前束范式

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

前束范式

在命题逻辑里，每一公式都有与之等值的范式，范式是一种统一的表达形式，当研究一个公式的特点 (如永真、永假) 时，范式起着重要作用。对谓词逻辑的公式来说，也有范式，其中前束范式与原公式是等值的，而其它范式与原公式只有较弱的关系。

Definition

称公式 G 是一个前束范式，如果 G 中的一切量词都位于该公式的最前端 (不含否定词) 且这些量词的辖域都延伸到公式的末端。其标准形式如下：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中 Q_i 为量词 $\forall$ 或 $\exists(i=1,\cdots\ n)$，M 称作公式 G 的母式 (基式)，M 中不再有量词。

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；

   $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x); \quad \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x).$ (量词转换律)
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；
   $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x); \quad \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x).$ (量词转换律)
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。
   $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y); \quad (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y);$ (改名规则)

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；

   $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; $\neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$. (量词转换律)
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。

   $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; $(\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$; (改名规则)

   $(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$; (量词分配律)

   $(\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$.

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“→”,“↔”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“¬”都内移到原子谓词公式的前端；

   $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x); \quad \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x).$ (量词转换律)
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。

   $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y); \quad (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y);$ (改名规则)

   $(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)

   $(\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

   $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y));$

   $(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y)).$

前束范式的求解步骤

1. 消去公式中的联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”(如果有的话)；
2. 反复运用量词转换律，德摩根律和双重否定律，直到将所有的“$\neg$”都内移到原子谓词公式的前端；

   $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x); \quad \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x).$ (量词转换律)
3. 使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端并保证其辖域直到公式的末端。

   $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y); \quad (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y);$ (改名规则)

   $(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)

   $(\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

   $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y));$

   $(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y)).$

   $(\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S; \quad (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)

   $(\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S; \quad (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$

前束范式的求解步骤

Example

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式。

解

前束范式的求解步骤

Example

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式。

解

1. 消去联结词“$\rightarrow$”,“$\leftrightarrow$”，得： $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$

前束范式的求解步骤

Example

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \to (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \to R(x)))$ 的前束范式。

解

1. 消去联结词 “$\to$”,“$\leftrightarrow$”，得： $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$
2. “$\neg$” 消除和内移，得：

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x)) \\ = \quad & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

前束范式的求解步骤

Example

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \to (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \to R(x)))$ 的前束范式。

解

1. 消去联结词 "$\to$","$\leftrightarrow$"，得： $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$
2. "$\neg$" 消除和内移，得：
$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$
3. 量词左移，得：
$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z) \end{aligned}$$

前束范式的求解步骤

Example

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \to (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \to R(x)))$ 的前束范式。

解

1. 消去联结词“$\to$”,“$\leftrightarrow$”，得： $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$
2. “$\neg$” 消除和内移，得：
$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$
3. 量词左移，得：
$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ = \; & (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z) \end{aligned}$$

即：$((\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z)$ 为原公式的前束范式，这里 $S(a,b,x,y,z) = P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)$ 是母式。

THE END, THANKS!