2D Frozen spin method of searching for the deuteron EDM in a storage ring

by

Alexander Aksentev

A Dissertation
Submitted to the department of electrophysical facilities
National Research Nuclear University "MEPhI"
in partial fulfillment of the requirements
for the degree of

Physics - Doctor of Philosophy

2019

Введение

Данное диссертационное исследование является частью проекта, посвящённого поиску ЭДМ элементарных частиц.

Одной из основных проблем современной физики является барионная асимметрия вселенной, т.е. преобладание числа частиц над числом античастиц в наблюдаемой вселенной. На текущий момент нет никаких свидетельств существования первичной антиматерии в нашей галактике; количество наблюдаемой антиматерии согласуется с её производством во вторичных процессах. Также не наблюдается фонового гамма-излучения от нуклон-антинуклонных взаимодействий, которое можно было бы ожидать, если бы вещество и антивещество во вселенной были бы разделены на кластеры галактик. [**?**]

В своей статье 1967 года, академик АН СССР А.Д. Сахаров сформулировал три необходимых условия, которым должен был удовлетворять процесс бариогенеза, чтобы материя и антиматерия в первичной вселенной производились с разными скоростями. Побудительным мотивом формулировки стало открытие космического фонового излучения и нарушение CP четности в системе нейтральных K-мезонов. [**?**] Три необходимых *условия Сахарова* таковы:

- несохранение барионного числа;
- нарушение зарядовой симметрии C- и CP-симметрии;
- взаимодействие вне теплового равновесия.

Если они существуют, перманентные ЭДМ частиц нарушают P- и T-симметрии, а значит, по теореме CPT — их существование можно связать с нарушением CP-симметрии. Стандартная Модель (СМ) элементарных частиц позволяет учесть CP-нарушение посредством матрицы Кабиббо-Кабаяши-Масакавы, однако значения ЭДМ, предсказываемые ей для, например, нейтрона, лежат в диапазоне от 10^{-33} до 10^{-30} e·см. [?] К примеру, теория SUSY (суперсимметрия) предсказывает наличие ЭДМ гораздо большей величины (на уровне $10^{-29} - 10^{-24}$ e·см). Таким образом, ЭДМ элементарных частиц являются чувствительным индикатором физики за гранью СМ.

Поиск ЭДМ частиц был начат более 50-ти лет назад. Первый эксперимент по измерению ЭДМ нейтрона был проведён др. Н.Ф. Рэмзи (dr. N.F. Ramsey) в конце 1950-х годов. По результатам эксперимента, верхняя граница ЭДМ нейтрона была ограничена величиной $5 \cdot 10^{-20}$ e·см. [?] С тех пор было проведено множество более точных экспериментов, и на данный момент, верхняя граница на ЭДМ нейтрона находится на уровне $2.9 \cdot 10^{-26}$ e·см. [?, ?]

Большинство экспериментов проводятся на зарядово-неитральных частицах, таких как нейтрон или атомы. ЭДМ заряженных частиц, таких как протон или дейтрон, можно измерить в накопительном кольце, на основе прецессии поляризации пучка в электрическом поле в системе центра масс пучка.

Идея использования накопительного кольца для детектирования ЭДМ заряженный частиц появилась в процессе разработки $g-2$ эксперимента [?] в Брукхейвенской Национальной Лаборатории (BNL, США). По результатам экспериментов в BNL, верхняя граница на мюонный ЭДМ была установлена на уровне 10^{-19} e·см. [?] В 1990-х годах, дискуссия преимущественно велась вокруг мюонного эксперимента [?], однако также рассматривался и дейтрон, у которого похожее отношение аномального магнитного момента к массе.

В 2004 году, коллаборацией srEDM (Storage Ring EDM Collaboration) [?] в BNL был предложен эксперимент 970 по детектированию ЭДМ дейтрона на уровне 10^{-27} e·см в накопительном кольце. Начиная с 2005 года, на циклотроне AGOR KVI-центра передовых радиационных технологий (KVI-Center for Advanced Radiation Technology) в университете Гронингена была проведена серия тестов по технико-экономическому обоснованию эксперимента.

В 2008 году начались тесты на накопительном кольце COSY в Исследовательском центре “Юлих” (FZJ, Германия). Впоследствии, эти тесты развились в программу по изучению динамики пучка для разработки технологий, требуемых для эксперимента по поиску ЭДМ. В этом же году было сделано второе предложение [?] эксперимента по поиску ЭДМ дейтрона, в этот раз, на уровне 10^{-29} e·см через один год сбора статистики.

В то же время было решено, что эксперимент по детектированию ЭДМ протона обладает некоторыми достоинствами, в техническом отношении. Среди таковых возможность одновременной инжекции противоположно-циркулирующих пучков, что позволяет оптимизировать сокращение систематических эффектов, в которых не нарушается временная симметрия. Тем не менее, на COSY была продолжена работа над экспериментом с дейтроном, ввиду того, что результаты, полученные для дейтрона, распространяются и на протон.

В 2011 году была сформирована коллаборация JEDI (Jülich Elecric Dipoe moment Investigations). [?] Целью коллаборации является не только разработка ключевых технологий для srEDM, но также и проведение предварительного эксперимента прямого наблюдения ЭДМ дейтрона.

В 2018 году, JEDI-коллаборация выполнила первое измерение дейтронного ЭДМ на COSY. Поскольку в кольце с незамороженным спином ЭДМ генерирует мало-амплитудные осцилляции вертикакльной компоненты поляризации пучка (при импульсе дейтронов 970 МэВ/с, как на COSY, амплитуда колебаний ожидается на уровне $3 \cdot 10^{-10}$ при величине ЭДМ $d = 10^{-24}$ e·см), используется резонансный способ измерения [?, ?], с использованием специально-созданного для COSY ВЧ Винфильтра. [?, ?]

данной работы является численное моделирование метода поиска электрического дипольного момента дейтрона в накопительном кольце с замороженным спином.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие :

1. Исследовать явление декогеренции спина пучка в окрестности нулевой спиновой частоты, а также секступольный метод её подавления.

2. Исследовать влияние возмущений спиновой динамики на ЭДМ-статистику.

3. Исследовать влияние неточности установки E+B спин-ротаторов на систематическую ошибку ЭДМ-статистики.

4. Промоделировать процесс калибровки спин-тюна пучка при смене полярности ведущего поля.

1. Промоделирована процедура калибровки спин-тюна пучка при смене направления его движения.

2. Исследована систематическая ошибка эксперимента по поиску ЭДМ в накопительном кольце, связанная с бетатронными колебаниями.

3. Систематизированы общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце.

4. Классифицированы методы типа замороженного спина детектирования ЭДМ частицы в накопительном кольце.

. Результаты исследования вошли в Yellow Report под названием “Feasibility Study for an EDM Storage Ring,” подготавливаемый для CERN коллаборацией CPEDM, в которую входит коллаборация JEDI.

Отметим, что целью экспериментов по поиску ЭДМ является проверка CP-инвариантности. При этом, ЭДМ элементарных частиц нарушают одновременно и P-, и T-симметрию, а следовательно требуют дополнительных модельных предположений, для того, чтобы связать их существование с CP-нарушением. [**?**, стр. 1926]

Альтернативой является эксперимент TRIC (Time Reversal Invariance at Cosy), [?] в котором используется T-нечётное, P-чётное взаимодействие, и следовательно нарушается только T-симметрия. В связи с этим, никаких дополнительных предположений не требуется.

TRIC входит в физическую программу PAX (Polarised Antiproton eXperiments) [?], для которой требуются высокоинтенсивные поляризованные пучки. Существует два подхода к получению поляризованных пучков: спин-флиппинг, и спин-филтеринг. Спин-флиппинг позволяет получать более интенсивные пучки, однако на данный момент не существует стабильно-работающих методов спин-флиппинга.

Рассмотренные в настоящей работе особенности спиновой динамики вблизи нулевого резонанса (в частности — подавление спин-декогеренции секступольными полями) представляют некоторый интерес с точки зрения получения высокоинтенсивных пучков заряженных частиц.

Основными методами исследования являются математическое и компьютерное моделирование, и численный эксперимент.

1. Подтверждена теория механизма секступольного подавления декогеренции.

2. Подтверждено утверждение о равенстве спин-тюнов частиц с одинаковыми эффективными Лоренц-факторами; найдена интерпретация эффективного Лоренц-фактора как меры продольного эмиттанса частицы.

3. Показано, что калибровка ведущего магнитного поля ускорителя посредством наблюдения частоты прецессии поляризации пучка в горизонтальной плоскости — потенциально работающая методика.

4. Доказано, что возмущения спиновой динамики пучка, вызванные бетатронными колебаниями — пренебрежимо малый систематический эффект, поддающийся контролю в методологии частотной области.

5. Доказано, что эффективная длительность цикла измерения поляризации находится в диапазоне от двух до трёх постоянных времени жизни поляризации.

6. Показана принципиальная возможность получения верхнего предела оценки ЭДМ на уровне 10^{-29} e·см за полное время измерений длительностью один год.

7. Доказано, что угловая скорость паразитного МДМ вращения линейно зависит от среднего угла наклона спин-ротаторов, и не зависит от конкретной реализации распределения наклонов.

8. Доказано, что точность установки оптических элементов ускорителя не позволяет измерять ЭДМ частицы методами пространственной области.

полученных результатов обеспечивается согласованием аналитических вычислений с результатами численных экспериментов. Результаты компьютерных симуляций находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Основные результаты работы докладывались на:

- IIX международной концеренции по ускорителям заряженных частиц IPAC'17, Копенгаген, Дания.

- X международной конференции по ускорителям заряженных частиц IPAC'19, Мельбурн, Австралия.

- конференциях коллаборации JEDI, Юлих, Германия, 2017–2019.

- III международной конференции "Лазерные, плазменные исследования и технологии," (LaPlas) Москва, Россия.

- IV междунарожной конференции LaPlas, Москва, Россия.

- V международной конференции LaPlas, Москва, Россия.

- студенческих семинарах Института Ядерных Исследований, Исследовательский Центр “Юлих,” Германия.

Автор принимал активное участие в коллаборации JEDI, а также подготовке Yellow Report для CERN.

0 Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, X из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 7 — в тезисах докладов.[vak,papers,conf][heading=countauthorvak, env=countauthorvak, keyword=biblioauthorvak, section=1][heading=countauthornotvak env=countauthornotvak, keyword=biblioauthornotvak, section=1][heading=countauthor env=countauthorconf, keyword=biblioauthorconf, section=1][heading=countauthor, env=countauthor, keyword=biblioauthor, section=1] Основные результаты по теме диссертации изложены в 0 печатных изданиях: 0 изданы в журналах, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и Web of Science, а 0 — в тезисах докладов. Из последних, 4 работы входят в базу Scopus, 3 в РИНЦ. [vak,papers,conf][heading=countauthorvak, env=countauthorvak, keyword=biblioauthorvak, section=2][heading=countauthornotvak env=countauthornotvak, keyword=biblioauthornotvak, section=2][heading=countauthor env=countauthorconf, keyword=biblioauthorconf, section=2][heading=countauthor, env=countauthor, keyword=biblioauthor, section=2]

Structure of the dissertation. This dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and one appendix.

Chapter one:

1. Introduces the Frozen Spin concept.
2. Provides a classification of frozen spin (FS) storage ring (SR) EDM search methodologies.
3. Classifies some problems encountered in any FS SR EDM experiment.
4. Describes the 2D FS method which aims to provide a solution to those problems.
5. Describes some lattices that could be used with the proposed method.

In the **second chapter** we alnalyze the problems outlined in the first chapter, and their solutions; simuilation results follow.

Considered problems:

1. perturbations in the particle spin dynamics caused by betatron oscillations, and their effect on the EDM-statistic of the 2D FS method;

2. spin decoherence in the frozen spin regime;

3. properties ang magnitude of the EDM-faking spin precession systematic error induced by machine imperfections;

4. the guide field flipping procedure used for the elimination of the systematic error within the 2D FS methodology.

A section is dedicated to the investigation of the question of interpretation of the notion of the *effective Lorentz factor* () introduced in the first chapter.

This notion is the foundation of a great part of the 2D FS methodology. It can be defined as follows: if two particles' are equal, then their spin dynamics are equivalent (specifically, their spin precession angular velocity vectors have equal orientations and magnitudes), regardless of the particulars of their orbital motion.

Specifically, what enables us to exclude the EDM-faking MDM precession from the 2D FS EDM-statistic is the fixing of the characterizing the beam.

In **chapter three** we highlighted some of the more important (in the context of the present research) technologies developed within the EDM search project carried out at the Cooler Synchrotron (COSY); we also described the results of the spin coherence time (SCT) optimization studies done at COSY during the April-May 2019 beamtime.

One phenomenon worth noting is the SCT change observed during prolonged (destructive) polarimetry measurements, which is (presumably) caused by the transition from the outer (halo) to the inner (core) beam layers. The observatioin of this phenomenon can be explained within the bounds of the sextupole spin decoherence suppression theory outlined in this dissertation.

In the **conclusion** the main research conclusions are described, which are:

1. Effects of spin dynamics that could potentially result in systematic error were studiedm such as:
    - betatron motion-related psrticle spin dynamics pertubrations;
    - spin decoherence;
    - machine imperfection-related EDM-faking MDM spin precession.
2. For each of the systematic errors, a solution was described, its effectiveness numerically analyzed.
3. Were formulated:
    - the notions of the space and time domains (with respect to the FS SR EDM measurement methodology);
    - the notion of the 2D frozen spin state;
    - the necessary conditions of a successful SR EDM measurement;
    - the 2D FS (Frequency Domain) method, satisfying all of the necessary conditions we found.
4. Frozen and Quasi-Frozen spin lattices were described.

The main body of the dissertation does not include our statistical analysis of the experiment; it is placed in **appendix** A. Two aspects of that analysis worth mentioning are: investigation of the possibility to use a non-uniform polarization sampling scheme in order to optimize the beam lifetime; determiation of the maximum effective measurement cycle duration.

As a result, we came to the conclusion that the non-uniform sampling scheme is not practical, due to the nature of polarimetry measurement. Concerning the optimal measurement cycle length, it cannot exceed three beam polarization life times.

Глава 1

Принцип измерения ЭДМ методом “замороженного спина” (FS)

1.1 Общее введение в методологию

Уравнение Т-БМТ

Уравнение Томаса-Баргманна-Мишеля-Телегди описывает динамику спин-вектора s в магнитном поле B и электростатическом поле E. Его обобщённая версия, включающая влияние ЭДМ, может быть записана (в системе центра масс пучка) как: [**?**, стр. 6] $\mathrm{d}\ \mathrm{s}_{\overline{\mathrm{d}t=s\times(\Omega_{MDM}+\Omega_{EDM}),}}\Omega_{MDM}$ и Ω_{EDM} $\Omega_{MDM} = \frac{q}{m}\left[GB - \left(G - \frac{1}{\gamma^2-1}\right)\frac{E\times\beta}{c}\right],$
$\Omega_{EDM} = \frac{q}{m}\frac{\eta}{2}\left[\frac{E}{c} + \beta\times B\right].$ В уравнениях выше, $m,\ q,\ G=(g-2)/2$ есть, соответственно, масса, заряд, и магнитная аномалия частицы; $\beta = {}^{v_0}/_{c}$, нормализованная скорость частицы; γ её Лоренц-фактор. ЭДМ множитель η определяется уравнением $d = \eta\frac{q}{2mc}s$, где d — ЭДМ частицы, а s её спин.

В стандартном формализме принято оперировать с матрицей преобразования (поворота) спина за оборот в кольце R: [**?**, стр. 4]

$$t_R = \exp\left(-i\pi\nu_s\sigma\cdot\bar{n}\right) = \cos\pi\nu_s - i(\sigma\cdot\bar{n})\sin\pi\nu_s,$$

где $\nu_s = {}^{\Omega_s}/_{\Omega_{cyc}}$ отношение угловой скорости поворота спин-вектора частицы к её циклотронной частоте, называемое *спин-тюн*, а $\bar{n}$ определяет направление оси прецессии спина, и называется *инвариантной спиновой осью.*

Концепция замороженного спина

Из уравнения eq:TBMT$_MDM,,,\ :\Omega_{MDM} = 0$; иными словами, можно реализовать условие замороженности спина (Frozen Spin condition).

Достоинство работы в FS-состоянии в накопительном кольце следующее: в соответствии с уравнениями eq:TBMT$_main, eq : TBMT_MDM, eq : TBMT_EDM,,,,,\ :\ [?,.5]\omega \propto \sqrt{\Omega_{MDM}^2 + \Omega_{EDM}^2} \approx \Omega_{MDM} + \frac{\Omega_{EDM}^2}{2\Omega_{MDM}}..$

Однако, заморозив спин в горизонтальной плоскости, единственная остающаяся МДМ компонента угловой скорости сонаправлена с ЭДМ компонентой, а значит складывается с ней линейно. Таким образом, чувствительность значительно улучшается.

Реализация условия замороженности спина в накопительном кольце

Накопительные кольца могут быть классифицированы в три группы:

1. чисто магнитные (как COSY, NICA, etc),
2. чисто электростатические (Brookhaven AGS Analog Ring),
3. комбинированные.

Ввиду уравнения eq:TBMT$_MDM, FS$.

Для некоторого числа частиц, таких как протон, чья $G > 0$, чисто электростатическое кольцо может быть использовано в рамках FS методологии ЭДМ эксперимента с пучком на так называемой "магической" энергии, определяемой как $\gamma_{mag} = \sqrt{(1 + G)/G}$.

Для частиц с $G < 0$ (таких как дейтрон),это невозможно, и необходимо использовать комбинированное кольцо. Для того, чтобы реализовать

FS условие в комбинированном кольце, вводится [**?**] радиальное электрическое поле величины

$$E_r = \frac{GB_y c\beta\gamma^2}{1 - G\beta^2\gamma^2}. \tag{1.1}$$

1.2 Методы, основанные на FS методологии

В этом разделе мы сначала приведём два основополагающих примера методов поиска ЭДМ в накопительном кольце, основанных на принципе замороженного спина; затем обобщим эти методы до двух взаимоисключающих категорий; и завершим описанием метода Frequency Domain.

Отметим, что помимо метода замороженного спина существуют альтернативные подходы к измерению ЭДМ, например [**?**, **?**], в котором поляризация пучка свободно вращается вокруг вертикального ведущего поля ускорителя.

Метод BNL FS

BNL FS метод, предложенный коллаборацией, занимающейся разработкой метода измерения ЭДМ в накопительном кольце в Брукхейвенской Национальной Лаборатории (США) в 2008 году, [**?**] это метод для комбинированного кольца. Пучок продольно-поляризованных дейтронов инжектируется в кольцо; с помощью поляриметрии наблюдается его спин-прецессия в вертикальной и горизонтальной плоскостях; ЭДМ сигнал — это изменение вертикальной компоненты поляризации со временем, выражаемое как: [**?**, стр. 8]

$$\Delta P_V = P\frac{\omega_{edm}}{\Omega}\sin\left(\Omega t + \Theta_0\right), \tag{1.2}$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_{edm}^2 + \omega_a^2}$, ω_a, ω_{edm} угловые скорости вызываемые, соответственно, магнитным и электрическим дипольными моментами.

Прилагая радиальное магнитное поле E_r (величины, определяемой уравнением eq:FS$_E r), \omega_a$ по крайней мере на фактор 10^9; ввиду малости величины гипотезируемой ω_{edm}, $\Delta P_V \approx P\omega_{edm}t$, и максимальная величина ΔP_V возрастает в 10^9.

Ожидаемая чувствительность эксперимента 10^{-29} $e{\cdot}cm$ за 10^7 секунд (6 месяцев) полного времени измерения. На этом уровне чувствительности, асимметрия сечения $\varepsilon_{LR} \approx 5 \cdot 10^{-6}$ для наименьших практически реализуемых значений ω_a. [**?**, стр. 18] Последнее обстоятельство ставит серьёзную проблему для поляриметрии. [**?**] Один из вариантов её решения лежит в применении внешнего радиального магнитного поля и измерении общей частоты прецессии засчёт МДМ и ЭДМ вместе. Это основа так называемого метода Спинового Колеса (Spin Wheel), также часто называемого Кооп-Колесом (Koop Wheel), о котором в следующем разделе.

Единственный известный систематический эффект спиновой динамики первого порядка это присутствие ненулевой средней вертикальной компоненты электрического поля $\langle E_V\rangle$. В этом случае, спин будет прецессировать вокруг радиального направления с частотой [**?**, стр. 11]

$$\omega_{syst} \approx \frac{\mu\langle E_V\rangle}{\beta c\gamma^2}.$$

Здесь важно рассмотреть два обстоятельства:

- присутствие $\langle E_V\rangle \neq 0$ вызвано ошибкой юстировки элементов ускорителя;
- этот систематический эффект меняет знак при инжекции пучка в обратном направлении.

Последнее обстоятельство является причиной структуры инжекции пучка использованной в этом методе (сначала по-часовой, потом противчасовой; CW/CCW). Хотя ω_{syst} меняет знак при смене направления движения пучка а значит поддаётся контролю, эта методология тем не менее не учитывает его *величину*. В разделе 2.3 (численно в 2.3), мы показываем, что при реалистичной величине (стандартного отклонения) ошибки установки спин-ротаторов 100 мкм, частота МДМ прецессии вокруг радиальной оси находится на уровне 50–100 рад/сек. [?] В связи с этим, невозможно использовать данную методологию в её оригинальном варианте.

Также, стоит отметить, что при попытке уменьшения ω_{syst}, увеличивается влияние так называемой ошибки геометрической фазы. [?, стр. 6]

Spin Wheel метод

Озвученные выше проблемы с поляриметрией и высокой скоростью прецессии решаются в Spin Wheel методе, предложенном проф. И. Коопом (Новосибирский Государственный Университет). [?] Основная идея метода в следующем: сначала, обеспечивается условие замороженного спина; затем включается радиальное магнитное поле величины B_x, достаточно сильное чтобы вызвать вращение спина с частотой порядка 1 Гц. Поскольку поле радиальное, вызванная им МДМ прецессия сонаправлена с ЭДМ, а значит они складываются линейно: $\omega \propto \Omega_{MDM} + \Omega_{EDM}$.

ЭДМ вклад вычисляется сравнением циклов с противоположными знаками B_x: [?, стр. 1963]

$$\Omega_{EDM} = \frac{\Omega_x(+B_x) + \Omega_x(-B_x)}{2}.$$

Внешнее поле также вызовет разделение орбит пучков. [?, стр. 1963] Это разделение может быть измерено на уровне пико-метров SQUID магнетометрами; его предлагается использовать для калибровки внешнего поля.

Поскольку из-за внешнего поля прецессия вокруг радиальной оси на 10 порядков выше чем в оригинальном предложении, значительно упрощается задача для поляриметрии. Однако, существуют сомнения в возможности измерить вызываемое внешним полем разделение орбит даже при помощи SQUIDов.

Также, проблема паразитного поля, вызванного ошибкой юстировки, не решена.

Общая классификация методов FS-типа

Методы поиска электрического дипольного момента элементарных частиц можно отнести к одной из двух больших категорий, которые мы будем называть [a)]

методами пространственной области (Space Domain methods), и

методами частотной области (Frequency Domain methods).

В парадигме пространственной области, наблюдают за *изменением пространственной ориентации* вектора поляризации пучка, *вызванным ЭДМ*.

Метод BNL FS — это канонический пример методологии пространственной области: изначально продольно-поляризованный пучок инжектируется в накопительное кольцо; наблюдают за вертикальной компонентой его вектора поляризации. При идеальных условиях, любое отклонение вектора поляризации от горизонтальной плоскости связывают с действием ЭДМ.

Сразу же очевидны две технические проблемы такого подхода:

1. он ставит трудную задачу для поляриметрии [**?**];
2. он налагает очень строгие ограничения на точность установки оптических элементов ускорителя.

Первая проблема обусловлена необходимостью детектирования изменения асимметрии сечения взаимодействия ϵ_{LR} на уровне $5 \cdot 10^{-6}$, чтобы достичь уровня чувствительности ЭДМ 10^{-29} e·см. [**?**, стр. 18]

Вторая — требованием минимизировать величину угловой скорости МДМ прецессии в вертикальной плоскости [**?**, стр. 11]

$$\omega_{syst} \approx \frac{\mu \langle E_v \rangle}{\beta c \gamma^2}, \tag{1.3}$$

индуцированной неидеальностями ускорителя.

В соответствии с оценками, сделанными проф. Сеничевым, чтобы выполнить это условие, геодезическая точность установки элементов ускорителя должна достичь 10^{-14} м. Технологии сегодняшнего дня позволяют получить только около 10^{-4} м.

При практически-достижимом уровне неточности установки элементов, $\omega_{syst} \gg \omega_{edm}$, и изменения ориентации вектора поляризации по большей части не имеют отношения к ЭДМ.

Другой критичной проблемой, возникающей в пространственной области, является ошибка геометрической фазы. [**?**, стр. 6] Проблема заключается в том, что даже если каким-то образом занулить неидеальности электромагнитного поля (связанные с неточностью установки оптических элементов, или же случайными возмущениями поля) *в среднем*, поскольку повороты спина не коммутируют, угол поворота поляризации, вызванный ими, не будет равен нулю.

Напротив, методология частотной области основана на измерении ЭДМ-*добавки* к полной (МДМ и ЭДМ вместе) *угловой скорости* прецессии спина.

Вектор поляризации заставляют вращаться вокруг почти-постоянного, выделенного направления, определённого вектором $\bar{n}$, с достаточно высокой угловой скоростью, при которой её величину можно всегда легко измерить. Помимо упрощения условий поляриметрии, определённость вектора угловой скорости является защитой от ошибки геометрической фазы.

Так называемое Спин-Колесо может быть введено в систему извне, как в методе Spin Wheel; или же под ту же цель можно приспособить поля неидеальности машины (скорость вращения колеса определяется уравнением eq:ImperfectionWheelRollRate). Последнее возможно потому, что ω_{syst} меняет знак при смене направления движения пучка. [**?**, стр. 11]

Общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце

В качестве введения в предлагаемую методологию частотной области, коротко суммаризируем некоторые проблемы, общие для всех методов поиска ЭДМ в накопительном кольце; их можно разделить на две большие категории:

- Проблемы, решаемые Спин-Колесом:

- – случайные возмущения электромагнитного поля;
- – бетатронное движение.

- Проблемы, имеющие частные решения:
  - – декогеренция спина;
  - – неидеальности ускорителя.

Возмущения спиновой динамики

Проблемы первой категории — это такие, из-за которых возникает ошибка геометрической фазы.

И случайно-возникающие, и фокусирующие поля, действуя на бетатронно-осциллирующую частицу, возмущают направление и величину вектора угловой скорости спин-прецессии. Эффектом является спин-кик в направлении, определяемом возмущением.

Положим ЭДМ создаёт спин-кик вокруг радиальной ($\hat{x}$-) оси. Величина вектора угловой скорости имеет общую форму

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

где ω_y минимизируется путём удовлетворения условия замороженного спина; ω_z (чья постоянная составляющая вызвана неидеальностями ускорителя) может быть минимизирована установкой продольного соленоида на оптической оси.[1]

В пространственной области, стремятся также минимизировать добавку $\omega_{\langle E_v \rangle}$ к радиальной компоненте угловой скорости $\omega_x = \omega_{edm} + \omega_{\langle E_v \rangle}$. Следовательно, и спин-кики должны быть минимизированы до величины (значительно) меньшей чем ω_{edm}, чтобы понизить набег геометрической фазы до значений меньших, чем аккумулированная ЭДМ фаза.

Польза от Спин-Колеса, сонаправленного с угловой скоростью угловой скорости ЭДМ состоит в том, что МДМ добавки к общей угловой

[1] Длины 1 м, магнитное поле приблизительно 10^{-6} T.

скорости складываются как квадраты, а потому, их эффект значительно уменьшен: $\omega = \sqrt{(\omega_{edm} + \omega_{SW})^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$
$\approx (\omega_{edm} + \omega_{SW}) \cdot \left[1 + \frac{\omega_y^2+\omega_z^2}{\omega_{SW}^2}\right]^{1/2}$
$\approx (\omega_{edm} + \omega_{SW}) \cdot \left(1 + \frac{\omega_y^2+\omega_z^2}{2\omega_{SW}^2}\right)$
$\approx \omega_{SW} + \omega_{edm} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{\omega_{SW}}}_{\epsilon}.$

Поскольку наша цель — наблюдение смещения значения ω, связанное с ЭДМ, необходимо минимизировать случайную переменную ϵ:

$$\frac{1}{2}\frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{\omega_{SW}} < \omega_{edm}.$$

Сделаем предварительные оценки. Положим $\omega_{SW} \approx 50$ рад/сек (причины выбора этого значения разъяснены в разделе 2.3), $\omega_{edm} \approx 10^{-9}$ рад/сек (соответствует величине ЭДМ 10^{-29} e·см). Тогда, сумма $\omega_y^2 + \omega_z^2$ должна быть меньше 10^{-7} рад/сек, или же каждая из угловых скоростей меньше $3 \cdot 10^{-4}$ рад/сек. Это на несколько порядков меньше, чем ожидаемая стандартная ошибка оценки угловой скорости, [**?**] и потому не является проблемой.

Остаётся рассмотреть МДМ спин-кики вокруг $\hat{x}$-оси; они не аттеньюированы, вызывают наибольшие проблемы. Их можно поделить на три вида: [a)]

постоянные, не индуцированные ошибкой юстировки оптических элементов;

полу-постоянные, индуцированные ошибками юстиорвки;

случайные.

Полу-постоянные радиальные спин-кики (не важно, вызванные ли магнитными, или электрическими полями) меняют знак, когда обращается направление циркуляции пучка. Влияние случайных спин-киков можно контролировать статистическим усреднением. Перманентные, нечувствительные ни к направлению ведущего поля, ни к направлению движения пучка, не поддаются контролю. Но с другой стороны, их источники не должны присутствовать в ускорителе при нормальных обстоятельствах. Мы рассматриваем влияние возмущений спиновой динамики пучка на измерение ЭДМ в разделе 2.1.

Декогеренция спина

Когеренцией спина называется мера или качество сохранения поляризации в изначально полностью поляризованном пучке. [**?**, стр. 205] Под декогеренцией спина понимают деполяризацию, связанную с различием угловых скоростей частиц пучка.

Разница угловых скоростей, в свою очередь, связана с разницей длин орбит частиц, и следовательно их уровней равновесной энергии, от которых зависит спин-тюн. Одним из способов подавления декогеренции спина является утилизация секступольных полей. Как это работает, мы рассматриваем в рвзделе 2.2.

Неидеальности ускорителя

Как мы уже указывали, проблема неидеальностей ускорителя имеет две стороны: [*a*)]

они практически не могут быть убраны настоящини технологиями; но что ещё хуже

если их убрать, мы попадаем в пространственную область, и открываем метод для геометрической фазы.

К счастью, спин-кики, возбуждаемые ими, меняют знак при смене направления движения пучка. К тому же, их величина достаточна, чтобы использовать их в качестве Спин-Колеса. Подробнее, вопрос МДМ прецессии, связанной с полями неидеальности ускорителя, рассматривается в разделе 2.3.

Остаётся одна проблема: точность установки скорости вращения колеса при смене его направления. Этот момент рассматривается в разделе 2.4.

Метод Frequency Domain

Главные особенности

Предлагаемый метод обладает следующими основными характеристиками:

1. Это метод временной области;
2. Вместо подавления, поля, связанные с неидеальностями ускорителя, используются в качестве Спин-Колеса.
   - Смена направления вращения Спин-Колеса производится сменой полярности ведущего поля ускорителя;
   - контроль скорости его вращения производится на основе наблюдения прецессии спина в горизонтальной плоскости.

Мы уже рассмотрели достоинства частотной области, такие как

a) упрощение поляриметрии, и

b) иммунитет к ошибке геометрической фазы.

Уделим более пристальное внимание вопросу использования полей неидеальности ускорителя в качестве Спин-Колеса.

ЭДМ-статистика

Поскольку угловая скорость измеряемая в методологии частотной области включает добавки и от магнитного, и от электрического, дипольных моментов, для построения ЭДМ-эстиматора требуется использование двух циклов: в первом МДМ вращение происходит в одну сторону, во втором в обратную.

В связи с тем, что Кооп-Колесо в FDM — это продукт ведущего поля, для обращения направления его вращения необходимо поменять полярность ведущего поля. Когда это происходит: $B \mapsto -B$, направление циркуляции пучка изменяется с по-часовой (CW) до против-часовой

(CCW): $\beta \mapsto -\beta$, в то время как электростатическое поле остаётся неизменным: $E \mapsto E$. В соответствии с уравнением Т-БМТ, компоненты частоты прецессии спина меняются как: $\omega_x^{CW} = \omega_x^{MDM,CW} + \omega_x^{EDM}$,
$\omega_x^{CCW} = \omega_x^{MDM,CCW} + \omega_x^{EDM}$,
$\omega_x^{MDM,CW} = -\omega_x^{MDM,CCW}$,
$- \hat{\omega}_x^{EDM} := \frac{1}{2}\left(\omega_x^{CW} + \omega_x^{CCW}\right)$
$= \omega_x^{EDM} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\omega_x^{MDM,CW} + \omega_x^{MDM,CCW}\right)}_{\varepsilon \to 0}$.

Для того, чтобы удерживать систематическую ошибку ε ниже уровня требуемой точности, т.е. гарантировать что условие eq:CW$_C CW_M DM$, . [?], . 2.4; – (. 1.2).

Метод оценки частоты и свойства данных

Подробно вопрос оценки частоты рассмотрен в приложении 4. В настоящем разделе, вкратце опишем лишь основные заключения.

Во-первых, частота прецессии поляризации пучка оценивается путём фитирования данных поляриметрии синусоидальной функцией с постоянными параметрами. В связи с этим, возникает проблема возмущения спиновой динамики (например, связанное с бетатронными колебаниями), рассматриваемая в разделе 2.1. По результатам проведённого анализа, мы заключаем что этот эффект не составляет проблему в рамках предлагаемой методологии.

Во-вторых, данные поляриметрии обладают свойством *гетероскедастичности*, т.е. ошибка измерения поляризации пучка растёт к концу измерительного цикла. [?] Обыкновенный метод наименьших квадратов (Ordinary Least Squares) теряет эффективность при фитировании данных, обладающих таким свойством; также, даваемые им стандартные ошибки оценок параметров оказываются смещены и несостоятельны. При этом, ожидания оценок остаются валидными. Поэтому, при использовании OLS необходимо использовать стандартные ошибки в форме Уайта. Но лучше вместо OLS использовать гетероскедастичные модели. [?, ?]

В-третьих, деполяризация пучка налагает более жёсткие ограничения на длительность измерительного цикла, чем время жизни пучка. Предположим пучок с бесконечным временем жизни. [2] Очевидно, что когда пучок полностью деполяризуется, мы не сможем получать информацию о скорости вращения его поляризации; т.е. существует принципиальное ограничение на полное количество информации (обозначим её $\mathrm{FI_{tot}}$) о частоте прецессии спина, которое можно получить из одной инжекции. Будем называть период времени, за который поляризация уменьшается в e раз, постоянной времени деполяризации τ_d. В таблице 4.1 отражено количество выбранной (относительно $\mathrm{FI_{tot}}$) информации о частоте прецессии спина как функция длительности цикла, а также соответствующее отношение сигнал/шум. [3] Исходя из данных таблицы, полезная длительность измерительного цикла ограничена тремя постоянными времени деполяризации.

В четвёртых, наши симуляции показывают возможность достичь точности оценки частоты прецессии спина на уровне $8\cdot10^{-7}$ рад/сек за один измерительный цикл, при постоянной времени деполяризации 1,000 секунд, частоте измерения поляризации 375 Гц, и начальной ошибке измерения поляризации 3%. При 70% временной загрузке ускорителя, это позволяет выйти на уровень $5\cdot10^{-9}$ рад/сек стандартного отклонения среднего значения оценки частоты. Такая точность достаточна для получения оценки ЭДМ на уровне 10^{-29} e·см.

Понятие эффективного Лоренц-фактора

Спиновая динамика описывается понятиями *спин-тюна* ν_s и *оси стабильного спина* $\bar{n}$. Спин-тюн зависит от равновесного уровня энергии частицы, выражаемого Лоренц-фактором:

$$\{\, \nu_s^B = \gamma G, \nu_s^E = \beta^2\gamma\left(\frac{1}{\gamma^2-1} - G\right) = \frac{G+1}{\gamma} - G\gamma. \tag{1.4}$$

[2] Помимо прочего, это означает недеструктивную поляриметрию.

[3] Отношение вычислено исходя из модели сигнала поляризации и модели ошибки измерения поляризации.

Таблица 1.1: Количество выбранной информации (в долях от потенциального максимума), в зависимости от длительности измерительного цикла, и соответствующее отношение сигнал/шум.

Инфо. ($\%\mathrm{FI}_{\mathrm{tot}}$)	Длительность ($\times\tau_d$)	Сигнал/шум
95	3.0	0.4
90	2.3	1.1
70	1.2	5.5
50	0.7	11.7

К сожалению, не все частицы пучка обладают одним и тем же Лоренц-фактором. Частица вовлечённая в бетатронное движение имеет более длинную орбиту, и как прямое следствие принципа автофазировки, в ускорительной структуре использующей ВЧ-резонатор, её равновесный уровень энергии должен вырасти. Иначе она не сможет оставаться у пучке. В этом разделе мы анализируем как Лоренц-фактор частицы должен измениться при учёте бетатронного движения, а также нелинейностей коэффициента сжатия орбиты.

Продольная динамика частицы на референсной орбите накопительного кольца описывается системой уравнений:

$$\{ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\Delta\varphi = -\omega_{RF}\eta\delta, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta = \frac{qV_{RF}\omega_{RF}}{2\pi h\beta^2 E}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right). \tag{1.5}$$

В уравнениях выше, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ и $\delta = \left(p - p_0\right)/p_0$ отклонения фазы и нормализованного импульса частицы от фазы и импульса референсной частицы; V_{RF}, ω_{RF}, соответственно, напряжение и частота ВЧ-поля; $\eta = \alpha_0 - \gamma^{-2}$ слип-фактор, где α_0 есть коэффициент сжатия орбиты, определяемый как ${}^{\Delta L}/_{L} = \alpha_0\delta$, L длина орбиты; h гармонической число; E полная энергия частицы.

Решения этой системы формируют семейство эллипсов в плоскости (φ, δ), с общим центром в точке (φ_0, δ_0) (см. Рисунок **??**). Однако, если рассматривать частицу вовлечённую в бетатронный колебания, и учитывать разложение ряда Тэйлора коэффициента сжатия орбиты более высокого порядка $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\delta$, то первое уравнение системы трансформируется в: [?, p. 2579] $\mathrm{d}\,\Delta\varphi\overline{\mathrm{d}t = -\omega_{RF}\left[\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta + (\alpha_0 + \gamma^{-2})\delta + (\alpha_1 - \alpha_0\gamma^{-2} + \gamma^{-4})\delta^2\right]}$,

где

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta = \frac{\pi}{2L}\left[\varepsilon_x Q_x + \varepsilon_y Q_y\right], \tag{1.6}$$

это удлинение орбиты, связанное с бетатронным движением; ε_x и ε_y горизонтальный и вертикальный эмиттансы пучка, и Q_x, Q_y горизонтальный и вертикальный тюны.

Решения трансформированной системы более не центрированы на одной точке (см. Рисунок **??**). Удлинение орбиты и отклонение импульса вызывают сдвиг равновесного уровня энергии: [?, p. 2581]

$$\Delta\delta_{eq} = \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2\alpha_0 - 1}\left[\frac{\delta_m^2}{2}\left(\alpha_1 - \alpha_0\gamma_0^{-2} + \gamma_0^{-4}\right) + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta\right], \tag{1.7}$$

где δ_m есть амплитуда синхротронных колебаний.

Мы называем равновесный уровень энергии, ассоциированный со сдвигом импульса eq:EquLevMom$_s hift$, *эффективным Лоренц-фактором* :$\gamma_{eff} = \gamma_0 + \beta_0^2\gamma_0 \cdot \Delta\delta_{eq}$, (1.8)где γ_0, β_0 Лоренц-фактор и нормализованная скорость референсной частицы.

Отметим, что понятие эффективного Лоренц-фактора позволяет нам учитывать вариацию величины спин-тюна, вызванную вариацией длины орбиты частицы. Оно является краеугольным камнем в анализе декогеренции спина (рассматривается в разделе 2.2) и её подавления посредством секступольных полей.

Оно также играет важную роль в успешном воспроизведении МДМ-компоненты совокупной угловой скорости спин-прецессии. В связи с этим моментом, мы хотели бы обратить особое внимание читателя на раздел 2.5.

1.3 Варианты магнитооптических струкутур накопительных колец с “замороженным,” и “квази-замороженным” спином

Существуют два подхода к проблеме построения накопительного кольца для измерения ЭДМ дейтрона: [*a*)]

структура с “замороженным” спином (FS), и

структура с “квази-замороженным” спином (QFS).

В следующих разделах мы рассмотрим возможные варианты колец обоих типов.

Структура с “замороженным” спином

В структуре FS-типа, горизонтальная проекция вектора спина частицы пучка *непрерывно* сонаправлена с вектором её импульса. Для реализации условия непрерывности, в такой структуре используются цилиндрические спин-ротаторы, создающие одновременно и электростатическое, и магнитное поля. На Рисунке **??** представлен вариант кольца FS-типа. [**?**] Данное кольцо имеет длину 145.85 м, и рассчитано на инжекцию пучка дейтронов на энергии 270 МэВ. В структуре предусмотрено использование ВЧ-резонатора для подавления линейного эффекта декогеренции спина путём усреднения энергии вокруг значения равновесной энергии частицы. Продольное напряжение резонатора $V = 100$ кВ, частота поля $f_{RF} = 5 \cdot f_{rev}$, где частота оборота пучка $f_{rev} = 1.00$ МГц. Остающиеся нелинейные эффекты декогеренции подавляются с помощью трёх[4] семейств секступолей.

Основная цель FS-концепции кольца — максимизация ЭДМ сигнала. Однако, следует обратить внимание на то, что строгое выполнение условия замороженности спина возможно только для референсной частицы. Это связано с тем, что, как следует из уравнения eq:TBMT$_MDM, E-, B-$

[4]Некоторые авторы используют два семейства [**?**] в этой структуре.

, $-\gamma$, при котором $\Omega_y^{MDM}=0$. Таким образом, даже в FS-структуре, спин-векторы большинства частиц “заморожены” лишь приблизительно.

Структура с “квази-замороженным” спином

В QFS-концепции кольца отказываются от непрерывного выполнения условия сонаправленности векторов поляризации и импульса пучка, требуя лишь равенства нулю *совокупного за оборот* угла поворота вектора поляризации относительно импульса в электростатических (Φ_s^E) и магнитных (Φ_s^B) элементах (углы отсчитываются в системе центра масс): [**?**] $\sum_i \Phi_{s,i}^E = -\sum_j \Phi_{s,j}^B$.

Как следует из определения спин-тюна (см. раздел 1.1), угол поворота спин-вектора частицы относительно её импульса в электромагнитном поле $\Phi_s = \nu_s \cdot \Phi$, где Φ угол поворота импульса, а ν_s спин-тюн.

Угловая скорость поворота вектора импульса частицы в магнитном поле B есть

$$\omega_B = \frac{q}{m}\frac{B}{\gamma},$$

в электростатическом E:

$$\omega_E = \frac{q}{E}\frac{E\times\beta}{c\beta^2\gamma},$$

из чего следуют выражения для спин-тюна частицы в электростатическом и магнитном полях:

$$\{\,\nu_s^B = \gamma G, \nu_s^E = \beta^2\gamma\left(\frac{1}{\gamma^2-1}-G\right). \tag{1.9}$$

Преимущество кольца QFS-типа над кольцом FS-типа в относительной простоте исполнения: нет необходимости использовать совмещённые цилиндрические электро-магнитные элементы; в двух вариантах QFS-кольца, рассматриваемых ниже, используются [a)]

либо прямые фильтры Вина,

либо цилиндрические электростатические дефлекторы и магнитные диполи раздельно. С другой стороны, из-за появления вертикальной компоненты оси прецессии спина $\bar{n}_y$, максимальная амплитуда ЭДМ-сигнала уменьшается по-сравнению с полностью замороженным случаем. Фактор, на который уменьшается амплитуда [?]

$$J_0(\Phi_s) \approx 1 - \frac{\Phi_s^2}{4},$$

где Φ_s есть максимальный угол отклонения горизонтальной проекции вектора спина частицы от вектора импульса. Педположим, что этот угол не превосходит половины набега спиновой фазы за оборот $\pi \cdot \gamma G/2n$; в данном контексте n — периодичность оптики кольца. Поскольку магнитная аномалия дейтрона $G = -0.142$, для рассматриваемых ниже QFS структур $J_0 \geq 0.98$.

Структура с кодовым названием 6.3

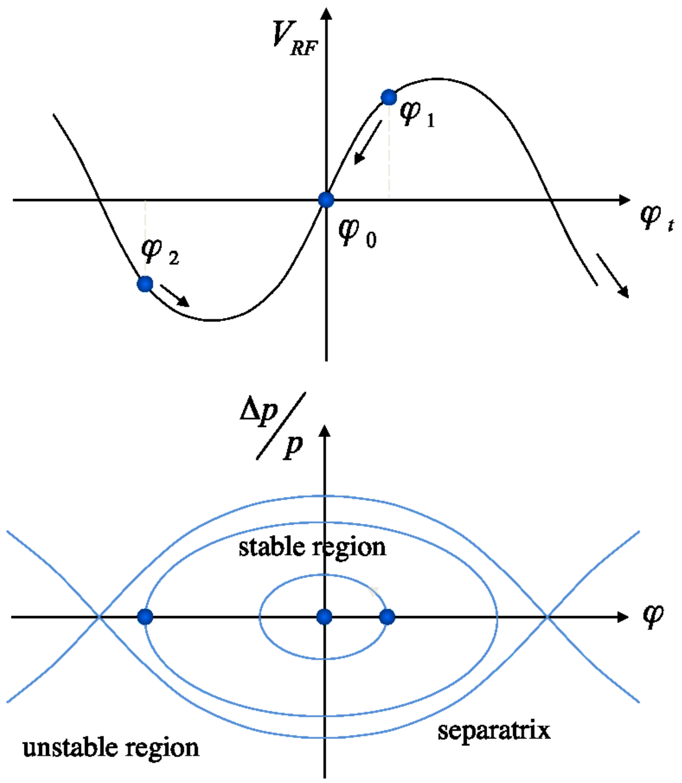
На Рисунке **??** представлена структура, построенная по принципу квазизамороженного спина, в которой электростатические и магнитные поля разделены в пространстве. [?] Электростатические цилиндрические дефлекторы с отрицательной кривизной орбиты используются для компенсации набега фазы, связанного с МДМ-прецессией в магнитных арках. [?] Кольцо длины 166.67 м рассчитано на инжекцию пучка дейтронов на энергии 270 МэВ. Для подавления эффектов декогеренции первого порядка используется ВЧ резонатор, с продольным полем $V = 100$ кВ, и рабочей частотой $f_{RF} = 5 \cdot f_{rev}$, где $f_{rev} = 0.87$ МГц. Нелинейные эффекты декогеренции подавляются с помощью шести семейств секступолей.

Структура с кодовым названием E+B

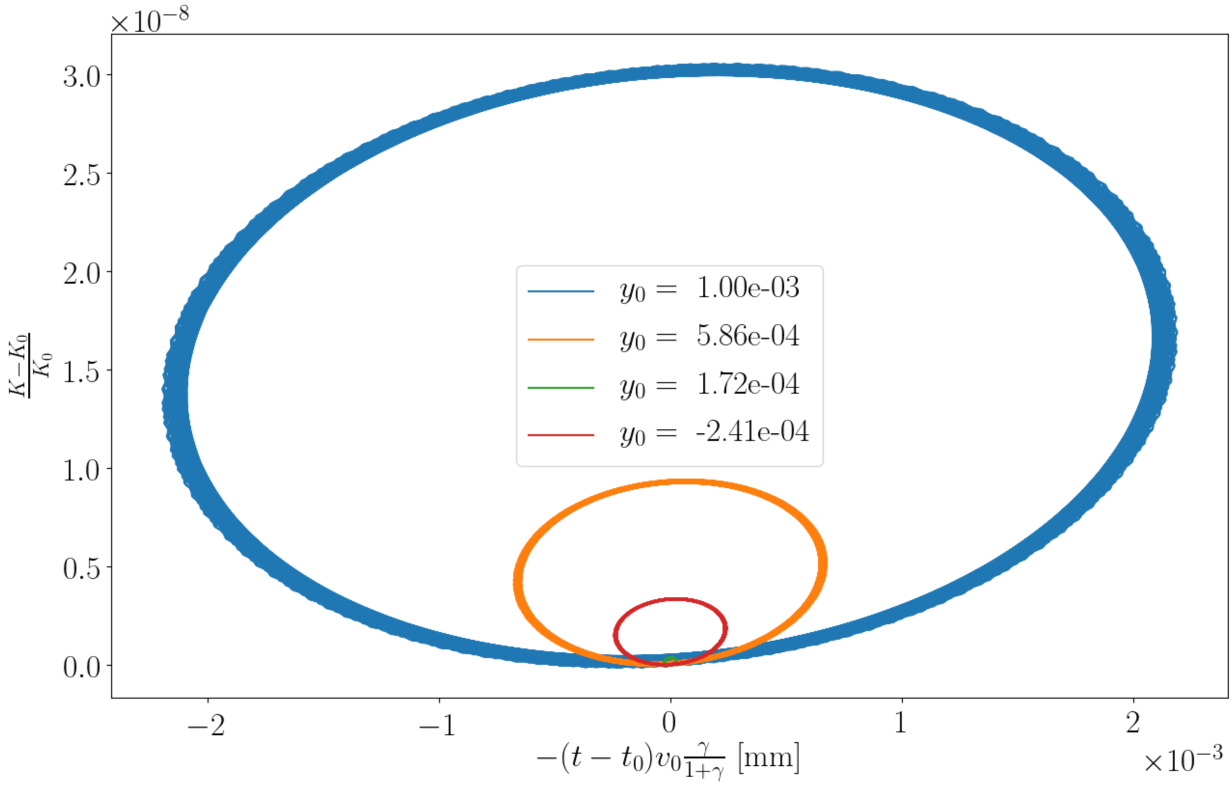
В структуре, представленной на Рисунке **??**, используются прямые, статические фильтры Вина. Это позволяет: [*a*)]

исключить нелинейные компоненты электростатического поля, возникающие в связи с кривизной дефлектора, и упростить структуру с инженерной точки зрения.

Длина структуры 149.21 м, энергия инжектируемых дейтронов 270 МэВ. Для подавления эффекта декогеренции первого порядка используется ВЧ-резонатор с продольным напряжением $V = 100$ кВ и частотой $f_{RF} = 5 \cdot f_{rev}$, где $f_{rev} = 0.98$ МГц. Нелинейные эффекты декогеренции подавляются с помощью четырёх семейств секступолей.



Линейная теория.



Результаты моделирования с трансфер-матрицами третьего порядка.

Рис. 1.1: Продольные фазовые портреты частиц в структуре с ВЧ продольной фокусировкой. Цветом различаются частицы с разными начальными сдвигами в вертикальной плоскости относительно референсной частицы; остальные координаты идентичны.

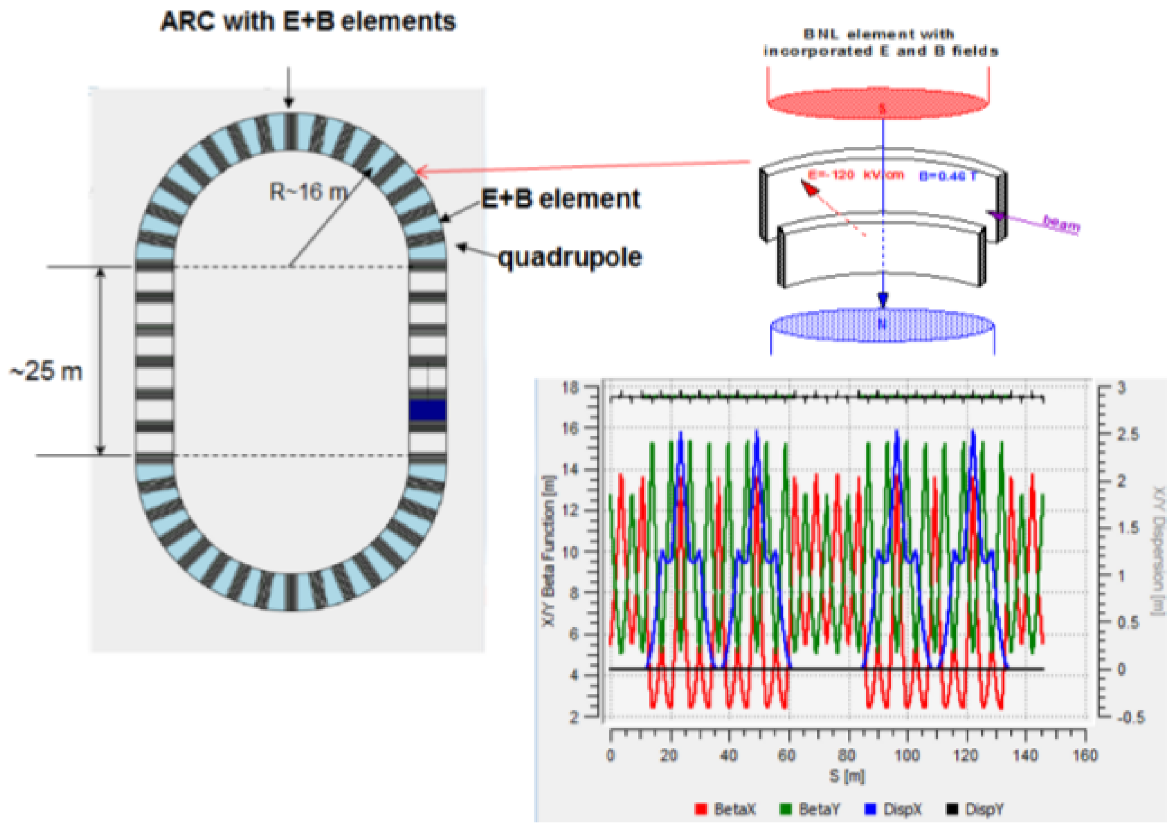


Рис. 1.2: Вариант кольца, построенного по принципу “замороженного” спина. В арках использованы цилиндрические электро-магнитные элементы (Рисунок взят из [?])

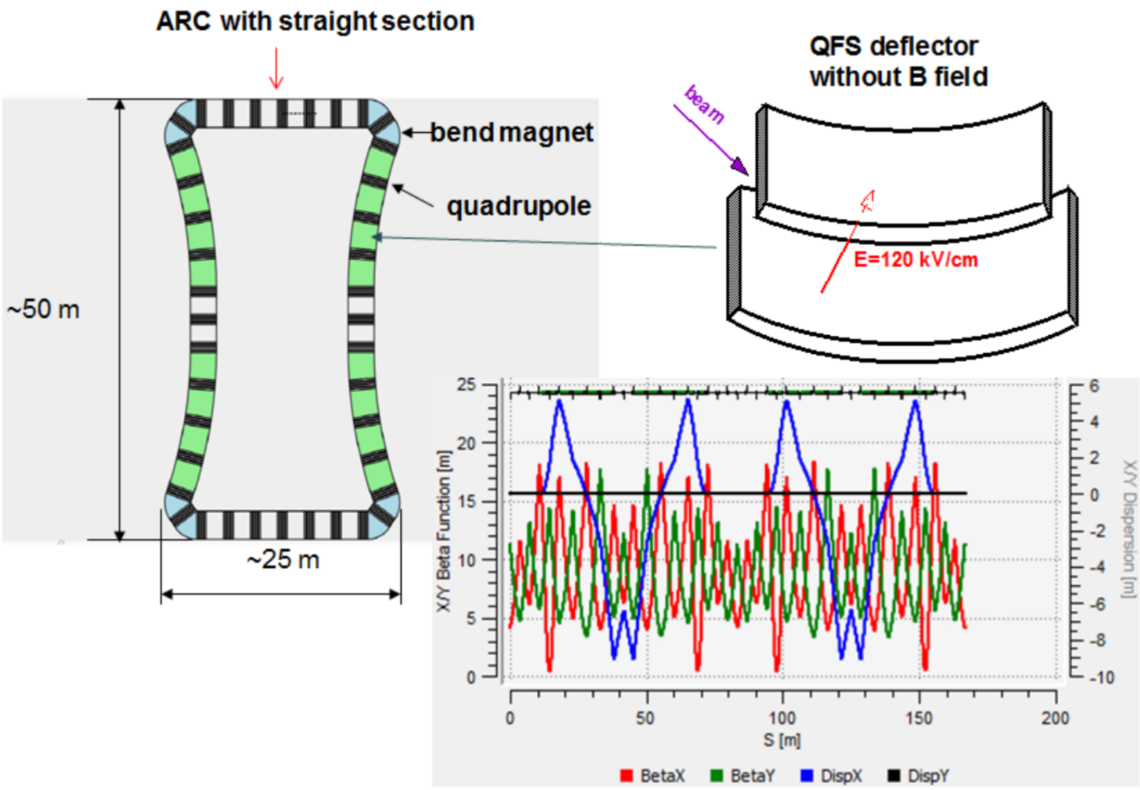


Рис. 1.3: Вариант кольца, построенного по принципу квази-замороженного спина, дизайн с разделением E- и B-полей. (Рисунок взят из [?])

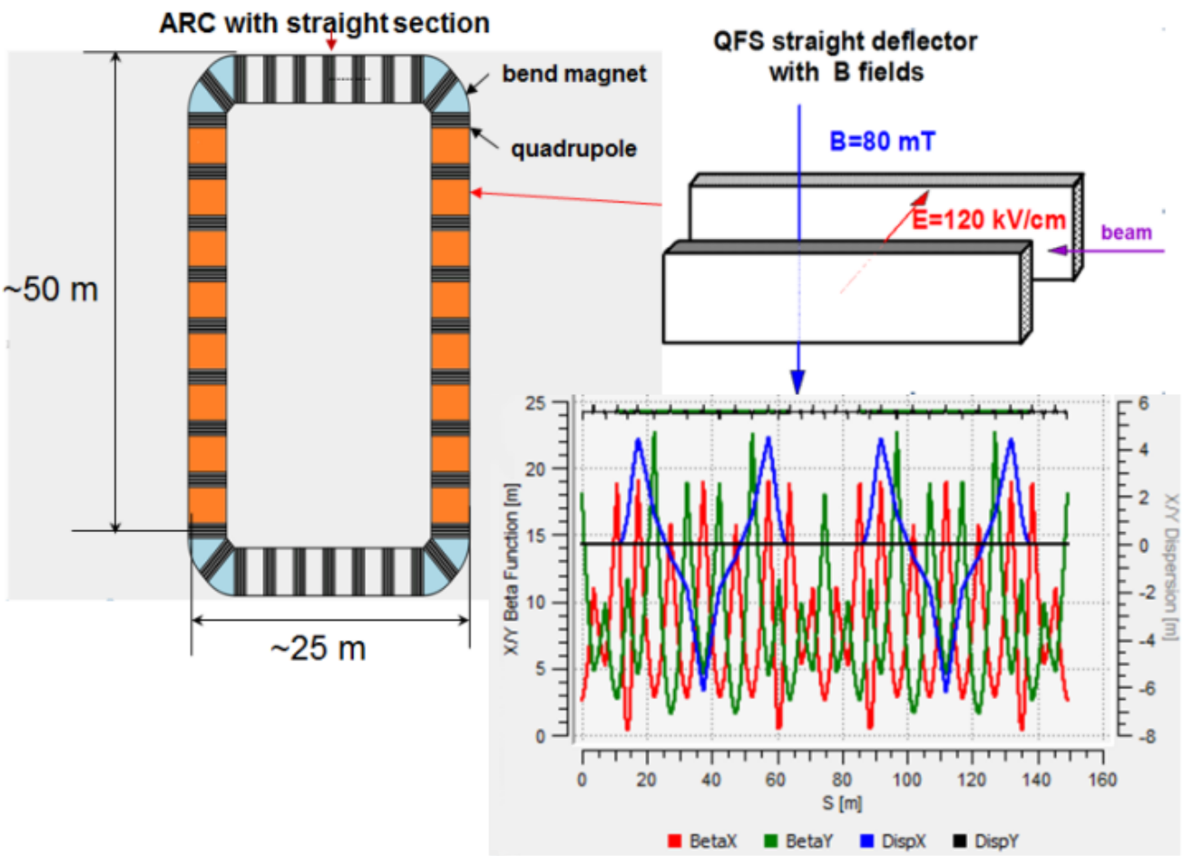


Рис. 1.4: Вариант кольца, построенного по принципу квази-замороженного спина, дизайн с прямыми фильтрами Вина. (Рисунок взят из [?])

Глава 2

Общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце, и их решения

Универсальные проблемы методов по поиску ЭДМ фундаментальных частиц в накопительном кольце можно разделить на две категории: [i)]

проблемы, решаемые введением в систему Спин-Колеса, и

проблемы, имеющие специфические решения.

Проблемы первой категории следуют из нестабильности оси стабильного спина частиц. К ним относятся, например, локальные возмущения электромагнитных полей, а также бетатронные колебания частиц. В обоих случаях, ось стабильного спина частицы отклоняется от своего равновесного значения на непродолжительное время.

К проблемам, имеющим специфические решения относятся спин-декогеренция, и фальш-сигнал, вызванный неидеальностями ускорителя. В этом разделе мы рассмотрим суть каждой из данных проблем, опишем их возможные решения, и проведём соответствующие симуляции.

2.1 Возмущения спиновой динамики

Постановка проблемы

Инвариантная спиновая ось частицы, учавствующей в бетатронном движении, колеблется вокруг своего референсного значения. [?, стр. 11] По этой причине, амплитуда решения уравнения Т-БМТ для вертикальной компоненты спин-вектора: $\mathrm{s}_y = \sqrt{\left(\frac{\omega_y\omega_z}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega_x}{\omega}\right)^2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \phi\right)$ $= \sqrt{\left(\bar{n}_y\bar{n}_z\right)^2 + \bar{n}_x^2} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \nu_s \cdot n_{turn} + \phi\right)$, превращается в изменяющуюся во времени функцию. Если вариация оси стабильного спина (а также спин-тюна частицы) имеет достаточно большую амплитуду, использование гармонической функции с постоянными параметрами в качестве модели для фитирования сигнала повлечёт за собой систематическую ошибку спецификации модели. Ошибки данного типа отражаются на валидности оценок параметров модели, то есть на оценке частоты, и потому требуют анализа.

Вариация спин-тюна ν_s особенно проблематична в этом отношении, т.к. она напрямую влияет на фазу сигнала; однако, эта проблема может быть решена введением в ускорительную структуру секступольных полей, как описано в разделе 2.2. В связи с этим, в настоящем разделе мы сфокусируемся на рассмотрении вариации $\bar{n}$.

Численное моделирование

Симуляция проводилась следующим образом: частица, смещённая с референсной орбиты в вертикальном направлении на 0.3 мм, многократно инжектируется в неидеальную структуру с замороженным спином [?], использующую секступоли для подавления декогеренции, вызванной бетатронными колебаниями в вертикальной плоскости (см. раздел 2.2). Неидеальности структуры симулируются наклонами E+B элементов. Введённые таким образом неидеальности не ведут к возмущению референсной орбиты (то есть, референсная орбита — равно как и орбита бетатрон-осциллирующей частицы — одинакова для всех инжекций.)

На каждой инжекции, углы наклонов E+B элементов генерируются случайным образом из нормального распределения $\alpha \sim N(\mu_i, 3 \cdot 10^{-4})$ градусов, $i \in \{1, \ldots, 11\}$, где μ_i изменяется в диапазоне $[-1.5 \cdot 10^{-4}, +2.5 \cdot 10^{-4}]$ градусов. Ненулевые ожидания μ_i симулируют введение в систему Кооп-Колеса. [?] Величины μ_i и σ_α выбраны с целью детализации эффекта. При больших значениях, труднее различимы эффекты влияния вариации ν_s и $\bar{n}$.

Ещё одним аспектом симуляции, требующим упоминания, является то, что частица инжектируется на энергии 270 МэВ, в то время как условие замороденности спина выполняется строго при 270.0092 МэВ. Из-за этого, ось стабильного спина $\bar{n}$ смотрит в основном в вертикальном направлении (отклоняясь от него не более чем на 51° при больших скоростях поворота Кооп-Колеса); её радиальная компонента (определяющая амплитуду колебаний вертикальной компоненты спин-вектора) относительно мала, и потому ещё более чувствительна к вариации, вызванной бетатронным движением в вертикальной плоскости.

Трэкинг спина выполнялся с помощью кода COSY Infinity [?], на протяжении $1.2 \cdot 10^6$ оборотов; каждые 800 оборотов ν_s и $\bar{n}$ вычисляются (процедурой TSS [?, стр. 41]) в точке фазового пространства, занимаемой частицей на данный момент, что даёт нам серию $(\nu_s(n), \bar{n}(n))$, n — номер оборота частицы в ускорителе. Соответствующие компоненты спин-вектора $(s_x^{trk}(n), s_y^{trk}(n), s_z^{trk}(n))$, вычисленные трэкером (процедура TR [?, p. 41]), составляют вторую серию данных, используемых в анализе.

Анализ

Используя данные первой серии, мы сгенерировали ожидаемую $s_y^{gen}(t)$ “генераторную” серию, в соответствии с уравнением eq:sy$_{v}arying_{a}mplitude$, “″s$_y^{idl}$, в которой мы положили постоянные значения $\nu_s = \langle \nu_s(t) \rangle$ и $\bar{n} = \langle \bar{n}(t) \rangle$.

Наша гипотеза состоит в том, что бетатронное движение частицы должно ввести несоответствие между синусоидальной моделью

$$f(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta), \tag{2.1}$$

и данными трекера, путём вариации оси прецессии спина $\bar{n}$, а значит амплитуды фитируемого сигнала. “Идеальная” серия служит базой сравнительного анализа, так как она идеально соответствует модели; “генераторная” серия учитывает вариацию $\bar{n}$, всё ещё оставаясь в пределах модели. “Трекерная” серия — наиболее близкое приближение к реальным измерительным данным.

Для сравнения серий между собой, мы [a)]

вычислили и проанализировали невязки $\epsilon_1(t) = s_y^{gen}(t) - s_y^{idl}(t)$ и $\epsilon_2(t) = s_y^{trk}(t) - s_y^{idl}(t)$;

профитировали модель eq:fit$_{m}odel, ; \bar{n}$ при каждом значении скорости Спин-Колеса.

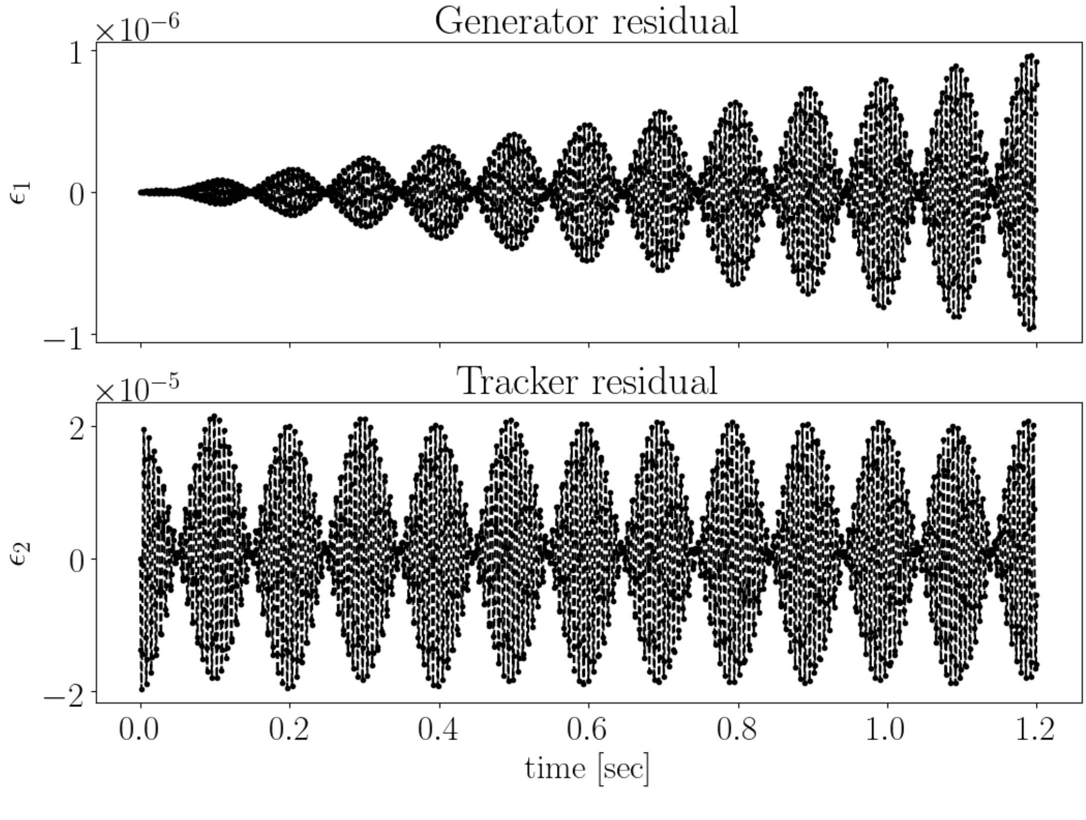


Рис. 2.1: Сравнительные невязки как функции времени. Верхняя панель: невязка ϵ_1; нижняя панель: невязка ϵ_2

Таблица 2.1: Оценки параметров модели (медленный SW)

Серия	Пар.	Величина	Ст.Ошибка	AIC
3*s_y^{idl}	$\hat{f}$	4.220359687911	$6.9 \cdot 10^{-11}$	3*-62093
	$\hat{a}$	0.12514597851	$4 \cdot 10^{-11}$	
	$\hat{\delta}$	$-1.50 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-10}$	
3*s_y^{gen}	$\hat{f}$	4.2203596911	$1.9 \cdot 10^{-9}$	3*-52142
	$\hat{a}$	0.125145979	$1 \cdot 10^{-9}$	
	$\hat{\delta}$	$-1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	
3*s_y^{trk}	$\hat{f}$	4.2203603	$1.3 \cdot 10^{-6}$	3*-34567
	$\hat{a}$	0.12514597	$3.7 \cdot 10^{-7}$	
	$\hat{\delta}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	

На Рисунке 2.1 мы наблюдаем, что “генераторная” серия почти идентична “идеальной” серии, при $\epsilon_1 \leq 1 \cdot 10^{-6}$ (даже если её частота немного отличается) в течении длительности цикла, в то время как “трекерная” серия отклоняется от неё на уровне $\epsilon_2 \leq 2 \cdot 10^{-5}$. Это различие между ϵ_1 и ϵ_2 наблюдается систематически для всех величин скорости Спин-Колеса (см. Рисунок **??**), и пока что не имеет объяснения.

На Рисунке **??** мы наблюдаем, что стандартные отклонения обеих невязок показывают такую же зависимость от скорости колеса, как и ν_s (Рисунок **??**, нижняя панель), но не как стандартное отклонение компонент $\bar{n}$. Это свидетельствует о том, что вариация частоты даёт значительно больший вклад в несоответствие между моделью eq:fit$_m odel, , \bar{n}$.

Таблица **??** характеризует качество фита модели по отношению к данным, в случае самого медленного Кооп-Колеса. Видно, что попарные разницы между оценками параметров серий не являются статистически-значимыми. Хотя вариация вектора угловой скорости спин-прецессии ухудшила качество фита модели, она не ввела никакого статистически-значимого систематического смещения в оценки.

Выводы

Вопрос влияния бетатронного движения на ЭДМ статистику в FD-методологии следует рассматривать ввиду трёх обстоятельств:

1. Осцилляции амплитуды сигнала очень малы. Они происходят на уровне не более 10^{-4} (при $\alpha \sim N(0, 3 \cdot 10^{-2})$ градусов), тогда как ожидаемая неточность измерений поляризации находится на уровне процентов. Это значит суперпозиция систематической ошибки и случайной ошибки измерения не будет проявлять статистически-значимую систематичность.

2. Коэффициент корреляции между оценками амплитуды и частоты не значителен. Колебания амплитуды влияюи на оценку $\hat{a}$ в первую очередь; их эффект на оценку $\hat{\omega}$ опосредован, и описывается коэффициентом корреляции. Поскольку он меньше 10%, даже если колебания окажутся достаточными, чтобы повлиять на оценку амплитуды, их эффект на оценку частоты будет уменьшен по крайней мере в 10 раз.

3. Этот систематический эффект контролируется. И этот фактор является основным достоинством методологий частотной области. Вводя в систему внешнее Спин-Колесо, колебания $\bar{n}$ могут быть непрерывно минимизированы до необходимого уровня, без каких-либо модификаций паттерна эксперимента.

2.2 Декогеренция спинов частиц пучка

Когеренцией спина называется мера или качество сохранения поляризации в изначально полностью поляризованном пучке. [**?**, стр. 205]

Когда поляризованный пучок инжектируется в накопительное кольцо, спин-векторы частиц пучка начинают прецессировать вокруг вертикального (ведущего) поля. Частота прецессии зависит от равновесного уровня энергии частицы, который различен для частиц пучка.

Это обстоятельство не является проблемой в том случае, когда начальная поляризация пучка вертикальна; однако метод измерения ЭДМ в накопительном кольце, основанный на принципе замороженного спина требует, чтобы вектор поляризации пучка был сонаправлен с его вектором импульса, т.е. лежал в горизонтальной плоскости. Таким образом, декогеренция спина есть внутренняя проблема метода замороженного спина.

В настоящем разделе мы исследуем причины возникновения спин-декогеренции, метод борьбы с ней, а также приведём результаты симуляции, подтверждающей действенность метода. Для начала, однако, определим время когеренции спина, требуемое для измерения ЭДМ методом замороженного кольца в пространственной области.

Требования к времени когеренции пучка

Время когеренции спина (spin coherence time; SCT) для метода замороженного спина, выполненного в накопительном кольце с идеально установленными элементами определяется минимальным детектируемым углом отклонения вектора поляризации пучка из горизонтальной плоскости только засчёт ЭДМ. Для уровня чувствительности 10^{-29} $e \cdot cm$ это примерно $5 \cdot 10^{-6}$. [**?**]

В соответствии с уравнением Т-БМТ,

$$\Omega_{EDM,x} = \eta \frac{qE_x}{2mc},$$

где η есть коэффициент пропорциональности между ЭДМ и спином, равный 10^{-15} для дейтрона, для данного уровня чувствительности. [**?**, стр. 206]

Для дейтронного BNL FS кольца, $E_x = 12$ МВ/м, [**?**, стр. 19] так что $\Omega_{EDM,x} \approx 10^{-9}$ рад/сек. Таким образом получаем, что для того, чтобы достичь детектируемый уровень отклонения вектора поляризации на 1 мкрад требуется SCT порядка 1000 секунд. [**?**, стр. 207]

Происхождение декогеренции

Декогеренция спина в пучке вызвана разницей угловых скоростей прецессии спинов частиц, которая, в свою очередь, вызвана разницей их длин орбит и импульсов. Влияние длины орбиты на спин-тюн частицы описывается понятием эффективного Лоренц-фактора, введённым в разделе 1.2.

Из уравнений eq:spin$_t une_v s_g amma -$, $- -$, ., .

Теория секступольного подавления декогеренции

Чтобы минимизировать декогеренцию спина, связанную с бетатронным движением и отклонением импульса, могут быть использованы секступольные (или октупольные) поля [**?**, стр. 212]

Секступоль силы

$$S_{sext} = \frac{1}{B\rho}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2},$$

где $B\rho$ магнитная жёсткость, влияет на коэффициент сжатия орбиты первого порядка как [**?**, стр. 2581] $\Delta\alpha_{1,sext} = -\frac{S_{sext}D_0^3}{L}$, $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{sext} = \mp\frac{S_{sext}D_0\beta_{x,y}\varepsilon_{x,y}}{L}$, где $D(s,\delta) = D_0(s) + D_1(s)\delta$ обозначает функцию дисперсии.

Принцип действия секступольного подавления декогеренции можно сформулировать следующим образом. Частица в ускорителе совершает бетатронные колебания вокруг замкнутой орбиты. Из-за дисперсии, замкнутая орбита отличается для разных частиц пучка. Секступоль работает как призма, фокусируя (либо дефокусируя) замкнутые орбиты различных частиц.

В следующих разделах мы будем называть декогеренцию, связанную с горизонтальными/вертикальными бетатронными, и синхротронными колебаниями соответственно X-/Y-, и D-декогеренцией. Семейства секступолей, подавляющие X-, Y-, и D-декогеренцию, будем обозначать соответственно GSX, GSY, GSD.

Из уравнений eq:Sext$_c ompaction_e ffect,\ eq: Sext_O L_e ffect,,\ :\beta_x,\ \beta_y$ для подавления X-,Y-декогеренции, и D_0 для D-декогеренции.

Численное моделирование секступольного подавления декогеренции в идеальном ускорителе

Мы провели симуляцию для проверки возможности подавления декогеренции секступольными полями. В симуляции была использована идеальная структура с замороженным спином, описанная в разделе 1.3. Поскольку элементы в структуре установлены идеально, спин-векторы частиц не поворачиваются вокруг радиальной оси; прецессия происходит только в горизонтальной слоскости, вокруг вектора $\hat{y}$.

Оптимизация производится на энергии пучка 270.00 МэВ, орбитальная и спиновая трансфер-матрицы структуры вычисляются до пятого порядка разложения ряда Тэйлора.

В структуре используются три семейства секступолей, для подавления, соответственно, декогеренции связанной с горизонтальными, вертикальными бетатронными колебаниями, и с синхротронными колебаниями частиц. Оптимальное значение градиента для каждого семейства отыскивается по-отдельности; значения полей двух других семейств зануляются. Решение оптимизировать секступоли отдельно было принято потому, что одновременная оптимизация всех трёх градиентов вела к численным проблемам в процедуре TSS.[1]

В процессе оптимизации сначала вычисляются трансфер-матрицы структуры для заданного значения градиента, затем процедурой TSS вычисляются разложения Тэйлора спин-тюна и оси стабильного спина. В зависимости от оптимизируемого семейства, из разложения спин-тюна выбирается коэффициент при квадрате соответствующей координаты фазового пространства (x, y, или δ). Модуль коэффициента служит целевой функцией: т.е., при оптимальном значении градиента секступолей, спин-тюн не зависит (параболически) от соответствующего отклонения частицы от референсной.

[1]Также, мы изучали принципиальную возможность оптимизации всех трёх семейств секступолей, посредством прямого вычисления необходимых коэффициентов разложения ряда Тэйлора на трёхмерной сетке значений градиентов. Вопрос требует более детального рассмотрения, но на данном этапе мы сомневаемся в принципиальной возможности оптимизации всех трёх семейств секступолей. Возможно по этой причине в [**?**, стр. 219] в BNL структуре используется всего два семейства.

При оптимизации используется алгоритм Simplex. [**?**, стр. 37]

На Рисунке 2.2 изображены зависимости спин-тюна от смещения частицы от референсной по трём координатам фазового пространства до и после включения оптимизированных секступолей. Можно наблюдать, что во всех трёх случаях удалось подавить параболическую зависимость спин-тюна от координаты. При этом сохраняется линейная зависимость, которая не чувствительна к секступольным полям. Линейная зависимость наблюдается при моделировании ускорителя в коде COSY INFINITY, в коде MODE, а также при помощи программы MAD (из личной беседы с проф. Сеничевым). Исходя из этого, можно предположить, что эффект не является численным артефактом COSY INFINITY, а имеет физическое обоснование. Этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения, но на данный момент считается, что он подавляется соответствующей подстройкой параметров ВЧ-резонатора. [**?**, стр. 210, 219]

Переход декогеренции из горизонтальной плоскости в вертикальную, при появлении неидеальностей

В неидеальную структуру с замороженным спином инжектировался ансамбль из 30 частиц, равномерно смещённых от референсной в вертикальном направлении в диапазоне $y \in [-1, +1]$ мм. Поскольку анализ производится только на основании данных трекинга, пучок инжектирован на кинетической энергии строго замороженного спина 270.0092 МэВ.

Неидеальности структуры моделируются наклонами E+B элементов вокруг оптической оси на углы, взятые из нормального распределения $\Theta_{tilt} \sim N(0, 1 \cdot 10^{-4})$ радиан. Поскольку при введении таких неидеальностей сохраняется величина силы Лоренца, они не искажают орбитальную динамику частицы, и отражаются только на спиновой динамике. Величина стандартного отклонения отражает реалистичную неточность установки элементов ускорителя.

На Рисунке **??** представлено стандартное отклонение радиальных компонент спин-векторов ансамбля до и после включения секступолей.

Поскольку частицы движутся в неидеальной структуре, их спин-векторы вращаются в вертикальной плоскости с большой скоростью, и потому σ_{s_x} — быстро-осциллирующая функция, не показывающая долгосрочной тенденции к росту (наклон прямой $(2 \pm 2) \cdot 10^{-8}$ 1/сек). Таким образом, не наблюдается декогеренции спина в горизонтальной плоскости. При использовании секступолей амплитуда колебаний σ_{s_x} уменьшается на порядок.

На Рисунке **??** представлена та же статистика для вертикальных компонент спин-векторов. Наблюдается долгосрочный тренд, (наклон $(4.5 \pm 0.6) \cdot 10^{-7}$ 1/сек) до включения корректирующих секступолей. Секступольная коррекция не уменьшает амплитуду колебаний, но подавляет тренд (наклон после включения секступолей $(5 \pm 6) \cdot 10^{-8}$ 1/сек).

Численное моделирование эксперимента по подавлению декогеренции в неидеальном ускорителе

При проведении нижеследующих тестов симулировалась инжекция плоского, гауссовского пучка в структуру с замороженным спином. E+B спин-ротаторы в структуре были установлены со случайно распределённым углом наклона вокруг оптической оси, взятым из распределения $N(0, 5 \cdot 10^{-4})$ радиан.

Инжектируемые пучки состояли из 30 частиц, распределённых в вертикальной плоскости $y - z$ как $y \sim N(y_0, 0.1)$ мм; все остальные координаты равны нулю. Оффсет y_0 варьировался в диапазоне $[-1, +1]$ мм. Начальное направление спин-векторов всех частиц — продольное: $S(t = 0) = (0, 0, 1)$.

Также в структуре варьировалось значение градиента G_Y секступоля, модулирующего декогеренцию в вертикальной плоскости. G_Y менялся в диапазоне $[G_Y^0 - 5 \cdot 10^{-3}, G_Y^0 + 5 \cdot 10^{-3}]$, где $G_Y^0 = -5.77 \cdot 10^{-4}$ — оптимальное значение градиента для заданных неидеальностей структуры. Величина G_Y^0 была найдена путём минимизации коэффициента разложения a_2 ряда Тэйлора $\nu_s(y) \approx a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + O(y^3)$.

На каждое значение градиента приходится 10 инжекций.

Для того, чтобы обеспечить устойчивость процедуры TSS COSY Infinity [**?**], пучок инжектировался на энергии 270 МэВ (строгий FS находится на энергии 270.0092 МэВ), а матрицы перехода орбитального и спинового движений строились до третьего порядка разложения ряда Тэйлора.

Далее ансамбль начальных значений, представляющий пучок, трекается через структуру на протяжении $1.2 \cdot 10^6$ оборотов, что примерно эквивалентно 1.2 секундам. Каждые 800 оборотов производится запись необходимых для анализа данных.

Собираемые данные: [a)]

результаты вычислений процедуры TSS: спин-тюн ν_s и компоненты вектора оси инвариантного спина $\bar{n}$, и

компоненты спина (S_X, S_Y, S_Z), и фазового пространства (X, A, Y, B, T, D). Мы также записывали разложения ряда Тэйлора функций ν_s, $\bar{n}$, орбитальной, и спиновой трансфер матриц структур для каждого значения G_Y.

Из данных по компонентам спина вычисляется вектор поляризации банча:

$$P = \frac{\sum_i s_i}{|\sum_i s_i|}. \tag{2.2}$$

Вертикальная компонента вектора фиритуется функцией $f(t; a, f, \phi) = a \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$, оцениваются все три параметра $(\hat{a}, \hat{f}, \hat{\phi})$.

Эффект секступольных полей на спин-тюн и на ось стабильного спина

На Рисунке 1.3 представлена зависимость спин-тюна от вертикального смещения частицы от референсной орбиты: $\nu_s(y) \approx a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + O(y^3)$. На Рисунке **??** можно наблюдать разгибание ветвей параболы при $G_Y \to G_Y^0$.

Аналогичная зависимость для вертикальной компоненты оси стабильного спина частицы представлена на Рисунке 1.3. На Рисунке **??** мы обнаруживаем, что компонента оси стабильного спина ведёт себя аналогично спин-тюну при $G_Y \to G_Y^0$. Как и в случае идеальной структуры, на Рисунке **??** наблюдается присутствие в разложении $\bar{n}_y(y)$ линейного члена, не чувствительного к секступольным полям.

На рисунках выше, значения спин-тюна и компонент оси стабильного спина были вычислены как функции только одной переменной; все остальные координаты фазового пространства приняты равными нулю. Анализируя трекинговые данные, мы обнаружили, что компоненты оси стабильного спина (как впрочем и спин-тюн) частицы практически не варьируются, как можно было бы ожидать исходя из рисунков, а находятся на практически постоянном уровне. Мы предположили, что зависимости ν_s и $\bar{n}$ от вертикальной координаты и от её производной ($y' \equiv a$) компенсируют друг друга во время движения частицы по реальной траектории. На следующих рисунках мы изобразили значения функций ν_s, $\bar{n}$ на истинных траекториях частиц в ускорителе.

На Рисунке **??** изображены траектории частиц в плоскости (Y, B) фазового пространства, полученные в результате трекинга через неидеальный ускоритель.

На Рисунках **??**, **??**, **??**, и **??** изображены, соответственно: спин-тюн, радиальная, вертикальная, и продольная компоненты оси прецессии спина, вычисленные на траекториях частиц из Рисунка **??**, в двух случаях: $[i)]$

с выключенными, и

с включенными секступолями G_Y.

Исходя из рисунков можно отметить следующее:

1. в безсекступольном случае, и ν_s и направление $\bar{n}$ частицы по большей части (с точностью до влияния линейного члена разложения) фиксированы величиной её поперечного эмиттанса;

2. при применении секступольных полей, уровни ν_s и $\bar{n}$ различных частиц сравниваются, и становится виден эффект бетатронных колебаний, связанный с присутствием в разложении Тэйлора функций линейной компоненты.

Таким образом, Рисунки **??** и **??** свидетельствуют о том, что применение секступольных полей не только выравнивает модули **частот** прецессии частиц банча, но и их **направления**. Продольная компонента оси стабильного спина не чувствительна к секступольным полям, как видно из Рисунка **??**.

На Рисунке **??** представлены зависимости средних значений (уровней) радиальной и вертикальной компонент оси стабильного спина частицы от среднего значения её спин-тюна. На основании этого рисунка, в разделе 2.5 мы сделали вывод о полной эквивалентности спиновых динамик частиц с одинаковыми эквивалентными Лоренц-факторами. [2]

Анализ механизма подавления декогеренции секступольными полями

Исходя из уравнений eq:spin$_t une_v s_g amma\ eq : EquLevMom_s hift, -\ :$ $\nu_s = G\gamma_0 + G\frac{\gamma_0^2-1}{\gamma_0}\cdot C_0 \cdot f_1(\epsilon_x, \epsilon_y, Q_x, Q_y) + G\frac{\gamma_0^2-1}{\gamma_0}\cdot C_0 \cdot f_2(\alpha_1, \langle \Delta K/K\rangle^2)$, C_0 константа, а f_1 и f_2 определяются уравнением eq:EquLevMom$_s hift$.

Поскольку частица, совершающая бетатронные колебания, автоматически совершает и синхротронные колебания, эффект секступольных полей на её спин-тюн — это суперпозиция эффектов. Однако же частица, находящаяся на референсной орбите, но имеющая начальное отклонение по импульсу, имеет такую же длину орбиты, и совершает только синхротронные колебания. Соответственно, секступольные поля влияют на спин-тюн такой частицы только путём модификации коэффициента сжатия орбиты, т.е. функции f_2.

В связи с этим, мы провели симуляцию, в которой последовательно инжектировали два пучка по 30 частиц: в первом, D-банче, частицы были распределены как $\delta \sim N(0, 0.5\cdot 10^{-6})$, во втором, Y-банче, — $y \sim N(0, 0.5)$ мм. Остальные координаты фазового пространства имели начальное значение равное нулю.

Пучки инжектировались в идеальную структуру, для того, чтобы исключить эффекты, связанные с возмущением орбит нереференсных

[2] По крайней мере при работе ускорителя в режиме нулевого спинового резонанса.

частиц. Для первого пучка были включены только GSD секспутоли, для второго — GSY. Градиенты секступолей варьировались $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ от оптимального значения соответствующего семейства.

Трекинг проводился на протяжении $1.2 \cdot 10^6$ оборотов, данные выводились каждые 800 оборотов.

На Рисунке 1.3 представлены фазовые траектории частиц пучков в продольном фазовом пространстве. Мы видим, что фазовые эллипсы частиц D-банча центрированы практически [3] на одной и той же точке, а их эмиттансы не меняются при изменении силы поля сексуполя.

В то же время фазовые портреты частиц Y-банча меняются при изменении значения градиента секступоля. При этом мы видим, что максимальная скученность их центров (следовательно равновесных уровней энергии) не соответствует оптимальному значению градиента секступоля (фазовый портрет для последнего изображён на центральной панели). Именно это наблюдение послужило для нас стимулом инжекции в структуру D-банча. Мы объясняем это наблюдение суперпозицией эффектов сжатия равновесных орбит частиц, и модификации коэффициента сжатия орбиты.

Для более тщательного рассмотрения эффектов секступоля на функции f_1 и f_2, мы построили зависимости средних уровней спин-тюнов частиц от их равновесных уровней энергии (Рисунок **??**). Мы видим, что скученность точек графика для D-банча не меняется при варьировании значения градиента секступоля, а меняется только функциональная зависимость спин-тюна от равновесной энергии, как и предполагается функциональной формой f_2 (см. раздел 1.2). Таким образом, сигнатурой оптимизации коэффициента сжатия орбиты служит изменение функциональной зависимости $\langle \nu_s \rangle = f(\langle \Delta K/K \rangle)$.

На рисунке для Y-банча наблюдаются оба эффекта секступольного подавления декогеренции: изменяется и скученность точек (т.е. эмиттанс пучка), и функциональная зависимость.

[3]При увеличении можно наблюдать различие центров фазовых эллипсов, но это различие не чувствительно к значению градиента секступоля, и скорее всего следствие конечности статистики.

Вывод: Симуляция подтверждает утверждения eq:Sext$_{c}ompaction_{e}ffect\ eq : Sext$

2.3 Ошибки неидеальности ускорителя

Систематические ошибки, вызванные физическими неидеальностями ускорителя, включая неточность юстировки оптических элементов, вызывают фальш-сигнал ЭДМ. [?, стр. 230] Особенно в этом отношении проблематичны наклоны элементов вокруг оптической оси, поскльку они индуцируют паразитные горизонтальные компоненты магнитного поля B_x и B_z, которые обе вращают спин в вертикальной плоскости; той, в которой измеряется ЭДМ.

Ю. Сеничевым были сделаны [?] аналитические оценки МДМ частоты прецессии спина вокруг радиальной оси. Из уравнения Т-БМТ, и выражения силы Лоренца, скорость МДМ прецессии вокруг радиальной оси есть

$$\sigma\left[\Omega_x^{MDM}\right] = \frac{q}{m\gamma}\frac{G+1}{\gamma}\frac{\sigma\left[B_x\right]}{\sqrt{n}}, \tag{2.3}$$

где n есть число наклонённых спин-ротаторов, и $\sigma\left[B_x\right] = B_y\sigma\left[\delta h\right]/L$, при стандартном отклонении ошибки юстировки $\sigma\left[\delta h\right]$. При величине ошибки $\sigma\left[\delta h\right] = 100$ мкм, и длине дефлектора $L = 1$ м, $\sigma\left[\Omega_x^{MDM}\right] \approx 100$ рад/сек. [?]

Мы изучили спиновую динамику в структурах с замороженным и квази-замороженным спином в присутствии наклонов оптических элементов с помощью кода COSY INFINITY. Результаты нашей симуляции согласуются с оценками, представленными выше.

Имплементация паразитного поля. Имплементируя неидеальности полей, мы следовали рекомендациям изложенным в [?, стр. 235]. Малое возмущение магнитного поля, в первом приближении, действует как маленький пропорциональный поворот спин-вектора. Поэтому мы имплементировали наклон E+B элемента как домножение соответствующей матрицы поворота на его спиновую матрицу перехода, “спин-кик.” Такая имплементация наклона элемента гарантирует сохранение замкнутой орбиты, что физически обусловлено появлением компенсирующего электрического поля спин-ротатора при его наклоне.

В соответствии с уравнением eq:TBMT$_MDM$, , (B$_x, 0, B_z$) есть $\Delta\Omega_{MDM} = \frac{q}{m}G \cdot (B_x, 0, B_z), -\Theta_{kick} = t_0\Delta\Omega_{MDM}$, где $t_0 = L/v_0$ пролётное время референсной частицы через элемент.

Зависимость от распределения неидеальностей

Данная серия симуляций была проведена с целью подтвердить два тезиса касательно систематической ошибки измерения частоты прецессии спина в вертикальной плоскости, вызванной неточностью установки E+B элементов: [1)]

индуцированный МДМ-эффект зависит только от среднего значения угла наклона элементов, но не от конкретной последовательности углов; и

эта зависимость носит линейный характер.

Симуляция была проведена следующим образом: мы распределили наклоны Θ_{tilt} E+B элементам FS структуры случайным образом. После построения матриц перехода 3-го порядка (спиновой и орбитальной), были вычислены разложения Тэйлора функций спин-тюна и оси прецессии спина (SPA). Члены нулевого порядка этих разложений представляют собой спин-тюн и SPA референсной частицы.

Угловая скорость поворота спин-вектора референсной частицы вычисляется по формуле: [**?**, стр. 4]

$$\Omega = 2\pi/\tau_0 \cdot \nu_s \cdot \bar{n},$$

где $\tau_0 = f_{rev}^{-1} = 10^{-6}$ секунд есть пролётное время частицы через ускоритель.

Симуляция была проведена 11 раз; каждый раз углы наклона спин-ротаторов выбирались из нормального распределения $N(\mu_0 \cdot (i-5), \sigma_0)$, где $\mu_0 = 10 \cdot \sigma_0 = 10^{-4}$ рад, $i \in \{0, \ldots, 10\}$. Результаты представлены на Рисунке 2.3.

Из рисунка видно, что при такой установке элементов, при которой среднее значение угла наклона равно 10^{-4} радиан, поляризация пучка будет вращаться в вертикальной плоскости с угловой срокостью около 500 радиан/секунду. Это согласуется с оценками выше (раздел 2.3), поскольку в них предполагается стандартное отклонение ошибки наклона 10^{-4} радиан, а также наклон $n = 100$ элементов. В этом случае, стандартное отклонение среднего угла наклона элементов равно 10^{-5} радиан, и значит с вероятностью 67%, МДМ прецессия в вертикальной плоскости будет происходить со скоростью до 50 рад/сек, а с вероятностью 95% — до 100 рад/сек.

На Рисунке 1.3 изображены результаты теста, в котором E+B элементы попарно повёрнуты на противоположные углы (три случайные пары), а один элемент повёрнут на угол $\mu_i = (i-5)\cdot 10^{-6}$ рад, $i \in \{0,\ldots,10\}$. Обе симуляции были выполнены на энергии 270.0092 МэВ.[4] Можно наблюдать, что скомпенсированные элементы не дают вклад во вращение спин-вектора референсной частицы.

Равенство частот прецессии спинов частиц при движении в прямом и обратном направлениях

На Рисунке 1.3 изображена относительная разница между радиальной компонентой оси стабильного спина/угловой скоростью поворота спина частицы, соответственно для случайно-распределённой ошибки наклона элементов, и в случае попарной компенсации наклонов.

Для радиальной компоненты оси стабильного спина, относительная разница вычислялась как

$$\delta\bar{n}_x = \frac{\bar{n}_x^{CW}(\langle\Theta_{tilt}\rangle) - \bar{n}_x^{CCW}(\langle\Theta_{tilt}\rangle)}{\bar{n}_x^{CW}(\langle\Theta_{tilt}\rangle)};$$

[4]На этой энергии, в идеальной структуре, ν_s и $\bar{n}$ не определены в системе координат связанной с пучком, использованной COSY INFINITY. Это соответствует ситуации, когда спин не прецессирует ни в какой плоскости (горизонтальной или вертикальной), что есть условие трёхмерно-замороженного спина, для идеальной структуры.

для угловой скорости, соответственно:

$$\delta\Omega_x = \frac{\Omega_x^{CW}(\langle\Theta_{tilt}\rangle) - \Omega_x^{CCW}(\langle\Theta_{tilt}\rangle)}{\Omega_x^{CW}(\langle\Theta_{tilt}\rangle)}.$$

Из рисунков следует, что в обоих случаях движения пучка, ось стабильного спина наклонена одинаково; при этом существует различие между спин-тюнами CW и CCW пучков, на уровне не более десятых долей процента, которое тем сильнее, чем с меньшей скоростью крутится Спин-Колесо. Эта разница свидетельствует об асимметричности ускорительной структуры относительно обращения направления движения, с точки зрения спиновой динамики, и может объясняться различием референсных орбит прямого и обратного пучков.

2.4 Смена полярности ведущего поля

Необходимо уделить внимание двум аспектам проблемы смены полярности ведушего поля:

1. Какой параметр системы должен оставаться постоянным от цикла к циклу;
2. Как его можно наблюдать.

Целью смены полярности ведущего поля является точное воспроизведение радиальной компоненты частоты МДМ прецессии, индуцированной полями неидеальности ускорителя. Этот момент часто упускается из виду: простое воспроизведение *величины магнитного поля* не достаточно, поскольку точка инжекции центроида пучка, а значит его длина орбиты — и соответственно, ввиду уравнений eq:EffectiveGamma и eq:spin$_t une_v s_g amma, -, - - -.(,,,.)$

Таким образом, необходимо восстанавливать не величину поля, а эффективный Лоренц-фактор центроида.

Касательно второго вопроса, мы уже говорили, что скорость вращения Спин-Колеса контролируется через измерения частоты прецессии спина в горизонтальной плоскости. Эта плоскость была выбрана потому, что вектор угловой скорости ЭДМ прецессии смотрит (по большей части) в радиальном направлении; его вертикальная компонента возникает из-за полей неидеальности ускорителя, и мала по-сравнению с ихмеряемым ЭДМ эффектом. Поэтому, в первом приближении, когда мы манипулируем вертикальной компонентой совокупной угловой скорости спин-прецессии, мы манипулируем вертикальной компонентой вектора угловой скорости МДМ-прецессии.

Процедура калибровки эффективного Лоренц-фактора состоит в следующем.

Алгоритм калибровки

Пусть $\mathcal{T}$ обозначает множество всех возможных траекторий частицы в ускорителе. $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cup \mathcal{F}$, где $\mathcal{S}$ это все стабильные траектории, а $\mathcal{F}$ — это такие траектории, при попадании на одну из которых частица теряется из пучка.

Калибровка производится в два этапа:

1. На первом этапе величина поля выставляется таким образом, чтобы частицы инжектированного пучка попадали на траектории $t \in \mathcal{S}$. В первом приближении, это будет та же величина, что и для обратно-циркулирующего пучка, но с противоположным знаком.

2. Затем величина поля уточняется, путём удовлетворения условия замороженности спина в горизонтальной плоскости. При выполнении этого условия, из $\mathcal{S}$ выбирается подмножество $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$ тракеторий, для которых $\Omega_y = 0$.

Предположим, что $\Omega_y = \Omega_y(\gamma_{eff})$ — инъективная функция, а значит $\Omega_y(\gamma^1_{eff}) = \Omega_y(\gamma^2_{eff}) \to \gamma^1_{eff} = \gamma^2_{eff}$. Пространство траекторий делится на классы эквивалентности по величине эффективного Лоренц-фактора: траектории с одинаковым γ_{eff} эквивалентны с точки зрения спин-динамики (то есть, обладают одним и тем же значением спин-тюна ν_s и направлением оси стабильного спина $\bar{n}$), и принадлежат одному классу. Поскольку Ω_y инъективная, значит существует уникальное γ_{eff}, один класс эквивалентности, при котором $\Omega_y = 0$: $[\Omega_y = 0] \equiv [\gamma^0_{eff}] = \mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$.

Если бы в структуре кольца не использовались секступоли, $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$ было бы синглетоном (множеством с единственным элементом). В разделе 2.2, мы уже показали, что при использовании секступолей, $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$: $\nu_s(t_1) = \nu_s(t_2)$, $\bar{n}(t_1) = \bar{n}(t_2)$, и значит $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$ содержит несколько траекторий. [5]

Тогда, чтобы подвтердить валидность калибровочной процедуры, нам нужно показать следующее:

1. $\mathcal{S}|^{CCW}_{\Omega_y=0} = \mathcal{S}|^{CW}_{\Omega_y=0}$ — то есть, что и в прямом, и в обратном случае циркуляции пучка, $\Omega_y = 0$ для одних и тех же траекторий (эквивалентно, $\Omega_y = 0$ при одном и том же γ_{eff} и в CW, и в CCW случаях);

2. $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{S}|^{CCW}_{\Omega_y=0}$: $\nu_s(t_1) = \nu_s(t_2)$, $\bar{n}(t_1) = \bar{n}(t_2)$ — то есть, те же самые секступольные поля подавляют декогеренцию и прямого, и обратного пучков.

Для выполнения этой задачи мы:

1. строим зависимости $\nu_s(z),\ z \in \{x, y, \delta\}$ для CW и CCW пучков;

2. вычисляем их невязку $\epsilon(z) = \nu_s^{CW}(z) - \nu_s^{CCW}(z)$.

Если невязка мала в широком диапазоне z, значит: [1)]

секступольное подавление декогеренции работает без изменений значений градиентов для обоих пучков, и

[5] Строго говоря, как видно из рисунка 1.3 раздела 2.2, даже при использовании секступольных полей сохраняется некоторая, пренебрежимо малая, зависимость спин-тюна от длины траектории частицы. В связи с этим, равенства здесь приближённые, а множество $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$ следует считать нечётким множеством: мы будем полагать траектории, на которых $|\Omega_y| < \delta$ для некоторого малого δ, как принадлежащими классу $[\Omega_y = 0]$.

спин-тюн (соответственно γ_{eff}) одинаков для обоих пучков, и значит их Спин-Колёса вращаются с одинаковой скоростью.

Углы наклона $\bar{n}^{CW}$, $\bar{n}^{CCW}$ по отношению к горизонтальной плоскости определяются точностью установки $\Omega_y = 0$.

Численное моделирование

В симуляции используется неидеальная FS структура [?], в которой углы наклонов элементов вокруг оптической оси $\alpha \sim N(0, 5 \cdot 10^{-4})$ радиан. В структуре используется секступольное подавление декогеренции. Симуляция повторяется три раза; каждый раз включено только одно семейство секступолей. Значение градиента каждого из семейств оптимизируется по отдельности, по процедуре, описанной в разделе 2.2.

Кинетическая энергия пучка 270.00 МэВ. Спин- и орбитальная трансфер-матрицы вычисляются до третьего порядка разложения ряда Тэйлора.

Основное тело симуляции состоит в следующем: с помощью процедуры TSS [?, стр. 41] вычисляются разложения рядов Тэйлора третьего порядка спин-тюна ν_s и оси стабильного спина $\bar{n}$ структуры, в которой пучок движется по часовой стрелке. Затем, используя комбинацию процедур MR и SMR [?, стр. 233] вычисляются спин- и орбитальная трансфер-матрицы обратной структуры, и вычисляются разложения ν_s и $\bar{n}$ для обратной структуры (как её видит пучок, циркулирующий в обратном направлении).

Результаты

На рисунках **??**, **??**, и **??** представлены результаты тестов. Конкретнее, на рисунках **??**, **??**, и **??** изображены ν_s и $\bar{n}_y$ CW и CCW пучков в зависимости от смещения частицы от референсной в горизонтальной и вертикальной плоскостях, и по энергии, соответственно. Можно наблюдать, что зависимости ν_s^{CW} и ν_s^{CCW} (равно как и $\bar{n}_y^{CW}$ и $\bar{n}_y^{CCW}$) отличаются друг от друга, но при этом невязка частоты $\Delta\Omega_y$ не превосходит $\pm 3 \cdot 10^{-6}$ рад/сек; невязка спин-тюна не превосходит уровня 10^{-13}, поперечных компонент $\bar{n}$ уровня 10^{-8}. Рисунки **??**, **??**, и **??** изображают зависимости разницы между CW и CCW пучками радиальных компонент частоты прецессии спина от разницы их вертикальных компонент. Можно видеть, что при уменьшении разницы $\Delta\Omega_y < 10^{-7}$ рад/сек (точность определения частоты, достигаемая при фитировании данных с одного цикла), разница $\Delta\Omega_x < 10^{-8}$ рад/сек (т.е. на порядок меньше статистической погрешности). Это говорит о принципиальной возможности использования частоты прецессии спина в горизонтальной плоскости для калибровки частоты прецессии в вертикальной плоскости.

2.5 Спин-тюн эквивалентность траекторий частиц с одинаковыми значениями эффективного Лоренц-фактора

В контексте процедуры смены направления вращения Спин-Колеса, важно рассмотреть вопрос эквивалентности спин-динамики CW и CCW пучков.

Отправной точкой нашего анализа является утверждение 1: частицы с одинаковым значением эффективного Лоренц-фактора имеют одинаковый спин-тюн, то есть эквивалентны с точки зрения спиновой динамики. Это следствие уравнения eq:spin$_tune_vs_gamma$.

В следующих разделах мы проанализируем две формулировки утверждения 1:

A. интерпретируя эффективный Лоренц-фактор как математическое ожидание кинетической энергии частицы;

B. функция многих переменных $\nu_s(x, a, y, b, \ell, \delta)$ агностична к фазовой траектории частицы в поперечном фазовом пространстве (x, a), и (y, b), т.е. может быть сведена к функции одной переменной $\nu_s(\gamma_{eff})$.

Формулировка А

В данном разделе, рассмотрим утверждение 1, интерпретируя эффективный Лоренц-фактор как математическое ожидание Лоренц-фактора частицы.

Для проверки утверждения мы выполнили следующую симуляцию: мы инжектировали три банча по 10 частиц, X, Y, и D, в идеальную структуру с замороженным спином. Орбитальная и спин-трансфер матрицы построены до третьего порядка разложения Тэйлора, энергия инжекции 270 МэВ. Частицы X-банча имели начальное смещение по радиальной координате в диапазоне ±1 мм, Y-банча по вертикальной координате ±1.318 мм, [6] а D-банча по энергии, $\Delta K/K_0$, в диапазоне $\pm 10^{-4}$. Далее проводился трекинг частиц на протяжении 12,000 оборотов, с выводом данных каждые 80 оборотов.

Данные трекинга — координаты частицы в фазовом пространстве $z = (x, x', y, y', \ell, \delta)$, где $\ell = -(t - t_0)v_0\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}$ продольное смещение частицы относительно референсной, $\delta = \Delta K/K$ — её смещение по энергии, а также значение её спин-тюна $\nu_s(z)$. На основании этих данных, мы вычислили среднее значение спин-тюна $\langle\nu_s\rangle$, среднее значение смещения частицы по энергии $\langle\Delta K/K\rangle$, продольные и поперечные эмиттансы частиц.

На Рисунке **??** представлены результаты эксперимента. На верхней панели изображена зависимость $\langle\nu_s\rangle$ от $\langle\Delta K/K\rangle$, для бетатрон-осциллирующих банчей, при выключенных секступолях. Из рисунка следует, что при одинаковых средних уровнях энергии, частицы, совершающие бетатронные колебания в вертикальной плоскости, имеют спин-тюн, отличный от частиц, совершающих колебания в горизонтальной плоскости. То есть, на сколько мы можем судить, утверждение 1 в формулировке А опровергнуто.

Мы предположили, что различие наклонов прямых связано с *про-*

[6] Такой диапазон принят исходя из требования получить одинаковые эмиттансы частиц, совершающих бетатронные колебания в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Начальное отклонение задаёт амплитуду колебаний A, которая в свою очередь связана с бета-функцией β и эмиттансом ϵ частицы как $A = \sqrt{\epsilon\beta}$.

странственной зависимостью коэффициента сжатия орбиты. Это предположение основано на нашем анализе секступольного подавления декогеренции, подробнее описанного в разделе 1.3. Чтобы проверить наше предположение, мы повторили эксперимент для нескольких значений градиента секступоля GSX, взятых из диапазона $\pm 5 \cdot 10^{-3}$. Результаты представлены на нижней панели Рисунка **??**. На рисунке изображена та же зависимость, но только для X-банча, при различных значениях силы поля секступоля. Как видно из рисунка, при варьировании силы поля изменяется наклон касательной зависимости. Точно такое же поведение мы наблюдали и в разделе 1.3.

Для проверки нашей гипотезы о пространственной зависимости коэффициента сжатия орбиты, мы построили зависимости равновесных уровней энергии частиц X-, и Y-банчей от произведения их поперечных эмиттансов и бетатронных тюнов (Рисунок **??**). Исходя из уравнения eq:betatron$_O L, - .;,$ **??**$, X-, Y-$.

Пространственная зависимость коэффициента сжатия орбиты подтверждается уравнением (15) работы [?], в которой обнаруживаем:

$$\alpha_0 = \langle \frac{D_0}{\rho} \rangle, \quad \alpha_1 = \langle \frac{D_1}{\rho} \rangle + \frac{1}{2} \langle D_0'^2 \rangle,$$

где $D(s) = D_0(s) + D_1(s) \cdot \delta$ есть функция дисперсии, а ρ — радиус замкнутой орбиты частицы. В первом приближении, дисперсия существует только в горизонтальной плоскости, и равна нулю в вертикальной. Таким образом, пространственная зависимость функции дисперсии находит отражение в пространственной зависимости коэффициента сжатия орбиты.

Для сравнения, результаты тех же тестов в случае линейных спин- и орбитальной трансфер матриц представлены на Рисунках **??**, и **??**. Как видно на Рисунке **??**, у всех частиц, совершающих бетатронные колебания в вертикальной плоскости, один и тот же уровень равновесной энергии, что свидетельствует о равенстве их замкнутых орбит, что в свою очередь говорит об отсутствии дисперсии в вертикальной плоскости. При этом, из Рисунка **??** следует, что спин-тюн всех этих частиц одинаков.

На Рисунке **??** изображены зависимости продольных эмиттансов частиц от их поперечных эмиттансов (отнормированных бетатронными тюнами). Как видим, поперечные эмиттансы индуцируют продольные эмиттансы с разной скоростью, в зависимости от плоскости бетатронных колебаний частицы. В линейном случае, бетатронные колебания в вертикальной плоскости не индуцируют синхротронные колебания вовсе.

Вывод: Формулировка A не верна.

Формулировка B

При помощи кода COSY Infinity мы вычисляем функцию спин-тюна $\nu_s(z)$ в виде разложения ряда Тэйлора, где z = (x,a,y,b,ℓ, δ),
$\ell = -(t-t_0)v_0\frac{\gamma-1}{\gamma}$,
$\delta = \frac{\Delta K}{K}$.

В настоящем разделе, проверим утверждение 1 в обобщённой форме B: функцию многих переменных $\nu_s(z)$ можно представить в виде функции скалярного параметра $\nu_s(\gamma_{eff})$; при этом, мы не будем предполагать никакого формального выражения параметра γ_{eff}.

Если формулировка B верна, то существует система координат (одной из осей которых является ν_s), в которой частицы, совершающие бетатронные колебания в горизонтальной плоскости, неотличимы, с точки зрения спин-тюна, от частиц, совершающих колебания в вертикальной плоскости. К тому же, в этой системе координат не должны присутствовать координаты из поперечного фазового пространства (x, a), и (y, b).

Таким образом, будем рассматривать пространство $\mathcal{P} = (\ell, \delta, \nu_s)$. Если формулировка B верна, различие траекторий частиц в поперечном фазовом пространстве не должно отражаться на траектории частиц в $\mathcal{P}$.

В анализе использованы данные симуляции, описанной в предыдущем разделе.

На Рисунке **??** изображена зависимость $\nu_s(z)$ от (ℓ, δ) в том случае, когда z представляет реальную фазовую координату частицы в ускорителе. Мы наблюдаем:

1. стратификацию среднего уровня спин-тюна, как мы это видели в симуляциях по подавлению декогеренции в разделе 1.3;

2. стратификация гораздо значительнее для X-банча (синие точки), чем для Y-банча (красные точки).

Последнее объясняется большим значением функции дисперсии в горизонтальной плоскости. Отметим, что при одинаковом приведённом поперечном эмиттансе [7] (то есть одинаковом удлинении орбит, если исходить из уравнения eq:betatron$_O L$), , , , .

В связи с последним, мы решили построить ту же самую зависимость, но подбирать пары частиц на основе равенства не приведённых поперечных эмиттансов, а на продольных эмиттансов. На Рисунке **??** мы наблюдаем, что частицы, с приблизительно одинаковыми продольными эмиттансами имеют приблизительно одинаковый уровень спин-тюна, независимо от плоскости совершения бетатронных колебаний.

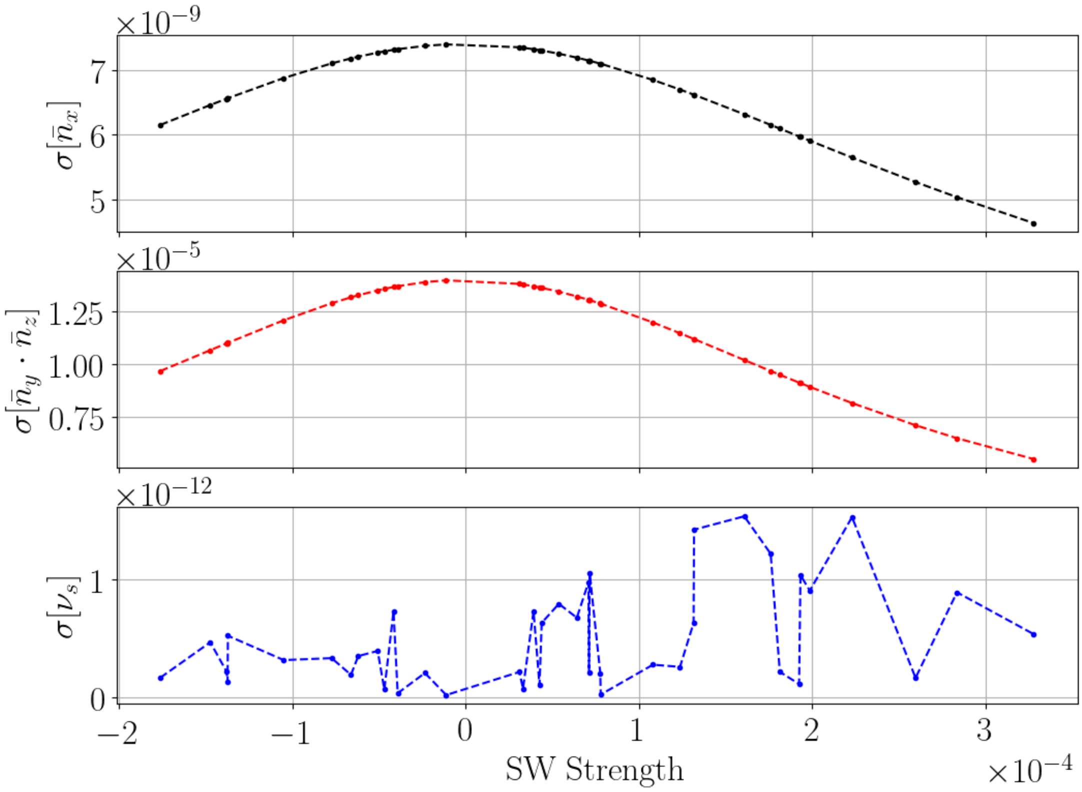
Вывод: формулировка В подтверждается симуляцией; эффективный Лоренц-фактор отражает величину продольного эмиттанса частицы.

Ввиду рисунка **??**, можно также заключить о *полной* эквивалентности спиновых динамик [8] частиц с одинаковыми эффективными Лоренц-факторами. [9]

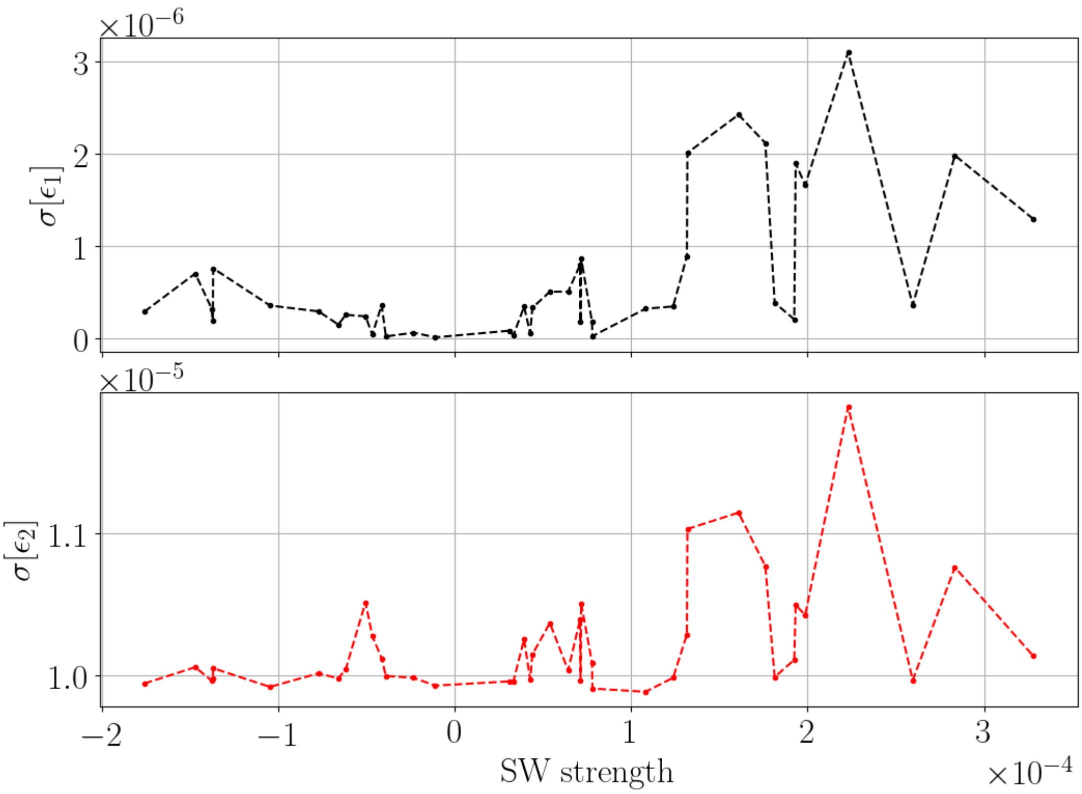
[7] Приведённым эмиттансом будем называть произведение $\epsilon_\alpha \cdot Q_\alpha$, где $\alpha \in \{x, y\}$.

[8] Имеется ввиду равенство спин-тюнов и осей стабильного спина.

[9] Во всяком случае, при работе ускорителя в режиме нулевого спинового резонанса.

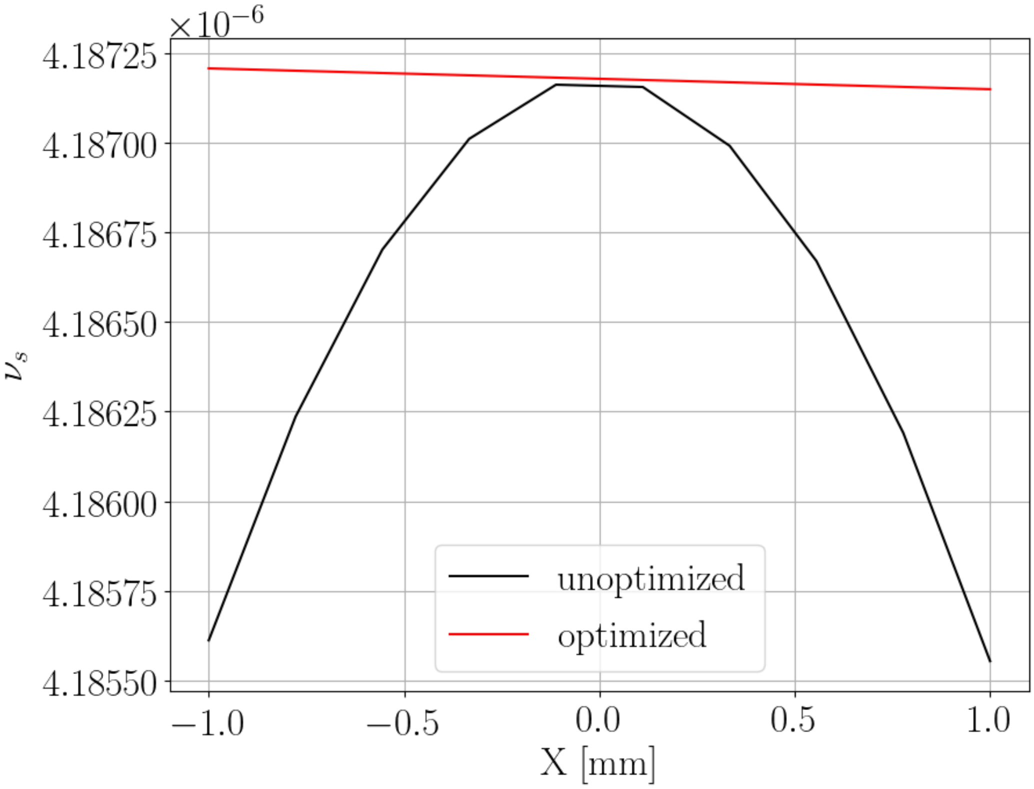


Компонент $\bar{n}$

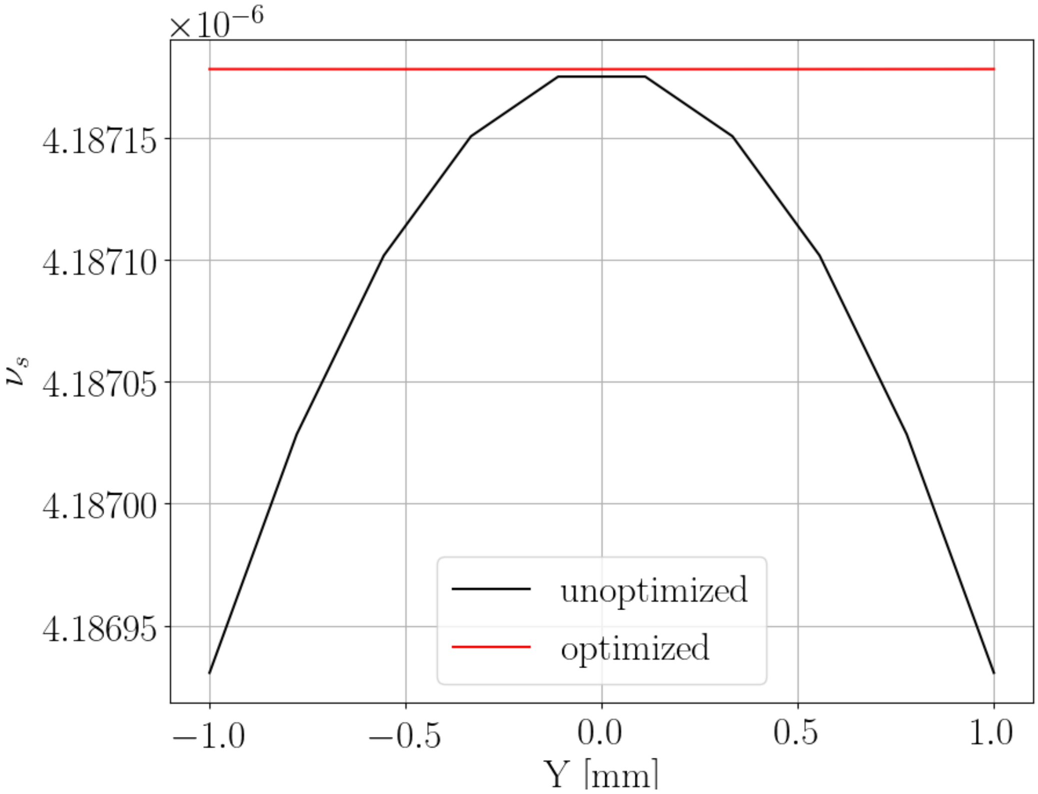


Сравнительных невязок. Верхняя панель: невязка ϵ_1; нижняя панель: невязка ϵ_2

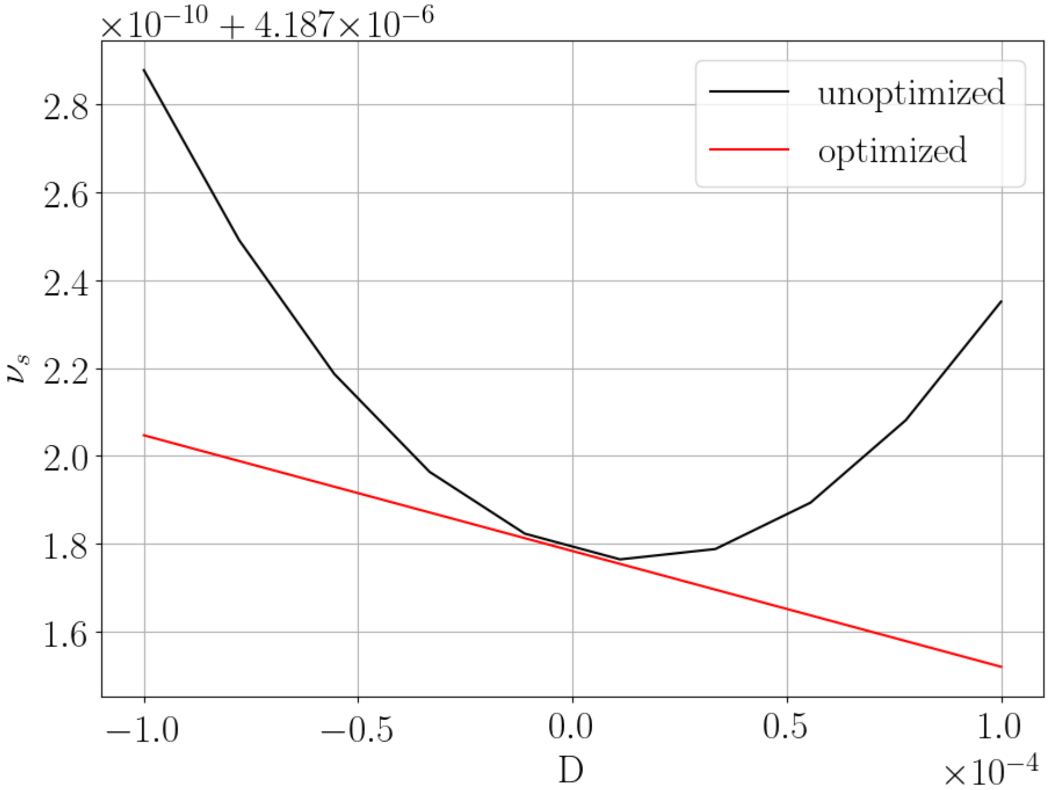
Рис. 2.2: Стандартные отклонения против относительной скорости Спин-Колеса



В горизонтальном направлении



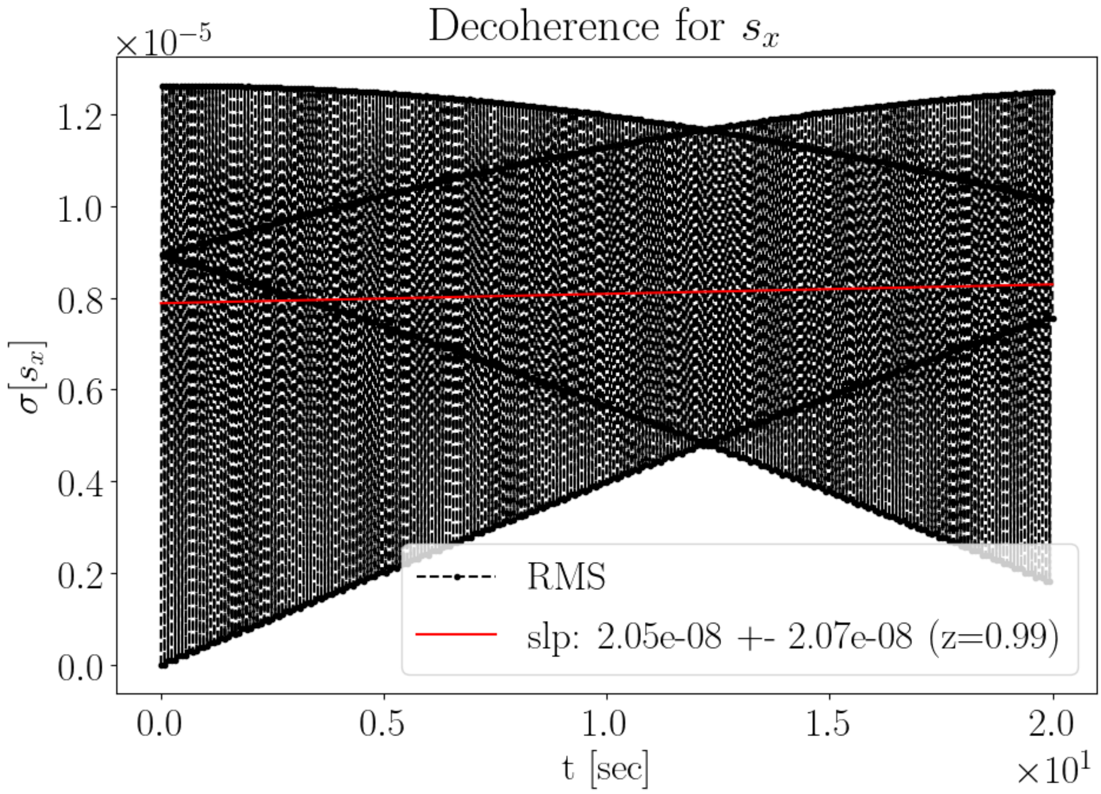
В вертикальном направлении



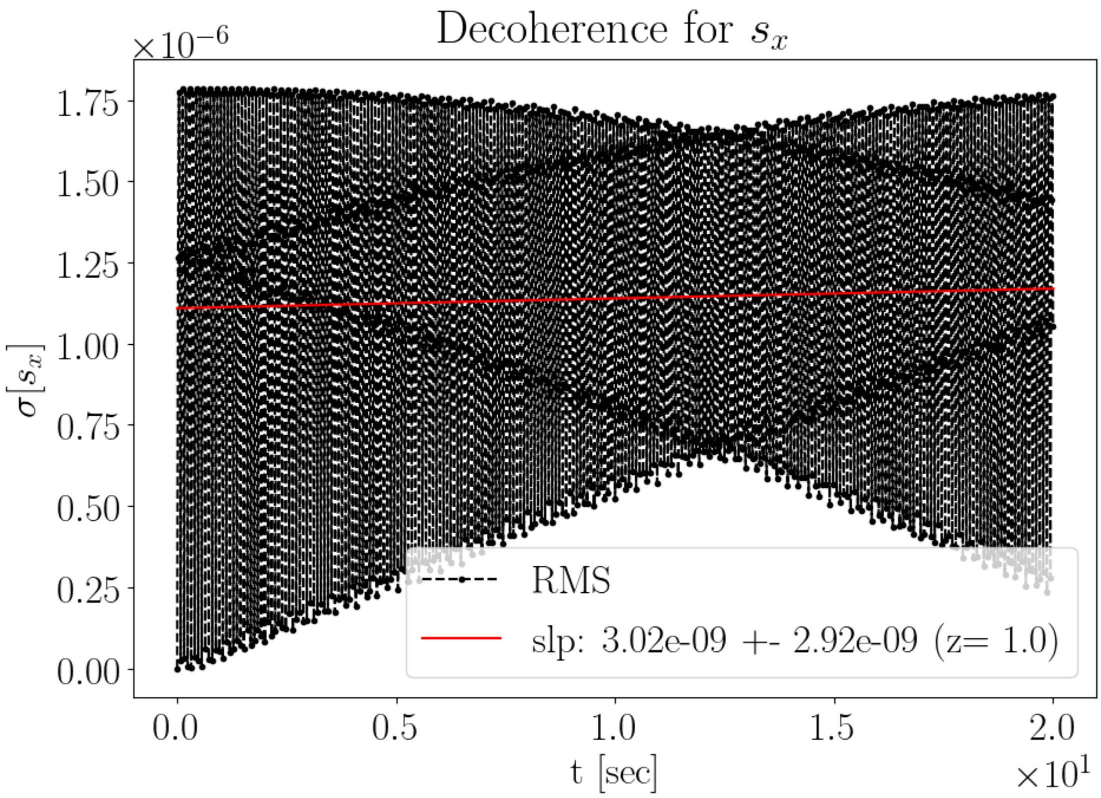
По энергии

Цветом выделены зависимости при нулевом (чёрный) и оптимизированном (красный) значениях градиента секступоля

Рис. 2.3: Зависимость спин-тюна частицы от её смещения от референсной частицы.

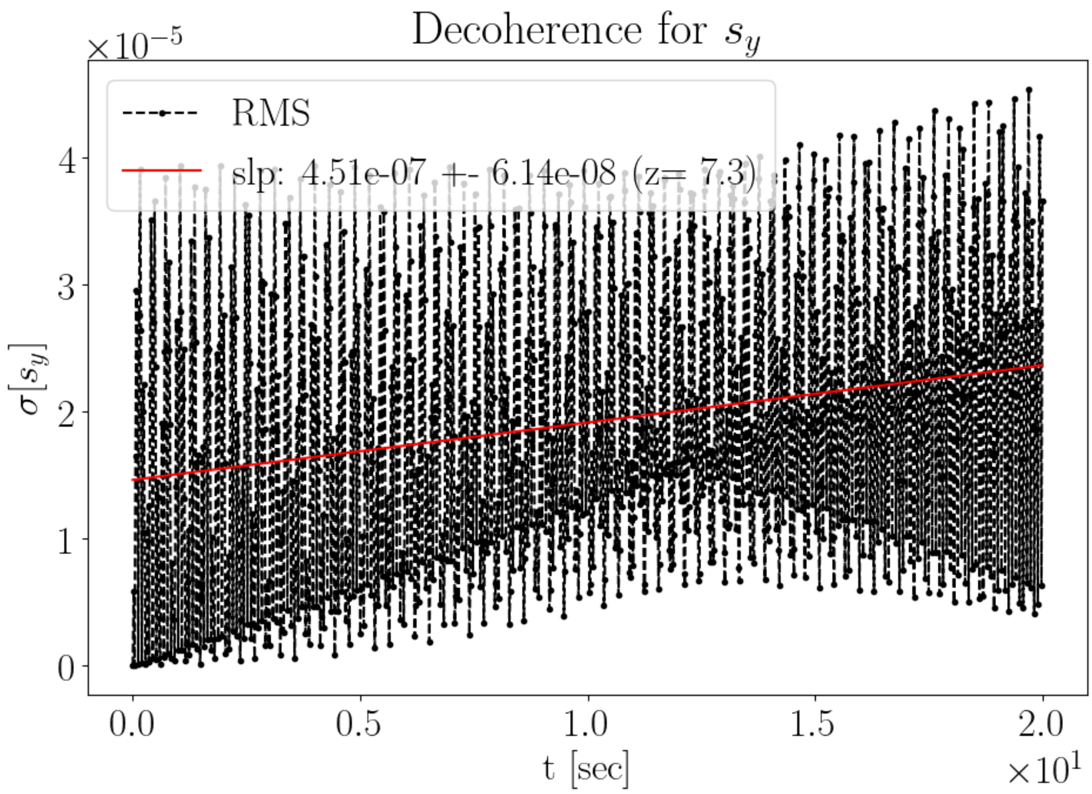


Без секступолей

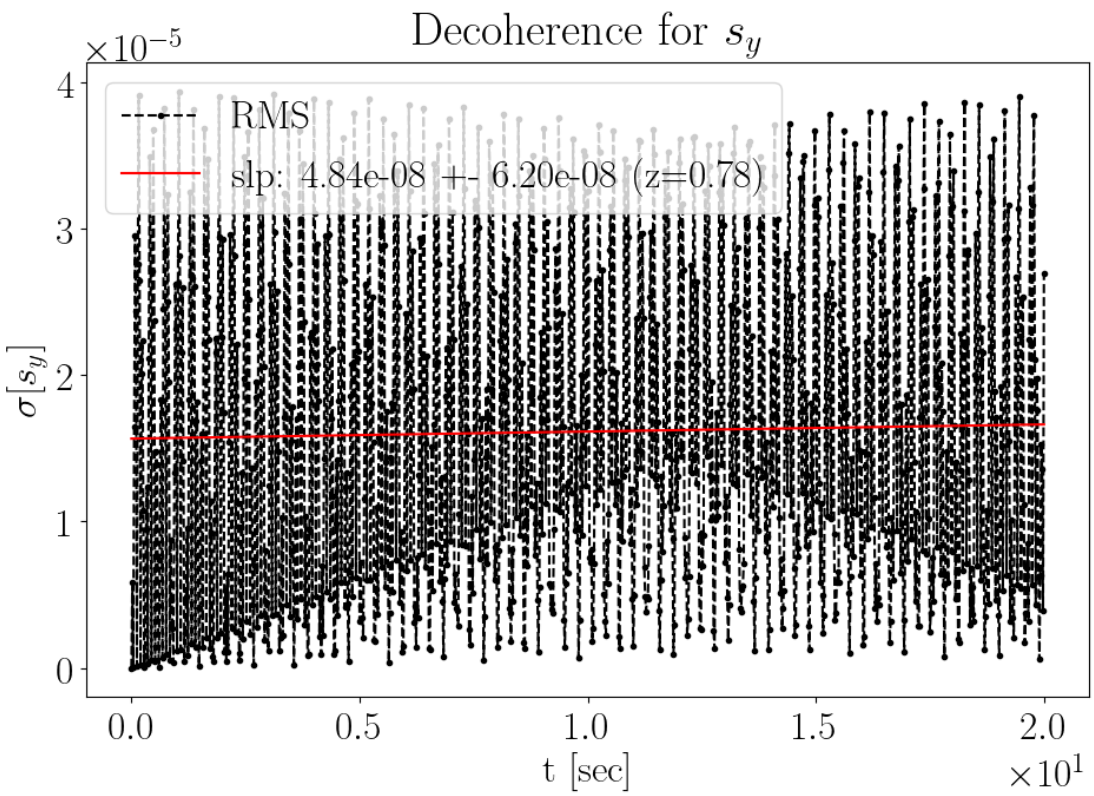


С секступолями

Рис. 2.4: Стандартное отклонение радиальной компоненты спин-вектора частицы от спин-вектора референсной частицы

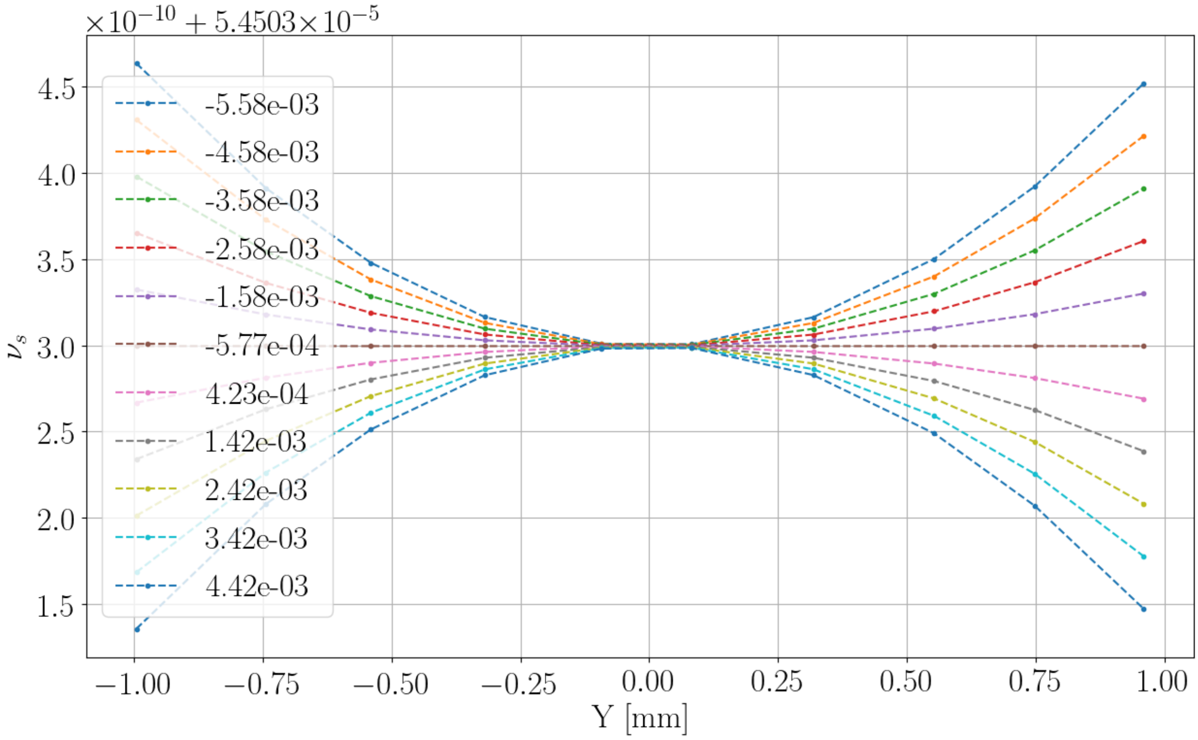


Без секступолей

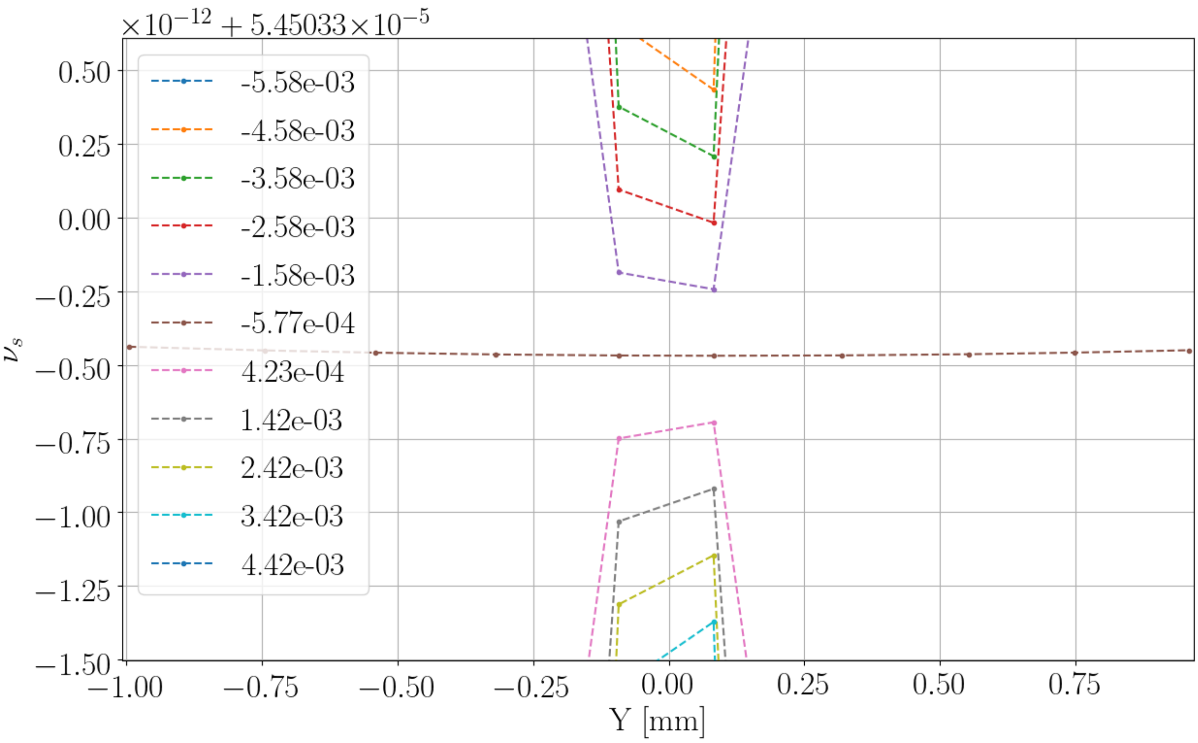


С секступолями

Рис. 2.5: Стандартное отклонение вертикальной компоненты спин-вектора частицы от спин-вектора референсной частицы



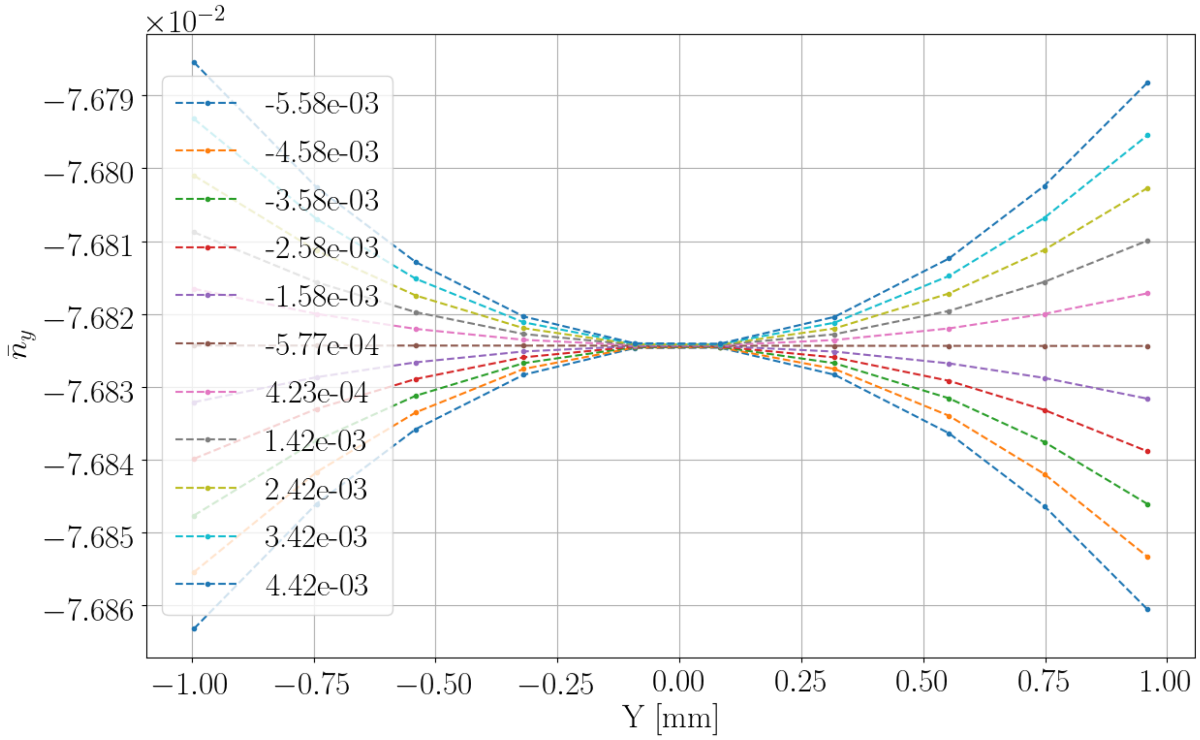
Полный диапазон



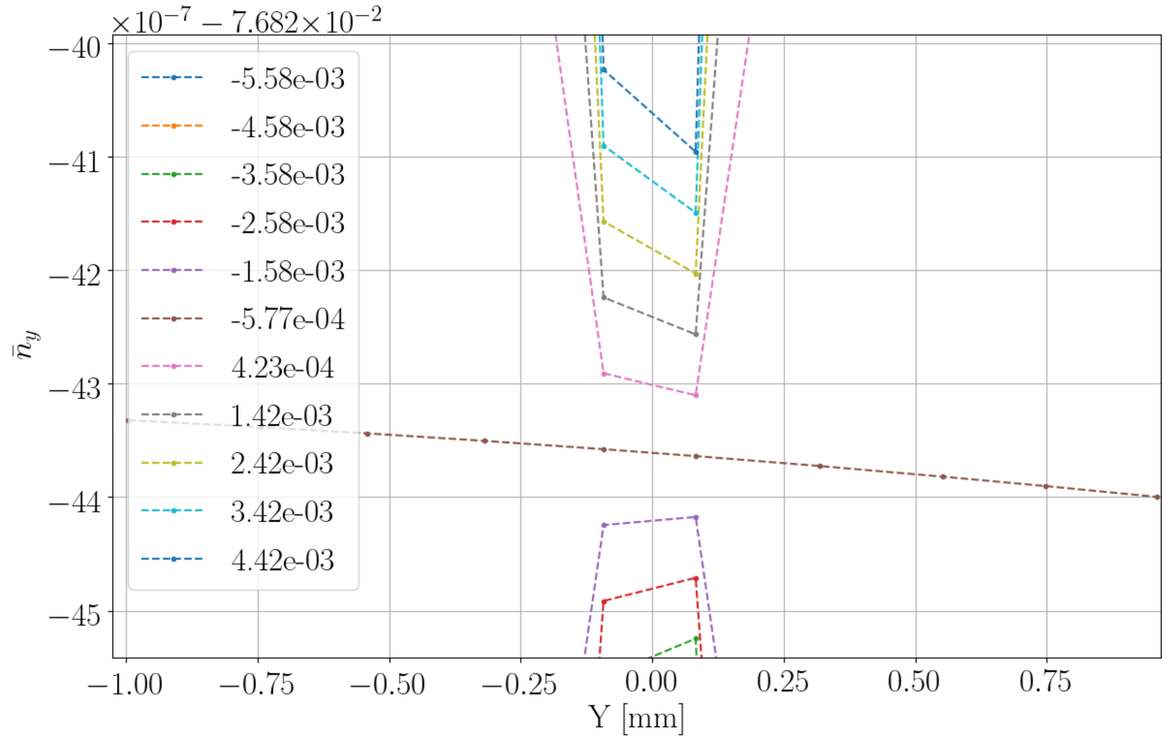
Деталировка кривой при оптимальном значении G_Y

Цветом обозначены данные для различных значений градиента G_Y Y-секступоля.

Рис. 2.6: Спин-тюн ν_s в зависимости от смещения частицы от референсной орбиты.



Полный диапазон.



Деталировка кривой при оптимальном значении G_Y.

Цветом обозначены данные для различных значений градиента G_Y Y-секступоля.

Рис. 2.7: Вертикальная компонента $\bar{n}_y$ оси прецессии спина в зависимости от смещения частицы от референсной орбиты.

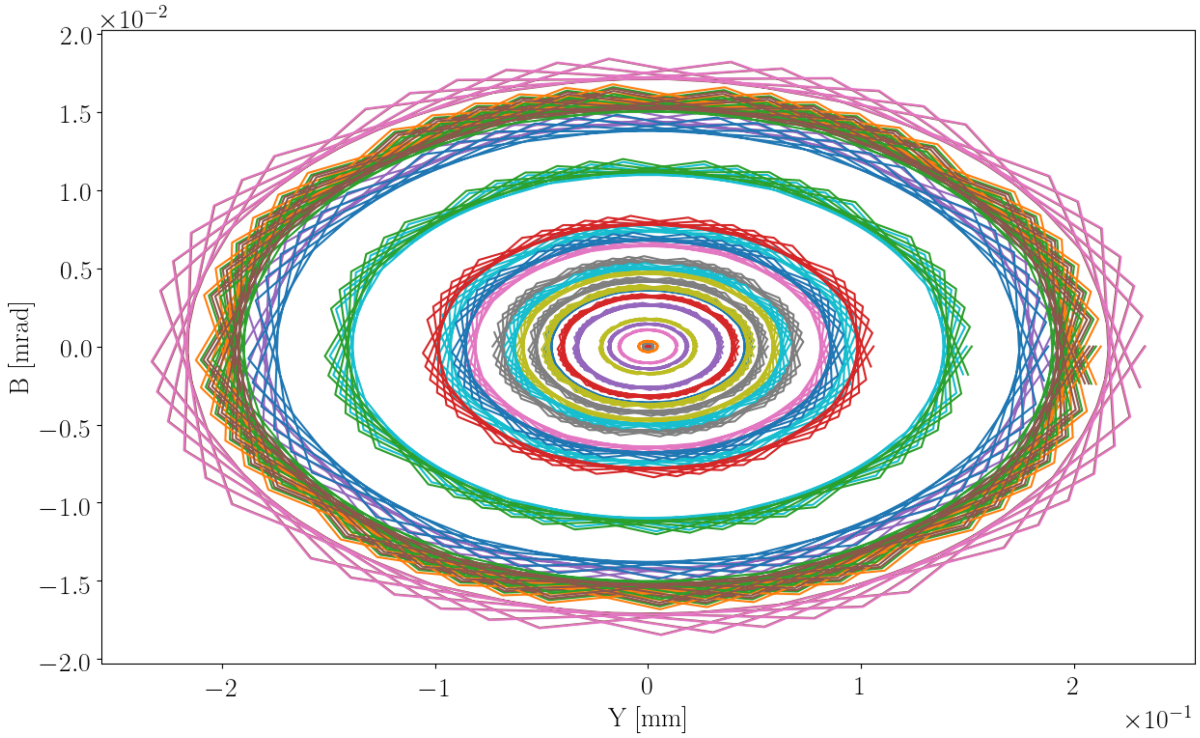
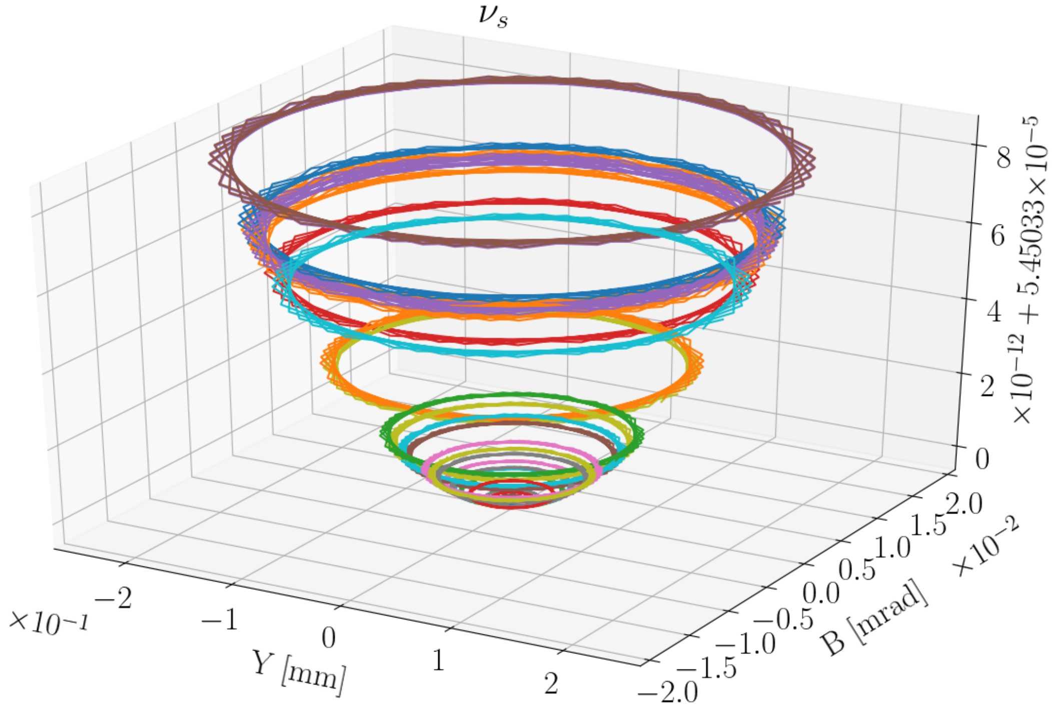
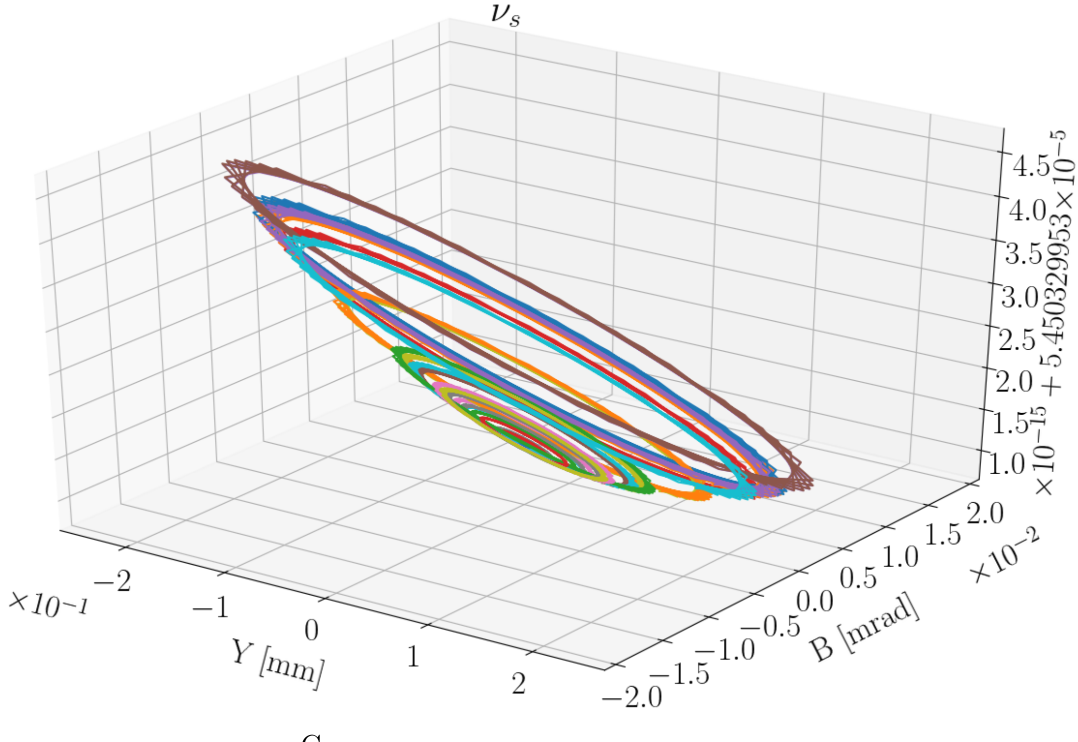


Рис. 2.8: Траектории частиц в плоскости (Y, B) фазового пространства.

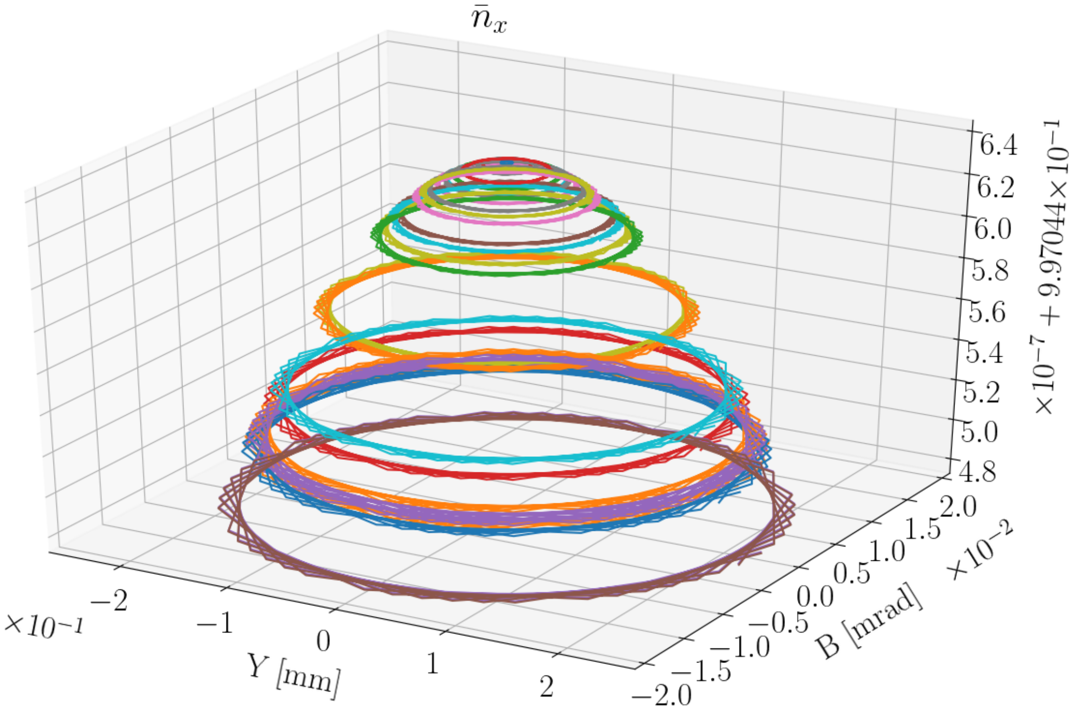


С выключенными секступолями.

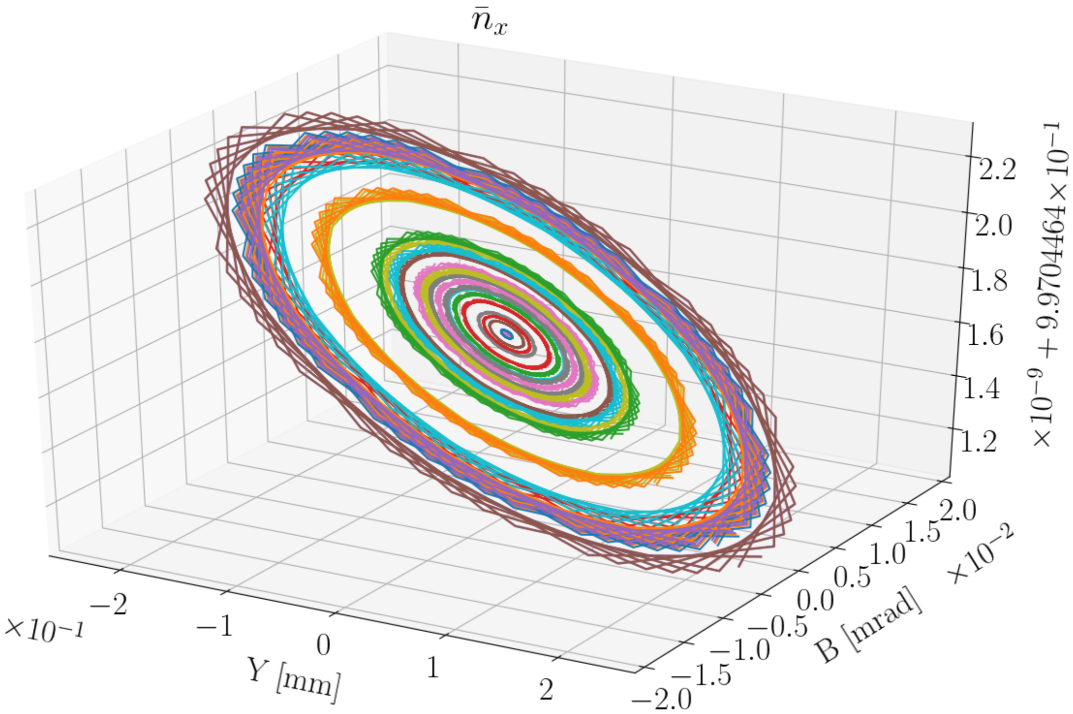


С включенными секступолями.

Рис. 2.9: Спин-тюны частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре.

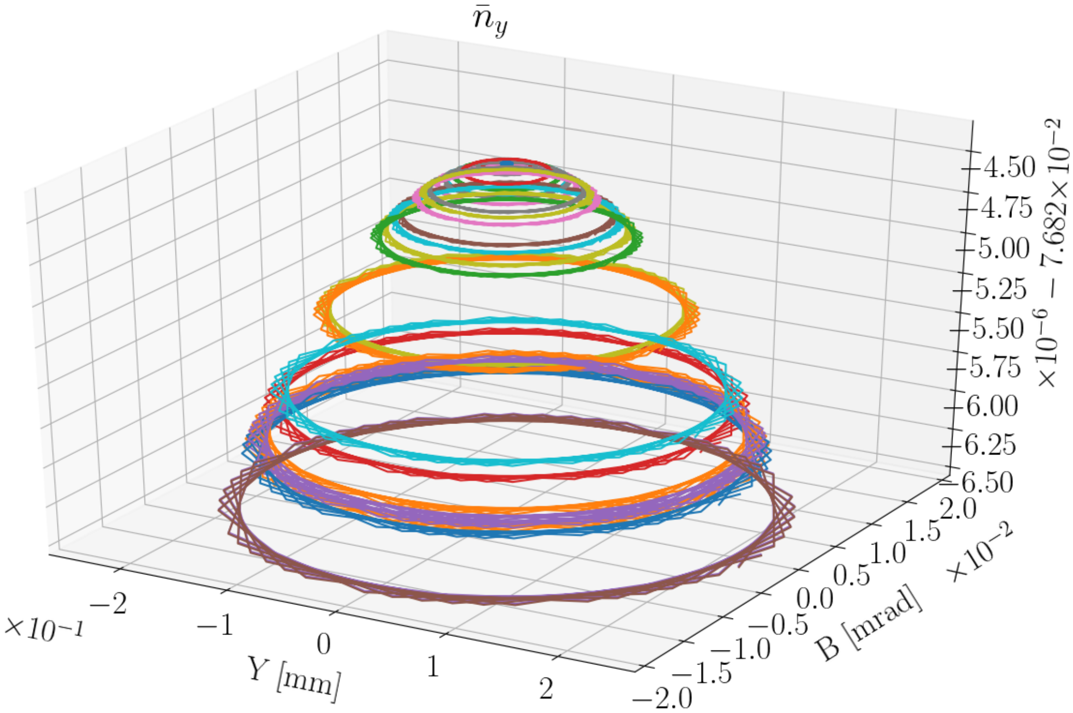


С выключенными секступолями.

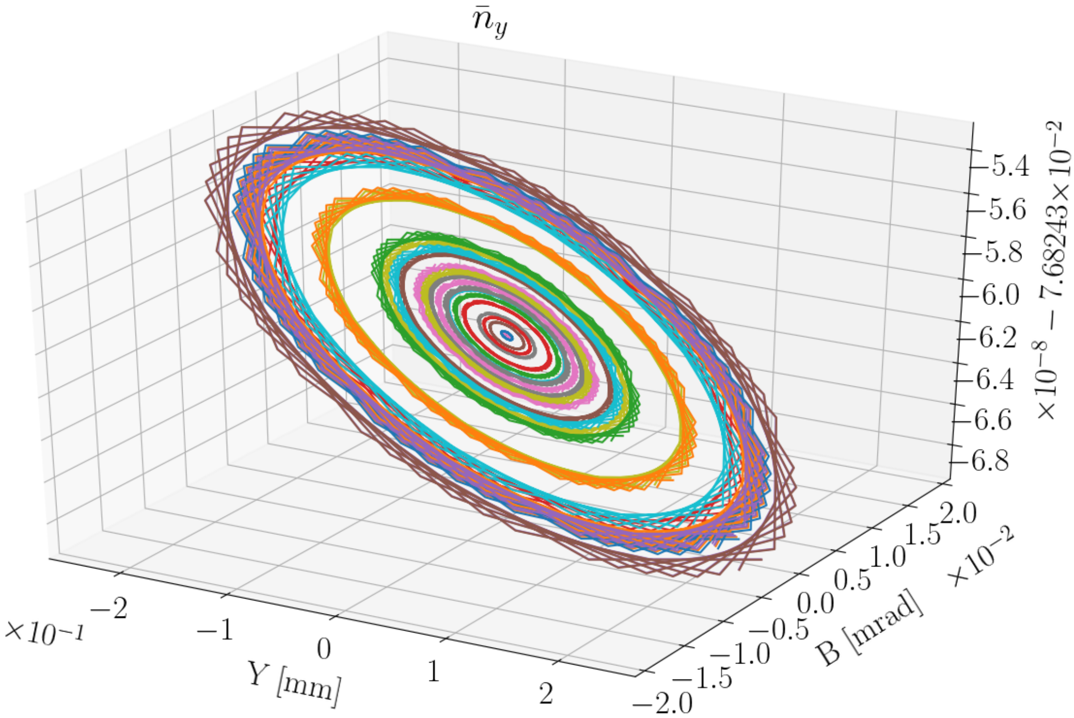


С включенными секступолями.

Рис. 2.10: Радиальные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-труктуре.

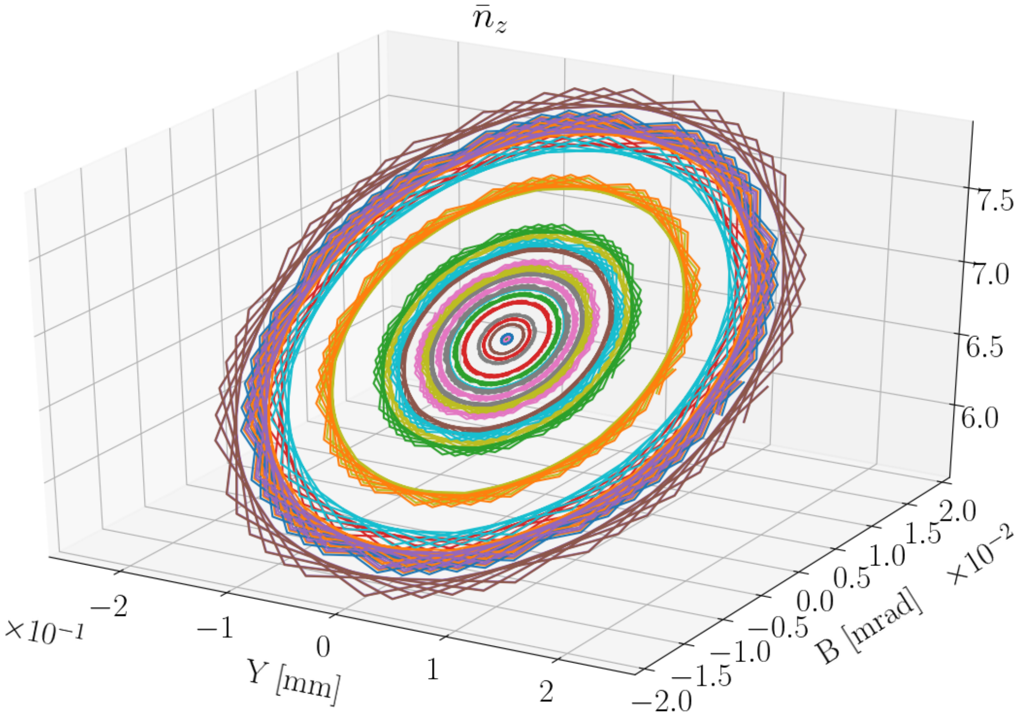


С выключенными секступолями.

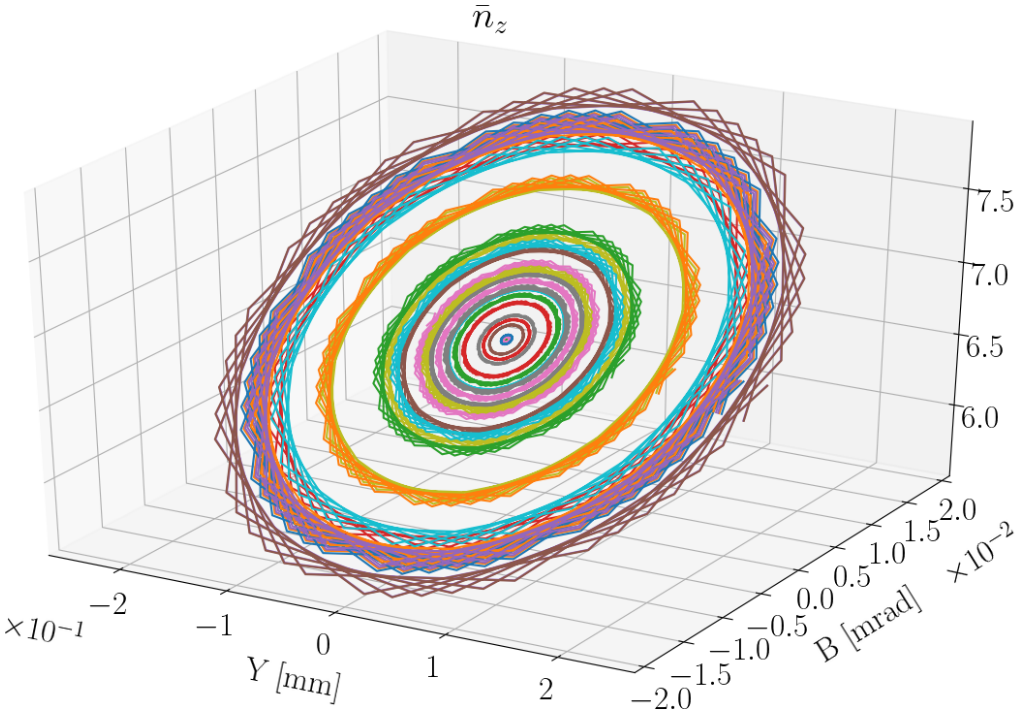


С включенными секступолями.

Рис. 2.11: Вертикальные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-труктуре.



С выключенными секступолями.



С включенными секступолями.

Рис. 2.12: Продольные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-труктуре.

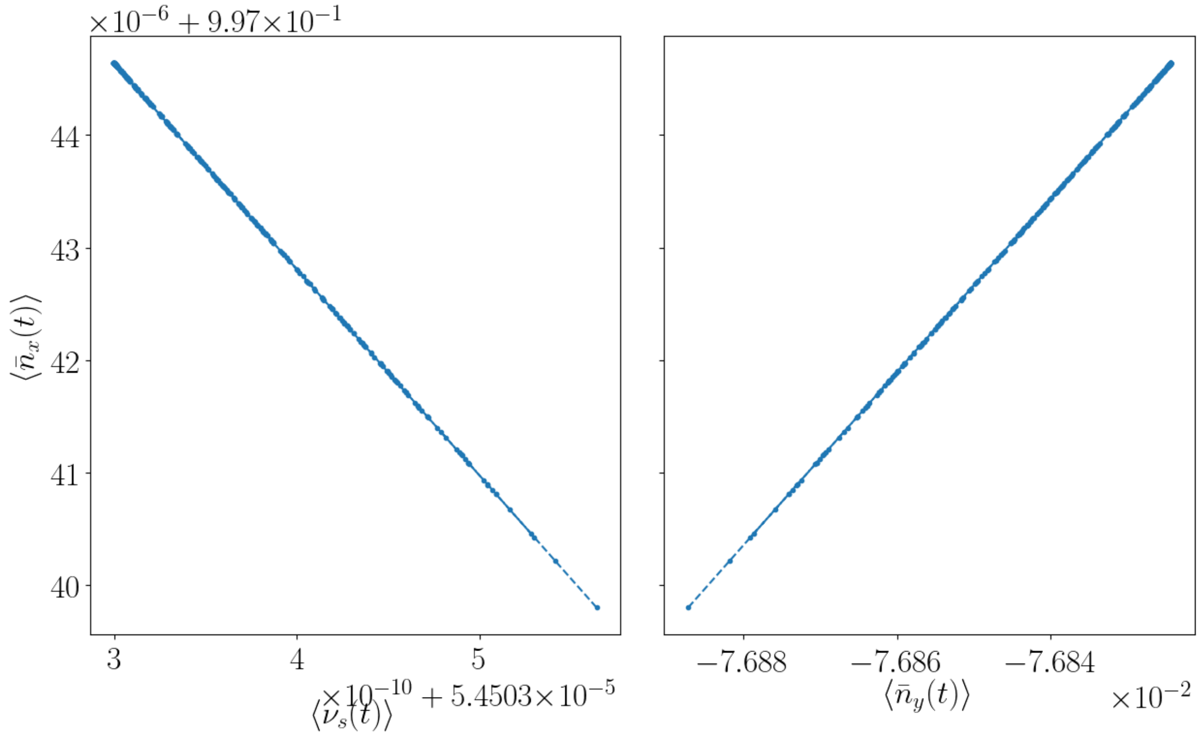
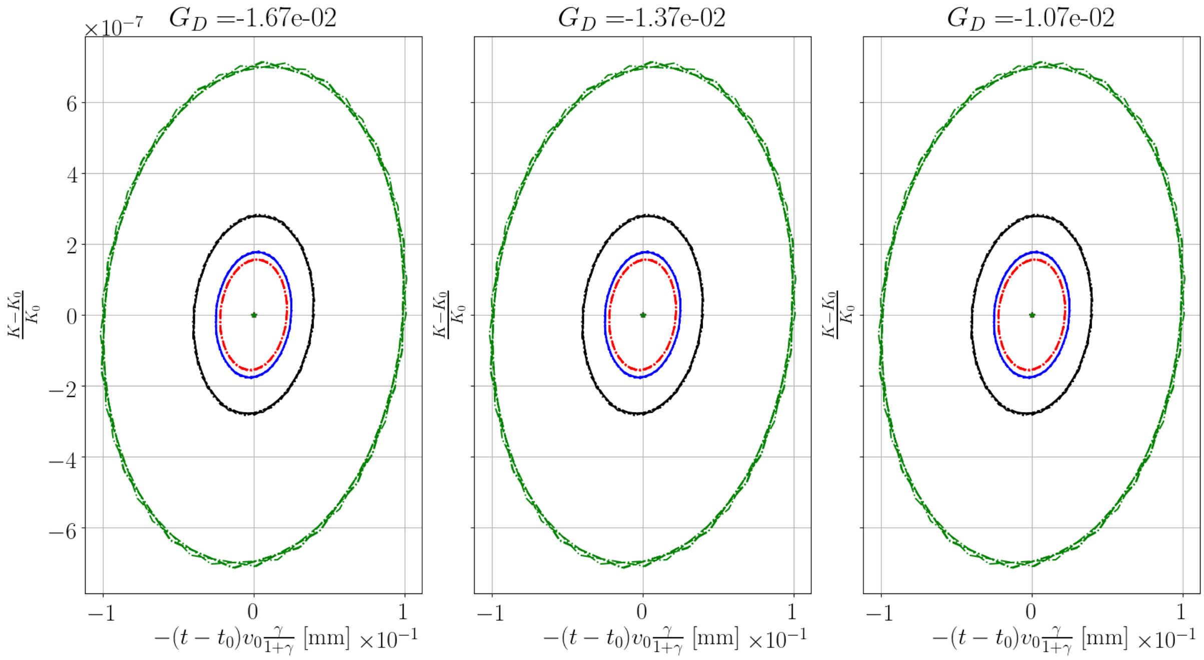
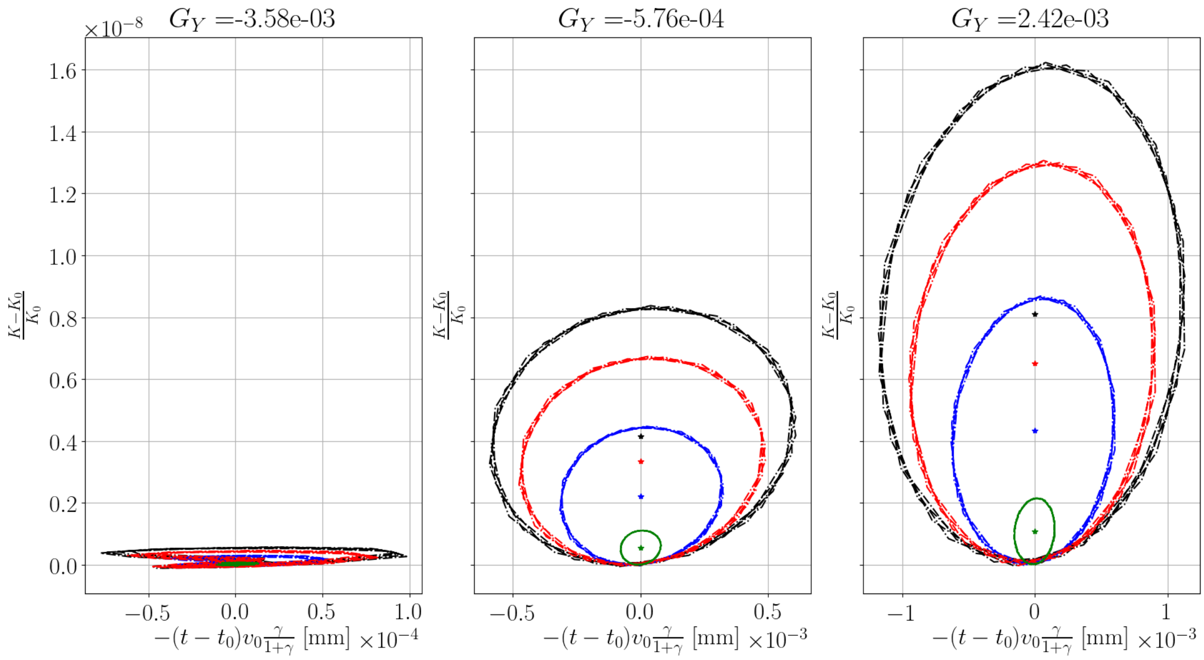


Рис. 2.13: Средние уровни поперечных компонент осей стабильного спина частиц, в зависимости от уровня их спин-тюна.



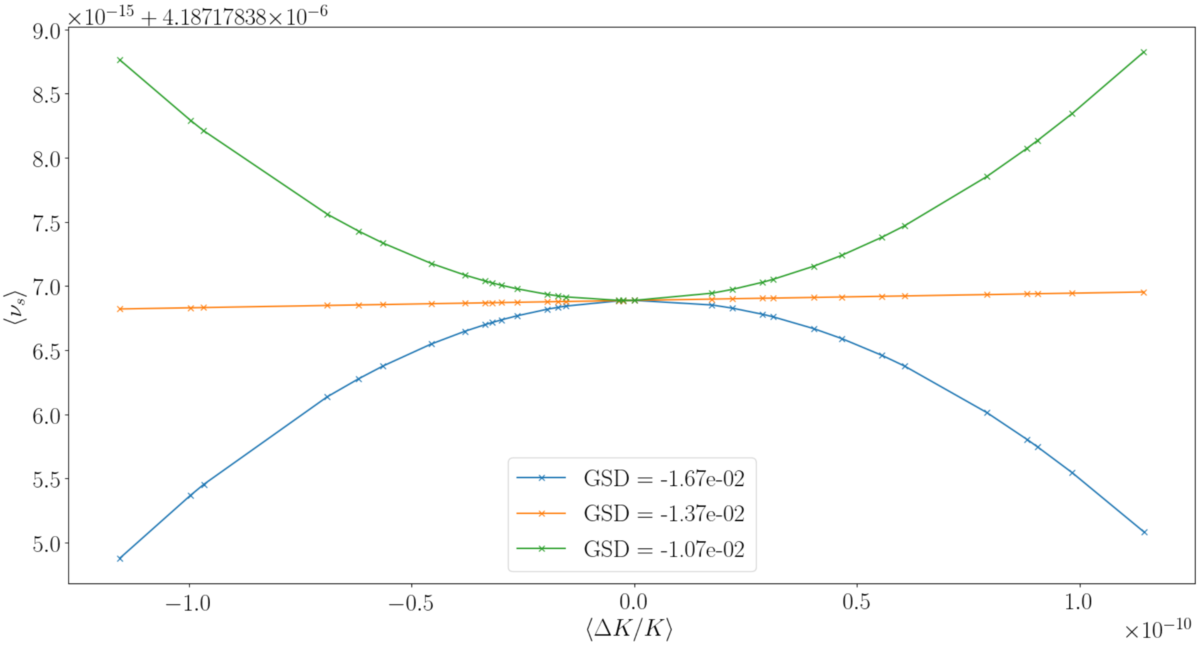
Фазовые эллипсы D-банча.



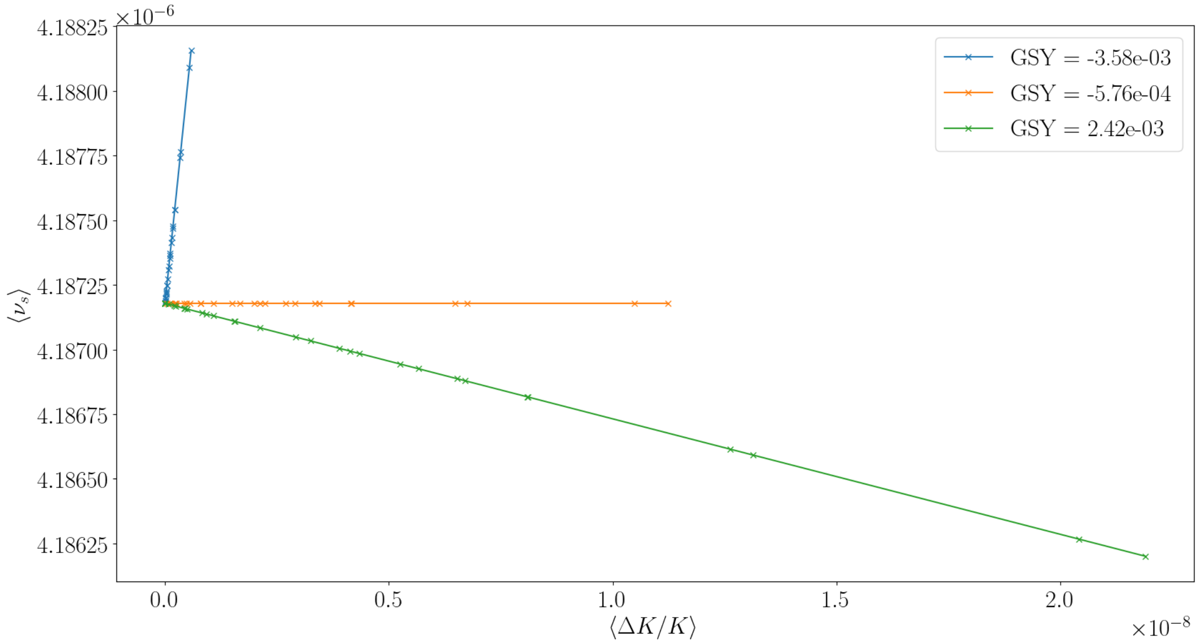
Фазовые эллипсы Y-банча.

Цветом различаются траектрории частиц с разным начальным вертикальным смещением от замкнутой орбиты.

Рис. 2.14: Продольное фазовое пространство пучка. Звёздочками отмечены центры эллипсов.

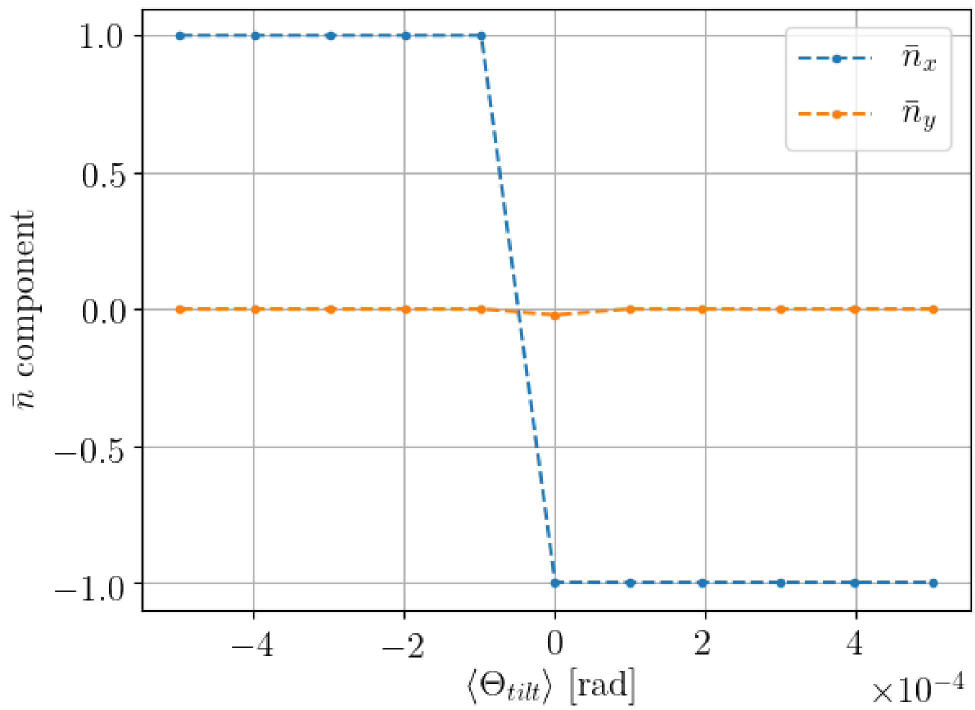


Для D-банча.

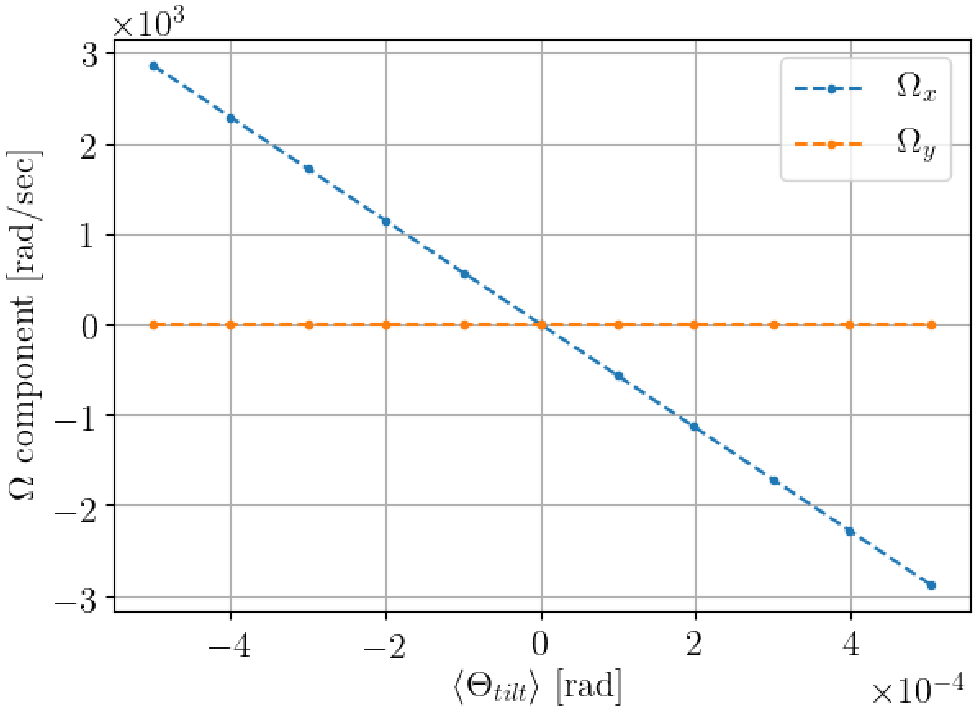


Для Y-банча.

Рис. 2.15: Зависимость среднего уровня спин-тюна частицы от её равновесного уровня энергии для различных значений градиента секступоля.

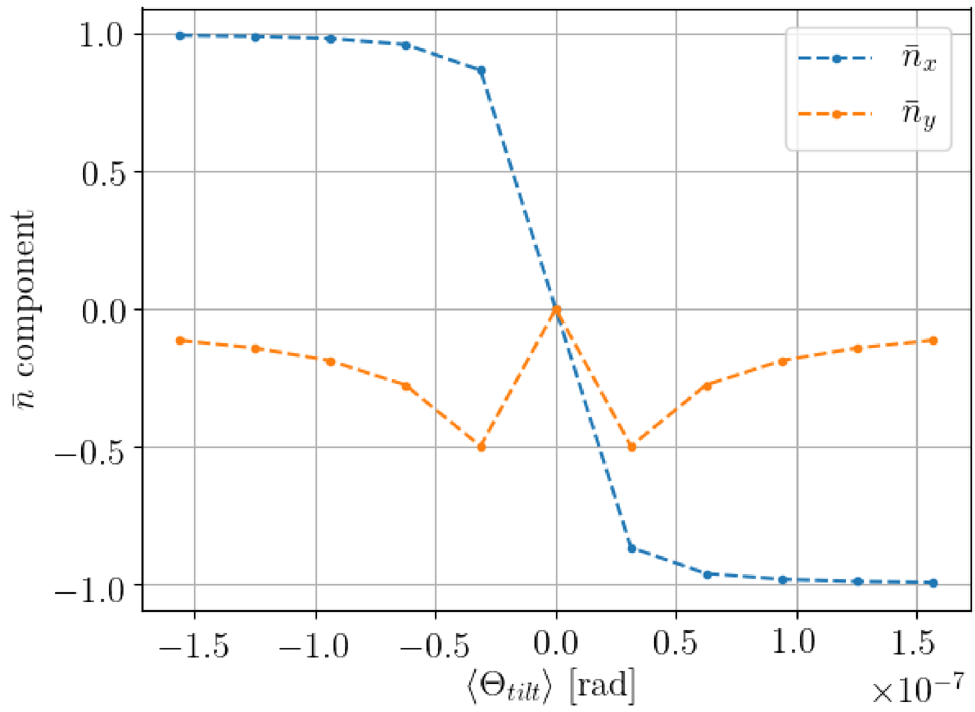


Компоненты оси прецессии $\bar{n}$

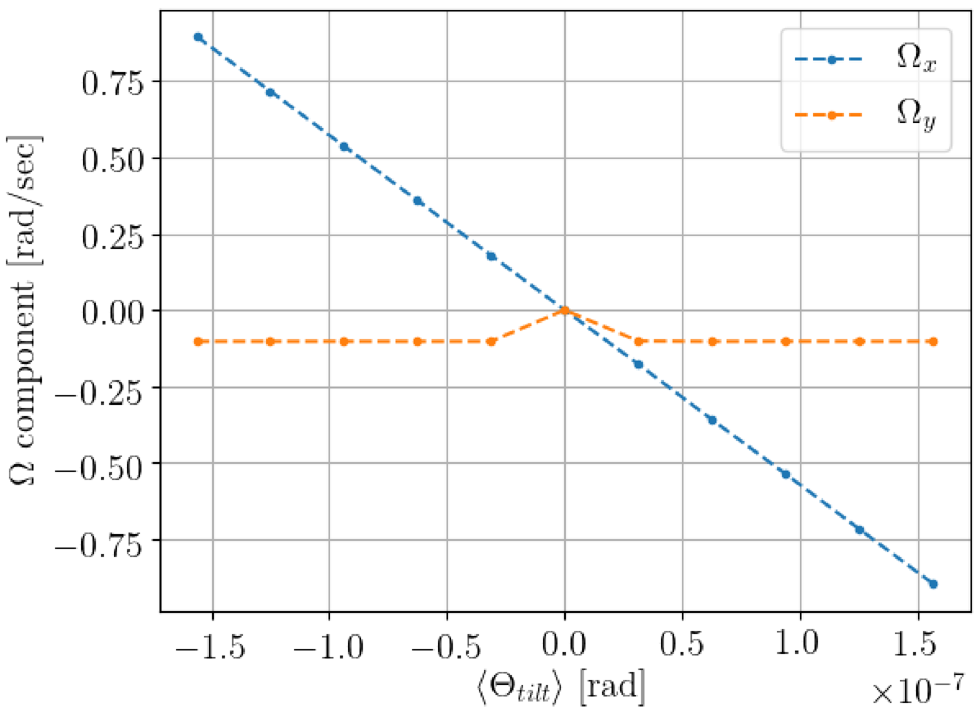


Компоненты частоты прецессии Ω

Цветом различаются радиальная (синий) и вертикальная (оранжевый) компоненты векторов $\bar{n}$, Ω.

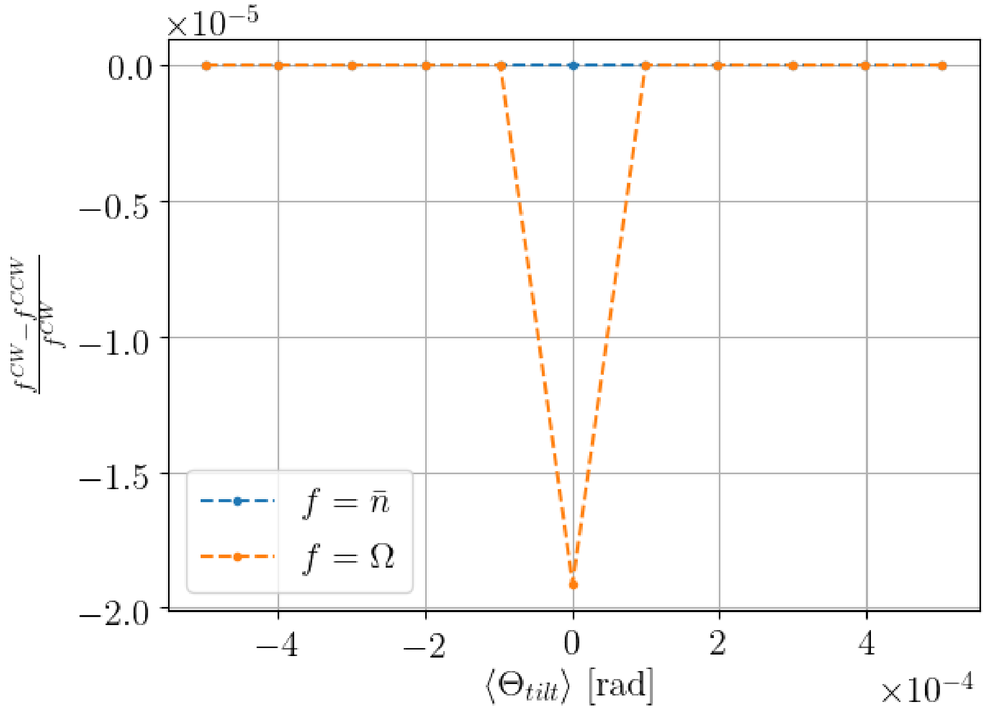


Компоненты оси прецессии $\bar{n}$

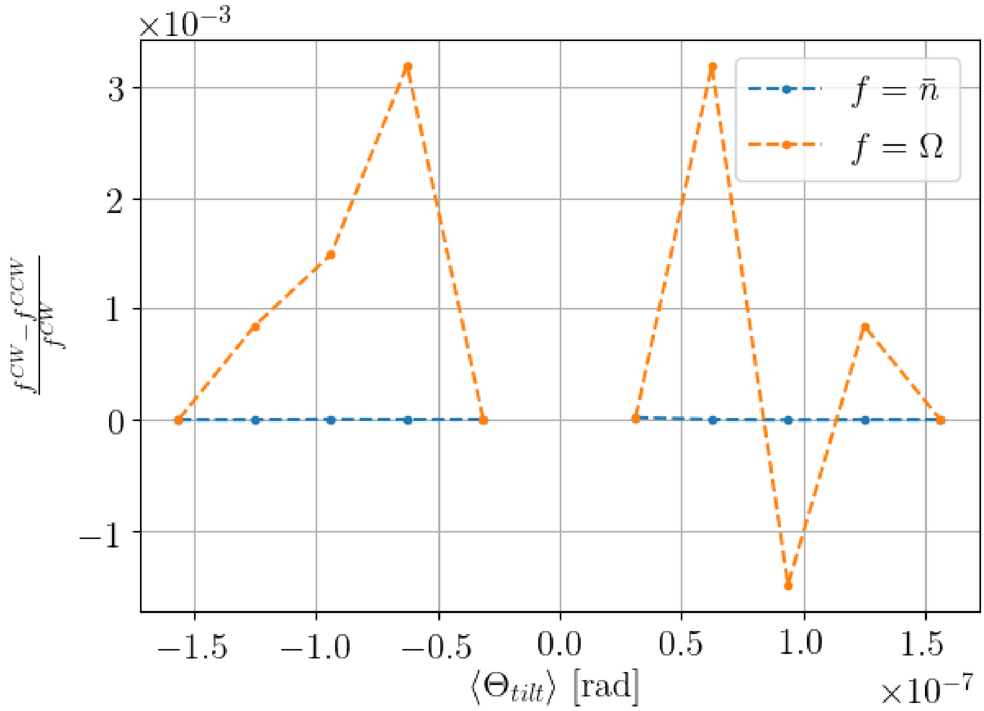


Компоненты частоты прецессии Ω

Цветом различаются радиальная (синий) и вертикальная (оранжевый) компоненты векторов $\bar{n}$, Ω.

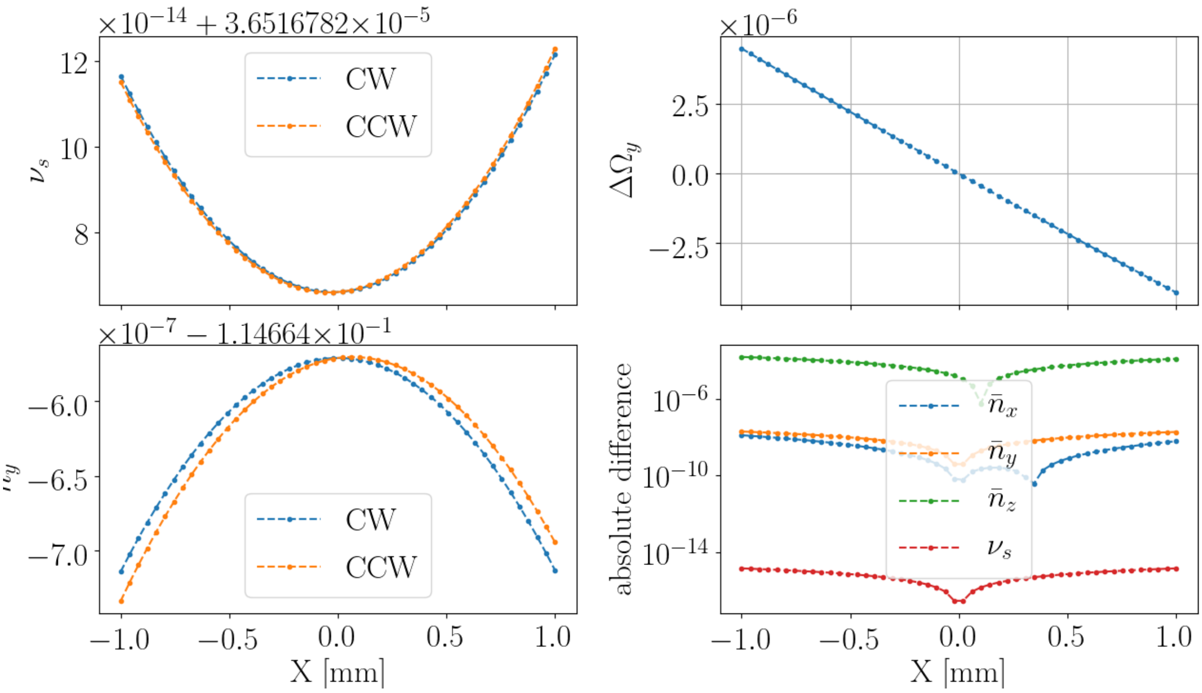


Случайно-распределённые наклоны E+B элементов

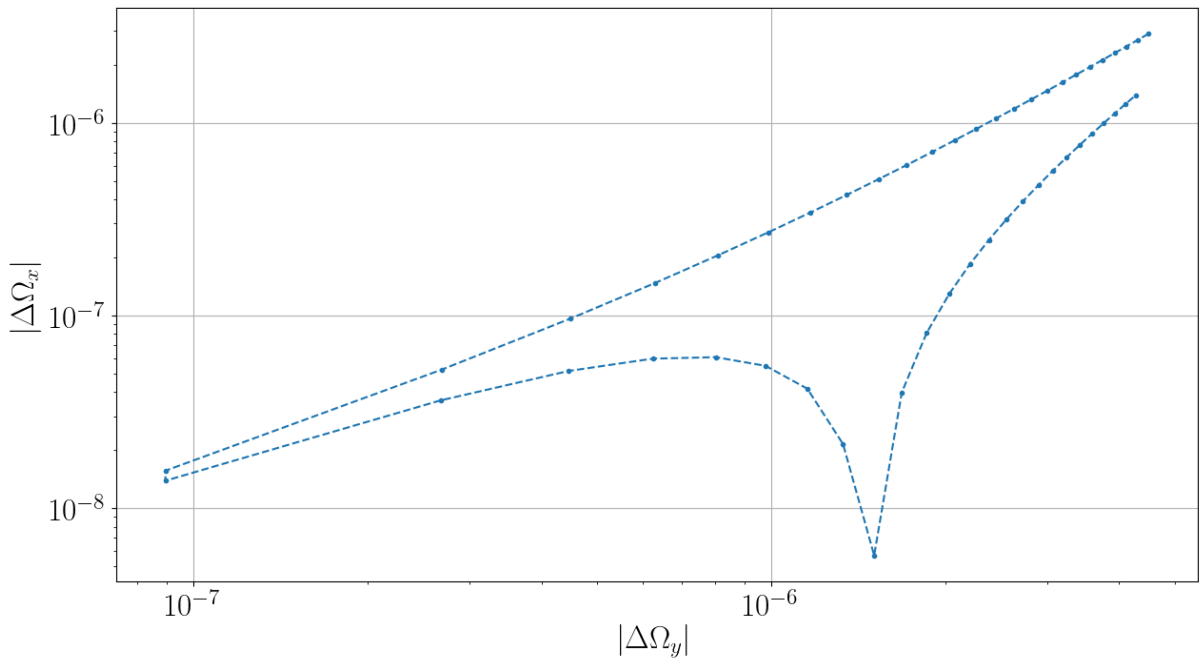


Попарно-компенсированные наклоноы

Цветом обозначена разница между радиальными компонентами (синий) оси стабильного спина, (оранжевый) угловой скорости поворота спина CW и CCW пучков

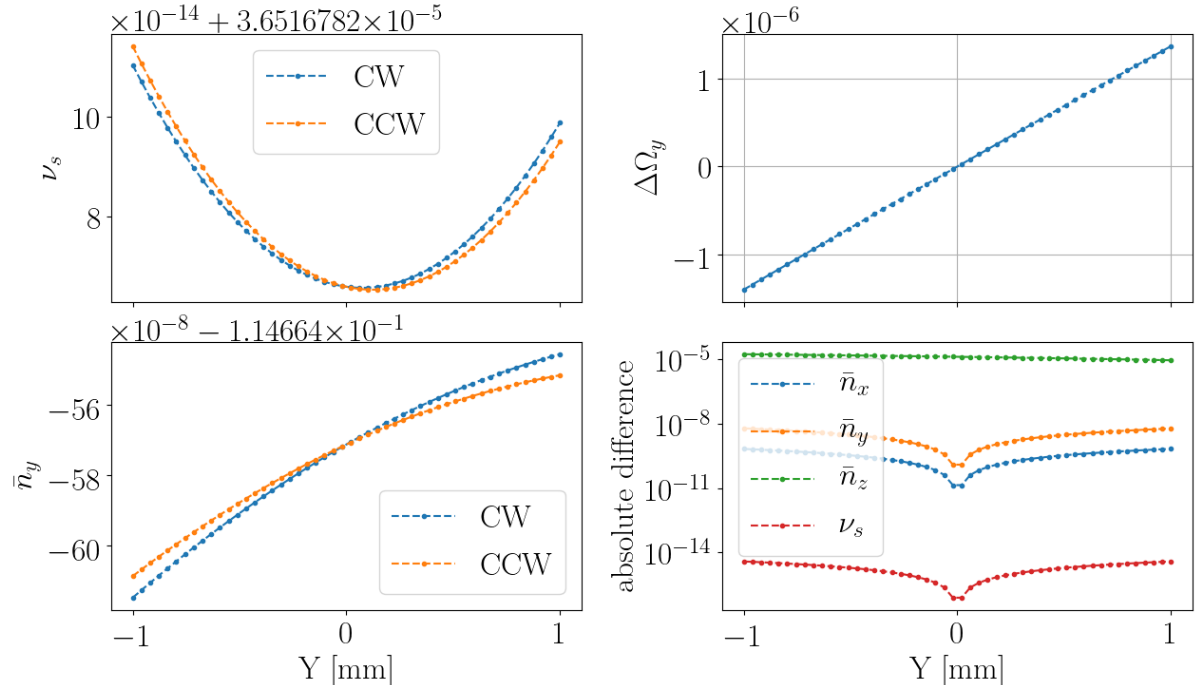


Зависимости спин-тюна и оси стабильного спина от горизонтального смещения частицы от референсной орбиты

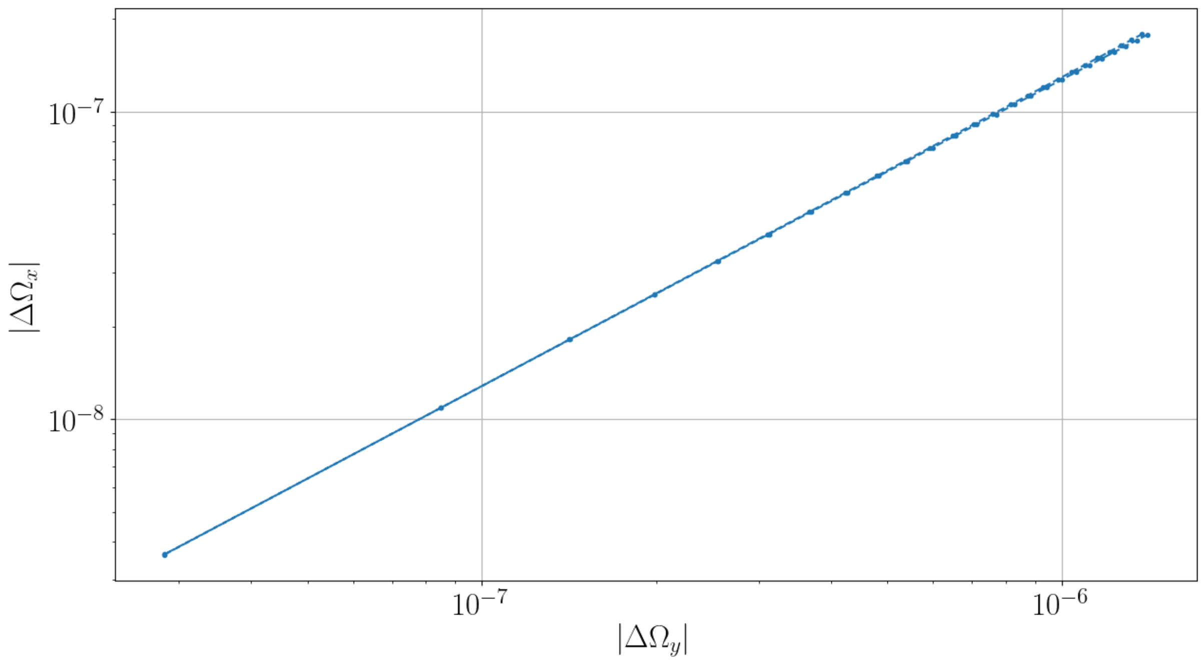


Разница между радиальными компонентами частоты прецессии CW и CCW пучков против разницы вертикальных компонент (калибровочный график)

Рис. 2.19: Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной бетатронным движением в горизонтальной плоскости

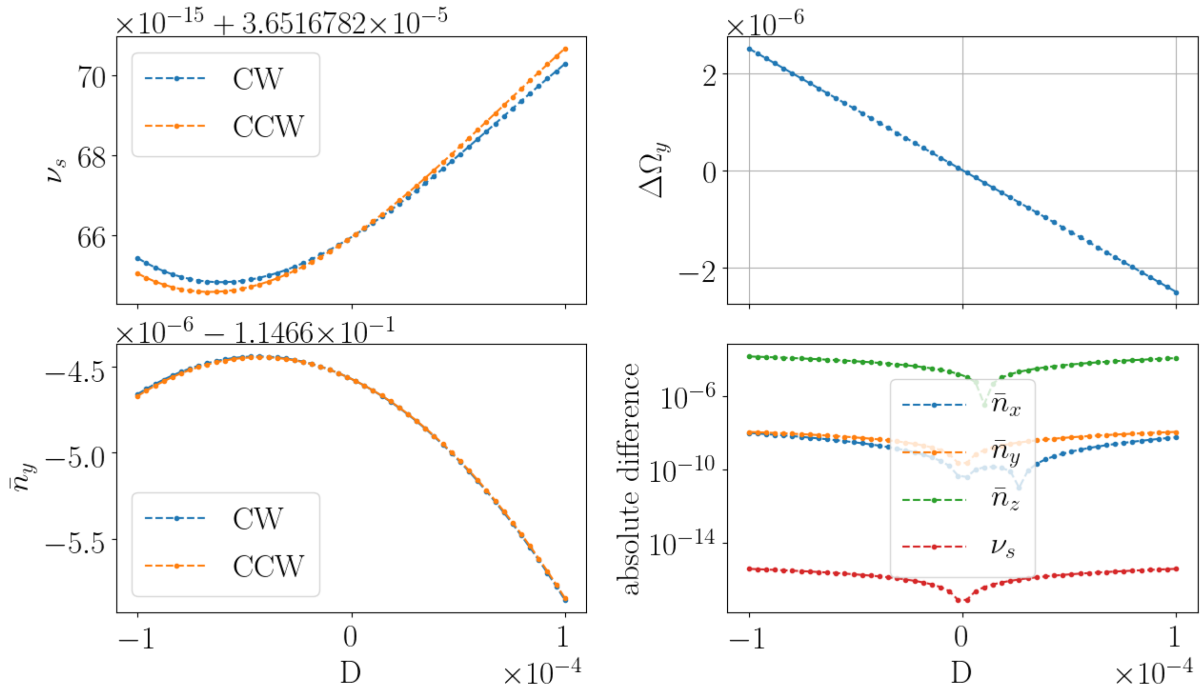


Зависимости спин-тюна и оси стабильного спина от вертикального смещения частицы от референсной орбиты

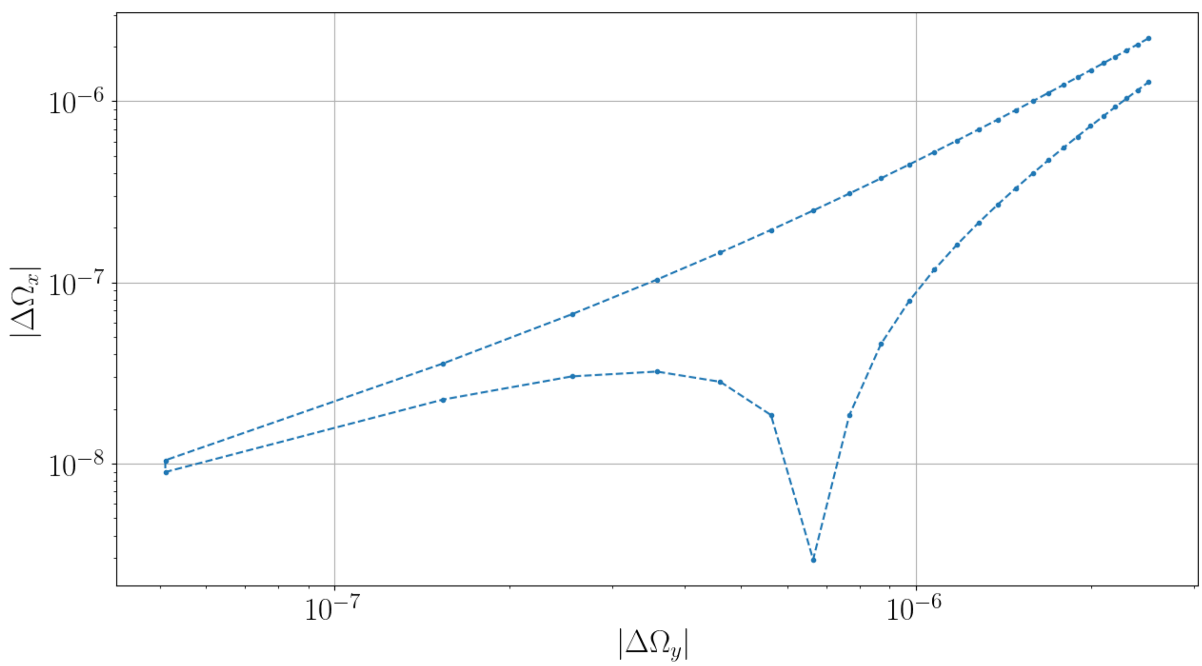


Разница между радиальными компонентами частоты прецессии CW и CCW пучков против разницы вертикальных компонент (калибровочный график)

Рис. 2.20: Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной бетатронным движением в вертикальной плоскости



Зависимости спин-тюна и оси стабильного спина от энергетического сдвига частицы от референсной энергии



Разница между радиальными компонентами частоты прецессии CW и CCW пучков против разницы вертикальных компонент (калибровочный график)

Рис. 2.21: Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной синхротронным движением

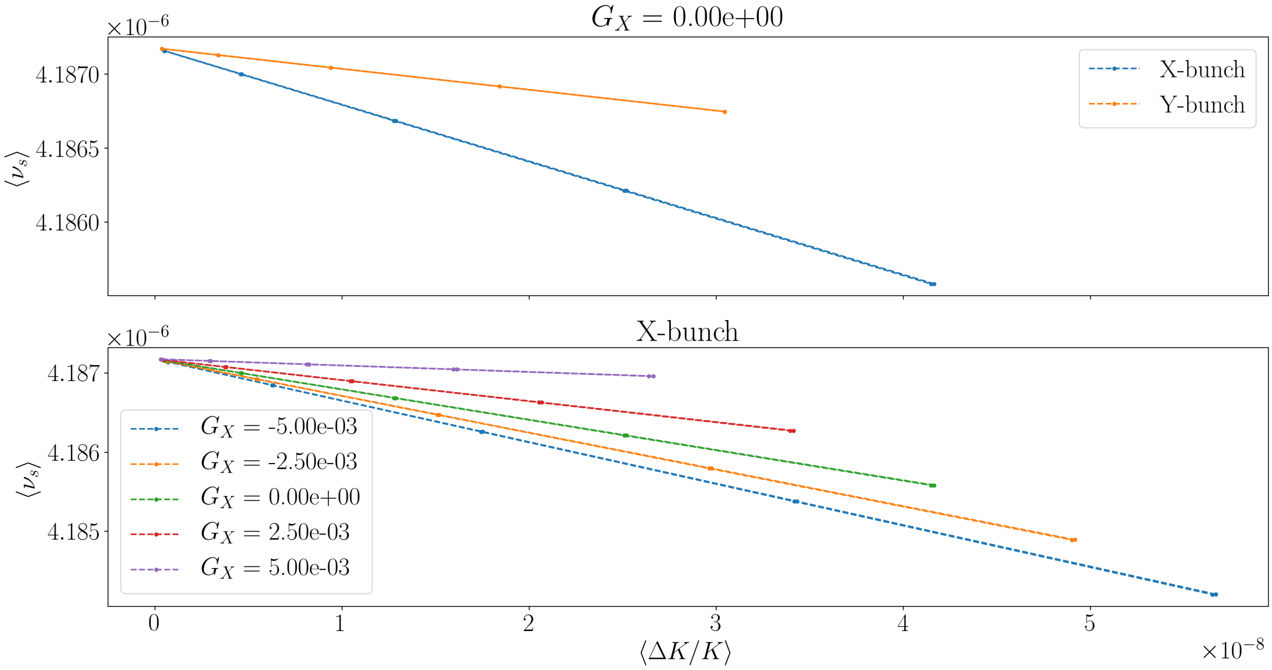


Рис. 2.22: Зависимость среднего уровня спин-тюна частицы от её среднего уровня кинетической энергии. Верхняя панель: безсекступольный случай, для обоих инжектированных банчей. Нижняя панель: для X-банча, при разных значениях градиента секступоля GSX.

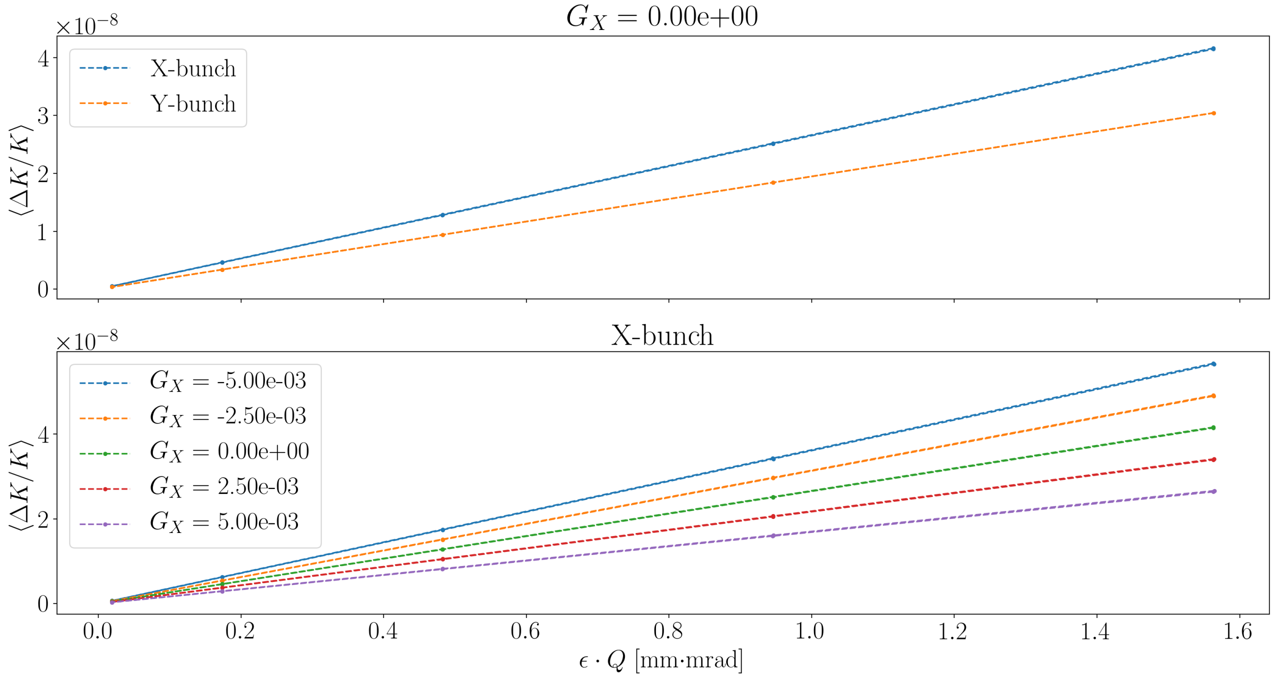
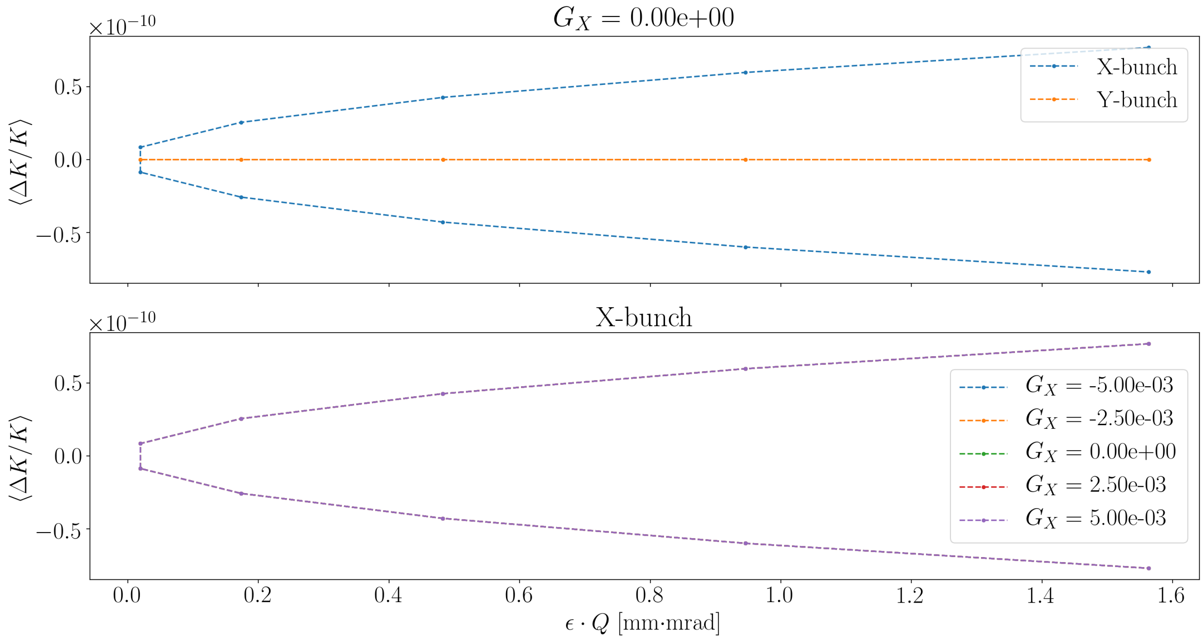
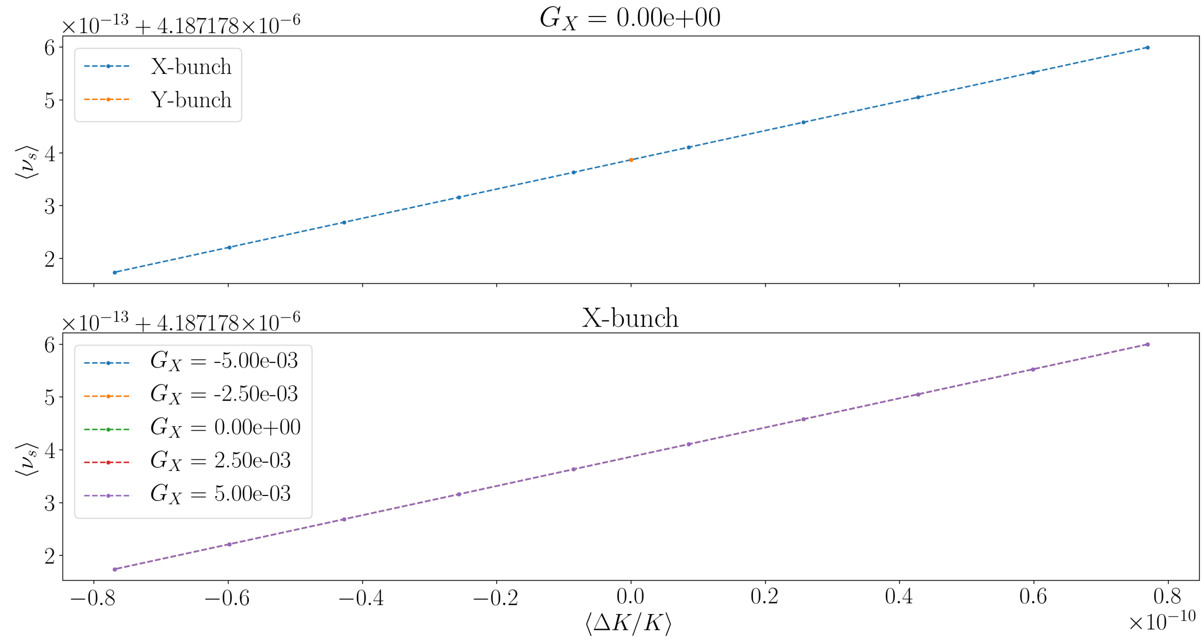


Рис. 2.23: Зависимость равновесного уровня энергии частицы от её поперечного эмиттанса.

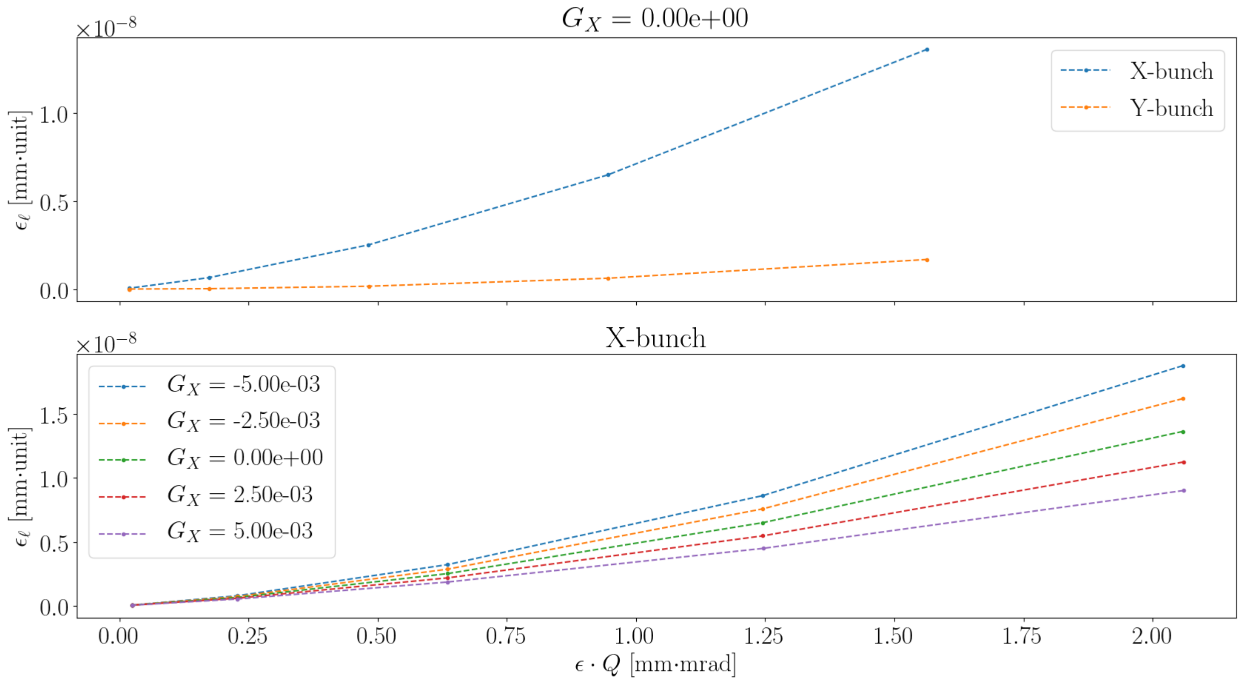


Зависимость среднего уровня энергии от поперечного эмиттанса частицы.

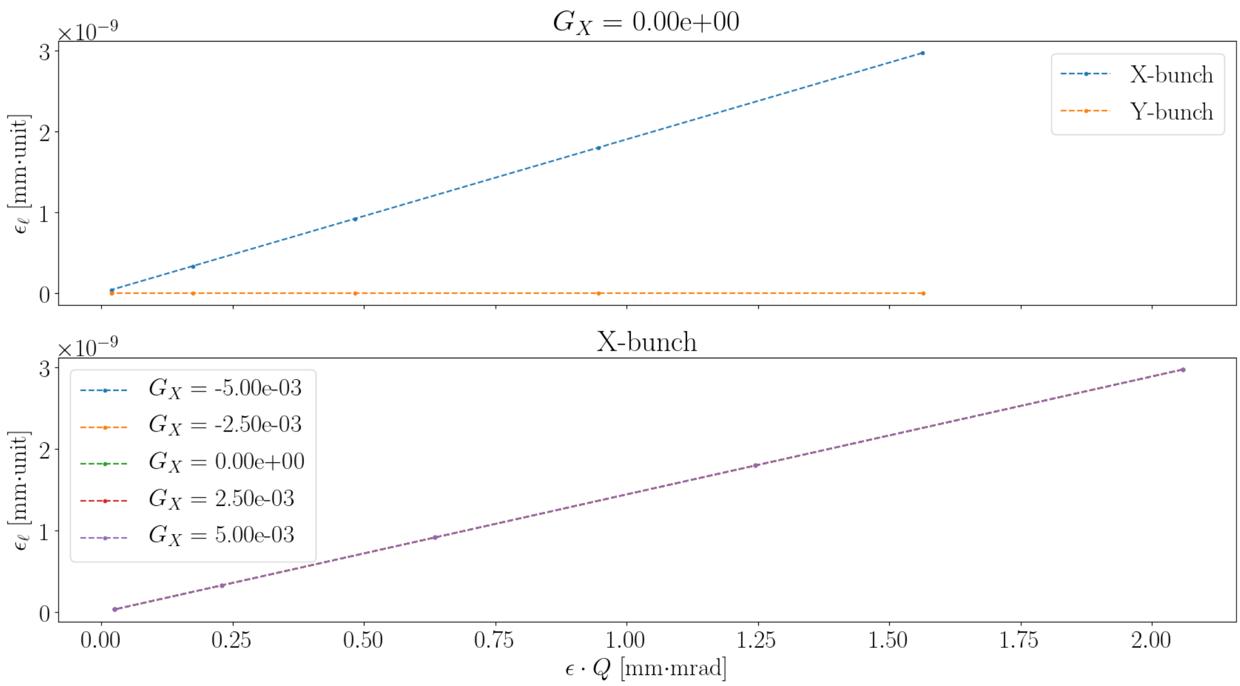


Зависимость среднего уровня спин-тюна от среднего уровня энергии.

Рис. 2.24: Результаты симуляции в случае линейного разложения трансфер матриц.

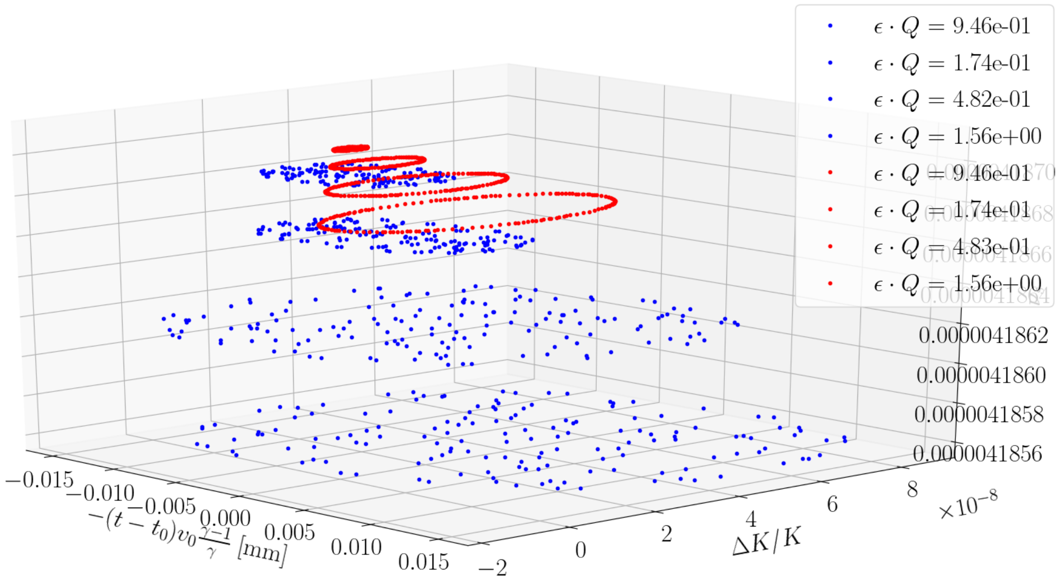


Нелинейные разложения трансфер-матриц.

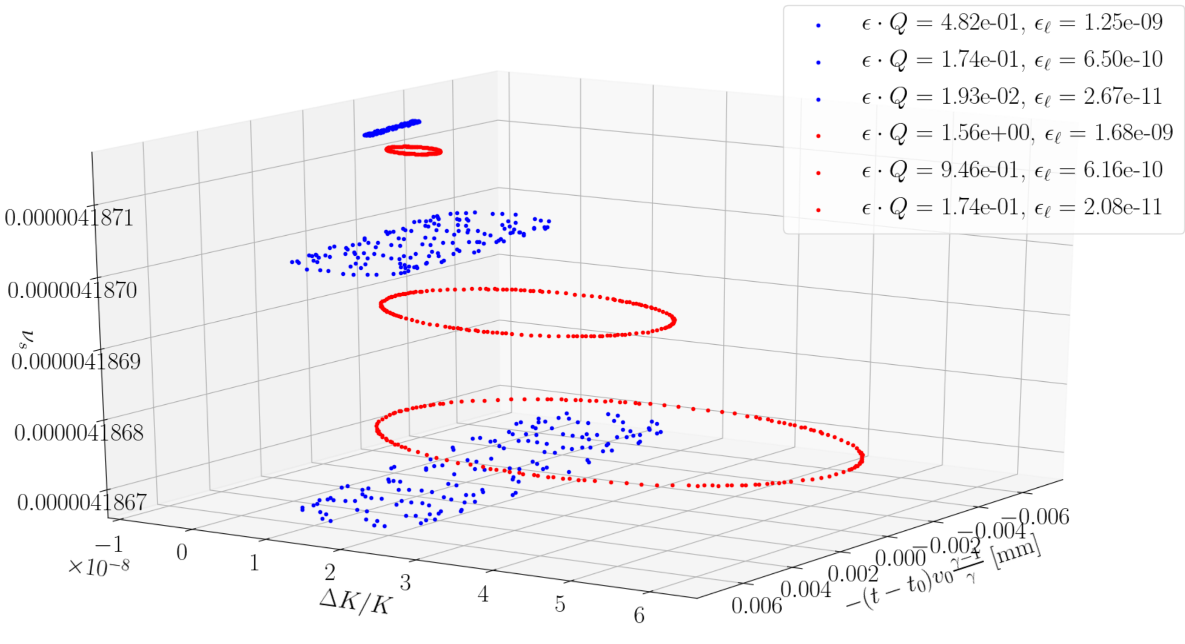


Линейные разложения трансфер-матриц.

Рис. 2.25: Зависимость продольного эмиттанса пучка от его поперечного эмиттанса.



Подобраны траектории с равными приведёнными *поперечными* эмиттансами.



Подобраны траектории с приблизительно равными *продольными* эмиттансами.

Цветом обозначены частицы из разных банчей. Синий: из X-банча; красный: из Y-банча. В легенде указаны значения соответствующего банчу приведённого поперечного эмиттанса ($\epsilon \cdot Q$), и значение продольного эмиттанса (ϵ_ℓ) частицы.

Рис. 2.26: Зависимость спин-тюна частицы от её положения в продольном фазовом пространстве.

Глава 3

Результаты на COSY

3.1 Ускоритель COSY

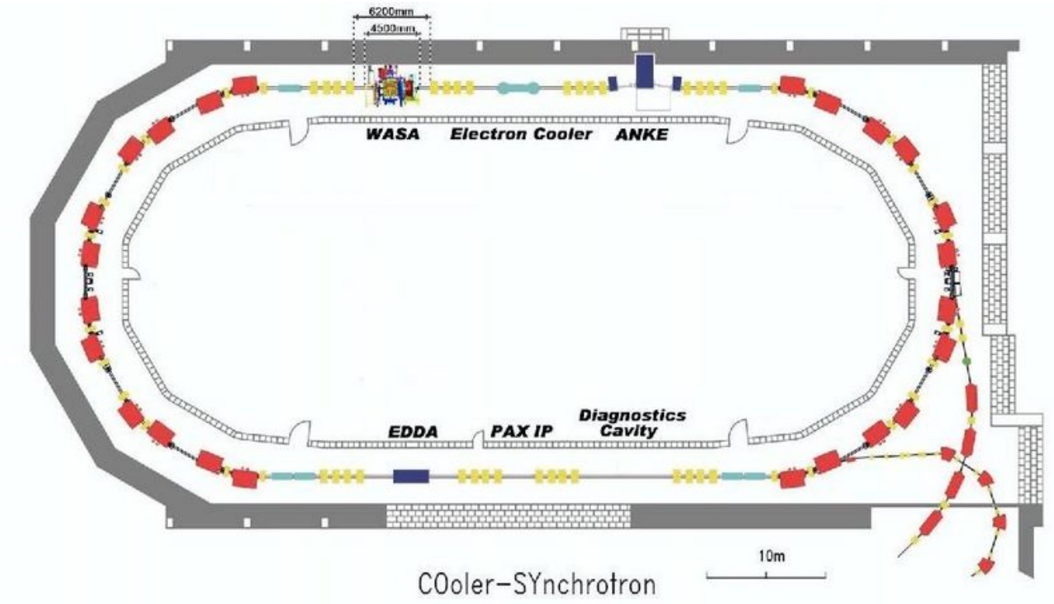


Рис. 3.1: Синхротрон COSY.

Ускорительный комплекс COSY [?] — это синхротрон длиной 183 метра, позволяющий проводить эксперименты с поляризованными и охлаждёнными пучками протонов и дейтронов в диапазоне энергии от 45 МэВ до 3.7 ГэВ. Схема ускорителя приведена на Рисунке 3.1.

Для инжекции ионов H^- и D^- в COSY используется циклотрон JULIC (Jülich Light Ion Cyclotron), предоставляющий 8 мкА неполяризованных (или 1 мкА поляризованных) ионов H^- с импульсом 45 МэВ/с. При инжекции отрицательные ионы проходят через углеродный стриппер для изменения их заряда на положительный. Экстракция пучка из циклотрона производится с помощью септум-дефлектора. [**?**]

Возможности направляющей магнитной системы синхротрона ограничивают импульс пучка в диапазоне до 3700 МэВ/с. Экстракция из кольца осуществляется с помощью кикера.

На COSY доступны два типа охлаждения пучка: электронное (диапазон энергий электронов в "старом" и "новом" кулере: 20–100 кэВ и 20–2,000 кэВ, соответственно) и стохастическое. Два электронных кулера, установленые в кольце на прямой секции, обеспечивают электронное охлаждение во всём диапазоне энергий кольца. Система стохастического охлаждения обеспечивает охлаждение пучка при импульсах 1.5-3.7 ГэВ/с.

Поляризация пучка непрерывно отслеживается на поляриметре EDDA. Также недавно был установлен поляриметр на основе детекторов WASA, а в конце 2019 года будет установлен новый поляриметр на основе LYSO-сцинцилляторов. Поляризация протонов достигает 75% вплоть до наивысших значений импульса; векторная и тензорная поляризации дейтронного пучка достигают 60%.

В настоящий момент на COSY проводятся исследования по изучению поведения поляризованных пучков в накопительном кольце для будущего эксперимента по измерению ЭДМ в электростатическом кольце. [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**] В большинстве исследований были использованы параметры, представленные в Таблице 3.1.

Выделим следующие разработки.

3.2 Высокоточное измерение спин-тюна

Пучок дейтронов с вертикально-ориентированным вектором поляризации инжектировался в ускоритель. После подготовительной фазы, во

Таблица 3.1: Рабочие параметры COSY, использованные в проводимых исследованиях.

Параметр	Величина	Размерность
Длина окружности COSY	183	м
Импульс дейтрона	970	МэВ/с
β / γ	0.459 / 1.126	
Аномальный магнитный момент G	-0.143	
Частота оборота пучка f_{rev}	752543	Гц
Длительность измерительного цикла	100–1500	с
Число частиц в пучке	$\approx 10^9$	

время которой он охлаждался и банчировался, поляризация пучка разворачивалась в горизонтальную плоскость, при помощи ВЧ-соленоида, создающего спиновый резонанс.

Далее, пучок непрерывно экстрагировался на углеродную мишень, и измерялась асимметрия частоты событий на верхней и нижней секциях детектора, пропорциональная горизонтальной поляризации пучка. Благодаря использованию специально разработанной для этого системы сбора данных, [?] было возможно точно определить количество оборотов, сделанных пучком к времени наблюдения события на детекторе.

Проблема измерения заключается в невозможности вычислить спин-тюн путём простого фитирования данных поляриметрии, с ν_s как оцениваемым параметром, поскольку частота прецессии спина происходит с частотой приблизительно 120 кГц, в то время как частота детектирования событий не превосходит 5 кГц, в связи с чем наблюдалось только одно событие за 24 оборота поляризации вокруг вертикальной оси. Для решения проблемы разреженности данных, был применён алгоритм отображения измерений на период одной осцилляции. [?]

В результате была получена беспрецедентная точность определения спин-тюна на уровне 10^{-10} в измерительном цикле цикле длительностью 100 секунд, что теоретически позволяет определить величину ЭДМ на уровне 10^{-24} e·см.

3.3 Юстировка квадруполей при помощи пучка

Для юстировки положения квадруполя (Beam Based Alignment [?]), варьируют силу поля квадруполя, и наблюдают за реакцией пучка. Если пучок проходит не через центр квадруполя, он отклоняется. Величина отклонения описывается выражением

$$\Delta x = \frac{\Delta k \cdot x(s_0)\ell}{B\rho} \cdot \frac{1}{1 - k\frac{\ell\beta(s_0)}{2B\rho\tan\pi\nu}} \cdot \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \cos\left(\phi(s) - \phi(s_0) - \pi\nu\right),$$

где Δx изменение орбиты; s координата, в которой измеряется отклонение пучка; s_0 точка расположения квадруполя; Δk изменение силы квадруполя; ℓ длина квадруполя; ν бетатронный тюн; ϕ бетатронная фаза; $x(s_0)$ положение пучка относительно магнитного центра квадруполя.

Поскольку изменение орбиты $\Delta x(s)$ — линейная функция отклонения пучка от магнитного центра квадруполя, возможно определить оптимальное положение квадруполя, минимизируя функцию

$$f = \frac{1}{N_{\mathrm{BPM}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{BPM}}} (x_i(+\Delta k) - x_i(-\Delta k)^2 \propto x^2(s_0).$$

Впервые, проверка технологии BBA была проведена в ноябре-декабре 2017 года. Методология требует варьирования силы одного квадруполя за раз, иначе наблюдаемый эффект отклонения пучка будет суперпозицией нескольких отклонений. Поскольку квадруполи на COSY питаются группами по четыре, для варьирования силы поля единичного квадруполя были использованы дополнительные обмотки полюсов некоторых квадруполей. В этом случае, поле квадруполя становится суперпозицией двух квадрупольных полей, но это не отражается на работе методики.

Для варьирования точки входа пучка в квадруполь использовались кикеры, отклоняющие пучок от референсной орбиты.

Повторная отработка методологии была проведена в феврале 2019 года.

По результатам работы, положения квадруполей были определены с точностью 0.2 мм. [?, стр. 182]

Особенно релевантны для данной работы исследования по оптимизации времени когерентности спина; рассмотрим эту процедуру более подробно.

3.4 Оптимизация времени когерентности

Изначальной целью экспериментов по изучению времени когерентности спина (Spin Coherence Time) на COSY было подтверждение возможности секступольных полей противодействовать дисперсии спин-тюнов, ассоциированной с эмиттансом и дисперсией импульсов ($\Delta p/p$) частиц пучка. [?] На настоящий момент, оптимизация SCT является первой фазой любого предварительного эксперимента по поиску ЭДМ на COSY.

Секступольное подавление декогеренции используется совместно с электронным охлаждением пучка, для уменьшения его фазового объёма, и банчингом, для подавления линейного вклада дисперсии импульсов частиц в декогеренцию. Секступоли, располагающиеся в арках, призваны подавлять эффект декогеренции второго порядка.

Для контроля декогеренции используются три семейства секступолей, которые маркированны соответственно: MXG, расположенный в максимуме дисперсионной функции, и контролирующий эффект декогеренции связанный с $\Delta p/p$; MXS, расположенный в максимуме горизонтальной бета-функции β_x, и контролирующий дисперсию, связанную с горизонтальными бетатронными колебаниями; MXL, в максимуме β_y, контролирующий дисперсию, возникающую из-за вертикальных бетатронных колебаний.

Процедура оптимизации

В этом разделе описана процедура оптимизации SCT, на примере эксперимента 2014 года. [?] Первый оптимизационный эксперимент проводился в 2012 году, но тогда варьировалась только напряжённость поля

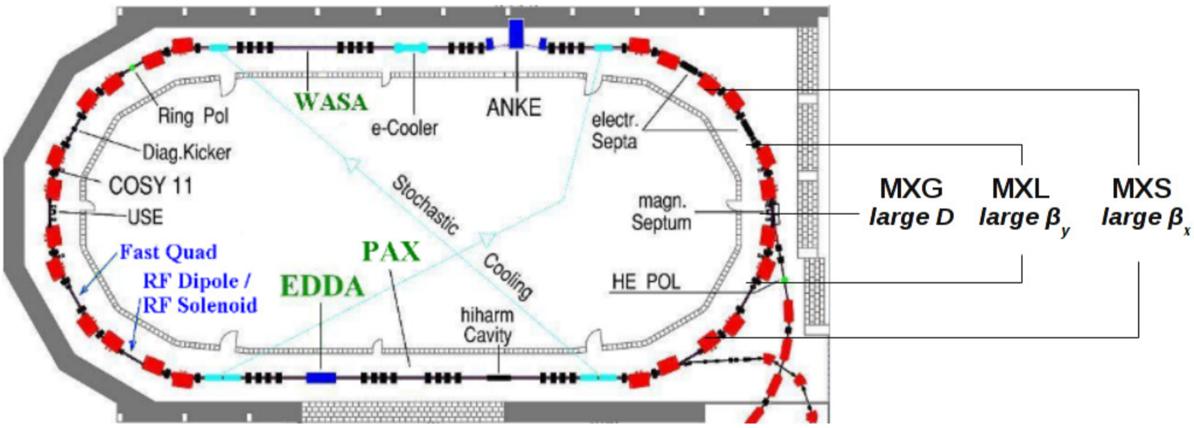


Рис. 3.2: Кольцо COSY с отмеченными положениями секступолей для контроля времени когерентности спина. (Рисунок взят из [?].)

секступоля MXS. В 2014 году впервые проведён полноценный (варьировались градиенты всех трёх секступолей) эксперимент по оптимизации SCT.

Чтобы отделить эффекты декогеренции, связанные с конечностью эмиттанса пучка, и с вторым порядком дисперсии импульсов частиц $(\Delta p/p)^2$, подготовка пучка к эксперименту проводится по-разному.

Для получения пучка с большим разбросом $(\Delta p/p)^2$, поляризованный дейтронный пучок с импульсом $p = 0.97$ ГэВ/с сначала охлаждается в течении 60 секунд для минимизации его эмиттанса. После отключения охлаждения пучок банчируется (гармоническое число $h = 1$). Банчирование необходимо для подавления линейных эффектов декогеренции.

В случае изучения декогеренции, связанной с горизонтальным эмиттансом пучка, [1] охлаждение и банчирование проводятся одновременно в течении первых 60 секунд, после чего охлаждение отключается, и на пять секунд включается горизонтальное нагревание. Пучок нагревается подачей белого шума на обкладки конденсатора горизонтального кикера.

[1]Декогеренция, связанная с вертикальным эмиттансом не может быть изучена ввиду ограничений по аксептансу.

В обоих случаях, пучок инжектируется с вертикально-ориентированным вектором поляризации. Поворот поляризации в горизонтальную плоскость производится ВЧ соленоидом, после подготовки пучка, на 80-й секунде.

Мониторинг поляризации пучка производится непрерывно, путём приложения белого шума на вертикальный кикер, для экстракции пучка на 17-мм углеродную мишень. Далее, эластично-рассеянные дейтроны детектируются на поляриметре EDDA. Эластичное рассеяние дейтронов на углеродной мишени чувствительно к направлению спина, и имеет большое сечение взаимодействия.

Сцинтилляторы поляриметра поделены на четыре группы: верхние, нижние, левые, правые; асимметрия частот событий на левом и правом детекторах пропорциональна вертикальной поляризации, а на верхнем и нижнем — горизонтальной поляризации. Прецессия поляризации пучка в горизонтальной плоскости происходит с частотой, значительно превышающей частоту выборки поляриметра, поэтому в 2012 году была разработана специальная система сбора данных [**?**].

По результатам эксперимента [**?**] была доказана возможность получать на COSY SCT свыше 1,000 секунд.

Изменение SCT при переходе от внешней к внутренней части пучка

Ниже представлены результаты оптимизации SCT, полученные в период измерений апрель-май 2019 года.

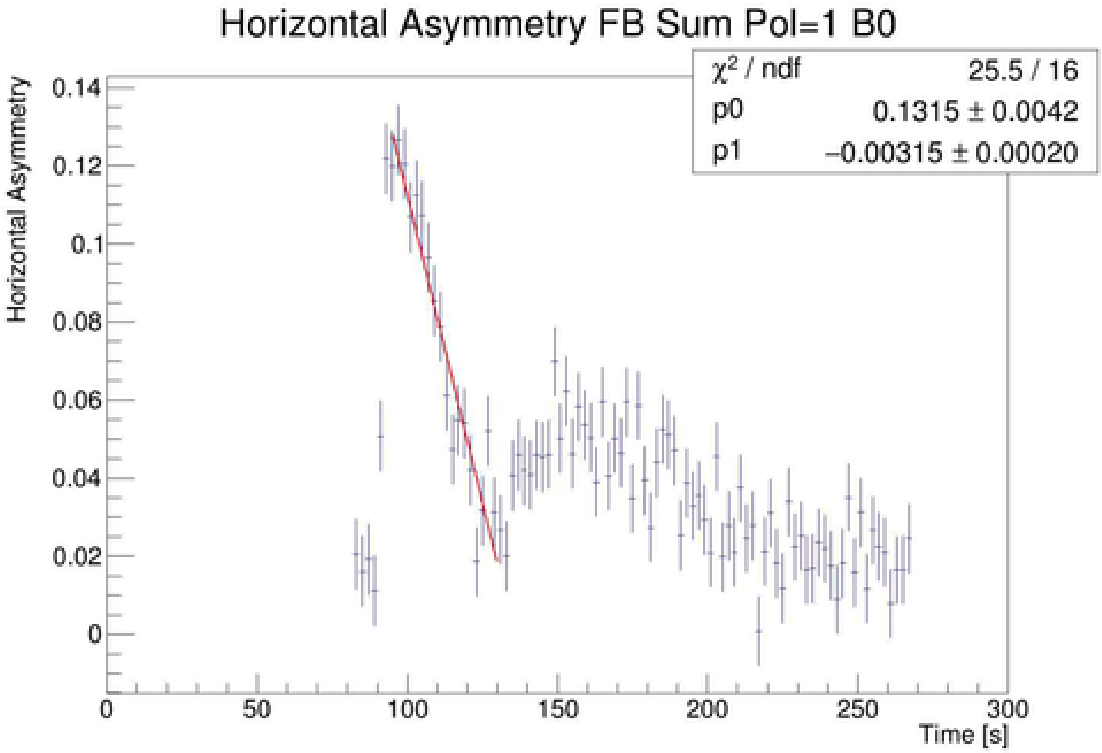
На серии рисунков **??** представлены измерения асимметрии частоты событий на верхнем и нижнем детекторах (так называемая асимметрия верх-низ), которая пропорциональна горизонтальной компоненте поляризации пучка. На первых двух рисунках можно наблюдать, что на начальном этапе (в промежутке от 100 до 150 секунд) деполяризация происходит со значительной скоростью, но во второй половине цикла скорость деполяризации падает. На Рисунке **??** особенно, мы видим, что в промежутке времени приблизительно от 130 до 150 секунд поляризация начинает возрастать, прежде чем снова спадает со значительно меньшей скоростью.

Такое поведение поляризации на данный момент объясняется неоднородностью поляризованности пучка. В первой половине цикла на детектор преимущественно попадают частицы из внешней (halo) части пучка (оболочки); к второй половине цикла начинается выборка частиц из центральной (core) части (ядра). Поскольку ядро плотнее чем оболочка, разброс длин орбит частиц ядра меньше, чем частиц оболочки, а значит меньше и разброс спин тюнов частиц.

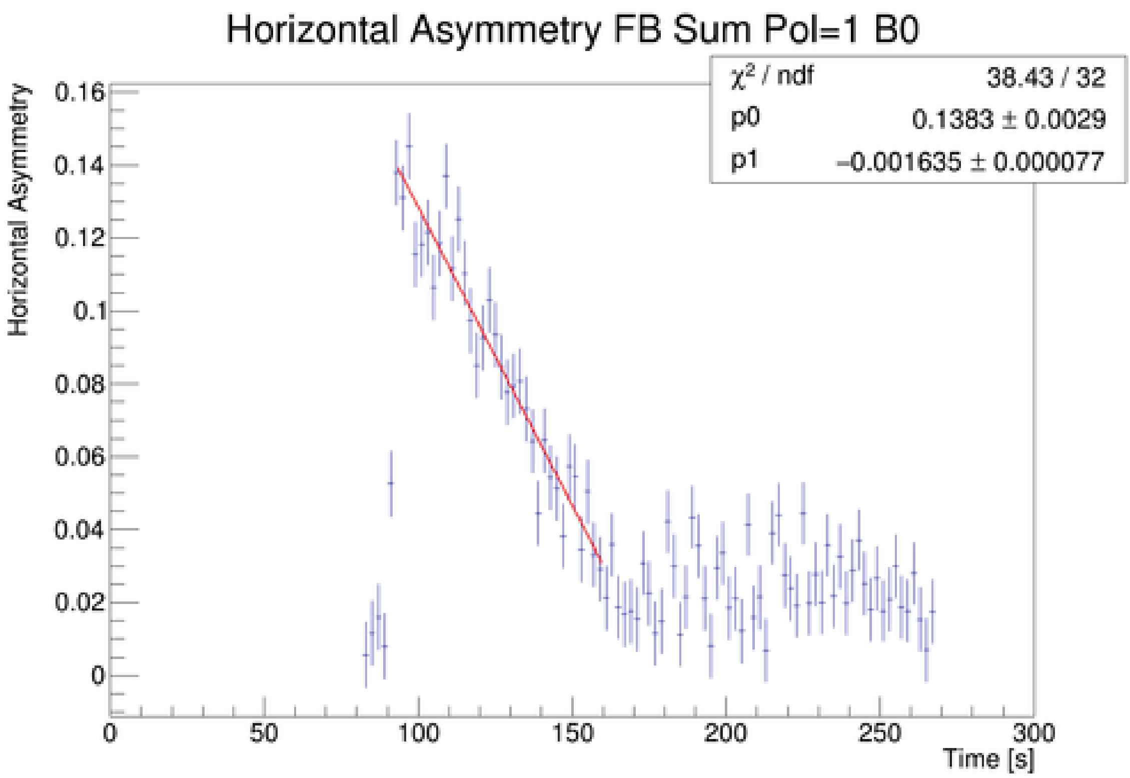
Зависимость времени когерентности спина от силы секступоля

На Рисунках **??** представлена зависимость времени когерентности спина от относительной силы поля, соответственно MXL и MXG секступолей, измеренная во время оптимизации в апреле 2019 года. Наблюдается зависимость резонансного типа времени когерентности от значений относительной силы поля секступолей.

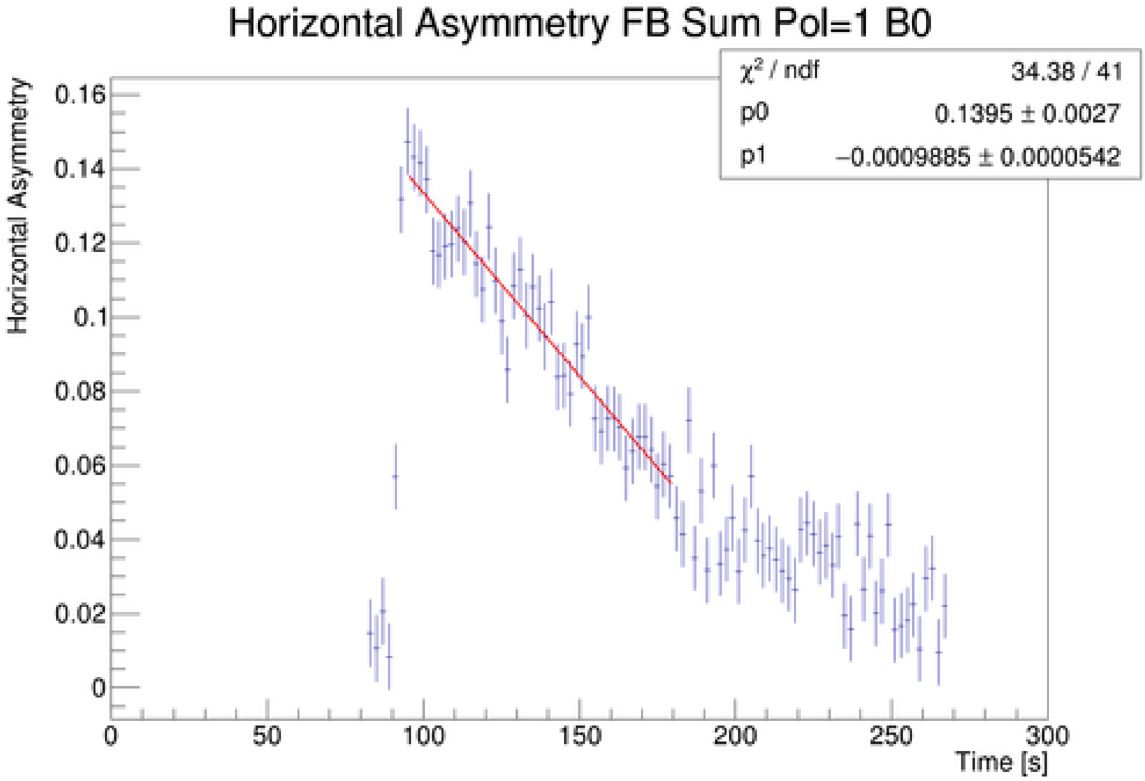
Мы проверили, соблюдается ли такая же зависимость в рамках нашей численной модели, с учётом того, что измерения на COSY проводятся на энергии, значительно удалённой от спин-резонансной. На Рисунке **??** изображена зависимость стандартного отклонения спин-тюнов частиц пучка от значения подавляющего декогеренцию секступоля (данные взяты из симуляции, описанной в разделе 1.3). Зависимость показывает такой же резонансный характер, как и данные эксперимента.



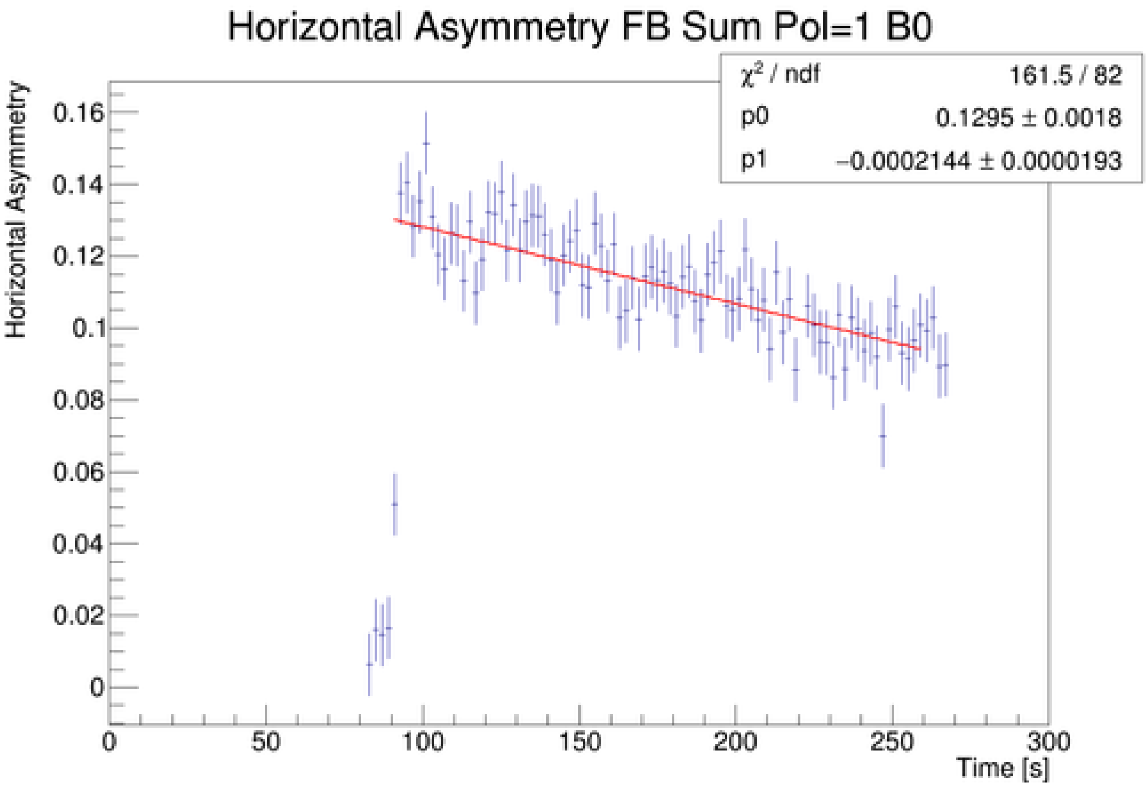
SCT $= 20.87 \pm 1.49$ секунд.



SCT $= 42.3 \pm 2.2$ секунд.

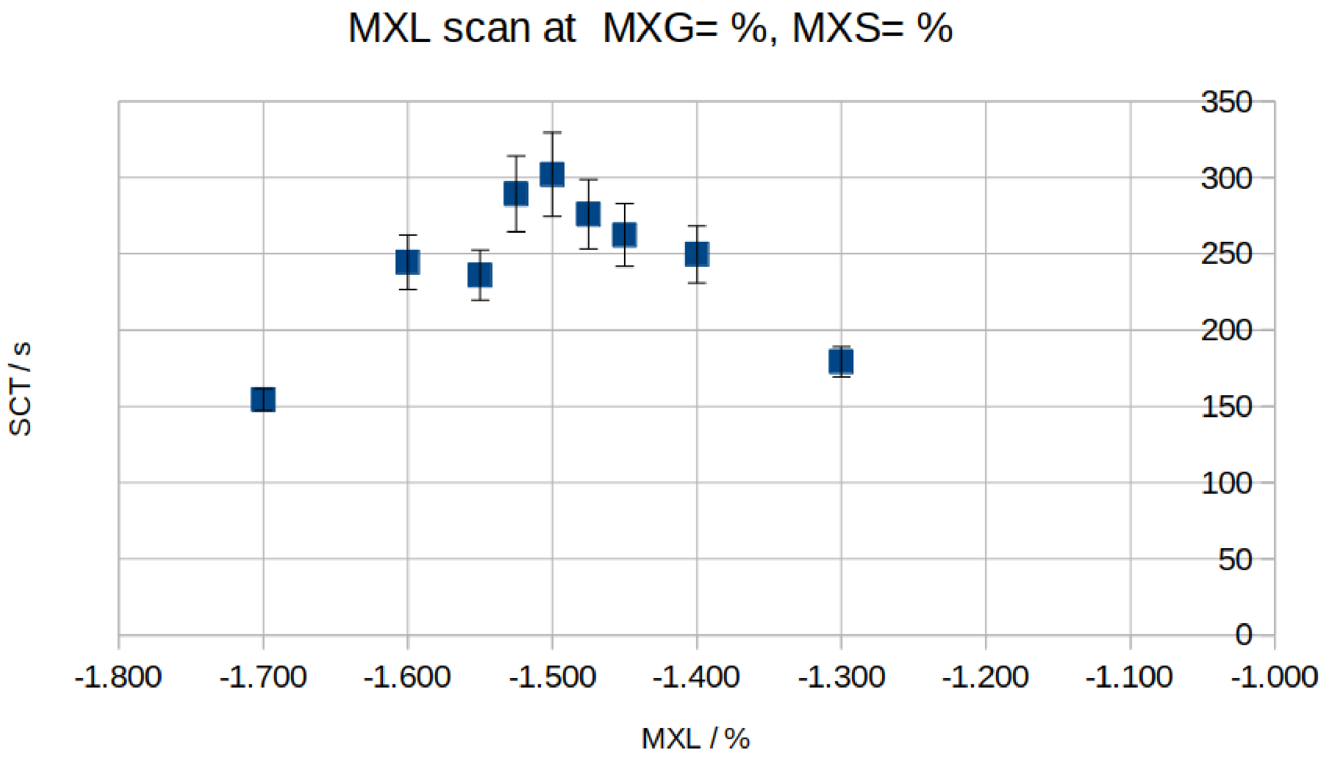


SCT $= 70.6 \pm 4.1$ секунд.

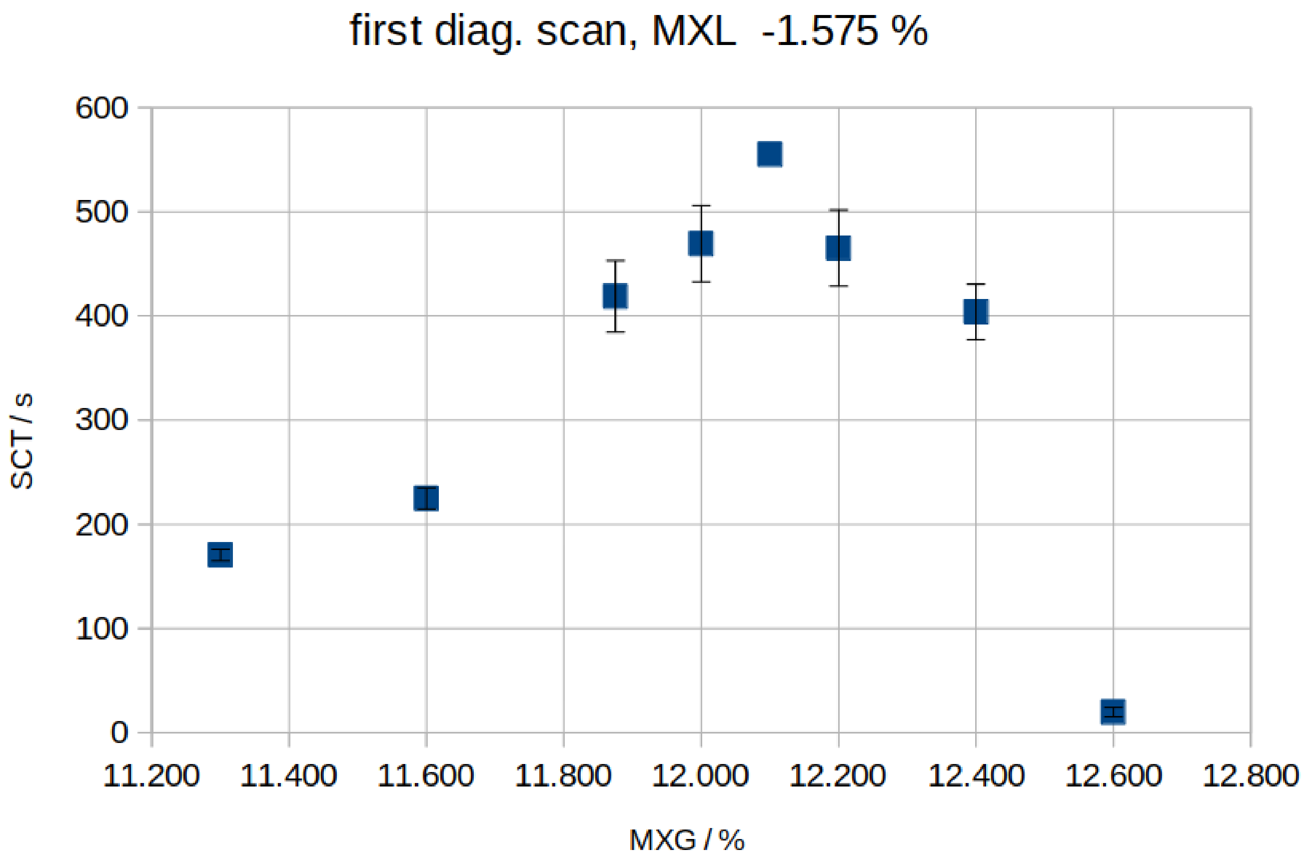


SCT $= 302.0 \pm 27.5$ секунд.

Рис. 3.3: Измерения горизонтальной поляризации во время оптимизации времени когерентности спина при подготовке к эксперименту по поиску аксионов в апреле 2019 года.



Секступоль MXL.



Секступоль MXG.

Рис. 3.4: Зависимость SCT от градиента секступоля.

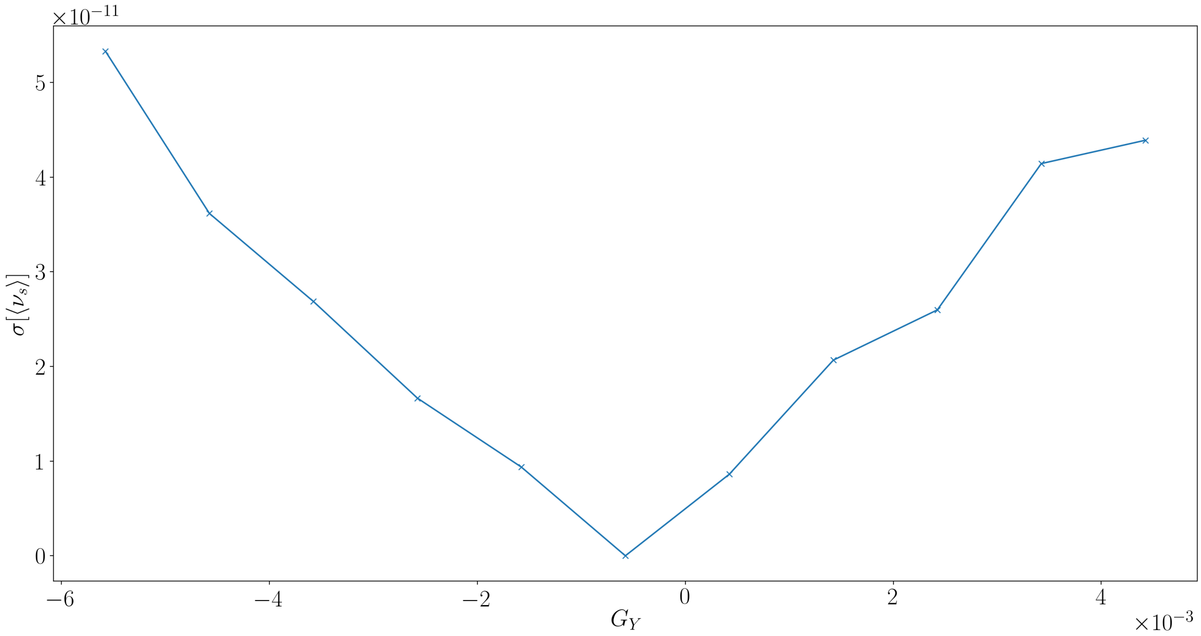


Рис. 3.5: Зависимость стандартного отклонения спин-тюнов частиц банча от используемого градиента подавляющего декогеренцию секступоля.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Effects of spin dynamics that could potentially result in systematic error were studiedm such as:
   - betatron motion-related psrticle spin dynamics pertubrations;
   - spin decoherence;
   - machine imperfection-related EDM-faking MDM spin precession.
2. For each of the systematic errors, a solution was described, its effectiveness numerically analyzed.
3. Were formulated:
   - the notions of the space and time domains (with respect to the FS SR EDM measurement methodology);
   - the notion of the 2D frozen spin state;
   - the necessary conditions of a successful SR EDM measurement;
   - the 2D FS (Frequency Domain) method, satisfying all of the necessary conditions we found.
4. Frozen and Quasi-Frozen spin lattices were described.

В заключение, автор выражает благодарность научным руководителям, Сеничеву Ю. В. и Полозову С. М., за научное руководство, Салееву А. В. и Валетову Е. В. за плодотворные дискуссии, Институту Ядерных Исследований (IKP-2) Исследовательского центра “Юлих,” и в частности коллективу коллаборации JEDI, за возможность участвовать в проекте по поиску ЭДМ.

rm protrusion=false protrusion=true tt

protrusion=false

Список иллюстраций

Список таблиц

protrusion=true

Глава 4

Статистическое моделирование

В этом приложении мы рассматриваем стандартную ошибку оценки частоты прецессии спина, в эксперименте по поиску ЭДМ дейтрона в накопиетльном кольце. Основное рассмотрение начинается с раздела 4.2; раздел 4.1 предоставляет обоснование некоторым используемым понятиям (таким как информация Фишера выборки, информативность точки), но может быть пропущен.

Частота прецессии спина определяется путём фитирования данных поляриметрии синусоидальной функцией $f(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$ с постоянными параметрами (a, ω, δ). Данные о поляризации получают при рассеянии пучка на углеродной мишени. Двумя важными обстоятельствами поляриметрии являются: $[a)]$

уменьшение числа частиц в пучке при каждом измерении поляризации, и

деполяризация.

В связи с первым обстоятельством возникает желание использовать каждое измерение поляризации максимально эффективно. В выборке измеренний сигнала, максимальной информативностью обладают точки, измеренные в моменты, когда сигнал имел наибольшую скорость изменения (см. раздел 4.1 ниже). По этой причине возникла идея измерять поляризацию пучка только в моменты пересечения ею нуля (модулированная схема измерения): таким образом увеличивается время жизни пучка, а потеря частиц происходит наиболее выгодным образом.

При этом необходимо отметить, что анализирующая способность детектора как раз максимальна в экстремумах, и стремится к нулю в узлах сигнала. Это ограничивает возможность увеличения эффективности выборки модулированной схемой: наиболее ценные для нас измерения поляризации имеют наименьшую точность, а наименее ценные — максимальную.

Также, это влияет и на гетероскедастичность данных: в проведённой нами симуляции мы использовали непериодическую модель роста ошибки стандартного отклонения измерения поляризации из [**?**, стр. 18], в то время как колебания анализирующей способности детектора вводят периодическую зависимость от времени.

Фактор деполяризации в свою очередь ограничивает наши возможности по продлению времени жизни пучка, а следовательно накладывает ограничения и на длительность измерительного цикла, возможную точность единичной оценки частоты, и длительность полного времени измерения ЭДМ.

В следующих разделах мы рассмотрим модель временной зависимости частоты событий на детекторе, введём понятие асимметрии сечения взаимодействия, и определим адекватную, ввиду деполяризации, длительность измерительного цикла. Также, мы промоделируем статистическую обработку данных, и попытаемся определить потенциал применения модулированной схемы измерения поляризации.

4.1 Предварительный анализ

Вероятность наблюдения величины $y_i \equiv y(t_i)$, при ожидании $\mu(t_i)$ и нормальном распределении ошибки: $\mathrm{f}(\mathrm{y}_i|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_i-\mu(t_i))^2}{\nu}\right)$,
$\theta = (\nu, \omega, \phi)$,
$\mu(t_i) = N_0\left(1 + P\sin(\omega t_i + \phi)\right)$.

Вероятность наблюдения набора измерений $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_K)$, предполагая что они все происходят из одного и того же распределения, это произведение вероятностей, взятое как функция параметров: $\mathrm{L}(\theta|\mathbf{y}) = \Pi_i f(y_i|\theta), \ell(\theta|\mathbf{y}) = -\frac{K}{2}\log 2\pi - \frac{K}{2}\log\nu - \frac{1}{2\nu}\sum_i \epsilon_i^2,\ \epsilon_i = y_i - \mu(t_i)$. Обычными предполажениями на ошибку являются равенство нулю её ожидания, и строгая экзогенность: $\mathrm{E}[\epsilon_i|\ \theta_0] = \mathrm{E}\left[t_i\epsilon_i|\ \theta_0\right] = 0,\ :\mu'_\phi = N_0 P\cos(\omega t{+}\phi)$, $\mu'_\omega = t\cdot\mu'_\phi, \epsilon'_\xi = -\mu'_\xi$.

Дисперсия оценки частоты

После вычисления производных логарифма вероятности (и их ожиданий), получим матрицу Фишера:

$$I(\theta_0) = (\ /\ )\, K2\nu000{}^1\!/\!{}_\nu \sum\left(t_i\mu'_\phi(t_i)\right)^2 {}^1\!/\!{}_\nu \sum t_i\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 0{}^1\!/\!{}_\nu \sum t_i\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 {}^1\!/\!{}_\nu \sum\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2.$$

Определитель матрицы

$$|I(\theta_0)| = \frac{K}{2\nu^3}\underbrace{\left(\sum\left(t_i\mu'_\phi(t_i)\right)^2\sum\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 - \left(\sum t_i\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2\right)^2\right)}_{\omega}.$$

Матрица вариации-ковариации

$$vcov = (\ /\ )\, 2\nu K000\nu\frac{\sum\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2}{\omega}\nu\frac{\sum t_i\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2}{\omega}0\nu\frac{\sum t_i\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2}{\omega}\nu\frac{\sum\left(t_i\mu'_\phi(t_i)\right)^2}{\omega}.$$

Дисперсия оценки частоты

$$\mathrm{var}\left[\hat\omega\right] = \nu\frac{\sum\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2}{\sum\left(t_i\mu'_\phi(t_i)\right)^2\sum\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 - \left(\sum t_i\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2\right)^2}. \tag{4.1}$$

Проверка

Положим $\mu(t_i) = \phi{+}\omega t_i$. В этом случае $\mu'_\phi(t_i) = 1$, $\mu'_\omega(t_i) = t_i = t_i\cdot\mu'_\phi(t_i)$, и определитель матрицы Фишера упрощается: $|\mathrm{I}(\theta_0)| = \frac{K}{2\nu^4}\left(K\sum_i t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2\right)$
$= \frac{K^3}{2\nu^4}\left(\frac{1}{K}\sum t_i^2 - \langle t\rangle^2\right)$
$= \frac{K}{2\nu^4}\cdot\underbrace{K\sum\left(t_i - \langle t\rangle\right)^2}_{\omega}$ а матрица вариации-ковариации становится

$$vcov = (\ 2\ )\, {}^{\nu^2}\!/\!{}_{K}000\frac{\nu}{\sum\left(t_i-\langle t\rangle\right)^2}\nu\frac{\sum t_i}{K\sum\left(t_i-\langle t\rangle\right)^2}0\nu\frac{\sum t_i}{K\sum\left(t_i-\langle t\rangle\right)^2}\nu\frac{\sum t_i^2}{K\sum\left(t_i-\langle t\rangle\right)^2},$$

с хорошо известным выражением дисперсии оценки наклона прямой

$$\mathrm{var}\left[\hat{\omega}\right] = \frac{\nu}{\sum\left(t_i - \langle t\rangle\right)^2}.$$

Обозначим $\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 = (N_0P)^2\cos^2(\omega t_i + \phi) \equiv x_i$. Уравнение eq:Var1 может быть записано в виде: $\mathrm{var}\left[\hat{\omega}\right] = \frac{\nu}{\sum_j x_j\left(\sum_i t_i^2\frac{x_i}{\sum_j x_j} - \left(\sum_i t_i\frac{x_i}{\sum_j x_j}\right)^2\right)}$
$= \frac{\nu}{\sum_j x_j \sum_i w_i(t_i - \langle t\rangle_w)^2}$
$= \frac{\nu}{\sum_j x_j \cdot \mathrm{var}_w[t]}$.

Модуляция выборки

Запишем матрицу Фишера в виде суммы

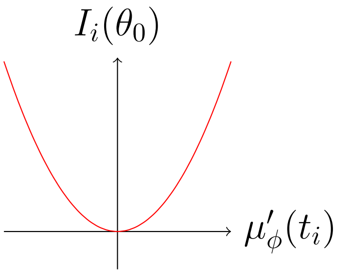
$$I(\theta_0) = \sum_i I_i(\theta_0);\ I_i(\theta_0) = \frac{1}{\nu}\,(\,(\,)\,\sqrt{2}\cdot\mu'_\phi(t_i)^{-2}000t_i^2t_i0t_i1\cdot\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2. \quad (4.2)$$

$I_i(\theta_0) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(y_i|\theta)|_{\theta=\theta_0}|\ \theta_0\right]$ будем интерпретировать как информацию о параметре, заложенную в измерение y_i.

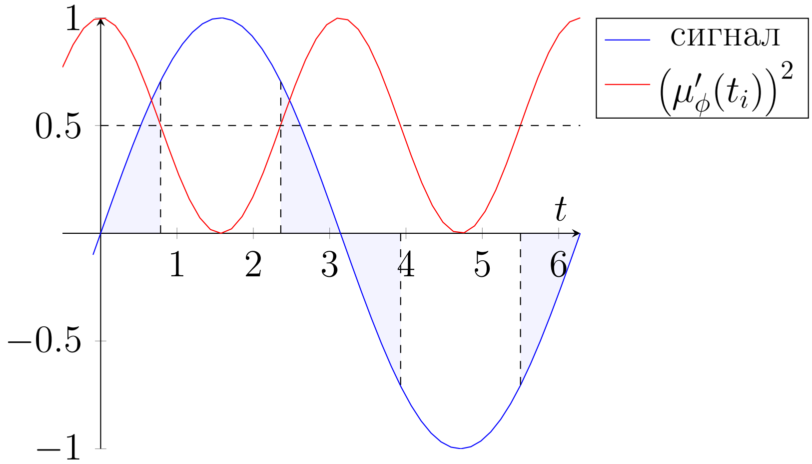
Если дать каждой точке вес, пропорциональный её информации Фишера, т.е. $w_i = \cos^2(\omega t_i + \phi)$, вес области с $\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 \geq 1/2$ больше чем у эквивалентной области с $\left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2 < 1/2$ на множитель $\int_{t_0}^{t_1}\cos^2(\omega t + \phi)\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_{\omega t_0}^{\omega t_1}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2\omega}\sin\omega\Delta t\cos\omega\Sigma t \approx 1.9$.

То есть, если бы все точки находились в заштрихованной области, выборка была бы информативнее примерно в два раза. [1]

[1]Это не учитывая что в случае поляриметрии неопределённость измерений обратно пропорциональна информативности, как было уже сказано во введении к этому приложению.



Информация Фишера точки зависит параболически от производной сигнала.



Точки в заштрихованных областях более информативны.

Рис. 4.1: Зависимость информации Фишера измерения синусоидального сигнала от его производной.

4.2 Модель частоты событий на поляриметре

В наших рассуждениях мы предположили следующую простую модель изменения количества событий на поляриметре как функции времени:

$$N(t) = N_0(t) \cdot \left(1 + P \cdot e^{-t/\tau_d} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)\right), \tag{4.3}$$

где $N_0(t)$ частота событий, связанная с неполяризованным сечением, τ_d время жизни поляризации, связанное с декогеренцией.

Ток пучка, рассеиваемого на мишени может быть описан с помощью:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{t/\tau_b} = \nu N_0^b \cdot e^{t/\tau_b},$$

где τ_b — время жизни пучка, N_0^b его начальное число частиц, и ν частота оборота пучка в ускорителе. Обозначая p вероятность что рассеянная частица полетит в сторону детектора, ожидаемое число частиц, детектируемых в течении времени измерения Δt_c может быть записано как

$\mathrm{N}_0(t) = p \cdot \int_{-\Delta t_c/2}^{+\Delta t_c/2} I(t+\tau)\mathrm{d}\tau$
$= p \cdot \frac{\nu N_0^b}{\lambda_b} e^{\lambda_b t} \cdot \left(e^{\lambda_b \Delta t_c/2} - e^{-\lambda_b \Delta t_c/2}\right)$
$\approx \underbrace{p \cdot \nu N_0^b e^{\lambda_b t}}_{\text{rate } r(t)} \cdot \Delta t_c$. Таким образом, получаем распределение Пуассона

$$P_{N_0(t)}(\tilde{N}_0) = \frac{\left(r(t)\Delta t_c\right)^{\tilde{N}_0}}{\tilde{N}_0!} \cdot e^{-r(t)\Delta t_c},$$

с дисперсией $\sigma\left[\tilde{N}_0\right]^2(t) = N_0(t)$.

Нас интересует ожидаине $N_0(t) = \mathrm{E}\left[\tilde{N}_0(t)\right]$, и его стандартное отклонение $\sigma\left[N_0\right](t)$. Обозначая время измерения одного события Δt_ϵ, полное время измерений Δt_c, и число событий за измерение $n_{c/\epsilon} = \Delta t_\epsilon / \Delta t_c$, ожидание $\mathrm{E}\big[\tilde{N}_0(t)\big]_{\Delta t_\epsilon} = \frac{1}{n_{c/\epsilon}} \sum_{i=1}^{n_{c/\epsilon}} \tilde{N}_0(t_i)$. Поскольку это сумма случайных переменных, $N_0(t)$ имеет нормальное распределение; тогда стандартное отклонение среднего $\sigma\left[N_0\right](t) = \sigma\left[\tilde{N}_0\right](t)/\sqrt{n_{c/\epsilon}} = \sqrt{N_0(t)\frac{\Delta t_c}{\Delta t_\epsilon}}$
$\approx \sqrt{\frac{p \cdot \nu N_0^b}{\Delta t_\epsilon}} \cdot \Delta t_c \cdot \exp\left(\frac{\lambda_b}{2} \cdot t\right)$.

Отметим, что относительная ошибка растёт со временем:

$$\frac{\sigma\left[N_0\right](t)}{N_0(t)} \approx \frac{A}{\sqrt{\Delta t_\epsilon}} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_b}{2} t\right) = \frac{A}{\sqrt{\Delta t_\epsilon}} \cdot \exp\left(\frac{t}{2\tau_b}\right),\ A = \frac{1}{\sqrt{p \cdot \nu N_0^b}}. \quad (4.4)$$

4.3 Асимметрия сечения

В качестве меры поляризации пучка используют асимметрию частоты событий детекторов. [?, стр. 17] Асимметрия сечения взаимодействия — это нормализованная разность числа событий (в единицу времени) на детекторах, расположенных по разные стороны от вакуумной камеры:

$$\mathcal{A} = \frac{N(\frac{\pi}{2}) - N(-\frac{\pi}{2})}{N(\frac{\pi}{2}) + N(-\frac{\pi}{2})}. \quad (4.5)$$

В нижеследующей симуляции, мы профитировали данные функцией:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) \cdot e^{\lambda_d \cdot t} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \phi\right), \quad (4.6)$$

в которой, помимо частоты, оценивались параметры $\mathcal{A}(0)$, λ_d, и ϕ.

В связи с уменьшением числа частиц в пучке, измерение асимметрии сечения гетероскедастично. Из [**?**, стр. 18], мы приняли модель гетероскедастичности

$$\sigma\left[\mathcal{A}\right]^2(t) \approx \frac{1}{2N_0(t)}. \tag{4.7}$$

4.4 Временное окно измерений

Предполагая нормальное распределение ошибки измерений, с нулевым ожиданием и дисперсией $\sigma\left[\epsilon\right]^2$, эстиматор максимального правдоподобия дисперсии оценки частоты колебаний асимметрии сечения взаимодействия $\mathcal{A}$ может быть выражен как $\operatorname{var}\left[\hat{\omega}\right] = \frac{\sigma[\epsilon]^2}{X_{tot}\cdot \operatorname{var}_w[t]}$, $X_{tot} = \sum_{j=1}^{n_\epsilon} x_j = \sum_{s=1}^{n_{zc}} \sum_{j=1}^{n_{\epsilon/zc}} x_{js}$,
$\operatorname{var}_w\left[t\right] = \sum_i w_i \left(t_i - \langle t\rangle_w\right)^2$, $\langle t\rangle_w = \sum_i w_i t_i$,
$w_i = \frac{x_i}{\sum_j x_j}$, $x_i = \left(\mathcal{A}(0)\exp(\lambda_d t_i)\right)^2 \cos^2(\omega t_i + \phi) = \left(\mu'_\phi(t_i)\right)^2$.

В выражении выше, X_{tot} есть полная информация Фишера сэмпла, и $\operatorname{var}_w\left[t\right]$ — мера длительности его измерения. Можно наблюдать, что выбирая подходящие моменты времени для измерения, можно увеличить фактор X_{tot}, поскольку он пропорционален сумме временных производных сигнала. Если частота и фаза колебаний уже известны до приемлемого уровня, можно дальше улучшить эффективность измерений, применяя схему измерений в которой выбираются только моменты быстрого изменения сигнала (модуляция сэмплинга).

Оба фактора $\operatorname{var}_w\left[t\right]$ и X_{tot} ограничены конечным временем жизни поляризации. Можно выразить $\sum_{j=1}^{n_{\epsilon/zc}} x_{js} = n_{\epsilon/zc}\cdot x_{0s}$, для некоторого среднего значения x_{0s} в данном узле s, где $n_{\epsilon/zc}$ измерений асимметрии на узле. Будем называть *временем сжатия*[2] (обозначение Δt_{zc}) период времени вокруг узла сигнала, в течении которого производятся измерения. Значение суммы $\sum_{j=1}^{n_{\epsilon/zc}} x_{js}$ спадает экспоненциально из-за деполяризации,

[2] Поскольку, не изменяя количества измерений за единицу времени, они все “сжимаются” вокруг узла сигнала.

так что $x_{0s} = x_{01}\exp\left(\lambda_d \cdot \frac{(s-1)\cdot\pi}{\omega}\right)$. Тогда: $\mathrm{X}_{tot} = n_{\epsilon/zc} \cdot x_{01} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\lambda_d \pi}{\omega} n_{zc}\right)-1}{\exp\left(\frac{\lambda_d\pi}{\omega}\right)-1} \equiv$
$n_{\epsilon/zc} \cdot x_{01} \cdot g(n_{zc})$;
$x_{01} = \frac{1}{\Delta t_{zc}} \int_{-\Delta t_{zc}/2}^{+\Delta t_{zc}/2} \cos^2(\omega \cdot t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sin\omega\Delta t_{zc}}{\omega\Delta t_{zc}}\right)$,
$n_{\epsilon/zc} = \frac{\Delta t_{zc}}{\Delta t_{\epsilon}}$.

Уравнение eq:FItot может быть использовано чтобы оценить пределы длительности эксперимента. В Таблице 4.1 мы собрали: процент от предела информации Фишера сэмпла, время (как фактор времени жизни поляризации) исчерпания этого процента информации из сэмпла, и соответствующее этому времени отношение сигнал-шум. Отношение сигнал-шум вычислено по формуле:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathcal{A}(0) \cdot e^{-t/\tau_d}}{\sigma\left[\mathcal{A}\right](t)} \approx \sqrt{2 \cdot p \cdot \nu N_0^b \cdot \Delta t_c} \cdot \mathcal{A}(0) \cdot \exp\left[-\frac{t}{\tau_d} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_d}{\tau_b}\right)\right], \tag{4.8}$$

в которой, полагая $\sigma\left[\mathcal{A}(0)\right]/\mathcal{A}(0) \approx 3\%$ (точность измерения поляриметрии), коэффициент перед экспонентой равен 33.

Таблица 4.1: Выбранная информация Фишера, длительность измерений, соответствующее отношение сигнал-шум.

Предел ИФ(%)	длительность ($\times\tau_d$)	SNR
95	3.0	0.4
90	2.3	1.1
70	1.2	5.5
50	0.7	11.7

Предполагая отсутствие деполяризации ($\lambda_d = 0$) и однородный сэмплинг с частотой $1/\Delta t$, уравнение eq:VarW может быть записано через физические переменные как $\mathrm{X}_{tot} = \sum_{k=1}^{K} \mathcal{A}^2(0)\cos^2(\omega t_k + \phi) = \frac{1}{2}\mathcal{A}^2(0)\cdot K$, $\mathrm{var}_w\left[t\right] = \sum_{k=1}^{K}(k\Delta t - \langle t\rangle_w)^2 \underbrace{w_k}_{1/K}$
$\approx \frac{\Delta t^2}{12}K^2 = \frac{T^2}{12}, \mathrm{var}\left[\hat{\omega}\right] = \frac{24}{KT^2} \cdot \left(\frac{\sigma[\epsilon]}{\mathcal{A}(0)}\right)^2$.

4.5 Результаты моделирования

Мы симулировали сбор данных двух детекторов с параметрами собранными в Таблице 4.2 на протяжении $T_{tot} = 1,000$ секунд, выбираемыми равномерно по времени с частотой $f_s = 375$ Гц.

Данные параметры симуляции были выбраны исходя из следующих соображений: число частиц в пучке порядка 10^{11}; если мы хотим сохранить время жизни пучка равным времени жизни поляризации, мы не можем исчерпать более 75% от его начального числа частиц; всего лишь 1% всех рассеяний на мишени полезны для поляриметрии, так что остаётся $7.5 \cdot 10^8$ полезных рассеяний. Измерение частоты событий $N_0(t)$ с точностью примерно 3% требует приблизительно 2000 событий на детекторе, что ещё уменьшает число измерений до $3.75 \cdot 10^5 = f_s \cdot T_{tot}$. Ожидаемая длительность цикла 1000 секунд, отсюда $f_s = 375$ Гц.

Относительная ошибка измерения частоты событий на детекторах отражена на Рисунке **??**; асимметрия сечения, вычисленная в соответствии с уравнением eq:AsymDef, представлена на Рисунке **??**. Данные асимметрии фитируются нелинейной, гетероскедастичной моделью заданной как

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) \cdot e^{\lambda_d \cdot t} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \phi\right),$$

с функцией дисперсии весов заданной уравнением eq:AsymHtsk. Результаты фитирования представлены в Таблице 4.3.

Если начальная оценка частоты, полученная из равномерно собранного сэмпла, имеет стандартную ошибку порядка 10^{-6} рад/сек, симуляции подтверждают, что стандартная ошибка оценки может быть улучшена до примерно $5.8 \cdot 10^{-7}$ рад/сек.

Таблица 4.2: Параметры модели частоты событий детекторов

	Левый	Правый	
ϕ	$-\pi/2$	$+\pi/2$	рад
ω	3		рад/сек
P	0.4		
τ_d	721		сек
τ_b	721		сек
$N_0(0)$	6730		

Таблица 4.3: Результаты фитирования

	Оценка	Ст. Ошибка	Единицы
$\mathcal{A}(0)$	0.400	$9.03 \cdot 10^{-5}$	
λ_d	-0.001	$7.86 \cdot 10^{-7}$	1/сек
ω	3.000	$7.55 \cdot 10^{-7}$	рад/сек
ϕ	-1.571	$2.25 \cdot 10^{-2}$	рад

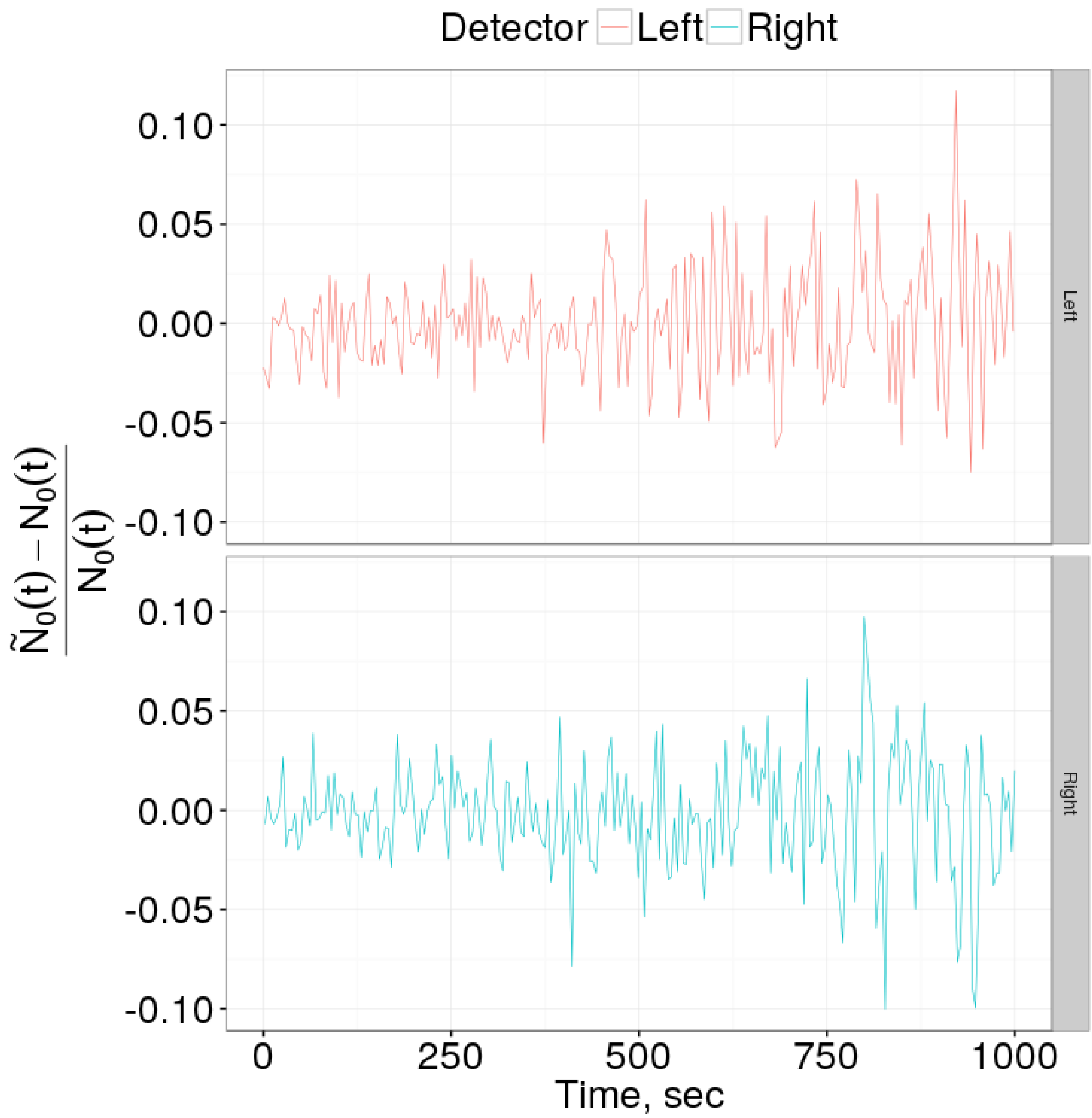


Рис. 4.2: Относительная ошибка измерения частоты событий на правом и левом детекторах как функция времени.

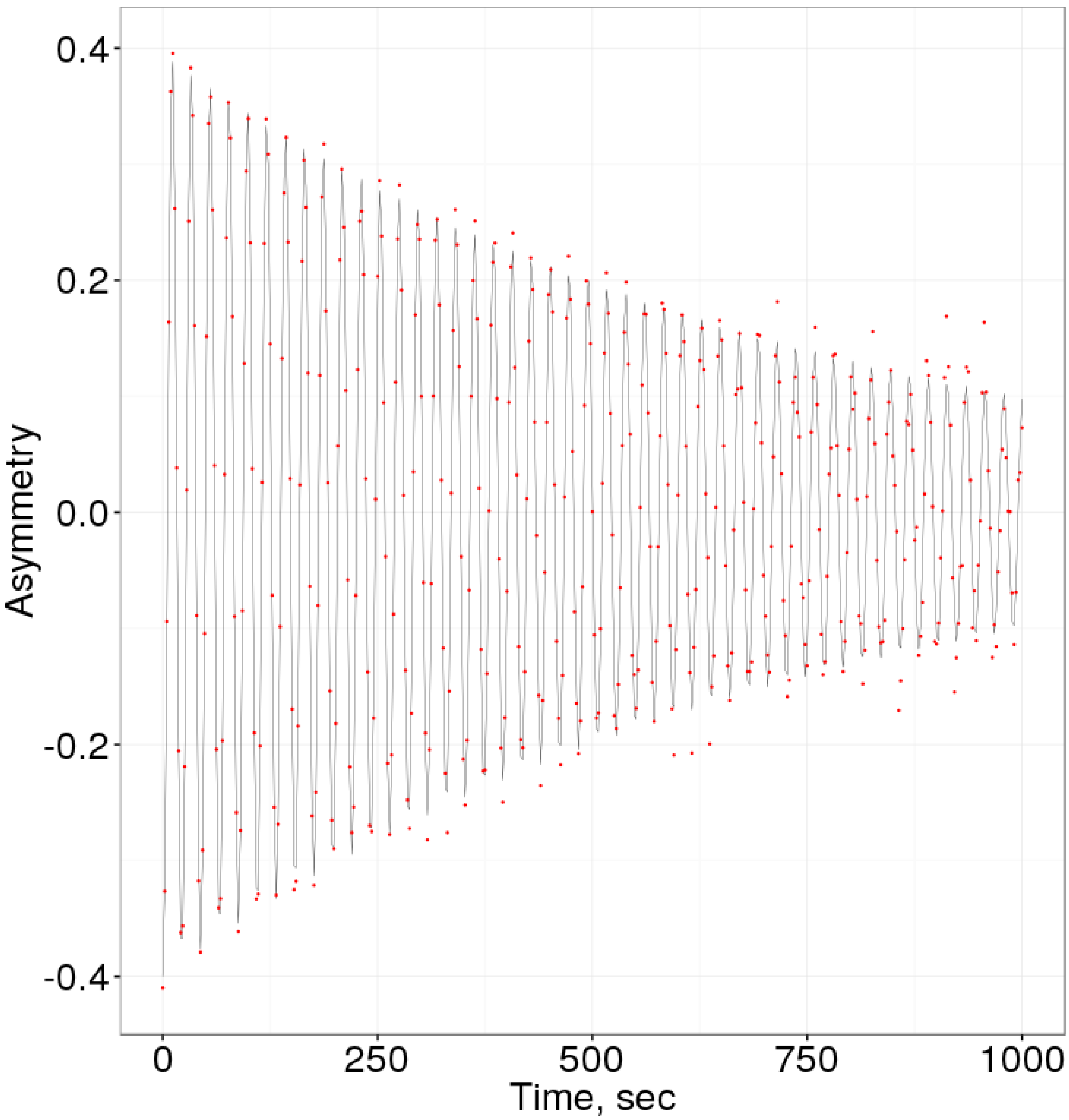


Рис. 4.3: Ожидание (чёрная линия) и измерения (красные точки) асимметрии сечения.