命题逻辑

公式的分类和逻辑等价

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

真值表告诉我们什么？

Example

真值表告诉我们什么？

Example

写出下面一组命题公式的真值表：

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \neg(P \to Q) \to P \\
G_2 &= (P \to Q) \land P \\
G_3 &= \neg(P \land \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \to Q)
\end{aligned}
$$

真值表告诉我们什么？

Example

写出下面一组命题公式的真值表：

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \neg(P \to Q) \to P \\
G_2 &= (P \to Q) \wedge P \\
G_3 &= \neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \to Q)
\end{aligned}
$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**1**	**0**	**0**
1	1	**1**	**1**	**0**

真值表告诉我们什么？

Example

写出下面一组命题公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \to Q) \to P$$
$$G_2 = (P \to Q) \land P$$
$$G_3 = \neg(P \land \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \to Q)$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**1**	**0**	**0**
1	1	**1**	**1**	**0**
		全为真	有真有假	全为假

命题公式分类

Definition

☞ 三种特殊公式之间的关系

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。

☞ 三种特殊公式之间的关系

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为永假公式(矛盾式,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。

☞ 三种特殊公式之间的关系

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为永假公式(矛盾式,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。
- 公式 G 称为可满足公式(satisfiable)，如果它不是永假的。

☞ 三种特殊公式之间的关系

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为永假公式(矛盾式,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。
- 公式 G 称为可满足公式(satisfiable)，如果它不是永假的。

☞ 三种特殊公式之间的关系

1. G 是永真的当且仅当 $\neg G$ 是永假的；

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为永假公式(矛盾式,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。
- 公式 G 称为可满足公式(satisfiable)，如果它不是永假的。

☞ 三种特殊公式之间的关系

1. G 是永真的当且仅当 $\neg G$ 是永假的；
2. G 是可满足的当且仅当至少有一个解释 I，使 G 在 I 下为真。

命题公式分类

Definition

- 公式 G 称为永真公式(重言式,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为永假公式(矛盾式,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。
- 公式 G 称为可满足公式(satisfiable)，如果它不是永假的。

☞ 三种特殊公式之间的关系

1. G 是永真的当且仅当 $\neg G$ 是永假的；
2. G 是可满足的当且仅当至少有一个解释 I，使 G 在 I 下为真。
3. 若 G 是永真式，则 G 一定是可满足式，但反之可满足公式不一定是永真式；

命题公式分类

Example

写出下列公式的真值表并判定其公式类型。

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \\
G_2 &= (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P)) \\
G_3 &= (P \to \neg Q) \vee \neg Q
\end{aligned}
$$

命题公式分类

Example

写出下列公式的真值表并判定其公式类型。

$$G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$
$$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P))$$
$$G_3 = (P \to \neg Q) \vee \neg Q$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**
1	0	**1**	**0**	**1**
1	1	**1**	**0**	**0**

命题公式分类

Example

写出下列公式的真值表并判定其公式类型。

$$G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$
$$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P))$$
$$G_3 = (P \to \neg Q) \vee \neg Q$$

P	Q	G_1	G_2	G_3
0	0	**1**	**0**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**
1	0	**1**	**0**	**1**
1	1	**1**	**0**	**0**
		重言式	矛盾式	可满足公式

公式的等价

考虑上一个例子中的永真公式 $G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$，将这个公式拆开，令

$$G = P \to Q,\ H = \neg P \vee Q,$$

从而 $G_1 = G \leftrightarrow H$，由于 G_1 是永真公式，根据等价联接词的定义可知 G, H 必同为真或者同为假。此时我们称公式 G, H 具有逻辑等价关系。

Definition

设 G，H 是两个命题公式，P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_n是出现在 G，H 中所有的命题变元，如果对于 P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_n 的 2^n 个解释，G 与 H 的真值结果都相同，则称公式 G 与 H 是等价的，记作$G = H$。（或$G \Leftrightarrow H$）

公式等价的充分必要条件

Theorem

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

公式等价的充分必要条件

Theorem

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

Proof.

公式等价的充分必要条件

Theorem

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

Proof.

- 必要性：假定 $G = H$，则 G，H 在其任意解释 I 下或同为真或同为假，于是由 “$\leftrightarrow$” 的意义知，公式 $G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释 I 下，其真值为 “真”，即 $G \leftrightarrow H$ 为永真公式。

公式等价的充分必要条件

Theorem

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

Proof.

- 必要性：假定 $G = H$，则 G，H 在其任意解释 I 下或同为真或同为假，于是由 “$\leftrightarrow$” 的意义知，公式 $G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释 I 下，其真值为 “真”，即 $G \leftrightarrow H$ 为永真公式。
- 充分性：假定公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式，I 是它的任意解释，在 I 下，$G \leftrightarrow H$ 为真，因此，G，H 或同为真，或同为假，由于 I 的任意性，故有 $G = H$。 $\square$

公式等价的充分必要条件

Theorem

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

Proof.

- 必要性：假定 $G = H$，则 G，H 在其任意解释 I 下或同为真或同为假，于是由 “$\leftrightarrow$” 的意义知，公式 $G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释 I 下，其真值为 “真”，即 $G \leftrightarrow H$ 为永真公式。
- 充分性：假定公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式，I 是它的任意解释，在 I 下，$G \leftrightarrow H$ 为真，因此，G，H 或同为真，或同为假，由于 I 的任意性，故有 $G = H$。 □

☞ 命题公式的可判定性

可判定性: 能否给出一个可行方法，完成对任意公式的判定类问题。（类型或等价判定）
命题公式是可判定的。

THE END, THANKS!