

函数的运算

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系

$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A, z \in C, \exists y \in B, \text{使得 } y = f(x) \text{ 且 } z = g(y) \}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g: A \rightarrow C$.



函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系

$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A, z \in C, \exists y \in B, \text{使得 } y = f(x) \text{ 且 } z = g(y) \}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g: A \rightarrow C$.



- 函数 f 和 g 可以复合的前提条件是 $\text{ran} f \subseteq \text{dom} g$;

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系

$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A, z \in C, \exists y \in B, \text{使得 } y = f(x) \text{ 且 } z = g(y) \}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g: A \rightarrow C$.



- 函数 f 和 g 可以复合的前提条件是 $\text{ran}f \subseteq \text{dom}g$;
- $\text{dom}(f \circ g) = \text{dom}f, \text{ran}(f \circ g) \subseteq \text{rang}$;

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系

$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A, z \in C, \exists y \in B, \text{使得 } y = f(x) \text{ 且 } z = g(y) \}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g: A \rightarrow C$.



- 函数 f 和 g 可以复合的前提条件是 $\text{ran}f \subseteq \text{dom}g$;
- $\text{dom}(f \circ g) = \text{dom}f, \text{ran}(f \circ g) \subseteq \text{rang}$;
- 对任意 $x \in A$, 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$;

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系

$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A, z \in C, \exists y \in B, \text{使得 } y = f(x) \text{ 且 } z = g(y) \}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g: A \rightarrow C$.



- 函数 f 和 g 可以复合的前提条件是 $\text{ran} f \subseteq \text{dom} g$;
- $\text{dom}(f \circ g) = \text{dom} f, \text{ran}(f \circ g) \subseteq \text{ran} g$;
- 对任意 $x \in A$, 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$;
- $I_A \circ f = f \circ I_B = f$.

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 定义如下:

则,

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 定义如下:

- $f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, b \rangle \};$

则,

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 定义如下:

- $f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, b \rangle \};$
- $g = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 2 \rangle \}.$

则,

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 定义如下:

- $f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, b \rangle\};$
- $g = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 2 \rangle\}.$

则,

- $f \circ g = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\};$

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 定义如下:

- $f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, b \rangle \};$
- $g = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 2 \rangle \}.$

则,

- $f \circ g = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \};$
- $g \circ f = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, a \rangle \}.$

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ 定义如下:

- $f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, b \rangle\};$
- $g = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 2 \rangle\}.$

则,

- $f \circ g = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\};$
- $g \circ f = \{\langle a, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, a \rangle\}.$

☕ 函数的复合不满足交换律.

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f, g, h 都是实数集 \mathbf{R} 上的函数, 满足

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = (x + 1)^2, \quad h(x) = \frac{x}{2}.$$

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f, g, h 都是实数集 \mathbf{R} 上的函数, 满足

$$f(x) = 2x, g(x) = (x+1)^2, h(x) = \frac{x}{2}.$$

- 求 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2};$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2};$$

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f, g, h 都是实数集 \mathbf{R} 上的函数, 满足

$$f(x) = 2x, g(x) = (x+1)^2, h(x) = \frac{x}{2}.$$

- 求 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2};$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2};$$

- 求 $f \circ h$ 和 $h \circ f$.

$$f \circ h(x) = h(f(x)) = h(2x) = x, h \circ f(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = x.$$

函数的复合

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f, g, h 都是实数集 \mathbf{R} 上的函数, 满足

$$f(x) = 2x, g(x) = (x+1)^2, h(x) = \frac{x}{2}.$$

- 求 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2};$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2};$$

- 求 $f \circ h$ 和 $h \circ f$.

$$f \circ h(x) = h(f(x)) = h(2x) = x, h \circ f(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = x.$$

☞ 函数的复合满足结合律.

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

- 若 f, g 是满射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射;

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

- 若 f, g 是满射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射;
- 若 f, g 是单射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射;

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

- 若 f, g 是满射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射;
- 若 f, g 是单射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射;
- 若 f, g 是双射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的双射。 可由前面两条直接得到

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

- 若 f, g 是满射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射;
- 若 f, g 是单射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射;
- 若 f, g 是双射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的双射。 可由前面两条直接得到

Proof.

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

- 若 f, g 是满射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射;
- 若 f, g 是单射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射;
- 若 f, g 是双射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的双射。 可由前面两条直接得到

Proof.

- 对 $\forall c \in C$, 由 g 是满射, 所以 $\exists b \in B$, 有 $g(b) = c$. 又 f 是满射, 所以 $\exists a \in A$, 有 $f(a) = b$, 从而 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 即 $\exists a \in A$, 使得 $f \circ g(a) = c$, 所以 $f \circ g$ 是满射;

保守性

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数, 则

- 若 f, g 是满射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射;
- 若 f, g 是单射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射;
- 若 f, g 是双射, 则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的双射。 可由前面两条直接得到

Proof.

- 对 $\forall c \in C$, 由 g 是满射, 所以 $\exists b \in B$, 有 $g(b) = c$. 又 f 是满射, 所以 $\exists a \in A$, 有 $f(a) = b$, 从而 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 即 $\exists a \in A$, 使得 $f \circ g(a) = c$, 所以 $f \circ g$ 是满射;
- 对 $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. 由于 f 是单射, 所以 $f(a_1) \neq f(a_2)$. 令 $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, 所以 $g(b_1) \neq g(b_2)$, 即 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. 从而有 $f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$, 所以 $f \circ g$ 是单射; □

函数的逆

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A, y \in B, y = f(x) \}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

函数的逆

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A, y \in B, y = f(x) \}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

函数的逆

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A, y \in B, y = f(x) \}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

- 函数 $f_1(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ 时没有逆函数, 但当 $x \in \mathbf{R}^+$ 时有逆函数 \sqrt{x} ;

函数的逆

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A, y \in B, y = f(x) \}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

- 函数 $f_1(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ 时没有逆函数, 但当 $x \in \mathbf{R}^+$ 时有逆函数 \sqrt{x} ;
- 函数 $f_2(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$ 时有逆函数 $\frac{1}{2}x$;

函数的逆

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A, y \in B, y = f(x) \}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

- 函数 $f_1(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ 时没有逆函数, 但当 $x \in \mathbf{R}^+$ 时有逆函数 \sqrt{x} ;
- 函数 $f_2(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$ 时有逆函数 $\frac{1}{2}x$;

- 函数 f^{-1} 存在当且仅当 f 是双射, 此时 f^{-1} 也是双射.

函数的逆

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算

Definition

设 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A, y \in B, y = f(x) \}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

- 函数 $f_1(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ 时没有逆函数, 但当 $x \in \mathbf{R}^+$ 时有逆函数 \sqrt{x} ;
- 函数 $f_2(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$ 时有逆函数 $\frac{1}{2}x$;

- 函数 f^{-1} 存在当且仅当 f 是双射, 此时 f^{-1} 也是双射.
- $f \circ f^{-1} = I_A$; $f^{-1} \circ f = I_B$.

函数的运算

Lijie Wang

函数的复合运算

复合运算保守性

函数的逆运算



THE END, THANKS!