

Тема 2. Операционное исчисление.
Преобразование Лапласа.

25 сентября 2019 г.

Преобразованием Лапласа называется отображение вида [1]

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(p),$$

где $f(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p = s + i\sigma \in \mathbb{C}$, такое, что

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv TF[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

$f(t)$ называется *оригиналом*, а $F(p)$ его *изображением по Лапласу*. Пишут:

$$f(t) \doteq F(p), \text{ и } F(p) \doteq f(t).$$

Ограничения на функцию $f(t)$:

1. $\forall t < 0 f(t) \equiv 0$. Это условие всегда можно полагать верным при решении задач Коши.
2. $\forall t > 0$, $f(t)$ на каждом конечном сегменте области определения имеет только конечное число разрывов первого рода, а в остальных точках удовлетворяет условию Липшица-Гельднера:

$$\exists \tau_0 > 0 \forall \tau \leq \tau_0 |f(t + \tau) - f(t)| \leq A|\tau|^\alpha.$$

Любая непрерывно-дифференцируемая функция удовлетворяет этому условию.

3. $f(t)$ растёт не быстрее показательной функции:

$$|f(t)| < Me^{p_0 t}.$$

Это всегда справедливо для физических процессов.

Обратное преобразование

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad a \in \mathbb{R}.$$

0.1 Свойства [1]

1. Линейность.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} [\alpha f(t) \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)]$$

Следствие линейности интеграла.

2. Теорема подобия.

$$\forall \alpha > 0 \left[f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \right].$$

(Заменить $\alpha t = \tau$ в интеграле.)

3. Теорема запаздывания.

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

Поскольку $f(t - \tau) \equiv 0$, $\int_0^\infty \rightarrow \int_\tau^\infty$; $\tau < t < \infty$, $0 < \underbrace{t - \tau}_\theta < \infty$,

$$t = \theta + \tau.$$

4. Теорема смещения.

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0).$$

5. Дифференцирование оригинала. $f \in C^n$

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0),$$

...

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(+0).$$

6. Дифференцирование изображения.

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t).$$

7. Интегрирование оригинала.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

8. Интегрирование изображения.

$$\int_p^\infty F(q) dq \doteq \frac{1}{t} f(t).$$

9. Предельные теоремы.

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) &= f(0), \\ \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) &= f(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).\end{aligned}$$

0.1.1 Свёртка

Свёрткой называется:

$$\begin{aligned}f(t) \otimes g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Теорема о свёртке:

$$f(t) \otimes g(t) \doteq F(p) \cdot G(p).$$

Интеграл Дюамеля В радиотехнике (см. Рис. 1)

$$V_2(t) = \int_0^t h(t - \tau) V_1(\tau) d\tau = h(t) \otimes V_1(t).$$

Где удобно использовать операционное исчисление? Для решения электротехнических задач. В цепочке из Рис. 2:

$$u = Ri, \quad (\text{R-элемент})$$

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad (\text{L-элемент})$$

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (\text{C-элемент})$$

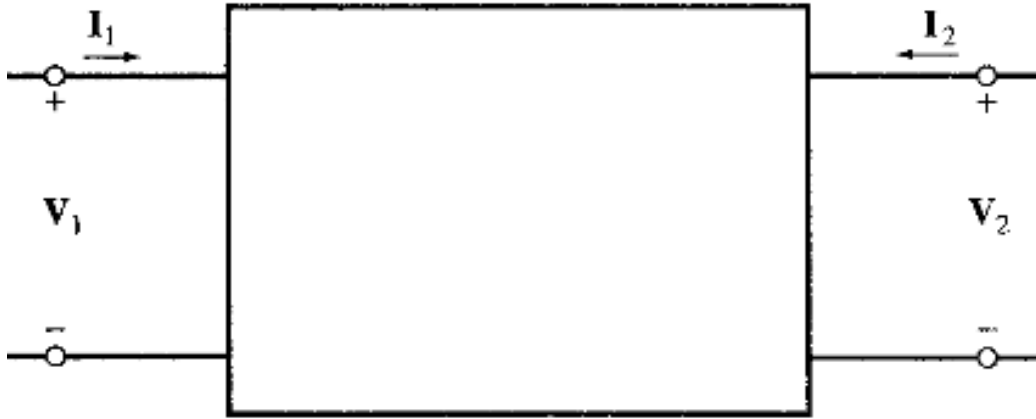


Рис. 1: Лине́йный четырёхполю́сник с переходной характеристикой $h(t)$.

Можно было бы записать:

$$U_1 = U_R + U_L + \underbrace{U_C}_{U_2},$$

$$U_1 = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

А можно представить L-/C-элементы как реактивное сопротивление, и использовать делитель напряжения:

$$U_2(p) = K(p)U_1(p),$$

$$K(p) = \frac{1/pC}{pL + R + 1/pC},$$

$K(p)$ – коэффициент передачи.

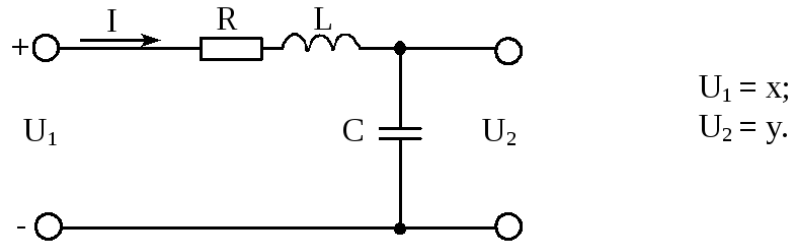


Рис. 2: RLC-четырёхполюсник.

0.2 Первая теорема разложения

Если функция $F(p)$ – аналитична¹ в окрестности $|p| > R$ бесконечно удалённой точки, и имеет в ней разложение в ряд Лорана:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

то её оригинал:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

Существует вторая, можно её почитать в [1, стр. 27]. На 26-й странице пример применения первой теоремы разложения при решении задачи.

0.3 Связь с преобразованием Фурье

Фурье-образ (или частотный спектр функции)

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

¹В окрестности любой точки своей области определения представима сходящимся степенным рядом.

Условия существования преобразования Фурье [2]

1. $f(t)$ однозначная функция, с конечным числом минимумов, максимумов, и разрывов;
2. Условие абсолютной интегрируемости: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$.

Пример. $\int_{-\infty}^{+\infty} |1(t)| dt \rightarrow \infty$, поэтому у этой функции нет Фурье-образа. Что можно сделать в этом случае?

Домножить $f(t)$ на e^{-st} , чтобы интеграл получившегося произведения сошелся. Но если так сделать, получим

$$\begin{aligned} F(s, i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} e^{-i\omega t} dt, \quad p = s + i\omega \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(-t) e^{-p(-t)} dt + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \mathcal{L}[f(-t); -p] + \mathcal{L}[f(t); p] = \mathcal{L}_B[f(t)]. \end{aligned}$$

Последнее равенство – двустороннее преобразование Лапласа; таким образом, непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа.

0.4 Теорема Планшереля

Пусть $f_1, f_2 \in L^2$ (квадратично-интегрируемые функции), $g_1(u), g_2(u)$ – их преобразования Фурье. Тогда верно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) g_2(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(-x) dx.$$

В упрощённой форме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2 dw = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt;$$

физическая интерпретация [3, после ф-лы 8]: *энергия колебательного сигнала равна сумме энергий его гармонических компонент.*

0.5 Задачи

0.5.1 Дифференциальные уравнения

В задачах по теме присутствуют задачи Коши, которые надо решить используя операционное исчисление. Как это делать объяснено в [4]. В целом, ничего сложного, надо просто:

1. Используя теорему о дифференцировании оригинала 5 (и таблицу преобразований для элементарных функций) записать алгебраическое уравнение для изображений. На этом шаге используется тот факт, что нам даны начальные условия – это позволяет исключить символ $f^{(k)}(+0)$.
2. Выразить образ искомой функции в виде дроби. В числителе и знаменателе дроби – многочлены от p , и знаменатель хорошо бы разложить на множители; это упростит следующий шаг.
3. Теперь, чтобы произвести обратное преобразование, нужно разложить получившуюся дробь в сумму простых дробей. Для этого используется метод неопределённых коэффициентов. [5]
4. Когда решение для образа функции представлено суммой простых дробей, производим обратное преобразование Лапласа.

0.5.2 Интегральные уравнения

Последняя задача – интегральное уравнение. Там можно заметить интеграл типа “свёртки” $\int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau$. Если быть точным, перед нами уравнение Вольтерра второго рода. [6, см. ф-лу 8.11]

Литература

- [1] А.А. Дубков, Н.В. Агудов. Преобразование Лапласа. Учебно-методическое пособие. <http://www.lib.unn.ru/students/src/Laplace%20transform.pdf>
- [2] Преобразование Фурье. <http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/2.html>
- [3] Фурье преобразование. <https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/117/965.htm>
- [4] Как решить дифференциальное уравнение методом операционного исчисления? http://mathprofi.ru/reshenie_diffurov_metodom_operacionnogo_ischislenija.html
- [5] Интегрирование дробно-рациональной функции. Метод неопределенных коэффициентов http://mathprofi.ru/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii.html
- [6] Интегральные уравнения типа “свёртки.” <https://studfiles.net/preview/6312517/page:9/>