关系的定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

什么是二元关系

Example

什么是二元关系

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。

什么是二元关系

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是 $A \times B$ 的某一个子集。

什么是二元关系

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是 $A \times B$ 的某一个子集。
2. 令 F 为某地所有父亲的集合，S 表示该地所有儿子的集合，则 $F \times S$ 可表示父子关系的所有可能情况。

什么是二元关系

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是 $A \times B$ 的某一个子集。
2. 令 F 为某地所有父亲的集合，S 表示该地所有儿子的集合，则 $F \times S$ 可表示父子关系的所有可能情况。 而真正的父子关系则会是 $F \times S$ 的某一个子集。

什么是二元关系

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是 $A \times B$ 的某一个子集。
2. 令 F 为某地所有父亲的集合，S 表示该地所有儿子的集合，则 $F \times S$ 可表示父子关系的所有可能情况。 而真正的父子关系则会是 $F \times S$ 的某一个子集。

Definition

设 A, B 为两个非空集合，称$A \times B$ 的任意子集 R 为从 A 到 B 的一个二元关系，简称关系 (relation)。其中，A 称为关系 R 的前域，B 称为关系 R 的后域。如果$A = B$，则称 R 为A 上的一个二元关系。

二元关系的数学符号

标记

1. 若序偶 $<x, y> \in R$，通常把这一事实记为 xRy，读作"x 对 y 有关系 R"；

二元关系的数学符号

标记

1. 若序偶 $<x, y> \in R$，通常把这一事实记为 xRy，读作 “x 对 y 有关系 R”；
2. 若序偶 $<x, y> \notin R$，通常把这一事实记为 $x\not{R}y$，读作 “x 对 y 没有关系 R”。

二元关系的数学符号

标记

1. 若序偶 $< x, y > \in R$，通常把这一事实记为 xRy，读作“x 对 y 有关系 R”；
2. 若序偶 $< x, y > \notin R$，通常把这一事实记为 $x\not{R}y$，读作“x 对 y 没有关系 R”。

Example

二元关系的数学符号

标记

1. 若序偶 $<x, y> \in R$，通常把这一事实记为 xRy，读作 “x 对 y 有关系 R”；
2. 若序偶 $<x, y> \notin R$，通常把这一事实记为 $x \not R y$，读作 “x 对 y 没有关系 R”。

Example

1. 设 R_1 为自然数集合上的小于关系，则 $<2, 3> \in R_1$(或 $2R_13$)，但 $<5, 5> \notin R_1$(或 $5 \not R_1 5$)；

二元关系的数学符号

标记

1. 若序偶 $<x,y>\in R$，通常把这一事实记为 xRy，读作"x 对 y 有关系 R"；
2. 若序偶 $<x,y>\notin R$，通常把这一事实记为 $x\not R y$，读作"x 对 y 没有关系 R"。

Example

1. 设 R_1 为自然数集合上的小于关系，则 $<2,3>\in R_1$(或 $2R_13$)，但 $<5,5>\notin R_1$(或 $5\not R_1 5$)；
2. 设 R_2 为中国城市的地区归属关系，则 成都R_2四川，但 重庆$\not R_2$四川.

枚举二元关系

Example

假设 $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解

枚举二元关系

Example

假设 $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A \times B = \{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

枚举二元关系

Example

假设 $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解 首先求两个集合的笛卡儿积：$A \times B = \{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

再求 $A \times B$ 的所有不同子集：

枚举二元关系

Example

假设 $A=\{a,b\}$ $B=\{c,d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A\times B=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

再求 $A\times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；

枚举二元关系

Example

假设 $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A \times B = \{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

再求 $A \times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{< a, c >\}, \{< a, d >\}, \{< b, c >\}, \{< b, d >\}$；

枚举二元关系

Example

假设 $A=\{a,b\}$ $B=\{c,d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解 首先求两个集合的笛卡儿积：$A\times B=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

再求 $A\times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{<a,c>\},\{<a,d>\},\{<b,c>\},\{<b,d>\}$；
- 2–元子集：$\{<a,c>,<a,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>\}$, $\{<a,c>,<b,d>\}$,$\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<b,c>,<b,d>\}$；

枚举二元关系

Example

假设 $A=\{a,b\}$ $B=\{c,d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A\times B=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

再求 $A\times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{<a,c>\},\{<a,d>\},\{<b,c>\},\{<b,d>\}$；
- 2–元子集：$\{<a,c>,<a,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>\}$, $\{<a,c>,<b,d>\}$,$\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<b,c>,<b,d>\}$；
- 3–元子集：
  $\{<a,c>,<a,d>,<b,c>\}$,$\{<a,c>,<a,d>,<b,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>,<b,d>\}$, $\{<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$；

枚举二元关系

Example

假设 $A=\{a,b\}$ $B=\{c,d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A\times B=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

再求 $A\times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{<a,c>\},\{<a,d>\},\{<b,c>\},\{<b,d>\}$；
- 2–元子集：$\{<a,c>,<a,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>\}$, $\{<a,c>,<b,d>\}$,$\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<b,c>,<b,d>\}$；
- 3–元子集：$\{<a,c>,<a,d>,<b,c>\}$,$\{<a,c>,<a,d>,<b,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>,<b,d>\}$, $\{<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$；
- 4–元子集：$\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

枚举二元关系

Example

假设 $A = \{a, b\}$ $B = \{c, d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解　首先求两个集合的笛卡儿积：$A \times B = \{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

再求 $A \times B$ 的所有不同子集：

- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{< a, c >\}, \{< a, d >\}, \{< b, c >\}, \{< b, d >\}$；
- 2–元子集：$\{< a, c >, < a, d >\}$,$\{< a, c >, < b, c >\}$, $\{< a, c >, < b, d >\}$,$\{< a, d >, < b, d >\}$, $\{< a, d >, < b, d >\}$, $\{< b, c >, < b, d >\}$；
- 3–元子集：
  $\{< a, c >, < a, d >, < b, c >\}$,$\{< a, c >, < a, d >, < b, d >\}$,$\{< a, c >, < b, c >, < b, d >\}$, $\{< a, d >, < b, c >, < b, d >\}$；
- 4–元子集：$\{< a, c >, < a, d >, < b, c >, < b, d >\}$。

所以，上面的 16 个不同子集就是从 A 到 B 的所有不同关系。

由定义及示例可见

几种重要关系

1. 当 $R = \varnothing$ 时，称 R 为从 A 到 B 的空关系(empty relation)；

由定义及示例可见

几种重要关系

1. 当 $R = \varnothing$ 时，称 R 为从 A 到 B 的空关系(empty relation)；
2. 当 $R = A \times B$ 时，称 R 为从 A 到 B 的全关系(total relation)；A 上的全关系通常记为 E_A。

由定义及示例可见

几种重要关系

1. 当 $R = \varnothing$ 时，称 R 为从 A 到 B 的空关系(empty relation)；
2. 当 $R = A \times B$ 时，称 R 为从 A 到 B 的全关系(total relation)；A 上的全关系通常记为 E_A。
3. 当 $R = I_A = \{< x, x > | x \in A\}$ 时，称 R 为 A 上的恒等关系(identity relation)。

由定义及示例可见

几种重要关系

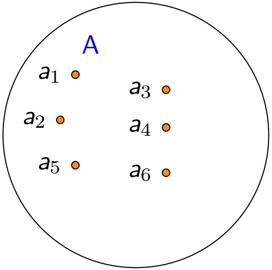
1. 当 $R = \varnothing$ 时，称 R 为从 A 到 B 的空关系(empty relation)；
2. 当 $R = A \times B$ 时，称 R 为从 A 到 B 的全关系(total relation)；A 上的全关系通常记为 E_A。
3. 当 $R = I_A = \{< x, x > | x \in A\}$ 时，称 R 为 A 上的恒等关系(identity relation)。

有限集合的二元关系数量

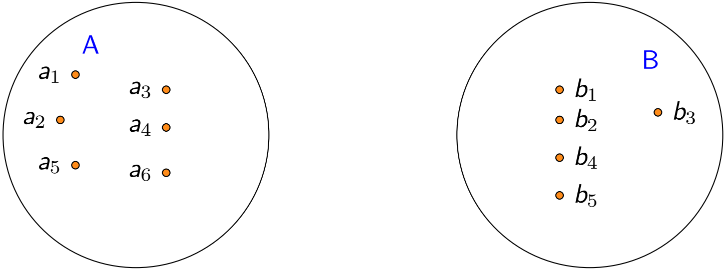
当集合 A, B 都是有限集时，$A \times B$ 共有 $|A| \times |B|$ 个不同的元素，这些元素将会产生 $2^{|A| \times |B|}$ 个不同的子集。即，从 A 到 B 的不同关系共有 $2^{|A| \times |B|}$ 个。

定义域和值域

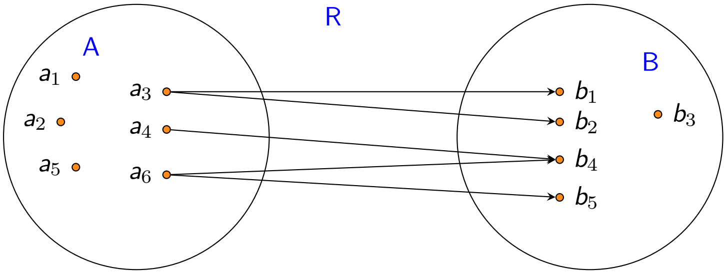
定义域和值域



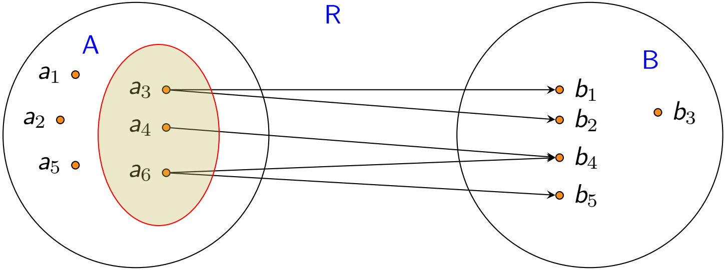
定义域和值域



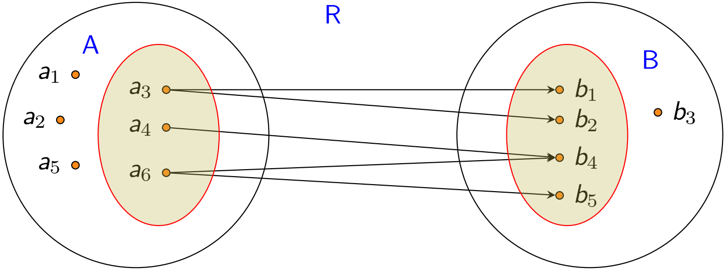
定义域和值域



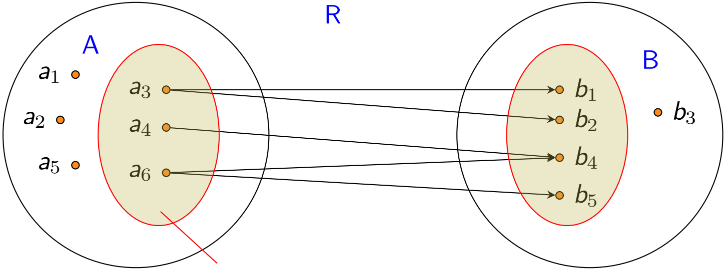
定义域和值域



定义域和值域

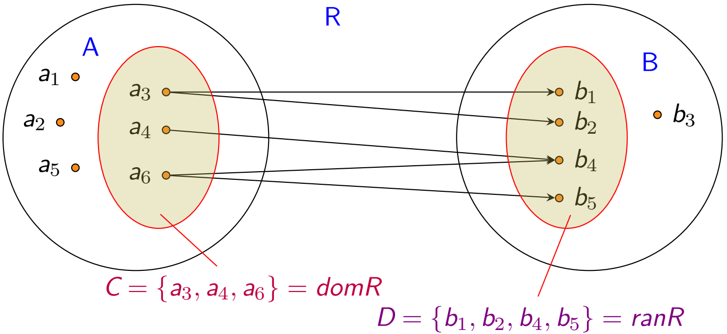


定义域和值域



$C = \{a_3, a_4, a_6\} = domR$

定义域和值域



定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：$C = \{x | x \in A, \exists y \in B, <x, y> \in R\}$，$D = \{y | y \in B, \exists x \in A, <x, y> \in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C = domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D = ranR$；$fldR = domR \cup ranR$ 为 R 的域(field)。

定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：$C=\{x|x\in A,\exists y\in B,<x,y>\in R\}$，$D=\{y|y\in B,\exists x\in A,<x,y>\in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C=domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D=ranR$；$fldR=domR\cup ranR$ 为 R 的域(field)。

Example

定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：$C = \{x|x \in A, \exists y \in B, < x, y >\in R\}$，$D = \{y|y \in B, \exists x \in A, < x, y >\in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C = domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D = ranR$；$fldR = domR \cup ranR$ 为 R 的域(field)。

Example

1. $R_Z = \{< x, y > |(x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$, 则

定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：$C = \{x | x \in A, \exists y \in B, < x, y > \in R\}$，$D = \{y | y \in B, \exists x \in A, < x, y > \in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C = domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D = ranR$；$fldR = domR \cup ranR$ 为 R 的域(field)。

Example

1. $R_Z = \{< x, y > | (x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$, 则 $domR_Z = \{7, -7\}, ranR_Z = \{7, -7\}, fldR_Z = \{7, -7\}$；

定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：$C = \{x|x \in A, \exists y \in B, <x, y> \in R\}$，$D = \{y|y \in B, \exists x \in A, <x, y> \in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C = domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D = ranR$；$fldR = domR \cup ranR$ 为 R 的域(field)。

Example

1. $R_Z = \{<x, y> |(x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$, 则 $domR_Z = \{7, -7\}, ranR_Z = \{7, -7\}, fldR_Z = \{7, -7\}$；
2. 设 $H = \{f, m, s, d\}$ 表示一个家庭中父母子女四个人的集合，R_H 是 H 上的长幼关系, 则

定义域和值域

Definition

设 R 是从 A 到 B 的二元关系，则 A 为关系 R 的前域，B 为关系 R 的后域。令：$C = \{x | x \in A, \exists y \in B, <x, y> \in R\}$，$D = \{y | y \in B, \exists x \in A, <x, y> \in R\}$。称 C 为 R 的定义域(domain)，记为 $C = domR$；D 为 R 的值域(range)，记为 $D = ranR$；$fldR = domR \cup ranR$ 为 R 的域(field)。

Example

1. $R_Z = \{<x, y> | (x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$, 则 $domR_Z = \{7, -7\}, ranR_Z = \{7, -7\}, fldR_Z = \{7, -7\}$；
2. 设 $H = \{f, m, s, d\}$ 表示一个家庭中父母子女四个人的集合，R_H 是 H 上的长幼关系, 则 $domR_H = \{f, m\}, ranR_H = \{s, d\}$ $fldR_H = \{f, m, s, d\}$.

二元关系概念的推广

Definition

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个非空集合，称$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集 R 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个n 元关系(n-ary relation)。

二元关系概念的推广

Definition

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个非空集合，称$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集 R 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个n 元关系(n-ary relation)。

☞

在 n 元关系中，最常用的是二元关系，因而，在不引起混淆的情况下，提到的关系均指二元关系.

THE END, THANKS!