# 特殊图



Lijie Wang

引入平面图

T-IMIEDINI-

欧拉公式

平面图的必要统

件

库拉托夫斯基定理

# 平面图

### 王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



# 平面图的定义



引入平面图

平面图的面

亚帝国的冰事

平面图的必要》 件

库拉托夫斯基尔

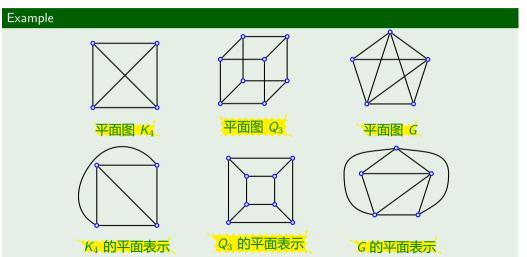
很多时候,我们需要避免图中的边在非端点位置交叉。例如在印制电路板和集成电路中,我们需要避免导线发生交叉,这会导致短路。又如在建筑布线时,也要注意尽量不能发生交叉,因为这会导致信号传输时的电磁干扰。

#### Definition

如果能够把一个无向图 G 的所有结点和边画在平面上,使得任何两边都不会在非结点处交叉,则称 G 为平面图(plane Graph),否则称 G 为非平面图。

# 平面图示例





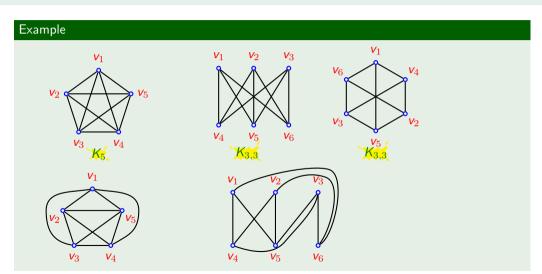
# 非平面图示例



平面图的必要

件

幸拉托夫斯基定 \*\*\*\*





在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。



Lijie Wang

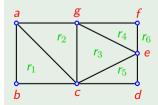
平面图的面

### Definition

Lijie Wang

平面图的面

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。



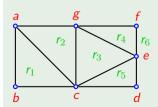
### Definition

Lijie Wang

平面图的面

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。

#### Example



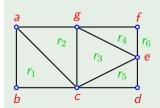
•  $r_1$ , 边界为 abca,  $D(r_1) = 3$ ;

### Definition

Lijie Wang

平面图的面

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。



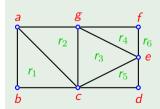
- r<sub>1</sub> , 边界为 abca , D(r<sub>1</sub>) = 3;
- r<sub>2</sub> , 边界为 acga ,  $D(r_2) = 3$ ;

### Definition

Lijie Wang

平面图的面

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。



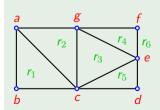
- r<sub>1</sub> , 边界为 abca , D(r<sub>1</sub>) = 3;
- $r_2$ , 边界为 acga,  $D(r_2) = 3$ ;
- $r_3$ , 边界为 cegc,  $D(r_3) = 3$ ;

### Definition

Lijie Wang

平面图的面

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。



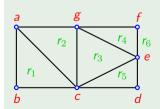
- r<sub>1</sub> , 边界为 abca , D(r<sub>1</sub>) = 3;
- r<sub>2</sub> , 边界为 acga ,  $D(r_2) = 3$ ;
- r<sub>3</sub> , 边界为 cegc , D(r<sub>3</sub>) = 3;
- r<sub>4</sub> , 边界为 efge ,  $D(r_4) = 3$ ;

#### Definition

Lijie Wang

平面图的面

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。



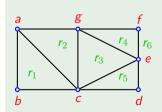
- r<sub>1</sub> , 边界为 abca , D(r<sub>1</sub>) = 3;
- r<sub>2</sub> , 边界为 acga , D(r<sub>2</sub>) = 3;
- r<sub>3</sub>, 边界为 cegc, D(r<sub>3</sub>) = 3;
- $r_4$ , 边界为 efge,  $D(r_4) = 3$ ;
- r<sub>5</sub> , 边界为 cdec ,  $D(r_5) = 3$ ;

#### Definition

在平面图 G 的一个平面表示中,由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为 G 的一个面,包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的<mark>边界</mark>,面 r 的边界的长度称为该面的次数,记为 D(r)。区域面积有限的面称为有限面,区域面积无限的面称为无限面。

### Example

平面图的面



- r<sub>1</sub> , 边界为 abca , D(r<sub>1</sub>) = 3;
- $r_2$ , 边界为 acga,  $D(r_2) = 3$ ;
- r<sub>3</sub>, 边界为 cegc, D(r<sub>3</sub>) = 3;
- $r_4$ , 边界为 efge,  $D(r_4) = 3$ ;
- r<sub>5</sub> , 边界为 cdec , D(r<sub>5</sub>) = 3;
- $r_6$ , 边界为 abcdefga,  $D(r_6) = 7$ ;无限面

1 U P 1 DP P 1 E P 1 E P 2 Y 2 Y 3 Y 4 E P 1 E P

平面图的面

欧拉公式

平面图的必要 件

库拉托夫斯基尔

#### ☞ 注意

面的概念也可以用下面形象的说法加以描述:假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上,然后用一把小刀,沿着图的边切开,那么平面就被切成许多块,每一块就是图的一个面。更确切地说,平面图的一个面就是平面的一块,它用边作边界线,且不能再分成子块。

#### Theorem

平面图中所有面的次数之和等于边数的二倍。

平面图的面

汉九77.1

平面图的必要 件

库拉托夫斯基尔

#### ☞ 注意

面的概念也可以用下面形象的说法加以描述:假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上,然后用一把小刀,沿着图的边切开,那么平面就被切成许多块,每一块就是图的一个面。更确切地说,平面图的一个面就是平面的一块,它用边作边界线,且不能再分成子块。

#### Theorem

平面图中所有面的次数之和等于边数的二倍。

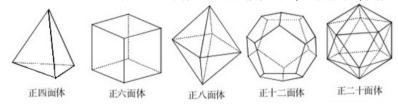
#### Proof.

因任何一条边,或者是两个面边界的公共边,或者是在一个面中作为边界被重复计算两次,故平面图所有面的次数之和等于其边数的二倍。

# 欧拉公式

Lijie Wang

1750 年,欧拉发现,任何一个凸多面体,若有n个顶点、m条棱和r个面,则有n-m+r=2。这个公式可以推广到平面图上来(<mark>球极投影</mark>),称之为欧拉公式。



#### **Theorem**

设  $G = \langle V, E \rangle$  是连通平面图 , 若它有 n 个结点、m 条边和 r 个面 , 则有

$$n - m + r = 2$$

平面图

Lijie Wang

引入平面图

\_\_\_\_

chit // -

平面图的必要统

**车拉托夫斯基**5

#### Proof.

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

平面图

Lijie Wang

引入平面图

平面图的面

欠拉公式

平面图的必要:

库拉托夫斯基尔

#### Proof.

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

① 若 m = 0,由于 G 是连通图,故必有 n = 1,这时只有一个无限面,即 r = 1。所以 n - m + r = 1 - 0 + 1 = 2,定理成立。

#### Proof.

我们对 G 的边数 m 讲行归纳。

- ① 若 m=0, 由于 G 是连通图, 故必有 n=1, 这时只有一个无限面, 即 r=1。所以 n - m + r = 1 - 0 + 1 = 2, 定理成立。
- ② 若 m=1, 这时若该边是自回路,则有 n=1, r=2, 从而 n-m+r=1-1+2=2; 若该边不是自 回路,则有n=2,r=1,从而n-m+r=2-1+1=2。所以m=1时,定理也成立。



Lijie Wang

#### Proof.

Lijie Wang

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

- ① 若 m=0,由于 G 是连通图,故必有 n=1,这时只有一个无限面,即 r=1。所以 n-m+r=1-0+1=2,定理成立。
- ② 若 m=1, 这时若该边是自回路,则有 n=1, r=2, 从而 n-m+r=1-1+2=2; 若该边不是自回路,则有 n=2, r=1, 从而 n-m+r=2-1+1=2。所以 m=1 时,定理也成立。
- ③ 假设对少于 m 条边的所有连通平面图,欧拉公式成立。现考虑 m 条边的连通平面图,设它有 n 个结点。分以下两种情况:

#### Proof.

Lijie Wang

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

- ① 若 m = 0, 由于 G 是连通图, 故必有 n = 1, 这时只有一个无限面, 即 r = 1。所以 n m + r = 1 0 + 1 = 2, 定理成立。
- ② 若 m=1, 这时若该边是自回路,则有 n=1, r=2, 从而 n-m+r=1-1+2=2; 若该边不是自回路,则有 n=2, r=1, 从而 n-m+r=2-1+1=2。所以 m=1 时,定理也成立。
- ③ 假设对少于 m 条边的所有连通平面图,欧拉公式成立。现考虑 m 条边的连通平面图,设它有 n 个结点。分以下两种情况:
  - 若 G 是树,则 m = n − 1, r = 1。有 n − m + r = n − (n − 1) + 1 = 2;

所以对 m 条边时, 欧拉公式也成立。

#### Proof.

Lijie Wang

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

- ① 若 m=0, 由于 G 是连通图, 故必有 n=1, 这时只有一个无限面, 即 r=1。所以 n-m+r=1-0+1=2, 定理成立。
- ② 若 m=1, 这时若该边是自回路,则有 n=1, r=2, 从而 n-m+r=1-1+2=2; 若该边不是自回路,则有 n=2, r=1, 从而 n-m+r=2-1+1=2。所以 m=1 时,定理也成立。
- ③ 假设对少于 m 条边的所有连通平面图,欧拉公式成立。现考虑 m 条边的连通平面图,设它有 n 个结点。分以下两种情况:
  - 若 G 是树,则 m = n 1, r = 1。有 n m + r = n (n 1) + 1 = 2;
  - 若 G 不是树,则 G 中必有回路,因此有基本回路,设 e 是某基本回路的一条边,则从 G 中删除 边 e 后仍是连通平面图,它有 n 个结点,m-1 条边和 r-1 个面,按归纳假设知 n-(m-1)+(r-1)=2. 整理得 n-m+r=2.

所以对 m 条边时, 欧拉公式也成立。

# 欧拉公式推论一

平面图

Lijie Wang

引入平面图

平面图的面

eb 1-5 () -1

平面图的必要条

件

库拉托夫斯基定 理

### Corollary

设 G 是一个 (n,m) 简单连通平面图 , 若 m>1 , 则有

$$m \leqslant 3n - 6$$

# 欧拉公式推论一

平面图

Lijie Wang

引入平面图

ri立公式

平面图的必要条

件 件

理

#### Corollary

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图, 若 m > 1, 则有

$$m \leq 3n - 6$$

#### Proof.

设 G 有 r 个面 , 因为 G 是简单图 , 所以 G 的每个面至少由 3 条边围成 , 所以 G 所有面的次数 之和 (即边数的两倍)

$$\sum_{i=1}^{r} D(r_i) = 2m \geqslant 3 \times r$$

即  $r \leq \frac{2}{3}m$  , 代入欧拉公式有

$$2 = n - m + r \leqslant n - m + \frac{2}{3}m$$

即  $2 \le n - \frac{1}{3}m$ ,整理得  $m \le 3n - 6$ 。



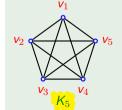
# 推论一的应用

平面图的必要条

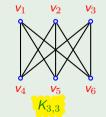
### ☞ 注意

欧拉公式的推论一( $m \le 3n - 6$ )本身可能用处不大,但它的逆否命题却非常有用,可以 用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图,若不满足  $m \leq 3n - 6$ ,则一定是非 平面图。但需要注意,满足该不等式的简单连通图未必是平面图。

### Example



n = 5 , m = 10 , m > 3n - 6 = $3 \times 5 - 6 = 9$  , 因 此 K5 不是平面图。



n = 6 , m = 9 , 满足不等式 m ≤ 3n-6,但 K<sub>3.3</sub>是

# 欧拉公式推论二

平面图

Lijie Wang

引入平面图

欠拉公式

平面图的必要条 件

库拉托夫斯基定

#### Corollary

设 G 是一个 (n,m) 简单连通平面图 , 若每个面的次数至少为  $k(k\geqslant 3)$  , 则有  $m\leqslant \frac{k}{k-2}(n-2).$ 

# 欧拉公式推论二

平面图的必要条

#### Corollary

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图 , 若每个面的次数至少为  $k(k \ge 3)$  , 则有  $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)_{\bullet}$ 

#### Proof.

设 G 共有 r 个面, 各面的次数之和 (等于边数的两倍) 为 T, 由条件可知

$$2 \times m = T \geqslant k \times r$$

利用欧拉公式解出面数 r = 2 - n + m, 得出下式成立

$$2 \times m \geqslant k \times (2 - n + m)$$

从而有 
$$(k-2) \times m \leqslant k \times (n-2)$$
 由于  $k \geqslant 3$ , 因而  $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$ 

# 推论二的应用

平面图

Lijie Wang

引入平面图

平面图的面

沈公立刘

平面图的必要条 件

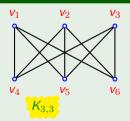
医拉托土斯甘

库拉托夫斯基尔

### ☞ 注意

与欧拉公式的推论一类似,推论二本身可能用处不大,但它的逆否命题却非常有用,可以用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图,若每个面的次数至少为  $k(k\geqslant 3)$ ,若不满足  $m\leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$ ,则一定是非平面图。

### Example



n=6,m=9,每个面的次数至少为 4,代入不等式  $m\leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$ ,得到  $9\leqslant \frac{4}{4-2}(6-2)$ ,即  $9\leqslant 8$ ,这是矛盾的, 因而  $K_{3,3}$  是一个非平面图。

### 同胚



Lijie Wang

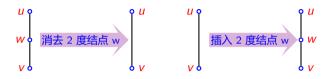
51八平国陸

かしたくへっぱ

平面图的必要

件

库拉托夫斯基定 理



### Definition

如果两个图  $G_1$  和  $G_2$  同构 , 或经过反复插入或消去 2 度结点后同构 , 则称  $G_1$  与  $G_2$  同胚。

### 同胚

十回國 Lijie Wang

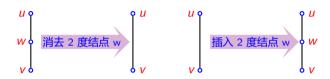
引入平面图

平面图的面

次拉公式

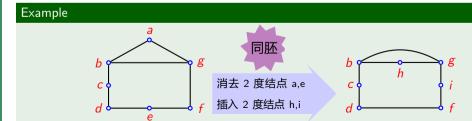
平面图的必要:

库拉托夫斯基定



### Definition

如果两个图  $G_1$  和  $G_2$  同构 ,或经过反复插入或消去 2 度结点后同构 ,则称  $G_1$  与  $G_2$  同胚。



# 收缩



Lijie Wang

平面图的面

平田国田田

平面图的必要:

件

库拉托夫斯基定 理

#### Definition

图中边 e = (u, v) 的收缩是指从 G 中删除 e , 将 e 的两个端点 u, v 重合 , 用一个新的结点 w 代替 , 使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边 , 称为边 e 的收缩。一个图 G 可以收缩为图 H , 是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。

# 收缩

平面图

Lijie Wang

平面图的面

次拉公式

平面图的必要组 性

库拉托夫斯基定理

#### Definition

图中边 e = (u, v) 的收缩是指从 G 中删除 e ,将 e 的两个端点 u ,v 重合 ,用一个新的结点 w 代替 ,使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边 ,称为边 e 的收缩。一个图 G 可以收缩为图 H ,是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。



平面图

Lijie Wang

引入平面图

TT THE MAN TO THE

-----

半面图的必要; /#

#### Theorem

一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不与  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同胚。

平面图

Lijie Wang

引入平面图

ТШЫЛ

沈公立汉

平面图的必要 件

库拉托夫斯基定 理

#### Theorem

一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不与  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同胚。

#### Theorem

一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不能收缩为  $K_5$  或  $K_{3,3}$ 。

平面图

Lijie Wang

引入平面图

十四四四四

平面图的必要

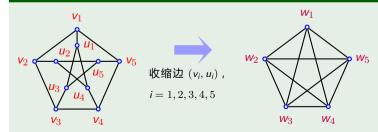
库拉托夫斯基定

#### **Theorem**

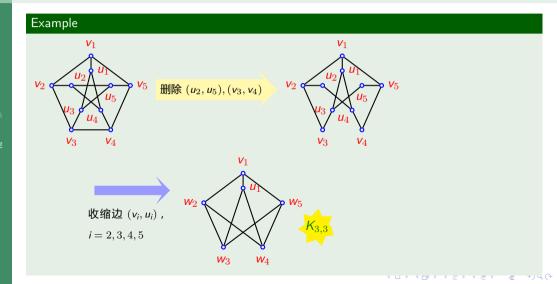
一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不与  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同胚。

#### **Theorem**

一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不能收缩为  $K_5$  或  $K_{3,3}$ 。



Lijie Wang 库拉托夫斯基定



平面图

Lijie Wang

引入平面图

平面图的图

欧拉公式

平面图的必要

件

库拉托夫斯基定理



THE END, THANKS!