

Анализ влияния бетатронного движения частицы на оценку ЭДМ дейтрона в методе Frequency Domain

Мы будем рассматривать случай пучка, состоящего из одной частицы. В этом случае, наблюдаемой является угловая скорость вращения её спин-вектора.

Мотивация

Решение уравнения Т-БМТ для вертикальной компоненты спин-вектора

$$s_y(t) = \sqrt{\left(\frac{\omega_y(t)\omega_z(t)}{\omega^2(t)}\right)^2 + \left(\frac{\omega_x(t)}{\omega(t)}\right)^2} \cdot \sin(\omega(t) \cdot t + \delta).$$

Переформулировав это уравнение в терминах спин-тюна ν_s и оси стабильного спина \vec{n} , поскольку $\vec{\omega} = 2\pi f_{rev}\nu_s\vec{n}$,

$$s_y(t) = \sqrt{(\bar{n}_y(t)\bar{n}_z(t))^2 + \bar{n}_x^2(t)} \cdot \sin(2\pi\nu_s(t) \cdot n_{turn} + \delta). \quad (1)$$

Поскольку частица совершает бетатронные колебания, и отклоняется от замкнутой орбиты, $\nu_s(t)$, $\vec{n}(t)$ — не константы. Поэтому, потенциально, цитирование данных, генерированных функцией выше, функцией, в которой амплитуда и частота считаются константами, приведёт к систематической ошибке спецификации модели.

Анализ

Нам доступны два типа данных: 1) компоненты (S_X, S_Y, S_Z) спин-вектора непосредственно из трекинга, 2) значения (ν_s, \vec{n}) в точке фазового пространства, в данный момент занимаемой частицей.

Соответствие данных ожиданиям

Основываясь на данных второго типа, мы можем генерировать ожидаемую серию $s_y(t)$ вне трекинга, и сравнить её с трекинговыми данными, построив невязку $\epsilon(t) = S_Y(t) - s_y(t)$.

Я сделал это, и обратил внимание, что невязка — осциллирующая (малой амплитуды) функция. Пока что не известно кто виновник этого — трекинговые данные или аналитические, как и частота колебаний. (Хотя стоит отметить, что колебания \bar{n}_x имеют амплитуду 10^{-9} , а произведение $\bar{n}_y\bar{n}_z \sim 10^{-13}$, $\nu_s \sim 10^{-14}$, при этом амплитуда колебаний невязки $6 \cdot 10^{-5}$, из чего я делаю предварительную оценку что трекинговые данные колеблются сильнее, а генераторные можно считать практически идеальной синусоидой.)

- Для определения виновника, можно построить невязку данных с модифицированным генератором, в котором, например, $\nu_s(t), \bar{n}(t) = \text{const}$. (Сделал это, как и ожидал, колебания невязки связаны с трекинговыми данными.)
- Стоит сравнить частоту колебаний невязки с частотой бетатронных, которую можно вычислить фитируя вертикальную координату частицы.

Также, я определил частоты колебаний генератора и трекинговых данных. Оценки частот сошлись в пределах статистической погрешности, но при этом статистическая погрешность данных генератора на три порядка меньше, что я связываю с малостью колебаний (ν_s, \bar{n}) , и соответственно с большим соответствием этих данных простой синусоиде. Информационный критерий Акаике синусоидальной модели применительно к генераторным данным в полтора раза больше (по модулю) чем для трекинговых данных, то есть происходит меньшая потеря информации в случае фитирования генераторных данных.

Требует рассмотрения

Артём выдвинул объяснение почему \bar{n} так мало осциллирует на траекториях частиц: поскольку вычисления происходят в системе координат, связанной с пучком, все возмущения, вызванные бетатроном движением, влияют и на спин-вектор, и на импульс частицы. Таким образом, поворот \bar{n} компенсируется поворотом системы координат, и поэтому отклонения компонент оси прецессии от референсных значений малы. Компенсационный эффект вызван малостью G-фактора дейтрона; он предлагает проверить гипотезу путём трекинга протона: G-фактор протона значительно больше, а значит спин-вектор будет отклоняться сильнее, при том же отклонении импульса, а значит и амплитуда колебаний \bar{n} должна возрасти.

Я попробовал искусственно увеличить амплитуду колебаний \bar{n}_x до 10^{-4} (как следует из параболы зависимости компоненты от одной только вертикальной координаты), и посчитать невязку данных этого модифицированного генератора с данными идеального генератора с постоянными (ν_s, \bar{n}) , и эта невязка на глаз выглядит достаточно похожей на невязку трекинговых данных с идеальным генератором.

В любом случае, амплитуда невязки достаточно мала, и хотя и ухудшает точность оценки частоты, судя по всему не создаёт её систематического сдвига сверх значения статистической погрешности. В большей степени, на ошибку оценки частоты влияют ошибки оценки начальной фазы колебаний (коэффициент корреляции оценок там 85%, судя, а амплитуды с частотой менее 10% — **стоит узнать** точнее на сколько менее.)

Заключение

Вопрос о влиянии бетатронах колебаний на ЭДМ-статистику следует рассматривать ввиду трёх обстоятельств (я предполагаю здесь, что осциллирующая на уровне 10^{-4} невязка трекинговых данных с идеальным генератором есть следствие бетатронных колебаний, как следует из гипотезы Артёма):

1. **Малость амплитуды колебаний.** Колебания амплитуды генератора происходят на уровне 10^{-4} ; если при этом погрешность измерения поляризации составляет проценты, эти колебания скорее всего не будут статистически значимыми. (Это можно проверить, сгенерировав синусоидальную серию с амплитудой 10^{-4} , добавив к ней случайную, нормально-распределённую ошибку со стандартным отклонением 10^{-2} , и исследовать автокорреляционный график, и т.п. Я такое уже делал, случайно, и видел, что графики теряют чувствительность к систематическим колебаниям.)

2. **Коэффициент корреляции оценок** амплитуды и частоты колебаний данных. На сколько я понимаю, он очень незначителен (нужно посчитать), в отличие от коэффициента корреляции оценок частоты и фазы (тот 85%). Это нужно уточнить, но как я понимаю, этот коэффициент связывает ошибку оценки амплитуды, с индуцированной ею ошибкой оценки частоты. То есть, если коэффициент мал, то ошибка оценки амплитуды не ведёт к ошибке оценки частоты. Исходя из этого можно предположить, что если мы не учитываем колебания амплитуды в нашей модели, то это введёт систематическую ошибку оценки амплитуды, но не частоты. Но нужно уточнить действительно ли неучёт колебаний амплитуды в первую очередь отражается именно на оценке амплитуды, а уже затем, постольку-поскольку, на оценке частоты.
3. **Эта ошибка контролируема.** Используя Spin Wheel (внешний) можно минимизировать колебания оси стабильного спина сколько угодно.

То есть, рассматриваемый эффект создаёт систематическую ошибку, которая: 1) пренебрежимо мала, 2) не той величины, которую мы изучаем (в первом приближении), 3) хорошо контролируется.