关系的运算性质

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；
2. $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；
2. $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

☞ 二元关系相等的证明方法

目标: 证明两个关系 R_1 和 R_2 相等

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；
2. $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

☞ 二元关系相等的证明方法

目标: 证明两个关系 R_1 和 R_2 相等

也即: 证明两个集合 R_1 和 R_2 相等

结合律与同一律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R、S 和 T 分别是从 A 到 B，B 到 C 和 C 到 D 的二元关系，I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；
2. $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

☞ 二元关系相等的证明方法

目标: 证明两个关系 R_1 和 R_2 相等

也即: 证明两个集合 R_1 和 R_2 相等

从而: 1) $\forall < x, y > \in R_1, \cdots, < x, y > \in R_2. \therefore R_1 \subseteq R_2$;

2) $\forall < x, y > \in R_2, \cdots, < x, y > \in R_1. \therefore R_2 \subseteq R_1$.

结合律的证明：$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Proof.

$\square$

结合律的证明：$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Proof.

任取 $< a, d > \in (R \circ S) \circ T$，

$< a, d > \in R \circ (S \circ T)$.

从而$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$.

同理可证：$R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$.

由以上可知，$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. $\square$

结合律的证明：$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Proof.

任取 $< a, d > \in (R \circ S) \circ T$， 则由复合运算定义知，存在 $c \in C$，使得 $< a, c > \in R \circ S$ 且 $< c, d > \in T$.

$< a, d > \in R \circ (S \circ T)$.

从而$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$.

同理可证：$R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$.

由以上可知，$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. □

结合律的证明：$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

Proof.

任取 $<a,d>\in(R\circ S)\circ T$， 则由复合运算定义知，存在 $c\in C$，使得 $<a,c>\in R\circ S$ 且 $<c,d>\in T$.

又因为 $<a,c>\in R\circ S$，所以存在 $b\in B$，使得 $<a,b>\in R$ 且 $<b,c>\in S$.

$<a,d>\in R\circ(S\circ T)$.

从而$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$.

同理可证：$R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$.

由以上可知，$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$. $\square$

结合律的证明：$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$

Proof.

任取 $<a,d>\in(R\circ S)\circ T$， 则由复合运算定义知，存在 $c\in C$，使得 $<a,c>\in R\circ S$ 且 $<c,d>\in T$.

又因为 $<a,c>\in R\circ S$，所以存在 $b\in B$，使得 $<a,b>\in R$ 且 $<b,c>\in S$.

因为 $<b,c>\in S, <c,d>\in T$，由复合运算定义知，有 $<b,d>\in S\circ T$；

$$<a,d>\in R\circ(S\circ T).$$

从而$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$.

同理可证：$R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$.

由以上可知，$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$. □

结合律的证明：$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Proof.

任取 $< a, d > \in (R \circ S) \circ T$， 则由复合运算定义知，存在 $c \in C$，使得 $< a, c > \in R \circ S$ 且 $< c, d > \in T$.

又因为 $< a, c > \in R \circ S$，所以存在 $b \in B$，使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$.

因为 $< b, c > \in S, < c, d > \in T$，由复合运算定义知，有 $< b, d > \in S \circ T$；

又由 $< a, b > \in R$ 且 $< b, d > \in S \circ T$ 有， $< a, d > \in R \circ (S \circ T)$.

从而$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$.

同理可证：$R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$.

由以上可知，$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. $\square$

同一律的证明：$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

Proof.

$\square$

同一律的证明：$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

Proof.

从而有$I_A \circ R \subseteq R$。

从而$R \subseteq I_A \circ R$。

由以上可知，$I_A \circ R = R$.

同理可证$R \circ I_B = R$.

于是 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 得证。 $\square$

同一律的证明：$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

Proof.

任取 $<a,b>\in I_A \circ R$, 其中 $a\in A, b\in B$，

$<a,b>\in R$， 从而有$I_A \circ R \subseteq R$。

反过来，任取 $<a,b>\in R$， $<a,b>\in I_A \circ R$. 从而$R \subseteq I_A \circ R$。

由以上可知，$I_A \circ R = R$.

同理可证$R \circ I_B = R$.

于是 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 得证。 □

同一律的证明：$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

Proof.

任取 $< a, b > \in I_A \circ R$, 其中 $a \in A, b \in B$， 由复合运算定义可知, 存在 $a \in A$，使得 $< a, a > \in I_A$ 且 $< a, b > \in R$， 从而有$I_A \circ R \subseteq R$。

反过来，任取 $< a, b > \in R$， $< a, b > \in I_A \circ R$. 从而$R \subseteq I_A \circ R$。

由以上可知，$I_A \circ R = R$.

同理可证$R \circ I_B = R$.

于是 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 得证。 □

同一律的证明：$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

Proof.

任取 $<a, b> \in I_A \circ R$, 其中 $a \in A, b \in B$， 由复合运算定义可知, 存在 $a \in A$，使得 $<a, a> \in I_A$ 且 $<a, b> \in R$， 从而有$I_A \circ R \subseteq R$。

反过来，任取 $<a, b> \in R$， 由 I_A 的定义知,$<a, a> \in I_A$, 即 $<a, b> \in I_A \circ R$. 从而$R \subseteq I_A \circ R$。

由以上可知，$I_A \circ R = R$.

同理可证$R \circ I_B = R$.

于是 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 得证。 □

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

证明②.

对任意 $< a, c > \in R \circ (S_1 \cap S_2)$，

$< a, c > \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

从而，$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$。 □

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

证明②.

对任意 $< a, c > \in R \circ (S_1 \cap S_2)$， 则由复合运算定义知，存在 $b \in B$，使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S_1 \cap S_2$。

$< a, c > \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

从而，$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$。 □

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

证明②.

对任意 $< a, c > \in R \circ (S_1 \cap S_2)$， 则由复合运算定义知，存在 $b \in B$，使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S_1 \cap S_2$。

根据交运算的定义，$< b, c > \in S_1$，且 $< b, c > \in S_2$.

$< a, c > \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

从而，$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$。 □

分配律

Theorem

设 A、B、C 和 D 是任意四个集合，R 是从 A 到 B 的关系,S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系,T 是从 C 到 D 的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

证明②.

对任意 $< a, c > \in R \circ (S_1 \cap S_2)$， 则由复合运算定义知，存在 $b \in B$，使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S_1 \cap S_2$。

根据交运算的定义，$< b, c > \in S_1$，且 $< b, c > \in S_2$.

于是有 $< a, c > \in R \circ S_1$ 并且 $< a, c > \in R \circ S_2$，即有 $< a, c > \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

从而，$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$。 □

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

$$(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}.$$

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a > \in (R \circ S)^{-1}$,

$< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R, S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a > \in (R \circ S)^{-1}$，则 $< a, c > \in R \circ S$,

$< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a > \in (R \circ S)^{-1}$，则 $< a, c > \in R \circ S$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$.

$< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. □

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a > \in (R \circ S)^{-1}$，则 $< a, c > \in R \circ S$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$. 根据逆运算的定义, 有 $< b, a > \in R^{-1}$ 且 $< c, b > \in S^{-1}$. 于是得到 $< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a > \in (R \circ S)^{-1}$，则 $< a, c > \in R \circ S$，由复合运算定义知，存在 $b \in B$，使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$。根据逆运算的定义，有 $< b, a > \in R^{-1}$ 且 $< c, b > \in S^{-1}$. 于是得到 $< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

反之，任取 $< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$，

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. □

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R, S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $<c, a> \in (R \circ S)^{-1}$，则 $<a, c> \in R \circ S$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $<a, b> \in R$ 且 $<b, c> \in S$. 根据逆运算的定义, 有 $<b, a> \in R^{-1}$ 且 $<c, b> \in S^{-1}$. 于是得到 $<c, a> \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

反之, 任取 $<c, a> \in S^{-1} \circ R^{-1}$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $<b, a> \in R^{-1}$ 且 $<c, b> \in S^{-1}$.

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $< c, a > \in (R \circ S)^{-1}$，则 $< a, c > \in R \circ S$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$. 根据逆运算的定义, 有 $< b, a > \in R^{-1}$ 且 $< c, b > \in S^{-1}$. 于是得到 $< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

反之, 任取 $< c, a > \in S^{-1} \circ R^{-1}$，由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $< b, a > \in R^{-1}$ 且 $< c, b > \in S^{-1}$. 又根据逆运算的定义, 有 $< a, b > \in R$ 且 $< b, c > \in S$.

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}.$$

由以上可知，$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. □

逆运算性质定律

Theorem

设 A, B, C 是三个集合，R,S 分别是从 A 到 B，从 B 到 C 的关系，则

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $<c,a>\in(R\circ S)^{-1}$，则 $<a,c>\in R\circ S$，由复合运算定义知, 存在 $b\in B$, 使得 $<a,b>\in R$ 且 $<b,c>\in S$. 根据逆运算的定义, 有 $<b,a>\in R^{-1}$ 且 $<c,b>\in S^{-1}$. 于是得到 $<c,a>\in S^{-1}\circ R^{-1}$. 即 $(R\circ S)^{-1}\subseteq S^{-1}\circ R^{-1}$.

反之, 任取 $<c,a>\in S^{-1}\circ R^{-1}$，由复合运算定义知, 存在 $b\in B$, 使得 $<b,a>\in R^{-1}$ 且 $<c,b>\in S^{-1}$. 又根据逆运算的定义, 有 $<a,b>\in R$ 且 $<b,c>\in S$. 从而有 $<a,c>\in R\circ S$, 即有 $<c,a>\in(R\circ S)^{-1}$, 故有 $S^{-1}\circ R^{-1}\subseteq(R\circ S)^{-1}$.

由以上可知，$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$. $\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; (分配性)
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; *(分配性)*
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;
2. $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$; *(可换性)*

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;　　*(分配性)*
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;
2. $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$;　　*(可换性)*
3. $(R^{-1})^{-1} = R$;

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; *(分配性)*
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;
2. $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$; *(可换性)*
3. $(R^{-1})^{-1} = R$;
4. $S \subseteq R \Leftrightarrow S^{-1} \subseteq R^{-1}$. *(单调性)*

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; (分配性)
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;
2. $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$; (可换性)
3. $(R^{-1})^{-1} = R$;
4. $S \subseteq R \Leftrightarrow S^{-1} \subseteq R^{-1}$. (单调性)

证明④ .

必要性: 任取 $< b, a > \in S^{-1}$, 有 $< a, b > \in S$. 因为 $S \subseteq R$, 所以 $< a, b > \in R$, 从而 $< b, a > \in R^{-1}$. 即有 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$;

$\square$

逆运算性质定律

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; (分配性)
   $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
   $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;
2. $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$; (可换性)
3. $(R^{-1})^{-1} = R$;
4. $S \subseteq R \Leftrightarrow S^{-1} \subseteq R^{-1}$. (单调性)

证明④ .

必要性: 任取 $< b, a > \in S^{-1}$, 有 $< a, b > \in S$. 因为 $S \subseteq R$, 所以 $< a, b > \in R$, 从而 $< b, a > \in R^{-1}$. 即有 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$;

充分性: 任取 $< a, b > \in S$, 有 $< b, a > \in S^{-1}$. 因为 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$, 所以 $< b, a > \in R^{-1}$, 从而 $< a, b > \in R$. 即有 $S \subseteq R$. □

THE END, THANKS!