有向图的连通性

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

有向图的连通性

由于有向图中边都有方向性，因此有向图结点之间的可达关系仅仅具有自反性和传递性，而不具有对称性。因此，有向图中的可达关系不是等价关系。

Definition

设 $G =< V, E >$ 是一个有向图，

有向图的连通性

由于有向图中边都有方向性，因此有向图结点之间的可达关系仅仅具有自反性和传递性，而不具有对称性。因此，有向图中的可达关系不是等价关系。

Definition

设 $G = < V, E >$ 是一个有向图，

- 略去 G 中所有有向边的方向得无向图是连通图，则称有向图 G 是连通图或称为弱连通图。否则称 G 是非连通图；

有向图的连通性

由于有向图中边都有方向性，因此有向图结点之间的可达关系仅仅具有自反性和传递性，而不具有对称性。因此，有向图中的可达关系不是等价关系。

Definition

设 $G =< V, E >$ 是一个有向图，

- 略去 G 中所有有向边的方向得无向图是连通图，则称有向图 G 是连通图或称为弱连通图。否则称 G 是非连通图；
- 若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称 G 是单向连通图；

有向图的连通性

由于有向图中边都有方向性，因此有向图结点之间的可达关系仅仅具有自反性和传递性，而不具有对称性。因此，有向图中的可达关系不是等价关系。

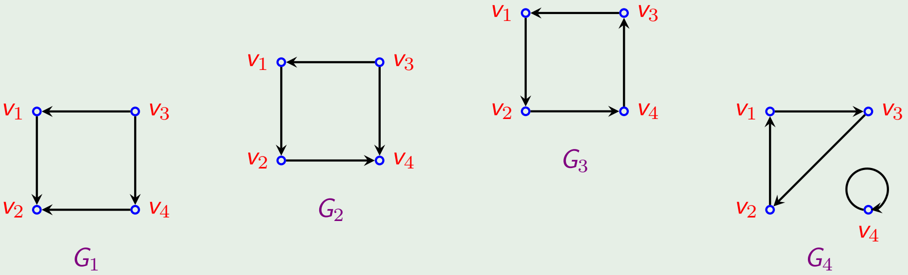
Definition

设 $G=<V,E>$ 是一个有向图，

- 略去 G 中所有有向边的方向得无向图是连通图，则称有向图 G 是连通图或称为弱连通图。否则称 G 是非连通图；
- 若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称 G 是单向连通图；
- 若 G 中任何一对结点之间都是相互可达的，则称 G 是强连通图。

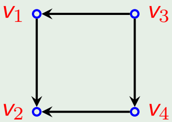
有向图的连通性

Example

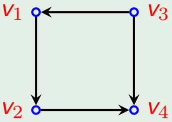


有向图的连通性

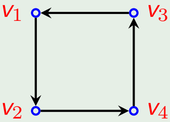
Example



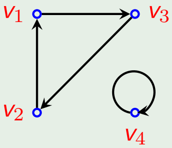
G_1



G_2



G_3

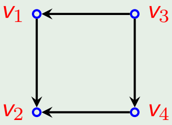


G_4

弱连通图

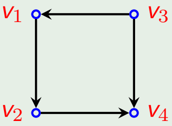
有向图的连通性

Example



G_1

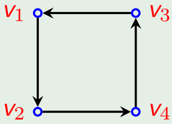
弱连通图



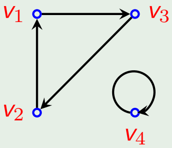
G_2

弱连通图

单向连通图



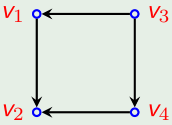
G_3



G_4

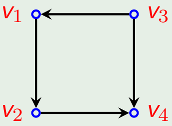
有向图的连通性

Example



G_1

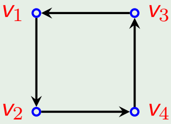
弱连通图



G_2

弱连通图

单向连通图

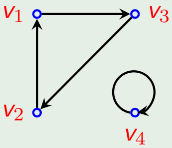


G_3

弱连通图

单向连通图

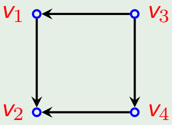
强连通图



G_4

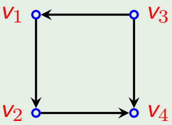
有向图的连通性

Example



G_1

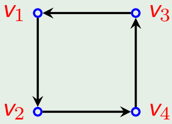
弱连通图



G_2

弱连通图

单向连通图

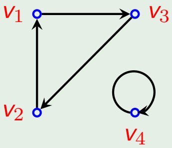


G_3

弱连通图

单向连通图

强连通图

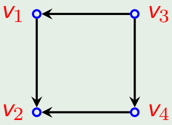


G_4

非连通图

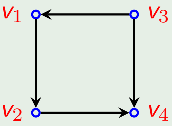
有向图的连通性

Example



G_1

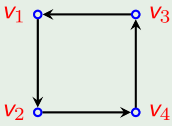
弱连通图



G_2

弱连通图

单向连通图

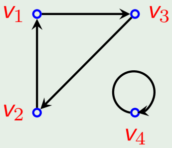


G_3

弱连通图

单向连通图

强连通图



G_4

非连通图

显然，强连通图必是单向连通图；单向连通图必是（弱）连通图。但反之均不成立。

强连通图的判定

Definition

有向图 G 是强连通图的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点至少一次的回路。

强连通图的判定

Definition

有向图 G 是强连通图的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点至少一次的回路。

Proof.

略。 $\square$

强连通图的判定

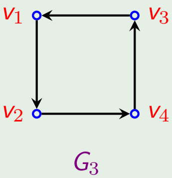
Definition

有向图 G 是强连通图的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点至少一次的回路。

Proof.

略。 $\square$

Example



强连通图

回路:$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_3 \to v_1$

单向连通图的判定

Definition

有向图 G 是单向连通图的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点至少一次的通路。

单向连通图的判定

Definition

有向图 G 是单向连通图的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点至少一次的通路。

Proof.

略。 $\square$

单向连通图的判定

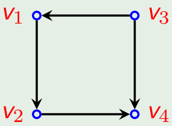
Definition

有向图 G 是**单向连通图**的充分必要条件是 G 中存在一条**经过所有结点至少一次的通路**。

Proof.

略。 $\square$

Example



G_2

单向连通图

通路:$v_3 \to v_1 \to v_2 \to v_4$

邻接矩阵判定法

由邻接矩阵 A，求出可达性矩阵 P，

- 有向线图 G 是强连通图当且仅当它的可达性矩阵 P 的所有元素均为 1；

邻接矩阵判定法

由邻接矩阵 A，求出可达性矩阵 P，

- 有向线图 G 是强连通图当且仅当它的可达性矩阵 P 的所有元素均为 1；
- 有向线图 G 是单向连通图当且仅当它的可达性矩阵 P 及其转置矩阵 P^T 经过布尔加运算后所得的矩阵 $P' = P \vee P^T$ 中除主对角元外其余元素均为 1；

邻接矩阵判定法

由邻接矩阵 A，求出可达性矩阵 P，

- 有向线图 G 是强连通图当且仅当它的可达性矩阵 P 的所有元素均为 1；
- 有向线图 G 是单向连通图当且仅当它的可达性矩阵 P 及其转置矩阵 P^T 经过布尔加运算后所得的矩阵 $P' = P \vee P^T$ 中除主对角元外其余元素均为 1；
- 有向线图 G 是弱连通图当且仅当它的邻接矩阵 A 及其转置矩阵 A^T 经布尔加运算所得的矩阵 $A' = A \vee A^T$ 作为邻接矩阵而求得的可达性矩阵 P' 中所有元素均为 1.

三类连通分支

Definition

在有向图 $G =< V, E >$ 中，设 G' 是 G 的子图，如果

那么称 G' 为 G 的强连通分支(单向连通分支、弱连通分支)，或称为强分图(单向分图、弱分图)。

三类连通分支

Definition

在有向图 $G =< V, E >$ 中，设 G' 是 G 的子图，如果

- G' 是强连通的(单向连通的、弱连通的);

那么称 G' 为 G 的强连通分支(单向连通分支、弱连通分支)，或称为强分图(单向分图、弱分图)。

三类连通分支

Definition

在有向图 $G = < V, E >$ 中，设 G' 是 G 的子图，如果

- G' 是强连通的(单向连通的、弱连通的);
- 对任意 $G'' \subseteq G$，若 $G' \subset G''$，则 G'' 不是强连通的(单向连通的、弱连通的);

那么称 G' 为 G 的强连通分支(单向连通分支、弱连通分支)，或称为强分图(单向分图、弱分图)。

三类连通分支

Definition

在有向图 $G=<V,E>$ 中，设 G' 是 G 的子图，如果

- G' 是强连通的(单向连通的、弱连通的);
- 对任意 $G'' \subseteq G$，若 $G' \subset G''$，则 G'' 不是强连通的(单向连通的、弱连通的);

那么称 G' 为 G 的强连通分支(单向连通分支、弱连通分支)，或称为强分图(单向分图、弱分图)。

- 弱连通分支也就是忽略边的方向所对应的无向图的连通分支；

三类连通分支

Definition

在有向图 $G=<V,E>$ 中，设 G' 是 G 的子图，如果

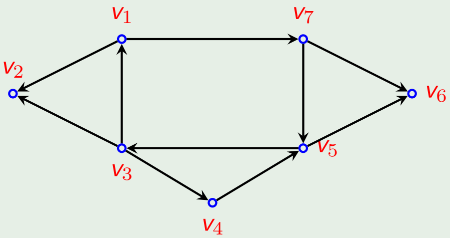
- G' 是强连通的(单向连通的、弱连通的);
- 对任意 $G''\subseteq G$，若 $G'\subset G''$，则 G'' 不是强连通的(单向连通的、弱连通的);

那么称 G' 为 G 的强连通分支(单向连通分支、弱连通分支)，或称为强分图(单向分图、弱分图)。

- 弱连通分支也就是忽略边的方向所对应的无向图的连通分支；
- 注意把握（强、单向、弱）连通分支的极大性特点，即任意增加一个结点或一条边就不是（强、单向、弱）连通的了。

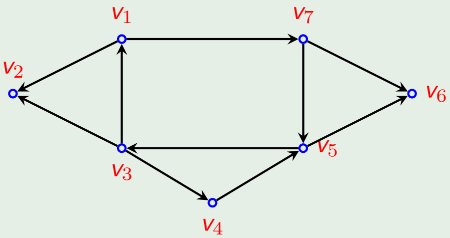
三类连通分支

Example



三类连通分支

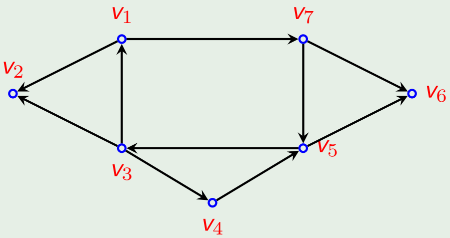
Example



- $\{v_2\}$, $\{v_6\}$, $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;

三类连通分支

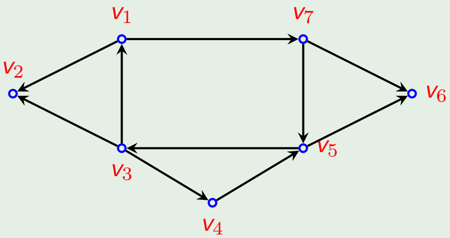
Example



- $\{v_2\}$，$\{v_6\}$，$\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$，$\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是单向连通分支;

三类连通分支

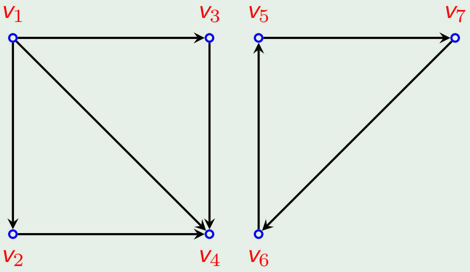
Example



- $\{v_2\}$，$\{v_6\}$，$\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$，$\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是单向连通分支;
- 该图自身即是弱连通分支.

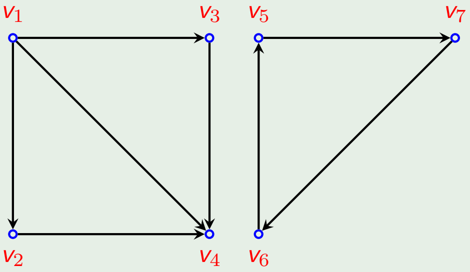
三类连通分支

Example



三类连通分支

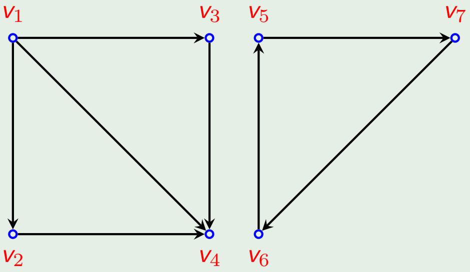
Example



- $\{v_1\}$，$\{v_2\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;

三类连通分支

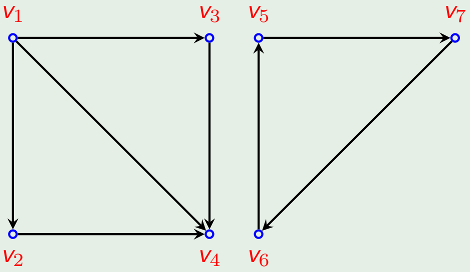
Example



- $\{v_1\}$，$\{v_2\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_4\}$，$\{v_1, v_3, v_4\}$，$\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是单向连通分支;

三类连通分支

Example



- $\{v_1\}$，$\{v_2\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_4\}$，$\{v_1, v_3, v_4\}$，$\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是单向连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是弱连通分支.

连通分支的判定

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中，至少位于一个单向连通分支中.

连通分支的判定

Theorem

在有向图 $G =< V, E >$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中, 至少位于一个单向连通分支中.

Theorem

在有向图 $G =< V, E >$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

连通分支的判定

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中, 至少位于一个单向连通分支中.

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

- 弱连通分支: 图的不互连部分

连通分支的判定

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中，至少位于一个单向连通分支中.

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

- 弱连通分支: 图的不互连部分
- 强连通分支: 出度为 0 或入度为 0 的结点, 极大回路, $\cdots$

连通分支的判定

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中, 至少位于一个单向连通分支中.

Theorem

在有向图 $G=<V,E>$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

- 弱连通分支: 图的不互连部分
- 强连通分支: 出度为 0 或入度为 0 的结点, 极大回路, $\cdots$
- 单向连通分支: 极大通路

THE END, THANKS!