# 函数的类型

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

# 函数类型



## Definition

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

# 函数类型



**Definition**

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;

# 函数类型

**Definition**

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;

# 函数类型

**Definition**

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;
- 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的双射.

# 函数类型

## Definition

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;
- 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的双射.

## Example

# 函数类型



## Definition

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;
- 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的双射.

## Example

- 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}.f : A \to B$ 定义为:
  $\{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, a >, < 5, d >\}$ ;

# 函数类型

**Definition**

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;
- 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的双射.

**Example**

- 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}. f : A \to B$ 定义为:
  $\{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, a >, < 5, d >\}$ ; 满射
- 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >\}$;

# 函数类型



## Definition

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;
- 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的双射.

## Example

- 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}. f : A \to B$ 定义为: $\{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, a >, < 5, d >\}$ ; 满射
- 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >\}$; 单射
- 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{< 1, b >, < 2, c >, < 3, a >\}$.

# 函数类型

## Definition

设 $f$ 是从集合 $A$ 到 $B$ 的函数,

- 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 如果 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的单射;
- 如果 $ranf = B$, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的满射;
- 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的双射.

## Example

- 设 $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{a,b,c,d\}. f : A \to B$ 定义为: $\{<1,a>,<2,c>,<3,b>,<4,a>,<5,d>\}$ ; 满射
- 设 $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c,d\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{<1,a>,<2,c>,<3,b>\}$; 单射
- 设 $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}. f : A \to B$ 定义为: $f = \{<1,b>,<2,c>,<3,a>\}$. 双射

# 函数类型

# 函数类型



☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

# 函数类型

☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;

# 函数类型



☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- $f$ 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;

# 函数类型



☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

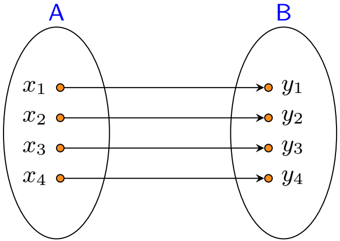
- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- $f$ 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;
- $f$ 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$.

# 函数类型

☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- $f$ 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;
- $f$ 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$.



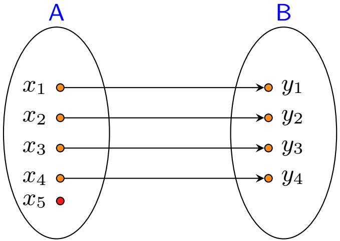
# 函数类型



☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- $f$ 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;
- $f$ 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$.



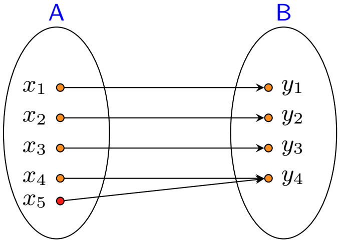
# 函数类型



☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- $f$ 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;
- $f$ 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$.

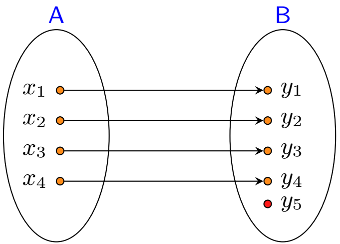


# 函数类型

☞

若 $f$ 是从有限集 $A$ 到有限集 $B$ 的函数，则有

- $f$ 是单射的必要条件为 $|A| \leqslant |B|$;
- $f$ 是满射的必要条件为 $|A| \geqslant |B|$;
- $f$ 是双射的必要条件为 $|A| = |B|$.



# 函数类型



**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

# 函数类型

**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$;

# 函数类型



**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$; 一般函数
- $f_2 = \{< x, x+1 > | x \in \mathbf{R}\}$;

# 函数类型

**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$; 一般函数
- $f_2 = \{< x, x+1 > | x \in \mathbf{R}\}$; 双射
- $f_3 = \{< x, e^x > | x \in \mathbf{R}\}$.

# 函数类型



**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$; 一般函数
- $f_2 = \{< x, x+1 > | x \in \mathbf{R}\}$; 双射
- $f_3 = \{< x, e^x > | x \in \mathbf{R}\}$. 单射

# 函数类型



**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$; 一般函数
- $f_2 = \{< x, x+1 > | x \in \mathbf{R}\}$; 双射
- $f_3 = \{< x, e^x > | x \in \mathbf{R}\}$. 单射

☞ 函数类型的数学化描述

- $f : A \to B$ 是单射当且仅当对 $\forall x_1, x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f : A \to B$ 是满射当且仅当对 $\forall y \in B$，一定存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$；

# 函数类型



**Example**

设 $A = B = \mathbf{R}$, 试判断下列函数的类型。

- $f_1 = \{< x, x^2 > | x \in \mathbf{R}\}$; 一般函数
- $f_2 = \{< x, x+1 > | x \in \mathbf{R}\}$; 双射
- $f_3 = \{< x, e^x > | x \in \mathbf{R}\}$. 单射

☞ 函数类型的数学化描述

- $f: A \to B$ 是单射当且仅当对 $\forall x_1, x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- $f: A \to B$ 是满射当且仅当对 $\forall y \in B$，一定存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$；
- $f: A \to B$ 是双射当且仅当满足以上两点.

# 典型 (自然) 映射



**Example**

设 $R$ 是集合 $A$ 上的一个等价关系,$g: A \to A/R$ 称为 $A$ 对商集 $A/R$ 的典型 (自然) 映射, 其定义为 $g(a) = [a]_R, a \in A$. 证明典型映射是一个满射.

# 典型 (自然) 映射

**Example**

设 $R$ 是集合 $A$ 上的一个等价关系,$g : A \to A/R$ 称为 $A$ 对商集 $A/R$ 的典型 (自然) 映射, 其定义为 $g(a) = [a]_R, a \in A$. 证明典型映射是一个满射.

**Proof.**

由等价类的定义, 对任意 $[a]_R \in A/R$, 都有 $a \in A$, 使得 $g(a) = [a]_R$, 即任意 $A/R$ 中的元素都有原像, 根据满射的定义知, 典型映射是满射. $\square$

# 函数类型证明



**Example**

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, 对任意 $a \in A$, 令 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\}$. 证明 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数, 并且 $f$ 保持 $< A, \leqslant >$ 与 $< P(A), \subseteq >$ 的偏序关系, 即对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则 $f(a) \subseteq f(b)$.

# 函数类型证明

**Example**

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, 对任意 $a \in A$, 令 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\}$. 证明 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数, 并且 $f$ 保持 $< A, \leqslant >$ 与 $< P(A), \subseteq >$ 的偏序关系, 即对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则 $f(a) \subseteq f(b)$.

**Proof.**

$\square$

# 函数类型证明

**Example**

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, 对任意 $a \in A$, 令 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\}$. 证明 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数, 并且 $f$ 保持 $< A, \leqslant >$ 与 $< P(A), \subseteq >$ 的偏序关系, 即对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则 $f(a) \subseteq f(b)$.

**Proof.**

- 证明 $f$ 是函数:
  任取 $a \in A$, 由于 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\} \subseteq A$, 所以 $f(a) \in P(A)$, 即 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的函数。

□

# 函数类型证明



**Example**

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, 对任意 $a \in A$, 令 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\}$. 证明 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数, 并且 $f$ 保持 $< A, \leqslant >$ 与 $< P(A), \subseteq >$ 的偏序关系, 即对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则 $f(a) \subseteq f(b)$.

**Proof.**

- 证明 $f$ 是函数:
  任取 $a \in A$, 由于 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\} \subseteq A$, 所以 $f(a) \in P(A)$, 即 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的函数。
- 证明 $f$ 是单射:...

□

# 函数类型证明



**Example**

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, 对任意 $a \in A$, 令 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\}$. 证明 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数, 并且 $f$ 保持 $< A, \leqslant >$ 与 $< P(A), \subseteq >$ 的偏序关系, 即对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则 $f(a) \subseteq f(b)$.

**Proof.**

- 证明 $f$ 是函数:
  任取 $a \in A$, 由于 $f(a) = \{x | x \in A, x \leqslant a\} \subseteq A$, 所以 $f(a) \in P(A)$, 即 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的函数。
- 证明 $f$ 是单射:...
- 证明保序性:...

$\square$

# 函数类型证明



## Continue...

# 函数类型证明

## Continue...

- 证明 $f$ 是单射:
  对任意 $a, b \in A$,$a \neq b$,
  1) 若 $a, b$ 存在偏序关系, 不妨设 $a \leqslant b$(或 $b \leqslant a$), 由于"$\leqslant$"是反对称的, 所以 $b \nleqslant a$(或 $a \nleqslant b$), 从而 $b \notin f(a) = \{x|x \in A, x \leqslant a\}$, 而"$\leqslant$"是自反的, 所以 $b \leqslant b$, 即 $b \in f(b)$, 所以 $f(a) \neq f(b)$, 此时,$f$ 是单射;
  2) 若 $a, b$ 不存在偏序关系, 则有 $a \nleqslant b$, 从而 $a \notin f(b) = \{x|x \in A, x \leqslant b)\}$, 而"$\leqslant$"是自反的, 所以 $a \leqslant a$, 即 $a \in f(a)$, 所以 $f(a) \neq f(b)$, 此时,$f$ 仍是单射. 因此对任意 $a, b \in A$, 当 $a \neq b$, 总有 $f(a) \neq f(b)$. 从而 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数.

# 函数类型证明

## Continue...

- 证明 $f$ 是单射:
  对任意 $a, b \in A$,$a \neq b$,
  1) 若 $a, b$ 存在偏序关系, 不妨设 $a \leqslant b$(或 $b \leqslant a$), 由于"$\leqslant$"是反对称的, 所以 $b \nleqslant a$(或 $a \nleqslant b$), 从而 $b \notin f(a) = \{x|x \in A, x \leqslant a\}$, 而"$\leqslant$"是自反的, 所以 $b \leqslant b$, 即 $b \in f(b)$, 所以 $f(a) \neq f(b)$, 此时,$f$ 是单射;
  2) 若 $a, b$ 不存在偏序关系, 则有 $a \nleqslant b$, 从而 $a \notin f(b) = \{x|x \in A, x \leqslant b)\}$, 而"$\leqslant$"是自反的, 所以 $a \leqslant a$, 即 $a \in f(a)$, 所以 $f(a) \neq f(b)$, 此时,$f$ 仍是单射. 因此对任意 $a, b \in A$, 当 $a \neq b$, 总有 $f(a) \neq f(b)$. 从而 $f$ 是从 $A$ 到 $P(A)$ 的单射函数.
- 证明保序性. 对任意 $a, b \in A$, 若 $a \leqslant b$, 则任取 $y \in f(a)$, 则 $y \leqslant a$, 由 $a \leqslant b$, 根据"$\leqslant$"的传递性, 有 $y \leqslant b$ , 从而 $y \in f(b)$, 所以 $f(a) \subseteq f(b)$, 即保序性成立. □

**THE END, THANKS!**