偏序关系定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

偏序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是自反的、反对称的、传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系(partial order relation), 记为“$\leqslant$”. 读作“小于等于”, 并将“$< a, b > \in \leqslant$”记为 $a \leqslant b$. 序偶 $< A, \leqslant >$ 称为偏序集 (partial order set).

☞ 注意

用“$\leqslant$”来表示偏序关系是由于 “小于等于关系” 是偏序关系的典型范例, 此时已不局限于” 小于等于” 关系, 它指代的是在偏序关系中元素之间的先后顺序, 不局限于通常的数的大小;

偏序关系

Example

☞ 注意

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \leqslant 4, 4 \nleqslant 2)$

☞ 注意

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \leqslant 4, 4 \nleqslant 2)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \leqslant \{1,2\})$

☞ 注意

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \leqslant 4, 4 \nleqslant 2)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \leqslant \{1, 2\})$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示正整数集合上的整除关系; $(2 \leqslant 4, 3 \nleqslant 4, 4 \nleqslant 3)$

☞ 注意

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \preccurlyeq 4, 4 \not\preccurlyeq 2)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \preccurlyeq \{1,2\})$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示正整数集合上的整除关系; $(2 \preccurlyeq 4, 3 \not\preccurlyeq 4, 4 \not\preccurlyeq 3)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示实数集上的大于等于关系; $(2 \not\preccurlyeq 4, 4 \preccurlyeq 2)$

☞ 注意

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \preccurlyeq 4, 4 \not\preccurlyeq 2)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \preccurlyeq \{1,2\})$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示正整数集合上的整除关系; $(2 \preccurlyeq 4, 3 \not\preccurlyeq 4, 4 \not\preccurlyeq 3)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示实数集上的大于等于关系; $(2 \not\preccurlyeq 4, 4 \preccurlyeq 2)$
- 偏序关系 $\preccurlyeq$ 可表示任何一个集合上的恒等关系; $(a \preccurlyeq a, a \in A)$

☞ 注意

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \leqslant 4, 4 \nleqslant 2)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \leqslant \{1, 2\})$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示正整数集合上的整除关系; $(2 \leqslant 4, 3 \nleqslant 4, 4 \nleqslant 3)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的大于等于关系; $(2 \nleqslant 4, 4 \leqslant 2)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示任何一个集合上的恒等关系; $(a \leqslant a, a \in A)$

☞ 注意

- 当 $a \leqslant b$, 并且 $a \neq b$ 时, 可以写作 $a < b$;

偏序关系

Example

- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的小于等于关系; $(2 \leqslant 4, 4 \nleqslant 2)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示幂集上的包含关系; $(\{1\} \leqslant \{1, 2\})$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示正整数集合上的整除关系; $(2 \leqslant 4, 3 \nleqslant 4, 4 \nleqslant 3)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示实数集上的大于等于关系; $(2 \nleqslant 4, 4 \leqslant 2)$
- 偏序关系 $\leqslant$ 可表示任何一个集合上的恒等关系; $(a \leqslant a, a \in A)$

☞ 注意

- 当 $a \leqslant b$, 并且 $a \neq b$ 时, 可以写作 $a < b$;
- $a \leqslant b$ 可对应写作 $b \geqslant a$,$a < b$ 可对应写作 $b > a$.

可比与覆盖

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

可比与覆盖

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 则称 x 与 y 可比;

可比与覆盖

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 则称 x 与 y 可比;
- 如果 $x \leqslant y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \leqslant z \leqslant y$, 则称 y 覆盖 x.

可比与覆盖

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 则称 x 与 y 可比;
- 如果 $x \leqslant y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \leqslant z \leqslant y$, 则称 y 覆盖 x.

Example

可比与覆盖

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 则称 x 与 y 可比;
- 如果 $x \leqslant y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \leqslant z \leqslant y$, 则称 y 覆盖 x.

Example

- 正整数集合上的整除关系中,2 与 4 可比,6 与 3 可比,4 和 3 不可比;4 和 6 覆盖 2，但 8、12 等均不覆盖 2.

可比与覆盖

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 则称 x 与 y 可比;
- 如果 $x \leqslant y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \leqslant z \leqslant y$, 则称 y 覆盖 x.

Example

- 正整数集合上的整除关系中,2 与 4 可比,6 与 3 可比,4 和 3 不可比;4 和 6 覆盖 2，但 8、12 等均不覆盖 2.
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的幂集上的包含关系中,$\{1\}$ 和 $\{1, 2\}$ 可比,$\{1\}$ 和 $\{2\}$ 不可比,$\{1, 2\}$ 和 $\{1, 3, 4\}$ 不可比;$\{1, 2\}$ 覆盖 $\{1\}$ 和 $\{2\}$.

计算机科学中的字典排序

Example

设 Σ 是一个有限的字母表.Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字, Σ^* 是包含空字"ε"的所有字组成的集合, 建立 Σ^* 上的字典次序关系 $\mathbf{L}$ 如下. 设 $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $x, y \in \Sigma^*$.

可见:$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系.

计算机科学中的字典排序

Example

设 Σ 是一个有限的字母表.Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字, Σ^* 是包含空字“ε”的所有字组成的集合, 建立 Σ^* 上的字典次序关系 $\mathbf{L}$ 如下. 设 $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $x, y \in \Sigma^*$.

- 当 $x_1 \neq y_1$ 时，若 $x_1 \leqslant y_1$，则 $x\mathbf{L}y$；若 $y_1 \leqslant x_1$，则 $y\mathbf{L}x$。

可见:$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系.

计算机科学中的字典排序

Example

设 Σ 是一个有限的字母表.Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字, Σ^* 是包含空字"ε"的所有字组成的集合, 建立 Σ^* 上的字典次序关系 $\mathbf{L}$ 如下. 设 $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $x, y \in \Sigma^*$.

- 当 $x_1 \neq y_1$ 时，若 $x_1 \leqslant y_1$，则 $x\mathbf{L}y$；若 $y_1 \leqslant x_1$，则 $y\mathbf{L}x$。
- 若存在最大的 k 且 $k < min(n, m)$, 使 $x_i = y_i(i = 1, 2, \cdots, k)$, 而 $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, 若 $x_{k+1} \leqslant y_{k+1}$, 则 $x\mathbf{L}y$；若 $y_{k+1} \leqslant x_{k+1}$, 则 $y\mathbf{L}x$。

可见:$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系.

计算机科学中的字典排序

Example

设 Σ 是一个有限的字母表.Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字, Σ^* 是包含空字"ε"的所有字组成的集合, 建立 Σ^* 上的字典次序关系 $\mathbf{L}$ 如下. 设 $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $x, y \in \Sigma^*$.

- 当 $x_1 \neq y_1$ 时，若 $x_1 \leqslant y_1$ ，则 $x\mathbf{L}y$；若 $y_1 \leqslant x_1$ ，则 $y\mathbf{L}x$。
- 若存在最大的 k 且 $k < min(n, m)$, 使 $x_i = y_i(i = 1, 2, \cdots, k)$, 而 $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, 若 $x_{k+1} \leqslant y_{k+1}$, 则 $x\mathbf{L}y$；若 $y_{k+1} \leqslant x_{k+1}$, 则 $y\mathbf{L}x$。
- 若存在最大的 k 且 $k = min(n, m)$ ，使 $x_i = y_i(i = 1, 2, 3, \cdots, k)$, 此时, 若 $n \leqslant m$, 则 $x\mathbf{L}y$; 若 $m \leqslant n$, 则 $y\mathbf{L}x$.

可见:$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系.

计算机科学中的字典排序

Example

令 Σ 为所有小写英文字母的集合. 则 Σ^* 定义了所有由小写字母构成的串.

☞

在 C 语言的标准库中的字符串比较函数 strcmp(str1,str2), 就是基于字典排序来比较两个字符串的大小,str1=str2 则返回 0,str1 大于 str2 时返回正值,str1 小于 str2 时返回负值.

计算机科学中的字典排序

Example

令 Σ 为所有小写英文字母的集合. 则 Σ^* 定义了所有由小写字母构成的串.

1. $<$ *aiscrete*, *discrete* $>\in \mathbf{L}$, 即 *aiscrete* $\leqslant$ *discrete*;

☞

在 C 语言的标准库中的字符串比较函数 strcmp(str1,str2), 就是基于字典排序来比较两个字符串的大小,str1=str2 则返回 0,str1 大于 str2 时返回正值,str1 小于 str2 时返回负值.

计算机科学中的字典排序

Example

令 Σ 为所有小写英文字母的集合. 则 Σ^* 定义了所有由小写字母构成的串.

1. $<$ *aiscrete*, *discrete* $>\in \mathbf{L}$, 即 *aiscrete* $\leqslant$ *discrete*;
2. $<$ *discreet*, *discrete* $>\in \mathbf{L}$, 即 *discreet* $\leqslant$ *discrete*;

☞

在 C 语言的标准库中的字符串比较函数 strcmp(str1,str2), 就是基于字典排序来比较两个字符串的大小,str1=str2 则返回 0,str1 大于 str2 时返回正值,str1 小于 str2 时返回负值.

计算机科学中的字典排序

Example

令 Σ 为所有小写英文字母的集合. 则 Σ^* 定义了所有由小写字母构成的串.

1. $<$ *aiscrete*, *discrete* $>\in \mathbf{L}$, 即 *aiscrete* $\leqslant$ *discrete*;
2. $<$ *discreet*, *discrete* $>\in \mathbf{L}$, 即 *discreet* $\leqslant$ *discrete*;
3. $<$ *discreet*, *discreetness* $>\in \mathbf{L}$, 即 *discrete* $\leqslant$ *discreetness*.

☞

在 C 语言的标准库中的字符串比较函数 strcmp(str1,str2), 就是基于字典排序来比较两个字符串的大小,str1=str2 则返回 0,str1 大于 str2 时返回正值,str1 小于 str2 时返回负值.

计算机科学中的字典排序

证明：L 是偏序关系.

综上所述，$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系。 $\square$

计算机科学中的字典排序

证明：L 是偏序关系.

1. **L 是自反的。**
对任意 $x \in \Sigma^*$，令 $x = x_1 x_2 \ldots x_n$，其中 $x_i \in \Sigma$，显然有 $x_i \leqslant x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$，从而有 $x\mathbf{L}x$；

综上所述，$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系。 □

计算机科学中的字典排序

证明：$\mathbf{L}$ 是偏序关系.

1. **$\mathbf{L}$ 是自反的。**
   对任意 $x \in \Sigma^*$, 令 $x = x_1x_2\ldots x_n$，其中 $x_i \in \Sigma$，显然有 $x_i \leqslant x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$，从而有 $x\mathbf{L}x$；
2. **$\mathbf{L}$ 是反对称的。**
   对任意 $x\ y \in \Sigma^*$，令 $x = x_1x_2\ldots x_n, y = y_1y_2\ldots y_m$，其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \ldots, n\ j = 1, 2, \ldots, m)$。若 $x\mathbf{L}y$ 且 $y\mathbf{L}x$，根据 $\mathbf{L}$ 的定义有 $x = y$；

综上所述，$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系。 □

计算机科学中的字典排序

证明：L 是偏序关系.

1. **L 是自反的。**
   对任意 $x \in \Sigma^*$, 令 $x = x_1 x_2 \dots x_n$，其中 $x_i \in \Sigma$，显然有 $x_i \leqslant x_i (i = 1, 2, \dots, n)$，从而有 $x\mathbf{L}x$；
2. **L 是反对称的。**
   对任意 $x\ y \in \Sigma^*$，令 $x = x_1 x_2 \dots x_n, y = y_1 y_2 \dots y_m$，其中 $x_i, y_j \in \Sigma(i = 1, 2, \dots, n\ j = 1, 2, \dots, m)$。若 $x\mathbf{L}y$ 且 $y\mathbf{L}x$，根据 $\mathbf{L}$ 的定义有 $x = y$；
3. **L 是传递的。**
   对任意 $x, y, z \in \Sigma^*$，令 $x = x_1 x_2 \dots x_n, y = y_1 y_2 \dots y_m\ z = z_1 z_2 \dots z_p$，其中 $x_i, y_j, z_k \in \Sigma(i = 1, 2, \dots, n\ j = 1, 2, \dots, m\ k = 1, 2, \dots, p)$。若 $x\mathbf{L}y$ 且 $y\mathbf{L}z$，根据 $\mathbf{L}$ 的定义和 "$\leqslant$"的传递性，有 $x\mathbf{L}z$.

综上所述，$\mathbf{L}$ 是 Σ^* 上的一个偏序关系。 □

THE END, THANKS!