

树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

根树

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



有向树和根树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

一个有向图，若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树，则这个有向图称为有向树。

有向树和根树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

一个有向图，若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树，则这个有向图称为有向树。

Definition

一棵非平凡的有向树，如果恰有一个结点的入度为 0，其余所有结点的入度均为 1，则称之为根树(root tree) 或外向树(outward tree)。入度为 0 的结点称为根(root)；出度为 0 的结点称为叶(leaf)；入度为 1，出度大于 0 的结点称为内点(interior point)；又将内点和根统称为分支点(branch point)。

有向树和根树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

一个有向图，若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树，则这个有向图称为有向树。

Definition

一棵非平凡的有向树，如果恰有一个结点的入度为 0，其余所有结点的入度均为 1，则称之为根树(root tree) 或外向树(outward tree)。入度为 0 的结点称为根(root)；出度为 0 的结点称为叶(leaf)；入度为 1，出度大于 0 的结点称为内点(interior point)；又将内点和根统称为分支点(branch point)。

Definition

在根树中，从根到任一结点 v 的通路长度，称为该结点的层数；称层数相同的结点在同一层上；所有结点的层数中最大的称为根树的高。

根树

根树

Lijie Wang

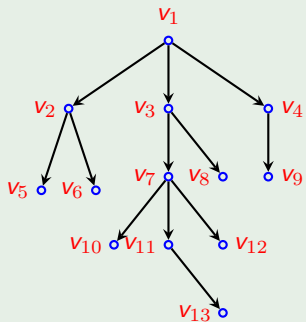
定义

倒置法

家族关系

k 元树

Example



根树

根树

Lijie Wang

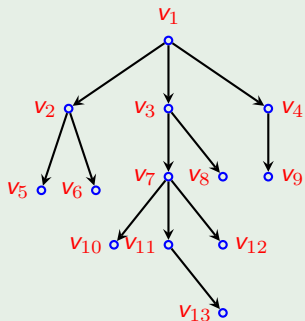
定义

倒置法

家族关系

k 元树

Example



倒置法

习惯上我们使用倒置法来画根树，即把根画在最上方，叶画在下方，有向边的方向均指向下方，这样就可以省去全部箭头，不会发生误解。

根树

根树

Lijie Wang

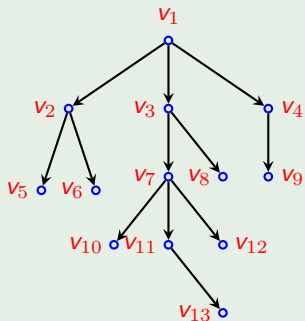
定义

倒置法

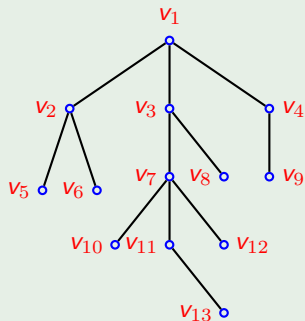
家族关系

k 元树

Example



倒置法



习惯上我们使用倒置法来画根树，即把根画在最上方，叶画在下方，有向边的方向均指向下方，这样就可以省去全部箭头，不会发生误解。

树的家族关系

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

在根树中，若从结点 v_i 到 v_j 可达，则称 v_i 是 v_j 的祖先， v_j 是 v_i 的后代；又若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边，则称 v_i 是 v_j 的父亲， v_j 是 v_i 的儿子；如果两个结点是同一个结点的儿子，则称这两个结点是兄弟。

树的家族关系

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

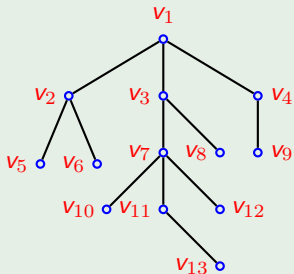
家族关系

k 元树

Definition

在根树中，若从结点 v_i 到 v_j 可达，则称 v_i 是 v_j 的祖先， v_j 是 v_i 的后代；又若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边，则称 v_i 是 v_j 的父亲， v_j 是 v_i 的儿子；如果两个结点是同一个结点的儿子，则称这两个结点是兄弟。

Example



树的家族关系

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

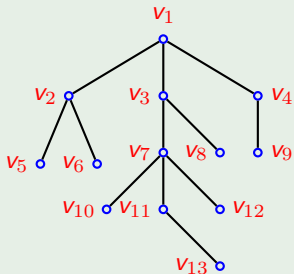
家族关系

k 元树

Definition

在根树中, 若从结点 v_i 到 v_j 可达, 则称 v_i 是 v_j 的祖先, v_j 是 v_i 的后代; 又若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边, 则称 v_i 是 v_j 的父亲, v_j 是 v_i 的儿子; 如果两个结点是同一个结点的儿子, 则称这两个结点是兄弟。

Example



- v_2 是 v_5 和 v_6 的父亲, v_5 和 v_6 是 v_2 的儿子;

树的家族关系

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

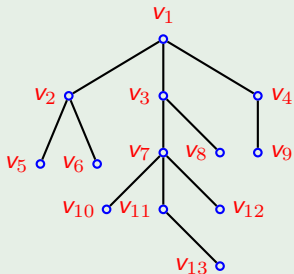
家族关系

k 元树

Definition

在根树中, 若从结点 v_i 到 v_j 可达, 则称 v_i 是 v_j 的祖先, v_j 是 v_i 的后代; 又若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边, 则称 v_i 是 v_j 的父亲, v_j 是 v_i 的儿子; 如果两个结点是同一个结点的儿子, 则称这两个结点是兄弟。

Example



- v_2 是 v_5 和 v_6 的父亲, v_5 和 v_6 是 v_2 的儿子;
- v_2, v_3 和 v_4 是兄弟; v_{10}, v_{11}, v_{12} 也是兄弟;

树的家族关系

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

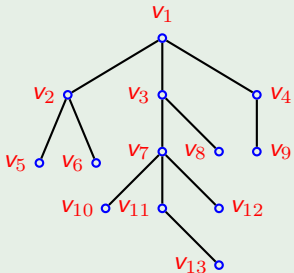
家族关系

k 元树

Definition

在根树中, 若从结点 v_i 到 v_j 可达, 则称 v_i 是 v_j 的祖先, v_j 是 v_i 的后代; 又若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边, 则称 v_i 是 v_j 的父亲, v_j 是 v_i 的儿子; 如果两个结点是同一个结点的儿子, 则称这两个结点是兄弟。

Example



- v_2 是 v_5 和 v_6 的父亲, v_5 和 v_6 是 v_2 的儿子;
- v_2, v_3 和 v_4 是兄弟; v_{10}, v_{11}, v_{12} 也是兄弟;
- v_8 的祖先有 v_3, v_1 ;

树的家族关系

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

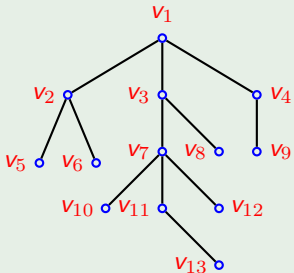
家族关系

k 元树

Definition

在根树中, 若从结点 v_i 到 v_j 可达, 则称 v_i 是 v_j 的祖先, v_j 是 v_i 的后代; 又若 $\langle v_i, v_j \rangle$ 是根树中的有向边, 则称 v_i 是 v_j 的父亲, v_j 是 v_i 的儿子; 如果两个结点是同一个结点的儿子, 则称这两个结点是兄弟。

Example



- v_2 是 v_5 和 v_6 的父亲, v_5 和 v_6 是 v_2 的儿子;
- v_2, v_3 和 v_4 是兄弟; v_{10}, v_{11}, v_{12} 也是兄弟;
- v_8 的祖先有 v_3, v_1 ;
- v_7 的后代有 v_{10}, v_{11}, v_{12} 和 v_{13} .

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

Definition

在根树 T 中，

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

Definition

在根树 T 中，

- 若每个分支点至多有 k 个儿子，则称 T 为 k 元树；

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

Definition

在根树 T 中，

- 若每个分支点至多有 k 个儿子，则称 T 为 k 元树；
- 若每个分支点都恰有 k 个儿子，则称 T 为 k 元完全树；

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

Definition

在根树 T 中，

- 若每个分支点至多有 k 个儿子，则称 T 为 k 元树；
- 若每个分支点都恰有 k 个儿子，则称 T 为 k 元完全树；
- 若 k 元树 T 是有序的，则称 T 为 k 元有序树；

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

Definition

在根树 T 中，

- 若每个分支点至多有 k 个儿子，则称 T 为 k 元树；
- 若每个分支点都恰有 k 个儿子，则称 T 为 k 元完全树；
- 若 k 元树 T 是有序的，则称 T 为 k 元有序树；
- 若 k 元完全树 T 是有序的，则称 T 为 k 元有序完全树。

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

如果在根树中规定了每一层上结点的次序，这样的根树称为有序树。

Definition

在根树 T 中，

- 若每个分支点至多有 k 个儿子，则称 T 为 k 元树；
- 若每个分支点都恰有 k 个儿子，则称 T 为 k 元完全树；
- 若 k 元树 T 是有序的，则称 T 为 k 元有序树；
- 若 k 元完全树 T 是有序的，则称 T 为 k 元有序完全树。
- 任一结点 v 及其所有后代导出的子图 T' 称为 T 的以 v 为根的子树。

有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

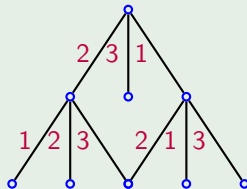
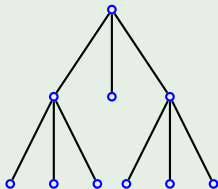
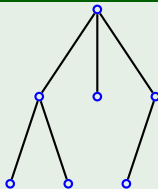
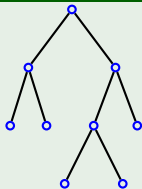
定义

倒置法

家族关系

k 元树

Example



有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

定义

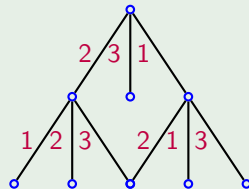
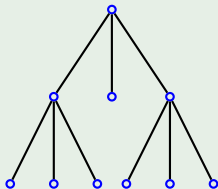
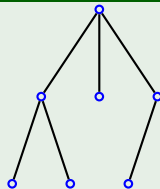
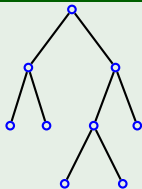
倒置法

家族关系

k 元树

Example

二元完全树



有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

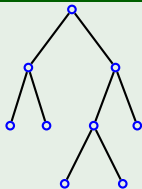
定义

倒置法

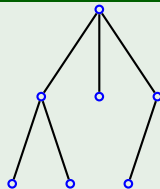
家族关系

k 元树

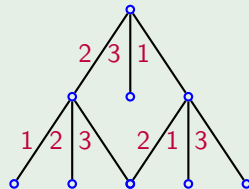
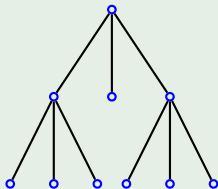
Example



二元完全树



3 元树



有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

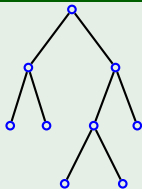
定义

倒置法

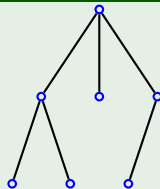
家族关系

k 元树

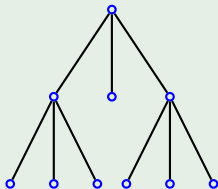
Example



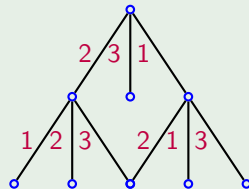
二元完全树



3 元树



3 元完全树



有序和 k 元树

根树

Lijie Wang

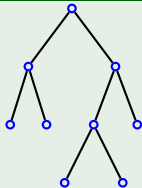
定义

倒置法

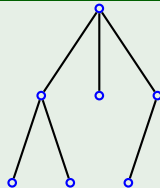
家族关系

k 元树

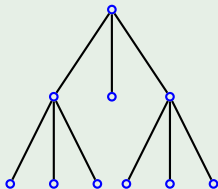
Example



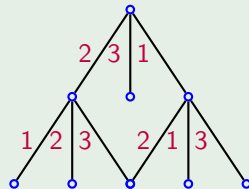
二元完全树



3 元树



3 元完全树



3 元有序完全树

二元有序树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Definition

二元有序树的每个结点 v 至多有两个儿子，分别称为 v 的左儿子和右儿子。二元有序树的每个结点 v 至多有两棵子树，分别称为 v 的左子树和右子树。

二元有序树

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

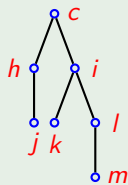
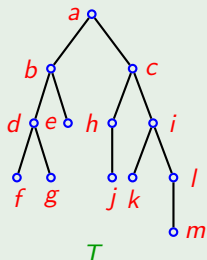
家族关系

k 元树

Definition

二元有序树的每个结点 v 至多有两个儿子，分别称为 v 的左儿子和右儿子。二元有序树的每个结点 v 至多有两棵子树，分别称为 v 的左子树和右子树。

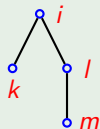
Example



以 c 为根的子树



c 的左子树



c 的右子树

完全树的性质

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Theorem

在 k 元完全树中, 若叶数为 t , 分支点数为 i , 则有

$$(k-1) \times i = t - 1。$$

完全树的性质

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Theorem

在 k 元完全树中, 若叶数为 t , 分支点数为 i , 则有

$$(k-1) \times i = t-1。$$

Proof.

由假设知, 该树有 $i+t$ 个结点。

由树的定义知, 该树的边数为 $i+t-1$ 。

由握手定理知, 所有结点的出度之和等于边数。

而根据 k 元完全树的定义知, 所有分支点的出度为 $k \times i$

因此有 $k \times i = i + t - 1$

即 $(k-1) \times i = t-1$



完全树的性质

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

Example

假设有一台计算机，它有一条加法指令，可计算 3 个数的和。如果要求 9 个数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ 之和，问至少要执行几次加法指令？

完全树的性质

根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树

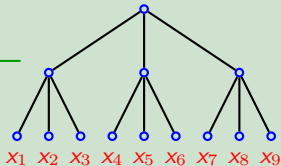
Example

假设有一台计算机，它有一条加法指令，可计算 3 个数的和。如果要求 9 个数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ 之和，问至少要执行几次加法指令？

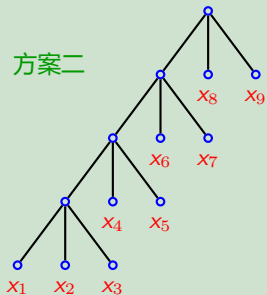
Solution

本问题可转化为求一个含有 9 片树叶的三元完全树的分支点个数。由前面的定理知，有 $(3-1) \times i = 9 - 1$ ，得 $i = 4$ 。所以至少要执行 4 次加法指令。

方案一



方案二



根树

Lijie Wang

定义

倒置法

家族关系

k 元树



THE END, THANKS!