其它次序关系

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

拟序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为"$<$ ", 读作"小于 ", 并将"$<a,b>\in<$ "记为 $a<b$. 序偶 $<A,<>$ 称为拟序集 (quasi-order set).

拟序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“$<$ ”, 读作“小于 ”, 并将“$< a, b > \in <$ ”记为 $a < b$. 序偶 $< A, < >$ 称为拟序集 (quasi-order set).

Example

拟序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“$<$ ”, 读作“小于 ”, 并将“$< a, b > \in <$ ”记为 $a < b$. 序偶 $< A, < >$ 称为拟序集 (quasi-order set).

Example

- 实数集上的小于关系是拟序关系;

拟序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“$<$ ”, 读作“小于 ”, 并将“$<a,b>\in<$ ”记为 $a<b$. 序偶 $<A,<>$ 称为拟序集 (quasi-order set).

Example

- 实数集上的小于关系是拟序关系;
- 幂集上的真包含关系是拟序关系.

拟序关系

Example

设 R 是集合 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的.

☞ 拟序关系 VS 偏序关系

拟序关系

Example

设 R 是集合 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的.

Proof.

使用反证法, 假设 R 不是反对称的关系, 则必存在 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 满足 $< x, y >\in R$ 并且 $< y, x >\in R$. 因为 R 是 A 上的拟序关系, 所以 R 具有传递性, 从而有 $< x, x >\in R$. 这与 R 是反自反的矛盾, 从而假设错误, 即 R 一定是反对称的. □

☞ 拟序关系 VS 偏序关系

拟序关系

Example

设 R 是集合 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的.

Proof.

使用反证法, 假设 R 不是反对称的关系, 则必存在 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 满足 $<x, y> \in R$ 并且 $<y, x> \in R$. 因为 R 是 A 上的拟序关系, 所以 R 具有传递性, 从而有 $<x, x> \in R$. 这与 R 是反自反的矛盾, 从而假设错误, 即 R 一定是反对称的. □

☞ 拟序关系 VS 偏序关系

- R 是集合 A 上的偏序关系, 则 $R - I_A$ 是 A 上的拟序关系;

拟序关系

Example

设 R 是集合 A 上的拟序关系，则 R 是反对称的.

Proof.

使用反证法，假设 R 不是反对称的关系，则必存在 $x, y \in A$，且 $x \neq y$，满足 $<x, y> \in R$ 并且 $<y, x> \in R$. 因为 R 是 A 上的拟序关系，所以 R 具有传递性，从而有 $<x, x> \in R$. 这与 R 是反自反的矛盾，从而假设错误，即 R 一定是反对称的. □

☞ 拟序关系 VS 偏序关系

- R 是集合 A 上的偏序关系，则 $R - I_A$ 是 A 上的拟序关系;
- S 是集合 A 上的拟序关系，则 $S \cup I_A$ 是 A 上的偏序关系.

全序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是一个偏序关系，若对任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的，则称关系"$\leqslant$ "为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $< A, \leqslant >$ 为全序集(total order set)，或线序集，或链。

全序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是一个偏序关系，若对任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的，则称关系"$\leqslant$ "为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $< A, \leqslant >$ 为全序集(total order set)，或线序集，或链。

Example

全序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是一个偏序关系，若对任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的，则称关系"$\leqslant$"为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $< A, \leqslant >$ 为全序集(total order set)，或线序集，或链。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$"$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是全序关系;

全序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是一个偏序关系, 若对任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的, 则称关系"$\leqslant$ "为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $< A, \leqslant >$ 为全序集(total order set) ，或线序集, 或链。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$ "$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是全序关系;
- 数集上的小于等于关系是全序关系;

全序关系

Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是一个偏序关系，若对任意 $x, y \in A$, x 与 y 都是可比的，则称关系"$\leqslant$"为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $<A, \leqslant>$ 为全序集(total order set)，或线序集，或链。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$"$= \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>\}$ 是全序关系;
- 数集上的小于等于关系是全序关系;
- 正整数集合上的整除关系不是全序关系，但集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 上的整除关系是全序关系;

全序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是一个偏序关系, 若对任意 $x, y \in A$,x 与 y 都是可比的, 则称关系"$\leqslant$ "为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $< A, \leqslant >$ 为全序集(total order set) ,或线序集, 或链。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$ "$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是全序关系;
- 数集上的小于等于关系是全序关系;
- 正整数集合上的整除关系不是全序关系, 但集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 上的整除关系是全序关系;
- 幂集 $P(A)$ 上的包含关系在 $|A| < 2$ 时是全序关系; 但 $|A| \geqslant 2$ 时则不是全序关系;

全序关系

Definition

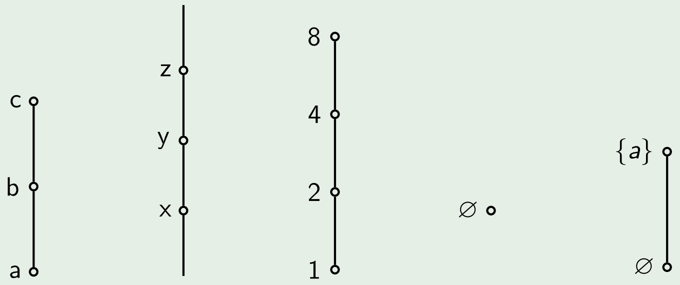
设 $<A,\leqslant>$ 是一个偏序关系, 若对任意 $x,y\in A$,x 与 y 都是可比的, 则称关系"$\leqslant$ "为全序关系(total order relation) 或线序关系. 称 $<A,\leqslant>$ 为全序集(total order set) ，或线序集, 或链。

Example

- 集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系"$\leqslant$ "$=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$ 是全序关系;
- 数集上的小于等于关系是全序关系;
- 正整数集合上的整除关系不是全序关系, 但集合 $A=\{1,2,4,8\}$ 上的整除关系是全序关系;
- 幂集 $P(A)$ 上的包含关系在 $|A|<2$ 时是全序关系; 但 $|A|\geqslant 2$ 时则不是全序关系;
- 计算机科学中常用的字典排序关系是全序关系。

全序关系的哈斯图

Example



全序关系的哈斯图将集合中的元素排成一条线，像一条链子，这充分体现了全序集可以称作线序集或链的原因.

良序关系

Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是全序集,若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称"$\leqslant$"为良序关系(well order relation), 此时 $<A, \leqslant>$ 称为良序集(well order set)。

良序关系

Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是全序集,若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称"$\leqslant$"为良序关系(well order relation), 此时 $<A, \leqslant>$ 称为良序集(well order set)。

Example

良序关系

Definition

设 $<A,\leqslant>$ 是全序集,若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称“$\leqslant$ ”为良序关系(well order relation), 此时 $<A,\leqslant>$ 称为良序集(well order set)。

Example

- 集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系“$\leqslant$ ”$=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$ 是良序关系;

良序关系

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是全序集,若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称"$\leqslant$ "为良序关系(well order relation), 此时 $< A, \leqslant >$ 称为良序集(well order set)。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系"$\leqslant$ "$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是良序关系;
- 整数集上的小于等于关系不是良序关系, 但正整数集上的小于等于关系是良序关系;

良序关系

Definition

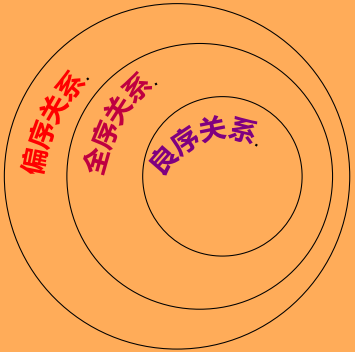
设 $< A, \leqslant >$ 是全序集,若 A 的任何一个非空子集都有最小元素，则称“$\leqslant$ ”为良序关系(well order relation), 此时 $< A, \leqslant >$ 称为良序集(well order set)。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系“$\leqslant$ ”$= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 是良序关系;
- 整数集上的小于等于关系不是良序关系, 但正整数集上的小于等于关系是良序关系;
- 良序关系一定是全序关系，而有限全序集一定是良序集.

总结

偏序关系，全序关系和良序关系之间的关系如下图:



THE END, THANKS!