Тема 3. Бисферические, тороидальные, инверсные сферические, и иные ортогональные системы координат.

3 октября 2019 г.

Эту тему мы изучаем с целью упрощения решения уравнения Пуассона $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$, возникающего в электростатике – задача поиска распределения потенциала и, соответственно, поля, в резонаторе.

Оператор набла $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

- $\nabla f \equiv \text{grad } f = \mathbf{g}$ (градиент)
- $\nabla \cdot \mathbf{g} \equiv \text{div } \mathbf{g} = f_1$ (дивергенция)
- $\nabla \times \mathbf{g} \equiv \text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{g}_1$ (ротор)

Оператор Лапласа Возьмём одно из уравнений Максвелла для электрического поля:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0,$$

и представим $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$, где ϕ – потенциал.

Тогда

$$\text{div grad } \phi \equiv \nabla^2\phi \equiv \Delta\phi = \rho/\epsilon_0.$$

Δ называется ***оператором Лапласа***:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

0.1 Ортогональные криволинейные координаты

Любые три параметра (q_1, q_2, q_3), однозначно определяющие положение точки в пространстве, могут быть выбраны в качестве координат этой точки. Такие координаты называются ***независимыми обобщёнными координатами***. [1, стр. 5] Например, на Рисунке 1 изображена сферическая система координат, в которой положение задаётся двумя углами и длиной радиус-вектора.

Сферические координаты связаны с Декартовыми формулами:

$$\begin{cases} x &= r\sin\Theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\Theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\Theta. \end{cases} \tag{1}$$

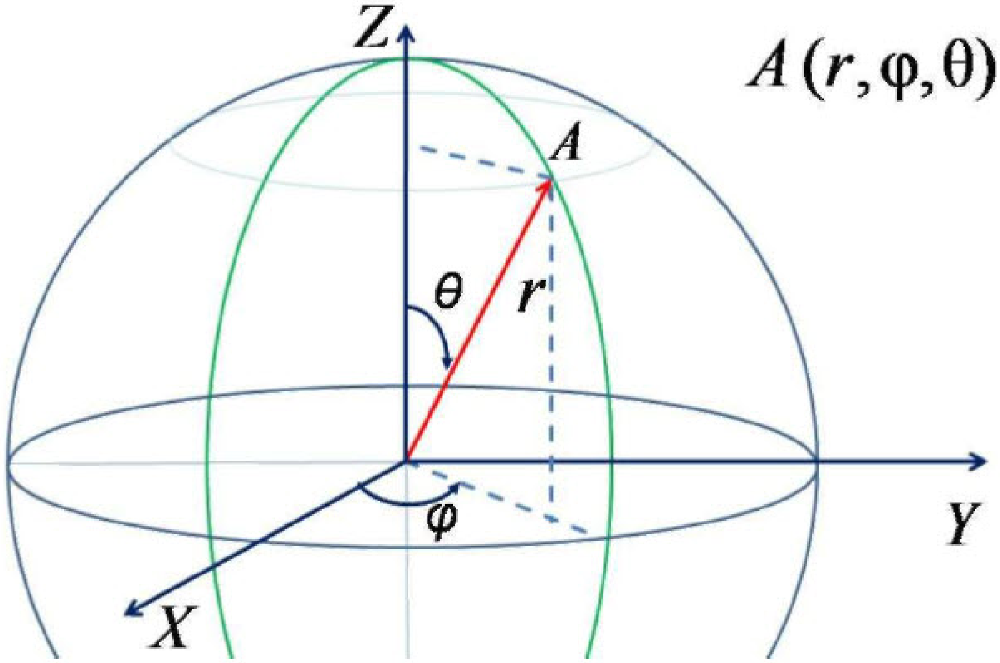

Рис. 1: Сферическая система координат.

В общем виде, уравнение (1) можно записать как

$$\begin{cases} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему уравнений (2) можно найти обратные соотношения, выражающие криволинейные точки в функции от декартовых координат. [1, стр. 5]

0.2 Коэффициенты Ламэ

Запишем бесконечно малый вектор $\mathrm{d}\mathbf{s}$ в декартовых и обобщённых координатах:

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{i}\mathrm{d}x + \mathbf{j}\mathrm{d}y + \mathbf{k}\mathrm{d}z, \tag{3a}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{e}_1\mathrm{d}q_1 + \mathbf{e}_2\mathrm{d}q_2 + \mathbf{e}_3\mathrm{d}q_3. \tag{3b}$$

Записав полные дифференциалы функций (2), и приравняв правые части (3a) и (3b), получим:

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{i}\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \mathbf{j}\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \mathbf{k}\frac{\partial z}{\partial q_\alpha},\ \alpha \in \{1, 2, 3\}.$$

Норма $||\mathbf{e}_i|| = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$ называется ***коэффициентом Ламэ*** H_i для координаты q_i в точке M:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{4}$$

Дифференциал длины дуги Запишем длину дуги кривой:

$$\mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = ||\mathbf{e}_1||\mathrm{d}q_1^2 + ||\mathbf{e}_2||\mathrm{d}q_2^2 + ||\mathbf{e}_3||\mathrm{d}q_3^2.$$

Отсюда следует, что коэффициент Ламе можно выразить как частную производную длины дуги по соответствующей обобщённой координате:

$$H_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right|. \tag{5}$$

Ожидаемо, выражение получается то же, что и в (4).

Элемент объёма

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \det J \cdot \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3 \\ &= H_1H_2H_3 \cdot \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

якобиан. [3]

Лапласиан

$$\Delta f(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right] \tag{7}$$

0.3 Различные системы координат

Выражения для коэффициентов Ламэ и Лапласиана легко гуглятся; в крайнем случае, пользуемся уравнениями (4) и (7). Я громоздкие формулы спрашивать не буду. Поэтому акцент сделаем на генеологии систем координат.

В принципе, у нас любая криволинейная система координат задаётся семействами кривых, которые пересекаются под прямыми углами в каждой точке.

0.3.1 Эллиптическая → эллипсоидальная

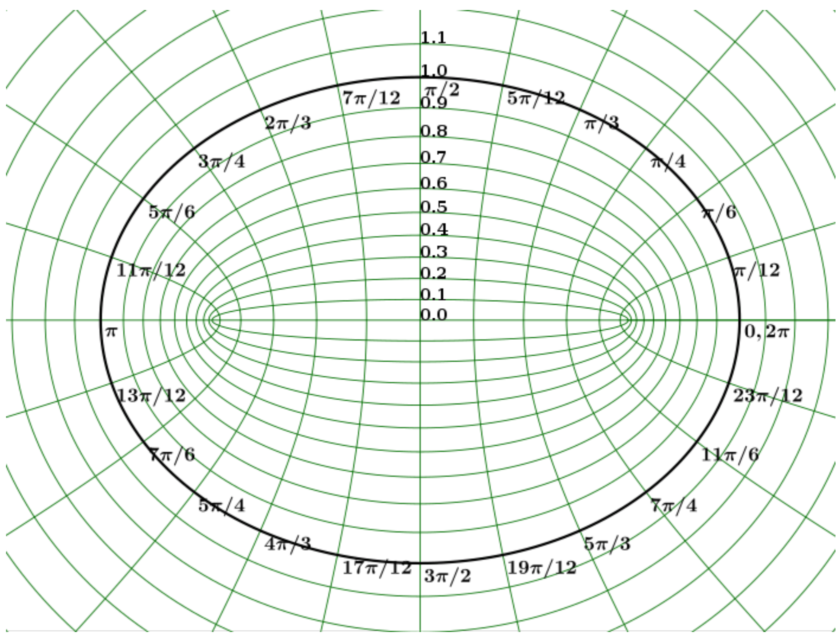

Рис. 2: Эллиптическая система координат состоит из софокусных эллипсов и гиперболоидов.

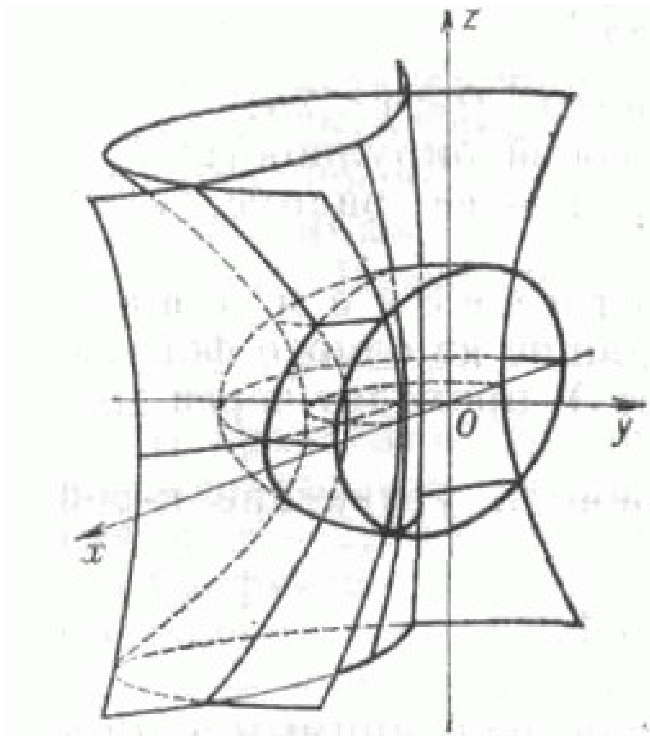

Рис. 3: Эллипсоидальная система: эллипсоид + одно- и двуполостные гиперболоиды.

0.3.2 Биполярная и бисферическая

0.3.3 Тороидальная КС

0.4 Задачи

#1 ***Вывести формулы преобразования от эллипсоидальных координат к декартовым.***

Эллипсоидальная СК задаётся эллипсоидом и двумя гиперболоидами (одно- и двух-полостным) [4], т.е. системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} & = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} & = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\zeta} + \frac{y^2}{b^2+\zeta} + \frac{z^2}{c^2+\zeta} & = 1, \end{cases}$$

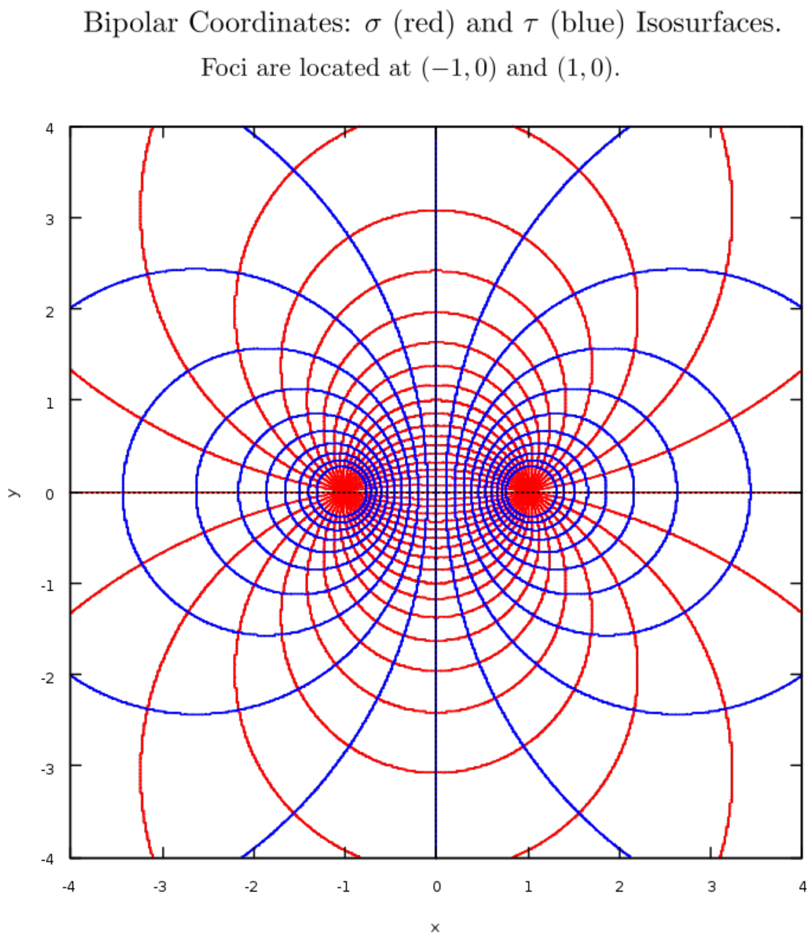

Рис. 4: Биполярная КС состоит из кругов Апполония.

где $-c^2 < \xi < \infty$, $-b^2 < \eta < -c^2$, $-a^2 < \zeta < -b^2$.

Разрешая систему относительно x^2, y^2, z^2 получаем что надо.

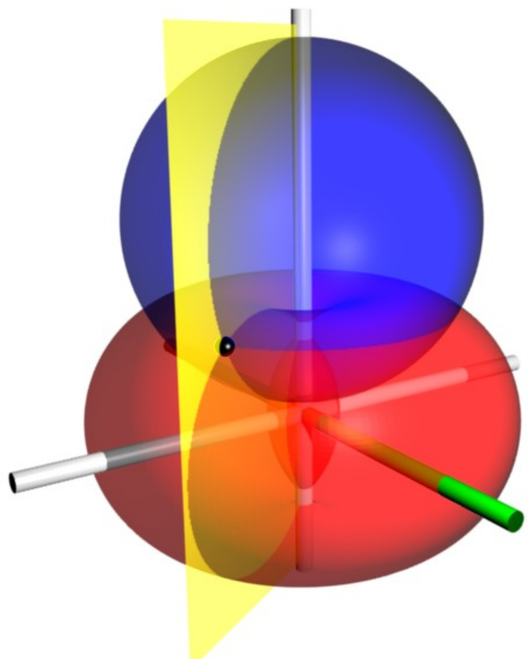

Рис. 5: Бисферическая КС – тело вращения биполярной КС вокруг оси, ***проходящей через*** фокусы.

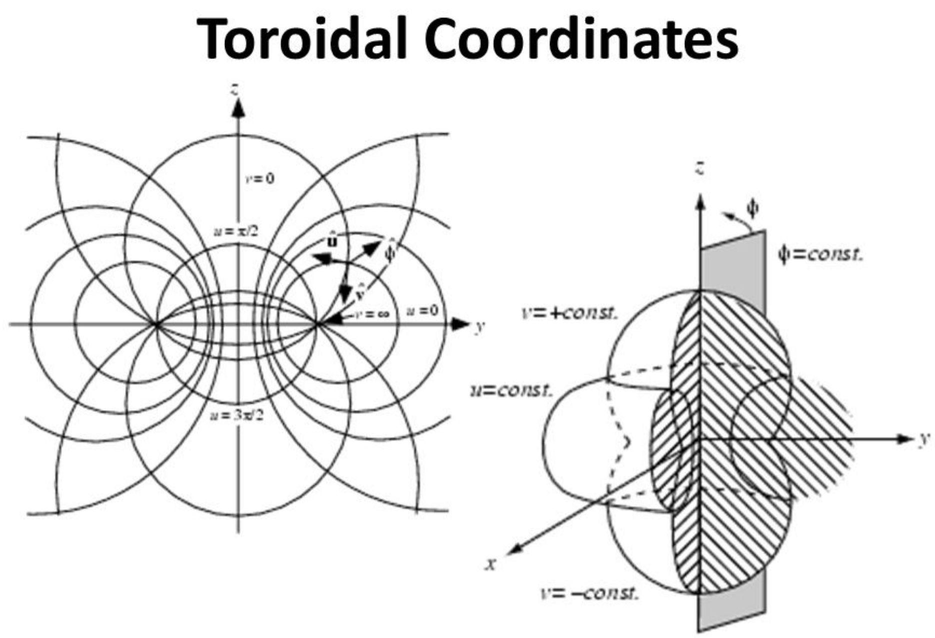

Рис. 6: Получается из биполярной при вращении последней вокруг оси, ***разделяющей*** фокусы.

Литература

[1] Г.В. Алферов. Механика в криволинейных координатах. Пособие для подготовки к коллоквиуму. http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/alferov/files/krivol_coordinaty.pdf

[2] В.В. Конев. Скалярные и векторные поля. http://portal.tpu.ru:7777/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/38.htm

[3] Wolfram. Jacobian. http://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html

[4] Wolfram. Confocal Ellipsoidal Coordinates. http://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipsoidalCoordinates.html