集合论基础

运算定律及其证明

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ (同一律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ *(幂等律)*
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ *(交换律)*
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ *(结合律)*
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ *(同一律)*
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ *(零律)*

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ (同一律)
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ (零律)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ (分配律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ (同一律)
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ (零律)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ (分配律)
7. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$ (吸收律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ (同一律)
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ (零律)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ (分配律)
7. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$ (吸收律)
8. $\overline{A} \cap A = \varnothing, \overline{A} \cup A = U.$ (矛盾律和排中律)

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ *(幂等律)*
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ *(交换律)*
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ *(结合律)*
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ *(同一律)*
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ *(零律)*
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ *(分配律)*
7. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$ *(吸收律)*
8. $\overline{A} \cap A = \varnothing, \overline{A} \cup A = U.$ *(矛盾律和排中律)*
9. $\overline{\overline{A}} = A.$ *(双重否定律)*

集合运算的基本等式

Theorem

设 U 为全集，A, B, C 为任意集合。

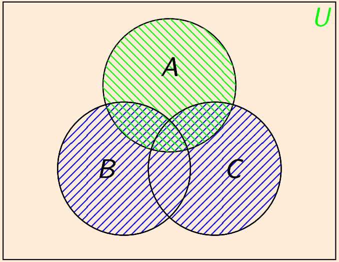
1. $A \cup A = A, A \cap A = A.$ (幂等律)
2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$ (交换律)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ (结合律)
4. $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A.$ (同一律)
5. $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$ (零律)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ (分配律)
7. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$ (吸收律)
8. $\overline{A} \cap A = \varnothing, \overline{A} \cup A = U.$ (矛盾律和排中律)
9. $\overline{\overline{A}} = A.$ (双重否定律)
10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$ (德摩根律)

基于文氏图的形象理解

基于文氏图的形象理解

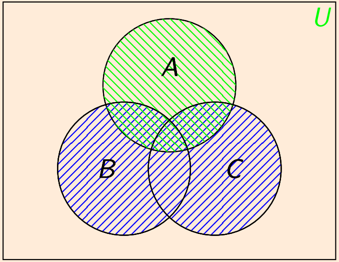
基于文氏图的形象理解

$A \cap (B \cup C)$



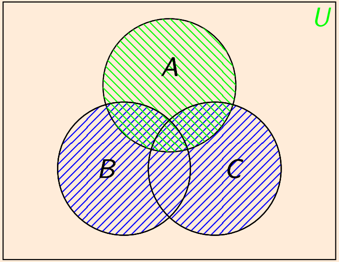
基于文氏图的形象理解

$A \cap (B \cup C)$

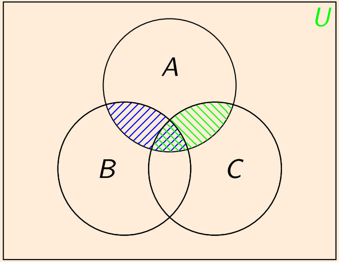


基于文氏图的形象理解

$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



集合相等的证明

☞ 回顾证明方法

如需证明集合 A 和 B 相等，通常的方法是证明两个集合间的相互包含关系，即
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ **并且** $B \subseteq A$
而证明集合的包含关系则使用如下方法： $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$

集合相等的证明

☞ 回顾证明方法

如需证明集合 A 和 B 相等，通常的方法是证明两个集合间的相互包含关系，即

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ **并且** $B \subseteq A$

而证明集合的包含关系则使用如下方法： $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$

集合相等的证明

☞ 回顾证明方法

如需证明集合 A 和 B 相等，通常的方法是证明两个集合间的相互包含关系，即
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ **并且** $B \subseteq A$
而证明集合的包含关系则使用如下方法：$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$

证明框架

证明：

1. **首先证明** $A \subseteq B$ **:** $\forall x \in A, \cdots, x \in B. \therefore A \subseteq B.$
2. **其次证明** $B \subseteq A$ **:** $\forall x \in B, \cdots, x \in A. \therefore B \subseteq A.$

由以上两点，可知 A=B。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B}$

   $\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B} \quad \Rightarrow x \notin A \cup B$

   $\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B} \quad \Rightarrow x \notin A \cup B \ \Rightarrow x \notin A$ 并且 $x \notin B$

   $\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B} \quad \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 并且 $x \notin B$

   $\Rightarrow x \in \overline{A}$ 并且 $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B} \quad \Rightarrow x \notin A \cup B \ \Rightarrow x \notin A$ 并且 $x \notin B$

   $\Rightarrow x \in \overline{A}$ 并且 $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $$\begin{aligned} \forall x \in \overline{A \cup B} \quad & \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B \\ & \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ 并且 } x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

   $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

   $\forall x\in\overline{A\cup B}\quad\Rightarrow x\notin A\cup B\ \Rightarrow x\notin A$ 并且 $x\notin B$

   $\Rightarrow x\in\overline{A}$ 并且 $x\in\overline{B}\ \Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$

   $\forall x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

   $\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\forall x \in \overline{A \cup B} \quad \Rightarrow x \notin A \cup B \ \Rightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B$$
$$\Rightarrow x \in \overline{A} \text{ 并且 } x \in \overline{B} \ \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$$\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B} \quad \Rightarrow x \in \overline{A} \text{ 并且 } x \in \overline{B}$$
$$\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

$$\forall x\in\overline{A\cup B}\quad\Rightarrow x\notin A\cup B\ \Rightarrow x\notin A\text{ 并且 }x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in\overline{A}\text{ 并且 }x\in\overline{B}\ \Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$$

2. 其次证明 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$

$$\forall x\in\overline{A}\cap\overline{B}\quad\Rightarrow x\in\overline{A}\text{ 并且 }x\in\overline{B}$$
$$\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$$

由以上两点，可知等式 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\forall x \in \overline{A \cup B} \quad \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 并且 $x \notin B$

   $\Rightarrow x \in \overline{A}$ 并且 $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. 其次证明 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

   $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B} \quad \Rightarrow x \in \overline{A}$ 并且 $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ 并且 $x \notin B$

   $\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 成立。

集合相等的证明

Example

证明德摩根律的等式之一：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

证明：

1. 首先证明 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

$$\forall x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A\text{ 并且 }x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in\overline{A}\text{ 并且 }x\in\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$$

2. 其次证明 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$

$$\forall x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A}\text{ 并且 }x\in\overline{B}\Rightarrow x\notin A\text{ 并且 }x\notin B$$
$$\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$$

由以上两点，可知等式 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 成立。

THE END, THANKS!