Тема 2. Операционное исчисление.
Преобразование Лапласа.

16 октября 2020 г.

Оглавление

0.1 Определение 1
0.2 Свойства [1] 2
0.3 Свёртка (convolution) 5
0.4 Связь с преобразованием Фурье 7
0.5 Задачи 8
0.5.1 Дифференциальные уравнения 8
0.5.2 Интегральные уравнения 10

0.1 Определение

Преобразованием Лапласа называется отображение вида [1]

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(p),$$

где $f(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p = s + i\sigma \in \mathbb{C}$, такое, что

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv TF[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t.$$

$f(t)$ называется ***оригиналом***, а $F(p)$ его ***изображением по Лапласу***. Пишут:

$$f(t) \risingdotseq F(p), \text{ и } F(p) \fallingdotseq f(t).$$

Ограничения на функцию $f(t)$:

1. $\forall t < 0 f(t) \equiv 0$. Это условие всегда можно полагать верным при решении задач Коши.

2. $\forall t > 0$, $f(t)$ на каждом конечном сегменте области определения имеет только конечное число разрывов первого рода, а в остальных точках удовлетворяет условию Липшица-Гельднера:

$$\exists \tau_0 > 0 \forall \tau \leq \tau_0 |f(t+\tau) - f(t)| \leq A|\tau|^{\alpha}.$$

Любая непрерывно-дифференцируемая функция удовлетворяет этому условию.

3. $f(t)$ растёт не быстрее показательной функции:

$$|f(t)| < Me^{p_0 t}.$$

Это всегда справедливо для физических процессов.

Обратное преобразование

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p,\ a \in \mathbb{R}.$$

0.2 Свойства [1]

1. Линейность.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,[\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)]$$

Следствие линейности интеграла.

2. Теорема подобия.

$$\forall \alpha > 0 \left[f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\right].$$

(Заменить $\alpha t = \tau$ в интеграле.)

3. Теорема запаздывания.

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p).$$

Поскольку $f(t-\tau) \equiv 0$, $\int_0^\infty \to \int_\tau^\infty$; $\tau < t < \infty$, $0 < \underbrace{t-\tau}_{\theta} < \infty$, $t = \theta + \tau$.

4. Теорема смещения.
$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0).$$
5. Дифференцирование оригинала. $f \in C^n$
$$\begin{aligned} f'(t) &\risingdotseq pF(p) - f(+0), \\ &\dots \\ f^{(n)}(t) &\risingdotseq p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(+0). \end{aligned}$$
6. Дифференцирование изображения.
$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-t)^n f(t).$$
7. Интегрирование оригинала.
$$\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau \risingdotseq \frac{1}{p} F(p).$$
8. Интегрирование изображения.
$$\int_p^\infty F(q) \mathrm{d}q \fallingdotseq \frac{1}{t} f(t).$$
9. Предельные теоремы.
$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0), \tag{1}$$
$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty) \equiv \lim_{t\to\infty} f(t). \tag{2}$$

Замечание 1 (Первая предельная теорема)**.** Уравнение (1) следует из того, что
$$\forall g \lim_{p\to\infty} \mathcal{L}[g](p) = 0.$$
Выбрав $g(t) = f'(t)$, и используя свойство 5, получим:
$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} \mathcal{L}[f'](p) &= \lim_{p\to\infty} [pF(p) - f(0)] \\ &= \lim_{p\to\infty} [pF(p)] - f(0) \\ &= 0, \\ \Rightarrow \lim_{p\to\infty} pF(p) &= f(0). \end{aligned}$$

Замечание 2 (Вторая предельная теорема)**.** Уравнение (2) можно получить из того же свойства 5.

Вообще, обращаю ваше внимание на то, что этот предел не всегда существует. Выше [1] я сказал, что оригинал растёт не быстрее показательной функции $h(t) = Me^{p_0 t}$, где $p_0 \geq 0$. Соответственно, не всегда существует $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) \equiv f(\infty) < \infty$.

Более того, сам образ $\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(p)$ определён только в полуплоскости Re $p > p_0$; ввиду чего, если $p_0 > 0$ – предел $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)$ невозможно взять ввиду того, что при приближении к нулю, $F(p)$ перестаёт существовать.

Если же все условия соблюдены – то есть, $|f(t)| < M$, и значит $p_0 = 0$, то тогда

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} \mathcal{L}[f'](p) &= \lim_{p\to 0} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f'(t)\mathrm{d}t \\
&= f(\infty) - f(0) \\
&= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0); \\
f(\infty) - \cancel{f(0)} &= \lim_{p\to 0} pF(p) - \cancel{f(0)};
\end{aligned}$$

и получаем

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty).$$

Теорема 1 (Первая теорема разложения)**.** Если функция $F(p)$ – аналитична [2] в окрестности $|p| > R$ бесконечно удалённой точки, и имеет в ней разложение в ряд Лорана:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

то её оригинал:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

[1] Свойство 3 оригинала преобразования.

[2] В окрестности любой точки своей области определения представима сходящимся степенным рядом.

Замечание 3. Существует вторая теорема разложения, в [1, стр. 27] можно её почитать. Также, на 26-й странице пример применения первой теоремы разложения при решении задачи.

Теорема 2 (Планшереля)**.** Пусть $f_1, f_2 \in L^2$ (квадратично-интегрируемые функции), $g_1(u), g_2(u)$ – их преобразования Фурье. Тогда верно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)g_2(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(-x)\mathrm{d}x.$$

В упрощённой форме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2\mathrm{d}w = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t;$$

физическая интерпретация [3, после ф-лы 8]: ***энергия колебательного сигнала равна сумме энергий его гармонических компонент.***

0.3 Свёртка (convolution)

Свёрткой называется:

$$\begin{aligned} f(t) \otimes g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= g(t) \otimes f(t). \qquad \text{(коммутативность)} \end{aligned}$$

Замечание 4. Характерным для свёртки является наличие аргумента $t-\tau$ у одной из функций (границы интеграла могут быть и другие).

Теорема 3 (о свёртке)**.**

$$f(t) \otimes g(t) \risingdotseq F(p) \cdot G(p).$$

Рис. 1: Линейный четырёхполюсник с переходной характеристикой $h(t)$.

Интеграл Дюамеля В радиотехнике (см. Рис. 1)

$$V_2(t) = \int_0^t h(t-\tau)V_1(\tau)\mathrm{d}\tau = h(t) \otimes V_1(t).$$

Где удобно использовать операционное исчисление? Для решения электротехнических задач. В цепочке из Рис. 2:

$$u = Ri, \qquad \text{(R-элемент)}$$
$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{(L-элемент)}$$
$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{(C-элемент)}$$

Можно было бы записать:

$$U_1 = U_R + U_L + \underbrace{U_C}_{U_2},$$
$$U_1 = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t.$$

А можно представить L-/C-элементы как реактивное сопротивление,

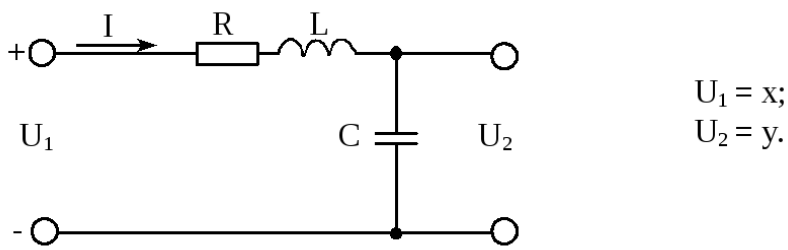

Рис. 2: RLC-четырёхполюсник.

и использовать делитель напряжения:

$$U_2(p) = K(p)U_1(p),$$
$$K(p) = \frac{1/pC}{pL + R + 1/pC},$$

$K(p)$ – коэффициент передачи.

0.4 Связь с преобразованием Фурье

Фурье-образ (или частотный спектр функции)

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Условия существования преобразования Фурье [2]

1. $f(t)$ однозначная функция, с конечным числом минимумов, максимумов, и разрывов;

2. Условие абсолютной интегрируемости: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$.

Пример. $\int_{-\infty}^{+\infty} |1(t)|\mathrm{d}t \to \infty$, поэтому у этой функции нет Фурье-образа.

Что можно сделать в этом случае?

Домножить $f(t)$ на e^{-st}, чтобы интеграл получившегося произведения сходился. Но если так сделать, получим

$$\begin{aligned}
F(s, i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t,\ p = s + i\omega \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(-t)e^{-p(-t)}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}[f(-t); -p] + \mathcal{L}[f(t); p] = \mathcal{L}_B[f(t)].
\end{aligned}$$

Последнее равенство – двустороннее преобразование Лапласа; таким образом, непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа.

0.5 Задачи

0.5.1 Дифференциальные уравнения

В задачах по теме присутствуют задачи Коши, которые надо решить используя операционное исчисление. Как это делать объяснено в [4]. В целом, ничего сложного, надо просто:

1. Используя теорему о дифференцировании оригинала 5 (и таблицу преобразований для элементарных функций) записать алгебраическое уравнение для изображений. На этом шаге используется тот факт, что нам даны начальные условия – это позволяет исключить символ $f^{(k)}(+0)$.

2. Выразить образ искомой функции в виде дроби. В числителе и знаменателе дроби – многочлены от p, и знаменатель хорошо бы разложить на множители; это упростит следующий шаг.

3. Теперь, чтобы произвести обратное преобразование, нужно разложить получившуюся дробь в сумму простых дробей. Для этого используется метод неопределённых коэффициентов. [5]

4. Когда решение для образа функции представлено суммой простых дробей, производим обратное преобразование Лапласа.

Пример 1 [4]

Решить задачу Коши.

$$\begin{cases} x'' - 3x' - 4x = 4t - 5, \\ x(0) = -1, \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

Отображения по Лапласу

$$\begin{aligned} x(t) &\risingdotseq X(p), \\ x'(t) &\risingdotseq pX(p) - x(+0) = pX(p) + 1, \\ x''(t) &\risingdotseq p^2X(p) - px(+0) - x'(+0) = p^2X(p) + p - 2, \\ t &\risingdotseq \frac{1}{p^2}, \\ 1 &\risingdotseq \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение по Лапласу левой и правой частей дифференциального уравнения:

$$p^2X(p) - 3pX(p) - 4X(p) + p - 5 = \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}.$$

Разрешаем уравнение относительно искомой функции $X(p)$:

$$X(p)\underbrace{\left[p^2 - 3p - 4\right]}_{(p+1)(p-4)} = \frac{4 - 5p + 5p^2 - p^3}{p^2},$$

$$X(p) = \frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{p^2(p+1)(p-4)}.$$

Теперь нам надо разложить получившуюся дробь на сумму простых дробей. Это делается ***методом неопределённых коэффициентов*** [5]. Разложим нашу дробь:

$$\frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{p^2(p+1)(p-4)} = \underbrace{\frac{A}{p}}_{\text{Achtung!}} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-4}.$$

Achtung!: отмечу первое слагаемое в правой части: A/p. Оно появляется потому, что в знаменателе левой части p^2 – кратный множитель. (См. **Пример 2** в [5].)

После отыскания коэффициентов A, B, C, D получаем решение для изображения

$$X(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - 3 \cdot \frac{1}{p+1}.$$

И после обратного преобразования:

$$x(t) = 2 - t - 3e^{-t}.$$

0.5.2 Интегральные уравнения

Последняя задача – интегральное уравнение. Если быть точным, перед нами уравнение Вольтерра второго рода. [6, см. ф-лу 8.11] Там можно заметить интеграл типа "свёртки" $\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$ (аргумент одной из функций $t - \tau$).

Чтобы его решить, надо применить теорему 3 (о свёртке), получить алгебраическое уравнение для образов, разрешить его относительно образа искомой функции, по возможности упростить получившуюся дробь, и произвести обратное преобразование Лапласа.

Пример

Решить уравнение

$$x(t) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^t \underbrace{(t-\tau)^3}_{r(t-\tau)} x(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

Сделаем преобразование Лапласа уравнения (3):

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{6}R(p)X(p),$$

$$t^3 \risingdotseq \frac{6}{p^4},$$

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{6}\frac{6}{p^4}X(p),$$

$$X(p)\left[1 - \frac{1}{p^4}\right] = \frac{1}{p},$$

$$X(p) = \frac{p^3}{p^4 - 1} = \frac{p^3}{(p^2+1)(p-1)(p+1)}.$$

Воспользовавшись сервисом `https://math.semestr.ru/tau/laplas.php`, получим обратное преобразование:

$$x(t) = \frac{e^t}{4} + \frac{\cos t}{2} + \frac{e^{-t}}{4}.$$

Литература

[1] А.А. Дубков, Н.В. Агудов. Преобразование Лапласа. Учебно-методическое пособие. http://www.lib.unn.ru/students/src/Laplace%20transform.pdf

[2] Преобразование Фурье. http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/2.html

[3] Фурье преобразование. https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/117/965.htm

[4] Как решить дифференциальное уравнение методом операционного исчисления? http://mathprofi.ru/reshenie_diffurov_metodom_operacionnogo_ischislenija.html

[5] Интегрирование дробно-рациональной функции. Метод неопределенных коэффициентов http://mathprofi.ru/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii.html

[6] Интегральные урвавнения типа “свёртки.” https://studfiles.net/preview/6312517/page:9/

[7] Таблица оригиналов и изображений (преобразование Лапласа). http://mathprofi.ru/tablica_originalov_j_izobrazhenij.pdf