Тема 4. Математические модели электродинамики.

8 октября 2019 г.

УЧЕБНИК ДНЯ: А.Н. Тихонов, А.А Самарский. Уравнения математической физики. `http://old.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html`

Эта тема посвящена поиску распределения потенциала в пространстве, то есть решению краевой задачи для уравнения Лапласа. (То есть в учебнике Тихонова нас интересует глава 4.)

Типы краевых задач Любая краевая задача – это решение дифференциального уравнения в частных производных (урмата) $Lu = f(x)$ в некоторой области Ω (внутренняя задача), или вне её (внешняя задача), при заданных на границе области (обозначается как $\partial\Omega$) ***граничных условиях***:

Дирихле граничные условия налагаются на значения ***самой*** функции:

$$u|_{\partial\Omega} = g(x);$$

Неймана граничные условия налагаются на ***производную*** функции:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = g(x),$$

$\mathbf{n}$ – нормаль к $\partial\Omega$;

Ньютона смесь первых двух:

$$\left.\left(a \cdot u + b \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\right|_{\partial\Omega} = g(x).$$

0.1 Потенциалы простого и двойного слоя

Пусть $x \in \mathbb{R}^3$. Функция $\Phi(x) = |x|^{-1}$ является ***фундаментальным решением*** уравнения Лапласа (в пространстве). [1, стр. 282]

Пусть нам задана некоторая функция $\rho(x)$.

Объёмный потенциал $\rho : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$u(x) = \int_\Omega \rho(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}V(y) \tag{1}$$

Потенциал простого слоя $\rho : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$

$$\bar{u}(x) = \int_{\partial\Omega} \rho(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}S(y). \tag{2}$$

См. [1, стр. 346, ур-е (26)], и [2, ур-е (5.1)].
Служит решением задачи Неймана.

Потенциал двойного слоя $\rho : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$\bar{\bar{u}}(x) = -\int_{\partial\Omega} \rho(x)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\Phi(x-y)\mathrm{d}S(y). \tag{3}$$

См. [1, стр. 348, ур-е (28)] и [2, ур-е (5.2)].
Служит решением задачи Дирихле.

Собственно, решение задач Дирихле и Неймана сводится к отысканию функции $\rho(x)$, такой, что на границе $\partial\Omega$ она примыкает к граничному условию. [2, стр. 15]

Замечание 1 (Откуда уравнения Фредгольма на стр. 15?)**.** *Дело в том, что для потенциалов верны предельные уравнения [1, стр. 353, ур-е (39)]:*

$$\lim_{x\in\Omega\to x_0} \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{u}}(x_0) + \pi\rho(x_0),$$
$$\lim_{x\in\Omega^c\to x_0} \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{u}}(x_0) - \pi\rho(x_0).$$

и [1, стр. 359, ур-е (48)]

$$\lim_{x\in\Omega\to x_0} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\mathbf{n}}(x_0) + 2\pi\rho(x_0),$$
$$\lim_{x\in\Omega^c\to x_0} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\mathbf{n}}(x_0) - 2\pi\rho(x_0).$$

Где $x_0 \in \partial\Omega$.

0.2 Задачи по поиску поля по распределению заряда

На сколько я понимаю, это задачи на применение **теоремы Гаусса** и **закона полного тока**. Теорема Гаусса

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

позволяет вычислять электрическое поле заряда Q, распределённого в пространстве с плотностью ρ.

Альтернативный для магнитного поля закон полного тока

$$\oint_L \mathbf{B} \mathrm{d}\ell = \mu_0 I$$

позволяет вычислять магнитное поле, создаваемое током I, распределённым в пространстве с некоторой плотностью j.

Литература

[1] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. http://ijevanlib.ysu.am/wp-content/uploads/2018/01/converted_file_81e63622.pdf

[2] Potential theory. https://web.stanford.edu/class/math220b/handouts/potential.pdf

[3] Теорема Гаусса её применение к вычислению электрических полей простейших распределений плотности заряда. http://phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/Gos_Ekzam-13-14-1.pdf

[4] А.Н. Паршаков. Принципы и практика решения задач по общей физике. http://pstu.ru/files/file/oksana/2011/fakultety_i_kafedry/fpmm/prikladnaya_fizika/informacionnye_resursy/principy_i_praktika_resheniya_zadach_po_obschey_fizike__chast_2__elektromagnetizm.pdf

[5] А.М. Купцов. Теоретические основы электротехники. Решения типовыз задач. http://window.edu.ru/resource/045/76045/files/emp.pdf