哈密顿图

王丽杰

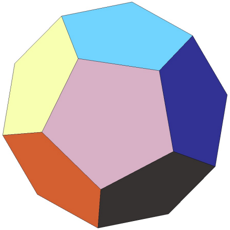
Email: ljwang@uestc.edu.cn

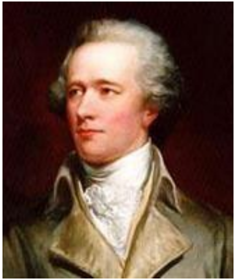
电子科技大学 计算机学院

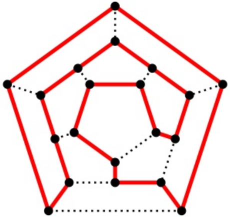
2016-

周游世界问题

1859 年英国数学家威廉·哈密顿爵士发明了一个小玩具，这个小玩具是一个木刻的正十二面体，每面系正五角形，共有 20 个顶点，每个顶点标有世界上一个重要城市。他提出一个问题：要求沿正十二面体的边寻找一条路通过 20 个城市，而每个城市只通过一次，最后返回原地。哈密顿将此问题称为周游世界问题。







哈密顿图的定义

Definition

设 G 是一个无向或有向图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每个结点一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条哈密顿通路 (回路)。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian graph)。

☞ 注意

哈密顿图的定义

Definition

设 G 是一个无向或有向图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每个结点一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条哈密顿通路 (回路)。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian graph)。

☞ 注意

- 规定：平凡图为哈密顿图；

哈密顿图的定义

Definition

设 G 是一个无向或有向图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每个结点一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条哈密顿通路 (回路)。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian graph)。

☞ 注意

- 规定：平凡图为哈密顿图；
- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中长度最短的通路；

哈密顿图的定义

Definition

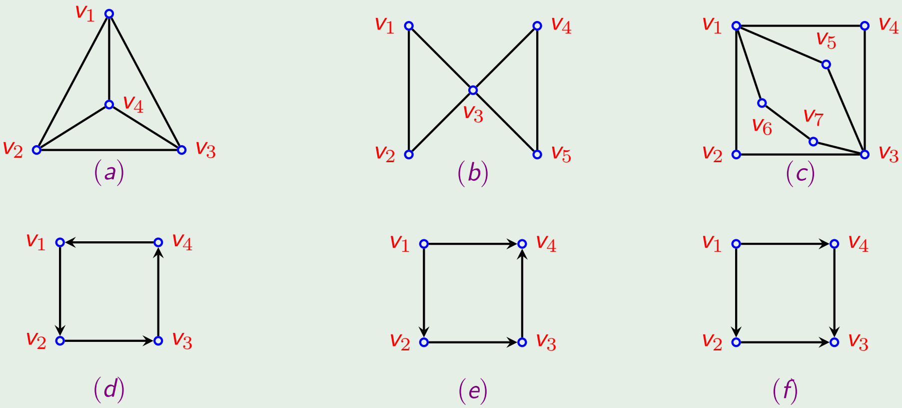
设 G 是一个无向或有向图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每个结点一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条哈密顿通路 (回路)。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian graph)。

☞ 注意

- 规定：平凡图为哈密顿图；
- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中长度最短的通路；
- 哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中长度最短的回路。

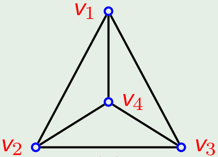
哈密顿图的定义

Example

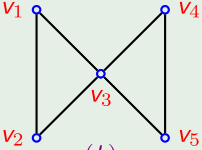


哈密顿图的定义

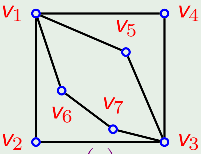
Example



(a)

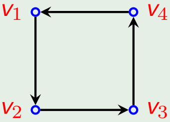


(b)

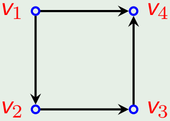


(c)

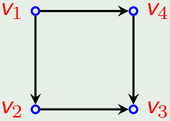
哈密顿图（哈密顿回路）



(d)



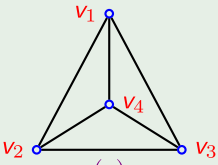
(e)



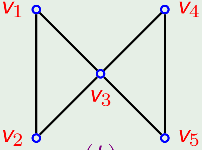
(f)

哈密顿图的定义

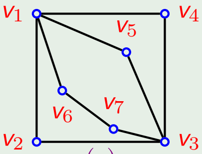
Example



(a)



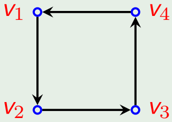
(b)



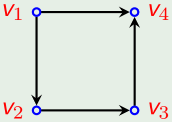
(c)

哈密顿图（哈密顿回路）

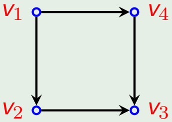
存在哈密顿通路



(d)



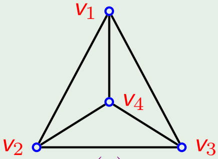
(e)



(f)

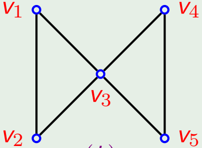
哈密顿图的定义

Example



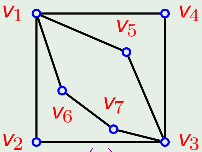
(a)

哈密顿图（哈密顿回路）



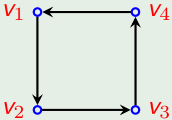
(b)

存在哈密顿通路

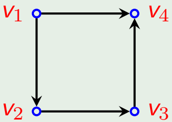


(c)

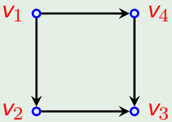
无哈密顿通路



(d)



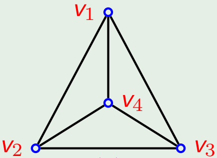
(e)



(f)

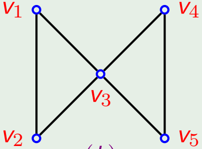
哈密顿图的定义

Example



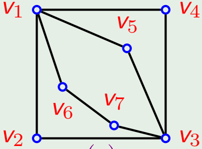
(a)

哈密顿图（哈密顿回路）



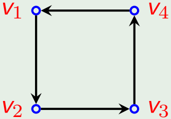
(b)

存在哈密顿通路



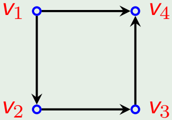
(c)

无哈密顿通路

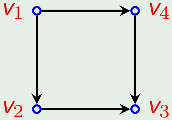


(d)

哈密顿图（哈密顿回路）



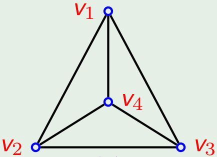
(e)



(f)

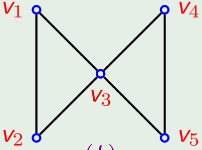
哈密顿图的定义

Example



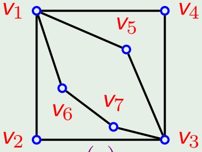
(a)

哈密顿图（哈密顿回路）



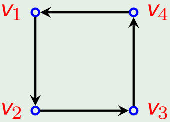
(b)

存在哈密顿通路



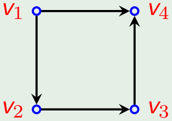
(c)

无哈密顿通路



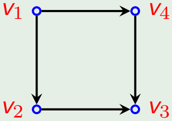
(d)

哈密顿图（哈密顿回路）



(e)

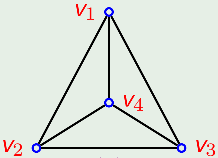
存在哈密顿通路



(f)

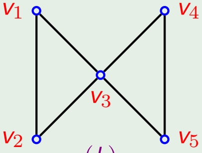
哈密顿图的定义

Example



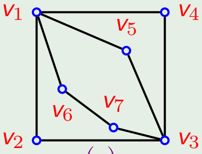
(a)

哈密顿图（哈密顿回路）



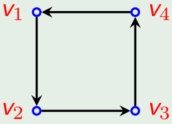
(b)

存在哈密顿通路



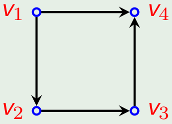
(c)

无哈密顿通路



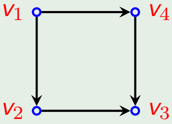
(d)

哈密顿图（哈密顿回路）



(e)

存在哈密顿通路



(f)

无哈密顿通路

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

Proof.

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路，V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：

□

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

Proof.

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路，V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：
（1）V_1 中结点在 C 中均相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，$C-V_1$ 仍是连通的，但已非回路，因此 $p(C-V_1)=1\leqslant|V_1|$。

□

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

Proof.

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路，V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：

（1）V_1 中结点在 C 中均相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，$C-V_1$ 仍是连通的，但已非回路，因此 $p(C-V_1)=1\leqslant|V_1|$。

（2）V_1 中结点在 C 上存在 $r(2\leqslant r\leqslant|V_1|)$ 个互不相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，将 C 分为互不相连的 r 段，即 $p(C-V_1)=r\leqslant|V_1|$。

一般情况下，V_1 中的结点在 C 中即有相邻的，又有不相邻的，因此总有 $p(C-V_1)\leqslant|V_1|$。

□

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G = < V, E >$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G - V_1) \leqslant |V_1|$，其中 $p(G - V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

Proof.

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路，V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：
（1）V_1 中结点在 C 中均相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，$C - V_1$ 仍是连通的，但已非回路，因此 $p(C - V_1) = 1 \leqslant |V_1|$。
（2）V_1 中结点在 C 上存在 $r(2 \leqslant r \leqslant |V_1|)$ 个互不相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，将 C 分为互不相连的 r 段，即 $p(C - V_1) = r \leqslant |V_1|$。
一般情况下，V_1 中的结点在 C 中即有相邻的，又有不相邻的，因此总有 $p(C - V_1) \leqslant |V_1|$。
又因 C 是 G 的生成子图，从而 $C - V_1$ 也是 $G - V_1$ 的生成子图，故有
$p(G - V_1) \leqslant p(C - V_1) \leqslant |V_1|$。 □

必要条件的推论及使用

Corollary

设无向图 $G =< V, E >$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G - V_1) \leqslant |V_1| + 1。$$

必要条件的推论及使用

Corollary

设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1。$$

必要条件的推论及使用

Corollary

设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1。$$

必要条件的推论及使用

Corollary

设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有
$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1。$$

- 此定理是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。

必要条件的推论及使用

Corollary

设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G-V_1)\leqslant|V_1|+1。$$

- 此定理是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。
- 此定理的主要应用是判断某些图不是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G-V_1)>|V_1|$，则 G 不是哈密顿图。

必要条件的推论及使用

Corollary

设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G-V_1) \leqslant |V_1|+1。$$

- 此定理是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。
- 此定理的主要应用是判断某些图不是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G-V_1) > |V_1|$，则 G 不是哈密顿图。
- 有割点的图一定不是哈密顿图。

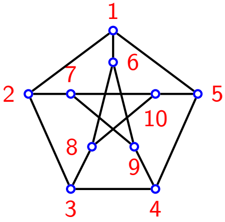
必要条件的推论及使用

Corollary

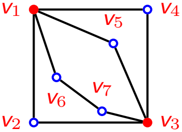
设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1。$$

- 此定理是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。
- 此定理的主要应用是判断某些图不是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G-V_1)>|V_1|$，则 G 不是哈密顿图。
- 有割点的图一定不是哈密顿图。

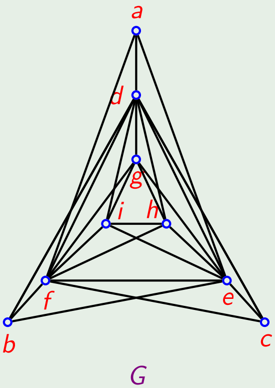


彼得森图



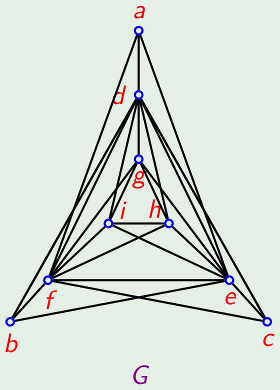
证明不存在哈密顿回路

Example



证明不存在哈密顿回路

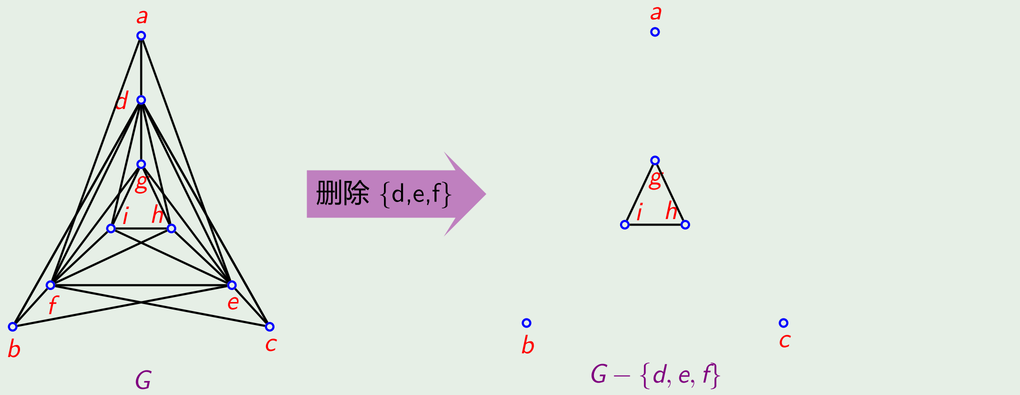
Example



删除 {d,e,f}

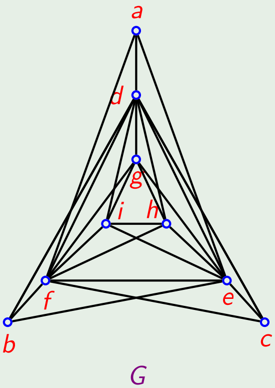
证明不存在哈密顿回路

Example

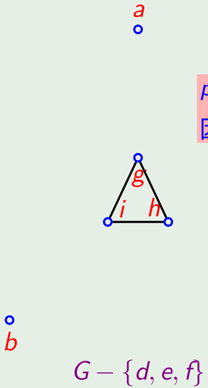


证明不存在哈密顿回路

Example



删除 {d,e,f}



$p(G - \{d, e, f\}) = 4 > 3$,

因而不会存在哈密顿回路。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n-1$，则 G 中存在哈密顿通路。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n-1$，则 G 中存在哈密顿通路。

Example

某地有 5 个风景点，若每个风景点均有 2 条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处？

解　将 5 个风景点看成图中的结点，两风景点间的道路看成是无向图的边，故每个结点的度数均为 2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于 4，正好为总结点数减 1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n-1$，则 G 中存在哈密顿通路。

Example

某地有 5 个风景点，若每个风景点均有 2 条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处？

解　将 5 个风景点看成图中的结点，两风景点间的道路看成是无向图的边，故每个结点的度数均为 2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于 4，正好为总结点数减 1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处。

Theorem

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u,v\in V$，均有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n$，则 G 中存在哈密顿回路。

哈密顿图的充分条件

Corollary

设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个结点的简单无向图，$n\geqslant 3$。如果对任意 $v\in V$，均有 $deg(v)\geqslant\frac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图。

☞ 注意

定理及其推论给出的是哈密顿图的充分条件，而不是必要条件。

哈密顿图的充分条件

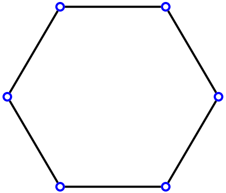
Corollary

设 $G = < V, E >$ 是具有 n 个结点的简单无向图，$n \geqslant 3$。如果对任意 $v \in V$，均有 $deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图。

☞ 注意

定理及其推论给出的是哈密顿图的充分条件，而不是必要条件。

六边形

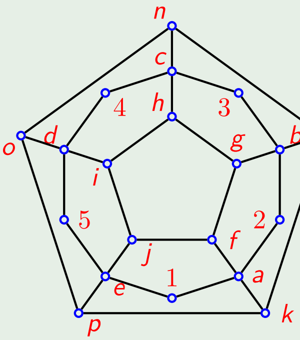


4<6，仍是哈密顿图

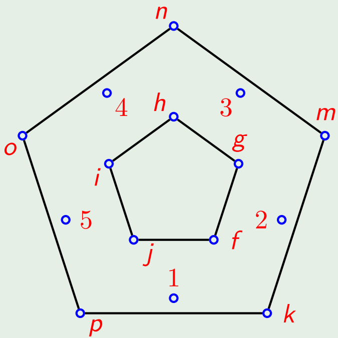
其它判定方法

Example

判断图 G 是否存在哈密顿回路。



G



方法一：$G-\{a,b,c,d,e\}$,7>5，不存在哈密顿回路

方法二

Example

方法二

Example

方法二

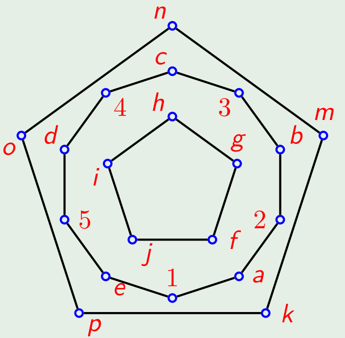
Example

若图 G 中存在哈密顿回路，则该回路组成的图中任何结点的度数均为 2。因而结点 1、2、3、4、5 所关联的边均在回路中，于是在结点 a、b、c、d、e 处均应将不与 1、2、3、4、5 关联的边删除，而要删除与结点 a、b、c、d、e 关联的其它边，得到右图，它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。

方法二

Example

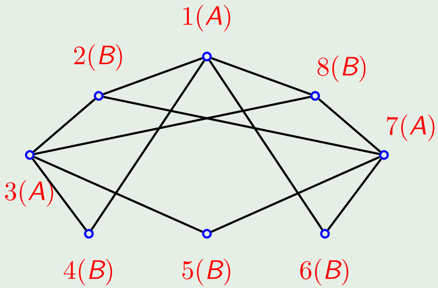
若图 G 中存在哈密顿回路，则该回路组成的图中任何结点的度数均为 2。因而结点 1、2、3、4、5 所关联的边均在回路中，于是在结点 a、b、c、d、e 处均应将不与 1、2、3、4、5 关联的边删除，而要删除与结点 a、b、c、d、e 关联的其它边，得到右图，它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。



G

其它判定方法

Example



任取一结点如 1 用 A 标记，所有与它邻接的结点用 B 标记。继续不断地用 A 标记所有邻接于 B 的结点，用 B 标记所有邻接于 A 的结点，直到所有结点都标记完毕。

如果图中有一条哈密顿通路，那么它必交替通过结点 A 和 B，故而标记 A 的结点与标记 B 的结点数目或者相同，或者相差 1 个。然而图中有 3 个结点标记为 A，5 个结点标记为 B，它们相差两个，所以该图不存在哈密顿通路。

哈密顿图的应用

Example

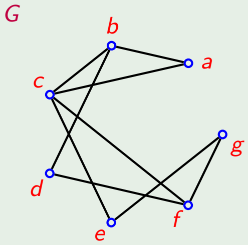
今有 7 个人 a,b,c,d,e,f,g，已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语，日语和俄语，g 会讲法语和德语。问能否将这 7 个人安排就坐圆桌旁，使得每个人都能与两边的人交谈？

哈密顿图的应用

Example

今有 7 个人 a,b,c,d,e,f,g，已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语，日语和俄语，g 会讲法语和德语。问能否将这 7 个人安排就坐圆桌旁，使得每个人都能与两边的人交谈？

解： 做无向图 $G=<V,E>$，$V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$E=\{(u,v)|u\neq v,$且u,v有共同语言$\}$。因而问题变成了图中是否存在哈密顿回路，这个回路就是他们的圆桌就坐顺序。

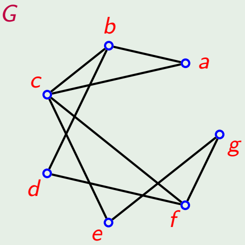


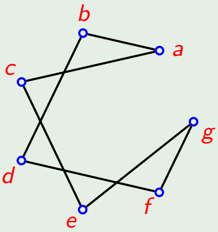
哈密顿图的应用

Example

今有 7 个人 a,b,c,d,e,f,g，已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语，日语和俄语，g 会讲法语和德语。问能否将这 7 个人安排就坐圆桌旁，使得每个人都能与两边的人交谈？

解： 做无向图 $G = < V, E >$，$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$E = \{(u, v) | u \neq v, \text{且 } u, v \text{有共同语言}\}$。因而问题变成了图中是否存在哈密顿回路，这个回路就是他们的圆桌就坐顺序。





$C = acegfdba$

THE END, THANKS!