Тема 5. Математические модели теплопроводности диффузии

12 ноября 2019 г.

УЧЕБНИК ДНЯ: А.Н. Тихонов, А.А Самарский. Уравнения математической физики. Глава III: Уравнения параболического типа. `http://old.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html`

Уравнение диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \nabla \cdot [D \nabla \rho] + f$$

Здесь

- $\rho(\mathbf{r}, t)$ – плотность диффундирующего вещества,
- $D(\rho, \mathbf{r})$ – коэффициент диффузии,
- $f(\mathbf{r}, t)$ описывает источники вещества.

Уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} T = \nabla \cdot [D \nabla T] + f$$

Где

- $T(\mathbf{r}, t)$ – температура,
- $D(\mathbf{r})$ – коэффициент теплопроводности,
- $f(\mathbf{r}, t)$ описывает источники тепла,
- c – теплоёмкость,
- ρ – плотность вещества.

Собственно, при записи в общем виде – это одно и то же уравнение.

Замечание 1. *Когда в задаче упоминается слово* **стационарный**, *это значит, что производная по времени равна нулю:*

$$\frac{\partial}{\partial t} u \equiv 0.$$

Если при этом коэффициент $D = \mathrm{const}$, *получаем уравнение Пуассона:*

$$\Delta u = f.$$

Чтобы решить уравнение параболического типа, нам нужны:

1. граничные условия (Дирихле, Неймана, Робена);
2. начальные условия (задача Коши).

В задачах из учебного плана нет неоднородных уравнений. Уравнения решаем методом разделения переменных: [1]

1. находим функцию, удовлетворяющую граничным условиям;
2. раскладываем начальные условия в ряд Фурье, [2] и отыскиваем коэффициенты.

0.1 Примеры

0.1.1 Задача на отрезке

Решить уравнение теплопроводности

$$
\begin{aligned}
4\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{\partial T}{\partial t}, \\
T(0,z) &= \sin^3 2\pi z - \sin 4\pi z, \\
T(t,0) &= T(t,2) = 0.
\end{aligned}
$$

Всё стандартно, как описано в [1]. Решение уравнения сводится к разложению начальных условиий в ряд Фурье.

0.1.2 Задача в круге

Решить уравнение

$$
\begin{aligned}
2\Delta T &= \frac{\partial T}{\partial t}, && (1) \\
T(0,r) &= 9 - r^2, && (2) \\
T(t,3) &= 0, && (3)
\end{aligned}
$$

в круге (радиусом $r_0 = 3$).

В этой задаче мы впервые встречаемся с функциями Бесселя.

Перейдём в полярную систему коордиинат (r, ϕ). Судя по начальным условииям, задача обладает симметрией относительно угла ϕ; таким образом, решение будем искать в виде

$$T(t, r) = R(r)W(t).$$

Поскольку зависимости от ϕ нет, оператор Лапласа запишется как

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right),$$

и задача Ш-Л для уравнения (1) приобретёт вид

$$\frac{r^{-1}\left[R' + rR''\right]}{R} = \frac{1}{2}\frac{W'}{W} = \lambda = -a^2 = \mathrm{const}.$$

Я принял $\lambda = -a^2$ для удобства, зная, что будет дальше. Запиишем уравнение для R:

$$R'' + r^{-1}R' + a^2 R = 0. \tag{4}$$

Уравнение Бесселя выглядит вот так: [4, стр. 625]

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{5}$$

Обратите внимание на ссылку [3]; и в особенности на **пункт 3** в ***Некоторые дифференциальные уравнения, приводимые к уравнению Бесселя***. Чтобы получить уравнение из пункта **3**, домножим уравнение (4) на r^2, и добавим к нему член $-\nu^2 R \equiv 0$, при $\nu = 0$:

$$r^2 R'' + rR' + (a^2 r^2 - \nu^2)R = 0. \tag{6}$$

Решением уравнения (6) является $R(r) = C_1 J_\nu(ar) + C_2 Y_\nu(ar)$, где J_ν, Y_ν – функции Бесселя первого и второго рода (порядка ν) соответственно.

Замечание 2. *Обратите внимение, что $0 \in \mathbb{Z}$ (целое число); поэтому решение записывается в виде суммы функциий Бесселя первого и второго родов. Если бы $\nu \notin \mathbb{Z}$, было бы*

$$R(r) = C_1 J_\nu(ar) + C_2 J_{-\nu}(ar).$$

Замечание 3. *Кому интересно, сведение уравнения* (6) *к* (5) *производится путём замены*

$$\begin{aligned} x &= ar, \\ \mathrm{d}r &= a^{-1}\mathrm{d}x, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} &= a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} &= a^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}. \end{aligned}$$

Решение уравнения для W даёт

$$W(t) = C_3 e^{-2a^2 t}.$$

Собираем решение для T:

$$T(t, r) = \left[AJ_0(ar) + BY_0(ar)\right] e^{-2a^2 t}.$$

Теперь определим коэффициенты.

1. Так как $Y_0(ar)$ не ограничена при стремлении к нулю, это значит $B = 0$ (аргумент от нефизичности решения).

2. Поскольку $T(t, 3) = R(3)W(t) = 0$, и мы ***требуем*** $W(t) \not\equiv 0$, значит $R(3) = 0$. Это условие позволяет нам определить a: потребуем, чтобы $3a = \mu_0^1$, где μ_0^1 это первый корень J_0: $J_0(\mu_0^1) = 0$; $a = \mu_0^1/3$.

Литература

[1] The diffusion equation. https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_tp/lectures/ws2016-2017/num_methods_i/heat.pdf

[2] Fourier Series. http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html

[3] Уравнение Бесселя. http://www.math24.ru/\T2A\cyru\T2A\cyrr\T2A\cyra\T2A\cyrv\T2A\cyrn\T2A\cyre\T2A\cyrn\T2A\cyri\T2A\cyre-\T2A\cyrb\T2A\cyre\T2A\cyrs\T2A\cyrs\T2A\cyre\T2A\cyrl\T2A\cyrya.html

[4] А.Н. Тихонов, А.А Самарский. Уравнения математической физики. Дополнение II: Специальные функции. http://old.pskgu.ru/ebooks/ts/ts_dop2_0.pdf