

哈斯图及特殊元素

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



引言

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素



在偏序集的关系图中, 许多有向边可以不用显示出来. 例如, 偏序关系满足自反性, 所以每个结点都有环, 因此可以不必显示这些环; 又如, 偏序关系满足传递性, 我们不必显示由于传递性而必须出现的边; 另外, 由于其反对称的特性, 我们可以规定边的方向, 从而省去箭头.

按照以上方法对关系图进行简化而得到的图形叫做**哈斯图**, 哈斯图对于判断元素之间的先后顺序以及确定特殊元素非常方便.

哈斯图

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系, 使用如下方法对 R 的关系图进行简化:

以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图, 这个图称为偏序关系 R 的哈斯图(Hasse diagram).

哈斯图

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系, 使用如下方法对 R 的关系图进行简化:

- 取消每个结点的自环; (因自反性)

以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图, 这个图称为偏序关系 R 的哈斯图(Hasse diagram).

哈斯图

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系, 使用如下方法对 R 的关系图进行简化:

- 取消每个结点的自环; (因自反性)
- 取消所有由于传递性出现的边. 即若 $x \longrightarrow y, y \longrightarrow z$, 则去掉 $x \longrightarrow z$ 这条边; (因传递性)

以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图, 这个图称为偏序关系 R 的哈斯图 (Hasse diagram).

哈斯图

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系, 使用如下方法对 R 的关系图进行简化:

- 取消每个结点的自环; (因自反性)
- 取消所有由于传递性出现的边. 即若 $x \rightarrow y, y \rightarrow z$, 则去掉 $x \rightarrow z$ 这条边; (因传递性)
- 重新排列每条边, 使得边的箭头方向全部向上, 然后去掉这些箭头. (因反对称性)

以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图, 这个图称为偏序关系 R 的哈斯图 (Hasse diagram).

哈斯图

哈斯图及特殊元素

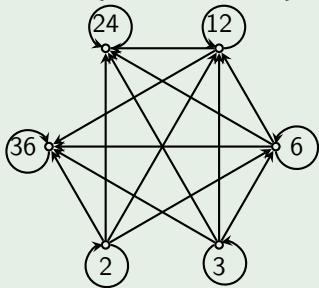
Lijie Wang

哈斯图

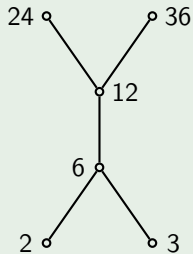
特殊元素

Example

设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, " \leq " 是 A 上的整除关系 R 。



关系图



哈斯图

哈斯图

哈斯图及特殊元素

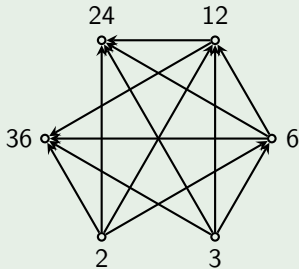
Lijie Wang

哈斯图

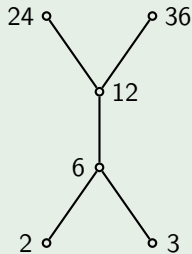
特殊元素

Example

设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, " \leq " 是 A 上的整除关系 R 。



关系图



哈斯图

哈斯图

哈斯图及特殊元素

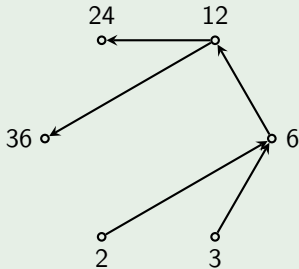
Lijie Wang

哈斯图

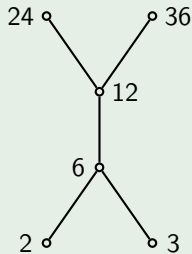
特殊元素

Example

设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, " \leq " 是 A 上的整除关系 R 。



关系图



哈斯图

哈斯图

哈斯图及特殊元素

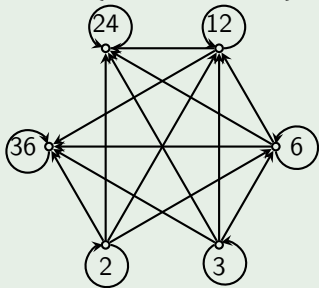
Lijie Wang

哈斯图

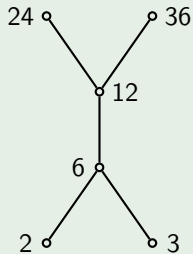
特殊元素

Example

设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, “ \leq ”是 A 上的整除关系 R 。



关系图



哈斯图

最大元和最小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

最大元和最小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;

最大元和最小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

最大元和最小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

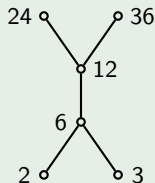
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
最大元				
最小元				

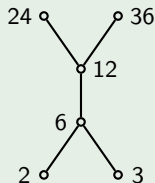
最大元和最小元

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
最大元	12			
最小元	6			

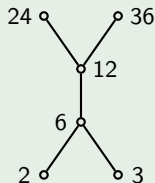
最大元和最小元

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
最大元	12	无		
最小元	6	无		

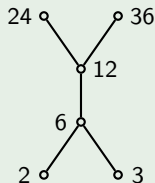
最大元和最小元

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
最大元	12	无	无	
最小元	6	无	无	

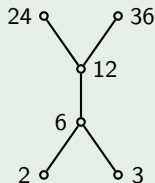
最大元和最小元

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**;
- 对任意 $x \in B$, 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
最大元	12	无	无	12
最小元	6	无	无	无

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极大元;

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极大元;
- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的极小元.

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

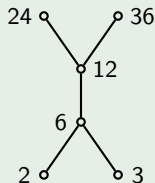
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极大元**;
- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
极大元				
极小元				

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

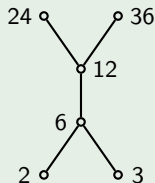
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极大元**;
- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
极大元	12			
极小元	6			

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

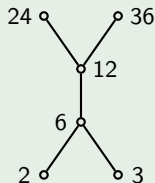
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极大元**;
- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
极大元	12	2, 3		
极小元	6	2, 3		

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

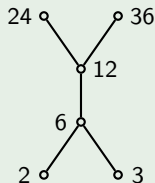
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极大元**;
- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
极大元	12	2, 3	24, 36	
极小元	6	2, 3	24, 36	

极大元和极小元

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

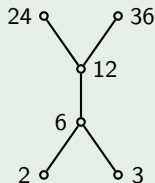
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $b \in B$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $b \leq x \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极大元**;
- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq b \Rightarrow x = b$, 则称 b 为 B 的**极小元**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
极大元	12	2, 3	24, 36	12
极小元	6	2, 3	24, 36	2, 3

总结

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

- ① B 的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在 B 中;

总结

哈斯图及特殊元素

素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素



- ① B 的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在 B 中;
- ② b 是 B 的最大元 $\Leftrightarrow B$ 中所有的元素都比 b 小;
 b 是 B 的最小元 $\Leftrightarrow B$ 中所有的元素都比 b 大;
 b 是 B 的极大元 $\Leftrightarrow B$ 中没有比 b 大的元素;
 b 是 B 的极小元 $\Leftrightarrow B$ 中没有比 b 小的元素.

上界和上确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

上界和上确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;

上界和上确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

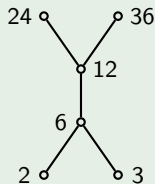
上界和上确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
上界				
上确界				

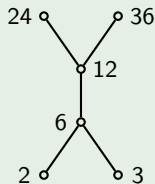
上界和上确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
上界	12, 24, 36			
上确界	12			

上界和上确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

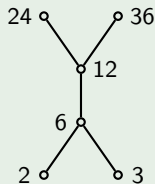
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
上界	12, 24, 36	6, 12, 24, 36		
上确界	12	6		

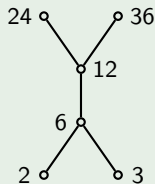
上界和上确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
上界	12, 24, 36	6, 12, 24, 36	无	
上确界	12	6	无	

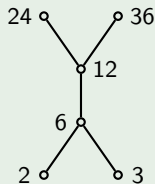
上界和上确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
上界	12, 24, 36	6, 12, 24, 36	无	12, 24, 36
上确界	12	6	无	12

下界和下确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

下界和下确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的下界;

下界和下确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的下界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的最大下界或下确界.

下界和下确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

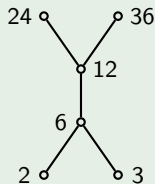
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的**最大下界或下确界**.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
下界				
下确界				

下界和下确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

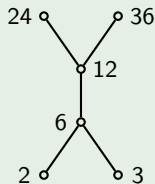
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的**最大下界或下确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
下界	2, 3, 6			
下确界	6			

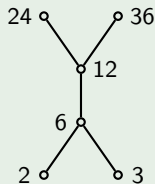
下界和下确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的**最大下界或下确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
下界	2, 3, 6	无		
下确界	6	无		

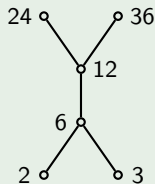
下界和下确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的**最大下界或下确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
下界	2, 3, 6	无	2, 3, 6, 12	
下确界	6	无	12	

下界和下确界

哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

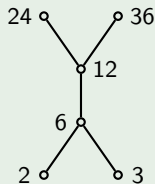
特殊元素

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的**最大下界或下确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
下界	2, 3, 6	无	2, 3, 6, 12	无
下确界	6	无	12	无

总结

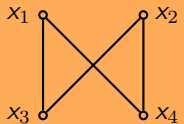
哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

① 子集 B 的上、下界和上、下确界可在集合 A 中寻找;



	上界	上确界	下界	下确界
$\{x_1, x_2\}$	无	无	x_3, x_4	无
$\{x_3, x_4\}$	x_1, x_2	无	无	无

总结

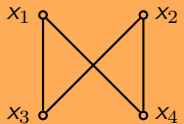
哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

- ① 子集 B 的上、下界和上、下确界可在集合 A 中寻找;
- ② 子集 B 的上、下界不一定存在, 如果存在可能多个;



	上界	上确界	下界	下确界
$\{x_1, x_2\}$	无	无	x_3, x_4	无
$\{x_3, x_4\}$	x_1, x_2	无	无	无

总结

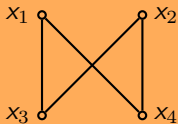
哈斯图及特殊元素

Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

- ① 子集 B 的上、下界和上、下确界可在集合 A 中寻找;
- ② 子集 B 的上、下界不一定存在, 如果存在可能多个;
- ③ 子集 B 的上、下确界不一定存在, 如果存在一定唯一;



	上界	上确界	下界	下确界
$\{x_1, x_2\}$	无	无	x_3, x_4	无
$\{x_3, x_4\}$	x_1, x_2	无	无	无

总结

哈斯图及特殊元素

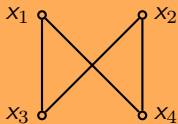
Lijie Wang

哈斯图

特殊元素

- ① 子集 B 的上、下界和上、下确界可在集合 A 中寻找;
- ② 子集 B 的上、下界不一定存在, 如果存在可能多个;
- ③ 子集 B 的上、下确界不一定存在, 如果存在一定唯一;
- ④ 子集 B 有上 (下) 确界, 一定有上 (下) 界, 反之不然.

	上界	上确界	下界	下确界
$\{x_1, x_2\}$	无	无	x_3, x_4	无
$\{x_3, x_4\}$	x_1, x_2	无	无	无





THE END, THANKS!