函数的类型

Lijie Wang

类!

必安余什

证明

## 函数的类型

## 王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



函数的类型

Lijie Wang

类

必要条件

数学化描述

### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

函数的类型

Lijie Wang

类!

必要条件

证明

### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

• 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 如果  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 f 为从 A 到 B 的单射;

函数的类型

Lijie Wang

类:

必要条件

双字1七抽过

### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 如果  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;

函数的类型

Lijie Wang

类生

必要条件

致子化抽火

#### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 如果  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

函数的类型

Lijie Wang

类

必要条件

双子16抽丝

### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 如果  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

### Example

函数的类型

Lijie Wang

类!

必要条件

et no

#### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 如果  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

### Example

• 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}, f: A \rightarrow B$  定义为:  $\{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, a>, <5, d>\};$ 

函数的类型

Lijie Wang

类<u></u>

必要条件

TERRE

### **Definition**

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意 x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> ∈ A, 如果 x<sub>1</sub> ≠ x<sub>2</sub>, 都有 f(x<sub>1</sub>) ≠ f(x<sub>2</sub>), 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

### Example

- 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}.f: A \rightarrow B$  定义为:  $\{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, a>, <5, d>\}; 满射$
- 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}. f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{<1, a>, <2, c>, <3, b>\};$

#### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意 x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> ∈ A, 如果 x<sub>1</sub> ≠ x<sub>2</sub>, 都有 f(x<sub>1</sub>) ≠ f(x<sub>2</sub>), 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

## ${\sf Example}$

- 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}.f: A \rightarrow B$  定义为:  $\{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, a>, <5, d>\}$ ;满射
- 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}. f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{<1, a>, <2, c>, <3, b>\};$  单射
- 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}. f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle\}.$

#### Definition

设 f 是从集合 A 到 B 的函数,

- 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 如果  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 f 为从 A 到 B 的单射;
- 如果 ranf = B, 则称 f 为从 A 到 B 的满射;
- 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射.

## Example

- 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}.f: A \rightarrow B$  定义为:  $\{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, a>, <5, d>\}$ ;满射
- 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}. f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{<1, a>, <2, c>, <3, b>\};$  单射
- 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}. f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle\}.$  双射

微的类型

Lijie Wang

迷思

必要条件

数学化描述

>Trop

函数的类型

Lijie Wang

型类型

必要条件

数学化描述

证明

**3** 

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

证明

若 f 是从有限集 A 到有限集 B 的函数 , 则有

• f 是单射的必要条件为  $|A| \leq |B|$ ;

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

....

YEAR

**3**P

- f 是单射的必要条件为 |A| ≤ |B|;
- f是满射的必要条件为 |A| ≥ |B|;

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

STEER

**3**P

- *f* 是单射的必要条件为 |*A*| ≤ |*B*|;
- f是满射的必要条件为 |A| ≥ |B|;
- f 是双射的必要条件为 |A| = |B|.

函数的类型

Lijie Wang

类型

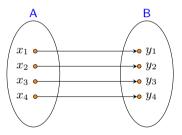
必要条件

387-324 / L-444 /

证明

**3** 

- f 是单射的必要条件为 |A| ≤ |B|;
- f是满射的必要条件为 |A| ≥ |B|;
- f 是双射的必要条件为 |A| = |B|.



函数的类型

Lijie Wang

类型

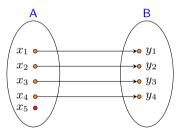
必要条件

数学化描述

证明

**38** 

- f 是单射的必要条件为 |A| ≤ |B|;
- f是满射的必要条件为 |A| ≥ |B|;
- f 是双射的必要条件为 |A| = |B|.



函数的类型

Lijie Wang

类型

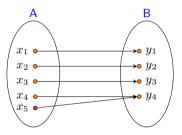
必要条件

数学化描述

证明

**38** 

- *f* 是单射的必要条件为 |*A*| ≤ |*B*|;
- f是满射的必要条件为 |A| ≥ |B|;
- f 是双射的必要条件为 |A| = |B|.



函数的类型

Lijie Wang

类

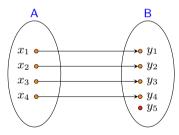
必要条件

米ケージ(レナボン)

证明

387

- f 是单射的必要条件为 |A| ≤ |B|;
- f是满射的必要条件为 |A| ≥ |B|;
- f 是双射的必要条件为 |A| = |B|.



函数的类型

Lijie Wang

类

必要条件

数学化描述

## Example

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

### Example

• 
$$f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$$

函数的类型

Lijie Wang

类

必要条件

数学化描述

### Example

- $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$  一般函数
- $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$

#### 函数的类型

Lijie Wang

突至

必要条件

数学化描述

正明

## Example

- $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$  一般函数
- $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle | x \in \mathbf{R} \}; \ \overline{\mathbf{X}}$
- $f_3 = \{ \langle x, e^x \rangle | x \in \mathbf{R} \}.$

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

TERE!

### Example

- $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$  一般函数
- $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle | x \in \mathbf{R} \}; \text{ } \nabla \mathbb{M}$
- $f_3 = \{ \langle x, e^x \rangle | x \in \mathbf{R} \}$ .  $\mathbf{\mathring{p}h}$

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

TERES

### Example

设  $A = B = \mathbf{R}$ , 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$  一般函数
- $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle | x \in \mathbf{R} \}; \text{ } \nabla \mathbf{M}$
- $f_3 = \{ \langle x, e^x \rangle | x \in \mathbf{R} \}$ . **\pi**

### ☞ 函数类型的数学化描述

- $f: A \to B$  是单射当且仅当对  $\forall x_1, x_2 \in A$ , 若  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f: A \to B$  是满射当且仅当对  $\forall y \in B$  , 一定存在  $x \in A$  , 使得 f(x) = y ;

#### 函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

证明

#### Example

设  $A = B = \mathbf{R}$ , 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle | x \in \mathbf{R} \};$  一般函数
- $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle | x \in \mathbf{R} \}; \text{ } \nabla \mathbf{M}$
- $f_3 = \{ \langle x, e^x \rangle | x \in \mathbf{R} \}$ . **\psi**

### ☞ 函数类型的数学化描述

- $f: A \to B$  是单射当且仅当对  $\forall x_1, x_2 \in A$ , 若  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f: A \to B$  是满射当且仅当对  $\forall y \in B$  , 一定存在  $x \in A$  , 使得 f(x) = y ;
- f: A → B 是双射当且仅当满足以上两点.

# 典型 (自然) 映射

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条件

数学化描述

Example

设 R 是集合 A 上的一个等价关系, $g: A \to A/R$  称为 A 对商集 A/R 的典型 (自然) 映射, 其定义为  $g(a) = [a]_R, a \in A$ . 证明典型映射是一个满射.

# 典型 (自然) 映射

函数的类型 Lijie Wang

Example

数学化描述

设 R 是集合 A 上的一个等价关系, $g: A \to A/R$  称为 A 对商集 A/R 的典型 (自然) 映射, 其定义为  $g(a) = [a]_R, a \in A$ . 证明典型映射是一个满射.

#### Proof.

由等价类的定义,对任意  $[a]_R \in A/R$ ,都有  $a \in A$ ,使得  $g(a) = [a]_R$ ,即任意 A/R 中的元素都有原像,根据满射的定义知,典型映射是满射.

函数的类型

Lijie Wang

必要条件

数学化描述

----

#### Example

设  $< A, \le >$  是偏序集, 对任意  $a \in A$ , 令  $f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ . 证明 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数, 并且 f 保持  $< A, \le >$  与 < P(A),  $\subseteq >$  的偏序关系, 即对任意  $a, b \in A$ , 若  $a \le b$ , 则  $f(a) \subseteq f(b)$ .

函数的类型

Lijie Wang

必要条件

数学化描述

正明

#### Example

设  $< A, \le >$  是偏序集, 对任意  $a \in A$ , 令  $f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ . 证明 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数, 并且 f 保持  $< A, \le >$  与 < P(A),  $\subseteq >$  的偏序关系, 即对任意  $a, b \in A$ , 若  $a \le b$ , 则  $f(a) \subseteq f(b)$ .

#### Proof.

函数的类型

Lijie Wang

必要条件

双于心脏

#### Example

设  $< A, \le >$  是偏序集, 对任意  $a \in A$ , 令  $f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ . 证明 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数, 并且 f 保持  $< A, \le >$  与 < P(A),  $\subseteq >$  的偏序关系, 即对任意  $a, b \in A$ , 若  $a \le b$ , 则  $f(a) \subseteq f(b)$ .

#### Proof.

• 证明 f 是函数:

任取  $a \in A$ , 由于  $f(a) = \{x | x \in A, x \leq a\} \subseteq A$ , 所以  $f(a) \in P(A)$ , 即 f 是从 A 到 P(A) 的函数。

函数的类型

Lijie Wang

必要条件

证明

### Example

设  $< A, \le >$  是偏序集, 对任意  $a \in A$ , 令  $f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ . 证明 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数, 并且 f 保持  $< A, \le >$  与 < P(A),  $\subseteq >$  的偏序关系, 即对任意  $a, b \in A$ , 若  $a \le b$ , 则  $f(a) \subseteq f(b)$ .

#### Proof.

- 证明 f 是函数:
  任取 a ∈ A, 由于 f(a) = {x|x ∈ A, x ≤ a} ⊆ A, 所以 f(a) ∈ P(A), 即 f 是从 A 到 P(A) 的函数。
- 证明 f 是单射:...

函数的类型

Liiie Wang

必要条件

致子 化加比

#### Example

设  $< A, \le >$  是偏序集, 对任意  $a \in A$ , 令  $f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ . 证明 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数, 并且 f 保持  $< A, \le >$  与 < P(A),  $\subseteq >$  的偏序关系, 即对任意  $a, b \in A$ , 若  $a \le b$ , 则  $f(a) \subseteq f(b)$ .

#### Proof.

- 证明 f 是函数:
  任取 a ∈ A, 由于 f(a) = {x|x ∈ A, x ≤ a} ⊆ A, 所以 f(a) ∈ P(A), 即 f 是从 A 到 P(A) 的函数。
- 证明 f 是单射:...
- 证明保序性:...

函数的类型

Lijie Wang

类型

必要条何

数学化描述

证明

Continue...

#### Continue...

- 证明 f 是单射:
  对任意 a, b ∈ A, a ≠ b,
  - 1) 若  $a, b \in A, a \neq b$ , 1) 若 a, b 存在偏序关系. 不妨设  $a \leq b$ (可
  - 1) 若 a, b 存在偏序关系, 不妨设  $a \le b$ (或  $b \le a$ ), 由于" $\le$ "是反对称的, 所以  $b \ne a$ (或  $a \ne b$ ), 从而  $b \notin f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ , 而" $\le$ "是自反的, 所以  $b \le b$ , 即  $b \in f(b)$ , 所以  $f(a) \ne f(b)$ , 此时, f 是单射;
  - 2) 若 a, b 不存在偏序关系,则有  $a \nleq b$ , 从而  $a \notin f(b) = \{x | x \in A, x \leqslant b\}$ ,而" $\leqslant$ "是自反的,所以  $a \leqslant a$ ,即  $a \in f(a)$ ,所以  $f(a) \neq f(b)$ ,此时,f 仍是单射.因此对任意 a,  $b \in A$ ,当  $a \neq b$ ,总有  $f(a) \neq f(b)$ . 从而 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数.

#### Continue...

- 证明 f 是单射:
  对任意 a, b ∈ A, a ≠ b.
  - 1) 若 a, b 存在偏序关系, 不妨设  $a \le b$ (或  $b \le a$ ), 由于" $\le$ "是反对称的, 所以  $b \ne a$ (或  $a \ne b$ ), 从而  $b \notin f(a) = \{x | x \in A, x \le a\}$ , 而" $\le$ "是自反的, 所以  $b \le b$ , 即  $b \in f(b)$ , 所以  $f(a) \ne f(b)$ , 此时, f 是单射;
  - 2) 若 a, b 不存在偏序关系,则有  $a \nleq b$ , 从而  $a \notin f(b) = \{x | x \in A, x \leqslant b\}$ ,而" $\leqslant$ "是自反的,所以  $a \leqslant a$ ,即  $a \in f(a)$ ,所以  $f(a) \neq f(b)$ ,此时,f 仍是单射.因此对任意  $a, b \in A$ ,当  $a \neq b$ ,总有  $f(a) \neq f(b)$ . 从而 f 是从 A 到 P(A) 的单射函数.
- 证明保序性. 对任意 a, b ∈ A, 若 a ≤ b, 则任取 y ∈ f(a), 则 y ≤ a, 由 a ≤ b, 根据"≤"的传递性, 有 y ≤ b, 从而 y ∈ f(b), 所以 f(a) ⊆ f(b), 即保序性成立.

函数的类型

Lijie Wang

类型

北安水川

证明



THE END, THANKS!