Lijie Wang

定)

树的性质

无向树

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

性质应用

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

Definition

● 连通而不含回路的无向图称为无向树(undirected tree),简称树(tree),常用 T 表示 树。

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

- 连通而不含回路的无向图称为无向树(undirected tree),简称树(tree),常用 T 表示树。
- 树中度数为 1 的结点称为叶(leaf); 度数大于 1 的结点称为分支点(branch point)或内部结点(interior point)。

无向权

Liiie Wang

定义

树的性质

- 连通而不含回路的无向图称为无向树(undirected tree),简称树(tree),常用 T 表示树。
- 树中度数为 1 的结点称为叶(leaf); 度数大于 1 的结点称为分支点(branch point)
 或内部结点(interior point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为森林(forest)。

无向树

Liiie Wang

定义

树的性质

- 连通而不含回路的无向图称为无向树(undirected tree),简称树(tree),常用 T 表示树。
- 树中度数为 1 的结点称为叶(leaf); 度数大于 1 的结点称为分支点(branch point)
 或内部结点(interior point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为森林(forest)。
- 平凡图称为平凡树(trivial tree)。

无向校

Lijie Wang

定义

树的性质 性质应用

Definition

- 连通而不含回路的无向图称为无向树(undirected tree),简称树(tree),常用 T 表示树。
- 树中度数为 1 的结点称为叶(leaf); 度数大于 1 的结点称为分支点(branch point)
 或内部结点(interior point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为森林(forest)。
- 平凡图称为平凡树(trivial tree)。

容易看出,树中没有环和平行边,因此一定是简单图,并且在任何非平凡树中,都无度数为 0 的结点。

无向树

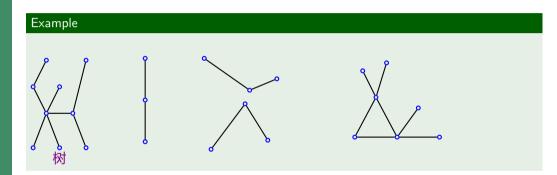
Lijie Wang

定义

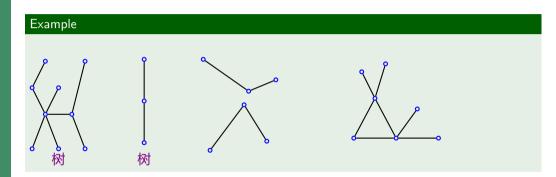
树的性质

Example

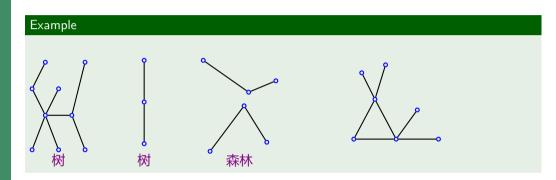
Lijie Wang



Lijie Wang



Lijie Wang



无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

Example

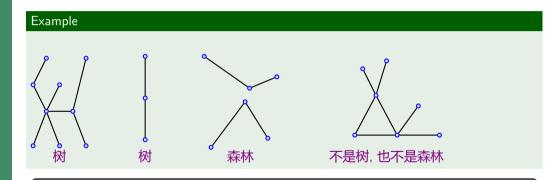
Note
Note

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质



考虑:一棵单独的树可以称作森林吗?

无向树

Lijie Wang

足

树的性质

وتحادثان

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n, |E| = m, 下列各命题是等价的:

无向树

Lijie Wang

正)

树的性质

性质应用

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n, |E| = m, 下列各命题是等价的:

● G连通而不含回路(即 G 是树);

无向树

Lijie Wang

正义

树的性质

生质应用

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n, |E| = m, 下列各命题是等价的:

- G连通而不含回路(即 G 是树);
- ② G 中无回路,且 m=n-1;

无向树

Lijie Wang

正义

树的性质

土质四月

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n , |E| = m , 下列各命题是等价的:

- G连通而不含回路(即 G 是树);
- ② G 中无回路,且 m=n-1;
- ③ G 是连通的,且 m=n-1;

无向树

Lijie Wang

足义

树的性质

生质应片

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n, |E| = m, 下列各命题是等价的:

- G连通而不含回路(即 G 是树);
- ② G 中无回路, 且 m=n-1;
- ③ G 是连通的,且 m = n 1;
- ❹ G 中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路;

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

王质应片

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n, |E| = m, 下列各命题是等价的:

- G连通而不含回路(即 G 是树);
- ② G 中无回路,且 m=n-1;
- ③ G 是连通的,且 m = n 1;
- ❹ G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路;

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

生质应用

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n , |E| = m , 下列各命题是等价的:

- G连通而不含回路(即 G 是树);
- ② G 中无回路,且 m=n-1;
- ③ G 是连通的,且 m = n 1;
- ❹ G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路;
- **6**G 中每一对结点之间有惟一一条基本通路。<math> (n ≥ 2)

无向树

Lijie Wang

足义

树的性质

Theorem

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, |V| = n, |E| = m, 下列各命题是等价的:

- G连通而不含回路(即 G 是树);
- ② G 中无回路, 且 m=n-1;
- ⑤ G 是连通的,且 m = n − 1;
- ❹ G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路;
- **⑤**G 是连通的,但删除任一条边后,便不连通;<math>(n ≥ 2)
- **6**G 中每一对结点之间有惟一一条基本通路。<math> (n ≥ 2)

直接证明这 6 个命题两两等价的工作量太大,一般采用循环论证的方法,即证明

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)$$

(1) G 连通而不含回路

(2) G 中无回路 , 且 m=n-1

Proof.

$$(1)\Rightarrow(2)$$

Lijie Wang

定〉

树的性质

(1) G 连通而不含回路

(2) G 中无回路, 且 m = n - 1

Proof.

对 n 作归纳。

(1) G 连通而不含回路

(2) G 中无回路, 且 m = n - 1

Proof.

对 n 作归纳。 n=1 时 , m=0 , 显然有 m=n-1。

$$(1)\Rightarrow(2)$$

无向权

Lijie Wang

定入

树的性质

(1) G 连通而不含回路

(2) G 中无回路, 且 m = n - 1

Proof.

对 n 作归纳。 n=1 时 , m=0 , 显然有 m=n-1。 假设 n=k 时命题成立 , 现证 n=k+1 时也成立。

(1) G 连通而不含回路

(2) G 中无回路, 且 m = n - 1

Proof.

对 n 作归纳。 n=1 时 , m=0 , 显然有 m=n-1。 假设 n=k 时命题成立 , 现证 n=k+1 时也成立。

由于 G 连通而无回路 , 所以 G 中至少有一个度数为 1 的结点 v_0 ,

$$(1) \Rightarrow (2)$$

- Lijie Wang
- Lijie Wan

树的性质

- (1) G 连通而不含回路
- (2) G 中无回路, 且 m = n 1

Proof.

对 n 作归纳。 n=1 时 , m=0 , 显然有 m=n-1。 假设 n=k 时命题成立 , 现证 n=k+1 时也成立。

由于 G 连通而无回路,所以 G 中至少有一个度数为 1 的结点 v_0 ,在 G 中删去 v_0 及其关联的边,便得到 k 个结点的连通而无回路的图,由归纳假设知它有 k-1 条边。

$$(1) \Rightarrow (2)$$

- 树的性质

- (1) *G* 连通而不含回路
- (2) G 中无回路,且 m = n 1

Proof.

对 n 作归纳。 n=1 时 n=0 , 显然有 m=n-1。 假设 n=k 时命题成立 , 现证 n = k + 1 时也成立。

由于 G 连通而无回路,所以 G 中至少有一个度数为 1 的结点 w , 在 G 中删去 w 及其 关联的边,便得到 k 个结点的连诵而无问路的图,由归纳假设知它有 k-1 条边。 再将 结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G . 所以 G 中含有 k+1 个结点和 k 条边 . 符合公 式. m = n - 1.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

- ie Wang (1) G 连通而不含回路
 - (2) G 中无回路, 且 m = n 1

Proof.

树的性质

对 n 作归纳。 n=1 时 , m=0 , 显然有 m=n-1。 假设 n=k 时命题成立 , 现证 n=k+1 时也成立。

由于 G 连通而无回路,所以 G 中至少有一个度数为 1 的结点 v_0 ,在 G 中删去 v_0 及其关联的边,便得到 k 个结点的连通而无回路的图,由归纳假设知它有 k-1 条边。 再将结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G ,所以 G 中含有 k+1 个结点和 k 条边,符合公式 m=n-1。

所以,G中无回路,且m=n-1。

定义

树的性质

(2)G 中无回路,且 m = n - 1

(3) G 是连通的,且 m = n - 1

Proof.

树的性质

性质应用

- (2)G 中无回路,且 m = n 1
- (3)G 是连通的,且 m = n 1

Proof.

证明只有一个连通分支。

- (2)G 中无回路,且 m = n 1
- (3)G 是连通的,且 m = n 1

Proof.

证明只有一个连通分支。

设 G 有 k 个连通分支 G_1,G_2,\cdots,G_k ,其结点数分别为 n_1,n_2,\cdots,n_k ,边数分别为

$$m_1, m_2, \cdots, m_k$$
 , $\coprod n = \sum_{i=1}^k n_i$, $m = \sum_{i=1}^k m_{i \circ}$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

.

Lijie Wang

树的性质

Dro.

(2)G 中无回路,且 m = n - 1

(3)G 是连通的,且 m = n - 1

Proof.

证明只有一个连通分支。

设 G 有 k 个连通分支 G_1,G_2,\cdots,G_k , 其结点数分别为 n_1,n_2,\cdots,n_k , 边数分别为

$$m_1,m_2,\cdots,m_k$$
,且 $n=\sum\limits_{i=1}^k n_i$, $m=\sum\limits_{i=1}^k m_i$ 。 由于 G 中无回路,所以每个

$$G_i(i=1,2,\cdots,k)$$
 均为树,因此 $m_i=n_i-1(i=1,2,\cdots,k)$,于是

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k = n - 1$$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

树的性质

- (2)G 中无回路,且 m=n-1
- (3) G 是连通的,且 m = n 1

Proof.

证明只有一个连诵分支。

设 G 有 k 个连通分支 G_1, G_2, \cdots, G_k , 其结点数分别为 n_1, n_2, \cdots, n_k , 边数分别为

$$m_1, m_2, \cdots, m_k$$
,且 $n = \sum_{i=1}^K n_i$, $m = \sum_{i=1}^K m_i$ 。 由于 G 中无回路,所以每个

$$G_i(i=1,2,\cdots,k)$$
 均为树,因此 $m_i=n_i-1(i=1,2,\cdots,k)$,于是

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k = n - 1$$

故 k=1, 所以 G 是连诵的, H m=n-1。

树的性质

(3)G 是连通的,且 m = n - 1

(4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

Proof.

$(3) \Rightarrow (4)$

无向树

Lijie Wang

正メ

树的性质

(3)G 是连通的,且 m = n - 1

(4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

Proof.

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

$$n=1$$
 时, $m=n-1=0$, 显然无回路。

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

n = 1 时 , m = n - 1 = 0 , 显然无回路。 假设结点数 n = k - 1 时无回路, 下面考虑结点数 n=k 的情况。

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G 中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

n=1 时,m=n-1=0,显然无回路。 假设结点数 n=k-1 时无回路,下面考虑结点数 n = k 的情况。 因 G 连通 , 故 G 中每一个结点的度数均大于等于 1。

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

n=1 时,m=n-1=0,显然无回路。 假设结点数 n=k-1 时无回路,下面考虑结点数 n=k 的情况。 因 G 连通,故 G 中每一个结点的度数均大于等于 1。 可以证明至少有一个结点 v_0 ,使得 $deg(v_0)=1$,因若 k 个结点的度数都大于等于 2,则 $2m=\sum\limits_{v\in V}deg(v)\geqslant 2k$,从而 $m\geqslant k$,即至少有 k 条边,但这与 m=n-1 矛盾。

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

n=1 时,m=n-1=0,显然无回路。 假设结点数 n=k-1 时无回路,下面考虑结点数 n=k 的情况。 因 G 连通,故 G 中每一个结点的度数均大于等于 1。 可以证明至少有一个结点 v_0 ,使得 $deg(v_0)=1$,因若 k 个结点的度数都大于等于 2,则 $2m=\sum_{v\in V}deg(v)\geqslant 2k$,从而 $m\geqslant k$,即至少有 k 条边,但这与 m=n-1 矛盾。 在 G 中删去 v_0 及其关联的边,得到新图 G,根据归纳假设知 G 无回路,由于 $deg(v_0)=1$,所以再将结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G,则 G 也无回路。

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

n=1 时,m=n-1=0,显然无回路。 假设结点数 n=k-1 时无回路,下面考虑结点数 n=k 的情况。 因 G 连通,故 G 中每一个结点的度数均大于等于 1。 可以证明至少有一个结点 v_0 ,使得 $deg(v_0)=1$,因若 k 个结点的度数都大于等于 2,则 $2m=\sum_{v\in V}deg(v)\geq 2k$,从而 $m\geqslant k$,即至少有 k 条边,但这与 m=n-1 矛盾。 在 G 中删去 v_0 及其关联的边,得到新图 G ,根据归纳假设知 G 无回路,由于 $deg(v_0)=1$,所以再将结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G,则 G 也无回路。

其次证明在 G 中任二结点 v_i , v_j 之间增加一条边 (v_i, v_j) , 得到一条且仅一条基本回路。

$$(3) \Rightarrow (4)$$

- (3)G 是连通的,且 m = n 1
- (4)G中无回路,但在任二结点之间增加一条新边,就得到惟一的一条基本回路

树的性质

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。

n=1 时,m=n-1=0,显然无回路。 假设结点数 n=k-1 时无回路,下面考虑结点数 n=k 的情况。 因 G 连通,故 G 中每一个结点的度数均大于等于 1。 可以证明至少有一个结点 v_0 ,使得 $deg(v_0)=1$,因若 k 个结点的度数都大于等于 2,则 $2m=\sum_{v\in V}deg(v)\geqslant 2k$,从而 $m\geqslant k$,即至少有 k 条边,但这与 m=n-1 矛盾。 在 G 中删去 v_0 及其关联的边,得到新图 G,根据归纳假设知 G 无回路,由于 $deg(v_0)=1$,所以再将结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G,则 G 也无回路。

其次证明在 G 中任二结点 v_i , v_j 之间增加一条边 (v_i, v_j) , 得到一条且仅一条基本回路。 由于 G 是连通的 , 从 v_i 到 v_j 有一条通路 L , 再在 L 中增加一条边 (v_i, v_j) , 就构成一条回路。若此回路不是惟一和基本的 , 则删去此新边 , G 中必有回路 , 得出矛盾。

树的特点

无向树

Lijie Wang

足义

树的性质

性质应用

```
在结点给定的无向图中,
树是边数最多的无回路图;
树是边数最少的连通图。
由此可知,在无向图 G = (n, m)中,
若 m < n-1,则 G 是不连通的;
若 m > n-1,则 G 必含回路。
```



Lijie Wang

之实

树的性质

Theorem

任意非平凡树 T = (n, m) 都至少有两片叶。

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质性质应用

Theorem

任意非平凡树 T = (n, m) 都至少有两片叶。

Proof.

因树 T 是连通的 , 从而 T 中各结点的度数均大于等于 1。



树的性质 性质应用

Theorem

任意非平凡树 T = (n, m) 都至少有两片叶。

Proof.

因树 T 是连通的 , 从而 T 中各结点的度数均大于等于 1。 设 T 中有 k 个度数为 1 的 结点 (即 k 片叶) , 其余的结点度数均大于等于 2。

无向树 Lijie Wang

定义

性质应用

Theorem

任意非平凡树 T = (n, m) 都至少有两片叶。

Proof.

因树 T 是连通的 , 从而 T 中各结点的度数均大于等于 1。 设 T 中有 k 个度数为 1 的结点 (即 k 片叶) , 其余的结点度数均大于等于 2。 由握手定理 , 可得

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) \geqslant k + 2(n - k) = 2n - k$$

Theorem

任意非平凡树 T = (n, m) 都至少有两片叶。

Proof.

因树 T 是连诵的,从而 T 中各结点的度数均大于等于 1。 设 T 中有 k 个度数为 1 的 结点 (即 k 片叶), 其余的结点度数均大于等于 2。 由握手定理, 可得

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) \geqslant k + 2(n - k) = 2n - k$$

由于树中有 m=n-1, 于是 $2(n-1) \ge 2n-k$, 因此可得 $k \ge 2$, 这说明 T 中至少有 两片叶。



Lijie Wang

之宝

树的性质 性**质应用**

Example

已知一棵无向树 T 中有 4 度 , 3 度 , 2 度的分支点各一个 , 其余为树叶 , 问 T 中有几片树叶 ?

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质性质应用

Example

已知一棵无向树 T 中有 4 度 , 3 度 , 2 度的分支点各一个 , 其余为树叶 , 问 T 中有几片树叶 ?

Solution

设 T 有 x 片树叶,则 T 共有 n = 3 + x 个结点。

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质 性质应用

Example

已知一棵无向树 T 中有 4 度 , 3 度 , 2 度的分支点各一个 , 其余为树叶 , 问 T 中有几片树叶 ?

Solution

设 $T \in X$ 片树叶,则 T 共有 n = 3 + x 个结点。 由握手定理以及树的性质,可得

$$4+3+2+x=2(n-1)=2(3+x-1)$$

无向树

Lijie Wang

定义

树的性质 性质应用

Example

已知一棵无向树 T 中有 4 度 , 3 度 , 2 度的分支点各一个 , 其余为树叶 , 问 T 中有几片树叶 ?

Solution

设 T 有 x 片树叶 , 则 T 共有 n = 3 + x 个结点。 由握手定理以及树的性质 , 可得

$$4+3+2+x=2(n-1)=2(3+x-1)$$

解出 x=5,即 T 中有 5 片树叶。

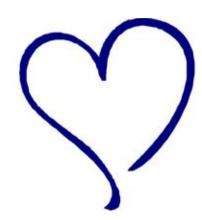
无向树

Lijie Wang

定义

树的性质

性质应用



THE END, THANKS!