命题逻辑

公式的标准型-范式

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

基本术语

☞ 引入范式

真值表能够方便的给出命题公式的真值情况，但真值表的规模随命题变元的数量呈指数形式增长，因而我们考虑一种真值表的替代方法，这种方法是基于命题公式的一种标准形式。

Definition

基本术语

☞ 引入范式

真值表能够方便的给出命题公式的真值情况，但真值表的规模随命题变元的数量呈指数形式增长，因而我们考虑一种真值表的替代方法，这种方法是基于命题公式的一种标准形式。

Definition

- 命题变元或命题变元的否定称为**文字**。$P, \neg P, Q, \neg Q, \cdots$

基本术语

☞ 引入范式

真值表能够方便的给出命题公式的真值情况，但真值表的规模随命题变元的数量呈指数形式增长，因而我们考虑一种真值表的替代方法，这种方法是基于命题公式的一种标准形式。

Definition

- 命题变元或命题变元的否定称为**文字**。$P, \neg P, Q, \neg Q, \cdots$
- 有限个文字的析取称为**简单析取式**(或**子句**)。$P \vee Q \vee \neg R, \cdots \quad P, \neg P$

基本术语

☞ 引入范式

真值表能够方便的给出命题公式的真值情况，但真值表的规模随命题变元的数量呈指数形式增长，因而我们考虑一种真值表的替代方法，这种方法是基于命题公式的一种标准形式。

Definition

- 命题变元或命题变元的否定称为**文字**。$P, \neg P, Q, \neg Q, \cdots$
- 有限个文字的析取称为**简单析取式**(或**子句**)。$P \vee Q \vee \neg R, \cdots$ $P, \neg P$
- 有限个文字的合取称为**简单合取式**(或**短语**)。$\neg P \wedge Q \wedge R, \cdots$ $P, \neg P$

基本术语

☞ 引入范式

真值表能够方便的给出命题公式的真值情况，但真值表的规模随命题变元的数量呈指数形式增长，因而我们考虑一种真值表的替代方法，这种方法是基于命题公式的一种标准形式。

Definition

- 命题变元或命题变元的否定称为**文字**。$P, \neg P, Q, \neg Q, \cdots$
- 有限个文字的析取称为**简单析取式**(或**子句**)。$P \vee Q \vee \neg R, \cdots$ $P, \neg P$
- 有限个文字的合取称为**简单合取式**(或**短语**)。$\neg P \wedge Q \wedge R, \cdots$ $P, \neg P$
- P 与 $\neg P$ 称为**互补对**。

范式

Definition

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；
  如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；
  如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。
  如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$，又如 $P \vee \neg Q$，$P, \neg P$

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；
  如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$ ，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。
  如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ ，又如 $P \vee \neg Q$ ，$P, \neg P$

Example

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；
  如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。
  如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$，又如 $P \vee \neg Q$，$P, \neg P$

Example

1. $P, \neg P$ 是文字，短语，子句，析取范式，合取范式

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$，又如 $P \vee \neg Q$，$P, \neg P$

Example

1. $P, \neg P$ 是文字，短语，子句，析取范式，合取范式
2. $P \vee Q \vee \neg R$ 是子句，合取范式，析取范式;$(P \vee Q \vee \neg R)$ 是子句，合取范式。

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；
  如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。
  如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$，又如 $P \vee \neg Q$，$P, \neg P$

Example

1. $P, \neg P$ 是文字，短语，子句，析取范式，合取范式
2. $P \vee Q \vee \neg R$ 是子句，合取范式，析取范式;$(P \vee Q \vee \neg R)$ 是子句，合取范式。
3. $\neg P \wedge Q \wedge R$ 是短语，析取范式，合取范式;$(\neg P \wedge Q \wedge R)$ 是短语，析取范式。

范式

Definition

- 有限个简单合取式（短语）的析取式称为**析取范式**(disjunctive normal form)；
  如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ ，又如 $P \wedge \neg Q$，$P, \neg P$
- 有限个简单析取式（子句）的合取式称为**合取范式**(conjunctive normal form)。
  如 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$，又如 $P \vee \neg Q$，$P, \neg P$

Example

1. $P, \neg P$ 是文字，短语，子句，析取范式，合取范式
2. $P \vee Q \vee \neg R$ 是子句，合取范式，析取范式;$(P \vee Q \vee \neg R)$ 是子句，合取范式。
3. $\neg P \wedge Q \wedge R$ 是短语，析取范式，合取范式;$(\neg P \wedge Q \wedge R)$ 是短语，析取范式。
4. $P \vee (Q \vee \neg R)$ 即不是析取范式也不是合取范式，但转换为 $P \vee Q \vee \neg R$ 后，即是析取范式和合取范式。

范式存在定理

☞ 总结

1. 范式关注的是命题公式的当前书写形式；

范式存在定理

☞ 总结

1. 范式关注的是命题公式的当前书写形式；
2. 单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式；

范式存在定理

☞ 总结

1. 范式关注的是命题公式的当前书写形式；
2. 单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式；
3. 析取范式、合取范式仅含联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$，且否定联结词仅出现在命题变元之前。

范式存在定理

☞ 总结

1. 范式关注的是命题公式的当前书写形式；
2. 单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式；
3. 析取范式、合取范式仅含联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$，且否定联接词仅出现在命题变元之前。

Theorem (范式存在定理)

对于任意命题公式，都存在与其等价的析取范式和合取范式。

范式存在定理

Proof.

由于联结词之间可以通过命题公式的基本等价关系进行相互的转换，所以可通过逻辑等价公式求出等价于它的析取范式和合取范式，具体步骤如下：

对任意一个公式，经过以上步骤，必能化成与其等价的析取范式和合取范式。 □

范式存在定理

Proof.

由于联结词之间可以通过命题公式的基本等价关系进行相互的转换，所以可通过逻辑等价公式求出等价于它的析取范式和合取范式，具体步骤如下：

1. 将公式中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ 用联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 来取代：
   $E_{20}: G \rightarrow H = \neg G \vee H,$ (蕴涵式)
   $E_{22}: G \leftrightarrow H = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ (等价式)

对任意一个公式，经过以上步骤，必能化成与其等价的析取范式和合取范式。 □

范式存在定理

Proof.

由于联结词之间可以通过命题公式的基本等价关系进行相互的转换，所以可通过逻辑等价公式求出等价于它的析取范式和合取范式，具体步骤如下：

1. 将公式中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ 用联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 来取代：
   $E_{20}: G \rightarrow H = \neg G \vee H,$ (蕴涵式)
   $E_{22}: G \leftrightarrow H = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ (等价式)
2. 将否定联接词移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号：
   $E_{17}: \neg(\neg G) = G.$ (双重否定律)
   $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$ (德摩根律)
   $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H.$

对任意一个公式，经过以上步骤，必能化成与其等价的析取范式和合取范式。 □

范式存在定理

Proof.

由于联结词之间可以通过命题公式的基本等价关系进行相互的转换，所以可通过逻辑等价公式求出等价于它的析取范式和合取范式，具体步骤如下：

1. 将公式中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ 用联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 来取代：

   $E_{20}: G \rightarrow H = \neg G \vee H,$ (蕴涵式)

   $E_{22}: G \leftrightarrow H = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ (等价式)

2. 将否定联接词移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号：

   $E_{17}: \neg(\neg G) = G.$ (双重否定律)

   $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$ (德摩根律)

   $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H.$

3. 利用分配律，可将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取：

   $E_{11}: G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S);$ (分配律)

   $E_{12}: G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S).$

对任意一个公式，经过以上步骤，必能化成与其等价的析取范式和合取范式。 $\square$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

范式求解定理

Example

求公式 $(P \rightarrow \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$(P \rightarrow \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$\begin{aligned} & (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\ = \quad & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \end{aligned}$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \; & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \; & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P))
\end{aligned}
$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P)
\end{aligned}
$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \rightarrow \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \rightarrow \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \; & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \; & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \; & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\
= \; & ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \vee \neg Q \vee \neg R)
\end{aligned}
$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (1 \vee \neg Q \vee \neg R)
\end{aligned}
$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (1 \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge 1
\end{aligned}
$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \ & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\
= \ & ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (1 \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge 1 \\
= \ & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \qquad \text{—合取范式}
\end{aligned}
$$

范式求解定理

Example

求公式 $(P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式。

解

$$
\begin{aligned}
& (P \to \neg Q) \vee (P \leftrightarrow R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee P)) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P) \\
= \quad & ((\neg P \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (1 \vee \neg Q \vee \neg R) \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge 1 \\
= \quad & (\neg P \vee \neg Q \vee R) && \text{—合取范式} \\
= \quad & \neg P \vee \neg Q \vee R && \text{—析取范式}
\end{aligned}
$$

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：
   - $P \vee (Q \wedge R)$

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：
   - $P \vee (Q \wedge R)$
   - $(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：
   - $P \vee (Q \wedge R)$
   - $(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$

范式与真值

总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：
   - $P \vee (Q \wedge R)$
   - $(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

范式与真值

☞ 总结

1. 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。$((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R), \neg P \vee (\neg Q \wedge R))$
2. 命题公式的范式表达并不唯一，比如对公式 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 而言，对应的析取范式有很多：
   - $P \vee (Q \wedge R)$
   - $(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$
   - $P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
3. 一般而言，求解范式时，需要进行最后的化简步骤；

THE END, THANKS!