Тема 4. Задача №7

20 октября 2019 г.

Замечание 1. *Это задача #126 из [1, стр. 83]. (В задачнике есть указания и* **решения***...)*

Условие задачи: Найти напряжённость электриического поля внутри и вне сферы, верхняя половина которой находится под потенциалом V_1, а нижняя под потенциалом V_2.

0.1 Решение

0.1.1 Формулируем задачу

Для того, чтобы найти распраделение напряжённости поля, достаточно найти распределение потенциала V, и применить формулу

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

Задача обладает сферической симметрией, следовательно для неё подходит сферическая система координат, и потенциал $V = V(r, \theta, \phi)$.

В задаче отсутствует заряд; следодвательно $\div \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$, и нужно решить краевую задачу Дирихле (внутреннюю или внешнюю, соответственно) для уравнения Лапласа:

$$\Delta V = 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 < r < r_0$$
$$V(r_0, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} V_1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ V_2,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Также, в задаче присутствует симметриия относительно угла ϕ, в связи с чем потенциал ищем в виде $V = V(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$. Как мы знаем, в этом случае задача Ш-Л для $\Theta(\theta)$ приобретает вид дифференциального уравнения Лежандра, которому удовлетворяют полиномы Лежандра. Дифференциальному уравнению для R удовлетворяют решения вида r^μ. Таким образом, решение иищем в виде

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Задача сводится к отысканию коэффициентиов A_n.

0.1.2 Отыскание коэффиициентов

Запишем граничное условие:

$$V(r_0, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = f(\theta). \tag{1}$$

Восользуемся тем, что полиномы Лежандра составляют ортогональный базис. Для отыскания коэффициента A_k будем левую и правую части уравнения (1) скалярно умножать на $P_k(\cos\theta)$.

Замечание 2 (Скалярное произведение функций)**.** *Если функции* $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$*, то скалярное произведение*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}\Omega.$$

Полиномы Лежандра определены на отрезке $\Omega = [-1, +1]$*, и скалярное произведение (см. лекцию):*

$$(P_m, P_n) = \int_{-1}^{1} P_m(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\ \mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

Таким образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(P_n, P_k) = (f, P_k), \tag{2}$$

$$A_k\frac{2}{2k+1} = \int_{-1}^{1} f(\theta)P_k(\cos\theta)\ \mathrm{d}\cos\theta. \tag{3}$$

Случай $k = 0$ Мы рассматриваем этот случай отдельно в том числе потому, что $P_0(x) = 1$ и $(r/r_0)^0 = 1$, и изначит этот член суммы просто A_0.

Пишем:

$$A_0 \cdot 2 = \int_{-1}^{1} f(\theta)\ \mathrm{d}\cos\theta$$

разделим интеграл на два, в соответствии с начальными условиями

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{0} V_2\ \underbrace{\mathrm{d}\cos\theta}_{\mathrm{d}x} + \int_{0}^{1} V_1\ \underbrace{\mathrm{d}\cos\theta}_{\mathrm{d}x} \\ &= V_2 + V_1. \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Пусть $k \neq 0$

$$(f, P_k) = \int_{-1}^{1} f(\theta)P_k(\cos\theta)\ \mathrm{d}\cos\theta$$

снова разделим интеграл на два

$$= V_2\int_{-1}^{0} P_k(\cos\theta)\ \mathrm{d}\cos\theta + V_1\int_{0}^{1} P_k(\cos\theta)\ \mathrm{d}\cos\theta$$

обозначим $x \equiv \cos\theta$

$$= V_2 \int_{-1}^{0} P_k(x)\mathrm{d}x + V_1 \int_{0}^{1} P_k(x)\mathrm{d}x.$$

Воспользуемся рекуррентным соотношением для производной полинома Лежандра[1]

$$\frac{\mathrm{d}P_{k+1}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P_{k-1}}{\mathrm{d}x} = (2k+1)P_k(x).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}(f, P_k) &= \frac{1}{2k+1}\left[V_2 \int_{-1}^{0} \mathrm{d}(P_{k+1} - P_{k-1}) + V_1 \int_{0}^{1} \mathrm{d}(P_{k+1} - P_{k-1})\right] \\ &= \frac{1}{2k+1}\Big[V_2\big(P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)\big)\big|_{x=-1}^{x=0} + V_1\big(P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)\big)\big|_{x=0}^{x=1}\Big].\end{aligned}$$

Пользуемся соотношениями $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k P_k(1)$; остаются только пределы с $x = 0$:

$$\begin{aligned}(f, P_k) &= \frac{1}{2k+1}\Big[V_2\big(P_{k+1}(0) - P_{k-1}(0)\big) - V_1\big(P_{k+1}(0) - P_{k-1}(0)\big)\Big] \\ &= \frac{P_{k+1}(0) - P_{k-1}(0)}{2k+1}\,(V_2 - V_1) \\ &= A_k \frac{2}{2k+1};\end{aligned}$$

$$A_k = \frac{P_{k+1}(0) - P_{k-1}(0)}{2}(V_2 - V_1).$$

Итого, решение:

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)}{2}(V_2 - V_1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta).}$$

Замечание 3. *В учебнике форма несколько другая. Но в моём конспекте форма такая, и я понимаю ход решения, а значит это верно тоже.*

[1]Это соотношение указано в задачнике [1].

Литература

[1] Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. http://samarskii.ru/books/book1980.pdf

[2] Полиномы Лежандра и их производные. http://vadimchazov.narod.ru/lect_vvn/poleg.htm