公式的解释与分类

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

- 非空的个体域集合 D；

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

- 非空的个体域集合 D；
- G 中的每个常量符号，指定 D 中的某个特定的元素；

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

- 非空的个体域集合 D；
- G 中的每个常量符号，指定 D 中的某个特定的元素；
- G 中的每个 n 元函数符号，指定 D^n 到 D 中的某个特定的函数；

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

- 非空的个体域集合 D；
- G 中的每个常量符号，指定 D 中的某个特定的元素；
- G 中的每个 n 元函数符号，指定 D^n 到 D 中的某个特定的函数；
- G 中的每个 n 元谓词符号，指定 D^n 到 $\{0, 1\}$ 中的某个特定的谓词。

公式的解释

Definition

谓词逻辑中公式 G 的每一个解释 I 由如下四部分组成：

- 非空的个体域集合 D；
- G 中的每个常量符号，指定 D 中的某个特定的元素；
- G 中的每个 n 元函数符号，指定 D^n 到 D 中的某个特定的函数；
- G 中的每个 n 元谓词符号，指定 D^n 到 $\{0, 1\}$ 中的某个特定的谓词。

☞

规定：公式中无自由变元，或将自由变元看成是常量符号。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

判断公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D = \{\alpha, \beta\}$；

判断公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D=\{\alpha,\beta\}$；
2. a 指定为：α；

判断公式 $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D = \{\alpha, \beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$；

判断公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D=\{\alpha,\beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$；
4. $P(\alpha)=1,\ P(\beta)=0$，$Q(\alpha,\alpha)=0$，$Q(\alpha,\beta)=1$，$Q(\beta,\alpha)=1$，$Q(\beta,\beta)=1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D = \{\alpha, \beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$；
4. $P(\alpha) = 1,\ P(\beta) = 0$，$Q(\alpha, \alpha) = 0$，$Q(\alpha, \beta) = 1$，$Q(\beta, \alpha) = 1$，$Q(\beta, \beta) = 1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

解:

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D=\{\alpha,\beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$；
4. $P(\alpha)=1,\ P(\beta)=0$，$Q(\alpha,\alpha)=0$，$Q(\alpha,\beta)=1$，$Q(\beta,\alpha)=1$，$Q(\beta,\beta)=1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

解:

当$x=\alpha$时，

当$x=\beta$时，

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D=\{\alpha,\beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$；
4. $P(\alpha)=1,\ P(\beta)=0$，$Q(\alpha,\alpha)=0$，$Q(\alpha,\beta)=1$，$Q(\beta,\alpha)=1$，$Q(\beta,\beta)=1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

解:

当$x=\alpha$时，$P(f(x))\wedge Q(x,f(a))=P(f(\alpha)\wedge Q(\alpha,f(\alpha)))=P(\beta)\wedge Q(\alpha,\beta)=0\wedge 1=0$

当$x=\beta$时，

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D=\{\alpha,\beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$；
4. $P(\alpha)=1,\ P(\beta)=0$，$Q(\alpha,\alpha)=0$，$Q(\alpha,\beta)=1$，$Q(\beta,\alpha)=1$，$Q(\beta,\beta)=1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

解:

当$x=\alpha$时，$P(f(x))\wedge Q(x,f(a))=P(f(\alpha)\wedge Q(\alpha,f(\alpha)))=P(\beta)\wedge Q(\alpha,\beta)=0\wedge 1=0$

当$x=\beta$时，$P(f(x))\wedge Q(x,f(a))=P(f(\beta)\wedge Q(\beta,f(\alpha)))=P(\alpha)\wedge Q(\beta,\beta)=1\wedge 1=1$

公式的解释与真值

Example

设有解释 I 为：

1. 个体域为 $D = \{\alpha, \beta\}$；
2. a 指定为：α；
3. $f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$；
4. $P(\alpha) = 1,\ P(\beta) = 0$，$Q(\alpha, \alpha) = 0$，$Q(\alpha, \beta) = 1$，$Q(\beta, \alpha) = 1$，$Q(\beta, \beta) = 1$。

判断公式 $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ 在解释 I 下的真值结果。

解:

当$x = \alpha$时，$P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) = P(f(\alpha) \wedge Q(\alpha, f(\alpha))) = P(\beta) \wedge Q(\alpha, \beta) = 0 \wedge 1 = 0$

当$x = \beta$时，$P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) = P(f(\beta) \wedge Q(\beta, f(\alpha))) = P(\alpha) \wedge Q(\beta, \beta) = 1 \wedge 1 = 1$

可见原公式真值为真。

公式的分类

Example

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \land Q(x, y) \to P(x, y))$;

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$;
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$;

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \land Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$；
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \lor P(x,y))$；
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \land P(x,y))$。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$；
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。

Definition

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \to P(x,y))$；
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$；
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。
2. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为假，则称 G 为矛盾公式。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$；
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。
2. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为假，则称 G 为矛盾公式。
3. 如果至少有一种解释使得公式 G 取值为真，则称 G 为可满足公式。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$；有效公式
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。
2. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为假，则称 G 为矛盾公式。
3. 如果至少有一种解释使得公式 G 取值为真，则称 G 为可满足公式。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \to P(x,y))$；有效公式
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；有效公式
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。
2. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为假，则称 G 为矛盾公式。
3. 如果至少有一种解释使得公式 G 取值为真，则称 G 为可满足公式。

公式的分类

Example

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$；有效公式
2. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee P(x,y))$；有效公式
3. $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \wedge P(x,y))$。矛盾公式

Definition

1. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为真，则称 G 为有效公式。
2. 如果公式 G 在它所有的解释下都取值为假，则称 G 为矛盾公式。
3. 如果至少有一种解释使得公式 G 取值为真，则称 G 为可满足公式。

公式的判定问题

☞ 谓词公式的可判定性

- 谓词逻辑是不可判定的；

公式的判定问题

☞ 谓词公式的可判定性

- 谓词逻辑是不可判定的；
- 只含有一元谓词变项的公式是可判定的；

公式的判定问题

☞ 谓词公式的可判定性

- 谓词逻辑是不可判定的；
- 只含有一元谓词变项的公式是可判定的；
- 如下形式的公式：

  $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

  $(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

  若 P 中无量词和其它自由变元时，也是可判定的；

公式的判定问题

☞ 谓词公式的可判定性

- 谓词逻辑是不可判定的；
- 只含有一元谓词变项的公式是可判定的；
- 如下形式的公式：

  $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

  $(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

  若 P 中无量词和其它自由变元时，也是可判定的；
- 个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

THE END, THANKS!