_2 > \in R, < a_2, a_3 > \in R, ..., < a_{k-1}, b > \in R$$

由于 |A| = n , 且 k > n , 根据鸽笼原理可知, k + 1 个元素 $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k = b$ 中

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< \textit{a}_{0}, \textit{a}_{1}> \in \textit{R}, \cdots, < \textit{a}_{i-1}, \textit{a}_{i}> \in \textit{R}, < \textit{a}_{j}, \textit{a}_{j+1}> \in \textit{R}, ..., < \textit{a}_{k-1}, \textit{a}_{k}> \in \textit{R}$$

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1> \in R, \cdots, < a_{i-1}, a_i> \in R, < a_j, a_{j+1}> \in R, ..., < a_{k-1}, a_k> \in R$$

由复合运算得 $< a,b> = < a_0, a_k> \in R^{k'}$, 其中 k' = k - (j-i). 此时:





关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1> \in \textit{R}, \cdots, < a_{i-1}, a_i> \in \textit{R}, < a_j, a_{j+1}> \in \textit{R}, ..., < a_{k-1}, a_k> \in \textit{R}$$

由复合运算得 $\langle a,b \rangle = \langle a_0,a_k \rangle \in R^{k'}$, 其中 k' = k - (j-i). 此时:

若
$$k' \leqslant n$$
,则 $< a, b > \in \bigcup_{i=1}^n R^i$;



关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1> \in R, \cdots, < a_{i-1}, a_i> \in R, < a_j, a_{j+1}> \in R, ..., < a_{k-1}, a_k> \in R$$

由复合运算得 $\langle a, b \rangle = \langle a_0, a_k \rangle \in R^{k'}$, 其中 k' = k - (j - i). 此时:

若
$$k' \leqslant n$$
 , 则 $< a,b> \in \bigcup_{i=1}^n R^i$;

若 k' > n , 则重复上述做法 , 最终总能找到 $k'' \leqslant n$, 使得 < a,b>=< $a_0,a_k>\in R^{k''}$,

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1> \in R, \cdots, < a_{i-1}, a_i> \in R, < a_j, a_{j+1}> \in R, ..., < a_{k-1}, a_k> \in R$$

由复合运算得 $\langle a, b \rangle = \langle a_0, a_k \rangle \in R^{k'}$, 其中 k' = k - (j - i). 此时:

若
$$k' \leqslant n$$
 , 则 $< a, b > \in \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$;

若 k'>n , 则重复上述做法 , 最终总能找到 $k''\leqslant n$, 使得 < a,b>=< $a_0,a_k>\in R^{k''}$, 即有 < $a,b>\in\bigcup_{i=1}^n R^i$. 于是得到 $R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^n R^i$.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1> \in R, \cdots, < a_{i-1}, a_i> \in R, < a_j, a_{j+1}> \in R, ..., < a_{k-1}, a_k> \in R$$

由复合运算得 $\langle a, b \rangle = \langle a_0, a_k \rangle \in R^{k'}$, 其中 k' = k - (j - i). 此时:

若
$$k' \leqslant n$$
 , 则 $< a, b > \in \overset{"}{\bigcup} R^i$;

若 k'>n , 则重复上述做法 , 最终总能找到 $k''\leqslant n$, 使得 < a,b>=< $a_0,a_k>\in R^{k''}$, 即有 < $a,b>\in\bigcup_{i=1}^n R^i$. 于是得到 $R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^n R^i$.

由 k 的任意性知:
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$$
.

关系的幂运算

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$, 则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1> \in \textit{R}, \cdots, < a_{i-1}, a_i> \in \textit{R}, < a_j, a_{j+1}> \in \textit{R}, ..., < a_{k-1}, a_k> \in \textit{R}$$

由复合运算得 $\langle a, b \rangle = \langle a_0, a_k \rangle \in R^{k'}$, 其中 k' = k - (j - i). 此时:

若
$$k' \leqslant n$$
 , 则 $< a, b > \in \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$;

若 k'>n , 则重复上述做法 , 最终总能找到 $k''\leqslant n$, 使得 < a,b>=< $a_0,a_k>\in R^{k''}$, 即有 < $a,b>\in\bigcup_{i=1}^n R^i$. 于是得到 $R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^n R^i$.

由 k 的任意性知:
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$$
.

综上所述,
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$
.

Lijie Wang

幂运算定义

幂运算的性质

幂运算的收敛性



THE END, THANKS!