

通路和回路

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



引言

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

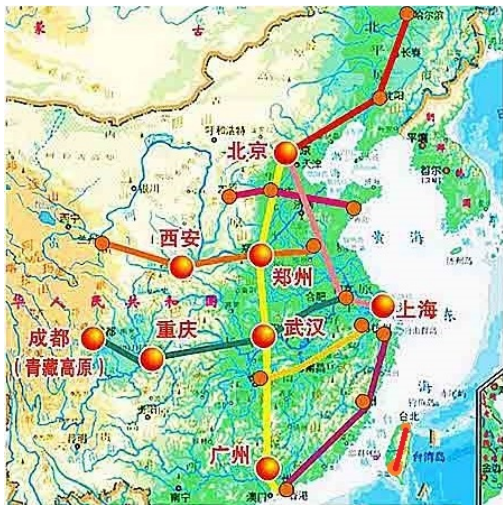
引言

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



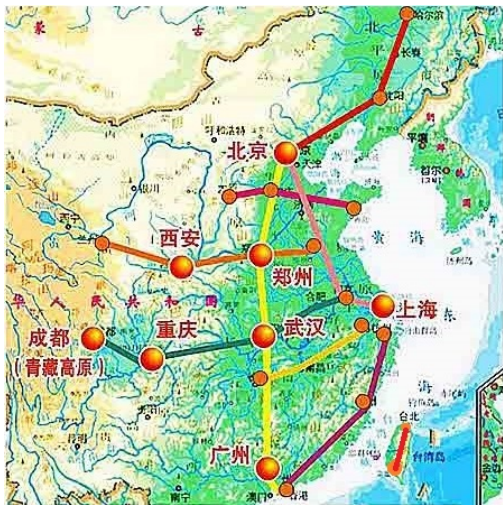
引言

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



引言

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



- 成都可经重庆、武汉、郑州到达北京;

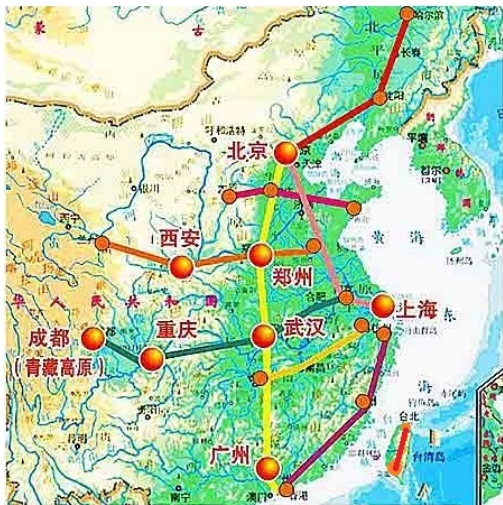
引言

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



- 成都可经重庆、武汉、郑州到达北京;
- 成都无论如何也到不了台北.

通路和回路概念

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

Definition

给定图 $G = \langle V, E \rangle$ 中结点和边相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

通路和回路概念

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

Definition

给定图 $G = \langle V, E \rangle$ 中结点和边相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

- ① 若 Γ 中边 e_i 的两端点是 v_{i-1} 和 v_i (有向图时 v_{i-1} 与 v_i 分别是 e_i 的始点和终点), $i = 1, 2, \dots, k$, 则称 Γ 为结点 v_0 到结点 v_k 的**通路**。 v_0 和 v_k 分别称为此通路的始点和终点, 统称为**通路的端点**。通路中边的数目 k 称为**此通路的长度**。当 $v_0 = v_k$ 时, 此通路称为**回路**。

通路和回路概念

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

Definition

给定图 $G = \langle V, E \rangle$ 中结点和边相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

- ① 若 Γ 中边 e_i 的两端点是 v_{i-1} 和 v_i (有向图时 v_{i-1} 与 v_i 分别是 e_i 的始点和终点), $i = 1, 2, \dots, k$, 则称 Γ 为结点 v_0 到结点 v_k 的**通路**。 v_0 和 v_k 分别称为此通路的始点和终点, 统称为**通路的端点**。通路中边的数目 k 称为**此通路的长度**。当 $v_0 = v_k$ 时, 此通路称为**回路**。
- ② 若**通路中的所有边互不相同**, 则称此通路为**简单通路**, 否则称为复杂通路; 若**回路中的所有边互不相同**, 则称此回路为**简单回路**, 否则称为复杂回路。

通路与回路概念

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Definition

给定图 $G = \langle V, E \rangle$ 中结点和边相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

- ① 若 Γ 中边 e_i 的两端点是 v_{i-1} 和 v_i (有向图时 v_{i-1} 与 v_i 分别是 e_i 的始点和终点), $i = 1, 2, \dots, k$, 则称 Γ 为结点 v_0 到结点 v_k 的**通路**。 v_0 和 v_k 分别称为此通路的始点和终点, 统称为**通路的端点**。通路中边的数目 k 称为**此通路的长度**。当 $v_0 = v_k$ 时, 此通路称为**回路**。
- ② 若**通路中的所有边互不相同**, 则称此通路为**简单通路**, 否则称为复杂通路; 若**回路中的所有边互不相同**, 则称此回路为**简单回路**, 否则称为复杂回路。
- ③ 若**通路中的所有结点互不相同, 所有边也互不相同**, 则称此通路为**基本通路或者初级通路**; 若回路中除 $v_0 = v_k$ 外的所有结点互不相同, 所有边也互不相同, 则称此回路为**基本回路或者初级回路**。

通路与回路举例

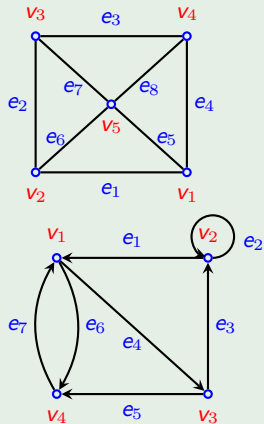
通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Example



通路与回路举例

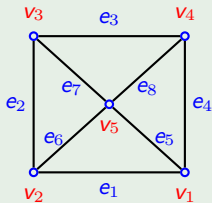
通路和回路

Lijie Wang

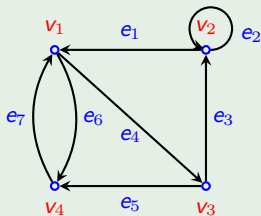
通路与回路

通路数量

Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路, 长度 6



通路与回路举例

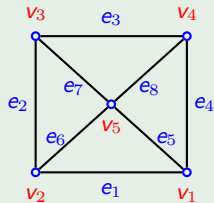
通路和回路

Lijie Wang

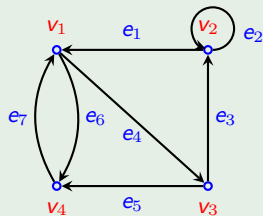
通路与回路

通路数量

Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 简单通路, 长度 5



通路与回路举例

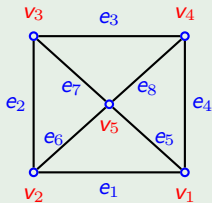
通路和回路

Lijie Wang

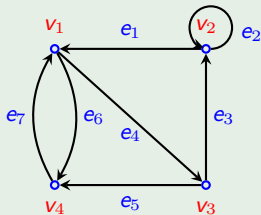
通路与回路

通路数量

Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 简单通路, 长度 5
- $\Gamma_3 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$; 基本通路, 简单通路, 长度 4



通路与回路举例

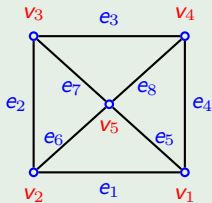
通路和回路

Lijie Wang

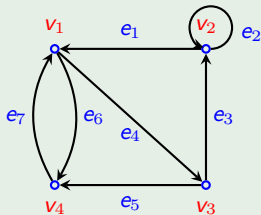
通路与回路

通路数量

Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 简单通路, 长度 5
- $\Gamma_3 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$; 基本通路, 简单通路, 长度 4



- $\Gamma_1 : v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 复杂回路, 长度 6

通路与回路举例

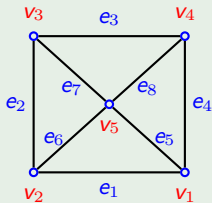
通路和回路

Lijie Wang

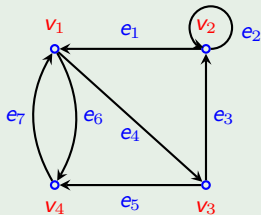
通路与回路

通路数量

Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 简单通路, 长度 5
- $\Gamma_3 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$; 基本通路, 简单通路, 长度 4



- $\Gamma_1 : v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 复杂回路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_3 e_3 v_2 e_2 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 简单回路, 长度 4

通路与回路举例

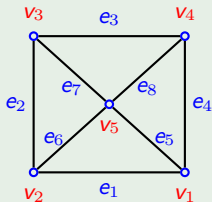
通路和回路

Lijie Wang

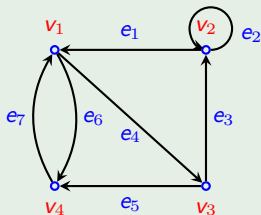
通路与回路

通路数量

Example



- $\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 简单通路, 长度 5
- $\Gamma_3 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$; 基本通路, 简单通路, 长度 4



- $\Gamma_1 : v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 复杂回路, 长度 6
- $\Gamma_2 : v_3 e_3 v_2 e_2 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 简单回路, 长度 4
- $\Gamma_3 : v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 基本回路, 简单回路, 长度 3

记号的简化

通路和回路

Lijie Wang

通路和回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;

记号的简化

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;

记号的简化

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;
- 在简单图中, 一条通路也可以用结点的序列 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ 来表示.

记号的简化

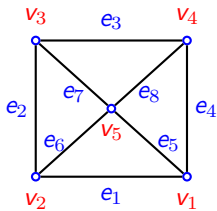
通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;
- 在简单图中, 一条通路也可以用结点的序列 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ 来表示.



记号的简化

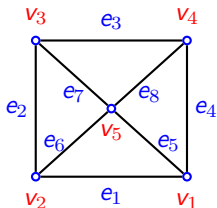
通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下, 一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;
- 在简单图中, 一条通路也可以用结点的序列 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ 来表示.



$\Gamma_1 : v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$

可简化为: $e_1 e_6 e_7 e_2 e_6 e_8$

或: $v_1 v_2 v_5 v_3 v_2 v_5 v_4$

引入

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

我们会经常考虑如下的问题:

- 有多少种方式可从成都到达北京？

引入

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

我们会经常考虑如下的问题:

- 有多少种方式可从成都到达北京？
- 猫头鹰和松鼠之间的间接食物竞争有哪些方式？

引入

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

我们会经常考虑如下问题:

- 有多少种方式可从成都到达北京？
- 猫头鹰和松鼠之间的间接食物竞争有哪些方式？
- 报文有多少种方式可从 A 计算机发送到距离很远的 B 计算机？

引入

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

我们经常会考虑如下的问题:

- 有多少种方式可从成都到达北京？
- 猫头鹰和松鼠之间的间接食物竞争有哪些方式？
- 报文有多少种方式可从 A 计算机发送到距离很远的 B 计算机？

这些问题都可以归结为求图中任何两个结点间有多少条长度为 m 的通路的问题。若使用人工方式，随着图中结点和边的数目增加，其难度将呈几何级数增加。而利用计算机，我们可以较为容易且准确的解决这个问题。

通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$. 则:

通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$. 则:

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;

通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$. 则:

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$ 为结点 v_i 到自身的长度为 m 的回路数目;

通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$. 则:

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$ 为结点 v_i 到自身的长度为 m 的回路数目;
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$ 是 G 中长度为 m 的通路 (含回路) 总数.

通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Theorem

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$. 则:

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$ 为结点 v_i 到自身的长度为 m 的回路数目;
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$ 是 G 中长度为 m 的通路 (含回路) 总数.
- $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(m)}$ 是 G 中长度为 m 的回路总数.

通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Proof.

对 m 用数学归纳法。



通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Proof.

对 m 用数学归纳法。

- ① 当 $m = 1$ 时，显然成立。



通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Proof.

对 m 用数学归纳法。

- ① 当 $m = 1$ 时, 显然成立。
- ② 设 $m = k$ 时, 定理成立。



通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Proof.

对 m 用数学归纳法。

① 当 $m = 1$ 时，显然成立。

② 设 $m = k$ 时，定理成立。

③ 证明 $m = k + 1$ 时定理成立。因为 $(a_{ij}^{(k+1)})_{n \times n} = A^{k+1} = A \times A^k = (\sum_{p=1}^n a_{ip} a_{pj}^{(k)})_{n \times n}$ ，

故 $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n a_{ip} a_{pj}^{(k)}$ ，而 a_{ip} 是结点 v_i 到 v_p 长度为 1 的通路数目， $a_{pj}^{(k)}$ 是结点 v_p 到 v_j 长度为 k 的通路数目，故 $a_{ip} a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 经过 v_p 到结点 v_j 的长度为 $k + 1$ 的通路数目，那么 $\sum_{p=1}^n a_{ip} a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 到结点 v_j 的长度为 $k + 1$ 的通路数目。



通路数量的计算

通路和回路

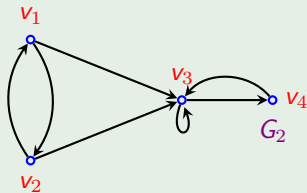
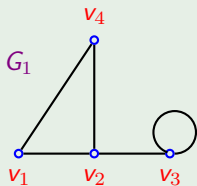
Lijie Wang

通路与回路

通路数量

Example

针对如下两个图 G_1 与 G_2 , 求:



通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

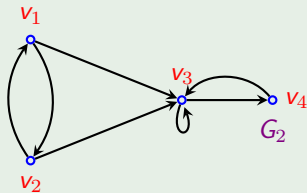
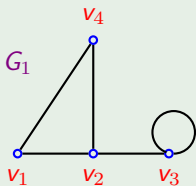
通路与回路

通路数量

Example

针对如下两个图 G_1 与 G_2 , 求:

- ① 从结点 v_1 到结点 v_3 长度为 2 和 3 的通路数目。



通路数量的计算

通路和回路

Lijie Wang

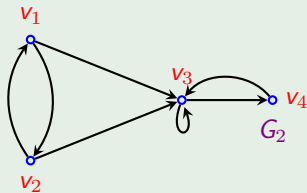
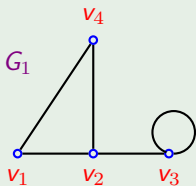
通路与回路

通路数量

Example

针对如下两个图 G_1 与 G_2 , 求:

- ① 从结点 v_1 到结点 v_3 长度为 2 和 3 的通路数目。
- ② 所有长度为 2 和 3 的通路数目。



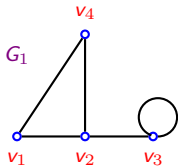
解：对于图 G_1

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



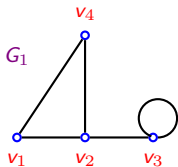
解：对于图 G_1

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

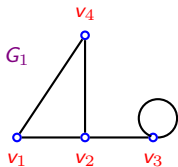
解：对于图 G_1

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

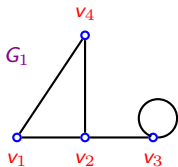
解：对于图 G_1

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 1$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 1;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 21, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 9$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 21(含 9 条回路);

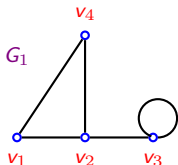
解：对于图 G_1

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 1$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 1;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 21, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 9$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 21(含 9 条回路);

$$A_{G_1}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

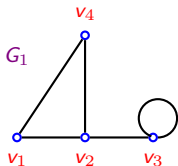
解：对于图 G_1

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 1$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 1;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 21, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 9$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 21(含 9 条回路);

$$A_{G_1}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(3)} = 2$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(3)} = 48, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(3)} = 10$, 即图中所有长度为 3 的通路数为 48(含 10 条回路);

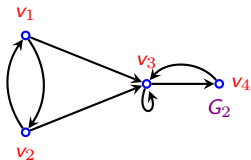
解：对于图 G_2

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



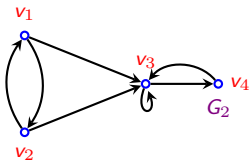
解：对于图 G_2

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

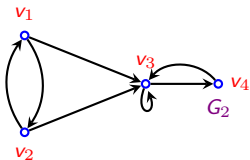
解：对于图 G_2

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

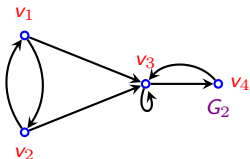
解：对于图 G_2

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 2$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 13, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 5$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 13(含 5 条回路);

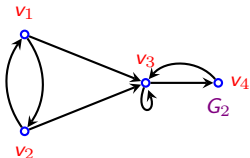
解：对于图 G_2

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 2$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 13, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 5$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 13(含 5 条回路);

$$A_{G_2}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

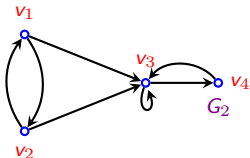
解：对于图 G_2

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 2$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(2)} = 13, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 5$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 13(含 5 条回路);

$$A_{G_2}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(3)} = 4$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路数为 4;
- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(3)} = 22, \sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(3)} = 4$, 即图中所有长度为 3 的通路数为 22(含 4 条回路);

通路数量

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

想一想，如何求图中两结点间长度不大于 m 的通路数目？

通路数量

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量

想一想，如何求图中两结点间长度不大于 m 的通路数目？

Corollary

设矩阵 $B_m = (b_{ij})_{n \times n} = A + A^2 + \cdots + A^m (m \geq 1)$, 则 b_{ij} 表示结点 v_i 到 v_j 长度不大于 m 的通路数目, 而 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}$ 则可表示图中长度不大于 m 的通路总数, $\sum_{i=1}^n b_{ii}$ 则可表示图中所有长度不大于 m 的回路总数。

通路和回路

Lijie Wang

通路与回路

通路数量



THE END, THANKS!