

可达性与最短通路

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



引言

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

很多时候，我们可能并不关心到底有多少条通路，而只关心从 v_i 到 v_j 是否存在通路，以及长度最短的通路是什么，从而有可达性以及短程线和距离的定义。

引言

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

很多时候，我们可能并不关心到底有多少条通路，而只关心从 v_i 到 v_j 是否存在通路，以及长度最短的通路是什么，从而有可达性以及短程线和距离的定义。

Definition

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中， $v_i, v_j \in V$ 。如果从 v_i 到 v_j **存在通路**，则称 v_i 到 v_j 是**可达**的，否则称 v_i 到 v_j **不可达**。规定：任何结点到自己都是可达的。

引言

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

很多时候，我们可能并不关心到底有多少条通路，而只关心从 v_i 到 v_j 是否存在通路，以及长度最短的通路是什么，从而有可达性以及短程线和距离的定义。

Definition

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中， $v_i, v_j \in V$ 。如果从 v_i 到 v_j **存在通路**，则称 v_i 到 v_j 是**可达**的，否则称 v_i 到 v_j **不可达**。规定：任何结点到自己都是可达的。

考虑：如何判断图中两结点间是否可达？

引言

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

很多时候，我们可能并不关心到底有多少条通路，而只关心从 v_i 到 v_j 是否存在通路，以及长度最短的通路是什么，从而有可达性以及短程线和距离的定义。

Definition

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中， $v_i, v_j \in V$ 。如果从 v_i 到 v_j **存在通路**，则称 v_i 到 v_j 是**可达**的，否则称 v_i 到 v_j **不可达**。规定：任何结点到自己都是可达的。

考虑：如何判断图中两结点间是否可达？

判断图中两结点 v_i 到 v_j 是否可达的关键是判断是否存在通路，因而只要求邻接矩阵 A 及其正整数次幂 A, A^2, A^3, \dots ，一旦发现这些矩阵中 i 行 j 列元素为非 0，则表示存在通路。

可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的通路.

可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的通路。

Proof.

设 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路，其中 $v_{i_0} = v_i$ ， $v_{i_k} = v_j$ ，此通路上有 $k + 1$ 个结点。



可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的通路。

Proof.

设 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路，其中 $v_{i_0} = v_i$ ， $v_{i_k} = v_j$ ，此通路上有 $k + 1$ 个结点。若 $k \leq n - 1$ ，这条通路即为所求。



可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中, 如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路, 则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的通路.

Proof.

设 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路, 其中 $v_{i_0} = v_i$, $v_{i_k} = v_j$, 此通路上有 $k + 1$ 个结点。若 $k \leq n - 1$, 这条通路即为所求。若 $k > n - 1$, 则此通路上的结点数 $k + 1 > n$, 由鸽笼原理知, 必存在一个结点在此通路中不止一次出现, 设 $v_{i_s} = v_{i_t}$, 其中, $0 \leq s < t \leq k$ 。



可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的通路。

Proof.

设 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路，其中 $v_{i_0} = v_i$ ， $v_{i_k} = v_j$ ，此通路上有 $k + 1$ 个结点。若 $k \leq n - 1$ ，这条通路即为所求。若 $k > n - 1$ ，则此通路上的结点数 $k + 1 > n$ ，由鸽笼原理知，必存在一个结点在此通路中不止一次出现，设 $v_{i_s} = v_{i_t}$ ，其中， $0 \leq s < t \leq k$ 。去掉 v_{i_s} 到 v_{i_t} 中间的通路，至少去掉一条边，得通路 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_s} v_{i_{t+1}} \cdots v_{i_k}$ ，此通路比原通路的长度至少小 1。



可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的通路。

Proof.

设 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路，其中 $v_{i_0} = v_i$ ， $v_{i_k} = v_j$ ，此通路上有 $k + 1$ 个结点。若 $k \leq n - 1$ ，这条通路即为所求。若 $k > n - 1$ ，则此通路上的结点数 $k + 1 > n$ ，由鸽笼原理知，必存在一个结点在此通路中不止一次出现，设 $v_{i_s} = v_{i_t}$ ，其中， $0 \leq s < t \leq k$ 。去掉 v_{i_s} 到 v_{i_t} 中间的通路，至少去掉一条边，得通路 $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_s} v_{i_{t+1}} \cdots v_{i_k}$ ，此通路比原通路的长度至少小 1。如此重复进行下去，必可得一条从 v_i 到 v_j 的长度不大于 $n - 1$ 的通路。 □

可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Corollary

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的**基本通路**。

可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Corollary

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的**基本通路**。

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的**长度不大于 n 的回路**。

可达关系判定-引理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Corollary

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j (v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n - 1$ 的**基本通路**。

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的**长度不大于 n 的回路**。

Corollary

在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的**基本回路**。

可达关系的判定定理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$, $m = 1, 2, \dots, n$, $B_n = (b_{ij}^{(n)})_{n \times n} = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$. 则有当 $v_i \neq v_j$ 时, 如果 $b_{ij}^{(n)} > 0$, 那么从 v_i 到 v_j 可达, 否则不可达。

可达关系的判定定理

可达性与最短通路

Lijie Wang

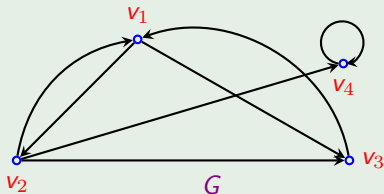
可达性

最短通路

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$, $m = 1, 2, \dots, n$, $B_n = (b_{ij}^{(n)})_{n \times n} = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$. 则有当 $v_i \neq v_j$ 时, 如果 $b_{ij}^{(n)} > 0$, 那么从 v_i 到 v_j 可达, 否则不可达。

Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可达关系的判定

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

可达关系的判定

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;

可达关系的判定

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_2 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;

可达关系的判定

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性
最短通路

Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_2 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_3 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;

可达关系的判定

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_2 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_3 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_4 到 v_4 是可达的, 从 v_4 到 v_1, v_2, v_3 都是不可达的.

可达性矩阵

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个线图, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序, 称 n 阶方阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的 **可达性矩阵**(accessibility matrix), 其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 可达} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

可达性矩阵

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个线图, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序, 称 n 阶方阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的 **可达性矩阵**(accessibility matrix), 其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 可达} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

- ① 无向图的可达性矩阵是对称的, 而有向图的可达性矩阵则不一定对称;

可达性矩阵

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个线图, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序, 称 n 阶方阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的 **可达性矩阵**(accessibility matrix), 其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 可达} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

- ① 无向图的可达性矩阵是对称的, 而有向图的可达性矩阵则不一定对称;
- ② 由前面的讨论可知, 通过计算 B_n 就可计算出 P 中各元素, 即

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & b_{ij}^{(n)} \neq 0 \\ 0 & b_{ij}^{(n)} = 0 \end{cases}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

可达性矩阵的简洁求法

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, A 、 P 分别是 G 的邻接矩阵和可达性矩阵, 则有 $P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)}$, 这里, $A^{(i)}$ 表示做矩阵布尔乘法的 i 次幂.

可达性矩阵的简洁求法

可达性与最短通路

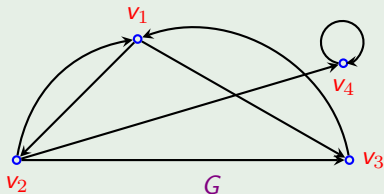
Lijie Wang

可达性
最短通路

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, A 、 P 分别是 G 的邻接矩阵和可达性矩阵, 则有 $P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)}$, 这里, $A^{(i)}$ 表示做矩阵布尔乘法的 i 次幂.

Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可达性矩阵的简洁求法

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性
最短通路

Example

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

短程线及距离

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

如果 v_i 到 v_j 可达，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离(distance)，记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达，则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

结点间距离的性质

短程线及距离

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

如果 v_i 到 v_j 可达，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离(distance)，记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达，则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

结点间距离的性质

① $d(v_i, v_j) \geq 0$

短程线及距离

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

如果 v_i 到 v_j 可达，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离(distance)，记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达，则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

结点间距离的性质

- ① $d(v_i, v_j) \geq 0$
- ② $d(v_i, v_i) = 0$

短程线及距离

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

如果 v_i 到 v_j 可达，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离(distance)，记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达，则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

结点间距离的性质

- ① $d(v_i, v_j) \geq 0$
- ② $d(v_i, v_i) = 0$
- ③ $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$ 。

短程线及距离

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Definition

如果 v_i 到 v_j 可达，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离(distance)，记为 $d(v_i, v_j)$ 。如果 v_i 到 v_j 不可达，则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

结点间距离的性质

- ① $d(v_i, v_j) \geq 0$
- ② $d(v_i, v_i) = 0$
- ③ $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)$ 。
- ④ 无向图满足 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ ，而有向图不行。

结点间距离的判定定理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵,

$A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$, $m = 1, 2, \dots, n$,

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty & \text{如果所有 } a_{ij}^{(m)} \text{ 均为 } 0 \\ k & k = \min\{m \mid a_{ij}^{(m)} \neq 0\} \end{cases}, (m = 1, 2, 3, \dots, n).$$

结点间距离的判定定理

可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵,

$A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$, $m = 1, 2, \dots, n$,

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty & \text{如果所有 } a_{ij}^{(m)} \text{ 均为 } 0 \\ k & k = \min\{m \mid a_{ij}^{(m)} \neq 0\} \end{cases}, (m = 1, 2, 3, \dots, n).$$

显然, 这里也可以使用邻接矩阵的布尔积幂来判定。

结点间距离的判定

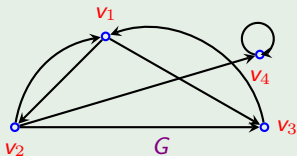
可达性与最短路

Lijie Wang

可达性

最短路

Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结点间距离的判定

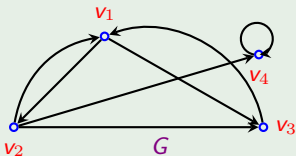
可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example



- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结点间距离的判定

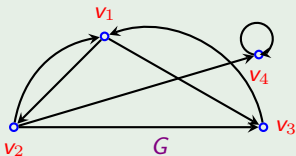
可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example



- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$;
- $d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结点间距离的判定

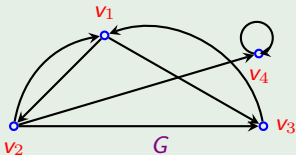
可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example



- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$;
- $d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$;
- $d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结点间距离的判定

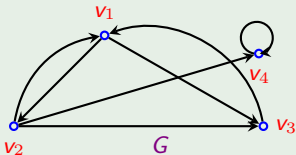
可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example



- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$;
- $d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$;
- $d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2$;
- $d(v_3, v_4) = 3$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结点间距离的判定

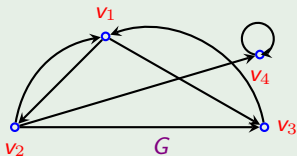
可达性与最短通路

Lijie Wang

可达性

最短通路

Example



- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$;
- $d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$;
- $d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2$;
- $d(v_3, v_4) = 3$;
- $d(v_4, v_1) = d(v_4, v_2) = d(v_4, v_3) = \infty$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



THE END, THANKS!