集合论基础

Lijie W.

引子

HMEE

data data.

可奴集的

不可数集

集合论基础

可数集合与不可数集合

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

有限 \rightarrow 无限 , 量变 \rightarrow 质变

合论基础

Lijie W.

引子

自然数額

等势

可数集命

不可数集1

有限 \rightarrow 无限 , 量变 \rightarrow 质变

合论基础

Lijie W.

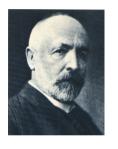
引子

日於奴

等势

可 数集?

不可数集





有限 → 无限, 量变 → 质变

自己论基础

Lijie W.

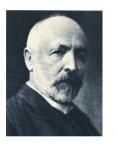
引子

目然数集

等势

可数集合

不可数集



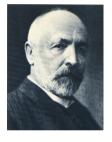


$$1.01^{365} = 37.8 \qquad \lim_{n \to \infty} 1.01^n = \infty$$

$$0.09^{365} = 0.03 \qquad \lim_{n \to \infty} 0.09^n = 0$$

有限 → 无限, 量变 → 质变

Lijie W.





$$1.01^{365} = 37.8$$
 $\lim_{n \to \infty} 1.01^n = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} 1.01^n = \infty$$

$$0.09^{365} = 0.03 \qquad \lim_{n \to \infty} 0.09^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}0.09''=0$$





集合论基础

Lijie W.

引

自然数集

可奴集市

Definition (皮亚诺公理)

集合论基础

Lijie W.

5.5

自然数集

data data

可数集合

Definition (皮亚诺公理)

1891年,意大利数学家皮亚诺公开发表了基于序数的自然数定义公理。这组公理包括:

● 0 是自然数;

集合论基础

Lijie W.

自然数集

日於奴集

可数集1

不可数纬

Definition (皮亚诺公理)

- 0 是自然数;
- ② 每个自然数 n 都有一个后继,这个后继也是一个自然数,记为 S(n);

集合论基础

Liiie W.

白然数集

日於奴易

可数集1

不可数集

Definition (皮亚诺公理)

- 0 是自然数;
- ② 每个自然数 n 都有一个后继,这个后继也是一个自然数,记为 S(n);
- ③ 两个自然数相等当且仅当它们有相同的后继,即 m=n 当且仅当 S(m)=S(n);

集合论基础

Liiie W.

白然数集

日於奴易

可数集

不可数集

Definition (皮亚诺公理)

- 0 是自然数;
- ② 每个自然数 n 都有一个后继,这个后继也是一个自然数,记为 S(n);
- ③ 两个自然数相等当且仅当它们有相同的后继,即 m=n 当且仅当 S(m)=S(n);
- ④ 没有任何自然数的后继是 0;

集合论基础

Lijie W.

白然数集

DW/803

可数集

不可数集

Definition (皮亚诺公理)

- 0 是自然数;
- ② 每个自然数 n 都有一个后继,这个后继也是一个自然数,记为 S(n);
- ③ 两个自然数相等当且仅当它们有相同的后继,即 m=n 当且仅当 S(m)=S(n);
- 没有任何自然数的后继是 0;
- ⑤ (归纳公理) 若 φ 是关于一个自然数的预测,如果 $\Phi\varphi(0)$ 为真;❷当 $\varphi(n)$ 为真,则 有 $\varphi(S(n))$ 为真;则 $\varphi(n)$ 对任意自然数 n 都成立。

集合论基础

Liiie W.

自然数集

练执

可数集合

不可※ケ佳

Definition (冯 • 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ◆ 诺依曼基于基数,利用一个集合的序列来定义自然数:

集合论基础

Liiie W

白然数集

自然数集

7775

可数集命

个归级》

Definition (冯 • 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ◆ 诺依曼基于基数,利用一个集合的序列来定义自然数:

 $\mathbf{0} \ \varnothing \in \mathbf{N}$

集合论基础

Lijie W.

自然数集

日然奴集

可数集1

不可数集

Definition (冯 · 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ◆ 诺依曼基于基数,利用一个集合的序列来定义自然数:

- $\mathbf{0} \ \varnothing \in \mathbf{N}$
- ② 若 $n \in \mathbb{N}$,则 $n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ 。

集合论基础

ch orwhete

自然数集

可数集命

不可数集

Definition (冯 • 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ● 诺依曼基于基数,利用一个集合的序列来定义自然数:

- $\mathbf{0} \ \varnothing \in \mathbf{N}$
- ② 若 $n \in \mathbb{N}$,则 $n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ 。

从而,这个集合序列的基数就可以来定义自然数:

• $0 \equiv |\varnothing|$;

自然数集

Definition (冯 • 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ● 诺依曼基于基 数,利用一个集合的序列来定义自然数:

- $\emptyset \varnothing \in \mathbb{N}$
- ② 若 $n \in \mathbb{N}$,则 $n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ 。

从而,这个集合序列的基数就可以来定义自然数:

- \bullet $0 \equiv |\varnothing|$;
- $1 \equiv |\varnothing \cup \{\varnothing\}| = |\{\varnothing\}|;$

集合论基础

自然数集

日が致寒

可数集

不可数集

Definition (冯 · 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ● 诺依曼基于基数,利用一个集合的序列来定义自然数:

- $\mathbf{0} \ \varnothing \in \mathbf{N}$
- ② 若 $n \in \mathbb{N}$,则 $n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ 。

从而,这个集合序列的基数就可以来定义自然数:

- $0 \equiv |\varnothing|;$
- $1 \equiv |\varnothing \cup \{\varnothing\}| = |\{\varnothing\}|;$
- $2 \equiv |\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|;$

集合论基础

Lijie W.

自然数集

等势

可数集1

不可数集

Definition (冯 · 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初,集合称为数学的基本概念之后,数学奇才,计算机之父冯 ● 诺依曼基于基数,利用一个集合的序列来定义自然数:

- $\mathbf{0} \ \varnothing \in \mathbf{N}$
- ② 若 $n \in \mathbb{N}$,则 $n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$ 。

从而,这个集合序列的基数就可以来定义自然数:

- $0 \equiv |\varnothing|;$
- $1 \equiv |\varnothing \cup \{\varnothing\}| = |\{\varnothing\}|;$
- $2 \equiv |\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|;$
-

集合论基础

Lijie W.

引

自然数集

等势

可数集

Example

比较下列的集合对,哪一个的元素个数更多?

集合论基础

Lijie W.

513

目然数類

可数集1

Example

比较下列的集合对,哪一个的元素个数更多?

• 集合 $\{1,2,3\}$ 与集合 $\{a,b,c,d,\cdots,x,y,z\}$

集合论基础

Lijie W.

515

日杰数

77

可数集

を可渉な倒

Example

比较下列的集合对,哪一个的元素个数更多?

- 集合 $\{1,2,3\}$ 与集合 $\{a,b,c,d,\cdots,x,y,z\}$
- ② 自然数集合 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 与奇数集合 $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

集合论基础

Liiie W.

引子

目然数類

等势

可数集

不可数组

Example

比较下列的集合对,哪一个的元素个数更多?

- 集合 $\{1,2,3\}$ 与集合 $\{a,b,c,d,\cdots,x,y,z\}$
- ② 自然数集合 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 与奇数集合 $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

37

对于两个有限集合而言,比较二者的大小只需要看集合的基数,但对于无限集合却没有这么简单。如何比较无限集合的"大小"呢?这里需要采用一种通过判断两个无限集合之间是否存在一种——对应的关系来解决这个问题。

Definition

设 A, B 为两个集合, 若在 A, B 之间存在一种——对应的关系:

 $\Psi:A\to B$

则称 A 与 B 是等势的 (equipotential), 记作:

 $A \sim B$

3

由等势定义可以看出,如果 A = B,那么 $A \sim B$,反之却不成立。

可数集合

集合论基础

Lijie W.

引子

日於奴

可数集合

Z =T W/r48

Definition

凡与自然数集合 N 等势的集合,称为可数集合(countable set),该集合的基数记为 \aleph_0 (读作阿列夫零)

可数集合

集合论基础

Liiie W

引子

日於致.

可数集合

Definition

凡与自然数集合 N 等势的集合,称为可数集合(countable set),该集合的基数记为 \aleph_0 (读作阿列夫零)

Example

试证明下列集合都是可数集合.

- (1) $O^+ = \{x | x \in \mathbb{N}, x$ 是正奇数};
- (2) $P = \{x | x \in \mathbb{N}, x$ 是素数};
- (3) 有理数集合Q;

正奇数集合 O+ 与素数集合 P

集合论基础

Lijie W.

217

目然数集

生地

可数集合

不可数集

Proof.

在 O^+ 与 N 之间建立一个——对应关系 $\varphi_1: N \to O^+$ 如下:

所以 O^+ 是可数集合。

正奇数集合 O+ 与素数集合 P

集合论基础

Lijie W.

引子

目然奴集

等势

可数集合

个可数集

Proof.

在 O^+ 与 N 之间建立一个——对应关系 $\varphi_1: \mathbb{N} \to O^+$ 如下:

所以 O^+ 是可数集合。

在 P 与 \mathbf{N} 之间建立一个——对应关系 $\varphi_2: \mathbf{N} \to P$ 如下:

所以 P 是可数集合。

(3) 有理数集合 Q

集合论基础

Lijie W.

217

目然数集

可数集合

不可数集

Proof.

在 Q 与 N 之间建立一个——对应关系 $\varphi_3: N \to Q$ 如下图所示。注意,所有有理数以 p/q 的形式表示,其上标表示对应的自然数。

所以 Q 是可数集合。

引子

自然数集

可数集合

下可数集:

Ŧ

从有限到无限,不仅仅是简单数量上的变化(量变),而引起了本质的改变(质变)。

两个无限集合的"大小"已经不能单纯使用集合中的元素个数来衡量。≥
 表示一切可数集合的基数,是一种抽象的表达。

不可数集·

3

从有限到无限,不仅仅是简单数量上的变化(量变),而引起了本质的改变(质变)。

- 两个无限集合的"大小"已经不能单纯使用集合中的元素个数来衡量。≥
 表示一切可数集合的基数,是一种抽象的表达。
- 表面上个数完全不相等的两个集合之间仍可能存在等势关系,如集合与其真子集之间,这体现了有限集合和无限集合的根本差别。

集合论基础

Lijie W.

引子

日於致為

可数集台

不可数集合

Definition

集合论基础

Lijie W.

링크

自然数類

等労

可数集合

不可数集合

Definition

HEID(0,1)称为不可数集合,凡与开区间(0,1)等势的集合,称为不可数集合,该类集合的基数记为 \aleph (读作阿列夫)

Example

不可数生合

Definition

开区间 (0,1)称为不可数集合,凡与开区间 (0,1) 等势的集合,称为不可数集合,该类 集合的基数记为☆(读作阿列夫)

Example

● 闭区间 [0,1] 是不可数集合; $\begin{cases} \frac{1}{4} & \to & 0 \\ \frac{1}{2} & \to & 1 \\ \frac{1}{2^n} & \to & \frac{1}{2^{n-2}} & (n=3,4,5\cdots) \\ n & \to & n & (others \quad n \in (0,1)) \end{cases}$

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n = 3, 4, 5 \cdots)$$
 $n \rightarrow n \quad (others \quad n \in (0, 1))$

集合论基础

Liiie W

引子

日於欽

可数焦点

不可数生合

Definition

Example

- 闭区间 [0,1] 是不可数集合; $\begin{cases} \frac{1}{4} & \to & 0 \\ \frac{1}{2} & \to & 1 \\ \frac{1}{2^n} & \to & \frac{1}{2^{n-2}} & (n=3,4,5\cdots) \\ n & \to & n & (others \quad n \in (0,1)) \end{cases}$
- 实数集合 R 是不可数集合. $n \to tan\pi(\frac{2n-1}{2})$

集合论基础

Lijie W.

引子

寺穷

可奴集

不可数集合



THE END, THANKS!