

二元关系

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

关系的闭包

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



引言

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解



一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？

引言

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解



一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？

我们可以通过添加一些元素，使得关系具备我们想要的性质。例如，对给定集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$ ，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系 R 中添加 $\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle$ 这两个元素后，所得到的新关系 R' 就具有自反性。

引言

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解



一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？

我们可以通过添加一些元素，使得关系具备我们想要的性质。例如，对给定集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$ ，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系 R 中添加 $\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle$ 这两个元素后，所得到的新关系 R' 就具有自反性。另外，还可以添加 $\langle 2, 2 \rangle \quad \langle 3, 3 \rangle \quad \langle 1, 3 \rangle$ ，得到的新关系 R'' 仍然具有自反性。

引言

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解



一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？

我们可以通过添加一些元素，使得关系具备我们想要的性质。例如，对给定集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$ ，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系 R 中添加 $\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle$ 这两个元素后，所得到的新关系 R' 就具有自反性。另外，还可以添加 $\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle$ ，得到的新关系 R'' 仍然具有自反性。

如何在给定关系中添加最少的元素，使其具有需要的特殊性质，这就是关系的闭包问题。

闭包定义

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R' , 满足:

闭包定义

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R' , 满足:

- ① R' 是自反的 (对称的, 或传递的);

闭包定义

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R' , 满足:

- ① R' 是自反的 (对称的, 或传递的);
- ② 对任何自反的 (对称的, 或传递的) 关系 R'' , 如果 $R \subseteq R''$, 就有 $R' \subseteq R''$, 则称 R' 为 R 的自反闭包(reflexive closure) (对称闭包(symmetric closure), 或传递闭包(transitive closure)), 分别记为 $r(R)$ ($s(R)$ 或 $t(R)$).

闭包定义

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R' , 满足:

- ① R' 是自反的 (对称的, 或传递的);
- ② 对任何自反的 (对称的, 或传递的) 关系 R'' , 如果 $R \subseteq R''$, 就有 $R' \subseteq R''$, 则称 R' 为 R 的自反闭包(reflexive closure) (对称闭包(symmetric closure), 或传递闭包(transitive closure)), 分别记为 $r(R)$ ($s(R)$ 或 $t(R)$).

Example

闭包定义

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R' , 满足:

- ① R' 是自反的 (对称的, 或传递的);
- ② 对任何自反的 (对称的, 或传递的) 关系 R'' , 如果 $R \subseteq R''$, 就有 $R' \subseteq R''$, 则称 R' 为 R 的自反闭包(reflexive closure) (对称闭包(symmetric closure), 或传递闭包(transitive closure)), 分别记为 $r(R)$ ($s(R)$ 或 $t(R)$).

Example

- ① 设定义在整数集 Z 上的“ $<$ ”关系为 R , 则 $r(R) = “\leq”$, $s(R) = “\neq”$, $t(R) = “<”$;

闭包定义

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R' , 满足:

- ① R' 是自反的 (对称的, 或传递的);
- ② 对任何自反的 (对称的, 或传递的) 关系 R'' , 如果 $R \subseteq R''$, 就有 $R' \subseteq R''$, 则称 R' 为 R 的自反闭包(reflexive closure) (对称闭包(symmetric closure), 或传递闭包(transitive closure)), 分别记为 $r(R)$ ($s(R)$ 或 $t(R)$).

Example

- ① 设定义在整数集 Z 上的“ $<$ ”关系为 R , 则 $r(R) = “\leq”$, $s(R) = “\neq”$, $t(R) = “<”$;
- ② 设定义在整数集 Z 上的“ $=$ ”关系为 S , 则 $r(S) = “=”$, $s(S) = “=”$, $t(S) = “=”$.

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >\}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

$$\textcircled{1} \quad r(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 1, 1 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >\};$$

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >\}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

- ① $r(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 1, 1 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >\};$
- ② $s(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 2, 1 >, < 3, 2 >, < 4, 3 >\};$

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >\}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

- ① $r(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 1, 1 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >\};$
- ② $s(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 2, 1 >, < 3, 2 >, < 4, 3 >\};$
- ③ $t(R) = \{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 4 >, < 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 4 >\}.$

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

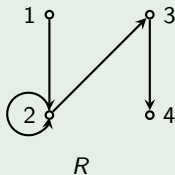
Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

① $r(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \};$

② $s(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \};$

③ $t(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}.$



闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

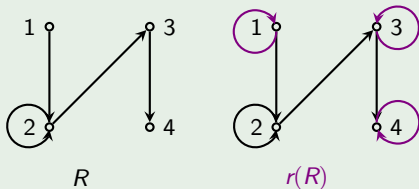
Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

① $r(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \};$

② $s(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \};$

③ $t(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}.$



闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

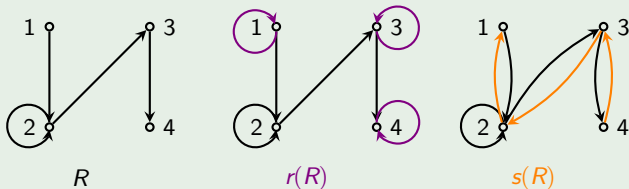
Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

① $r(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \};$

② $s(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \};$

③ $t(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}.$



闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

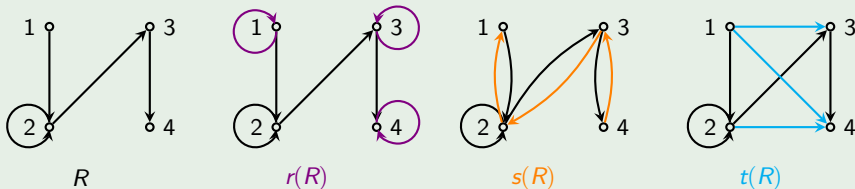
Example

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ 是定义在 A 上的二元关系, 则

① $r(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \};$

② $s(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \};$

③ $t(R) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}.$



闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

利用关系图求闭包

- ① 检查 R 的关系图，在没有自环的结点处加上自环，可得 $r(R)$ 的关系图;

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

利用关系图求闭包

- ① 检查 R 的关系图，在没有自环的结点处加上自环，可得 $r(R)$ 的关系图;
- ② 检查 R 的关系图，将每条单向边全部改成双向边，可得 $s(R)$ 的关系图;

闭包求解

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

利用关系图求闭包

- ① 检查 R 的关系图，在没有自环的结点处加上自环，可得 $r(R)$ 的关系图;
- ② 检查 R 的关系图，将每条单向边全部改成双向边，可得 $s(R)$ 的关系图;
- ③ 检查 R 的关系图，从每个结点出发，找到其终点，如果该结点与其终点没有边相连，就加上此边，可得 $t(R)$ 的关系图.

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系, 则

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系, 则

$$\textcircled{1} \quad r(R) = R \cup I_A;$$

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系, 则

- ① $r(R) = R \cup I_A;$
- ② $s(R) = R \cup R^{-1};$

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系, 则

- ① $r(R) = R \cup I_A$;
- ② $s(R) = R \cup R^{-1}$;
- ③ $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 若 $|A| = n$, 则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i$.

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系, 则

- ① $r(R) = R \cup I_A$;
- ② $s(R) = R \cup R^{-1}$;
- ③ $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 若 $|A| = n$, 则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i$.

Proof.

略.



利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序, $R = \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle \}$ 是定义在 P 上的调用关系, 则 R 的闭包为:

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序, $R = \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle \}$ 是定义在 P 上的调用关系, 则 R 的闭包为:

$$\textcircled{1} \quad r(R) = R \cup I_A = \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle \} \cup \{ \langle P_1, P_1 \rangle, \langle P_2, P_2 \rangle, \langle P_3, P_3 \rangle, \langle P_4, P_4 \rangle \} = \{ \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_3 \rangle, \langle P_2, P_4 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_1 \rangle, \langle P_2, P_2 \rangle, \langle P_3, P_3 \rangle, \langle P_4, P_4 \rangle \};$$

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序, $R = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\}$ 是定义在 P 上的调用关系, 则 R 的闭包为:

- ① $r(R) = R \cup I_A = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_1, P_1 >, < P_2, P_2 >, < P_3, P_3 >, < P_4, P_4 >\} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_1, P_1 >, < P_2, P_2 >, < P_3, P_3 >, < P_4, P_4 >\};$
- ② $s(R) = R \cup R^{-1} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_2, P_1 >, < P_3, P_1 >, < P_4, P_2 >, < P_4, P_3 >\} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_2, P_1 >, < P_3, P_1 >, < P_4, P_2 >, < P_4, P_3 >\};$

利用关系运算求闭包

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解

Example

设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序, $R = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\}$ 是定义在 P 上的调用关系, 则 R 的闭包为:

- ① $r(R) = R \cup I_A = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_1, P_1 >, < P_2, P_2 >, < P_3, P_3 >, < P_4, P_4 >\} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_1, P_1 >, < P_2, P_2 >, < P_3, P_3 >, < P_4, P_4 >\};$
- ② $s(R) = R \cup R^{-1} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_2, P_1 >, < P_3, P_1 >, < P_4, P_2 >, < P_4, P_3 >\} = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_2, P_1 >, < P_3, P_1 >, < P_4, P_2 >, < P_4, P_3 >\};$
- ③ $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >\} \cup \{< P_1, P_4 >\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{< P_1, P_2 >, < P_1, P_3 >, < P_2, P_4 >, < P_3, P_4 >, < P_1, P_4 >\}.$

关系的闭包

Lijie Wang

什么是闭包

闭包求解



THE END, THANKS!