

Тема 3. Бисферические, тороидальные,
инверсные сферические, и иные
ортогональные системы координат.

30 октября 2020 г.

УЧЕБНИК ДНЯ: А.Н. Тихонов, А.А Самарский. Уравнения математической физики. Часть IV. Формулы, таблицы и графики.
<http://ind.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html>

Эту тему мы изучаем с целью упрощения решения уравнения Пуассона $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$, возникающего в электростатике – задача поиска распределения потенциала и, соответственно, поля, в резонаторе.

Оператор набла $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

- $\nabla f \equiv \text{grad } f = \mathbf{g}$ (градиент)
- $\nabla \cdot \mathbf{g} \equiv \text{div } \mathbf{g} = f_1$ (дивергенция)
- $\nabla \times \mathbf{g} \equiv \text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{g}_1$ (ротор)

Оператор Лапласа Возьмём одно из уравнений Максвелла для электрического поля:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0,$$

и представим $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$, где ϕ – потенциал.

Тогда

$$\text{div grad } \phi \equiv \nabla^2 \phi \equiv \Delta\phi = \rho/\epsilon_0.$$

Δ называется *оператором Лапласа*:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

0.1 Ортогональные криволинейные координаты

Любые три параметра (q_1, q_2, q_3) , однозначно определяющие положение точки в пространстве, могут быть выбраны в качестве координат этой точки. Такие координаты называются *независимыми обобщёнными координатами*. [1, стр. 5] Например, на Рисунке 1 изображена сферическая система координат, в которой положение задаётся двумя углами и длиной радиус-вектора.

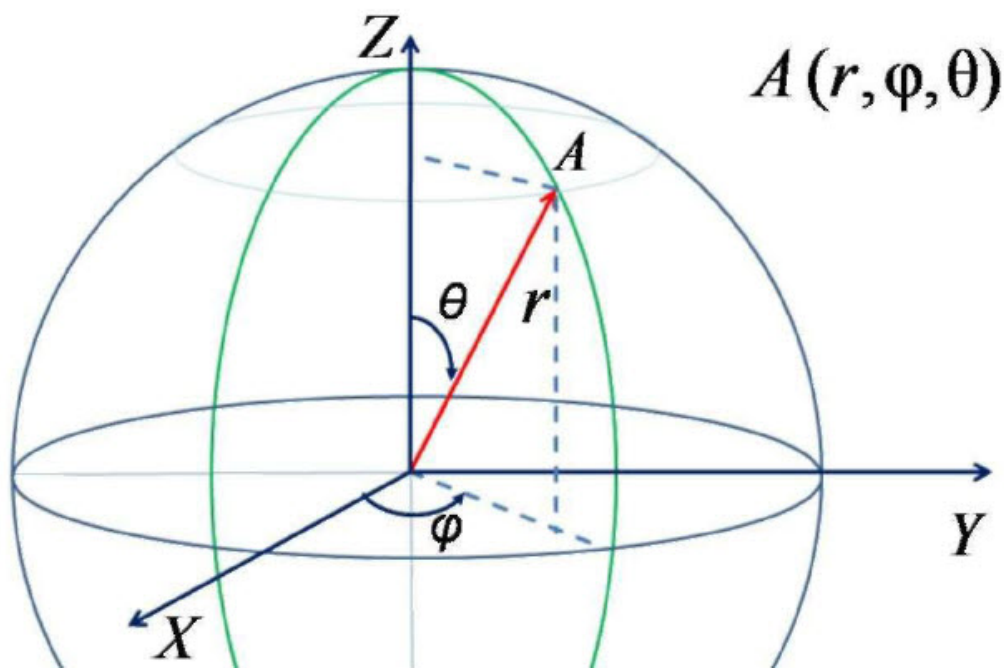


Рис. 1: Сферическая система координат.

Сферические координаты связаны с Декартовыми формулами:

$$\begin{cases} x = r \sin \Theta \cos \phi, \\ y = r \sin \Theta \sin \phi, \\ z = r \cos \Theta. \end{cases} \quad (1)$$

В общем виде, уравнение (1) можно записать как

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему уравнений (2) можно найти обратные соотношения, выражающие криволинейные точки в функции от декартовых координат. [1, стр. 5]

0.2 Коэффициенты Ламэ

Запишем бесконечно малый вектор $d\mathbf{s}$ в декартовых и обобщённых координатах:

$$d\mathbf{s} = i dx + j dy + k dz, \quad (3a)$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_1 dq_1 + \mathbf{e}_2 dq_2 + \mathbf{e}_3 dq_3. \quad (3b)$$

Записав полные дифференциалы функций (2), и приравняв правые части (3a) и (3b), получим:

$$\mathbf{e}_\alpha = i \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + j \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + k \frac{\partial z}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}.$$

Норма $\|\mathbf{e}_i\| = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$ называется **коэффициентом Ламэ** H_i для координаты q_i в точке M :

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \quad (4)$$

Дифференциал длины дуги Запишем длину дуги кривой:

$$dr^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \|\mathbf{e}_1\|^2 dq_1^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2 dq_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|^2 dq_3^2.$$

Отсюда следует, что коэффициент Ламе можно выразить как частную производную длины дуги по соответствующей обобщённой координате:

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|. \quad (5)$$

Ожидаемо, выражение получается то же, что и в (4).

Элемент объёма

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz \\ &= \det J \cdot dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= H_1 H_2 H_3 \cdot dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

якобиан. [3]

Лапласиан

$$\Delta f(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \quad (7)$$

0.3 Различные системы координат

Выражения для коэффициентов Ламэ и Лапласиана легко гуглятся; в крайнем случае, пользуемся уравнениями (4) и (7). Я громоздкие формулы спрашивать не буду. Поэтому акцент сделаем на генеологии систем координат.

В принципе, у нас любая криволинейная система координат задаётся семействами кривых, которые пересекаются под прямыми углами в каждой точке.

0.3.1 Эллиптическая \rightarrow эллипсоидальная

0.3.2 Биполярная и бисферическая

0.3.3 Тороидальная КС

0.4 Задачи

#1 Вывести формулы преобразования от эллипсоидальных координат к декартовым.

Эллипсоидальная СК задаётся эллипсоидом и двумя гиперболами (одно- и двух-полостным) [4], т.е. системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\zeta} + \frac{y^2}{b^2+\zeta} + \frac{z^2}{c^2+\zeta} = 1, \end{cases}$$

где $-c^2 < \xi < \infty$, $-b^2 < \eta < -c^2$, $-a^2 < \zeta < -b^2$.

Разрешая систему относительно x^2, y^2, z^2 получаем что надо.

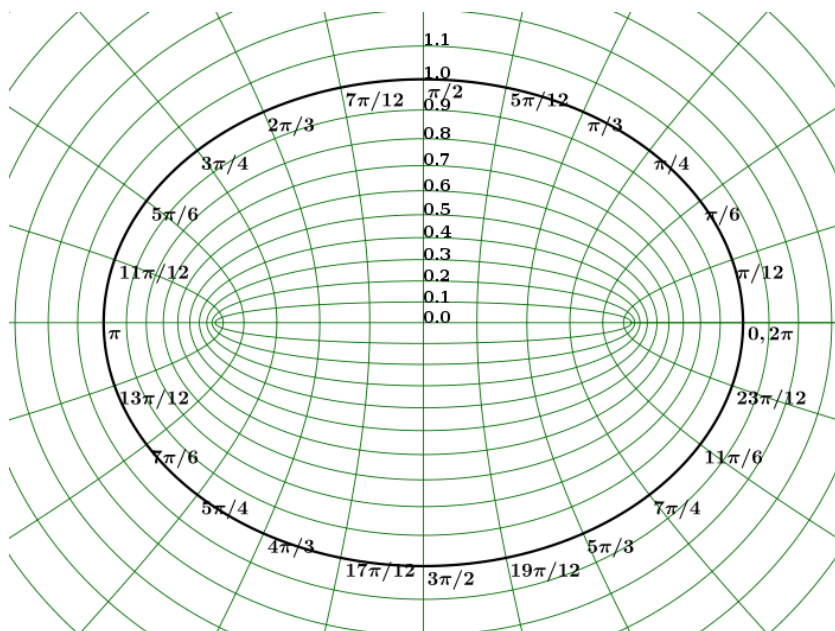


Рис. 2: Эллиптическая система координат состоит из софокусных эллипсов и гиперболоидов.

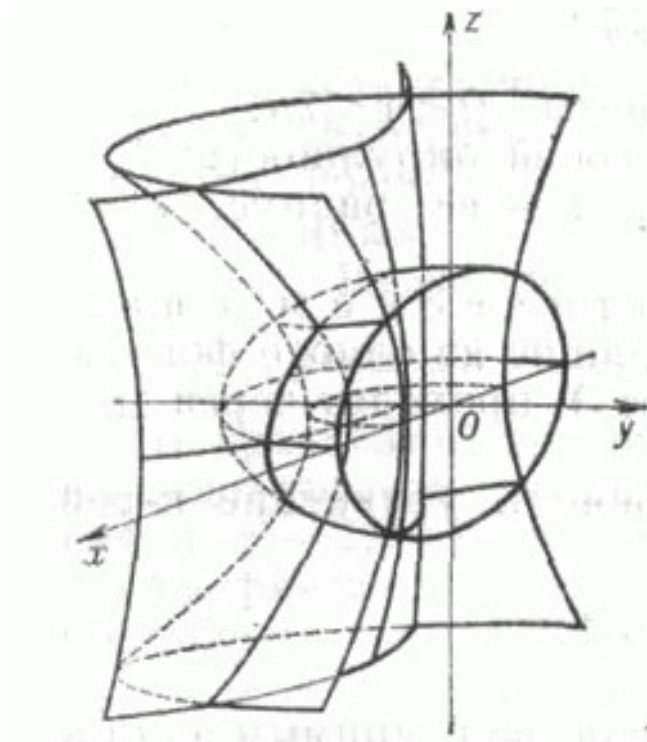


Рис. 3: Эллипсоидальная система: эллипсоид + одно- и двуполостные гиперboloиды.

Bipolar Coordinates: σ (red) and τ (blue) Isosurfaces.

Foci are located at $(-1, 0)$ and $(1, 0)$.

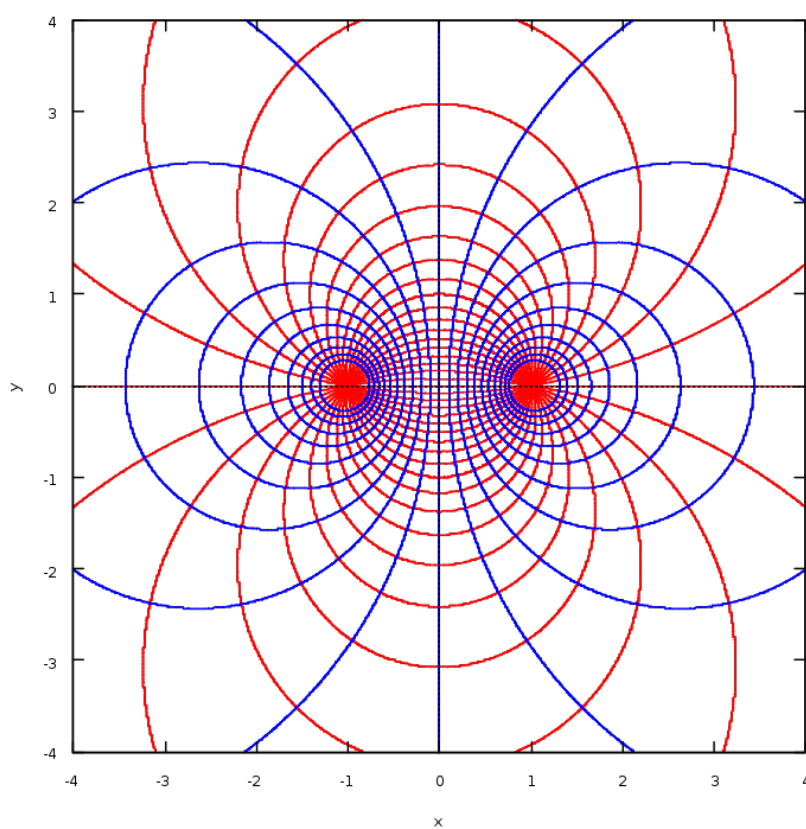


Рис. 4: Биполярная КС состоит из кругов Апполония.

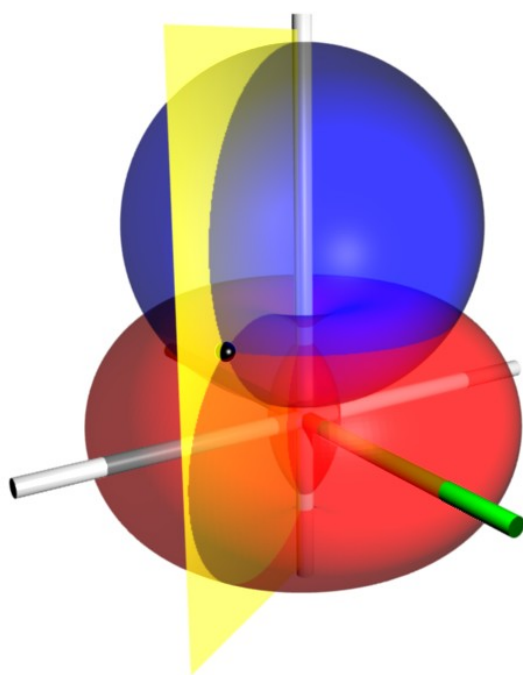


Рис. 5: Бисферическая КС – тело вращения биполярной КС вокруг оси, *проходящей через* фокусы.

Toroidal Coordinates

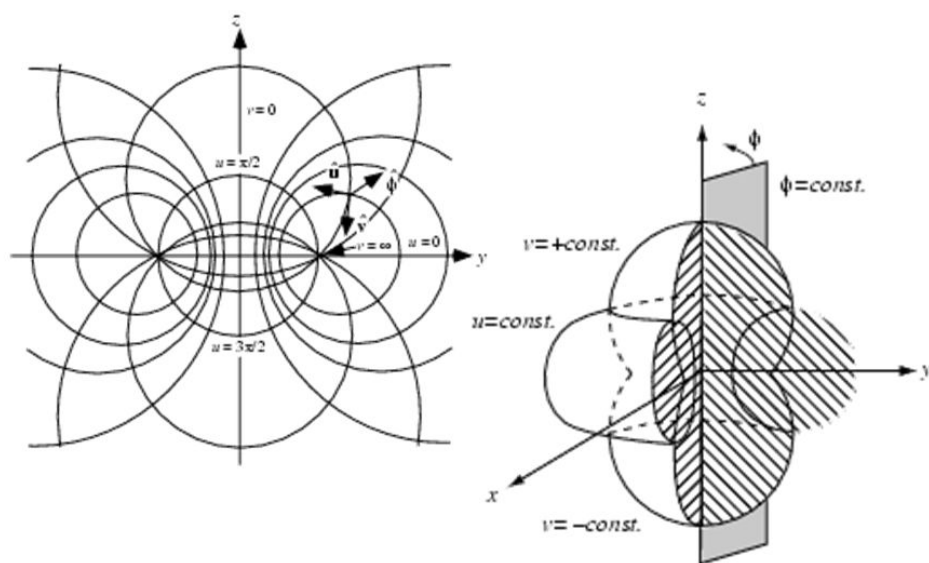


Рис. 6: Получается из биполярной при вращении последней вокруг оси, *разделяющей* фокусы.

Литература

- [1] Г.В. Алферов. Механика в криволинейных координатах. Пособие для подготовки к коллоквиуму. http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/alferov/files/krivol_coordinaty.pdf
- [2] В.В. Конев. Скалярные и векторные поля. http://portal.tpu.ru:7777/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/T_field/manual/38.htm
- [3] Wolfram. Jacobian. <http://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html>
- [4] Wolfram. Confocal Ellipsoidal Coordinates. <http://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipsoidalCoordinates.html>