Найти изображение функции $\quad f(t) = \sin(t + \alpha)$.

Применим ***теорему запаздывания***: [1]

$$\mathcal{L}f(t - (-\alpha)) = e^{p\alpha}\mathcal{L}f(t).$$

Для того, чтобы найти преобразование Лапласа $f(t) = \sin(t)$ разложим синус по формуле Эйлера:

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left[e^{it} - e^{-it}\right].$$

Вычислим преобразование Лапласа экспоненциальной функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}e^{at} &= \int_0^\infty e^{-pt} \cdot e^{at}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(a-p)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a-p} \cdot e^{(a-p)t}\Big|_0^\infty.\end{aligned}$$

Здесь важно вспомнить, что образ $\mathcal{L}f(t)$ существует (интеграл сходится) только в полу-плоскости $\mathrm{Re}p > a$. Раз так, $a - p < 0$ и

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{a-p}\left[\underbrace{e^{-|a-p|\cdot\infty}}_{=0} - 1\right] = -\frac{1}{a-p} \\ &= \frac{1}{p-a}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили табличное

$$\boxed{e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{1}{p-p_0}.} \tag{1}$$

[1] $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
e^{it} &\risingdotseq \frac{1}{p-i},\\
e^{-it} &\risingdotseq \frac{1}{p+i},\\
\mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right] &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}e^{it}-\mathcal{L}e^{-it}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\frac{2i}{p^2-i^2}\\
&= \frac{1}{p^2+1}.
\end{aligned}
$$

Ответ:

$$\boxed{\sin(t+\tau) = \frac{e^{p\alpha}}{p^2+1}.}$$

Найти изображение функции $f(t) = 5e^{-2t} + 3\cos t$.

Аналогично предыдущему, находим:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\cos t &= \frac{p}{p^2+1};\\
\mathcal{L}e^{-2t} &= \frac{1}{p+2} && \text{(ур. (1))}\\
\mathcal{L}\left[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\right] &= C_1\cdot\mathcal{L}f_1 + C_2\cdot\mathcal{L}f_2
\end{aligned}
$$

и значит ответ:

$$F(p) = \frac{5}{p+2} + \frac{3p}{p^2+1}.$$

Найти изображение функции $f(t) = \sinh t - \sin t$.

Заметим, что

$$\sinh t = \frac{1}{2}\left[e^{t}-e^{-t}\right] \risingdotseq \frac{1}{p^2-1},$$

и таким образом

$$\mathcal{L}\left[\sinh t - \sin t\right] = \frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+1}$$
$$= \frac{2}{p^4-1}.$$

Восстановить оригинал по изображению $F(p) = \frac{p}{p^4-1}$.

Используя метод неопределённых коэффициентов разложим дробь на простейшие:

$$\frac{p}{p^4-1} = \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{p+1}}_{\mathcal{L}\exp(-t)} + \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{\mathcal{L}\exp t} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{\mathcal{L}\cos t}.$$

Значит ответ:

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\left[e^t + e^{-t}\right]}_{\cosh t} - \frac{1}{2}\cos t$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cosh t - \cos t\right).$$

Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{1-e^{-p}}{p(p^2+1)}.$$

Во-первых, увидив e^{-p} пожелаем воспользоваться ***теоремой запаздывания***. Перед нами линейная композиция образов некоторой функции $h(t) \risingdotseq \frac{1}{p(p^2+1)}$ и её же, но с аргументом $t-1$

$$F(p) \fallingdotseq h(t) - h(t-1).$$

Осталось только определить функцию $h(t)$. Разложим дробь

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}1(t)} - \underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{\mathcal{L}[1(t)\cos t]}.$$

То есть, искомая функция

$$h(t) = 1(t)\cdot(1-\cos t).$$

Замечание 1 (Важное обстоятельство)**.** В лекции мы с вами обсуждали, что одним из условий на функцию-оригинал является то, что она ***тождественно равна нулю*** при $t < 0$. Очевидно, что $\cos t \not\equiv 0$ при $t < 0$, и значит ***сам по себе*** быть оригиналом ***не может***. Всегда, когда мы пишем оригиналом аналитическую функцию, отличную от $1(t)$, мы подразумеваем, что $1(t)$ домножается на эту функцию, т.е.

$$F(p) \fallingdotseq f(t) \equiv f(t) \cdot 1(t).$$

$\square$

Ответ:

$$F(p) \fallingdotseq \underbrace{1(t) - 1(t-1)}_{\text{импульс}} + 1(t-1)\cos(t-1) - 1(t)\cos t.$$

Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x &= 2e^{3t}, \\ x(0) &= 1, \\ \dot{x}(0) &= 3. \end{cases}$$

Составим уравнение для образов:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\risingdotseq pX(p) - 1, \\ \ddot{x} &\risingdotseq p^2X(p) - p - 3, \end{aligned}$$

и соответственно

$$\begin{aligned} p^2X - p \cancel{-3} - 3pX \cancel{+3} + 2X &= \frac{2}{p-3}, \\ \cancel{(p^2 - 3p + 2)}\ X &= \frac{\cancel{p^2 - 3p + 2}}{p-3}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{p-3}, \\ x(t) &= e^{3t}. \end{aligned}$$