等价关系定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

等价关系

☞

我们在生活中经常遇到需要对集合中的元素进行分类的问题。例如：开学注册时，由于人数众多，为了避免拥挤，我们需要将所有新生分成三个类别，然后将这三个类别的学生分成不同时间段来完成注册. 那么，应该如何进行分类呢?

其中一种方案是，将学号分成三段，每一段分配一个时间段. 这种情况下，我们可以定义一个关系 $R, < a, b > \in R$ 当且仅当 a 和 b 的学号在同一段. 此关系 R 具备了自反，对称和传递的性质.

等价关系

☞

我们在生活中经常遇到需要对集合中的元素进行分类的问题。例如：开学注册时，由于人数众多，为了避免拥挤，我们需要将所有新生分成三个类别，然后将这三个类别的学生分成不同时间段来完成注册. 那么，应该如何进行分类呢？

其中一种方案是，将学号分成三段，每一段分配一个时间段. 这种情况下，我们可以定义一个关系 $R, < a, b > \in R$ 当且仅当 a 和 b 的学号在同一段. 此关系 R 具备了自反，对称和传递的性质.

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系(equivalent relation).

等价关系

Example

等价关系

Example

- 同姓关系，等于关系都是等价关系；而朋友关系，包含关系都不是等价关系.

等价关系

Example

- 同姓关系, 等于关系都是等价关系; 而朋友关系, 包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R, aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同，则关系 R 是等价关系.

等价关系

Example

- 同姓关系，等于关系都是等价关系；而朋友关系，包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R, aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同，则关系 R 是等价关系.
- 在包含各种颜色的球的集合中建立关系 S, aSb 当且仅当 a 和 b 的颜色相同，则关系 S 是等价关系.

等价关系

Example

- 同姓关系，等于关系都是等价关系；而朋友关系，包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R, aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同，则关系 R 是等价关系.
- 在包含各种颜色的球的集合中建立关系 S, aSb 当且仅当 a 和 b 的颜色相同，则关系 S 是等价关系.

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义一个以 4 为模的同余关系，即 $R = \{< x, y > |4|(x - y)\}$,

等价关系

Example

- 同姓关系，等于关系都是等价关系；而朋友关系，包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R,aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同，则关系 R 是等价关系.
- 在包含各种颜色的球的集合中建立关系 S,aSb 当且仅当 a 和 b 的颜色相同，则关系 S 是等价关系.

Example

在集合 $A=\{0,1,2,4,5,8,9\}$ 上定义一个以 4 为模的同余关系，即 $R=\{<x,y>|4|(x-y)\}$,
$R=\{<0,0>,<0,4>,<0,8>,<4,4>,<4,0>,<4,8>,<8,8>,<8,0>,<8,4>,<1,1>,<1,5>,<1,9>,<5,5>,<5,1>,<5,9>,<9,9>,<9,1>,<9,5>,<2,2>\}$;

等价关系

Example

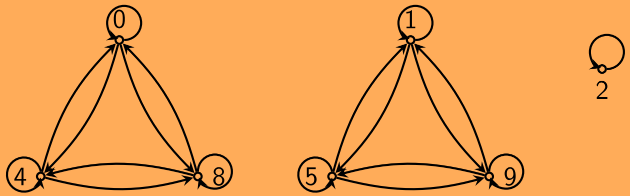
- 同姓关系，等于关系都是等价关系；而朋友关系，包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R,aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同，则关系 R 是等价关系.
- 在包含各种颜色的球的集合中建立关系 S,aSb 当且仅当 a 和 b 的颜色相同，则关系 S 是等价关系.

Example

在集合 $A=\{0,1,2,4,5,8,9\}$ 上定义一个以 4 为模的同余关系，即 $R=\{<x,y>|4|(x-y)\}$，$R=\{<0,0>,<0,4>,<0,8>,<4,4>,<4,0>,<4,8>,<8,8>,<8,0>,<8,4>,<1,1>,<1,5>,<1,9>,<5,5>,<5,1>,<5,9>,<9,9>,<9,1>,<9,5>,<2,2>\}$；
则 R 满足自反，对称，传递的性质，从而 R 是等价关系.

等价关系定义
Lijie Wang
定义
等价类和商集

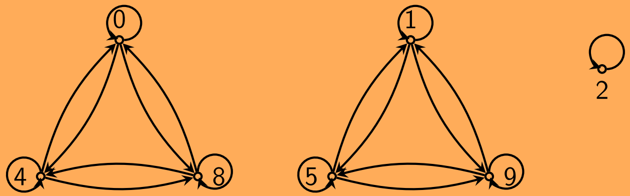
上例的关系图



- 集合 A 被分成三个子集:{0,4,8},{1,5,9},{2};

等价关系

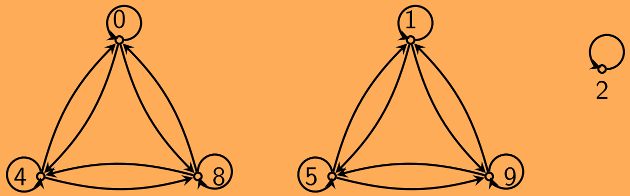
上例的关系图



- 集合 A 被分成三个子集:{0,4,8},{1,5,9},{2};
- 每个子集内的元素都具有与 R 相关的共同性质:0,4,8 除以 4 的余数都是 0, 而 1,5,9 除以 4 的余数都是 1, 同时 2 除以 4 的余数是 2;

等价关系

上例的关系图



- 集合 A 被分成三个子集:{0,4,8},{1,5,9},{2};
- 每个子集内的元素都具有与 R 相关的共同性质:0,4,8 除以 4 的余数都是 0, 而 1,5,9 除以 4 的余数都是 1, 同时 2 除以 4 的余数是 2;
- 此例子可以推广到整数集上的以 n 为模的同余关系.

以 n 为模的同余关系

Example

设 n 为正整数，定义整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的以 n 为模的同余关系 $R = \{< x, y > |n|(x-y)\}$, 证明 R 是一个等价关系.

以 n 为模的同余关系

Example

设 n 为正整数，定义整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的以 n 为模的同余关系 $R = \{< x, y > |n|(x - y)\}$, 证明 R 是一个等价关系.

Proof.

由 (1),(2) 和 (3) 知，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系。 $\square$

以 n 为模的同余关系

Example

设 n 为正整数，定义整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的以 n 为模的同余关系 $R = \{< x, y > | n | (x - y)\}$, 证明 R 是一个等价关系.

Proof.

1. 自反性: 对任意 $x \in \mathbf{Z}$, 有 $n | (x - x)$, 所以 $< x, x > \in R$，即 R 是自反的;

由 (1),(2) 和 (3) 知，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系。 □

以 n 为模的同余关系

Example

设 n 为正整数，定义整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的以 n 为模的同余关系 $R = \{< x, y > | n|(x-y)\}$，证明 R 是一个等价关系.

Proof.

1. 自反性：对任意 $x \in \mathbf{Z}$，有 $n|(x-x)$，所以 $< x, x > \in R$，即 R 是自反的;
2. 对称性：对任意 $x, y \in \mathbf{Z}$，若 $< x, y > \in R$，则有 $n|(x-y)$，因为 $(y-x) = -(x-y)$，所以 $n|(y-x)$，从而 $< y, x > \in R$，即 R 是对称的;

由 (1),(2) 和 (3) 知，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系。 $\square$

以 n 为模的同余关系

Example

设 n 为正整数，定义整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的以 n 为模的同余关系 $R=\{<x,y>|n|(x-y)\}$, 证明 R 是一个等价关系.

Proof.

1. 自反性: 对任意 $x\in\mathbf{Z}$, 有 $n|(x-x)$, 所以 $<x,x>\in R$，即 R 是自反的;
2. 对称性: 对任意 $x,y\in\mathbf{Z}$, 若 $<x,y>\in R$, 则有 $n|(x-y)$, 因为 $(y-x)=-(x-y)$, 所以 $n|(y-x)$, 从而 $<y,x>\in R$, 即 R 是对称的;
3. 传递性: 对任意 $x,y,z\in\mathbf{Z}$，若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in R$，则有 $n|(x-y)$ 且 $n|(y-z)$。因为 $(x-z)=(x-y)+(y-z)$, 所以 $n|(x-z)$, 从而 $<x,z>\in R$，即 R 是传递的.

由 (1),(2) 和 (3) 知，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系。 $\square$

以 n 为模的同余关系

注意

- 在 $\mathbf{Z}$ 上以 n 为模的同余关系 R 中, 一般记 xRy 为 $x \equiv y(mod\ n)$(即同余式) 或 $Res_n(x) = Res_n(y)$. 其中,$Res_n(x)$ 表示 x 除以 n 的余数;

以 n 为模的同余关系

注意

- 在 $\mathbf{Z}$ 上以 n 为模的同余关系 R 中，一般记 xRy 为 $x \equiv y(mod\ n)$(即同余式) 或 $Res_n(x) = Res_n(y)$. 其中,$Res_n(x)$ 表示 x 除以 n 的余数;
- 在此关系下，整数集 $\mathbf{Z}$ 被分成了 n 个子集:

  $\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}$;

  $\{\cdots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \cdots\}$;

  $\{\cdots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \cdots\}$;

  $\cdots$;

  $\{\cdots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \cdots\}$.

以 n 为模的同余关系

注意

- 在 $\mathbf{Z}$ 上以 n 为模的同余关系 R 中, 一般记 xRy 为 $x \equiv y(mod\ n)$(即同余式) 或 $Res_n(x) = Res_n(y)$. 其中,$Res_n(x)$ 表示 x 除以 n 的余数;
- 在此关系下, 整数集 $\mathbf{Z}$ 被分成了 n 个子集:

  $\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}$;

  $\{\cdots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \cdots\}$;

  $\{\cdots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \cdots\}$;

  $\cdots$;

  $\{\cdots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \cdots\}$.
- 这些子集称作由 R 产生的等价类.

等价类

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, < x, y > \in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类(equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的生成元(代表元或典型元)(generator).

等价类

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, <x, y> \in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类(equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的生成元(代表元或典型元)(generator).

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义的以 4 为模的同余关系中,

等价类

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, < x, y > \in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类(equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的生成元(代表元或典型元)(generator).

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义的以 4 为模的同余关系中,

- $[0]_R = [4]_R = [8]_R = \{0, 4, 8\}$;

等价类

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, <x, y> \in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类(equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的生成元(代表元或典型元)(generator).

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义的以 4 为模的同余关系中,

- $[0]_R = [4]_R = [8]_R = \{0, 4, 8\}$;
- $[1]_R = [5]_R = [9]_R = \{1, 5, 9\}$;

等价类

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意 $x \in A$，称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, <x, y> \in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类(equivalence class)，或叫作由 x 生成的一个 R 等价类，其中 x 称为 $[x]_R$ 的生成元(代表元或典型元)(generator).

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义的以 4 为模的同余关系中,

- $[0]_R = [4]_R = [8]_R = \{0, 4, 8\}$;
- $[1]_R = [5]_R = [9]_R = \{1, 5, 9\}$;
- $[2]_R = \{2\}$.

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \varnothing;$

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \varnothing;$
2. 对任意 $x, y \in A$, 如果 $y \in [x]_R$ ，则有 $[x]_R = [y]_R$, 否则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing;$

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \varnothing;$
2. 对任意 $x, y \in A$, 如果 $y \in [x]_R$，则有 $[x]_R = [y]_R$, 否则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing;$
3. $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A.$

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \varnothing;$
2. 对任意 $x, y \in A$, 如果 $y \in [x]_R$，则有 $[x]_R = [y]_R$, 否则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing;$
3. $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A.$

Proof.

等价类的性质

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \varnothing$;
2. 对任意 $x, y \in A$, 如果 $y \in [x]_R$，则有 $[x]_R = [y]_R$, 否则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;
3. $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R = A$.

Proof.

1. 对 $\forall x \in A$，因为 R 是等价关系，所以 R 是自反的，从而 $< x, x > \in R$，即 $x \in [x]_R$，故 $[x]_R \neq \varnothing$; $\square$

等价类的性质

Continue...

等价类的性质

Continue...

2. $\forall x, y \in A$,

a) 若 $y \in [x]_R$, 则 $< x, y > \in R$. 对任意 $z \in [x]_R$, 则有 $< x, z > \in R$. 因为 R 是等价关系, 所以 R 对具有对称性和传递性. 由 R 的对称性有 $< y, x > \in R$, 由 R 的传递性有 $< y, z > \in R$. 所以 $z \in [y]_R$, 即 $[x]_R \subseteq [y]_R$. 同理可证,$[y]_R \subseteq [x]_R$. 从而, 有 $[x]_R = [y]_R$;

b) 若 $y \notin [x]_R$, 设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, 则存在 $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 即 $z \in [x]_R$, $z \in [y]_R$, 因此有 $< x, z > \in R$,$< y, z > \in R$. 由 R 的对称性有 $< z, y > \in R$, 由 R 的传递性有 $< x, y > \in R$, 所以 $y \in [x]_R$, 与假设 $y \notin [x]_R$ 矛盾. 从而, 有 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;

等价类的性质

Continue...

2. $\forall x, y \in A$,
   a) 若 $y \in [x]_R$, 则 $<x, y> \in R$. 对任意 $z \in [x]_R$, 则有 $<x, z> \in R$. 因为 R 是等价关系, 所以 R 对具有对称性和传递性. 由 R 的对称性有 $<y, x> \in R$, 由 R 的传递性有 $<y, z> \in R$. 所以 $z \in [y]_R$, 即 $[x]_R \subseteq [y]_R$. 同理可证,$[y]_R \subseteq [x]_R$. 从而, 有 $[x]_R = [y]_R$;
   b) 若 $y \notin [x]_R$, 设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, 则存在 $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 即 $z \in [x]_R$, $z \in [y]_R$, 因此有 $<x, z> \in R$,$<y, z> \in R$. 由 R 的对称性有 $<z, y> \in R$, 由 R 的传递性有 $<x, y> \in R$, 所以 $y \in [x]_R$, 与假设 $y \notin [x]_R$ 矛盾. 从而, 有 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;
3. 对任意 $x \in A$,$[x]_R \subseteq A$, 所以 $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R \subseteq A$; 又对任意 $x \in A$, 因 R 是自反的, 所以 $<x, x> \in R$, 即 $x \in [x]_R$. 所以 $x \in \bigcup\limits_{x \in A} [x]_R$, 即 $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} [x]_R$. 故 $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R = A$. $\square$

商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，由 R 确定的一切等价类的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集(quotient set)，记为A/R，即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，由 R 确定的一切等价类的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集(quotient set)，记为A/R，即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，由 R 确定的一切等价类的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集(quotient set)，记为A/R，即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

- 在 A 上定义的以 4 为模的同余关系 R 中, $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\}$;

商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，由 R 确定的一切等价类的集合，称为集合 A 上关于 R 的商集(quotient set)，记为A/R，即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

- 在 A 上定义的以 4 为模的同余关系 R 中,
  $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\}$;
- 在 A 上定义的以 3 为模的同余关系 S 中,
  $A/S = \{[0]_S, [1]_S, [2]_S\} = \{\{0, 9\}, \{1, 4\}, \{2, 5, 8\}\}$.

计算商集 A/R 的通用过程

1. 任选 A 中一个元素 a，计算 $[a]_R$;

计算商集 A/R 的通用过程

1. 任选 A 中一个元素 a，计算 $[a]_R$;
2. 如果 $[a]_R \neq A$，任选一个元素 $b \in A - [a]_R$，计算 $[b]_R$.

计算商集 A/R 的通用过程

1. 任选 A 中一个元素 a，计算 $[a]_R$;
2. 如果 $[a]_R \neq A$，任选一个元素 $b \in A - [a]_R$，计算 $[b]_R$.
3. 如果 $[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素 $c \in A - [a]_R - [b]_R$，计算 $[c]_R$.

计算商集 A/R 的通用过程

1. 任选 A 中一个元素 a，计算 $[a]_R$;
2. 如果 $[a]_R \neq A$，任选一个元素 $b \in A - [a]_R$，计算 $[b]_R$.
3. 如果 $[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素 $c \in A - [a]_R - [b]_R$，计算 $[c]_R$.
4. 以此类推，直到 A 中所有元素都包含在计算出的等价类中.

THE END, THANKS!