函数基本定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

引言

☞

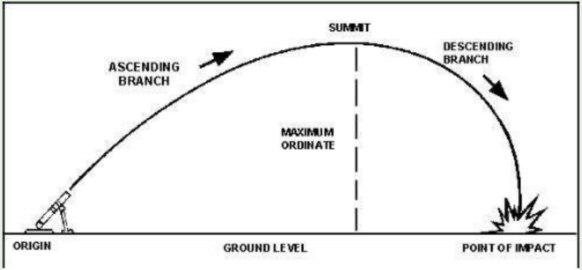
函数是数学中的一个基本概念，它非常古老，这个词出现于十七世纪下半叶，比关系理论早两个多世纪，由伟大的数学家莱布尼兹提出，他也与牛顿各自独立的发现了微积分的基本定理.

在高等数学中，函数一般是在实数集的基础上来研究，通常是连续或间断连续的函数. 在这里，我们将函数看作是一种特殊的二元关系，从离散量的角度讨论函数的定义，运算和性质.

函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要. 例如，各种高级程序语言中都大量的使用了函数。实际上，计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数.

引例

Example

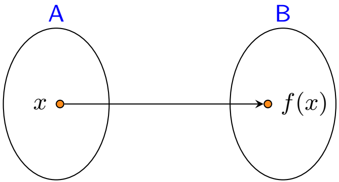


假定你需要编写一个函数，函数的输入是目标的距离 x，函数的输出是大炮射角 α。考虑这个函数的输入 x 和输出 α 应该满足什么性质?

函数

Definition

设 f 是集合 A 到 B 的关系, 如果对每个 $x \in A$, 都存在惟一的 $y \in B$, 使得 $< x, y >\in f$, 则称关系 f 为 A 到 B 的函数或映射, 记为 $f : A \to B$.A 为函数 f 的定义域, 记为 $dom f = A$;$f(A)$ 为函数 f 的值域, 记为 $ran f$.



当 $< x, y >\in f$ 时, 通常记为 $y = f(x)$, 这时称 x 为函数 f 的自变量 (或原像),y 为 x 在 f 下的函数值 (或像). 注意区分 f 和 $f(x)$, 二者是不同的。

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

函数

Example

设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{a,b,c,d\}$, 则.

- $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,d>,<4,c>\}$;

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >\}$;
- $f_2 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 2, d >, < 4, c >\}$;

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >\}$;
- $f_2 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 2, d >, < 4, c >\}$;
- $f_3 = \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$;

函数

Example

设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{a,b,c,d\}$, 则.

- $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,d>,<4,c>\}$;
- $f_2=\{<1,a>,<2,a>,<2,d>,<4,c>\}$;
- $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,d>,<4,c>\}$;
- $f_4=\{<2,b>,<3,d>,<4,c>\}$.

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >\}$; 函数
- $f_2 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 2, d >, < 4, c >\}$;
- $f_3 = \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$;
- $f_4 = \{< 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$.

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >\}$; 函数
- $f_2 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 2, d >, < 4, c >\}$; 非函数
- $f_3 = \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$;
- $f_4 = \{< 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$.

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >\}$; 函数
- $f_2 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 2, d >, < 4, c >\}$; 非函数
- $f_3 = \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$; 函数
- $f_4 = \{< 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$.

函数

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >\}$; 函数
- $f_2 = \{< 1, a >, < 2, a >, < 2, d >, < 4, c >\}$; 非函数
- $f_3 = \{< 1, a >, < 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$; 函数
- $f_4 = \{< 2, b >, < 3, d >, < 4, c >\}$. 非函数

函数

Example

设 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{a,b,c,d\}$, 则.

- $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,d>,<4,c>\}$; 函数
- $f_2=\{<1,a>,<2,a>,<2,d>,<4,c>\}$; 非函数
- $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,d>,<4,c>\}$; 函数
- $f_4=\{<2,b>,<3,d>,<4,c>\}$. 非函数

如果关系 f 具备下列两种情况之一，那么 f 就不是函数：

- 存在元素 $a \in A$，在 B 中没有像；
- 存在元素 $a \in A$，有两个及两个以上的像。

函数

Example (更多函数的例子)

函数

Example (更多函数的例子)

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$

函数

Example (更多函数的例子)

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$

函数

Example (更多函数的例子)

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$
- $h : A \to P(A), h(x) = \{x\};$

函数

Example (更多函数的例子)

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1$;
- $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1$;
- $h : A \to P(A), h(x) = \{x\}$;
- 设 $V = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 n 项任务的集合,$M = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 是 m 个人的集合,则 $t : V \to M$ 表示任务的安排方案: $t(a_i) = b_j$ 表示 a_i 任务由 b_j 来完成.

函数

Example (更多函数的例子)

- $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 1$;
- $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1$;
- $h: A \to P(A), h(x) = \{x\}$;
- 设 $V = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 n 项任务的集合,$M = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 是 m 个人的集合,则 $t: V \to M$ 表示任务的安排方案: $t(a_i) = b_j$ 表示 a_i 任务由 b_j 来完成.

Definition

所有从 A 到 B 的一切函数构成的集合记为 B^A:

$$B^A = \{f | f: A \to B\}.$$

函数的数量

Example

设 $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

函数的数量

Example

设 $A=\{a,b,c\},B=\{1,2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$;

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
3. $f_3 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
3. $f_3 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
4. $f_4 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$;

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
3. $f_3 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
4. $f_4 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$;
5. $f_5 = \{< a, 2 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
3. $f_3 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
4. $f_4 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$;
5. $f_5 = \{< a, 2 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
6. $f_6 = \{< a, 2 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
3. $f_3 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
4. $f_4 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$;
5. $f_5 = \{< a, 2 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
6. $f_6 = \{< a, 2 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
7. $f_7 = \{< a, 2 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;

函数的数量

Example

设 $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$;
2. $f_2=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$;
3. $f_3=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$;
4. $f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$;
5. $f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$;
6. $f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$;
7. $f_7=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$;
8. $f_8=\{<a,2>,<b,2>,<c,2>\}$.

函数的数量

Example

设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$，则 A 到 B 的所有不同函数有:

1. $f_1 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
2. $f_2 = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
3. $f_3 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
4. $f_4 = \{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$;
5. $f_5 = \{< a, 2 >, < b, 1 >, < c, 1 >\}$;
6. $f_6 = \{< a, 2 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$;
7. $f_7 = \{< a, 2 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$;
8. $f_8 = \{< a, 2 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$.

设函数 $f : A \to B, |A| = m, |B| = n$, 对 A 中的每个元素而言, 其序偶的第二元素都有 n 种可能的选择, 因而总共有 n^m 种选法, 也就是有 n^m 个不同的函数.

关系与函数的差别

当 A 和 B 都是有限集合时，函数和一般关系具有如下差别：

- 关系和函数的数量不同：从 A 到 B 的不同关系有 $2^{|A|\times|B|}$ 个，从 A 到 B 的不同函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个；

关系与函数的差别

当 A 和 B 都是有限集合时，函数和一般关系具有如下差别:

- 关系和函数的数量不同: 从 A 到 B 的不同关系有 $2^{|A|\times|B|}$ 个，从 A 到 B 的不同函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个;
- 关系和函数的基数不同: 每一个关系的基数可以从零一直到 $|A|\times|B|$，每一个函数的基数都为 $|A|$ 个;

关系与函数的差别

当 A 和 B 都是有限集合时，函数和一般关系具有如下差别:

- 关系和函数的数量不同: 从 A 到 B 的不同关系有 $2^{|A|\times|B|}$ 个，从 A 到 B 的不同函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个;
- 关系和函数的基数不同: 每一个关系的基数可以从零一直到 $|A|\times|B|$，每一个函数的基数都为 $|A|$ 个;
- 关系和函数的第一元素存在差别: 关系的第一个元素可以相同，函数的第一元素一定是互不相同的.

THE END, THANKS!