

## Lời nói đầu

Mục đích chính của việc xử lý tín hiệu là mô tả các tín hiệu thực, để từ đó có thể tính toán, nén hoặc tìm hiểu về chúng, mà công cụ thực hiện là các phép biến đổi hoặc các mở rộng tuyến tính như là biến đổi Fourier, biến đổi Haar,... Ngày nay, các phép biến đổi đang tập trung vào các giải thuật nhanh như FFT cũng như các ứng dụng nén ảnh và nén video.

Cùng với sự phát triển của khoa học, ngày càng xuất hiện thêm nhiều công cụ trong xử lý tín hiệu. Một trong những công cụ mới nhất là wavelet mà đi song song với nó là các dây lọc và mã hoá băng con.

Hiện nay wavelet đang là một chủ đề nóng về cả hai lĩnh vực lý thuyết và ứng dụng. Wavelet là một cây cầu nối liền các lĩnh vực riêng biệt của toán học, thống kê, xử lý tín hiệu và các khoa học vật lý khác. Càng ngày người ta càng quan tâm nghiên cứu về wavelet nhiều hơn. Chẳng hạn: tháng 3-2000, một cơ sở dữ liệu các bài báo về khoa học vật lý và kỹ thuật bao gồm 10000 bài báo và sách viết về wavelet nhiều hơn 2000 bài so với tháng 3-1999.

Được PGS-TS Hồ Anh Tuý giới thiệu đề tài và hướng dẫn tận tình, em đã tìm hiểu và hoàn thành đồ án tốt nghiệp “*Nghiên cứu lý thuyết wavelet trong xử lý tín hiệu*” bao gồm bốn chương với nội dung như sau:

Chương 1: Giới thiệu tổng quan về các phương pháp biến đổi tín hiệu đã được nghiên cứu và ứng dụng như: biến đổi Fourier, biến đổi Cosine, biến đổi Haar, biến đổi Fourier thời gian ngắn.

Chương 2: Trình bày lý thuyết về wavelet và các khái niệm liên quan.

Chương 3: Nghiên cứu về phép biến đổi wavelet, ở đó chủ yếu là xét phép biến đổi wavelet liên tục, biến đổi wavelet rời rạc và biến đổi wavelet hai chiều.

Chương 4: Liệt kê một số ứng dụng của wavelet trong thực tế.

Với một nội dung hết sức mỏng mảnh, chưa được nghiên cứu nhiều ở Việt Nam nên trong quá trình thực hiện đồ án này em cũng gặp phải nhiều khó khăn và không thể tránh khỏi những sai sót, rất mong nhận được những ý kiến nhận xét và chỉ bảo của thầy cô và bạn bè.

Cuối cùng em xin chân thành cảm ơn PGS-TS HỒ ANH TUÝ đã hướng dẫn và giúp đỡ em để hoàn thành đồ án này.

Hà Nội, ngày 05 tháng 05 năm 2001

Sinh viên thực hiện

Nguyễn Thị Lụa

## Mục lục

Lời nói đầu .....	1
Mục lục .....	3
Chương I .....	5
Tổng quan về các phép biến đổi tín hiệu .....	5
1.1 - Các biến đổi trực giao rời rạc:.....	5
1.2 - Các tính chất của biến đổi trực giao rời rạc: .....	6
1.3 - Các biến đổi trực giao rời rạc cơ sở.....	7
1.3.1- Biến đổi Fourier rời rạc.....	8
(Discrete Fourier Transform) .....	8
1.3.2 - Biến đổi cosine rời rạc .....	9
(Discrete cosine transform-DCT): .....	9
1.3.3 - Biến đổi Haar: .....	11
1.3.4- Biến đổi Fourier thời gian ngắn .....	12
(Short Time Fourier Transform - STFT).....	12
1.3.5 - Biến đổi Wavelet rời rạc .....	13
(Descrete wavelet transform-DWT): .....	13
Chương II : .....	14
2.1- Các Wavelet Daubechies: .....	15
2.2- Phân tích đa phân giải (Multiresolution analysis) .....	16
2.2.1- Định nghĩa:.....	18
2.2.2- Xây dựng wavelet: .....	21
2.2.3- Một số ví dụ về phân tích đa phân giải:.....	24
2.3- Xây dựng wavelet sử dụng kỹ thuật Fourier:.....	29
2.3.1- Wavelet Meyer: .....	29
2.3.2- Các wavelet trực chuẩn của các không gian Spline.....	34
2.4- Chuỗi wavelet và các tính chất của nó: .....	38
2.4.1- định nghĩa và các tính chất .....	38
2.4.2-Một số wavelet: .....	42
2.4.3-Tính chất của các hàm cơ sở: .....	43
0Chương 3: .....	47
3.1- Các khái niệm: .....	47
3.1.1- Phép phân chia.....	47
3.1.2- Phép nội suy .....	50
3.1.3- Dãy lọc số (Filter Bank):.....	52
3.2- Biến đổi wavelet (wavelet transform):.....	54
3.2.1- Giới thiệu .....	54
3.2.2- Biến đổi Wavelet .....	55
3.2.2.1-. Biến đổi wavelet liên tục:.....	55
3.2.2.2- Biến đổi Wavelet rời rạc (DWT): .....	60
3.2.2.3- Biến đổi wavelet hai chiều .....	64
(Two-dimensional wavelet transform):.....	64
3.2.3- So sánh STFT và WT .....	66

3.2.4- Một số lớp Wavelet quan trọng: ....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.3 -Các Wavelet trực giao hai chiều: .....	68
3.4- Gói Wavelet: .....	70
Chương IV:.....	73
Một số ứng dụng của wavelet .....	73
4.1- Nén ảnh (Image Compression): .....	73
4.2- Nén video (video compression): .....	76
4.3- Nén thoại và nén audio .....	76
(speech and audio compression): .....	76
4.4- Wavelet Shrinkage .....	77
4.5-Phương pháp loại nhiễu ảnh bằng Wavelet .....	78
4.5.1-Giới thiệu : .....	78
4.5.2-Wavelet .....	79
4.5.2.1- Định vị theo không gian và tham số : .....	79
4.5.2.2- Tính chất đều: .....	79
4.5.2.3- Biến đổi wavelet hai chiều: .....	80
4.5.2.4- Thực hiện biến đổi wavelet rời rạc: .....	81
4.5.2.5- Đổi xứng và phản đổi xứng: .....	81
4.5.2.6- Sự bằng phẳng (smoothness): .....	82
4.5.3- Nhiễu và loại nhiễu wavelet.....	82
4.5.4- Dự đoán đều từ các hệ số wavelet. ....	83
4.5.5- Tương quan các hệ số giữa các lớp wavelet.....	83
Kết luận.....	85
Tài liệu tham khảo .....	86

## Chương I

### TỔNG QUAN VỀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍN HIỆU

Biến đổi tín hiệu là thay đổi cách biểu diễn một tín hiệu hoặc một hàm nhờ sử dụng một phép toán nào đó. Nhờ đó chúng ta có thể phân tích một vấn đề kỹ thuật phức tạp thành các khía cạnh đơn giản hơn để dễ giải quyết. Các phép biến đổi tín hiệu có vai trò khác nhau trong các ứng dụng xử lý tín hiệu, như : lọc, nhận dạng mẫu, dãn, định vị và nén tín hiệu. Hiệu suất của mỗi ứng dụng phụ thuộc vào nhiều yếu tố, và do đó mỗi ứng dụng cần một kỹ thuật biến đổi khác nhau để có được một kết quả tốt nhất. Trong các ứng dụng xử lý tín hiệu rời rạc, các biến đổi trực giao rời rạc rất phổ biến nhờ một số tính chất nổi bật. Trong chương này chúng ta sẽ xét một số biến đổi trực giao và các tính chất của chúng.

#### 1.1 - CÁC BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO RỒI RẠC:

Xét một tín hiệu  $x(n)$  có chiều dài  $N$  và có thể biểu diễn theo các hàm cơ sở độc lập tuyến tính  $a(i,n)$

$$x(n) = \sum_{i=0}^{N-1} X(i)a(i,n), \quad n = 0,1,\dots,N-1 \quad (1.1.1)$$

điều kiện trực giao cho ta:  $a_i^* a_j = \delta(i-j)$  (1.1.2)

trong đó  $a_i = [a(i,0), a(i,1), \dots, a(i,N)]^T$ ,

$a^*$  là chuyển vị liên hợp của  $a$

$\delta(i-j)$  là hàm Kronecker delta:  $\delta(i-j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  (1.1.3)

Các hệ số mở rộng  $X(i)$  có thể được rút ta bằng cách nhân cả hai vế của (1.1.1) với  $a^*(j,n)$ ,  $n = 0,1, \dots, N-1$  và sử dụng quan hệ trực giao (1.1.2)

$$X(i) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)a^*(i,n) \quad i = 0,1,\dots,N-1. \quad (1.1.4)$$

Tập hợp các phương trình ở trên có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$A\phi^* = I, \quad (1.1.5)$$

$$x = AX, \quad X = A^*x \quad (1.1.6)$$

ở đó: •  $x = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  là véc tơ số liệu,

$$\bullet \quad A = \begin{bmatrix} a(0,0) & a(0,1) & \dots & a(0,N-1) \\ a(1,0) & a(1,1) & \dots & a(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(N-1,0) & a(N-1,1) & \dots & a(N-1,N-1) \end{bmatrix} \text{ là ma trận biến}$$

đổi,

•  $X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$  là vecto của các hệ số mở rộng và biến đổi

•  $I$  là ma trận đồng nhất.

## 1.2 - CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO RỜI RẠC:

• *Bảo toàn năng lượng*

Đối với một biến đổi đơn nhất được định nghĩa bởi công thức (1.6),

$$\|X\|^2 = \|x\|^2 \quad (1.2.1)$$

được gọi là Định lý Parseval có thể được xem xét một cách dễ dàng từ:

$$\|X\|^2 = X^* X = x^* A A^* x = x^* x. \quad (1.2.2)$$

Phương trình (1.2.1) cho thấy một biến đổi đơn nhất bảo toàn năng lượng của một tín hiệu, hoặc nó là một sự quay vòng đơn giản của một sắp xếp cơ sở.

• *Tập trung năng lượng* (Energy Compaction)

Hầu hết các biến đổi đơn nhất tập trung năng lượng trong một số hệ số biến đổi. Vì các biến đổi đơn nhất bảo toàn năng lượng nên nhiều hệ số biến đổi sẽ có ít năng lượng. Tính chất này ảnh hưởng tới các ứng dụng nén và loại

bỏ nhiễu (denoising). Trong nén số liệu, người ta mong muốn biểu diễn số liệu bằng càng ít các hệ số càng tốt với một sự suy hao cho phép mà không ảnh hưởng nhiều đến chất lượng . Trong việc loại bỏ nhiễu, nếu số liệu được quan sát bị ngắt bởi nhiễu trắng Gaussian (Gaussian white noise) mà năng lượng của nó khuếch tán trên mọi vecto của bất kỳ biến đổi trực giao nào, người ta mong muốn là sẽ tìm được một cơ sở sao cho tính chất tập trung năng lượng tốt nhất đối với sự loại bỏ nhiễu tối thiểu.

- *Phản tương quan* (Decorrelation)

Một số biến đổi trực giao có xu hướng không tương quan số liệu đầu vào đã được tương quan với nhau. Điều đó có nghĩa là các thành phần không trực giao của ma trận hiệp biến ( covariance matrix) của các hệ số biến đổi.

$$R_x = E\{(X - \mu_x)(X - \mu_x)^T\}$$

có xu hướng trở nên nhỏ so với các thành phần chéo của nó.

- *Để xây dựng phép biến đổi ngược*

Vì phép biến đổi ngược là sự biến đổi liên hợp nên phép biến đổi ngược được thực hiện bằng việc biến đổi nó theo hướng ngược lại.

- *Tuyến tính*

Kết quả của một biến đổi trực giao rời rạc của một số lượng chất các tín hiệu giống như sự chồng chất của các biến đổi của các tín hiệu.

### **1.3 - CÁC BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO RỜI RẠC CƠ SỞ**

Vào năm 1880, Fourier đã giới thiệu một kỹ thuật phân tích sớm nhất và được nghiên cứu rộng rãi nhất, đó là phép phân tích Fourier. Phép phân tích Fourier phân tích tín hiệu thành tổng của các hàm sin phức của các tần số khác nhau. Mặc dù phép phân tích Fourier có nhiều ưu điểm, nhưng các kỹ thuật phân tích khác vẫn được đề xuất sau đó cả khi nó có một vài hạn chế. Trong phần này chúng ta sẽ xét một số phép biến đổi trực giao rời rạc , các tính chất và hạn chế cũng như các lĩnh vực ứng dụng của chúng trong xử lý tín hiệu.

### 1.3.1- BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

#### (DISCRETE FOURIER TRANSFORM)

Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT) biểu diễn tín hiệu như là một tổ hợp của các hàm là hàm sin phức. Xét tập hợp các hàm cơ sở tạo ra bằng việc dàn một hàm sin phức,

$$a(n,t) = \exp(int) = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Biến đổi Fourier liên tục của một tín hiệu  $x(t)$  được định nghĩa như sau:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)a(\omega, t)dt \quad (1.3.1.1)$$

và biến đổi ngược được định nghĩa như sau:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)a(-\omega, t)d\omega \quad (1.3.1.2)$$

Biến đổi Fourier biểu diễn các tần số của một tín hiệu. Điều quan trọng của biến đổi Fourier xuất phát từ thực tế là các hàm cơ sở  $\exp(i\omega t)$  là các hàm riêng của hệ thống bất biến tuyến tính theo thời gian. Nghĩa là, nếu chúng ta đưa một tín hiệu hàm mũ phức  $\exp(i\omega t)$  vào đầu vào của hệ thống bất biến tuyến tính theo thời gian thì ta sẽ nhận được ở đầu ra một bản ảnh của hàm sin phức mà tỷ lệ theo  $|H(\omega)|$  và trễ pha một lượng  $\arg|H(\omega)|$ . Do đó biến đổi Fourier phù hợp với việc phân tích các hệ thống bất biến tuyến tính theo thời gian.

Biến đổi Fourier rời rạc là phép biến đổi Fourier được lấy mẫu của một chuỗi hữu hạn được mở rộng bằng các điểm không ở ngoài khoảng  $[0, N-1]$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k}$$

ở đó  $X(e^{j\omega})$  là biến đổi Fourier của chuỗi mở rộng. DFT được định nghĩa nhờ các hàm cơ sở là các hàm sin phức có tần số thay đổi tuyến tính từ 0 đến  $\pi$ ,

$$a(n, k) = \sqrt{\frac{1}{N}} \exp\left(i \frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (1.3.1.3)$$

Nếu trong miền thời gian tín hiệu trễ một lượng là  $\mu$  thì sẽ gây ra một lượng trễ trong miền tần số:

$$x_\mu(n) = x(n \oplus \mu \pmod{N}) \quad (1.3.1.4)$$

$$\Rightarrow X_\mu(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k \oplus \mu \pmod{N}) \exp\left(i \frac{2\pi k n}{N}\right) \quad (1.3.1.5)$$

$$X_\mu(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(i \frac{2\pi(k-\mu)n}{N}\right) = \exp\left(i \frac{2\pi\mu n}{N}\right) X(n) \quad (1.3.1.6)$$

DFT còn thoả mãn định lý tích chập vòng, nghĩa là DFT của tích chập vòng của hai chuỗi thì bằng tích của các biến đổi Fourier rời rạc của chúng,

$$x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(n-k)_c x_1(k) \Rightarrow Ax_2 = (Ah)(Ax_1) \quad (1.3.1.7)$$

trong đó : A là ma trận DFT ,

$$h(n-k)_c = h((n-k)\text{mod}N)$$

Tính chất tích chập vòng của DFT được sử dụng trong tính toán tích chập tuyến tính.

Hai ứng dụng chính của DFT trong xử lý tín hiệu là dự đoán phổ và lọc được điều chỉnh bằng giải thuật nhanh cho DFT gọi là biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform: FFT). FFT tìm thừa số ma trận DFT trong một tích các ma trận rời rạc mà cần  $O(N \log N)$  phép tính cho số liệu N điểm. Hạn chế của DFT là nó cần lưu trữ lại và tính toán các giá trị phức.

DFT hai chiều là một biến đổi có thể tách rời được, do đó có thể thực hiện biến đổi này như là hai phép biến đổi một chiều theo hàng và theo cột một cách liên tục.

$$X(k, l) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N x(n, m) a(n, k) a^*(m, l) \quad (1.3.1.8)$$

và có thể biểu diễn ma trận dưới dạng ký hiệu như sau:

$$X = A_N X A_N^* \quad (1.3.1.9)$$

### 1.3.2 - BIẾN ĐỔI COSINE RỒI RẠC

**(DISCRETE COSINE TRANSFORM-DCT):**

Biến đổi cosine rời rạc được định nghĩa bởi các hàm cơ sở :

$$a(n, k) = c(k) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left[ (n + 0.5) \frac{k\pi}{N} \right] \quad (1.3.2.1)$$

ở đó:

$$c(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0 \\ 1, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Một số tính chất quan trọng của DCT:

- Cơ sở DCT là ảnh độc lập như có thể thấy từ phương trình (1.3.2.1).
- Các vectơ cơ sở của ma trận DCT là các vectơ riêng của các ma trận đối xứng có dạng sau:

$$Q = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & & \cdots & 0 & -\alpha & (1-\alpha) \end{bmatrix} \quad (1.3.2.2)$$

$Q$  tiến dần đến  $R_x^{-1}$  khi  $\rho$  tiến dần đến 1, trong đó  $R_x$  là ma trận tự tương quan của quá trình và:

$$R_x^{-1} = \frac{1+\rho^2}{\sigma^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} (1-\rho\beta) & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & 1 & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\beta & 1 & -\beta \\ 0 & & \cdots & 0 & -\beta & (1-\rho\beta) \end{bmatrix} \quad (1.3.2.3)$$

với  $\beta = \rho/(1+\rho^2)$ .

- DCT hai chiều có thể tách riêng rẽ do đó có thể thực hiện như sau:

$$X(k, l) = \frac{2}{N} c(k) c(l) \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N x(n, m) \cos \left[ (m + 0.5) \frac{k\pi}{N} \right] \cos \left[ (n + 0.5) \frac{l\pi}{N} \right] \quad (1.3.2.4)$$

$X(0,0)$  được coi như hệ số một chiều và phần còn lại của các hệ số được coi là các hệ số xoay chiều.

- Việc tính toán DCT có thể được thực hiện nhờ giải thuật nhanh, như FFT và cân O(NlogN) phép tính.

### 1.3.3 - BIẾN ĐỔI HAAR:

Biến đổi Haar được thực hiện nhờ vào việc lấy mẫu các hàm Haar. Các hàm Haar được định nghĩa trong một khoảng liên tục  $x \in [0,1]$ ,

$$h_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in [0,1] \quad (1.3.3.1)$$

$$h_{p,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-1/2}{2^p} \\ -2^{p/2}, & \frac{q-1/2}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0, & \text{với } x \notin [0,1] \end{cases} \quad (1.3.3.2)$$

trong đó:  $N = 2^n, 0 \leq p \leq n-1$

$2^p$  khi  $q = 0, 1$  khi  $p = 0$  và  $1 \leq q \leq p \neq 0$ .

Mã trận Haar nhận được nhờ việc lấy mẫu  $h_{p,q}(x)$  ở  $x = m/N$ ,  $m = 0, \dots,$

$N-1$ . Ví dụ ma trận Haar cấp 8 là:

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} h_{0,0}(0) & h_{0,0}(1/8) & h_{0,0}(2/8) & \cdots & h_{0,0}(7/8) \\ h_{0,1}(0) & h_{0,1}(1/8) & h_{0,1}(2/8) & \cdots & h_{0,1}(7/8) \\ h_{1,1}(0) & h_{1,1}(1/8) & h_{1,1}(2/8) & \cdots & h_{1,1}(7/8) \\ h_{1,2}(0) & h_{1,2}(1/8) & h_{1,2}(2/8) & \cdots & h_{1,2}(7/8) \\ h_{2,1}(0) & h_{2,1}(1/8) & h_{2,1}(2/8) & \cdots & h_{2,1}(7/8) \\ h_{2,2}(0) & h_{2,2}(1/8) & h_{2,2}(2/8) & \cdots & h_{2,2}(7/8) \\ h_{2,3}(0) & h_{2,3}(1/8) & h_{2,3}(2/8) & \cdots & h_{2,3}(7/8) \\ h_{2,4}(0) & h_{2,4}(1/8) & h_{2,4}(2/8) & \cdots & h_{2,4}(7/8) \end{bmatrix} = \quad (1.3.3.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (1.3.3.4)$$

Một số tính chất của biến đổi Haar:

- Biến đổi Haar là thực và trực giao
- Biến đổi Haar nhanh , được thực hiện bằng O(N) phép tính
- Các vecto cơ sở của biến đổi Haar được sắp xếp liên tục
- Các hàm Haar thay đổi theo cả tỷ lệ và vị trí, trong khi các hàm lượng giác chỉ thay đổi theo tần số.
- Biến đổi Haar tập trung năng lượng ảnh kém.

### 1.3.4- BIẾN ĐỔI FOURIER THỜI GIAN NGẮN

#### (SHORT TIME FOURIER TRANSFORM - STFT)

##### 1.3.4.1- Định nghĩa:

Biến đổi Fourier thời gian ngắn là sự phân chia một chuỗi thời gian thành các khối chồng nhau (overlapping blocks) có chiều dài bằng nhau và áp dụng biến đổi Fourier nhanh (FFT) cho mỗi khối một cách tuân tự.

Đầu tiên tín hiệu được nhân với một hàm cửa sổ  $\omega(t-\tau)$  và sau đó thực hiện biến đổi Fourier, kết quả sẽ cho một biến đổi hai chiều (two-indexed) STFT( $\omega, \tau$ ):

$$STFT(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t-\tau) f(t) e^{j\omega t} dt$$

##### 1.3.4.2-Các tính chất:

Trong biến đổi Fourier thời gian ngắn (STFT) các hàm sử dụng trong mở rộng thu được bằng cách làm trễ và điều chỉnh hàm cửa sổ cơ sở  $\omega(t)$

$$g_{\omega, \tau}(t) = e^{j\omega t} \omega(t-\tau) \quad (1.3.4.1)$$

từ đó dẫn đến một dạng mở rộng :

$$STFT(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \omega^*(t-\tau) f(t) dt = \langle g_{\omega, \tau}(t), f(t) \rangle$$

Hàm  $f(t)$  có thể khôi phục lại được theo công thức sau:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} STFT(\omega, \tau) g_{\omega, \tau}(t) d\omega d\tau \quad (1.3.4.2)$$

STFT không có tính chất bảo toàn năng lượng.

Để thực hiện phương pháp này một cách tốt nhất thì yêu cầu phải chọn khoảng thời gian của các đoạn để phân chia sao cho tín hiệu ở mỗi khoảng thời gian đó có thể coi là tĩnh. Vì STFT chỉ xử lý số liệu tĩnh trên mỗi đoạn nên nó chỉ tính một cặp giá trị biên độ và pha.

STFT là một phương pháp phổ biến và tính toán hiệu quả. Nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là khi tín hiệu có một dải động lớn thì cụm tần số thấp. Trong trường hợp đó hướng tạp âm tần số cao có thể che cấu trúc tín hiệu tần số cao.

### 1.3.5 - BIẾN ĐỔI WAVELET RỜI RẠC

#### (DESCRETE WAVELET TRANSFORM-DWT):

Trên đây là một số phương pháp biến đổi tín hiệu sử dụng nhiều trong xử lý tín hiệu. Mỗi phương pháp đều có những ưu điểm và hạn chế riêng của nó. Hiện nay người ta đang nghiên cứu và phát triển một phương pháp biến đổi mới mà có thể khắc phục được các nhược điểm của những phương pháp trên. Đó là phép biến đổi Wavelet mà ở đây ta quan tâm nhiều đến biến đổi Wavelet rời rạc (Discrete Wavelet Transform). Biến đổi wavelet rời rạc bắt đầu với một wavelet mẹ là một tín thời gian chu kỳ ngắn và có trung bình bằng không,  $\psi(t)$ , kết hợp với chuỗi thời gian cần xét  $f(t)$  để lọc ra chuỗi thời gian. Wavelet mẹ được dán ra theo thời gian ở các hệ số dán cố định tạo thành các wavelet con. Trong mỗi tỷ lệ đều có chứa  $f(t)$ . Do vậy wavelet mẹ và các bản ảnh trễ của nó tạo thành một dãy các bộ lọc chồng nhau mà mỗi đoạn của dãy có cùng hệ số phẩm chất ( $Q_w = \text{độ rộng băng tần} / \text{tần số trung tâm}$ ). Có nhiều khái niệm liên quan bởi vậy chúng ta sẽ nghiên cứu phép biến đổi này trong một chương riêng.

## Chương II :

# LÝ THUYẾT WAVELET

Lần đầu tiên wavelet đã được Haar tìm ra, nhưng cấu trúc chung của các wavelet để hình thành cơ sở cho các hàm trung bình bình phương đã được phát minh trừ trước đó từ lâu với các thuật toán hiệu quả để tính toán khai triển. Cũng thời gian đó, ứng dụng của kỹ thuật này trong xử lý tín hiệu được phát triển.

Bên cạnh vấn đề cơ bản là khai triển hàm tuyến tính, wavelet cho sự đa phân giải về thời gian và tần số rất tốt. Tính năng này rất quan trọng đối với việc phân tích các tín hiệu không tĩnh. Trong khi các hàm Fourier cơ bản được cho ở dạng khép kín thì nhiều wavelet có thể thu được chỉ qua một thủ tục tính toán. Việc sử dụng một thủ tục tính toán để khai triển tín hiệu trên dữ liệu thật thì tốt hơn là biểu thức dạng khép kín.

Trong xử lý tín hiệu người ta phát hiện ra cách thức giải tích Fourier địa phương trên cơ sở hàm nguyên đơn, sự dịch chuyển và tỷ lệ của nó. Sự điều chế bởi hàm mũ phức trong biến đổi Fourier được thay thế bởi sự tỷ lệ và thay thế tần số. Tính đơn giản của giản đồ wavelet đã và đang xuất hiện, các nhà nghiên cứu khoa học đang nghiên cứu wavelet như là một phương pháp để thay thế cho Fourier. Sự chính thức hoá một vài cấu trúc của Matlat và Meyer đã tạo ra cơ chế khai triển wavelet gọi là phân tích đa phân giải và thành lập liên kết với các phương pháp đã sử dụng trong các lĩnh vực khác. Cũng vậy cấu trúc wavelet của Daubechies cũng kết nối chặt chẽ với các phương pháp bank lọc được sử dụng trong xử lý số tín hiệu.

Wavelet là các hàm cơ sở  $\omega_{jk}(t)$  trong miền thời gian liên tục. Một cơ sở là một tập hợp các hàm độc lập tuyến tính mà có thể dùng để tạo ra các hàm  $f(t)$

$$f(t) = \text{tổ hợp của các hàm cơ sở} = \sum_{j,k} b_{jk} \omega_{jk}(t). \quad (2.1)$$

*Đặc tính đặc biệt* của cơ sở wavelet là tất cả các hàm  $\omega_{jk}(t)$  đều được xây dựng từ một hàm wavelet mẹ  $\omega(t)$ . Wavelet này là một sóng (một xung) nhỏ. Thông thường nó bắt đầu ở thời điểm  $t = 0$  và kết thúc ở thời điểm  $t = N$ .

Wavelet đã được trễ đi  $\omega_{0k}$  bắt đầu ở  $t = k$  và kết thúc ở  $t = k + N$ . Các wavelet được tỷ lệ  $\omega_{j0}$  thì bắt đầu từ  $t = 0$  và kết thúc ở  $t = N/2^j$ . Đô thị của chúng được nén lại với hệ số là  $2^j$ , trong khi đồ thị của  $\omega_{0k}$  thì lại được dịch đi (về bên phải) một lượng là  $k$ :

---

$$\text{Nén: } \omega_{j0} = \omega(2^j t) \qquad \text{Trễ: } \omega_{0k} = \omega(t-k)$$

---

Một wavelet điển hình  $\omega_{jk}$  vừa bị nén j lần và vừa bị làm trễ đi k lần có công thức như sau:

$$\omega_{jk}(t) = \omega(2^j t - k)$$

Wavelet có một tính chất quan trọng đó là tính trực giao (orthogonality). Các wavelet trực giao khi tích vô hướng (inner product) của chúng bằng không:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_{jk}(t) \omega_{JK}(t) dt = \text{tích vô hướng của } \omega_{jk} \text{ và } \omega_{JK} = 0 \quad (2.2)$$

Trong trường hợp này thì các wavelet đó sẽ có một cơ sở wavelet trực giao đối với không gian hàm. Cơ sở đó tương ứng với một tập hợp của các trực tạo với nhau một góc  $90^\circ$ . Tính trực giao dẫn đến một công thức đơn giản hơn đối với mỗi hệ số  $b_{JK}$  trong công thức mở rộng của  $f(t)$ . Nhân  $f(t)$  trong phương trình (2.1) với  $\omega_{JK}(t)$  và lấy tích phân ta được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \omega_{JK}(t) dt = b_{JK} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_{JK}(t))^2 dt \quad (2.3)$$

Phương trình (2.2) giới hạn tất cả các tích phân của  $\omega_{jk}$  nhân với  $\omega_{JK}$ , trừ trường hợp  $j = J$  và  $k = K$ . Thành phần đó tạo ra  $(\omega_{JK}(t))^2$ . Khi đó  $b_{JK}$  là tỷ số của hai tích phân trong phương trình (2.3).

## 2.1- CÁC WAVELET DAUBECHIES:

Hiện nay wavelet vẫn đang là một chủ đề nóng nhưng wavelet Haar thì đã được người ta biết đến từ năm 1910. Đồ thị của chúng được tạo thành từ các mảnh phẳng, và sự xấp xỉ đối với hầu hết các tín hiệu rất hạn chế. Chúng ta cần có nhiều mảnh phẳng để có thể biểu diễn một đường nghiêng với độ chính xác tốt nhất. Mặt khác các cơ sở của chúng thì lại không cho phép nén theo tỷ lệ lớn 20:1 hoặc 100:1 như mong muốn, cho nên chúng ta cũng cần phải chọn một cơ sở tốt nhất.

Các wavelet mới thì càng phức tạp hơn và công thức của chúng là một tích vô hạn, nhưng cuối cùng thì các nhà toán học cũng vẫn phải tìm ta chúng. Năm 1988 trong phòng thí nghiệm ở AT & T Laboratories, Ingrid Daubechies đã tìm ra một xung mà có điểm bắt đầu và điểm kết thúc và điều quan trọng là nó trực giao với tất cả các bản ảnh tỷ lệ và bản ảnh trễ của nó. Nó dựa trên cơ sở là bốn số “thần kỳ”:  $h_0, h_1, h_2, h_3$ . Bà sử dụng vectơ tỷ lệ  $S = (h_0, h_1, h_2, h_3)$  và wavelet  $W = (h_3, -h_2, h_1, -h_0)$ . Chúng ta thấy ngay là hai vectơ đó trực giao với nhau. Bằng cách thực hiện các phép nhân và phép cộng thì tích thấy  $S.W =$

0. Bà cũng muốn  $(1,1,1,1)$  và  $(1,2,3,4)$  có thành phần bằng không theo W, bởi vậy các tín hiệu tuyến tính và tín hiệu không đổi có thể được nén.Khi đó tích của chúng phải bằng không, nghĩa là:

$$h_3 - h_2 + h_1 - h_0 = 0 \text{ và } h_3 - 2h_2 + 3h_1 - 4h_0 = 0$$

Ở đây chúng ta chỉ có hai phương trình đối với các biến h, tuy nhiên chúng ta cần nhiều hơn nữa. Phương trình thứ ba sẽ tạo ra  $(h_3, -h_2, h_1, -h_0, 0, 0)$  trực giao với  $(0, 0, h_3, -h_2, h_1, -h_0)$ . Khi đó phai có tích của chúng là  $h_1h_3+h_0h_2 = 0$ . Và phương trình thứ tư  $h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 2$  sẽ cho phép tính các giá trị của h. Daubechies đã giải bốn phương trình và tìm ra các số cho một bộ lọc tốt hơn Haar:  $4h_0 = 1 + \sqrt{3}$ ,  $4h_1 = 3 + \sqrt{3}$ ,  $4h_2 = 3 - \sqrt{3}$ ,  $4h_3 = 1 - \sqrt{3}$ . Đây vẫn chưa phải là kết quả cuối cùng. Nếu tìm được sáu số hoặc tám số thì vẫn tốt hơn. Các bộ lọc video thì có xu hướng ngắn còn các bộ lọc audio thì thường là dài bởi vì âm thanh thường bằng phẳng hơn là hình ảnh.

Bước chủ đạo từ các vectơ rời rạc đến các hàm liên tục là phương trình dãn (dilation equation). Bước này có sử dụng các số thần kỳ  $h_0, h_1, h_2, h_3$ . Phương trình đối với hàm tỷ lệ  $\phi(t)$  bao gồm các biến t và  $2t$  và các tham số h:

$$\phi(t) = h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2) + h_3\phi(2t-3)$$

Thay  $t = 1$  và  $t = 2$  vào phương trình trên để tìm  $\phi(1)$  và  $\phi(2)$ . Khi đó phương trình cho ta  $\phi$  ở  $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$  bởi vì với  $2t$  thì các số ở bên phải là một số nguyên. Từ số lần là các số nguyên lần  $\frac{1}{2}$  chúng ta sẽ chuyển sang là các số nguyên lần của  $\frac{1}{4}$ . Cuối cùng chúng ta có đủ các giá trị để vẽ lên đồ thị từ  $t = 0$  đến  $t = 3$ .

Khi Fourier sử dụng sóng cosine và Haar sử dụng sóng vuông thì Daubechies lại bắt đầu bằng các hàm tỷ lệ . Wavelet  $\psi(t)$  của Daubechies có cùng các giá trị bên phải như ở phương trình trên nhưng với các hệ số là  $h_3, -h_2, h_1, -h_0$ . Đồ thị của nó thì không đều đặn. Việc nén và dịch nó sẽ tạo ra cơ sở wavelet hoàn hảo. Nhưng tất cả các tính toán đều quay lại với bốn hệ số h.

## **2.2- PHÂN TÍCH ĐA PHÂN GIẢI (MULTIRESOLUTION ANALYSIS)**

Nhiều chuyên gia nghiên cứu trong các lĩnh vực khác nhau đều mong muốn tìm ra các giải thuật thiết thực để phân tích các hàm tùy ý thành tổng

của các hàm riêng có các ưu điểm của các hệ thống Fourier và hệ thống Haar. Mỗi hệ thống này đều có hạn chế:

- Các hàm của hệ thống lượng giác được định vị bởi tần số, nhưng không định vị chính xác theo không gian.
- Các hàm ở hệ thống Haar thì định vị hoàn toàn theo không gian nhưng không định vị theo tần số.

“Theo lý thuyết thông tin, biểu diễn một tín hiệu phù hợp với sự xếp chồng các xử lý wavelet cơ bản theo cả định vị tần số và định vị thời gian. Thật vậy, thông tin thích hợp thường được mang đồng thời cả theo tần số và cấu trúc thời gian của tín hiệu. Biểu diễn tín hiệu như là một hàm thời gian không nói lên được biến tần số, trong khi biểu diễn Fourier thì lại dấu đi thời điểm phát và thời gian tồn tại của tín hiệu. Một sự biểu diễn đầy đủ phải tổ hợp được các ưu điểm của cả hai phương pháp trên, nó cũng phải ở dạng rời rạc phù hợp với lý thuyết về thông tin”.

Các biến đổi wavelet tạo ra một lớp mở rộng trực giao mới của các hàm trong  $L^2(\mathbb{R})$  với các tính chất đều, xấp xỉ và định vị tốt theo cả thời gian và tần số. Nói một cách ngắn gọn, các wavelet thành công hơn ở chỗ biến đổi Fourier cưa sổ không đáp ứng được một hệ thống trực chuẩn hoàn hảo của các hàm định vị trong  $\mathbb{R}$ . Ngược lại với chuỗi Fourier có các hệ số mang tính chất toàn cục trong hàm thì các hệ số trong phương trình mở rộng wavelet là những con số địa phương. Hơn nữa trong khi các thành phần trong chuỗi Fourier biểu diễn các tín hiệu gốc tuyến tính theo tần số thì các thành phần trong phương trình mở rộng wavelet được khoanh vùng theo các khối tỷ lệ hàm mũ trong miền tần số.

Các biến đổi wavelet đạt được sự định vị không gian - pha thông qua sự phân tích tỷ lệ - thời gian. Các hàm được biểu diễn bằng sự xếp chồng các thành phần dạng  $\omega(2^j x - k)$ , ở đó các thành phần với  $j$  lớn thì biểu diễn các hàm chu kỳ ngắn, định vị trong không gian bằng tham số trễ  $k$ . Mỗi hàm  $f \in L^2(\mathbb{R})$  có phương trình mở rộng wavelet như sau:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi(2^j x - k) \quad (2.2.1)$$

với các hệ số:  $c_{j,k} = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(2^j x - k)} dx$

Các hàm  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$  xác định một cơ sở trực giao đối với  $L^2(\mathbb{R})$  bao gồm cả các bản ảnh trễ và tỷ lệ của wavelet mẹ  $\omega$ . Trong phân tích wavelet, sự phân tích tỷ lệ - tần số được thay thế bằng sự phân tích tỷ lệ - dãy. Vì cơ sở wavelet định vị theo cả không gian và tần số nên các phương trình mở

rộng wavelet biểu diễn một hybrid của các phương pháp định vị không gian, như là xấp xỉ spline, và các mở rộng miền tần số như chuỗi Fourier.

Chúng ta có một cách thức mới để phân tích dựa trên việc dãn và trẽ;

### 2.2.1- ĐỊNH NGHĨA:

Một phân tích đa phân giải trực giao là sự phân tích một tín hiệu  $s(t)$  thành các thành phần ở các tỷ lệ (tần số) khác nhau ( $2^j$ ,  $j$  nguyên). Kết hợp với mỗi tỷ lệ (dải tần) là một không gian con kín  $V_j$ ,  $j \in Z$ , các không gian con này là các hàm thời gian thỏa mãn các điều kiện sau:

1.  $V_j \subset V_{j+1}$  với mọi  $j \in Z$ . (2.2.1.1)

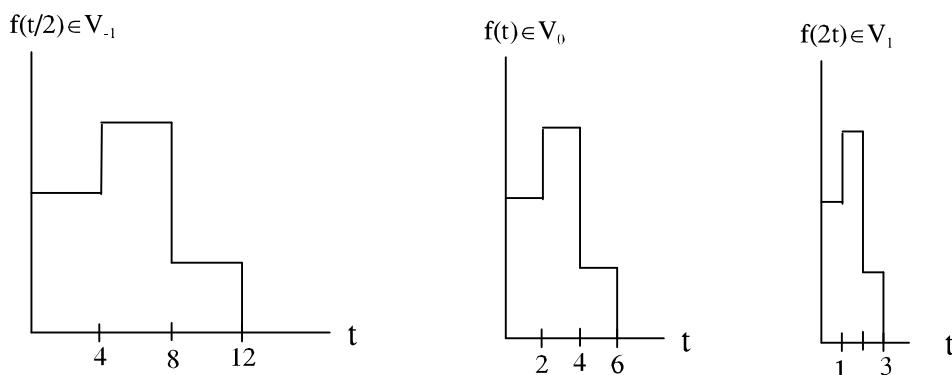
2.  $\overline{U_j V_j} = L^2(R)$  (2.2.1.2)

- và  $\bigcap_j V_j = \{0\}$ . (2.2.1.3)

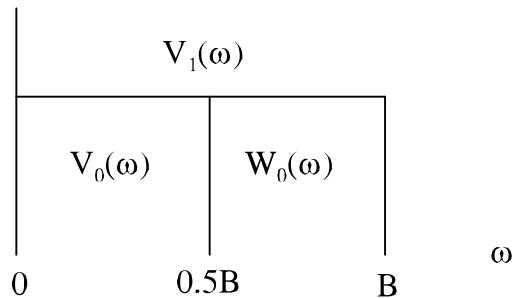
3.  $f(x) \in V_j$  nếu và chỉ nếu  $f(2^j x) \in V_0$ . (2.2.1.4)

4. Nếu  $f(x) \in V_j$  thì  $f(x - k) \in V_j$  với mọi  $k \in Z$ . (2.2.1.5)

5. Tồn tại một hàm  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , gọi là hàm tỷ lệ, sao cho  $\{\phi_k(x) \equiv \phi(x-k); k \in Z\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V_0$ . (2.2.1.6)



*Hình 2.1-hàm hằng tùng mẫu  $f(t)$*



Hình 2.2-phổ của các không gian con

Một ví dụ đơn giản nhất về xấp xỉ đa phân giải do Alfred Haar đề xuất. Với  $\phi$  là hàm đặc trưng của khoảng đơn vị,  $\phi = X_{[0,1]}$ , các hàm  $\phi_{j,k}$  mở rộng tập hợp của tất cả các hàm có giá trên các khoảng dyadic. Haar nhận thấy các hàm này có thể trực giao hoá, được tạo ra nhờ việc dãn và dịch một hàm đơn,

$$\psi = X_{[0,1/2)} - X_{[1/2,1)},$$

được gọi là wavelet Haar. Đây cũng là ví dụ đầu tiên về mở rộng trực giao.

Hình 3.8-basis

Hình 2.3-Hình chiếu của s(t) lên  $V_0$  của các hàm Haar

Chú ý:

1. Nếu chúng ta biểu thị  $\text{Proj}_{V_j}[f(x)]$  là hình chiếu trực giao của  $f(x)$  lên  $V_j$  thì (2.2.1.2) cho thấy là  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \text{Proj}_{V_j} = f(x)$

2. Khái niệm đa phân giải được suy ra từ (2.2.1.4) vì tất cả các không gian đều là bản ảnh tỷ lệ của không gian trung tâm  $V_0$ .

3. Hàm  $\phi(x)$  trong (2.2.1.6) được gọi là hàm tỷ lệ (scaling function).

4. Việc sử dụng công thức Poisson, tính trực giao của  $\{\phi_k(x) \equiv \phi(x-k); k \in \mathbb{Z}\}$  trong (2.2.1.6) tương đương với phương trình sau trong miền Fourier:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.2.1.7)$$

5. Từ điều kiện (2.2.1.4 - 2.2.1.6) ta thấy  $\{2^{j/2}\phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$  là một cơ sở của không gian  $V_{-j}$ .

6. Tính trực giao của  $\phi(x)$  là không cần thiết vì một cơ sở trực giao luôn luôn có thể trực giao hóa.

Từ điều kiện (2.2.1.1) và (2.2.1.4) ta có thể thay đổi hàm tỷ lệ  $\phi(x)$  để cho thỏa mãn phương trình tỷ lệ hai (two-scale equation). Vì  $V_0$  là không gian con của  $V_1$  cho nên  $\phi(t)$  thuộc  $V_0$  thì  $\phi(t)$  cũng thuộc  $V_1$ . Tuy nhiên ta biết rằng  $\{\sqrt{2}\phi(2x - k); k \in \mathbb{Z}\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V_1$  do đó  $\phi(x)$  có thể viết như sau:  $\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(k) \phi(2x - k)$  (2.2.1.8)

Chú ý là khi chuẩn hoá thì  $\|g_0(k)\| = 1$  và  $g_0(k) = \sqrt{2} \langle \phi(2x - k), \phi(x) \rangle$ . Lấy biến đổi Fourier cả hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \int \phi(x) e^{-j\omega x} dx = \sqrt{2} \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(k) \phi(2x - k) e^{-j\omega x} dx \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(k) \frac{1}{2} \int \phi(x) e^{-j\omega x/2} e^{-j\omega k/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(k) e^{-j(\omega/2)k} \int \phi(x) e^{-j(\omega/2)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} G_0(e^{j\omega/2}) \Phi(\omega/2) \end{aligned} \quad (2.2.1.9)$$

ở đó:  $G_0(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_0(k) e^{-j\omega k}$

Hàm này đặc trưng cho phân tích đa phân giải. Đó là hàm tuân hoán chu kỳ  $2\pi$  và có thể xem là biến đổi Fourier của một bộ lọc thời gian rời rạc  $g_0(k)$ . Nhận xét này liên kết thời gian rời rạc và liên tục, và cho phép xây dựng cơ sở wavelet thời gian liên tục bắt đầu từ các bộ lọc lặp rời rạc. Nó cũng cho phép tính toán các mở rộng wavelet thời gian liên tục sử dụng các giải thuật thời gian rời rạc.

Một tính chất quan trọng của  $G_0(e^{j\omega})$  là:

$$|G_0(e^{j\omega})|^2 + |G_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 2 \quad (2.2.1.10)$$

Ta có thể chứng minh tính chất trên một cách dễ dàng như sau:

Thay thế  $\omega$  trong (2.2.1.6) bằng  $2\omega$  ta được:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(2\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.2.1.11)$$

áp dụng (2.2.1.9) vào (2.2.1.11):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \sum_n |G_0(e^{j(\omega+n\pi)})|^2 |\Phi(\omega+n\pi)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_n |G_0(e^{j(\omega+2n\pi)})|^2 |\Phi(\omega+2n\pi)|^2 + \frac{1}{2} \sum_n |G_0(e^{j(\omega+(2n+1)\pi)})|^2 |\Phi(\omega+(2n+1)\pi)|^2 \\ &= \frac{1}{2} |G_0(e^{j\omega})|^2 \sum_n |\Phi(\omega+2n\pi)|^2 + \frac{1}{2} |G_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2 \sum_n |\Phi(\omega+(2n+1)\pi)|^2 \\ &= \frac{1}{2} (|G_0(e^{j\omega})|^2 + |G_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2) \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

với một số giới hạn trong biến đổi Fourier ta tìm được :

$$|G_0(1)| = \sqrt{2} \quad \text{và} \quad G_0(-1) = 0$$

## 2.2.2- XÂY DỤNG WAVELET:

Ta thấy là một phân tích đa phân giải được đặc trưng bởi một hàm  $G_0(e^{j\omega})$  tuân hoán chu kỳ  $2\pi$ . Các điều kiện (2.2.1.1-2.2.1.6) để đảm bảo sự tồn tại của cơ sở của các không gian xấp xỉ  $V_j$ . Điểm quan trọng của phân tích đa phân giải được nhấn mạnh trong định lý dưới đây. Chúng ta sẽ chứng minh định lý và xét ứng dụng của nó trong việc xây dựng các wavelet.

**Định lý:** Một chuỗi bất kỳ thoả mãn các điều kiện (2.2.1.1-2.2.1.6), thì tồn tại một cơ sở trực chuẩn của  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

sao cho  $\{\psi_{j,k}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $W_j$ , ở đó  $W_j$  là thành phần trực giao của  $V_j$  trong  $V_{j+1}$ .

Để chứng minh định lý này trước hết chúng ta phải thiết lập một cặp cơ sở quan trọng. Đầu tiên ta định nghĩa  $W_j$  là thành phần trực giao của  $V_j$  trong  $V_{j+1}$ . Nói cách khác:

$$V_{j+1} = V_j + W_j$$

Bằng cách lặp lại quá trình và sử dụng (2.2.1.2) ta có:

$$L^2(R) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (2.2.2.1)$$

Do các không gian  $V_j$  có tính chất tỷ lệ của nên các không gian  $W_j$  cũng tồn tại một tính chất tỷ lệ :

$$f(t) \in W_j \iff f(2^j t) \in W_0 \quad (2.2.2.2)$$

Mục đích của chúng ta ở đây là xây dựng wavelet  $\psi(t) \in W_0$  sao cho  $\psi(t-k)$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ , là một cơ sở trực chuẩn của  $W_0$ . Nếu ta có một wavelet như thế thì nhờ tính chất tỷ lệ  $\psi_{j,k}(t)$  sẽ là một cơ sở trực chuẩn của  $W_j$ . Nói cách khác cùng với các tính chất hoàn hảo upward/downward thì  $\{\psi_{j,k}\}$  là một cơ sở của  $L^2(R)$ . Do đó chúng ta bắt đầu xây dựng wavelet  $\psi(t)$  sao cho  $\psi \in W_0 \subset V_1$ . Vì  $\psi \in V_1$  nên:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_1(k) \phi(2t - k) \quad (2.2.2.3)$$

biến đổi Fourier cả hai vế ta được:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_1(e^{j\omega/2}) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.2.2.4)$$

trong đó  $G_1(e^{j\omega})$  là một hàm tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ . Lại có  $\omega$  thuộc  $W_0$ , mà  $W_0$  thì trực giao với  $V_0$  nên:

$$\langle \phi(t-k), \psi(t) \rangle = 0 \text{ với mọi } k$$

Điều này có thể biểu diễn trong miền Fourier như sau:

$$\int \Psi(\omega) \Phi(\omega) e^{j\omega k} d\omega = 0$$

hoặc tương đương với:

$$\int_0^{2\pi} e^{j\omega k} d\omega \sum_l \Psi(\omega + 2\pi l) \Phi(\omega + 2\pi l) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_l \Psi(\omega + 2\pi l) \Phi(\omega + 2\pi l) = 0 \quad (2.2.2.5)$$

thay (2.2.1.9) và (2.2.2.3) vào (2.2.2.4) rồi chia tổng theo 1 thành hai tổng của 1 chẵn và 1 lẻ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_l G_1(e^{j(\omega/2+2l\pi)}) \Phi(\omega/2 + 2l\pi) G_0^*(e^{j(\omega/2+2l\pi)}) \Phi^*(\omega/2 + 2l\pi) \\ & + \frac{1}{2} \sum_l G_1(e^{j(\omega/2+(2l+1)\pi)}) \Phi(\omega/2 + (2l+1)\pi) G_0^*(e^{j(\omega/2+(2l+1)\pi)}) \Phi^*(\omega/2 + (2l+1)\pi) = 0 \end{aligned}$$

Tuy nhiên, vì  $G_0$  và  $G_1$  là hai hàm tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ , ta thay  $\omega_1 = \omega/2$  sẽ được:

$$G_1(e^{j\omega_1}) G_0^*(e^{j\omega_1}) \sum_l |\Phi(\omega_1 + 2l\pi)|^2 + G_1(e^{j(\omega_1+\pi)}) G_0^*(e^{j(\omega_1+\pi)}) \sum_l |\Phi(\omega_1 + (2l+1)\pi)|^2 = 0$$

Sử dụng (2.12) thì tổng  $\Phi(\omega)$  sẽ bằng 1 và do đó:

$$G_1(e^{j\omega_1}) G_0^*(e^{j\omega_1}) + G_1(e^{j(\omega_1+\pi)}) G_0^*(e^{j(\omega_1+\pi)}) = 0 \quad (2.2.2.6)$$

điều này cũng cho thấy được sự liên kết giữa thời gian rời rạc và thời gian liên tục. Ta thấy  $G_0(e^{j\omega})$  và  $G_0(e^{j(\omega+\pi)})$  không thể đồng thời bằng không được, nghĩa là:

$$G_1(e^{j\omega}) = \lambda(e^{j\omega}) G_0^*(e^{j(\omega+\pi)})$$

ở đó  $\lambda(e^{j\omega})$  là một hàm tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  và:

$$\lambda(e^{j\omega}) + \lambda(e^{j(\omega+\pi)}) = 0$$

có thể chọn  $\lambda(e^{j\omega}) = -e^{j\omega}$  ta được:

$$G_1(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} G_0^*(e^{j(\omega+\pi)}) \quad (2.2.2.7)$$

hoặc trong miền thời gian

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(-n-1)$$

cuối cùng wavelet thu được có dạng như sau:

$$\begin{aligned}\Psi(\omega) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega/2} G_0^*(e^{j(\omega/2+\pi)}) \Phi(\omega/2) \\ \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n g_0(-n+1) \phi(2t+n)\end{aligned}\quad (2.2.2.8)$$

Để chứng minh wavelet này cùng với các bản ảnh nguyên lần của nó thì cần tạo ra một cơ sở trực chuẩn của  $W_0$ , phải chứng minh tính trực giao của các hàm cơ sở  $\omega_{0,k}(t)$  cũng như tính chất hoàn hảo của nó, nghĩa là bất kỳ hàm  $f(t) \in W_0$  nào ta đều có thể viết thành  $f(t) = \sum_k a_k \omega_{0,k}$ .

### 2.2.3- MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ PHÂN TÍCH ĐA PHÂN GIẢI:

#### Ví dụ 1: Haar

Gọi  $V_m$  là không gian của các hàm không đổi trong khoảng  $[n2^m, (n+1)2^m]$ . Khi đó:  $f^{(m)} \in V_m \Leftrightarrow f^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{(m)} \phi_{m,n}(t)$

Quá trình lấy trung bình của hai khoảng liên tiếp tạo ra một hàm  $f^{(m-1)} \in V_{m-1}$  (vì nó là một hàm không đổi trên khoảng  $[n2^{m-1}, (n+1)2^{m-1}]$ ). Rõ ràng là:

$$V_{m-1} \subset V_m$$

Việc lấy trung bình chính là hình chiếu trực giao của  $f^{(m)} \in V_m$  lên  $V_{m-1}$ , vì  $d^{(m-1)} = f^{(m)} - f^{(m-1)}$  thì trực giao với  $V_{m-1}$  (tích vô hướng của  $d^{(m-1)}$  với một hàm bất kỳ trong  $V_{m-1}$  đều bằng không). Nói cách khác  $d^{(m-1)}$  thuộc vào một không gian  $W_{m-1}$  trực giao với  $V_{m-1}$ . Không gian  $W_{m-1}$  được mở rộng nhờ làm trễ  $\psi_{m-1,n}(t)$

$$d^{(m-1)} \in W_{m-1} \Leftrightarrow d^{(m-1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{(m-1)} \psi_{m-1,n}(t)$$

hàm này là hình chiếu trực giao của  $f^{(m-1)}$  lên  $W_m$ . Ta thấy là hàm  $f^{(m)}$  bất kỳ đều có thể viết dưới dạng sau:

$$f^{(m)}(t) = f^{(m-1)}(t) + d^{(m-1)}(t) \quad (2.2.3.1)$$

do đó  $W_{m-1}$  là thành phần trực giao của  $V_{m-1}$  trong  $V_m$ :

$$V_m = V_{m-1} + W_{m-1}$$

Và (2.2.3.1) có thể được viết lại như sau:

$$f^{(m)}(t) = \text{Proj}_{V_{m-1}}[f^{(m)}(t)] + \text{Proj}_{W_{m-1}}[f^{(m)}(t)]$$

Lặp lại quá trình trên (phân tích  $V_{m-1}$  thành  $V_{m-2} + W_{m-2}$  và cứ tiếp tục như thế) thì ta được:

$$V_m = W_{m-1} \oplus W_{m-2} \oplus W_{m-3} \oplus \dots$$

Vì các hàm không đổi cũng được phân chia liên tục cho đến khi có kích thước bằng không nên các wavelet Haar tạo thành một cơ sở của  $L^2(\mathbb{R})$ .

Sau đây chúng ta sẽ xây dựng wavelet Haar sử dụng kỹ thuật đã trình bày ở phần trước.

Như đã nói, cơ sở của  $V_0$  là  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  với:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{với } t \text{ còn lại} \end{cases}$$

Để tìm  $G_0(e^{j\omega})$ , ta viết:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t+1)$$

Do đó :

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - e^{-j\omega/2}}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

từ  $G_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-j\omega})$ ,

Và sau đó sử dụng:

$$G_1(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} G_0(e^{j(\omega+\pi)}) = -e^{j\omega} \frac{(1 + e^{-j\omega})}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - e^{-j\omega})}{\sqrt{2}}$$

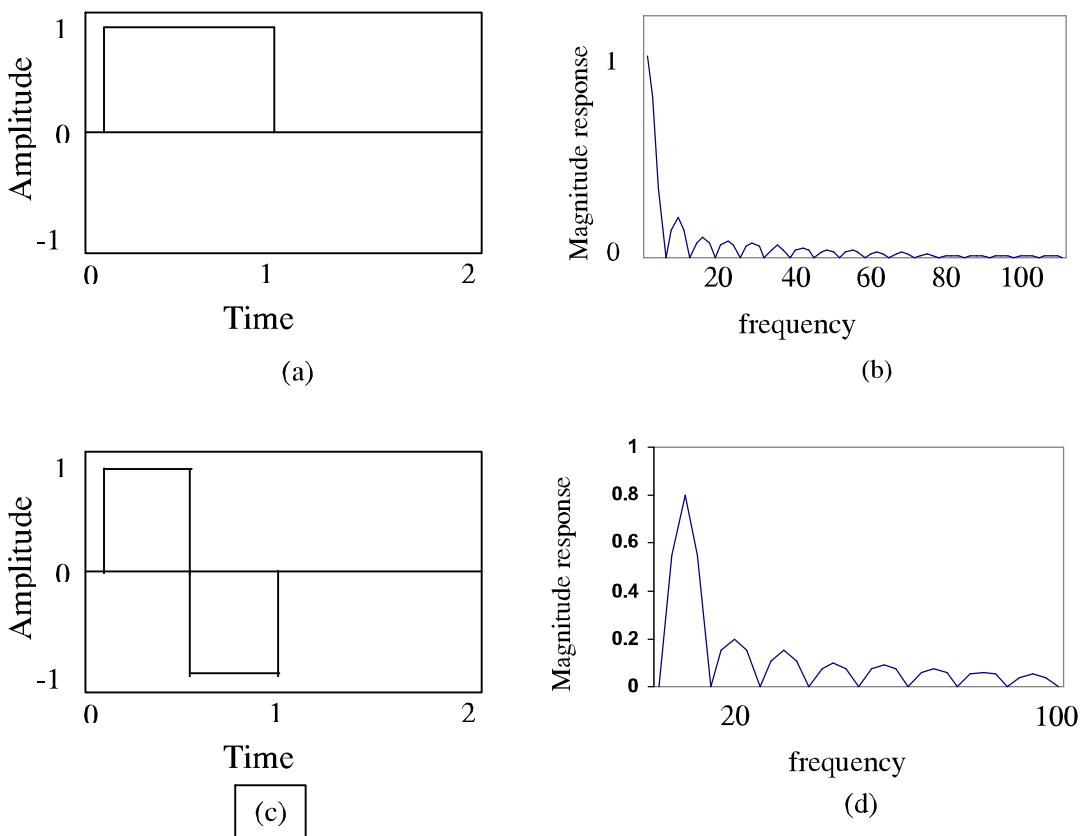
ta được:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_1\left(e^{j\omega/2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Cuối cùng:

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$$

Hay  $\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{với } t \text{ còn lại} \end{cases}$



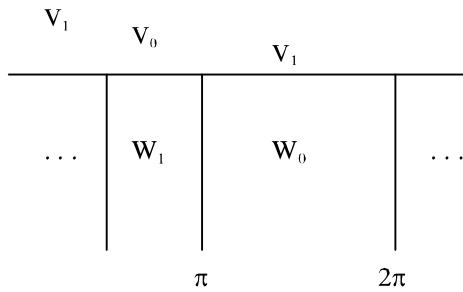
Hình 2.4-hàm tỷ lệ và wavelet Haar. (a) hàm tỷ lệ. (b) biến độ biến đổi Fourier của hàm tỷ lệ. (c) wavelet. (d) biến đổi fourier của wavelet.

### Ví dụ 2: Sinc

Để xuất phát từ wavelet sinc, chúng ta sẽ bắt đầu với chuỗi các không gian được đưa vào. Thay vì các hàm không đổi ta sẽ xét các hàm bị giới hạn dài  $[-\pi, \pi]$  ( $V_0$  thì có chứa  $\cos(\pi t)$  nhưng không chứa  $\sin(\pi t)$ ). Do đó  $V_1$  là không gian của các hàm bị giới hạn dài  $[-2\pi, 2\pi]$ . Khi đó gọi  $W_0$  là không gian của các hàm bị giới hạn dài  $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$  (nghĩa là  $W_0$  chỉ chứa  $\sin(\pi t)$  nhưng không chứa  $\cos(\pi t)$ ). Do đó:

$$V_1 = V_0 + W_0$$

Vì  $V_0$  trực giao với  $W_0$  và cùng thuộc không gian  $V_1$ .



Hình 2.5-phân tích  $V_0$  thành các dải liên tiếp.

Rõ ràng một hình chiếu từ  $V_1$  lên  $V_0$  sẽ là một xấp xỉ thông thấp  $f^{(0)}$ , trong khi hiệu  $d^{(0)} = f^{(1)} - f^{(0)}$  sẽ tồn tại trong  $W_0$ . Cứ tiếp tục lặp lại sự phân tích trên ta được:

$$V_1 = \bigoplus_{m=0}^{\infty} W_m$$

rõ ràng là cơ sở trực giao của  $V_0$  được cho bởi  $\{ \text{sinc}(t-n) \}$  hoặc:

$$\phi(t) = \frac{\sin c\pi t}{\pi t}$$

là hàm tỷ lệ và không gian  $V_0$  của các hàm bị giới hạn dải  $[-\pi, \pi]$ . áp dụng công thức (2.2.1.9) ta có:

$$g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2} \quad (2.2.3.2)$$

nghĩa là:  $G_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{với các } \omega \text{ khác} \end{cases}$

hay  $G_0(e^{j\omega})$  là một bộ lọc thông thấp, khi đó  $G_1(e^{j\omega})$  trở thành:

$$G_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\sqrt{2}e^{-j\omega} & \omega \in \left[ -\pi, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ 0 & \text{với } \omega \text{ khác} \end{cases}$$

là một bộ lọc thông cao lý tưởng với một sự trễ pha. Khi đó chuỗi  $g_1(n)$  là:

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(-n+1) \quad (2.2.3.3)$$

và lúc đó:  $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^{-n+1} g_0(n) \phi(2t - n + 1)$

---

Cũng có thể xây dựng wavelet một cách trực tiếp bằng cách thực hiện biến đổi Fourier ngược của hàm chỉ định của khoảng  $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ :

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi/2} \cos(3\pi t/2) \quad (2.2.3.4)$$

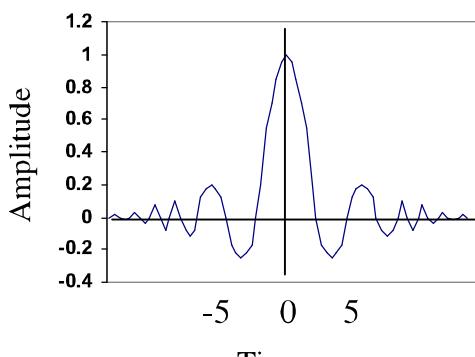
Hàm này trực giao với các bản ảnh trễ của nó hay  $\langle \psi(t), \psi(t-n) \rangle = \delta(n)$  như có thể được kiểm tra lại bằng cách sử dụng công thức Parseval. Để kết hợp với định nghĩa về  $W_0$  thì cần phải dịch  $\psi(t)$  đi  $1/2$ , và do đó  $\{\psi(t-n-1/2)\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , là một cơ sở trực giao của  $W_0$ . Cơ sở wavelet được cho bởi:

$$\psi_{m,n}(t) = \left\{ 2^{-m/2} \psi\left(2^{-m}t - n + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

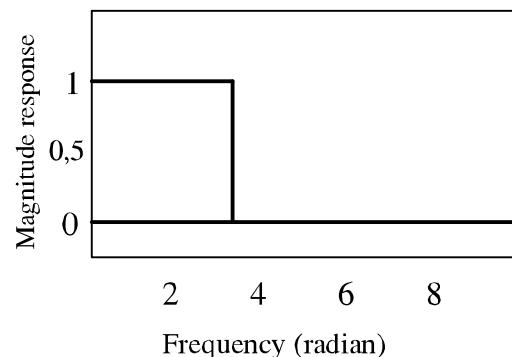
ở đó  $\psi_{m,n}(t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , là một cơ sở của các hàm giá trên

$$[-2^{-m+1}\pi, -2^{-m}\pi] \cup [2^{-m}\pi, 2^{-m+1}\pi]$$

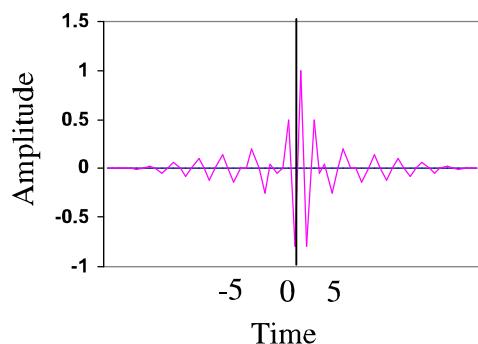
Vì  $m$  có thể lớn tuỳ ý (dương hoặc âm), nên rõ ràng là chúng ta có một cơ sở của các hàm  $L^2(\mathbb{R})$ . Hình vẽ dưới đây sẽ biểu diễn wavelet, hàm tỷ lệ và các biến đổi Fourier của chúng.



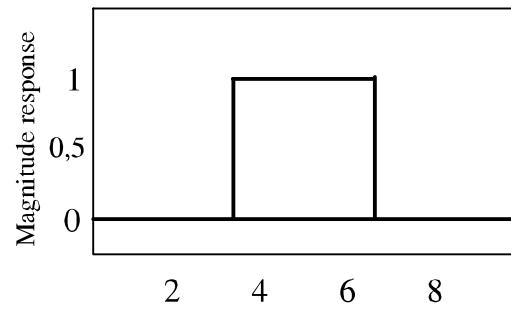
(a)



(b)



(c)



(d)

Hình 2.6-hàm tỷ lệ và wavelet sinc. (a)hàm tỷ lệ.  
(b)biến đổi Fourier của hàm tỷ lệ. (c)wavelet.  
(d)biến đổi Fourier của wavelet.

## 2.3- XÂY DỰNG WAVELET SỬ DỤNG KỸ THUẬT

### FOURIER:

Trước đây chúng ta mới chỉ xét về việc xây dựng cơ sở trực giao theo cấu trúc đa phân giải. Bây giờ sẽ tập trung vào phương pháp xây dựng cơ sở trực giao trong miền Fourier. Đầu tiên wavelet của Meyer được đề xuất và cho thấy từng bước kiểm tra các điều kiện đa phân giải. Sau đó các wavelet của các không gian spline được xây dựng.

#### 2.3.1- WAVELET MEYER:

Ý tưởng của wavelet Meyer là làm mềm trường hợp sinc. Việc chứng minh là để xây dựng một hàm tỷ lệ  $\phi(t)$  thoả mãn tính trực giao và các yêu cầu tỷ lệ của phân tích đa phân giải và sau đó xây dựng wavelet sử dụng phương pháp chuẩn. Để làm mềm hàm tỷ lệ sinc thì phải tìm một hàm bằng phẳng (theo tần số) thoả mãn (2.2.1.7).

Từng bước một chúng ta sẽ xây dựng: đầu tiên là hàm tỷ lệ và sau đó là wavelet liên hợp.

2.3.1.1- Bắt đầu với một hàm không âm  $\theta(x)$  khả vi theo thời gian sao cho:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases} \quad (2.3.1.1)$$

và thoả mãn  $\theta(x) + \theta(1-x) = 1$  với  $0 \leq x \leq 1$ . Tồn tại các lựa chọn khác nhau đối với  $\theta(x)$ , một trong số đó là:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases} \quad (2.3.1.2)$$

hình 4.7-subband coding

Hình 2.7-xây dựng wavelet Meyer. (a)dạng chung của hàm  $\theta(x)$ . (b) $|\Phi(\omega)|$  trong xây dựng của Meyer.

Xây dựng hàm tần số  $\Phi(\omega)$  sao cho:

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\theta\left(2 + \frac{3\omega}{2\pi}\right)} & \omega \leq 0 \\ \sqrt{\theta\left(2 - \frac{3\omega}{2\pi}\right)} & 0 \leq \omega \end{cases}$$

2.3.1.3-  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  là một họ trực chuẩn của  $L^2(\mathbb{R})$  . Từ công thức Poisson ta thấy:

$$\sum_k |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.3.1.3)$$

hình 4.8 – subband

Hình 2.8-Họ trực chuẩn

Xem hình vẽ thì rõ ràng là với  $\omega \in [-(2\pi/3)+2n\pi, (2\pi/3)+2n\pi]$  thì:

$$\sum_k |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 = |\Phi(\omega + 2n\pi)|^2 = 1$$

2.3.1.2- Định nghĩa  $V_0$  là không gian con của  $L^2(\mathbb{R})$  tạo bởi  $\phi(t-n)$  và định nghĩa các không gian  $V_m$  thỏa mãn (2.9).

Các không gian  $V_m$  tạo thành một phân tích đa phân giải.

2.3.1.3- Chứng minh (2.6): ta thấy  $V_{-1} \subset V_0$  hay  $\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_n c_n \phi(t-n)$ . Điều này tương đương với nói rằng tồn tại một hàm tuần hoàn  $G_0(e^{j\omega}) \in L^2[0, 2\pi]$  sao cho  $\Phi(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_0(e^{j\omega}) \Phi(\omega)$ .

Sau đó chọn:

$$G_0(e^{j\omega}) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(2\omega + 4k\pi) \quad (2.3.1.4)$$

2.3.1.4- Xét (2.7): trong trường hợp này ta thấy:

$$\text{Nếu: } \langle f, \phi_{m,n} \rangle = 0 \quad m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$$

$$\text{Thì: } \langle f, \phi_{m,n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(2^m(\omega + 2k\pi)) \Phi^*(\omega + 2k\pi) = 0$$

Lấy ví dụ với  $\omega \in [-(2\pi)/3, (2\pi)/3]$ . Khi đó với k bất kỳ:

$$F(2^m(\omega + 2k\pi)) \Phi(\omega + 2k\pi) = 0$$

Và với  $k = 0$ :

$$F(2^m \omega) \overline{\Phi(\omega)} = 0$$

với m bất kỳ:

$$F(2^m \omega) = 0, \quad \omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

Và do đó

$$F(\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

$$\text{Hay: } f = 0$$

2.3.1.5- Xét (2.8): nếu  $f \in \bigcap_{m \in Z} V_m$  th  $\times F \in \bigcap_{m \in Z} F\{V_m\}$ , ở đó  $F\{V_m\}$  là biến đổi Fourier của  $V_m$  với cơ sở  $2^{m/2} e^{-jk\omega 2^{-m}} \Phi(2^{-m}\omega)$ . Vì  $\Phi(2^{-m}\omega)$  có giá trị trong khoảng

$$I = \left[ -\frac{4\pi}{3} 2^m, \frac{4\pi}{3} 2^m \right]$$

nên  $I \rightarrow \{0\}$  khi  $m \rightarrow \infty$ .

Nói cách khác:  $F(\omega) \in \bigcap_{m \in Z} F\{V_m\} = 0$

Hay  $f(t) = 0$

2.3.1.6- Cuối cùng chúng ta phải tìm ra được wavelet tương ứng

$$\Psi(\omega) = -\left(1/\sqrt{2}\right) e^{-j\omega/2} G_0^*(e^{j(\omega/2+\pi)}) \Phi(\omega/2)$$

áp dụng (2.30) ta được:

$$\Psi(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}} \sum_{k \in Z} \Phi(\omega + (4k+1)\pi) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

do vậy  $\Psi(\omega)$  được định nghĩa như sau:

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}} \Phi(\omega + 2\pi) & \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) & \frac{4\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & \frac{8\pi}{3} \leq \omega \end{cases} \quad (2.3.1.5)$$

**hình 4.10- subband**

*Hình 2.9-Biểu diễn sự xây dựng wavelet Meyer*

Ví dụ về hàm tỷ lệ và wavelet Meyer được minh họa trong hình vẽ dưới đây:

Hình 2.10-hàm tỷ lệ và wavelet Meyer. (a)hàm tỷ lệ. (b)biến đổi Fourier của hàm tỷ lệ. (c)wavelet. (d)biến đổi Fourier của wavelet.

Một số điểm cần lưu ý đối với wavelet Meyer:

- hàm thời gian giá vô hạn có thể suy giảm rất nhanh
- bộ lọc thời gian rác  $G_0(e^{j\omega})$  ở trong phương trình tỷ lệ hai tương ứng (nhờ biến đổi Fourier ngược) với một chuỗi  $g_0(n)$  cũng suy giảm nhanh.
- Tuy nhiên  $G_0(e^{j\omega})$  không phải là hàm hữu tỷ của  $e^{j\omega}$  do đó bộ lọc  $g_0(n)$  không thể thực hiện được. Cho nên wavelet Meyer chỉ lý tưởng đối với lý thuyết.

### 2.3.2- CÁC WAVELET TRỰC CHUẨN CỦA CÁC KHÔNG GIAN SPLINE

Chúng ta áp dụng các phương pháp đã được mô tả để xây dựng các wavelet cho các không gian của các hàm đa thức từng đoạn (piecewise polynomial). Chúng ta bắt đầu với một ví dụ đơn giản về spline tuyến tính được cho bởi:

$$\beta^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{với } t \text{ khác} \end{cases}$$

thoả mãn phương trình tỷ lệ hai sau:

$$\beta^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \beta^{(1)}(2t+1) + \beta^{(1)}(2t) + \frac{1}{2} \beta^{(1)}(2t-1) \quad (2.3.3.1)$$

Biến đổi Fourier:

$$B^{(1)}(\omega) = \left( \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 \quad (2.3.2.2)$$

Để tìm  $B^{(2N+1)}(\omega)$  phải chú ý là biến đổi Fourier ngược của nó bằng:

$$\begin{aligned} b^{(2N+1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jn\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |B^{(N)}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega} |B^{(N)}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(N)}(t) \beta^{(N)}(t-n) dt \end{aligned} \quad (2.3.2.3)$$

Trong trường hợp spline tuyến tính chúng ta tìm được  $b^{(3)}(0) = 2/3$  và  $b^{(3)}(1) = b^{(3)}(-1) = 1/6$ , hay:

$$B^{(3)}(\omega) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}e^{j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j\omega} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(\omega) = 1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

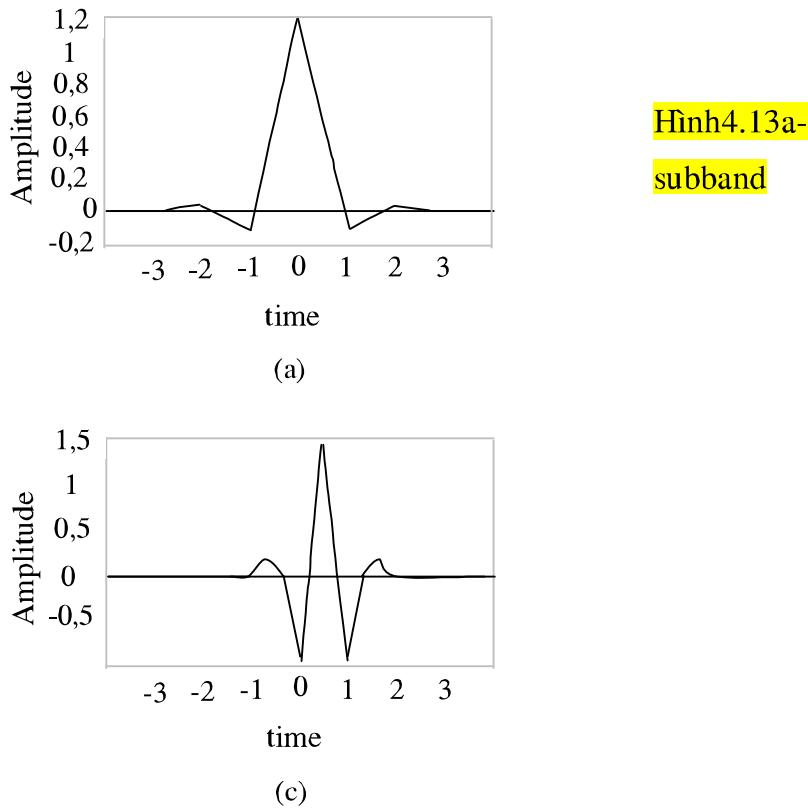
là một spline bậc ba thời gian rời rạc.

$$\Phi(\omega) = \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2 (1 - (2/3)\sin^2(\omega/2))^{1/2}}$$

là một hàm tỷ lệ trực chuẩn của không gian spline tuyến tính  $V_0^{(1)}$ . Nhận xét từ biến đổi Fourier ngược của hàm tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$   $(1 - (2/3)\sin^2(\omega/2))^{1/2}$ , ứng với chuỗi  $\{a_n\}$ , cho thấy  $\phi(t)$  có thể được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của  $\{\beta^{(1)}(t-n)\}$ :

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \beta^{(1)}(t-n)$$

Cơ sở spline tuyến tính được minh họa trên hình vẽ:



Hình 2.11-cơ sở spline tuyến tính. (a)hàm tỷ lệ.  
(b)biến đổi fourier của hàm tỷ lệ. (c)wavelet.  
(d)biến đổi Fourier của wavelet

Biến đổi Fourier cả hai vế của phương trình tỷ lệ hai (2.30):

$$\mathbf{B}^{(1)}(\omega) = \left( \frac{1}{4} e^{-j\omega/2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j\omega/2} \right) \mathbf{B}^{(1)}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \mathbf{B}^{(1)}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Do đó  $G_0(e^{j\omega})$  sẽ bằng:

$$G_0(e^{j\omega}) = \sqrt{2} \frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\omega)\right)^{1/2}}$$

và wavelet sẽ là:

$$\Psi(\omega) = -e^{-j\omega/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{1/2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

hay:  $\Psi(\omega) = -e^{-j\omega/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega}{4}\right)^2} \left( \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)} \right)^{\frac{1}{2}}$  (2.3.2.4)

viết lại công thức trên như sau:

$$\Psi(\omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega}{4}\right)^2} Q(\omega) \quad (2.3.2.5)$$

trong đó  $Q(\omega)$  là hàm tuần hoàn chu kỳ  $4\pi$ . Thực hiện biến đổi Fourier ngược của (2.33) ta được:

$$\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(n) \beta^{(1)}(2t - n)$$

với chuỗi  $q(n)$  là biến đổi Fourier ngược của  $Q(\omega)$ .

#### Xem minh họa trên hình 2.11b

Với việc xây dựng như trên chúng ta đã có được một cơ sở trực chuẩn cho  $V_0^{(1)}$  và  $W_0^{(1)}$  là tập hợp các hàm  $\{\phi(t-n) \text{ và } \psi(t-n)\}$ . Có thể thấy là hàm tỷ lệ (scaling function) và wavelet bị suy giảm theo hàm mũ. Lý do bắt đầu từ  $\phi(t)$  là một tổ hợp tuyến tính của các hàm  $\beta^{(N)}(t-n)$ . Vì  $\beta^{(N)}(t)$  có giá compact nên một số hữu hạn các hàm từ tập hợp  $\{\beta^{(N)}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  góp phần vào  $\phi(t)$  với t cho trước. Nghĩa là  $|\phi(t)|$  cùng bậc với  $\left| \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{k+l} \right|$  trong đó  $k = [t]$ .  $\{\alpha_k\}$  là đáp

ứng xung của một bộ lọc ổn định bởi vì nó không có các điểm cực ở trong vòng tròn đơn vị. Do đó chuỗi  $\alpha_k$  suy giảm theo hàm mũ và tạo nên hàm  $\phi(t)$ . Nhận xét tương tự đối với hàm  $\psi(t)$ . Trong khi  $\beta^{(N)}(t)$  bị mất giá compact thì sự suy giảm nhanh cho thấy là  $\phi(t)$  và  $\psi(t)$  tập trung quanh một gốc như trong hình vẽ sau:

#### Xem hình vẽ 2.11c

Những vấn đề về sự trực giao hoá đã nói đến ở trên bị giới hạn để cho trường hợp spline tuyến tính đơn giản. Tuy nhiên rõ ràng là nó ứng dụng cho trường hợp B-spline nói chung vì nó dựa trên sự trực giao hoá.

## 2.4- CHUỖI WAVELET VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓ:

### 2.4.1- ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Định nghĩa: giả sử một phân tích đa phân giải được định nghĩa bởi các điều kiện (2.2.1.1-2.2.1.6) và wavelet mẹ  $\psi(t)$  được cho bởi công thức (2.2.2.3), thì một hàm bất kỳ  $f \in L^2(\mathbb{R})$  có thể được biểu diễn như sau:

$$f(t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} F[m,n] \psi_{m,n}(t) \quad (2.4.1.1)$$

ở đó  $F[m,n] = \langle \psi_{m,n}(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) f(t) dt \quad (2.4.1.2)$

ta giả thiết wavelet thực, nếu cần là liên hợp. Phương trình (2.3.2.5) là công thức phân tích và phương trình (2.3.2.4) là công thức tổng hợp. Dưới đây sẽ liệt kê một số tính chất quan trọng của chuỗi wavelet.

#### • tuyến tính:

giả thiết là phép toán  $T$  được định nghĩa như sau:

$$T[f(t)] = F[m,n] = \langle \psi_{m,n}(t), f(t) \rangle.$$

Khi đó với  $a,b$  bất kỳ thuộc  $\mathbb{R}$  ta có:

$$T[a.f(t) + b.g(t)] = a.T[f(t)] + b.T[g(t)].$$

Nghĩa là phép toán với chuỗi wavelet là tuyến tính. Điều này được chứng minh từ tính chất tuyến tính của tích vô hướng (inner product).

#### • Tính chất trễ (shift):

Biến đổi Fourier cũng có tính chất trễ. Nếu một tín hiệu và biến đổi Fourier của nó được biểu thị bởi  $f(t)$  và  $F(\omega)$  thì tín hiệu  $f(t - \tau)$  sẽ có biến đổi Fourier là  $e^{-j\omega\tau}F(\omega)$ .

Còn đối với chuỗi wavelet thì sao? Giả thiết là hàm và hệ số biến đổi của nó được ký hiệu là  $f(t)$  và  $F[m,n]$ . Nếu ta dịch tín hiệu đi một lượng là  $\tau$ , nghĩa là lúc này ta có tín hiệu là  $f(t-\tau)$  thì hệ số biến đổi của nó lúc này là  $F'(m,n)$ :

$$\begin{aligned} F'[m, n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) f(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-m/2} \psi\left(2^{-m} t - n + 2^{-m} \tau\right) f(t) dt \end{aligned}$$

để hệ số này là một hệ số từ biến đổi gốc  $F[m, n]$  ta phải có:

$$2^{-m} \tau \in \mathbb{Z}$$

hay  $\tau = 2^m k$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ . Do đó chuỗi wavelet có tính chất trễ sau: nếu một tín hiệu và hệ số biến đổi của nó được ký hiệu là  $f(t)$  và  $F(\omega)$  thì tín hiệu  $f(t - \tau)$ ,  $\tau = 2^m k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sẽ có hệ số biến đổi là  $F[m', n + 2^{-m} \tau]$   $m' \leq m$ . Nghĩa là:

$$f(t - 2^m k) \rightarrow F[m', n + 2^{m-m'} k], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m' \leq m$$

do đó nếu một tín hiệu có mở rộng bị giới hạn - tỷ lệ:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=-\infty}^{M_2} F[m, n] \psi_{m,n}(t)$$

thì tín hiệu này có tính chất trễ yếu ứng với độ trễ là  $2^{M_2} k$ , nghĩa là

$$f(t - 2^{M_2} k) \rightarrow F[m, n + 2^{M_2-m} k], \quad -\infty \leq m \leq M_2$$

#### • Tính chất tỷ lệ (scaling):

Nói lại tính chất tỷ lệ của biến đổi Fourier: nếu một tín hiệu  $f(t)$  có biến đổi Fourier của nó là  $F(\omega)$  thì bản ảnh tỷ lệ của nó là  $f(at)$  sẽ có biến đổi Fourier là  $\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ .

Còn đối với chuỗi wavelet  $f(t)$  có hệ số biến đổi là  $F[m, n]$  thì hệ số biến đổi của bản ảnh tỷ lệ  $f(at)$ ,  $a > 0$ , là  $F'[m, n]$ :

$$\begin{aligned} F'[m, n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) f(at) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-m/2} \psi\left(\frac{2^{-m} t}{a} - n\right) f(t) dt \end{aligned}$$

do đó khi  $2^{-m}/a = 2^p$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , hay  $a = 2^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , khi đó  $F'[m, n]$  có thể tìm được từ  $F[m, n]$ , biến đổi wavelet của  $f(t)$ :

$$f(2^{-k} t) \rightarrow 2^{k/2} F[m-k, n] \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **đồng nhất Parseval:**

Đồng nhất Parseval đối với chuỗi wavelet cũng giống như đối với các mở rộng Fourier. Nghĩa là họ trực chuẩn  $\{\psi_{m,n}\}$  thoả mãn:

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{m,n}, f \rangle|^2 = \|f\|^2 , \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

- **lấy mẫu hai ngôi thời gian - tần số:**

Khi xét một mở rộng chuỗi thì việc định vị các hàm cơ sở trong mặt phẳng thời gian-tần số là rất quan trọng. Việc lấy mẫu theo thời gian, ở tỷ lệ  $m$ , được thực hiện với chu kỳ  $2^m$ , vì  $\psi_{m,n}(t) = \psi_{m,0}(t-2^m n)$ . Vì tần số thì ngược lại với tỷ lệ nên ta tìm được là nếu wavelet tập trung quanh  $\omega_0$ , thì  $\Psi_{m,n}(\omega)$  tập trung quanh  $\omega_0/2^m$ . Điều này dẫn đến việc lấy mẫu dyadic của mặt phẳng thời gian-tần số như minh họa trong hình vẽ dưới đây:



Hình 2.12-lấy mẫu hai ngôi của mặt phẳng thời gian-tần số

- **tính chất định vị (localization):**

Một trong những lý do khiến wavelet trở nên phổ biến đó là chúng có khả năng định vị tốt.

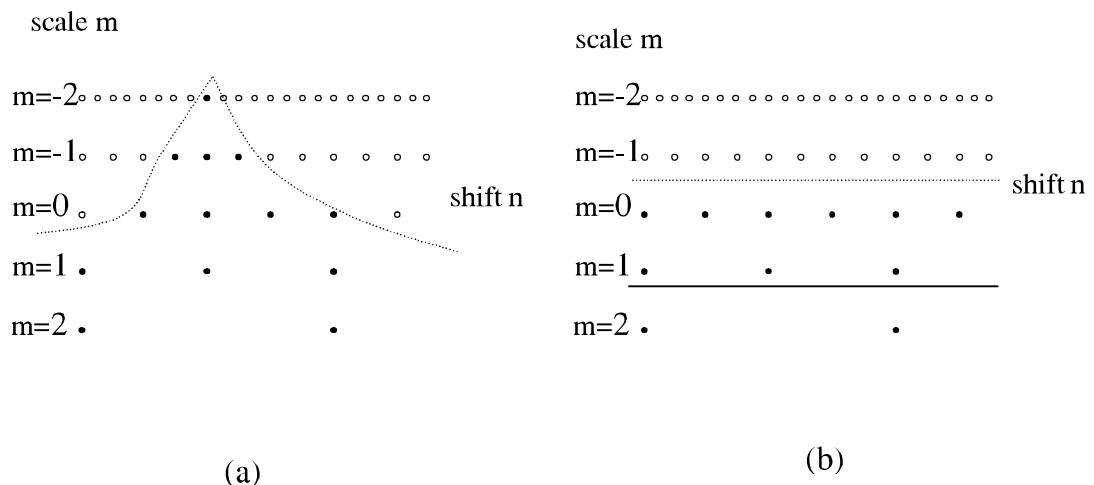
*Định vị thời gian:* xét một tín hiệu quanh  $t = t_0$ . Khi đó nảy sinh một câu hỏi là: những giá trị  $F[m,n]$  nào sẽ mang thông tin về tín hiệu  $f(t)$  ở  $t_0$ , nghĩa là vùng  $(m,n)$  nào sẽ chứa thông tin về  $f(t_0)$ ?

Giả thiết là một wavelet  $\psi(t)$  có giá compact trên khoảng  $[-n_1, n_2]$ . Do đó  $\psi_{m,0}(t)$  có giá trên khoảng  $[-n_1 2^m, n_2 2^m]$  và  $\psi_{m,n}(t)$  có giá trên khoảng  $[(-n_1+n)2^m, (n_2+n)2^m]$ . Bởi vậy ở tỷ lệ  $m$ , các hệ số wavelet với chỉ số  $n$  thoả mãn:

$$(-n_1+n)2^m \leq t_0 \leq (n_2+n)2^m$$

sẽ bị ảnh hưởng. Điều này có thể viết:

$$2^{-m}t_0 - n_2 \leq n \leq 2^{-m}t_0 + n_1$$



*hình 2.13-(a)các hệ số bị ảnh hưởng  
của các giá trị hàm ở  $t_0$*

Câu hỏi ngược lại: cho trước một điểm  $F[m_0, n_0]$  trong chuỗi wavelet, thì vùng nào của tín hiệu góp phần trong đó? Từ giá của  $\psi_{m,n}(t)$  thì  $f(t)$  với  $t$  thoả mãn:

$$(-n_1+n_0)2^{m_0} \leq t_0 \leq (n_2+n_0)2^{m_0}$$

thì có ảnh hưởng tới  $F[m_0, n_0]$ .

*Định vị tần số:* xét sự định vị trong miền tần số. Vì biến đổi Fourier của  $\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n)$  là  $2^{m/2} \cdot \Psi(2^m \omega) e^{-j2^m n \omega}$  nên có thể viết  $F[m, n]$  sử dụng công thức Parseval như sau:

$$\begin{aligned} F[m, n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} 2^{m/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \Psi^*(2^m \omega) e^{j2^m n \omega} d\omega \end{aligned}$$

Giả thiết là một wavelet  $\psi(t)$  triệt tiêu trong miền Fourier ở ngoài miền  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Ở tỷ lệ  $m$  thì giá của  $\Psi_{m,n}(\omega)$  sẽ là  $[\omega_{\min}/2^m, \omega_{\max}/2^m]$ . Do vậy một thành phần tần số ở  $\omega_0$  ảnh hưởng đến chuỗi wavelet ở tỷ lệ  $m$  nếu điều kiện sau đây:

$$\omega_{\min}/2^m \leq \omega_0 \leq \omega_{\max}/2^m$$

được thoả mãn hoặc nếu phạm vi tỷ lệ sau bị ảnh hưởng:

$$\log_2\left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_0}\right) \leq m \leq \log_2\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_0}\right)$$

ngược lại cho một tỷ lệ  $m_0$ , thì mọi tần số của tín hiệu giữa  $\omega_{\min}/2^{m_0}$  và  $\omega_{\max}/2^{m_0}$  sẽ ảnh hưởng đến mở rộng ở tỷ lệ đó.

#### • Sự tồn tại của các tín hiệu bị giới hạn- tỷ lệ:

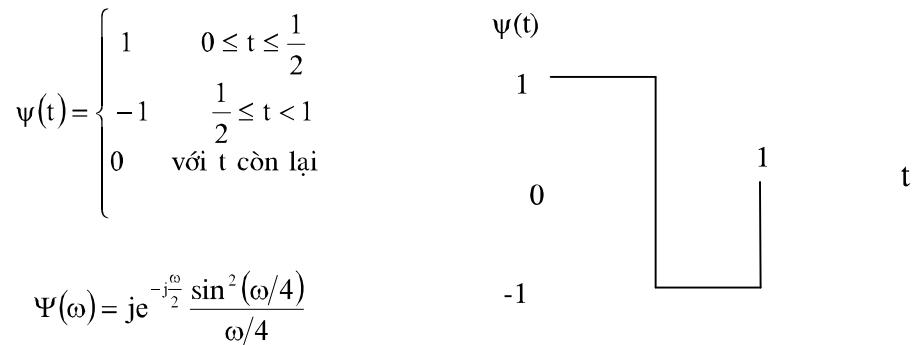
Xuất phát từ tầm quan trọng của tín hiệu bị giới hạn bằng tần trong xử lý tín hiệu nên có một câu hỏi đặt ra như sau: có bao nhiêu tín hiệu bị giới hạn -tỷ lệ? Một phương pháp để xây dựng một tín hiệu như thế được đưa vào, ví dụ như các wavelet Haar từ một phạm vi của các tỷ lệ  $m_0 \leq m \leq m_1$ . Do đó chuỗi wavelet sẽ có một số giới hạn các tỷ lệ; hoặc là các hệ số biến đổi  $F[m,n]$  sẽ tồn tại chỉ với  $m_0 \leq m \leq m_1$ .

#### • Đặc điểm của tính chất đều:

Biến đổi Fourier và chuỗi Fourier có thể dùng để mô tả tính chất đều của một tín hiệu bằng cách quan sát sự suy giảm của biến đổi hoặc của các hệ số chuỗi. Có thể làm tương tự như vậy đối với chuỗi wavelet và biến đổi wavelet. Khi đó có một ưu điểm nổi bật hơn so với trường hợp Fourier là có thể mô tả tính chất đều địa phương (local regularity). Biến đổi Fourier chỉ mô tả tính chất toàn cục. Biến đổi wavelet và chuỗi wavelet cho phép quan sát tính chất đều ở một vị trí riêng độc lập với những vị trí khác.

### 2.4.2-MỘT SỐ WAVELET:

#### 2.4.2.1- Wavelet Haar:



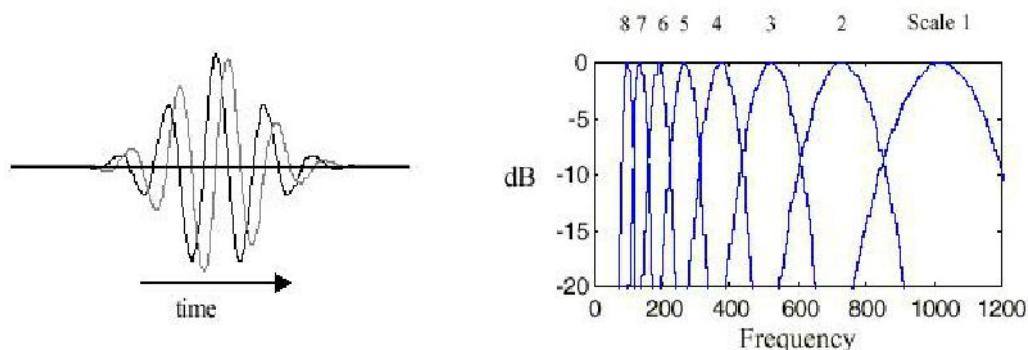
#### 2.4.2.2-Wavelet Morlet:

Wavelet Morlet được cho bởi :

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (2.4.2.1.1)$$

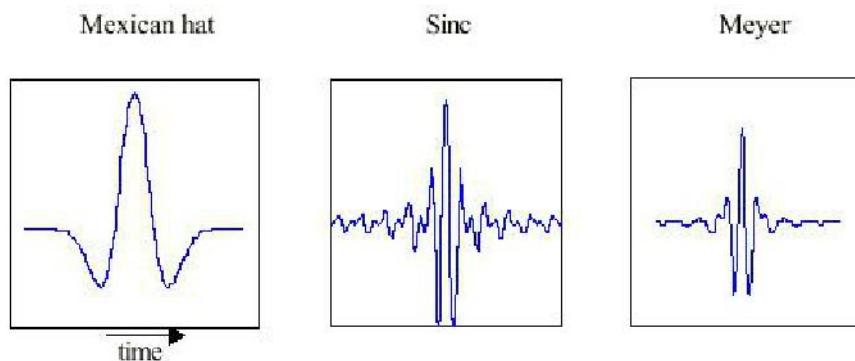
và biến đổi của nó:

$$\Psi(\omega) = e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$$



Hình 2.14- wavelet Morlet. (a).miền thời gian (b).phổ biên độ

Một số loại wavelet liên tục khác:



#### 2.4.3-TÍNH CHẤT CỦA CÁC HÀM CƠ SỞ:

- *Tính chất phương trình tỷ lệ hai* (two-scale equation property): hàm tỷ lệ có thể tự xây dựng. Nhắc lại định nghĩa của một phân tích đa phân giải. Hàm tỷ lệ  $\phi(t)$  thuộc  $V_0$ . Tuy nhiên vì  $V_0 \subset V_1$  nên  $\phi(t)$  cũng thuộc  $V_1$ . Ta biết là  $\phi(t-n)$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V_0$  và do đó

$\sqrt{2}\phi(2t - n)$  là cơ sở trực chuẩn của  $V_1$ . Nghĩa là một hàm bất kỳ thuộc  $V_0$ , bao gồm cả  $\phi(t)$ , là một tổ hợp tuyến tính của các hàm cơ sở trong  $V_1$ , đó là  $\phi(2t-n)$ . Điều này dẫn đến phương trình tỷ lệ hai sau:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_0[n] \phi(2t - n) \quad (3.1)$$

đối với wavelet  $\psi(t) \in W_0 \subset V_1$  ta cũng có:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_1[n] \phi(2t - n) \quad (3.2)$$

Biểu diễn trong miền Fourier của hai phương trình trên ta được:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_0[n] e^{-jn(\omega/2)} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = M_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.3)$$

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_1[n] e^{-jn(\omega/2)} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = M_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.4)$$

**hình4.24-subband**

*Hình 2.15-phương trình tỷ lệ hai*

Hình vẽ trên là đồ thị của phương trình tỷ lệ hai trong trường hợp hàm tỷ lệ Daubechies. Từ đó ta thấy hàm tỷ lệ  $D_2$  được xây dựng nhờ sử dụng các bản ảnh trễ và tỷ lệ của chính nó.

Hàm  $M_0(\omega)$  và  $M_1(\omega)$  là các hàm tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  và tương ứng với các bản ảnh tỷ lệ của các bộ lọc  $g_0(n)$ ,  $g_1(n)$  và được dùng để xây dựng các bank lọc.

Phương trình tỷ lệ hai cũng có thể là điểm khởi đầu trong việc xây dựng phân tích đa phân giải. Nói cách khác thay vì bắt đầu từ các điều kiện định nghĩa phân tích đa phân giải thì ta chọn  $\phi(t)$  sao cho thoả mãn (3.1) với  $\sum_n |g_0[n]|^2 < \infty$  và  $0 < A \leq \sum_n |\Phi(\omega + 2\pi n)|^2 \leq B < \infty$ . Sau đó định nghĩa  $V_m$  là không gian con kín được mở rộng bởi  $2^{-m/2}\phi(2^{-m}t-n)$ .

• các tính chất tức thời của các wavelet (moment) :

Một bộ lọc thông thấp  $g_0[n]$  trong bank lọc có ít nhất một điểm không ở  $\omega = \pi$  và do đó  $g_1[n]$  có ít nhất một điểm không ở  $\omega = 0$ . Vì  $\Phi(0) = 1$  (do chuẩn hoá  $M_0(\omega)$ ) nên  $\Psi(\omega)$  có ít nhất một điểm không ở  $\omega = 0$ . Do đó:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \Psi(0) = 0$$

có thể nói wavelet không có thành phần một chiều.

Nói chung nếu  $G_0(e^{j\omega})$  có điểm không thứ  $N$  ở  $\omega = \pi$  thì wavelet  $\Psi(\omega)$  có một điểm không thứ  $N$  ở  $\omega = 0$ . Mặt khác:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \quad n = 0, \dots, N-1$$

nghĩa là  $N$  điểm đầu tiên của wavelet thì bằng không.

Tầm quan trọng của các điểm không: giả sử một wavelet có chiều dài  $L$  với  $N$  điểm không. Giả sử hàm  $f(t)$  được biểu diễn bằng chuỗi wavelet là một đa thức bậc  $N-1$  trong khoảng  $[t_0, t_1]$ . Khi đó với các tỷ lệ đủ nhỏ thì các hệ số mруд rộng wavelet sẽ triệt tiêu trong miền ứng với  $[t_0, t_1]$  vì tích vô hướng với mỗi thành phần trong đa thức sẽ bằng không.

Các đặc điểm xấp xỉ này của wavelet với các điểm không rất quan trọng trong việc xấp xỉ các hàm bằng phẳng và các toán tử cũng như trong nén tín hiệu.

• Các tính chất suy giảm và bằng phẳng của các wavelet:

Khi nghiên cứu về wavelet Daubechies đã bỏ qua các tính chất hội tụ, liên tục và tính khả vi của wavelet. Trong khi tính chất đều này của wavelet được liên kết các điểm không ở  $\omega = \pi$  của bộ lọc thông thấp thì sự liên kết không trực tiếp như trong trường hợp tính chất điểm không. Không có sự liên hệ trực tiếp nào giữa hai tính chất này.

Tính chất đều, sự định vị hoặc suy giảm của tất cả các wavelet được cho trong bảng:

Wavelet	Số các điểm không	Tính đều r	Sự suy giảm hoặc giá theo thời gian	Sự suy giảm hoặc giá theo tần số
Haar	1	0	[0,1]	$1/\omega$
Sinc	$\infty$	$\infty$	$1/t$	$[\pi, 2\pi]$
Meyer	$\infty$	$\infty$	$1/\text{poly}$	$[2\pi/3, 2\pi/3]$
Battle-Lemairie	N	N	Hàm mũ	$1/\omega^N$
Daubechies N	N	$[\alpha(N)]$	$[0,2N-1]$	$1/\omega^{\alpha(N)}$

### Chương 3:

## BIẾN ĐỔI WAVELET

### 3.1- CÁC KHÁI NIỆM:

#### 3.1.1- PHÉP PHÂN CHIA

**3.1.1.1-Định nghĩa phân chia:** việc giảm tần số lấy mẫu từ giá trị  $F_s$  về một giá trị  $F_s'$  ( $F_s' < F_s$ ) được định nghĩa là phân chia.

Nếu  $F_s' = F_s / M$  ( $M > 1$  và nguyên dương) thì ta gọi là phân chia theo hệ số  $M$ .

**3.1.1.2-Định nghĩa bộ phân chia:** hệ thống chỉ làm nhiệm vụ giảm tần số lấy mẫu được gọi là bộ phân chia.

Kí hiệu:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\downarrow M} & & M - \text{hệ số phân chia} \\ x(n) & & y_{\downarrow M}(n) \\ F_s & & F_s' \end{array}$$

Kí hiệu toán tử biểu diễn phép chia:

$$\downarrow M[x(n)] = y_{\downarrow M}(n)$$

hay:  $\downarrow M$

$$x(n) \quad y_{\downarrow M}(n)$$

**3.1.1.3-Biểu diễn phép phân chia trong miền biến số n:**

$$\boxed{\downarrow M}$$

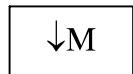
$$\begin{array}{ccc} x(n) & & y_{\downarrow M}(n) \\ F_s & & F_s' \\ \Omega_s & & \Omega_s' \\ T_s & & T_s' \end{array}$$

Ta thấy rằng tần số lấy mẫu  $F_s'$  của tín hiệu rời rạc  $x(n)$  sau khi đi qua bộ phân chia này sẽ bị giảm đi  $M$  lần, tức là:

$$F_s' = \frac{F_s}{M} ; \Omega_s' = 2\pi F_s' ; \Omega_s' = 2\pi F_s' = 2\pi \frac{F_s}{M} = \frac{\Omega_s}{M}$$

hoặc là chu kỳ lấy mẫu:  $T_s' = 1/F_s'$  sẽ tăng lên  $M$  lần:  $T_s' = MT_s$

để hiểu rõ quá trình phân chia này ta sẽ biểu diễn dãy vào và ra của bộ phân chia này ở dạng không chuẩn hoá như sau:



$$x(nT_s)$$

$$x(nT_s') = x(nMT_s) = y_{\downarrow M}(n)$$

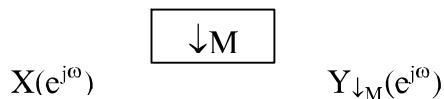
$nM$  nguyên

Như vậy tín hiệu rời rạc trước khi vào bộ phân chia là  $x(nT_s)$  và sau khi ra khỏi bộ phân chia sẽ là  $x(nT_s')$ , chiều dài của  $x(n)$  bị co lại  $M$  lần, tức là:

$$L[x(n)] / L[y_{\downarrow M}(n)] = M$$

#### **3.1.1.4-Biểu diễn phép chia trong miền tần số:**

Chúng ta có thể biểu diễn quá trình phân chia bằng bộ phân chia trong miền Z tần số như sơ đồ sau:



Trong miền biến số độc lập, ta có:

$$y_{\downarrow M}(n) = x(nM)$$

$\Rightarrow$

$$Y_{\downarrow M}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\downarrow M}(n)(e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nM)(e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)(e^{j\omega})^{-\frac{m}{M}}$$

với  $m = nM$

Dãy  $p(m)$  được định nghĩa:

$$p(m) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} W_M^{-lm} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}lm} = \begin{cases} 1 & \text{với } m = nM, n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{với } m \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{\downarrow M}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)p(m)(e^{j\omega})^{\frac{m}{M}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}lm} x(m)(e^{j\omega})^{\frac{m}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[ (e^{j\omega})^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l} \right]^{-m} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left( (e^{j\omega})^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l} \right) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X \left( (e^{j\omega})^{\frac{1}{M}} W_M^l \right) \end{aligned}$$

hoặc có thể viết dưới dạng:

$$MY_{\downarrow M} \left( (e^{j\omega})^M \right) = \sum_{l=0}^{M-1} X \left( (e^{j\omega}) e^{-j\frac{2\pi}{M}l} \right)$$

Nhận xét:

- Thành phần với  $l = 0$   $X(e^{j\frac{\omega}{M}})$  chính là bản ảnh dãn rộng  $M$  lần của  $X(e^{\tilde{j}\omega})$ .

-  $M-1$  thành phần, với  $1 \leq l \leq M-1$ ,  $X(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}})$  là bản ảnh trễ đồng dạng của bản trái rộng  $X(e^{\tilde{j}\frac{\omega}{M}})$ .

-  $Y_{\downarrow M}(e^{j\omega})$  cũng có chu kỳ là  $2\pi$  theo  $\omega$ , là kết quả tổ hợp của  $M$  thành phần, bởi vì thực chất nó là tổ hợp biến đổi Fourier của các dãy hợp lại.

- Trường hợp  $M = 2$ , với  $l = 0$  thì  $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$  là bản ảnh dãn rộng 2 lần của  $X(e^{j\omega})$ , tức là bê rộng phổ lớn hơn 2 lần nhưng bản thân  $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$  không gây chồng phổ. Nhưng vì còn thành phần  $l = 1$   $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$  là bản ảnh trễ đồng dạng với  $X(e^{j\frac{\omega}{2}})$ . Chính thành phần  $l = 1$  sẽ xếp chồng với thành phần  $l = 0$  gây hiện tượng chồng phổ và như vậy hiện tượng này sẽ làm mất thông tin chứa trong  $x(n)$  khi đi qua bộ phân chia.

- Do lý do làm hư thông tin nên thành phần với  $1 \leq l \leq M-1$  được gọi là thành phần hư danh (aliasing). Nhưng thành phần hư danh này cũng

có thể không gây hiện tượng chồng phỏ nếu tín hiệu vào bộ phân chia  $x(n)$  có dải tần hữu hạn là  $-\pi/M < \omega < \pi/M$ . Tức là  $x(n)$  được lấy mẫu với tần số lấy mẫu  $F_s$  lớn gấp  $M$  lần  $F_{Ny}$  từ một tín hiệu tương tự  $x_a(t)$  có bề rộng phỏ hữu hạn  $F_a$ , tức là:  $F_s = 2MF_a$ .

- Một logic đơn giản là nếu tăng tần số lấy mẫu  $M$  lần, tức là ta cho  $x_a(t)$  qua bộ lấy mẫu với  $F_s = MF_{Ny}$ , sau đó lại cho qua bộ phân chia hệ số  $M$  tức là giảm đi  $M$  lần thì ta sẽ thu được kết quả như cho  $x_a(t)$  qua bộ lấy mẫu với  $F_s' = F_{Ny}$ .

- Phép phân chia làm  $x(n)$  co hẹp trong miền thời gian (nếu  $n$  là thời gian) thì dẫn đến hiện tượng dãn rộng trong miền tần số.

### 3.1.2- PHÉP NỘI SUY

#### 3.1.2.1-Định nghĩa phép nội suy:

Việc tăng tần số lấy mẫu từ giá trị  $F_s$  đến một giá trị  $F_s'$  ( $F_s' > F_s$ ) được định nghĩa là phép nội suy.

Nếu  $F_s' = LF_s$  ( $L > 1$  và nguyên dương) thì ta gọi đó là phép nội suy theo hệ số  $L$  và  $L$  gọi là hệ số nội suy.

#### 3.1.2.2-Định nghĩa bộ nội suy:

Hệ thống chỉ làm nhiệm vụ tăng tần số lấy mẫu được gọi là bộ nội suy.

Ký hiệu:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\uparrow L} & & \\ x(n) & & y \uparrow_L (n) \end{array}$$

Ký hiệu toán tử biểu diễn phép nội suy:

$$\uparrow_L[x(n)] = y \uparrow_L (n)$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow L & \\ \text{hay } & x(n) & y \uparrow_L (n) \end{array}$$

#### 3.1.2.3-Biểu diễn phép nội suy trong miền biến số $n$ :

Giả sử ta có bộ nội suy theo hình:

$\uparrow L$

$$\begin{array}{ll} x(n) & y_{\uparrow L}(n) = x(n/L) \\ F_s & F_z' \\ \Omega_s & \Omega_s' \\ T_s & T_s' \end{array}$$

Thấy rằng: tần số lấy mẫu  $F_s$  của tín hiệu rời rạc  $x(n)$  sau khi qua bộ nội suy với hệ số  $L$  sẽ tăng lên  $L$  lần, tức là:

$$F_s' = LF_s, \quad \Omega_s = 2\pi F_s, \quad \Omega_s' = 2\pi F_s' = 2\pi L F_s = L \Omega_s.$$

Hoặc chu kỳ lấy mẫu  $T_s = 1/F_s$  sẽ giảm đi  $L$  lần:  $T_s' = T_s / L$ .

Để hiểu rõ phép nội suy về mặt bản chất, ta sẽ biểu diễn tín hiệu vào và tín hiệu ra của bộ nội suy ở dạng không chuẩn hoá:

$\uparrow L$

$$x(nT_s) \quad x(nT_s') = x(nT_s/L) = y_{\uparrow L}(n)$$

Tín hiệu vào bộ nội suy là  $x(nT_s)$  và tín hiệu ra sẽ trở thành  $y_{\uparrow L}(n)$ .

Chú ý : - tín hiệu ra chính là tín hiệu vào  $x(n)$  mà giữa  $L$  mẫu bất kỳ của nó được chèn thêm ( $L-1$ ) mẫu có biên độ là 0, là do tần số lấy mẫu được tăng lên  $L$  lần sau khi đi qua bộ nội suy có hệ số  $L$ .

- chiều dài của  $x(n)$  bị dãn ra  $L$  lần, tức là:

$$L[y_{\uparrow L}(n)] / L[x(n)] = L$$

### 3.1.2.4-Biểu diễn phép nội suy trong miền tần số:

$$X(e^{j\omega}) \quad \uparrow L \quad Y_{\uparrow L}(e^{j\omega})$$

Trong miền biến số độc lập  $n$  ta có:

$$y_{\uparrow L}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(n)(e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{L}\right)(e^{j\omega})^{-n}$$

đổi biến:  $m = n/L$ , ta có:

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)(e^{j\omega})^{-mL} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)(e^{j\frac{\omega}{L}})^{-m}$$

Vậy:  $Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$  hay  $Y_{\uparrow L}\left(e^{j\frac{\omega}{L}}\right) = X(e^{j\omega})$

Nhận xét:

-  $Y_{\uparrow L}(e^{j\omega})$  là bản ảnh co hép  $L$  lần của  $X(e^{j\omega})$ , nhưng lại xuất hiện  $(L-1)$  bản sao chụp phổ cơ bản.  $(L-1)$  bản sao chụp này là các ảnh được tạo ra bởi bộ nội suy hệ số  $L$ . Hiện tượng xuất hiện các bản sao chụp phụ này gọi là hiệu ứng tạo ảnh.

- Với  $L = 2$  thì hiệu ứng tạo ảnh không gây hiện tượng chồng phổ, như vậy nó không làm mất thông tin.

- Phép nội suy làm tín hiệu  $x(n)$  dãn rộng trong miền thời gian (nếu  $n$  là biến thời gian) thì sẽ dẫn đến hiện tượng co hép trong miền tần số, đây là tính chất của biến đổi Fourier.

- Phép nội suy làm chèn thêm  $(L-1)$  mẫu có biên độ 0 vào giữa 2 mẫu của  $x(n)$  thì trong miền tần số sẽ tạo ra  $(L-1)$  bản sao chụp phụ phổ cơ bản, tức là  $(L-1)$  bản sao chụp phụ này sẽ chèn vào giữa 2 phổ cơ bản.

- Nội suy ở đây có nghĩa là nén tín hiệu  $x(n)$  với tần số lấy mẫu  $F_s$  sau khi qua bộ nội suy sẽ có tần số lấy mẫu  $F_s' = LF_s$  và với các mẫu có biên độ 0, sau đó cho qua bộ lọc có tần số cắt là  $\pi/L$  thì ở đầu ra của bộ lọc ta sẽ thu được tín hiệu với tần số lấy mẫu  $LF_s$  nhưng các mẫu biên độ 0 đã được nội suy từ các mẫu biên độ khác 0 của  $x(n)$ , tức là ta có tín hiệu  $x(n)$  có tần số lấy mẫu  $LF_s$  với các mẫu biên độ khác không, quá trình nội suy này được thực hiện bằng mạch lọc nội suy.

### 3.1.3- DÃY LỌC SỐ (FILTER BANK):

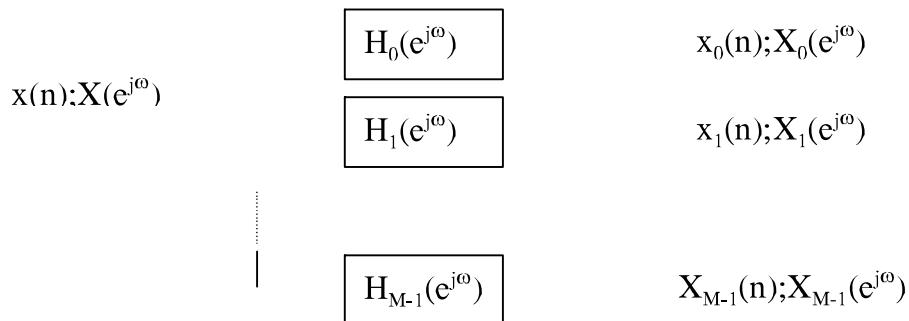
**3.1.3.1-Định nghĩa:** Dãy lọc số là một tập hợp các bộ lọc số với cùng chung một đầu vào và nhiều đầu ra hoặc với nhiều đầu vào và một đầu ra.

Có hai loại dãy lọc số là dãy lọc số phân tích và dãy lọc số tổng hợp.

#### 3.1.3.2-Định nghĩa dãy lọc số phân tích (analysis filter bank):

Dãy lọc số phân tích là một tập hợp các bộ lọc số có đáp ứng tần số là  $H_k(e^{j\omega})$  được nối với nhau theo kiểu một đầu vào và nhiều đầu ra.

Cấu trúc của dãy lọc phân tích:



Hình 3.1-Cấu trúc của dãy lọc số phân tích

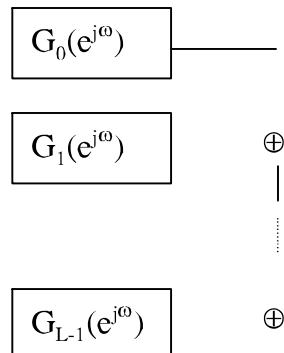
Ta thấy tín hiệu  $x(n)$  đưa vào đầu vào và được phân tích thành  $M$  tín hiệu ở đầu ra là  $x_k(n)$  ( $0 \leq k \leq M-1$ ). Như vậy trong miền tần số mỗi tín hiệu  $x_k(n)$  sẽ chiếm một dải tần số con trong dải tần số của  $x(n)$  nên  $M$  tín hiệu  $x_k(n)$  được gọi là tín hiệu dải con (subband).

Còn các bộ lọc số:  $H_0(e^{j\omega})$  là bộ lọc thông thấp,  $H_1(e^{j\omega})$  đến  $H_{M-2}(e^{j\omega})$  là các bộ lọc thông dải, còn  $H_{M-1}(e^{j\omega})$  là bộ lọc số thông cao mà các tần số cắt của các bộ lọc số này sẽ kế tiếp nhau. Như vậy các bộ lọc  $H_0(e^{j\omega}), \dots, H_{M-1}(e^{j\omega})$  được gọi là các bộ lọc số phân tích. Tập hợp các bộ lọc số này gọi là dãy lọc phân tích.

### 3.1.3.3-Định nghĩa dãy lọc số tổng hợp(synthesis filter bank):

Dãy lọc số tổng hợp là tập hợp các bộ lọc số có đáp ứng tần số là  $G_k(e^{j\omega})$  được nối với nhau theo kiểu nhiều đầu vào và một đầu ra.

Cấu trúc của dãy lọc số tổng hợp:



Hình 3.2-Dãy lọc tổng hợp

## 3.2- BIẾN ĐỔI WAVELET (WAVELET TRANSFORM):

### 3.2.1- GIỚI THIỆU

Sự biến đổi một hàm hoặc một tín hiệu  $s(t)$  là một phép toán mà kết quả của nó là sự biểu diễn khác của  $s(t)$ . chúng ta đã được nghiên cứu hoặc biết về biến đổi Fourier và Short Time Fourier Transform như là các phương pháp biến đổi truyền thống. Hiện nay, người ta đang nghiên cứu và phát triển một phương pháp biến đổi tín hiệu mới trong cả hai lĩnh vực: toán học thuần tuý và khoa học ứng dụng. Đó là biến đổi Wavelet.

Xét ba phương pháp để biến đổi tín hiệu

- Biến đổi Fourier (biến đổi tín hiệu thành các sóng cosin)
- Biến đổi Fourier thời gian ngắn STFT (biến đổi tín hiệu thành các dạng sóng cosin)
- Biến đổi Wavelet.

Trước đây người ta sử dụng phương pháp phân tích tín hiệu thành các hài cơ bản. khi đó tín hiệu là một tổng các cosin:

$$a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots +$$

Đây là phép biến đổi Fourier, được Fourier tìm ra cách đây 180 năm ở Paris. Tất cả các tín hiệu đều có thể được phân tích thành các sóng hài nhờ biến đổi Fourier. Những người thực hiện nó hầu hết là thực hiện theo bản năng - cường độ tín hiệu tại mỗi thời điểm được thay thế bằng biên độ của mỗi sóng. Từ đó xuất hiện một câu hỏi lớn. Đó là cần phải sử dụng bao nhiêu tần số cho một tín hiệu có mật độ cao. Có lẽ là phải rất nhiều thì kết quả nén mới tốt được.

Phương pháp thứ hai là biến đổi Fourier thời gian ngắn. Ở phương pháp này các đoạn tín hiệu ngắn được biến đổi riêng rẽ. Ở trong mỗi đoạn, tín hiệu được phân tích thành các sóng cosin như ở phương pháp trước. Theo phương pháp này thì hầu hết các tín hiệu dài đều được chia nhỏ ra và sau đó được biến đổi theo từng phần một. Nó khắc phục được nhược điểm của biến đổi Fourier, vì theo Fourier thì nó không đúng hoàn toàn vì tín hiệu biến đổi phải tuần hoàn và tiến ra xa vô cùng. Tuy nhiên nó cũng có hạn chế lớn, đó là có những điểm cắt đột ngột gây ra hiệu ứng blocking. Chúng ta có thể nghe thấy hoặc không khi nghe nhạc nhưng luôn có thể thấy chúng khi xem các hình ảnh. Hiệu ứng này làm giảm độ tin cậy của STFT và nó yêu cầu phải có một phương pháp khác thay thế.

Có một ý tưởng mới trong việc xử lý tín hiệu. Đó là thay vì các sóng cosin kéo dài đến vô cùng hoặc là bị cắt đột ngột thì ta sẽ sử dụng các khối

xây dựng mới là các Wavelet (nguyên bản tiếng Pháp là Ondelet). Đó là các sóng nhỏ có điểm bắt đầu và điểm kết thúc. Những sóng nhỏ này được xuất phát từ Wavelet mẹ  $\psi(t)$ -là mức tín hiệu chuẩn ở thời điểm  $t$ . Theo phương pháp này thì một tín hiệu dài được chia nhỏ ra thành một cơ sở của các tín hiệu - đó là các Wavelet. Các Wavelet xuất phát từ một hàm đơn  $\psi(t)$  nhờ tăng tốc độ lấy mẫu(tần số lên gấp đôi) và thời gian trễ. Các biên độ được gửi đến bên thu, ở đó nó được khôi phục lại tín hiệu ban đầu

### 3.2.2- BIẾN ĐỔI WAVELET

Cũng tương tự như biến đổi Fourier thời gian ngắn, biến đổi Wavelet cũng ánh xạ một hàm thời gian thành một hàm hai chiều của  $a$  và  $\tau$  (thay vì  $\omega$  và  $\tau$  trong STFT). Tham số  $a$  được gọi là tỷ lệ. Nó chia tỷ lệ một hàm bằng việc nén hoặc dãn nó, và  $\tau$  là tịnh tiến của hàm Wavelet dọc theo trục thời gian.

3.2.2.1-. Biến đổi wavelet liên tục:

3.2.2.1.1-*Định nghĩa:*

Biến đổi wavelet liên tục (Continuous Wavelet Transform) của một hàm  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  được định nghĩa như sau:

$$CWT(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(t) f(t) dt = \langle \psi_{a,b}(t), f(t) \rangle \quad (3.2.2.1.1)$$

trong đó  $\psi(t)$  được gọi là wavelet mẹ.

Và:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.2.2.1.2)$$

Nếu một hàm  $f(t)$  có biến đổi wavelet liên tục là  $CWT(a,b)$  thì hàm đó được khôi phục lại theo công thức sau:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{c^2} \quad (3.2.2.1.3)$$

trong đó  $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$

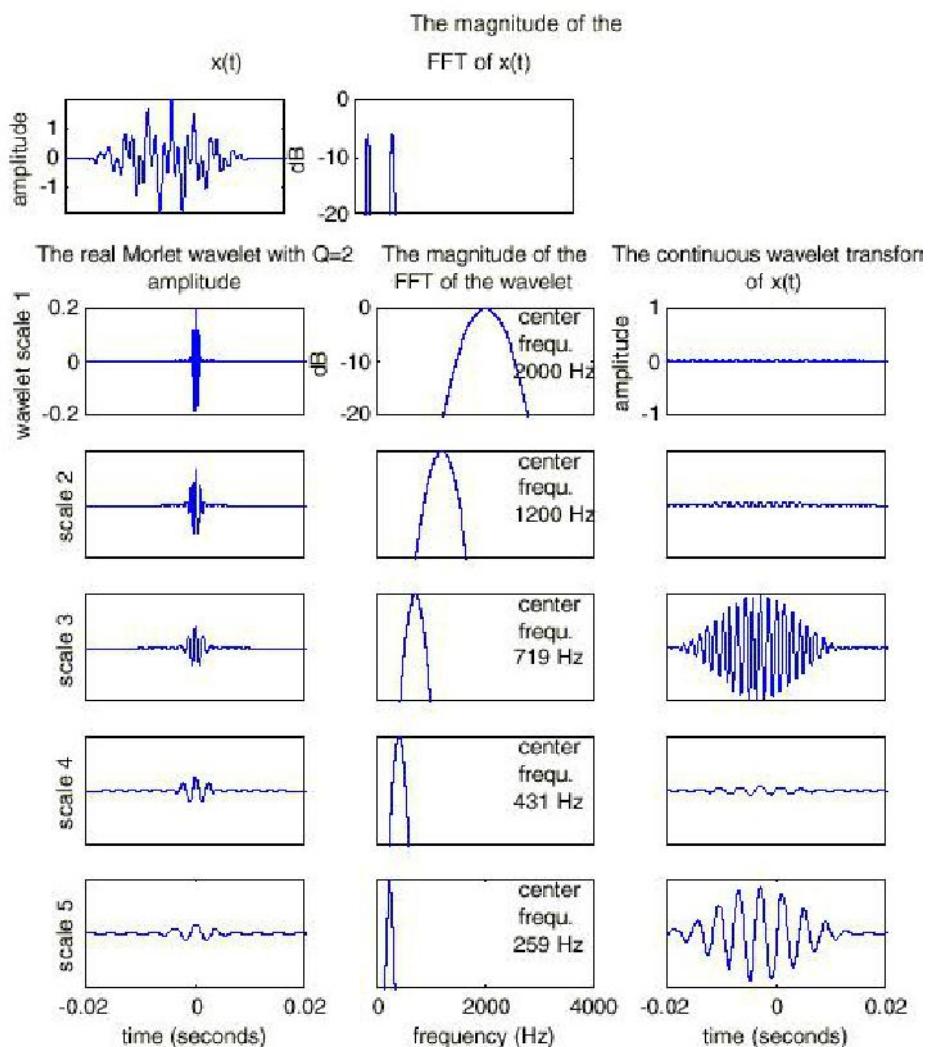
Tổng quát hóa các công thức phân tích / tổng hợp cho hai wavelet khác nhau:  $\psi_1(t)$  cho phân tích và  $\psi_2(t)$  cho tổng hợp. Nếu hai wavelet thoả mãn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_1(\omega)| |\Psi_2(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

thì công thức khôi phục là:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi_1 \psi_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi_{1,a,b}, f \rangle \psi_{2,a,b} \frac{da db}{a^2} \quad (3.2.2.1.4)$$

trong đó  $C_{\psi_1 \psi_2} = \int \frac{|\Psi_1^*(\omega) \Psi_2(\omega)|}{|\omega|} d\omega$



**3.2.2.1.2-Các tính chất của CWT:**

• *Tuyến tính*: tính chất tuyến tính của CWT nhận được từ sự tuyến tính của tích vô hướng.

• *Tính chất trễ*:

*Hình 3.3-Tính chất trễ của biến đổi wavelet liên tục.*

Nếu  $f(t)$  có biến đổi wavelet liên tục là  $CWT(a,b)$  thì  $f'(t) = f(t-b')$  có biến đổi như sau:

$$CWT_f(a,b) = CWT_f(a,b-b')$$

• *Tính chất tỷ lệ*:

**Hình5.2- subband**

*Hình 3.4-Tính chất tỷ lệ. (a)tỷ lệ với hệ số 2. (b)bình phương năng lượng trong mặt phẳng biến đổi wavelet.*

---

Nếu  $f(t)$  có biến đổi wavelet liên tục là  $CWT_f(a,b)$  thì  $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right)$  có biến đổi wavelet liên tục như sau:

$$CWT_f(a,b) = CWT_f(a/s, b/s)$$

- *Bảo toàn năng lượng:*

CWT có tính chất bảo toàn năng lượng tương tự như công thức Parseval của biến đổi Fourier.

Nếu  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  có biến đổi wavelet liên tục là  $CWT(a,b)$  thì ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT(a,b)|^2 \frac{da.db}{a^2} \quad (3.7)$$

Tổng quát hoá công thức bảo toàn năng lượng này gồm tích vô hướng của hai hàm theo thời gian và theo miền wavelet. Khi đó (3.7) trở thành:

$$\int f^*(t)g(t)dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f^*(a,b)CWT_g(a,b) \frac{da.db}{a^2} \quad (3.8)$$

- *Các tính chất định vị:*

*Định vị thời gian:* xét xung Dirac ở thời điểm  $t_0$ ,  $\delta(t-t_0)$ , và một wavelet  $\psi(t)$ . Biến đổi wavelet liên tục của xung Dirac là:

$$CWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \delta(t-t_0) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t_0-b}{a}\right)$$

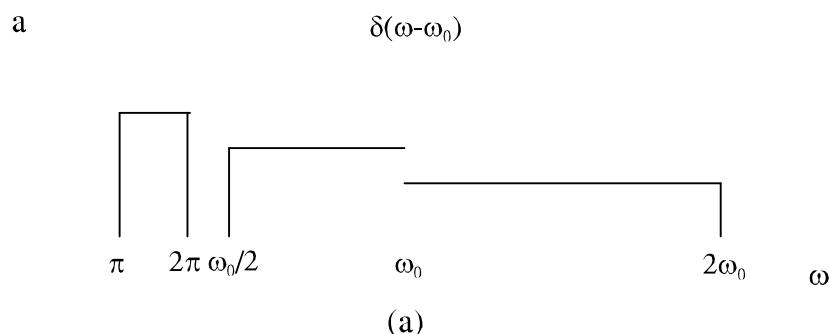
với tỷ lệ  $a_0$  cho trước, nghĩa là một đường ngang trong miền wavelet, thì biến đổi chính bằng wavelet đã được tỷ lệ (và chuẩn hoá) nghịch đảo trong miền thời gian và tập trung ở sự định vị của Dirac.

Hình5.3-subband

*Hình 3.5-Tính chất định vị thời gian trong trường hợp wavelet Haar pha không.*

Hình vẽ trên cho thấy sự định vị của wavelet Haar giá compact (với pha không).

*Định vị tần số:* xét wavelet sinc (nghĩa là bộ lọc thông dải hoàn hảo), phổ biên độ của nó bằng 1 khi  $\omega$  nằm giữa  $\pi$  và  $2\pi$ . Xét một hàm sin phức có biên độ bằng 1 tại tần số  $\omega_0$ . Wavelet tần số cao nhất cho hàm sin đi qua có hệ số tỷ lệ  $a_{\min} = \pi/\omega_0$ , còn wavelet tần số thấp nhất cho hàm sin đi qua có  $a_{\max} = 2\pi/\omega_0$ .



a (b)

*Hình 3.6-Định vị tần số của biến đổi wavelet sử dụng wavelet sinc. (a) phổ biên độ và các bản ảnh tỷ lệ. (b) Độ lớn khác không của biến đổi wavelet liên tục.*

### *3.2.2.1.3- Wavelet Morlet:*

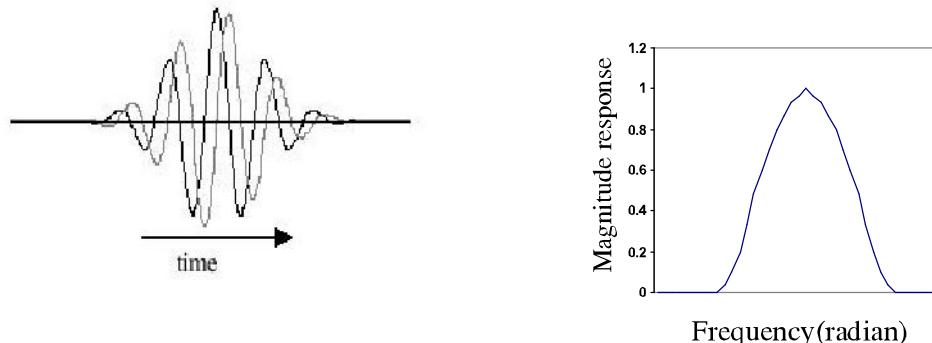
Wavelet Morlet là một ví dụ về biến đổi wavelet liên tục và được cho như sau:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (3.2.2.1.3.1)$$

Biến đổi Fourier của wavelet này là:

$$\Psi(\omega) = e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$$

Hệ số  $1/\sqrt{2\pi}$  để đảm bảo là  $\|\psi(t)\| = 1$ . Tần số trung tâm  $\omega_0$  được chọn sao cho giá trị thực của  $\psi(t)$  thứ hai bằng một nửa của giá trị thứ nhất.



Hình 3.7-wavelet Morlet. (a) miền thời gian. (b) phổ biên độ

### 3.2.2.2- Biến đổi Wavelet rời rạc (DWT):

Người ta đã chứng minh được là biến đổi wavelet liên tục có nhiều ứng dụng rất hiệu quả. Tuy nhiên trong một số ứng dụng thì biến đổi wavelet rời rạc lại tỏ ra phù hợp hơn. Có nhiều nguyên nhân:

- ngược lại với biến đổi Fourier, biến đổi wavelet liên tục không đưa ra một sự biểu diễn ngắn gọn nào của tín hiệu  $x(t)$  bởi vì nó thay đổi một tín hiệu một chiều thành một hàm hai chiều. Do đó sử dụng biến đổi wavelet liên tục sẽ hướng chúng ta đến việc xử lý tín hiệu mà gồm nhiều phép tính hơn so với xử lý tín hiệu một chiều.
- Đối với nhiều chuỗi thời gian, biến đổi wavelet liên tục dư thừa theo cả thời gian và tỷ lệ, nghĩa là sự chênh lệch giữa  $W(\tau, t)$  và  $W(\tau', t)$  khi  $|\tau - \tau'|$  nhỏ so với  $\tau$  hoặc  $W(\tau, t)$  và  $W(\tau, t')$  khi  $|t - t'|$  nhỏ so với  $\tau$ .
- Với sự tiến dần của các máy tính số hiện đại, hầu hết các tín hiệu đều được chọn lọc hoặc được giả thiết là một sự chuyển đổi “tương tự sang số” một lần. Số liệu mà các nhà khoa học sử lý được rời rạc hóa cho nên cũng cần phải rời rạc hóa biến đổi wavelet liên tục.
- Như đã thảo luận trước đó, biến đổi wavelet rời rạc có ưu điểm lớn trong thực trạng của chính nó, bởi vì ngược lại với biến đổi wavelet liên tục, nó là một biến đổi trực chuẩn mà giải tương quan một lớp quan trọng của các quá trình stochastic.

### 3.2.2.2.1- Định nghĩa:

Phân tích wavelet phân tích một tín hiệu thành các bản ảnh tỷ lệ và trễ của một wavelet gốc (wavelet mẹ). Wavelet  $\psi(t)$  có giá trị trung bình bằng không sao cho:

$$\int \psi(t)dt = 0 \quad (3.2.2.1.1)$$

Biến đổi wavelet liên tục CWT(a,b) của một hàm  $f(t)$  với một wavelet mẹ được định nghĩa như sau:

$$CWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \quad (3.2.2.1.2)$$

Từ phương trình CWT(a,b) ta thấy các hệ số CWT được biểu diễn như một hàm của tỷ lệ a và vị trí b. Tỷ lệ thấp tương ứng với một tín hiệu được nén cho nên tỷ lệ nhỏ thì các chi tiết thay đổi nhanh còn tỷ lệ lớn thì thay đổi chậm.

Khi đó biến đổi wavelet rời rạc thu được bằng cách lấy mẫu biến đổi wavelet liên tục ở các tỷ lệ và vị trí là luỹ thừa của hai:  $a = 2^j$ ,  $b = ka$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

$$DWT(j,k) = \int f(t)\psi_k^j(t)dt$$

$$\text{trong đó } \psi_k^j(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$$

Biến đổi Wavelet trực giao rời rạc được dùng để phân tích một tín hiệu thành một số mức phân giải. Sự phân tích đa phân giải được thực hiện nhờ việc chiếu tín hiệu lên các không gian con xấp xỉ và các không gian con chi tiết trực giao.

Một cách hiệu quả thực hiện DWT là sử dụng bank lọc. Phương pháp này do Mallat phát triển năm 1988. Sự thực hiện bank lọc của DWT dựa trên tính chất đa phân giải của nó.

### 3.2.2.2.1- Phân tích đa phân giải và việc thực hiện DWT bằng QMF.

Như tên gọi, phân tích MRA đề cập tới việc phân tích một tín hiệu tại một số độ phân giải khác nhau. Một phân tích đa phân giải trong  $L^2(\mathbb{R})$  là một chuỗi tăng dần của các không gian con kín.

Mỗi không gian con  $V_j$  được gọi là một không gian xấp xỉ  $\{\phi_k^j(t) = 2^{j/2} \cdot \phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$  tạo thành một cơ sở trực giao của  $V_j$ . Độ phân giải giảm từ  $2^j$  xuống  $2^{j+1}$  vì  $V_j$  là không gian con của  $V_{j+1}$  cho nên tồn tại một phần bù trực giao  $W_j$  của  $V_j$  trong  $V_{j+1}$  sao cho:

$$V_j \oplus W_j = V_{j-1} \text{ và } \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(R)$$

Cũng tồn tại một hàm wavelet mẹ  $\psi$  là  $\{\psi_k^j(t) = 2^{-j/2}\psi(2^j \cdot t - k), k \in \mathbb{Z}\}$  tạo thành một cơ sở trực giao của  $W_j$ .

Sau đây ta xét đến việc thực hiện bank lọc của Mallat với biến đổi wavelet rời rạc.

Gọi  $V_j$  là một xấp xỉ đa phân giải,  $\phi(t)$  là hàm tỷ lệ tương ứng và  $f(t)$  thuộc  $V_0, f(t)$  thuộc  $V_0$  có thể được biểu diễn bằng các hệ số xấp xỉ của nó ở tỷ lệ  $2^0$  là:

$$f(t) = \sum_k \langle f, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0$$

Định nghĩa  $S_0 = \{S_k^0 = \langle f, \phi_k^0 \rangle\}$  là một chuỗi các hệ số xấp xỉ của  $f$  ở tỷ lệ  $2^0$ . Hình chiếu trực giao của  $f$  trong  $V_{j-1}$  được phân tích thành tổng của các hình chiếu trực giao của  $V_j$  và  $W_j$ . Khi đó có:

$$P_{V_0} \cdot f = P_{V_j} \cdot f + P_{W_j} \cdot f$$

Trong đó  $P$  là toán tử chiếu trực giao

$$P_{V_j} \quad \text{Là xấp xỉ thô của } f \text{ ở tỷ lệ } 2^1$$

$P_{W_j}$  là các thành phần tinh của  $f$  ở tỷ lệ  $2^0$

$$P_{V_{j-1}} \cdot f = P_{V_j} \cdot f + P_{W_j} \cdot f$$

và

$$P_{V_0} \cdot f = P_{V_L} \cdot f + \sum_{k=1}^L P_{W_k} \cdot f$$

mỗi  $P_{V_j}$  được đặc trưng bởi một chuỗi các hệ số xấp xỉ :

$$S_j = \{S_k^j = \langle f, \phi_k^j \rangle\}$$

Và mỗi  $P_{W_j}$  được đặc trưng bởi một chuỗi các hệ số chi tiết:

$$D_j = \{D_k^j = \langle f, \psi_k^j \rangle\}$$

Gọi  $h$  là một bộ lọc rời rạc sao cho:

$$S_k^{j+1} = \sum_m S_m^j \cdot h(m - 2k)$$

Tương tự gọi  $g$  là một bộ lọc rời rạc sao cho:

$$D_k^{j+1} = \sum_m D_m^j \cdot g(m - 2k)$$

Với:  $g(n) = (-1)^n \cdot h(-n+1)$

$$h(m-2k) = \langle \phi_m^j, \phi_k^{j+1} \rangle$$

$$g(m-2k) = \langle \phi_m^j, \psi_k^{j+1} \rangle \text{ với mọi } j, k \in \mathbb{Z}$$

Vì  $V_{j-1}$  là hợp của  $V_j$  và  $W_j$  nên ta có

$$\begin{aligned}\phi_k^j &= \sum_n \langle \phi_k^j, \phi_n^{j+1} \rangle \phi_n^{j+1} + \sum_n \langle \phi_k^j, \Psi_n^{j+1} \rangle \Psi_n^{j+1} \\ &= \sum_n h(k-2n) \phi_n^{j+1} + \sum_n g(k-2n) \Psi_n^{j+1}\end{aligned}$$

$$S_k^j = \sum_n \bar{h}(2n-k) S_n^{j+1} + \sum_n \bar{g}(2n-k) D_n^{j+1}$$

Vì việc khôi phục được thực hiện theo công thức:

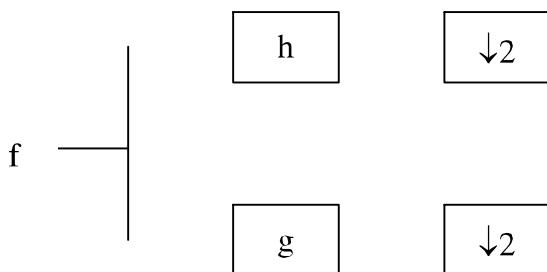
Trong đó  $\bar{h}(n) = h(-n)$  và  $\bar{g}(n) = g(-n)$ .  $h(n), g(n), \bar{h}(n), \bar{g}(n)$  xác định bộ lọc QMF.

Gọi  $H(\omega) = \sum h(k) \exp(-ik\omega)$  và  $G(\omega) = \sum g(k) \exp(-ik\omega)$  tương ứng là hàm truyền của  $g(n)$  và  $h(n)$ .

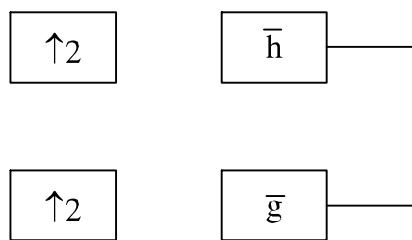
$$\begin{aligned}|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 &= 1 \\ G(\omega) &= \exp(-i\omega) H^*(\omega + \pi) \\ H(0) &= G(\pi) = 1, H(\pi) = G(0) = 0\end{aligned}$$

$H(\omega)$  là bộ lọc thông thấp và  $G(\omega)$  là bộ lọc thông cao. Cả  $H(\omega)$  và  $G(\omega)$  đều có đáp ứng xung hữu hạn và có thể khôi phục hoàn hảo.

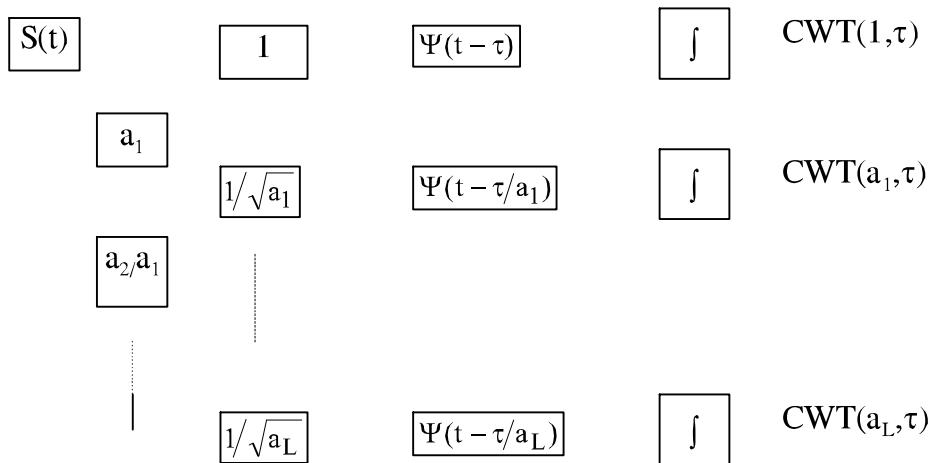
Sơ đồ phân tích một tín hiệu  $f$  bằng biến đổi wavelet rời rạc:



Sơ đồ tổng hợp bằng biến đổi wavelet rời rạc ngược



Sơ đồ bank lọc thực hiện biến đổi Wavelet



3.2.2.2.3- Các tính chất của biến đổi Wavelet rời rạc:

- Biến đổi Wavelet cung cấp một phép phân tích đa phân giải của một hàm. Bản ảnh dịch và tỉ lệ của hàm cơ sở cho phép sự định vị tần số – thời gian của số liệu được phân tích. DWT tạo ra sự phân giải tần số tốt hơn cho các tần số cao và phân giải thời gian tốt hơn cho các tần số thấp.
- Biến đổi Wavelet là sự tương quan giữa  $x(t)$  và  $\psi(t \cdot a)$ . Do đó biến đổi wavelet phù hợp với các ứng dụng cục bộ nhờ bộ lọc Match.
- Biến đổi wavelet tập trung hầu hết năng lượng trong các hệ số tần số thấp nhất
- Sử dụng hai bank lọc kênh cho phép thực hiện nhanh phép biến đổi wavelet.
- Hàm wavelet được thiết kế sao cho có ít điểm triệt tiêu nhất

3.2.2.3- Biến đổi wavelet hai chiều

(*Two-dimensional wavelet transform*):

Phân tích đa phân giải của một tín hiệu hai chiều được tạo ra nò tích tensor. Các cơ sở trực chuẩn của các không gian tích tensor thu được từ các tích riêng của hai cơ sở trực giao. Khi đó nếu  $V_j$  là một phân tích đa phân giải thì  $\bar{V}_j = V_j \otimes V_j$  là một phân tích đa phân giải với cơ sở trực giao:

$$\phi_{m,n}^j = \phi_m^j(x)\phi_n^j(y) \quad \text{đối với } \bar{V}_j \quad (3.2.2.3.1)$$


---

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^j = & \left\{ \psi_{m,n}^{j,1} = \phi_m^j(x) \psi_n^j(y), \psi_{m,n}^{j,2} = \psi_m^j(x) \phi_n^j(y), \psi_{m,n}^{j,3} = \psi_m^j(x) \psi_n^j(y) \right\} \text{đối} \\ \text{với } \overline{W}_j & \quad (3.2.2.3.2) \end{aligned}$$

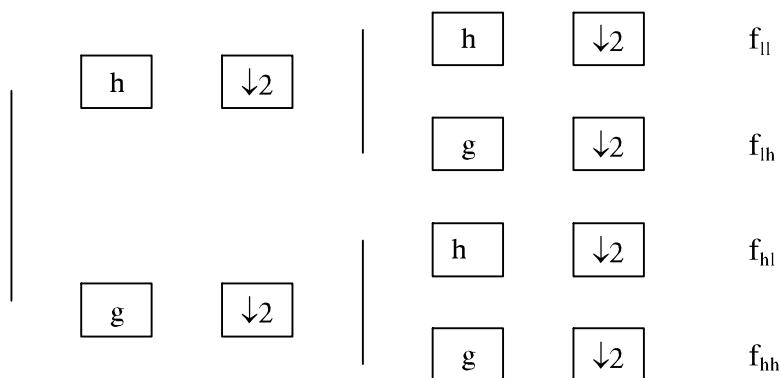
trong đó  $\bar{W}_j$  là thành phần trực giao của  $\bar{V}_j$  trong  $\bar{V}_{j+1}$  và được đặc trưng bởi ba không gian con trong trường hợp hai chiều. Ba chuỗi chi tiết này:

$$D_{m,n}^{j,l} = 2^j \langle f, \phi_m^j \psi_n^l \rangle \quad (3.2.2.3.3)$$

$$D_{m,n}^{j,2} = 2^j \langle f, \psi_m^j \phi_n^j \rangle \quad (3.2.2.3.4)$$

$$D_{m,n}^{j,3} = 2^j \langle f, \psi_m^j \psi_n^j \rangle \quad (3.2.2.3.5)$$

theo các hướng ngang, dọc, chéo của  $f$  ở tỷ lệ  $2^j$ . Khi thực hiện bằng bank lọc thì biến đổi wavelet hai chiều được coi như là một tầng các phép toán biến đổi wavelet một chiều. Biến đổi wavelet đầu tiên tính theo hướng ngang, biến đổi thứ hai tính theo hướng dọc. Sau mỗi giai đoạn phân tích wavelet hai chiều thì số liệu đầu vào hai chiều được chiếu lên bốn không gian con có các tần số low-low, high-low, low-high, high-high. Các phân tích tiếp theo lại được áp dụng cho băng con có các tần số low-low.



Hình 3.8 - Biến đổi wavelet hai chiều

LL	LH
HL	HH

*Hình 3.9-sơ đồ các hệ số biến đổi wavelet hai chiều*

### **3.2.3- SO SÁNH STFT VÀ WT**

WT	STFT
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ở một tần số mang <math>\omega_0</math> độ rộng cửa sổ thay đổi nghĩa là dãn hoặc nén, thì tần số mang trở thành <math>\omega_0/a</math> với độ rộng cửa sổ thay đổi từ <math>T</math> đến <math>aT</math>, còn số chu kỳ trong cửa sổ thì vẫn không đổi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ở một tần số phân tích của <math>\omega_0</math>, việc thay đổi độ rộng cửa sổ sẽ tăng hoặc giảm số chu kỳ của <math>\omega_0</math> trong cửa sổ</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• ổn định về độ dài thời gian của các đoạn, nhưng độ dài tần số của WT thì không cố định mà thay đổi. Nghĩa là <math>\Delta f</math> tăng khi <math>\Delta t</math> giảm.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ổn định về độ dài thời gian và tần số</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Khác với STFT, biến đổi wavelet có số lượng các dao động cố định trong một chu kỳ thời gian-tần số.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• số lượng các dao động trong một chu kỳ thời gian tần số không cố định</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wavelet có một ưu điểm lớn so với STFT là wavelet tự giới hạn về thời gian, bởi vậy tín hiệu động không cần được chia thành các đoạn tĩnh trước khi áp dụng biến đổi .</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tín hiệu động trước khi áp dụng STFT phải được chi thành các đoạn nhỏ có tính chất tĩnh</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ở các tỷ lệ tần số cao, biến đổi wavelet tạo ra sự phân giải thời gian tốt hơn so với STFT.</li> </ul>	
Khi tần số trung tâm wavelet giảm thì độ phân giải tần số tăng nhưng độ phân giải thời gian giảm.	

Hình 3.10-Sự trái ngược giữa STFT và Wavelet

Từ hình vẽ ta thấy độ phân giải tần số tỷ lệ trực tiếp với độ rộng cửa sổ đổi với cả hai phép biến đổi, tuy nhiên trong trường hợp cuối cùng tần số trung tâm kèm theo độ rộng cửa sổ thay đổi (tỷ lệ với thời gian)

Wavelet mẹ  $\Psi(t)$  có thể là thực hoặc phức nên ứng với nó thì kết quả biến đổi Wavelet cũng có thể là thực hoặc phức. Khi  $\Psi(t)$  là phức thì liên hợp phức của nó được sử dụng trong các công thức (1) và (2). Trong một số ứng dụng nó có thể có lợi trong việc sử dụng Wavelet phức vì pha của biến đổi Wavelet có thể mang thông tin có ích.

### 3.3 -CÁC WAVELET TRỰC GIAO HAI CHIỀU:

Ngoài các họ wavelet trực giao có một phương pháp có thể xây dựng các wavelet trực giao hai chiều. Chúng ta sẽ nối lồng các điều kiện trực giao đã sử dụng, đồng thời vẫn duy trì các yêu cầu về tập hợp các hàm  $\psi_{m,n}$  độc lập tuyến tính và tạo thành một cơ sở.

Gọi  $\{\psi_{m,n}(t)\}$  và  $\{\bar{\psi}_{m,n}(t)\}^T$  là các họ wavelet tương ứng với bộ tổng hợp và phân tích ( $m, n$  là các đại lượng dãn và trễ). Khi đó ở họ trực giao hai chiều thì chúng phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$\langle \psi_{m,n}(t), \bar{\psi}_{m,n}(t) \rangle = \delta[m - k]\delta[n - l] \quad (3.3.1)$$

Nếu họ wavelet tạo thành không gian  $L^2(\mathbb{R})$  thì bất kỳ hàm nào của không gian đều có thể viết như sau:

$$f(t) = \sum_m \sum_n \langle \psi_{m,n}, f \rangle \bar{\psi}_{m,n}(t) \quad (3.3.2)$$

$$= \sum_m \sum_n \langle \bar{\psi}_{m,n}, f \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (3.3.3)$$

vì  $\psi$  và  $\bar{\psi}$  có vai trò đối xứng với nhau. Có nhiều phương pháp khác nhau để tìm ra các họ trực giao hai chiều như thế. Ví dụ có thể xây dựng một cơ sở spline trực giao hai chiều bằng việc không trực giao hóa wavelet Battle-Lemarie.

Một phương pháp khác bắt đầu với một dãy lọc trực giao hai chiều (biorthogonal filter bank) và sử dụng phương pháp lặp dãy lọc. Cả các bộ lọc tổng hợp và các bộ lọc phân tích đều phải được lặp lại. Ví dụ có thể sử dụng các bộ lọc pha tuyến tính chiều dài hữu hạn và thu được các wavelet đối xứng và giá compact mà điều này không thể thực hiện được trong trường hợp trực giao.

Trong một dãy lọc trực giao hai chiều với các bộ lọc phân tích / tổng hợp  $H_0(z)$ ,  $H_1(z)$ ,  $G_0(z)$ ,  $G_1(z)$  thì khôi phục hoàn hảo với các bộ lọc FIR nghĩa là:

$$G_0(z) H_0(z) - G_0(-z) H_0(-z) = 2 \quad (3.3.4)$$

$$\text{Và} \quad H_1(z) = -z^{2k+1} G_0(-z) \quad (3.3.5)$$

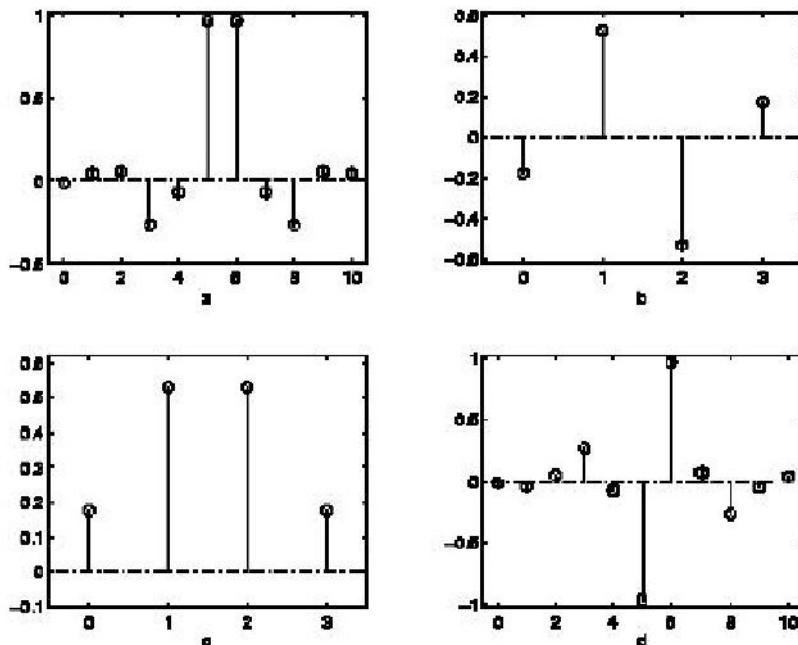
$$G_1(z) = z^{2k+1} H_0(-z) \quad (3.3.6)$$

Chúng ta có thể lập một dãy lọc trực giao như thế ở kênh thông thấp và tìm ra các đáp ứng xung tương ứng. Có thể định nghĩa các bộ lọc thông thấp được lập như sau:

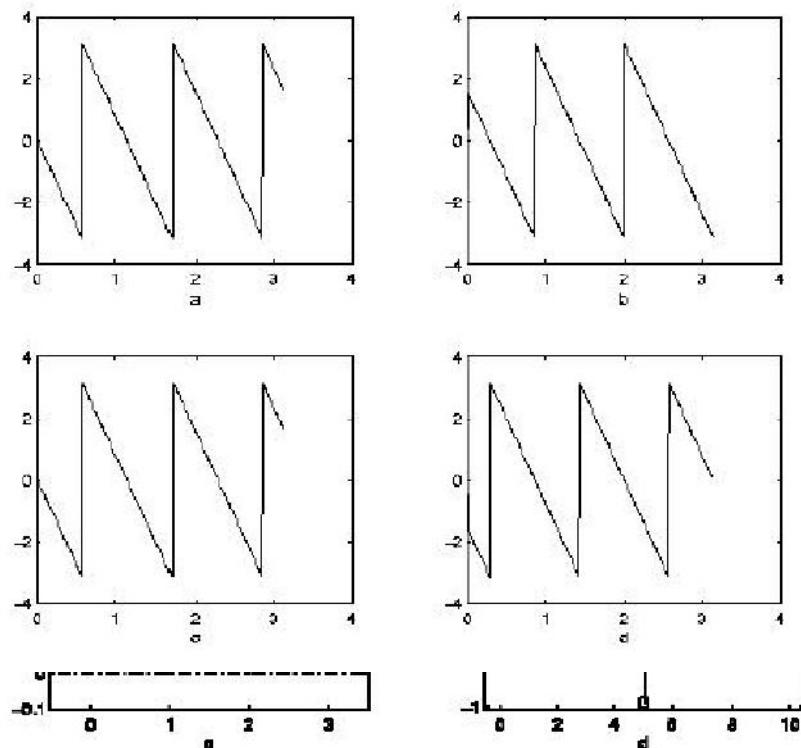
$$H_0^{(i)}(z) = \prod_{k=0}^{i-1} H_0(z^{2k})$$

$$G_0^{(i)}(z) = \prod_{k=0}^{i-1} G_0(z^{2k})$$

trên đây là sự trình bày ngắn gọn về việc xây dựng wavelet trực giao hai chiều dựa trên các bank lọc.



Hình 3.12-Đáp ứng xung của bộ lọc trực giao hai chiều phân tích / tổng hợp. (a)  $h(n)$ . (b)  $g(n)$ . (c)  $\bar{h}(n)$ . (d)  $\bar{g}(n)$ .



Hình 3.13-Đáp ứng pha của các bộ lọc phân tích / tổng hợp.

### 3.4- GÓI WAVELET:

Trong biến đổi Wavelet rời rạc, mỗi không gian xấp xỉ  $V_j$  được phân tích thành  $V_{j+1}$  và  $W_{j+1}$  còn các không gian con chi tiết  $W_j$  thì không thay đổi. Các gói Wavelet tạo ra một tập các cơ sở nhờ việc phân hoạch cả không gian con xấp xỉ và không gian con chi tiết thành các không gian con xấp xỉ và không gian con chi tiết nhỏ hơn nữa. Biến đổi gói Wavelet thường được kết hợp với một giải thuật chọn cơ sở tốt nhất để đạt được một cơ sở phù hợp trong tập hợp các cơ sở phân tích có thể.

Giải thuật chọn cơ sở tốt nhất cần một hàm chi phí được tối thiểu hóa. Nếu hàm chi phí được cộng thêm vào thì giải thuật đơn giản hơn vì mỗi không gian con trực giao có thể được kiểm tra độc lập và chi phí của mỗi không gian

con có thể được so sánh. Hàm chi phí được chọn phụ thuộc vào từng ứng dụng.

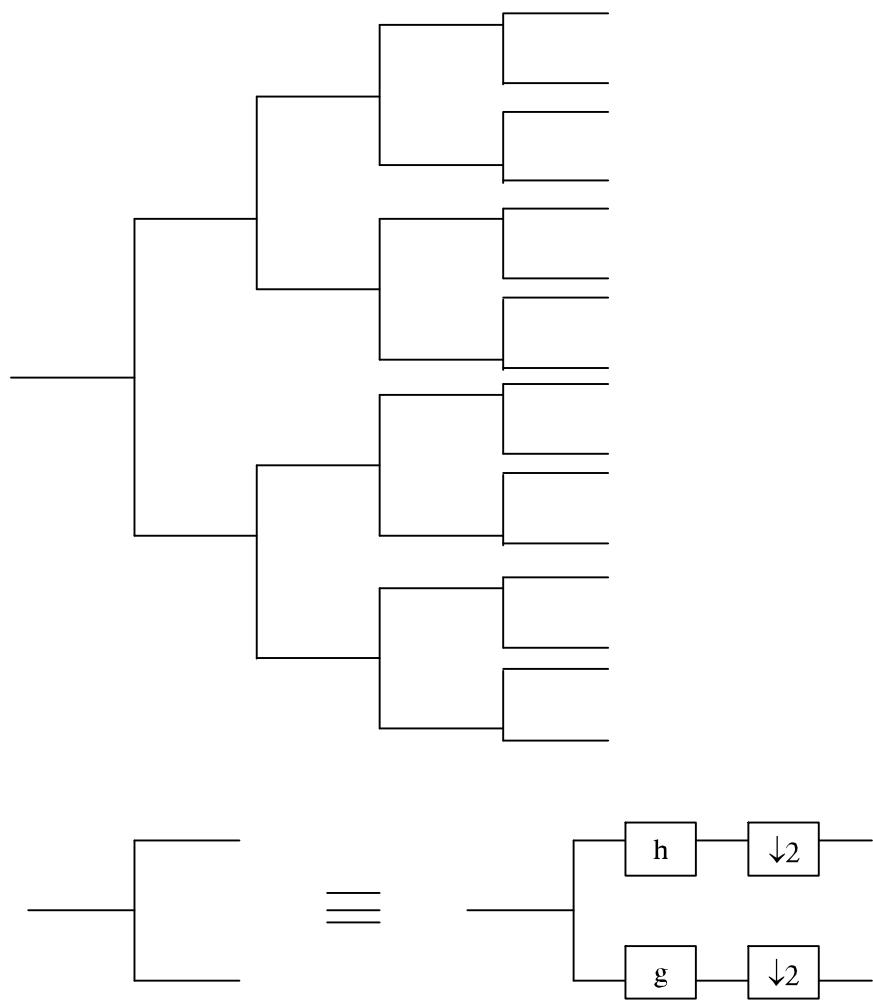
Sự tối ưu hoá méo nhíp được thực hiện bằng sự phân tích gói Wavelet trong ứng dụng nén ảnh. Trong trường hợp này :

$$J = \text{distortion} + \lambda \cdot \text{rate}$$

là hàm chi phí, ở đó méo (distortion) là sai số trung bình bình phương giữa các hệ số biến đổi lượng tử hoá và không lượng tử hoá , còn nhíp (rate) là tốc độ bit đo bằng hàm entropy. Do việc tối thiểu hoá méo dẫn đến sự tăng tốc độ bit, tham số  $\lambda$  giúp cân bằng giữa hai mục đích đang bị xung đột nhau ở trên.

Có một giải thuật nhanh tìm kiếm cơ sở tốt nhất do Coifman và Wickerhauer tìm ra:

- Tính toán các chi phí của mỗi khối con trong cây phân tích
- Với  $t = \text{lowest\_level}$  đến  $l = \text{top}$ ,
  - So sánh chi phí của mỗi bố mẹ với tổng các chi phí của các con của chúng.
    - Nếu chí phí của bố mẹ cao hơn, thì giữ lại các con của chúng
    - Nếu chí phí của bố mẹ thấp hơn, thì loại bỏ các con.



Hình 3.14-Sơ đồ phân tích gói wavelet

## Chương IV:

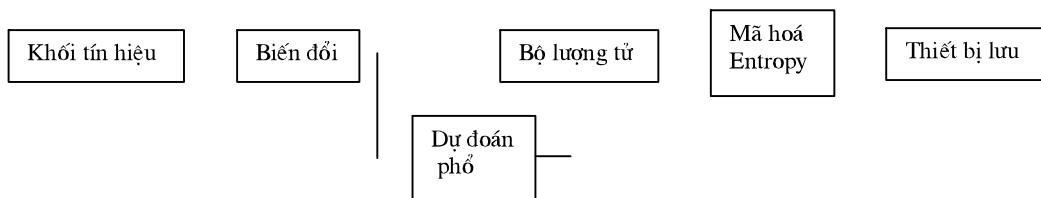
# MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA WAVELET

Lý thuyết và công nghệ wavelet đang trong giai đoạn phát triển quan trọng và có nhiều ưu điểm hơn so với các phương pháp truyền thống đang tồn tại. Wavelet và phép biến đổi wavelet được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực, trong xử lý tín hiệu, nén tín hiệu trong cả các ứng dụng xử lý ảnh và âm thanh, là công cụ phân tích các hệ thống động. Các phương pháp xử lý tín hiệu như là các bộ lọc gương cầu phẳng (Quadrature Mirror Filter-QMF) kết hợp với kỹ thuật wavelet đang được nghiên cứu trong nhiều ứng dụng của viễn thông. Các lĩnh vực ứng dụng khác của lý thuyết wavelet như là vật lý lý thuyết, thăm dò dầu khí, ứng dụng trong y học, trong các dự đoán, trong việc xây dựng các giải thuật nhanh, các toán tử tích phân đều, ....

### 4.1- NÉN ẢNH (IMAGE COMPRESSION):

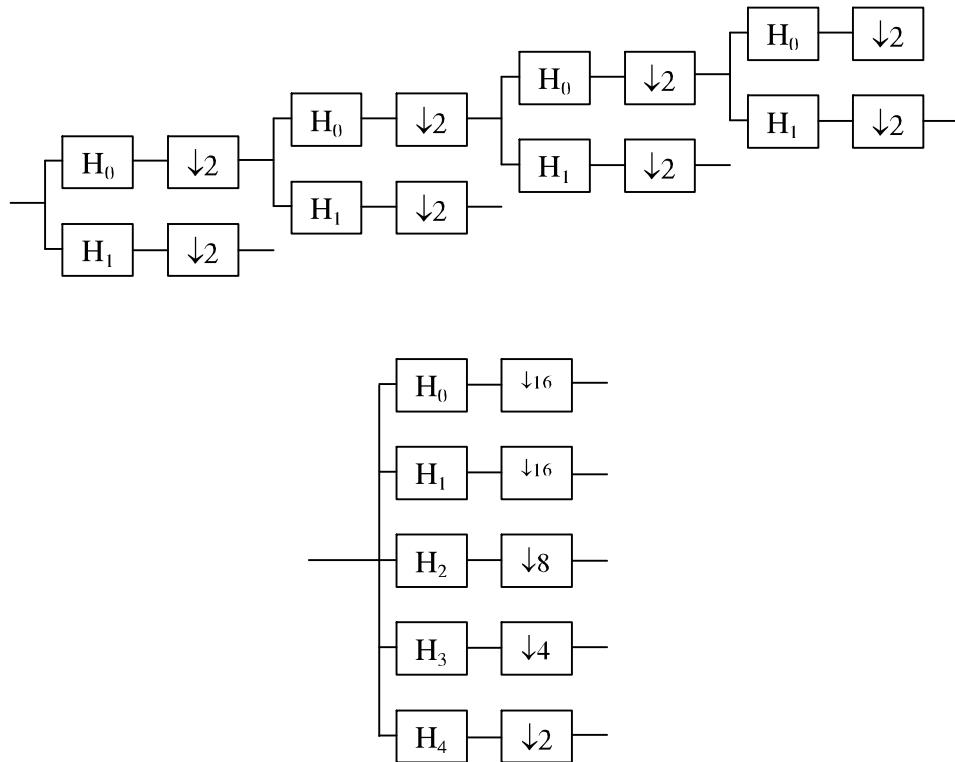
“Một bức tranh có giá trị bằng hàng ngàn lời nói”. Câu ngạn ngữ Anh đã nhắc nhở chúng ta về tầm quan trọng của các bức ảnh. Điều này cũng đặc biệt đúng trong thời đại thông tin và đa phương tiện như hiện nay. Khối lượng số liệu vô cùng to lớn và việc nén thì làm tăng khả thông của mạng và dung lượng của bộ nhớ. Một bức ảnh màu 24 bit với  $256 \times 256$  điểm ảnh thì cần hơn 0,2 MByte để lưu. Một chiếc đĩa dung lượng 1,4 Mbyte có thể chứa được 7 bức ảnh. Nhưng nếu bức ảnh được nén lại với tỷ lệ 50:1 thì lúc đó cũng với chiếc đĩa trên lại chứa được 350 bức ảnh.

Có nhiều kỹ thuật mã hoá ảnh, ngày nay mã hoá băng con (subband coding) đang là phương pháp thành công nhất. Mã hoá băng con sử dụng các wavelet (nghĩa là các bank lọc cấu trúc cây) tránh được hiệu ứng blocking ở tốc độ bit trung bình, bởi vì các hàm cơ sở của nó có chiều dài thay đổi. Các hàm cơ sở dài biểu diễn tín hiệu tần số thấp, còn các hàm cơ sở ngắn thì biểu diễn tín hiệu ở tần số cao.



Hình 4.1-Các bước của bộ mã hoá ảnh biến đổi

Một tính chất rất hấp dẫn của các wavelet là khả năng điều chỉnh chiều dài của các hàm cơ sở. Một phân tích bốn mức và dãy lọc tương đương của nó có thể minh họa như sau:

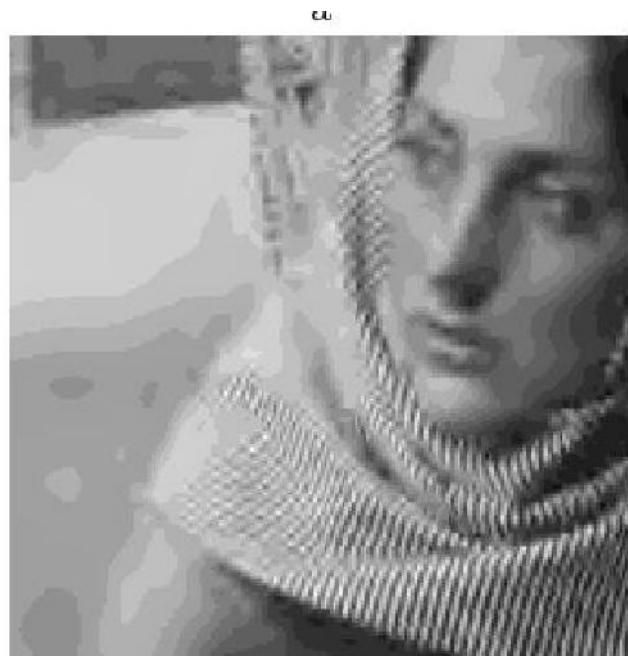


*Hình 4.2-biến đổi wavelet rời rạc bốn mức và dãy lọc tương đương của nó*

Hàm cơ sở tần số thấp là một chuỗi các bản ảnh nội suy của bộ lọc thông thấp  $H_0$ . Chiều dài của nó rất lớn. Các tần số cao hơn ít được lặp hơn, các hàm cơ sở trở nên ngắn hơn. Tín hiệu được xấp xỉ bởi một số hàm cơ sở, khi đó hầu hết năng lượng tập trung ở băng con thấp.



Hình 4.3- ảnh của Barbara được phân tích với wavelet 4 mức



Hình 4.4- ảnh Barbara mã hoá bằng DWT

## **4.2- NÉN VIDEO (VIDEO COMPRESSION):**

Các tín hiệu video là các chuỗi ảnh 2D khoảng 30 khung trên giây. chiều mới là thời gian, có thể mở rộng việc xử lý từ 2D → 3D. Khi đó một hệ thống nén video nên sử dụng một bank lọc riêng 3D trước khi kết thúc. Các chuỗi biến đổi được lượng tử hoá và mã hoá entropy và sử dụng giải thuật định vị bit dựa trên lý thuyết méo nhịp để tìm ra sự phân bố tối ưu.

Một phương pháp khác để tiếp cận với nén video là dựa trên dự đoán sự chuyển động. Ở tốc độ 30 khung trên một giây, thông tin ở các khung  $m$  và  $m \pm 1$  được tương quan cao. Giả thiết là có thể dự đoán được các vectơ chuyển động (motion vector) cho tất cả các điểm ảnh để chỉ ra nơi mà mỗi phần của bức ảnh di chuyển trong các khung tiếp theo. Khi đó đủ điều kiện để gửi khung đầu tiên (đã được nén) và các vectơ chuyển động. Ở đây lọc tổng hợp (synthesis bank) khung đầu tiên được khôi phục và các khung tiếp theo được hình thành nhờ sử dụng các vectơ chuyển động (cộng thêm sự liên hệ với ảnh). Chất lượng của ảnh được khôi phục phụ thuộc vào độ chính xác của các vectơ chuyển động được dự đoán.

Xét một bộ mã hoá ảnh dựa theo khối  $8 \times 8$  được biến đổi bằng DCT. Khung đầu tiên được lượng tử hoá, mã hoá Entropy và phát đi. Khung thứ hai được biến đổi theo các khối. Đối với một khối xác định ( $K,L$ ), cần tìm một giả thuật liên quan đến các khối lân cận ( $K \pm 1, L \pm 1$ ) để dự đoán các vectơ chuyển động, cũng được mã hoá và được phát đi. Tuy nhiên một dự đoán không chính xác sẽ làm giảm chất lượng của khung thứ hai khi được khôi phục lại. Chuẩn MPEG [MPEG 2] sử dụng cả dự đoán ngược và xuôi để dự đoán vectơ chuyển động.

Các giải thuật tương tự dựa trên biến đổi wavelet cũng đang được phát triển. Những nơi MPEG xử lý các khối con thì giải thuật wavelet có các khối với các kích thước khác nhau ở độ phân giải khác nhau. Việc dự đoán sự chuyển động cũng rất phức tạp vì có nhiều tỷ lệ hơn: đầu tiên dự đoán sự chuyển động theo một tỷ lệ thô và sau đó theo các tỷ lệ tinh dần. Các vùng giá (support regions) cũng phụ thuộc vào chiều dài bộ lọc.

## **4.3- NÉN THOẠI VÀ NÉN AUDIO**

### **(SPEECH AND AUDIO COMPRESSION):**

Trong một hệ thống nén thoại / audio, tín hiệu được biến đổi bằng một dãy lọc cấu trúc cây. Sự định vị tần số xấp xỉ các băng tối hạn của tai người. Các tần số  $f_m$  với công suất đáng để được tìm ra và tính toán được  $T(f_m, f)$ .

#### *Nén thoại*

Nén thoại có một tầm quan trọng lớn để giảm thời gian truyền trong thông tin di động. Thoại được phân chia thành hai loại có thanh (voiced) và không thanh (unvoiced). Thoại có thanh chủ yếu là ở tần số thấp. Trong CELP (Code Excitation Linear Predictor) thoại có thanh được mô hình như là đầu ra của một bộ lọc IIR all-pole với đầu vào là nhiễu trắng. Các hệ số lọc được tìm ra nhờ việc dự đoán tuyến tính. Bộ lọc này biểu diễn hàm truyền của vùng âm thanh (vocal tract). Thoại không thanh có các thành phần ở tất cả các dải tần số và tương đồng với nhiễu trắng.

#### *Nén audio:*

Xét một tín hiệu âm thanh CD lấy mẫu ở tốc độ 44,1 kHz với độ phân giải là 16 bit. Tốc độ bít tổng cộng là 705,6 kbit/s. Đối với các ứng dụng đa phương tiện thì cần phải nén lại trong phạm vi từ 64 đến 192 kbit/s (11:1 đến 4:1). Từ việc nén audio cho thấy không có hiện tượng suy hao trong tín hiệu được khôi phục. Điều này đóng vai trò quyết định trong quảng bá audio số và truyền hình vệ tinh vì ở đó chất lượng âm thanh là đặc tính quan trọng nhất. Ứng dụng của các hệ thống nén audio là:

- Quảng bá audio số
- Truyền hình vệ tinh, HDTV
- Các đường liên kết phân phối và tập trung
- Các thiết bị lưu trữ
- Các ứng dụng đa phương tiện

## **4.4- WAVELET SHRINKAGE**

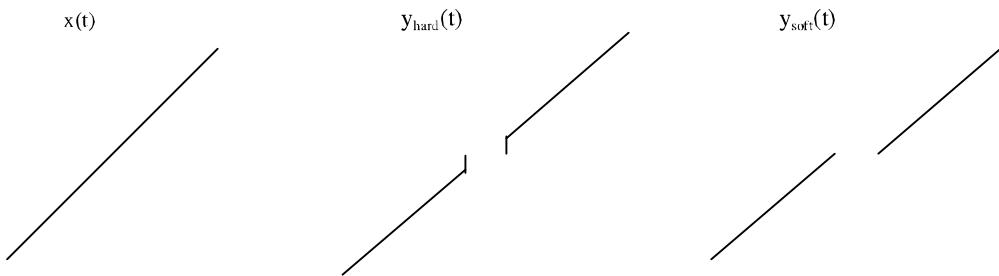
Trong phân tích wavelet mức L của một tín hiệu thì số các hệ số wavelet có năng lượng lớn là rất ít. Đây là kết quả trực tiếp của tính chất xấp xỉ của wavelet, giả thiết có đủ số điểm triệt tiêu. Khi đó tín hiệu được biểu diễn một cách chính xác bằng một số ít các hệ số. Wavelet shrinkage ,do Johnstone và Donoho phát triển, lựa chọn các hệ số này dựa vào việc lấy ngưỡng. Giải thuật wavelet shrinkage phân tích tín hiệu thành L mức và khi đó:

Ở mỗi lớp, chọn một ngưỡng và gọi là ngưỡng cứng (hard thresholding), nó sẽ loại bỏ một số hệ số và giữ lại các hệ số biểu diễn tín

hiệu. Việc lây ngưỡng là một giải thuật suy hao: Tín hiệu gốc có thể không được khôi phục lại chính xác. Thay thế cho ngưỡng cứng là ngưỡng mềm (soft thresholding) ở mức  $\delta$  chọn theo hiệu suất nén hoặc sai số quan hệ. Đầu ra  $y_{\text{hard}}(t)$  và  $y_{\text{soft}}(t)$  với ngưỡng  $\delta$  là:

$$y_{\text{hard}}(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| > \delta \\ 0, & |x(t)| \leq \delta \end{cases} \quad \text{ngưỡng cứng}$$

$$y_{\text{soft}}(t) = \begin{cases} \text{sign}(x(t))(|x(t)| - \delta), & |x(t)| > \delta \\ 0, & |x(t)| \leq \delta \end{cases} \quad \text{ngưỡng mềm}$$



## 4.5-PHƯƠNG PHÁP LOẠI NHIỀU ẢNH BẰNG

### WAVELET

Phân tích Wavelet là một kỹ thuật toán học hiện đại mở rộng cho việc phân tích Fourier. Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu việc loại bỏ nhiễu khỏi tín hiệu và ảnh thông qua biến đổi Wavelet. Đầu tiên sẽ thuận về lý thuyết wavelet và sau đó tập trung vào các phương pháp cơ sở wavelet để giảm nhiễu nhất là kỹ thuật do Mallat đề xuất.

#### 4.5.1-GIỚI THIỆU :

Việc triệt nhiễu ở ảnh thực rất có lợi, giúp cho việc kiểm tra và hiểu giải thích hoặc làm tăng kết quả của việc xử lý máy tính một cách dễ dàng. Lý thuyết wavelet được nghiên cứu nhiều và thấy rằng nó có ứng dụng rất hiệu quả trong việc giảm nhiễu. Phương pháp loại nhiễu sử dụng biến đổi wavelet có nhiều ưu điểm hơn các phương pháp cũ bởi vì nó phân chia các thành phần tham số của tín hiệu thành các dải con, được biến đổi bằng nhiều mức, trong khi duy trì sự định vị của tín hiệu.

#### 4.5.2-WAVELET.

Trong phần này sẽ xét một số tính chất của wavelet ứng dụng trong các ứng dụng loại nhiễu :

##### 4.5.2.1- Định vị theo không gian và tham số :

Biến đổi wavelet được coi là một sự thay thế cho biến đổi Fourier vì cả hai phương pháp đều được sử dụng để nghiên cứu các tham số của tín hiệu vào. Sự khác nhau chủ yếu giữa biến đổi wavelet và biến đổi Fourier là biến đổi wavelet có thể định vị trong cùng miền như tín hiệu vào. Sự định vị ở đây là định vị theo thời gian đối với tín hiệu một chiều và theo không gian điểm(pixel space) đối với một ảnh. Điều này được minh họa trong hình vẽ dưới đây, ở đó biểu diễn một tín hiệu và biến đổi Fourier và biến đổi wavelet của nó. Tín hiệu là rời rạc và do đó đều là hai biến đổi : chúng gồm các chuỗi hệ số, các giá trị của chúng được minh họa trong hình. Mỗi mức của biến đổi wavelet có chứa thông tin biểu diễn trong một khoảng của miền tham số biến đổi Fourier, được gọi là một giải tần số. Mức và giải tần số cao nhất biểu diễn các tham số cao nhất của tín hiệu : ở đó biến đổi wavelet có các thành phần khác 0, tín hiệu gốc có một sự phân bố trong một giải tham số tương ứng. Nó cũng cho thấy sự định vị xác xỉ của sự phân bố tham số này, đây là một ưu điểm của biến đổi wavelet so với biến đổi Fourier.

Đối với biến đổi wavelet

- Biểu diễn sự phân bố tín hiệu theo các giải tần số như các hệ số trong nhiều mức và
- Biểu diễn sự định vị của sự phân bố này trong cùng miền như tín hiệu gốc.

Các phương pháp cơ sở wavelet để khử nhiễu thường có ưu điểm về cả hai tính chất trên.

Các hệ số của biến đổi wavelet là các hệ số trong một cơ sở của các hàm tỷ lệ được gọi là các wavelet và ký hiệu là  $\psi$  các wavelet ở các mức cao hơn thì có giá nhỏ hơn so với các mức thấp hơn. Các wavelet ở một mức thì có cùng tỷ lệ, gọi là characteristic scale (tỷ lệ đặc trưng). Mức càng cao thì tỷ lệ đặc trưng càng nhỏ và tham số càng cao.

Cũng có một loại hàm cơ sở khác bao gồm sự phân tích wavelet. Các hàm này ký hiệu là  $\phi$ , gọi là các hàm tỷ lệ. Trong đó các hệ số wavelet biểu diễn sự phân bố tín hiệu theo một dải tần, các hệ số hàm tỷ lệ biểu diễn tất cả các phân bố tham số thấp hơn.

##### 4.5.2.2- Tính chất đều:

Tính đều của một tín hiệu có thể được mô tả bằng hàm mũ Lipschitz địa phương của nó: tín hiệu càng đều thì số mũ Lipschitz của nó càng cao. Ví dụ :

một xung Dirac có số mũ Lipschitz là -1, một hàm không liên tục bị giới hạn có số mũ bằng 0, một hàm liên tục không khả vi có số mũ nằm trong khoảng 0 đến 1 và một hàm khả vi liên tục có số mũ lớn hơn 1.

Số điểm của một wavelet  $\psi$  được định nghĩa :

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx$$

Số điểm triệt tiêu  $N$  là:

$$m_k = 0 \text{ với } 0 \leq k < N \text{ và } m_N \neq 0.$$

Số điểm triệt tiêu  $N$  được liên hệ với sự bằng phẳng của hàm wavelet.

*Tính chất 1:* giả sử một wavelet có  $N$  điểm triệt tiêu. Một hàm  $f(x)$  có số mũ Lipschitz đơn  $\alpha$  trên một khoảng nếu và chỉ nếu biến đổi wavelet với  $N > \alpha$  thỏa mãn:

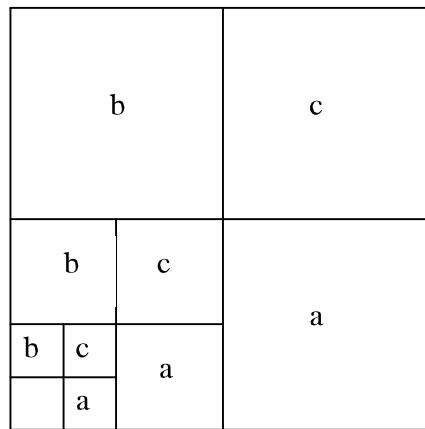
$$|d_{j,l}| = O(s^\alpha) \text{ khi } s \rightarrow 0$$

Trong đó  $s$  là tỷ lệ đặc trưng và  $d_{j,l}$  là các hệ số của wavelet có giá nằm trong khoảng đó.

Một ví dụ thực tế của tính chất này là: nếu số mũ Lipschitz âm thì các hệ số wavelet có xu hướng tăng khi tỷ lệ đặc trưng giảm. Cách xử lý các hệ số wavelet ở các tỷ lệ khác nhau có thể đặc trưng tính chất đều của một tín hiệu. Tuy nhiên việc phân tích hàm wavelet phải có đủ số điểm triệt tiêu.

#### **4.5.2.3- Biến đổi wavelet hai chiều:**

Một phương pháp để có thể tiến tới biến đổi wavelet hai chiều là dựa trên các hàm cơ sở hai chiều, là tích tensor của các wavelet và các hàm tỷ lệ theo biến thứ nhất và biến thứ hai là  $x$  và  $y$ . Các hệ số được tính phù hợp. Ví dụ các hệ số của các hàm cơ sở  $\psi(x)$  và  $\phi(y)$  biểu diễn sự phân bố mà có các tần số cao thưa phong  $x$  và các tần số thấp theo phong  $y$ . Khi trục  $x$  là trục hoành và trục  $y$  là trục tung thì các hệ số này bộc lộ các đặc trưng ảnh như là các step edge theo phong thẳng đứng. Một tập hợp các hệ số như thế được gọi là một thành phần dọc của biến đổi. Tương tự, các thành phần dọc và ngang được kết hợp tương ứng với các hàm cơ sở  $\phi(x)\times\psi(y)$  và  $\psi(x)\times\phi(y)$ . Ba thành phần này có thể minh họa như các bức ảnh trong cùng miền với ảnh gốc. Chúng được tính toán với một số mức, mỗi mức biểu diễn một dải tần. Do đó sẽ thu được biến đổi wavelet bình phong (square wavelet transform).



*Hình-Sự phân tích của mặt phẳng tần số bằng biến đổi wavelet hai chiều bình phương.*

*a, b, c là các thành phần theo phương ngang, phương thẳng đứng và phương chéo.*

#### **4.5.2.4- Thực hiện biến đổi wavelet rời rạc:**

Các giải thuật thực tế để tính toán biến đổi wavelet rời rạc một chiều, bao gồm các tích chập được lặp lại của một tín hiệu với các chuỗi rời rạc hoặc các bộ lọc, tạo ra các hệ số wavelet. Các hệ số hàm tỷ lệ được tính toán tương tự như các trung gian. Các bộ lọc được liên hệ với loại wavelet và hàm tỷ lệ được sử dụng. Chúng có nhiều tính chất như tính đối xứng, bằng phẳng, giá và suy giảm. Đối với biến đổi hai chiều, sự thay thế các tích chập theo các hướng khác nhau được thực hiện để tạo ra các hệ số của các thành phần theo phương ngang, chéo và phương thẳng đứng.

#### **4.5.2.5- Đối xứng và phản đối xứng:**

Khi một tín hiệu có một step edge với một bộ lọc đối xứng thì tích chập có một điểm không ở vị trí edge. Tích chập với bộ lọc phản đối xứng có giá trị là vô cùng ở vị trí edge. Vì các edge rất quan trọng trong việc loại nhiễu, vì vậy rất dễ làm việc với các giá trị vô cùng hơn là với các điểm không, bởi vậy thường sử dụng các wavelet phản đối xứng hơn.

#### 4.5.2.6- Sự bằng phẳng (smoothness):

Bằng phẳng là một tính chất rất quan trọng vì nó là sự liên kết giữa tính bằng phẳng và các điểm triệt tiêu. Trong ứng dụng loại nhiễu wavelet, yếu tố giới hạn các hệ số wavelet là phải giảm nhiễu và giữ lại các tín hiệu khác. Vì các tiêu chuẩn để quy định sự loại bỏ trên không bao giờ hoàn hảo, nên có thể xảy ra trường hợp mà một hệ số có nghĩa bị loại bỏ. Ảnh hưởng của loại lỗi này là trong tín hiệu được khôi phục lại thì phân bố của một phần tín hiệu có bóng (dạng) của một wavelet bị mất. Nếu wavelet không bằng phẳng thì ảnh hưởng này có thể làm xáo trộn sự quan sát của con người.

Khối lượng tính toán biến đổi wavelet cần có giá compact hoặc ít nhất có sự suy giảm đủ nhanh.

### 4.5.3- NHIỀU VÀ LOẠI NHIỀU WAVELET.

Trong nhiều phương pháp loại nhiễu cơ sở wavelet, biến đổi wavelet của ảnh nhiễu được thực hiện các hệ số wavelet được xử lý và các hệ số đã được xử lý lại được biến đổi trở lại ảnh kết quả. Việc xử lý các hệ số bao gồm việc giảm các hệ số nhiễu. Một số tiêu chuẩn để phân biệt các hệ số có nhiễu và các hệ số không có nhiễu ảnh được giới thiệu ngắn gọn dưới đây.

Trong kỹ thuật “wavelet shrinkage” của Donoho sử dụng một tiêu chí chung cho các lớp. Phương pháp sử dụng một sự không tuyến tính ngưỡng mềm (soft-threshold nonlinearity) sao cho các hệ số wavelet nằm dưới mức ngưỡng bị loại bỏ. Mức ngưỡng không đổi trong một mức và cùng một giá trị đối với tất cả các mức trong trường hợp nhiễu trắng. Phương pháp này không biểu thị mọi ưu điểm mà biến đổi wavelet có được nhưng nó có một cơ sở lý thuyết tốt. Trong phương pháp của Mallat và các đồng sự của ông thì tiêu chí được điều chỉnh phù hợp với từng hệ số. Do đó chúng ta gọi nó là phương pháp thích nghi (adaptive method). Tiêu chí dựa trên sự giả định là ảnh không nhiễu là đều và nhiễu không đều. Phương pháp của Healy, Weaver là một sự biến đổi của phương pháp Mallat, trong đó tiêu chí được dựa trên sự quan sát các hệ số wavelet của một ảnh không nhiễu. Coifman phát triển một phương pháp không dựa vào sự điều chỉnh các hệ số wavelet nhiễu, nhưng dựa vào việc sử dụng thư viện các dạng sóng trực giao. Tín hiệu được phân chia thành mỗi phần được loại nhiễu mà được biểu diễn bằng một dạng sóng đã chọn và một phần không thể biểu diễn được.

Các phương pháp loại nhiễu được miêu tả xử lý nhiễu trắng Gaussian có trung bình bằng không. Để đánh giá hiệu suất của việc loại nhiễu, ta sử dụng tỷ số tín hiệu trên nhiễu để đo chất lượng. Tỷ số tín hiệu trên nhiễu được biểu diễn bằng dB và được định nghĩa như sau:

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}}$$

Trong đó  $P_{signal}$  là công suất của tín hiệu hay của ảnh.

$P_{noise}$  là công suất của nhiễu.

#### **4.5.4- DỰ ĐOÁN ĐỀU TỪ CÁC HỆ SỐ WAVELET.**

Trong giải thuật loại nhiễu wavelet do Mallat và Hwang phát triển thì sự khác biệt giữa các hệ số wavelet originating từ nhiễu và các hệ số wavelet originating từ tín hiệu được thực hiện bằng cách kiểm tra tính chất đều. Tính chất một ở trong phần trên cho thấy là số mũ Lipschitz đặc trưng cho tính chất đều địa phương của một hàm có thể được dự đoán từ biến đổi wavelet. Dựa vào các thông tin này và vào các tính chất bằng phẳng, Mallat và các đồng sự của ông đã suy ra một tiêu chí báo hiệu có nhiễu. Các hệ số tương ứng với nhiễu được giả thiết và có số mũ Lipschitz âm sau đó được giới hạn từ phép biến đổi. Phương pháp có thể đạt được tỷ số S/N cao và chất lượng hiển thị của ảnh thu được cũng rất tốt, vừa ý. Tuy nhiên cũng rất phức tạp và đắt bởi vì việc khôi phục từ các hệ số wavelet yêu cầu một phép chiếu tương tác.

#### **4.5.5- TƯƠNG QUAN CÁC HỆ SỐ GIỮA CÁC LỚP WAVELET.**

Xu, Healy, Weaver và một số người khác đã đề xuất một kỹ thuật mới để loại nhiễu mà nhiễu được phân biệt rõ ràng từ tín hiệu có ích bằng một kỹ thuật tương quan. Sự phân bố tham số của nhiễu đặc tính tín hiệu đáng kể được tương quan giữa các mức kế cận. Tỷ lệ tương quan chéo được sử dụng để phân biệt sự phân bố tham số nhiễu cao từ các đặc tính tín hiệu. Kết quả là các hàm giải thuật như một bộ lọc thông thấp được điều chỉnh : các tham số cao bị triệt trừ khi ở đó một đặc tính tín hiệu có một số phân bố tham số được tách. Việc tách này được thực hiện bằng cách tính toán sự tương quan giữa một số có tỷ lệ liên tiếp. Xu đề xuất tính toán sự tương quan này là tính của các hệ số wavelet trong các mức liên tiếp của cùng sự định vị. Nó được kiểm nghiệm từ sự thực nhưng các hệ số nhiễu không được tương quan và các hệ số có ích được tương quan, khi sử dụng phân tích wavelet.

Giải thuật :

Algorithm *Tương quan giữa các mức*

For j = 0 to số mức do

Dự đoán công suất nhiễu<sub>j</sub>

End for

$Biến\ đổi = \{ d_{i,j} \}_{i=1(1)n}, j=1(1)số\ mức \}$

For j = 0 to số mức - độ sâu tương quan do

*Tương\_quan = Tính\_toán\_tương\_quan(biến\_đổi, j,  
độ\_sâu\_tương\_quan)*

*Công\_suất\_trước = Tính\_toán\_công\_suất(biến\_đổi, j)*

Repeat

    For j = 1(1)n do

        If  $d_{i,j} \neq 0$  và  $tương\_quan_j$  nhỏ then

$d_{i,j} = 0$

        endif

    endfor

*công\_suất\_sau = Tính\_toán\_công\_suất(biến\_đổi, j)*

    until  $công\_suất\_trước - công\_suất\_sau \approx công\_suất\_nhiều_j$

endfor

end algorithm.

Biến đổi wavelet đang dần trở thành một công cụ mạnh và thiết thực để loại bỏ nhiễu trong tín hiệu. Phép biến đổi đưa ra một sự phân tích các tần số của tín hiệu, được biểu diễn trong miền tín hiệu gốc. Các phương pháp loại nhiễu có thể hiện rõ hai cơ sở lập luận trên. Chúng được xây dựng và áp dụng cho các cơ sở lý thuyết xấp xỉ của các wavelet.

## Kết luận

Trong đồ án tốt nghiệp này em đã được tìm hiểu về lý thuyết wavelet và phép biến đổi wavelet. Đây là một lĩnh vực mới nhất đang được nghiên cứu và đưa vào ứng dụng trên thế giới.

Trong đồ án tốt nghiệp của mình, đầu tiên em đã trình bày tổng quan về một số phương pháp biến đổi tín hiệu vẫn đang được sử dụng. Tiếp đó là phần giới thiệu về wavelet, cách xây dựng wavelet từ đa phân giải và các phương pháp biến đổi wavelet như biến đổi wavelet liên tục, biến đổi wavelet rời rạc và biến đổi wavelet hai chiều. Đồng thời em cũng nêu ra một số ứng dụng điển hình của wavelet trong xử lý tín hiệu như các ứng dụng về nén tín hiệu.

Wavelet và phép biến đổi wavelet có nhiều ưu điểm và khắc phục được những hạn chế của các phương pháp xử lý tín hiệu trước đây vẫn được sử dụng. Với sự giới hạn của một đồ án tốt nghiệp em cũng mới chỉ trình bày được một phần lý thuyết về wavelet. Là một công cụ mạnh nhất hiện nay wavelet còn có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau nhất là trong xử lý tín hiệu. Nếu có điều kiện nghiên cứu tiếp thì nội dung về nén ảnh và lọc nhiều ảnh sẽ là một đề tài ứng dụng khá hay của wavelet.

Trên đây là toàn bộ nội dung đồ án tốt nghiệp của em với đề tài “Nghiên cứu lý thuyết wavelet trong xử lý tín hiệu”. Chắc chắn là trong quá trình thực hiện em không thể tránh khỏi những sai sót, em rất mong các thầy cô và bạn bè xem xét và góp ý cho em.

Cuối cùng em muốn bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc của mình tới PGS-TS Hồ Anh Túy đã tận tình giúp đỡ và hướng dẫn em hoàn thành đồ án tốt nghiệp này.

### Tài liệu tham khảo

- 1- *Wavelet and Operators*, Cambridge University Press 1992.
- 2- *Wavelet Basis*, Jonathan Allen, Kluwer Academic Publishers 1995
- 3- *Wavelets and Their Applications*, J.S. Byrnes-Jennifer L. Byrnes-Kathryn A. Hargreaves-Karl Berry, Kluwer Academic Publishers 1992
- 4- *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*, Ingrid Daubechies, 1988
- 5- *Wavelets and Filter Banks*, Gilbert Strang and Truong Nguyen, Wellesley-Cambridge Press, 1996
- 6- *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, S.P.Singh, Kluwer Academic Publishers 1994
- 7- *Wavelet Based Approximation in the Optimal Control of Distributed Parameter Systems*, Chris Brislawn and I.G.Rosen, 1991.
- 8- *Wavelet with Convolution-Type Orthogonality Conditions*, Koichi Niijima and Koichi Kuzume, IEEE .