关系的运算

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

关系的并交差补运算

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律.

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

关系的并交差补运算

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律.

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

- $R \cup S = \{< x, y > |(xRy) \vee (xSy)\}$；

关系的并交差补运算

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律.

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

- $R \cup S = \{< x, y > |(xRy) \vee (xSy)\}$；
- $R \cap S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (xSy)\}$；

关系的并交差补运算

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律.

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

- $R \cup S = \{< x, y > |(xRy) \vee (xSy)\}$；
- $R \cap S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (xSy)\}$；
- $R - S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (x\not{S}y)\}$；

关系的并交差补运算

☞

关系是一种特殊的集合，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律.

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

- $R \cup S = \{< x, y > |(xRy) \vee (xSy)\}$；
- $R \cap S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (xSy)\}$；
- $R - S = \{< x, y > |(xRy) \wedge (x\not{S}y)\}$；
- $\overline{R} = \{< x, y > |(x\not{R}y)\}$(即全集为 $A \times B$)。

关系的并交差补运算

Example

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为：

$R=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}, S=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$

计算 $R\cup S, R\cap S, S-R, \overline{R}$.

解：

关系的并交差补运算

Example

设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为：

$R = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 3 >\}, S = \{< a, 1 >, < a, 2 >, < a, 3 >, < a, 4 >\}$

计算 $R \cup S, R \cap S, S - R, \overline{R}$.

解：

1. $R \cup S = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 3 >, < a, 2 >, < a, 3 >, < a, 4 >\}$；

关系的并交差补运算

Example

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为：
$R=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}, S=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$
计算 $R\cup S, R\cap S, S-R, \overline{R}$.

解：

1. $R\cup S=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$；
2. $R\cap S=\{<a,1>\}$；

关系的并交差补运算

Example

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为：
$R=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}, S=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$
计算 $R\cup S, R\cap S, S-R, \overline{R}$.

解：

1. $R\cup S=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$；
2. $R\cap S=\{<a,1>\}$；
3. $S-R=\{<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$；

关系的并交差补运算

Example

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为：
$R=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}, S=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$
计算 $R\cup S, R\cap S, S-R, \overline{R}$.

解：

1. $R\cup S=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>,<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$；
2. $R\cap S=\{<a,1>\}$；
3. $S-R=\{<a,2>,<a,3>,<a,4>\}$；
4. $\overline{R}=A\times B-R=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<a,4>,<b,1>,<b,2>,<b,3>,<b,4>,<c,1>,<c,2>,<c,3>,<c,4>\}-\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}=\{<a,2>,<a,3>,<a,4>,<b,1>,<b,3>,<b,4>,<c,1>,<c,2>,<c,4>\}$；

关系的复合运算

Definition

设 A, B, C 是三个集合，R 是从 A 到 B 的关系，S 是从 B 到 C 的关系 (即 $R: A \to B, S: B \to C$)，则 R 与 S 的复合关系(合成关系)(composite relation)$R \circ S$ 是从 A 到 C 的关系，并且：$R \circ S = \{ < x, z > | (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xRy \wedge ySz) \}$。运算 “$\circ$” 称为复合运算(composite operation)。

关系的复合运算

Definition

设 A, B, C 是三个集合，R 是从 A 到 B 的关系，S 是从 B 到 C 的关系 (即 $R: A \to B, S: B \to C$)，则 R 与 S 的复合关系(合成关系)(composite relation)$R \circ S$ 是从 A 到 C 的关系，并且：$R \circ S = \{< x, z > | (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xRy \wedge ySz)\}$。运算 "$\circ$" 称为复合运算(composite operation)。

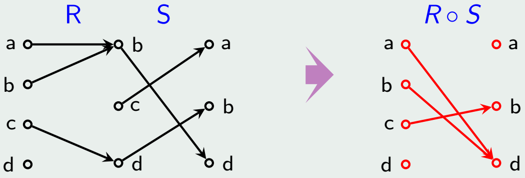
Example

设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, d\}, C = \{a, b, d\}$，$R = \{< a, b >, < c, d >, < b, b >\}$ 是 A 到 B 的关系，$S = \{< d, b >, < b, d >, < c, a >\}$ 是 B 到 C 的关系。

则 $R \circ S = \{< a, d >, < c, b >, < b, d >\}$。

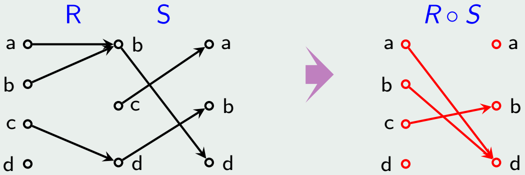
用三种关系表示法进行复合运算

复合运算(关系图形式)



用三种关系表示法进行复合运算

复合运算(关系图形式)



复合运算(关系矩阵形式)

$$M_{R\circ S} = M_R \odot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用三种关系表示法进行复合运算

☞ 总结

1. 集合表示法求复合: 寻找所有满足 $< x, y >\in R$ 并且 $< y, z >\in S$, 从而得到 $< x, z >\in R \circ S$;

用三种关系表示法进行复合运算

☞ 总结

1. 集合表示法求复合: 寻找所有满足 $<x,y>\in R$ 并且 $<y,z>\in S$, 从而得到 $<x,z>\in R\circ S$;
2. 关系图表示法求复合: 将关系 R,S 的关系图画在一起，然后寻找所有首尾相接的两条有向边，再去掉中间相接的结点 y，可得到 $R\circ S$ 的关系图;

$$\underset{x}{\circ} \longrightarrow \underset{y}{\circ} \longrightarrow \underset{z}{\circ}$$

用三种关系表示法进行复合运算

☞ 总结

1. 集合表示法求复合：寻找所有满足 $<x,y>\in R$ 并且 $<y,z>\in S$，从而得到 $<x,z>\in R\circ S$；
2. 关系图表示法求复合：将关系 R,S 的关系图画在一起，然后寻找所有首尾相接的两条有向边，再去掉中间相接的结点 y，可得到 $R\circ S$ 的关系图；

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

3. 关系矩阵表示法求复合：直接将关系 R 和 S 的关系矩阵做布尔积运算即得 $R\circ S$ 的关系矩阵.

关系的逆运算

Definition

设 A, B 是两个集合，R 是 A 到 B 的关系，则从 B 到 A 的关系 $R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b > \in R\}$ 称为 R 的逆关系(inverse relation)，运算 “-1” 称为逆运算(inverse operation)。

☞

由逆运算的定义可知：

关系的逆运算

Definition

设 A, B 是两个集合，R 是 A 到 B 的关系，则从 B 到 A 的关系 $R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b > \in R\}$ 称为 R 的逆关系(inverse relation)，运算 “-1” 称为逆运算(inverse operation)。

☞

由逆运算的定义可知：

1. $(R^{-1})^{-1} = R$

关系的逆运算

Definition

设 A, B 是两个集合，R 是 A 到 B 的关系，则从 B 到 A 的关系 $R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b > \in R\}$ 称为 R 的逆关系(inverse relation)，运算“-1”称为逆运算(inverse operation)。

☞

由逆运算的定义可知：

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $\varnothing^{-1} = \varnothing$

关系的逆运算

Definition

设 A, B 是两个集合，R 是 A 到 B 的关系，则从 B 到 A 的关系 $R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b > \in R\}$ 称为 R 的逆关系(inverse relation)，运算 "-1" 称为逆运算(inverse operation)。

☞

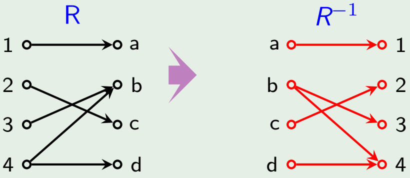
由逆运算的定义可知：

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $\varnothing^{-1} = \varnothing$
3. $(A \times B)^{-1} = B \times A$

用三种关系表示法求逆

Example

设 $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c,d\}$，R 是从 A 到 B 的一个关系且
$R=\{<1,a>,<2,c>,<3,b>,<4,b>,<4,d>\}$ 则
$R^{-1}=\{<a,1>,<c,2>,<b,3>,<b,4>,<d,4>\}$。



$$M_{R^{-1}}=(M_R)^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

用三种关系表示法求逆

☞ 总结

1. 将 R 的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得 R^{-1} 的关系图，反之亦然;

用三种关系表示法求逆

☞ 总结

1. 将 R 的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得 R^{-1} 的关系图，反之亦然;
2. 将 R 的关系矩阵转置即得 R^{-1} 的关系矩阵，即 R 和 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵;

用三种关系表示法求逆

☞ 总结

1. 将 R 的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得 R^{-1} 的关系图，反之亦然;
2. 将 R 的关系矩阵转置即得 R^{-1} 的关系矩阵，即 R 和 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵;
3. R^{-1} 的定义域和值域正好是 R 的值域和定义域，即 $domR = ranR^{-1}$，$domR^{-1} = ranR$;

用三种关系表示法求逆

☞ 总结

1. 将 R 的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得 R^{-1} 的关系图，反之亦然;
2. 将 R 的关系矩阵转置即得 R^{-1} 的关系矩阵，即 R 和 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵;
3. R^{-1} 的定义域和值域正好是 R 的值域和定义域，即 $domR = ranR^{-1}$ ，$domR^{-1} = ranR$;
4. $|R| = |R^{-1}|$.

THE END, THANKS!