公式的等价关系

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

等价

Definition

如果公式 $G \leftrightarrow H$ 是有效公式，则公式 G,H 称为等价的，记为 $G = H$。

等价

Definition

如果公式 $G \leftrightarrow H$ 是有效公式，则公式 G,H 称为等价的，记为 $G = H$。

Definition

设 $G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是命题演算中的命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 G 中的命题变元，当用任意的谓词公式 $G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 分别代入 P_i 后，得到的新谓词公式 $G(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ 称为原公式的代入实例。

等价

Definition

如果公式 $G \leftrightarrow H$ 是有效公式，则公式 G,H 称为等价的，记为 $G = H$。

Definition

设 $G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是命题演算中的命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 G 中的命题变元，当用任意的谓词公式 $G_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 分别代入 P_i 后，得到的新谓词公式 $G(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ 称为原公式的代入实例。

Theorem

永真公式的任意一个代入实例必为有效公式。

等价

Definition

如果公式 $G \leftrightarrow H$ 是有效公式，则公式 G, H 称为等价的，记为 $G = H$。

Definition

设 $G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是命题演算中的命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 G 中的命题变元，当用任意的谓词公式 $G_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 分别代入 P_i 后，得到的新谓词公式 $G(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ 称为原公式的代入实例。

Theorem

永真公式的任意一个代入实例必为有效公式。

☞

命题演算中的基本等价公式 E_1—E_{24} 在谓词演算中仍然成立。

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; (改名规则)
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; *(改名规则)*
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; *(量词转换律/量词否定等价式)*
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$.

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y);$ *(改名规则)*

   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y).$

2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x);$ *(量词转换律/量词否定等价式)*

   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x).$

Example

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; (改名规则)
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; (量词转换律/量词否定等价式)
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$.

Example

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $\neg(\forall x)P(x)$:
  :

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; *(改名规则)*
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; *(量词转换律/量词否定等价式)*
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$.

Example

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $\neg(\forall x)P(x)$ ： 不是所有的同学今天来上课了
  ：

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$;　　(改名规则)
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$;　　(量词转换律/量词否定等价式)
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$.

Example

设 $P(x)$: x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $\neg(\forall x)P(x)$: 不是所有的同学今天来上课了
  $(\exists x)\neg P(x)$:

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}:(\exists x)G(x)=(\exists y)G(y);$ (改名规则)
   $E_{26}:(\forall x)G(x)=(\forall y)G(y).$
2. $E_{27}:\neg(\exists x)G(x)=(\forall x)\neg G(x);$ (量词转换律/量词否定等价式)
   $E_{28}:\neg(\forall x)G(x)=(\exists x)\neg G(x).$

Example

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $\neg(\forall x)P(x)$ ： 不是所有的同学今天来上课了
  $(\exists x)\neg P(x)$ ： 今天有同学没来上课

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y);$ (改名规则)
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y).$
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x);$ (量词转换律/量词否定等价式)
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x).$

Example

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $$\left.\begin{array}{lcl} \neg(\forall x)P(x) & : & \text{不是所有的同学今天来上课了} \\ (\exists x)\neg P(x) & : & \text{今天有同学没来上课} \end{array}\right\} \text{同义}$$

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

假设 $G(x), H(x)$ 是只含自由变元 x 的公式，S 是不含 x 的公式，则在全总个体域中，有

1. $E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$; (改名规则)
   $E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$.
2. $E_{27}: \neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$; (量词转换律/量词否定等价式)
   $E_{28}: \neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$.

Example

设 $P(x)$：x 今天来上课，个体域为某班全体同学的集合。则

- $\left.\begin{array}{lll} \neg(\forall x)P(x) & : & \text{不是所有的同学今天来上课了} \\ (\exists x)\neg P(x) & : & \text{今天有同学没来上课} \end{array}\right\}$ 同义
- 同样，$\neg(\exists x)P(x)$ 与 $(\forall x)\neg P(x)$ 意义也相同。

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)

   $E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S.$

   $E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S.$

   $E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)

   $E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S.$

   $E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S.$

   $E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$

4. $E_{33}: (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)

   $E_{34}: (\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)

   $E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S.$

   $E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S.$

   $E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$

4. $E_{33}: (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)

   $E_{34}: (\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

Example

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

⋮

⋮

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)

   $E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S.$

   $E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S.$

   $E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$

4. $E_{33}: (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)

   $E_{34}: (\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

Example

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

$(\forall x)(G(x) \wedge H(x))$ ：

：

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)
   $E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S.$
   $E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S.$
   $E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$
4. $E_{33}: (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)
   $E_{34}: (\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

Example

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

$(\forall x)(G(x) \wedge H(x))$ ： 大学所有学生即勤奋学习又喜欢体育活动

：

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}:(\forall x)(G(x)\vee S)=(\forall x)G(x)\vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)
   $E_{30}:(\forall x)(G(x)\wedge S)=(\forall x)G(x)\wedge S.$
   $E_{31}:(\exists x)(G(x)\vee S)=(\exists x)G(x)\vee S.$
   $E_{32}:(\exists x)(G(x)\wedge S)=(\exists x)G(x)\wedge S.$
4. $E_{33}:(\forall x)(G(x)\wedge H(x))=(\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x);$ (量词分配律)
   $E_{34}:(\exists x)(G(x)\vee H(x))=(\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x).$

Example

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

$(\forall x)(G(x)\wedge H(x))$: 大学所有学生即勤奋学习又喜欢体育活动

$(\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x)$:

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}:(\forall x)(G(x)\vee S)=(\forall x)G(x)\vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)
   $E_{30}:(\forall x)(G(x)\wedge S)=(\forall x)G(x)\wedge S.$
   $E_{31}:(\exists x)(G(x)\vee S)=(\exists x)G(x)\vee S.$
   $E_{32}:(\exists x)(G(x)\wedge S)=(\exists x)G(x)\wedge S.$
4. $E_{33}:(\forall x)(G(x)\wedge H(x))=(\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x);$ (量词分配律)
   $E_{34}:(\exists x)(G(x)\vee H(x))=(\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x).$

Example

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

$(\forall x)(G(x)\wedge H(x))$ ： 大学所有学生即勤奋学习又喜欢体育活动

$(\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x)$ ： 大学所有学生都勤奋学习且大学所有学生都喜欢体育活动

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

3. $E_{29}:(\forall x)(G(x)\vee S)=(\forall x)G(x)\vee S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)
   $E_{30}:(\forall x)(G(x)\wedge S)=(\forall x)G(x)\wedge S.$
   $E_{31}:(\exists x)(G(x)\vee S)=(\exists x)G(x)\vee S.$
   $E_{32}:(\exists x)(G(x)\wedge S)=(\exists x)G(x)\wedge S.$
4. $E_{33}:(\forall x)(G(x)\wedge H(x))=(\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x);$ (量词分配律)
   $E_{34}:(\exists x)(G(x)\vee H(x))=(\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x).$

Example

设 $G(x)$：x 勤奋学习，$H(x)$：x 喜欢体育活动，个体域是大学里的学生。

$$\left.\begin{array}{lcl} (\forall x)(G(x)\wedge H(x)) & : & \text{大学所有学生即勤奋学习又喜欢体育活动} \\ (\forall x)G(x)\wedge(\forall x)H(x) & : & \text{大学所有学生都勤奋学习且大学所有学生都喜欢体育活动} \end{array}\right\}\ \text{同义}$$

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

5. $E_{35}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$;
   $E_{36}: (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$.

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

5. $E_{35}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y));$

   $E_{36}: (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y)).$

对于多个量词的公式，设 $G(x, y)$ 是含有自由变元 x, y 的谓词公式，则有

6. $E_{37}: (\forall x)(\forall y)G(x, y) = (\forall y)(\forall x)G(x, y);$

   $E_{38}: (\exists x)(\exists y)G(x, y) = (\exists y)(\exists x)G(x, y).$

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

5. $E_{35}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$;
   $E_{36}: (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$.

对于多个量词的公式，设 $G(x, y)$ 是含有自由变元 x, y 的谓词公式，则有

6. $E_{37}: (\forall x)(\forall y)G(x, y) = (\forall y)(\forall x)G(x, y)$;
   $E_{38}: (\exists x)(\exists y)G(x, y) = (\exists y)(\exists x)G(x, y)$.

Example

利用谓词之间的等价关系证明：$\neg(\exists x)(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

谓词演算中的基本等价公式

Theorem

5. $E_{35}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$;
   $E_{36}: (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$.

对于多个量词的公式，设 $G(x, y)$ 是含有自由变元 x, y 的谓词公式，则有

6. $E_{37}: (\forall x)(\forall y)G(x, y) = (\forall y)(\forall x)G(x, y)$;
   $E_{38}: (\exists x)(\exists y)G(x, y) = (\exists y)(\exists x)G(x, y)$.

Example

利用谓词之间的等价关系证明：$\neg(\exists x)(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

证明:

$\neg(\exists x)(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)\neg(M(x) \wedge F(x)) = (\forall x)(\neg M(x) \vee \neg F(x)) = (\forall x)(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

THE END, THANKS!