Тема 1. Дифференциальные уравнения.

17 сентября 2020 г.

УЧЕБНИК ДНЯ: А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. `http://kvm.gubkin.ru/pub/uok/FilippovDU.pdf`

0.1 Мотивация

Зачем вообще мы изучаем решение дифференциальных уравнений?

Все темы этого курса строятся вокруг проблемы решения уравнения Лапласа. Вот это уравнение:

$$\Delta\phi = 0. \tag{1}$$

Замечание 1. Это уравнение описывает распределение потенциала в области с заданными граничными условиями при отсутствии заряда в этой области. Если бы заряд был, уравнение Лапласа выглядело бы как

$$\Delta\phi \equiv \nabla^2\phi = \rho,$$

и называлось бы уравнением Пуассона. Учитывая, что напряжённость электрического поля $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$, уравнение Пуассона – это одно из уравнений Максвелла. □

Уравнение (1) решается (при благоприятном стечении обстоятельств[1]) методом разделения переменных. При этом возникает так называемая задача Штурма-Лиувилля (Ш-Л). Решение задачи Ш-Л – это решение системы **дифференциальных уравнений**. Вот для этого и существует Тема 1.

0.2 Основные понятия

Неоднородным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = g(x). \tag{2}$$

В уравнении выше, x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция.

[1]То есть, когда геометрия области позволяет это сделать.

Если уравнение (2) записывается в виде

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = g(x), \tag{3}$$

то оно называется ***линейным***.[2]

Если $\forall x \Big[g(x) = 0 \Big]$ уравнение (2) становится ***однородным***:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{4}$$

Замечание 2 (Формы записи)**.** При записи дифференциального уравнения $F(x, y, y') = g(x)$ в форме

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

оно называется ***разрешённым*** относительно производной; а при записи в форме

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = f(x, y).$$

уравнением, записанным в ***полных дифференциалах***.

Определение 1 (Задача Коши)**.** Задачей Коши называется система

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0; \end{cases} \tag{5}$$

т.е. дифференциальное уравнение + начальные условия.[3] Решить задачу Коши значит отыскать решение дифференциального уравнения на данной области определения $X \ni x$, удовлетворяющее заданному начальному условию.

0.3 Что важно понимать о *решении* дифференциального уравнения?

0.3.1 Различают *общее* и *частное* решения

Частное решение – это любая дифференцируемая на области определения функция $y = \phi(x)$, удовлетворяющая задаче Коши. Общее решение

[2]При этом, коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ в общем случае могут быть функциями.

[3]Во множественном, потому что количество начальных условий необходимых для решения уравнения порядка n равно $n - 1$: $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$.

– это семейство всех таких функций: $y = \phi(x, C)$, где C – символ ***произвольной*** постоянной.

Замечание 3 (Откуда взялась константа)**.** В конечном итоге, чтобы найти решение y дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, нужно проинтегрировать его производную:

$$y = \int \mathrm{d}y = \int f(x, y)\mathrm{d}x.$$

Как известно, при интегрировании возникает константа, поскольку производная константы равна нулю, а значит для любого дифференциала верно: $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(y + C)$. □

0.3.2 Общее решение *линейного неоднородного* уравнения – это сумма...

... ***общего*** решения соответствующего ***однородного*** уравнения, и ***частного*** решения ***неоднородного***:

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}. \tag{6}$$

0.4 Типы уравнений и методы их решения

Мы рассмотрим следующие типы уравнений:

1. с разделяющимися переменными;

2. однородные;

3. в полных дифференциалах.

0.4.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнения $y' = f(x, y)$, в которых правую часть можно представить произведением функций одной переменной:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \phi(x)\psi(y).$$

Решаются элементарно: нужно перебросить всё, что с x в одну сторону от равно, всё, что с y – в другую. Получим [1]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \phi(x)\mathrm{d}x.$$

Интегрируем; записываем ответ.

Пример. (Филиппов 51).

$$xy\mathrm{d}x + (x+1)\mathrm{d}y = 0.$$

Во-первых, поделим уравнение на $y(x+1)$:

$$\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Сделаем замену $t = x+1$; поскольку $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(x+1) = \mathrm{d}x$, и $\mathrm{d}y/y = \mathrm{d}\ln y$, получим:

$$\frac{t-1}{t}\mathrm{d}t = 1\mathrm{d}t - \mathrm{d}\ln t = -\mathrm{d}\ln y.$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}t - \int \mathrm{d}\ln t &= -\int \mathrm{d}\ln y, \\ t + C - \ln t &= -\ln y, \\ t + C &= \ln t - \ln y = \ln(t/y), \end{aligned}$$

домножим обе части на -1:

$$\begin{aligned} -t + \tilde{C} &= \ln(y/t), \\ y/t &= e^{-t+\tilde{C}} = e^{-x-1+\tilde{C}} = \hat{C}e^{-x}, \\ y &= \hat{C}(x+1)e^{-x}. \quad \square \end{aligned}$$

Литература

[1] С.Н. Киясов, В.В. Шурыгин. Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач. https://kpfu.ru/docs/F931321200/kiyasov_shurygin.pdf

[2] В.М. Ипатова, О.А. Пыркова, В.Н. Седов. Дифференциальные уравнения. Методы решений. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/636/f_5ztibp-arphdx5wxdp.pdf