命题逻辑

基本推理形式和蕴涵公式

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

推理形式

所谓推理，是指从一组前提合乎逻辑的推出结论的思维过程。在这里，我们使用命题公式来表达前提和结论。

推理形式

所谓推理，是指从一组前提合乎逻辑的推出结论的思维过程。在这里，我们使用命题公式来表达前提和结论。

Definition

设$G_1, G_2, \cdots, G_n, H$是公式，称 H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果当且仅当对任意解释 I，如果 I使得$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$为真，则 I也会使 H为真。记为$G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$。"$\Rightarrow$"称为蕴涵关系。此时称 $G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$ 为有效的, 否则称为无效的。$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 称为一组前提，有时用集合 Γ 来表示，记为 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$，$H$ 称为结论。此时也称 H 是前提集合 Γ 的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$。

推理的判定定理

Theorem

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式。

☞ 判定方法

推理的判定定理

Theorem

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式。

Proof.

证明略。 □

☞ 判定方法

推理的判定定理

Theorem

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式。

Proof.

证明略。 $\square$

☞ 判定方法

- 真值表技术。

推理的判定定理

Theorem

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式。

Proof.

证明略。 $\square$

☞ 判定方法

- 真值表技术。
- 公式转换法。

推理的判定定理

Theorem

公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n) \rightarrow H$ 为永真公式。

Proof.

证明略。 $\square$

☞ 判定方法

- 真值表技术。
- 公式转换法。
- 主析取范式法。

推理的判定定理

Example

判断推理 $P \to Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

推理的判定定理

Example

判断推理 $P \to Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

推理的判定定理

Example

判断推理 $P \to Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

方法一：真值表技术

P	Q	$((P \to Q) \wedge P) \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

推理的判定定理

Example

判断推理 $P \to Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

方法一：真值表技术

P	Q	$((P \to Q) \wedge P) \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

方法二：公式转换法

$$\begin{aligned} & ((P \to Q) \wedge P) \to Q \\ = \; & \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q \\ = \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\ = \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \\ = \; & 1 \end{aligned}$$

推理的判定定理

Example

判断推理 $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$ 是否有效？

方法一：真值表技术

P	Q	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

方法二：公式转换法

$$
\begin{aligned}
& ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q \\
= \; & \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q \\
= \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\
= \; & \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \\
= \; & 1
\end{aligned}
$$

方法三：主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q = \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q = \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee Q \\
= \; & (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q) \\
= \; & (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \quad (m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3)
\end{aligned}
$$

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G$; $I_2 : G \wedge H \Rightarrow H$. (简化规则)
2. $I_3 : G \Rightarrow G \vee H$; $I_4 : H \Rightarrow G \vee H$. (添加规则)

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)
2. $I_3 : G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4 : H \Rightarrow G \vee H.$ (添加规则)
3. $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H;$ (合取引入规则)

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)
2. $I_3 : G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4 : H \Rightarrow G \vee H.$ (添加规则)
3. $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H;$ (合取引入规则)
4. $I_6 : G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7 : G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$ (选言三段论)

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$ *(简化规则)*
2. $I_3 : G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4 : H \Rightarrow G \vee H.$ *(添加规则)*
3. $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H;$ *(合取引入规则)*
4. $I_6 : G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7 : G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$ *(选言三段论)*
5. $I_8 : G \rightarrow H, G \Rightarrow H;$ *(假言推理规则)*

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)
2. $I_3 : G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4 : H \Rightarrow G \vee H.$ (添加规则)
3. $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H;$ (合取引入规则)
4. $I_6 : G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7 : G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$ (选言三段论)
5. $I_8 : G \rightarrow H, G \Rightarrow H;$ (假言推理规则)
6. $I_9 : G \rightarrow H, \neg H \Rightarrow \neg G;$ (否定后件式)

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1: G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2: G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)
2. $I_3: G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4: H \Rightarrow G \vee H.$ (添加规则)
3. $I_5: G, H \Rightarrow G \wedge H;$ (合取引入规则)
4. $I_6: G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7: G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$ (选言三段论)
5. $I_8: G \rightarrow H, G \Rightarrow H;$ (假言推理规则)
6. $I_9: G \rightarrow H, \neg H \Rightarrow \neg G;$ (否定后件式)
7. $I_{10}: G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I;$ (假言三段论)

推理定律–基本蕴涵关系

Theorem

设 G, H, I 为任意的命题公式。

1. $I_1 : G \wedge H \Rightarrow G; \quad I_2 : G \wedge H \Rightarrow H.$ (简化规则)
2. $I_3 : G \Rightarrow G \vee H; \quad I_4 : H \Rightarrow G \vee H.$ (添加规则)
3. $I_5 : G, H \Rightarrow G \wedge H;$ (合取引入规则)
4. $I_6 : G \vee H, \neg G \Rightarrow H; \quad I_7 : G \vee H, \neg H \Rightarrow G.$ (选言三段论)
5. $I_8 : G \to H, G \Rightarrow H;$ (假言推理规则)
6. $I_9 : G \to H, \neg H \Rightarrow \neg G;$ (否定后件式)
7. $I_{10} : G \to H, H \to I \Rightarrow G \to I;$ (假言三段论)
8. $I_{11} : G \vee H, G \to I, H \to I \Rightarrow I;$ (二难推论)

基本蕴涵关系举例

Example

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$ (假言推理规则)

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \to Q, P \Rightarrow Q$ （假言推理规则）
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \to Q, P \Rightarrow Q$ (假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。
  可描述为：$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$ (假言三段论)

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \to Q, P \Rightarrow Q$　　(假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。
  可描述为：$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$　　(假言三段论)
- 若你发电子邮件告诉我密码，则我将完成程序的编写；我没有完成程序的编写。所以，你没有发电子邮件告诉我密码。

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \to Q, P \Rightarrow Q$　(假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。
  可描述为：$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$　(假言三段论)
- 若你发电子邮件告诉我密码，则我将完成程序的编写；我没有完成程序的编写。所以，你没有发电子邮件告诉我密码。
  可描述为：$P \to Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$　(否定后件式)

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \to Q, P \Rightarrow Q$　(假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。
  可描述为：$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$　(假言三段论)
- 若你发电子邮件告诉我密码，则我将完成程序的编写；我没有完成程序的编写。所以，你没有发电子邮件告诉我密码。
  可描述为：$P \to Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$　(否定后件式)
- 这个案件的凶手肯定是王某或陈某；经过调查，王某不是凶手。所以，陈某是凶手。

基本蕴涵关系举例

Example

- 如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；a 是偶数。所以，a 能被 2 整除。
  可描述为：$P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$ (假言推理规则)
- 如果一个人是单身汉，则他不幸福；如果一个人不幸福，则他死得早。所以，单身汉死得早。
  可描述为：$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ (假言三段论)
- 若你发电子邮件告诉我密码，则我将完成程序的编写；我没有完成程序的编写。所以，你没有发电子邮件告诉我密码。
  可描述为：$P \rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$ (否定后件式)
- 这个案件的凶手肯定是王某或陈某；经过调查，王某不是凶手。所以，陈某是凶手。
  可描述为：$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$ (选言三段论)

THE END, THANKS!