集合的划分
Lijie Wang
定义
等价划分
等价关系导出

集合的划分

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

集合的划分

☞

在等价关系中我们已经发现，同一个等价类中的元素具有相同的属性，因而可将集合中的元素分成不同的类别，对应于集合的划分。

Definition

给定一个非空集合 A，设有集合 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$。如果满足:

则集合 π 称作集合 A 的一个划分 (partition)，而 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 叫做这个划分的块 (block) 或类 (class)。

集合的划分

☞

在等价关系中我们已经发现，同一个等价类中的元素具有相同的属性，因而可将集合中的元素分成不同的类别，对应于集合的划分。

Definition

给定一个非空集合 A，设有集合 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$。如果满足:

- $S_i \subseteq A, S_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, m$;

则集合 π 称作集合 A 的一个划分 (partition)，而 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 叫做这个划分的块 (block) 或类 (class)。

集合的划分

☞

在等价关系中我们已经发现，同一个等价类中的元素具有相同的属性，因而可将集合中的元素分成不同的类别，对应于集合的划分。

Definition

给定一个非空集合 A，设有集合 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$。如果满足:

- $S_i \subseteq A, S_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, m$;
- $S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, m$;

则集合 π 称作集合 A 的一个划分 (partition)，而 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 叫做这个划分的块 (block) 或类 (class)。

集合的划分

☞

在等价关系中我们已经发现，同一个等价类中的元素具有相同的属性，因而可将集合中的元素分成不同的类别，对应于集合的划分。

Definition

给定一个非空集合 A，设有集合 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$。如果满足:

- $S_i \subseteq A, S_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, m$;
- $S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, m$;
- $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$.

则集合 π 称作集合 A 的一个划分 (partition)，而 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 叫做这个划分的块 (block) 或类 (class)。

等价关系-> 集合划分

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 对 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称为由 R 所导出的等价划分.

同一个集合有多种不同的划分，不同的等价关系导出不同的划分.

等价关系-> 集合划分

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 对 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称为由 R 所导出的等价划分.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

同一个集合有多种不同的划分, 不同的等价关系导出不同的划分.

等价关系-> 集合划分

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 对 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称为由 R 所导出的等价划分.

Example

设集合 $A=\{0,1,2,4,5,8,9\}$, 则

- A 上以 4 为模的同余关系 R 导出的划分为,
  $A/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2\}\}$;

同一个集合有多种不同的划分, 不同的等价关系导出不同的划分.

等价关系-> 集合划分

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 对 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称为由 R 所导出的等价划分.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

- A 上以 4 为模的同余关系 R 导出的划分为,
  $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\}$;
- A 上以 3 为模的同余关系 S 导出的划分为,
  $A/S = \{[0]_S, [1]_S, [2]_S\} = \{\{0, 9\}, \{1, 4\}, \{2, 5, 8\}\}$.

同一个集合有多种不同的划分, 不同的等价关系导出不同的划分.

集合划分-> 等价关系

Theorem

给定集合 A 的一个划分 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 则由该划分确定的关系 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \cdots \cup (S_m \times S_m)$ 是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 π 所导出的等价关系。

集合划分-> 等价关系

Theorem

给定集合 A 的一个划分 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 则由该划分确定的关系 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \cdots \cup (S_m \times S_m)$ 是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 π 所导出的等价关系。

Proof.

集合划分-> 等价关系

Theorem

给定集合 A 的一个划分 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 则由该划分确定的关系 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \cdots \cup (S_m \times S_m)$ 是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 π 所导出的等价关系。

Proof.

- 对 $\forall x \in A$, 必 $\exists i > 0$, 使得 $x \in S_i$, 所以 $< x, x > \in S_i \times S_i$, 即 $< x, x > \in R$, 因此 R 是自反的.

集合划分-> 等价关系

Theorem

给定集合 A 的一个划分 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 则由该划分确定的关系 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \cdots \cup (S_m \times S_m)$ 是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 π 所导出的等价关系。

Proof.

- 对 $\forall x \in A$, 必 $\exists i > 0$, 使得 $x \in S_i$, 所以 $< x, x > \in S_i \times S_i$, 即 $< x, x > \in R$, 因此 R 是自反的.
- 对 $\forall x, y \in A$, 如果 $< x, y > \in R$, 必 $\exists j > 0$, 使得 $< x, y > \in S_j \times S_j$, 从而 $< y, x > \in S_j \times S_j$, 即 $< y, x > \in R$, 因此 R 是对称的。

集合划分-> 等价关系

Theorem

给定集合 A 的一个划分 $\pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, 则由该划分确定的关系 $R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \cdots \cup (S_m \times S_m)$ 是 A 上的等价关系。我们称该关系 R 为由划分 π 所导出的等价关系。

Proof.

- 对 $\forall x \in A$, 必 $\exists i > 0$, 使得 $x \in S_i$, 所以 $< x, x > \in S_i \times S_i$, 即 $< x, x > \in R$, 因此 R 是自反的.
- 对 $\forall x, y \in A$, 如果 $< x, y > \in R$, 必 $\exists j > 0$, 使得 $< x, y > \in S_j \times S_j$, 从而 $< y, x > \in S_j \times S_j$, 即 $< y, x > \in R$, 因此 R 是对称的。
- 对 $\forall x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$,$< y, z > \in R$, 必 $\exists i, j > 0$, 使得 $< x, y > \in S_i \times S_i$, $< y, z > \in S_j \times S_j$, 即 $x, y \in S_i$ 且 $y, z \in S_j$, 从而 $y \in S_i \cap S_j$, 由集合划分定义, 必有 $S_i = S_j$, 因此 x 和 z 同属于集合 A 的一个划分块 S_i, 从而 $< x, z > \in R$, 所以 R 是传递的. $\square$

集合划分-> 等价关系

Example

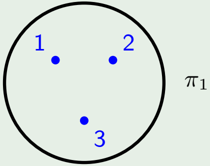
设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$,$\pi=\{\{a,b\},\{c,e,f\},\{d\}\}$ 是 A 的一个划分，则 π 对应的等价关系 R 为:

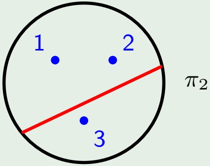
$$
\begin{aligned}
R &= (\{a,b\}\times\{a,b\})\cup(\{c,e,f\}\times\{c,e,f\})\cup(\{d\}\times\{d\})\\
&= \{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>\}\\
&\quad \cup\{<c,c>,<e,e>,<f,f>,<c,e>,<e,c>,<c,f>,<f,c>,\\
&\quad <e,f>,<f,e>\}\cup\{<d,d>\}\\
&= \{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>,<e,e>,<f,f>,\\
&\quad <c,e>,<e,c>,<c,f>,<f,c>,<e,f>,<f,e>,<d,d>\}
\end{aligned}
$$

集合划分-> 等价关系

Example

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 求 A 上所有的等价关系及其对应的商集.

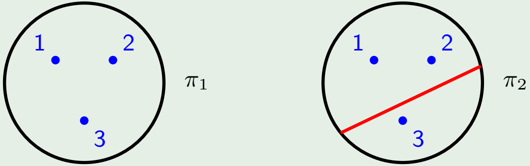




集合划分-> 等价关系

Example

设 $A=\{1,2,3\}$, 求 A 上所有的等价关系及其对应的商集.

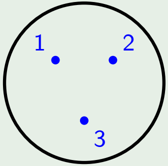


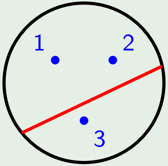
- $R_1=S_1\times S_1=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>\}=A\times A,\ A/R_1=\{\{1,2,3\}\}$;

集合划分-> 等价关系

Example

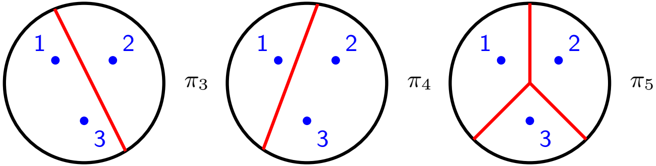
设 $A = \{1, 2, 3\}$, 求 A 上所有的等价关系及其对应的商集.





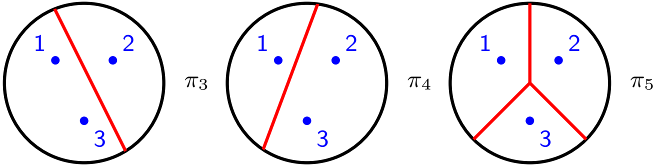
- $R_1 = S_1 \times S_1 = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,3>\} = A \times A$, $A/R_1 = \{\{1,2,3\}\}$;
- $R_2 = (\{1,2\} \times \{1,2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,3>\}$, $A/R_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$;

集合划分-> 等价关系



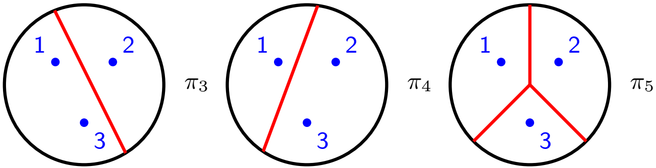
- $R_3 = (\{1,3\} \times \{1,3\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{< 1,1 >, < 1,3 >, < 2,2 >, < 3,1 >, < 3,3 >\}$, $A/R_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$;

集合划分-> 等价关系



- $R_3 = (\{1,3\} \times \{1,3\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$, $A/R_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$;
- $R_4 = (\{2,3\} \times \{2,3\}) \cup (\{1\} \times \{1\}) = \{<1,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$, $A/R_4 = \{\{1\},\{2,3\}\}$;

集合划分-> 等价关系



- $R_3 = (\{1,3\} \times \{1,3\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$, $A/R_3 = \{\{1,3\}, \{2\}\}$;
- $R_4 = (\{2,3\} \times \{2,3\}) \cup (\{1\} \times \{1\}) = \{<1,1>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$, $A/R_4 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$;
- $R_5 = (\{1\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\} = I_A$; $A/R_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

THE END, THANKS!