## 函数



Lijie Wang

Τν.

. . . . .

## 函数基本定义

### 王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



## 引言

#### 函数基本定义

Liiie Wang

定)

举

数:

比较

38

函数是数学中的一个基本概念,它非常古老,这个词出现于十七世纪下半叶,比关系理论早两个多世纪,由伟大的数学家莱布尼兹提出,他也与牛顿各自独立的发现了微积分的基本定理.

在高等数学中,函数一般是在实数集的基础上来研究,通常是连续或间断连续的函数.在这里,我们将函数看作是一种特殊的二元关系,从离散量的角度讨论函数的定义,运算和性质.

函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要 例如,各种高级程序语言中都大量的使用了函数。实际上,计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数.

### 引例

函数基本定义

Lijie Wang

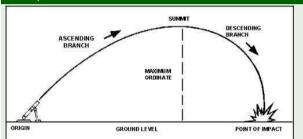
定义

举例

数量

比较

### Example



假定你需要编写一个函数,函数的输入是目标的距离 x,函数的输出是大炮射角  $\alpha$ . 考虑这个函数的输入 x 和输出  $\alpha$  应该满足什么性质?

### 函数

#### 函数基本定义

Liiie Wang

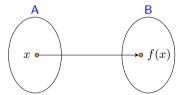
定义

举仍

比较

#### Definition

设 f 是集合 A 到 B 的关系, 如果对每个  $x \in A$ , 都存在惟一的  $y \in B$ , 使得  $\langle x, y \rangle \in f$ , 则称关系 f 为 A 到 B 的函数或映射, 记为  $f: A \to B.A$  为函数 f 的定义域, 记为 dom f = A; f(A) 为函数 f 的值域, 记为 ranf.



当  $< x, y > \in f$  时,通常记为 y = f(x),这时称 x 为函数 f 的自变量 (或原像),y 为 x 在 f 下的函数值 (或像). 注意区分 f 和 f(x) ,二者是不同的。

# 函数

#### 函数基本定义

Lijie Wang

疋.

平份

迷行手

比较

### Example

设 
$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$$
, 则.

设 
$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$$
, 则.

•  $f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, d>, <4, c> \};$ 

- $f_1 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$

- $f_1 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$

- $f_1 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_2 = \{ <1, a>, <2, a>, <2, d>, <4, c> \};$
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_4 = \{ \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \}.$

- $f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, d>, <4, c> \};$  函数
- $f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_4 = \{ \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \}.$

- $f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, d>, <4, c> \};$  函数
- $f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$  非函数
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$
- $f_4 = \{ \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \}.$

- $f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, d>, <4, c> \};$  函数
- $f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle \}$ ; 非函数
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$  函数
- $f_4 = \{ \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \}.$

- $f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, d>, <4, c> \};$  函数
- $f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$  非函数
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$  函数
- $f_4 = \{\langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$ . 非函数

设  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ , 则.

- $f_1 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$  函数
- $f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \};$  函数
- $f_4 = \{ \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle \}$ . 非函数

### 如果关系 f 具备下列两种情况之一, 那么 f 就不是函数:

- 存在元素  $a \in A$ , 在 B 中没有像;
- 存在元素  $a \in A$  , 有两个及两个以上的像。

# 函数

函数基本定义

Lijie Wang

中ツ

举例

淡ケ音

比较

# 函数

函数基本定义

Lijie Wang

定)

平位

388y-

$$\bullet \ f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x+1;$$

- $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$

平份

数

比為

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$
- $h: A \to P(A), h(x) = \{x\};$

- $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$
- $h: A \to P(A), h(x) = \{x\};$
- 设  $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是 n 项任务的集合,  $M = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  是 m 个人的集合, 则  $t: V \to M$  表示任务的安排方案:  $t(a_i) = b_i$  表示  $a_i$  任务由  $b_i$  来完成.

## 函数

函数基本定义

Lijie Wang

....

+17

数:

比

### Example (更多函数的例子)

- $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$
- $h: A \to P(A), h(x) = \{x\};$
- 设  $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是 n 项任务的集合,  $M = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  是 m 个人的集合, 则  $t: V \to M$  表示任务的安排方案:  $t(a_i) = b_i$  表示  $a_i$  任务由  $b_i$  来完成.

#### Definition

所有从 A 到 B 的一切函数构成的集合记为 BA:

$$B^{A} = \{ f | f : A \to B \}.$$

函数基本定义

Lijie Wang

定.

平

W#-5

*~*~·

### Example

函数基本定义

Lijie Wang

定

举化

数量

Had

### Example

函数基本定义

Lijie Wang

定)

华节

数量

### Example

- ②  $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$

函数基本定义

Lijie Wang

定)

4-17

数量

. . . .

### Example

- ②  $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$
- **3**  $f_3 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$

Lijie Wang

数量

### Example

- **1**  $f_1 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$
- $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$
- **3**  $f_3 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$
- **4**  $f_4 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$

Lijie Wang

数量

#### Example

- **1**  $f_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\};$  **2**  $f_5 = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\};$
- $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$
- **3**  $f_3 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$
- **4**  $f_4 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$

- ②  $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$

- **1**  $f_1 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$ 
  - **6**  $f_5 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$
- $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$
- **6**  $f_6 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$ :
- **3**  $f_3 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$ :
- $f_7 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$
- **4**  $f_4 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$

$$f_7 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$$

**3** 
$$f_8 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \}.$$

设  $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ ,则 A 到 B 的所有不同函数有:

② 
$$f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$$

**6** 
$$f_6 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$$

$$\bullet$$
  $f_7 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$ 

$$\mathbf{4} \quad f_4 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$$

**3** 
$$f_8 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \}.$$

设函数  $f: A \to B, |A| = m, |B| = n,$  对 A 中的每个元素而言, 其序偶的第二元素都有 n 种可能的选择, 因而总共有  $n^m$  种选法, 也就是有  $n^m$  个不同的函数.

## 关系与函数的差别

函数基本定义

Lijie Wang

定)

举

₩4r-

比车

当 A 和 B 都是有限集合时, 函数和一般关系具有如下差别:

• 关系和函数的数量不同: 从 A 到 B 的不同关系有  $2^{|A| \times |B|}$  个, 从 A 到 B 的不同函数却仅有  $|B|^{|A|}$  个;

## 关系与函数的差别

函数基本定义

Lijie Wang

たン

举

※ケ:

比车

### 当 A 和 B 都是有限集合时, 函数和一般关系具有如下差别:

- 关系和函数的数量不同: 从 A 到 B 的不同关系有  $2^{|A| \times |B|}$  个, 从 A 到 B 的不同函数却仅有  $|B|^{|A|}$  个;
- 关系和函数的基数不同: 每一个关系的基数可以从零一直到  $|A| \times |B|$ , 每一个函数的基数都为 |A| 个;

## 关系与函数的差别

函数基本定义

Lijie Wang

正〉

举

数

比车

### 当 A 和 B 都是有限集合时, 函数和一般关系具有如下差别:

- 关系和函数的数量不同: 从 A 到 B 的不同关系有  $2^{|A| \times |B|}$  个, 从 A 到 B 的不同函数却仅有  $|B|^{|A|}$  个;
- 关系和函数的基数不同: 每一个关系的基数可以从零一直到  $|A| \times |B|$ , 每一个函数的基数都为 |A| 个:
- 关系和函数的第一元素存在差别: 关系的第一个元素可以相同, 函数的第一元素一定是互不相同的.

函数基本定义

Lijie Wang

+-1

级队

比较



THE END, THANKS!