**Филиппов 52**

$$\sqrt{y^2+1}\mathrm{d}x = xy\mathrm{d}y.$$

Решаем:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}},$$
$$\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y^2}{\sqrt{y^2+1}}, \quad t = y^2+1;$$

воспользуемся тем, что $\mathrm{d}u = \mathrm{d}(u + \mathrm{const})$:

$$\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \mathrm{d}\sqrt{t},$$
$$\ln C|x| = \sqrt{t} = \sqrt{y^2+1}.$$

**Филиппов 53**

$$\begin{cases} (x^2-1)y' + 2xy^2 &= 0, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{1}$$

Решение:

$$2xy^2 = (1-x^2)y',$$
$$\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$
$$\frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{1-x^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right),$$

заменим $t = x^2 - 1$

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{d}\ln t = \mathrm{d}y^{-1},$$
$$\ln C|x^2-1| = y^{-}1,$$

следовательно ***общее*** решение:

$$y\ln C|x^2-1| = 1, \quad y = 0 \ \ \text{(потерянное при делении решение).}$$

Ищем частное решение. Для этого удобнее всего вынести константу из под знака логарифма:

$$y \cdot \left(\ln|x^2-1| + \underbrace{\ln C}_{C_1}\right) = 1.$$

$$y(0)\cdot\left(\underbrace{\ln|0^2-1|}_{\ln 1=0}+C_1\right)=1,$$
$$C_1=1.$$

Итого, ***частное*** решение, удовлетворяющее задаче Коши (1):

$$y\cdot\left(\ln|x^2|+1\right)=1.$$

**Филиппов 101**

$$(x+2y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
y'&=1+2\cdot\frac{y}{x}=1+2t,\\
y'&=t'x+t,\\
t'x+t&=1+2t,\\
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}x&=1+t,\\
\frac{\mathrm{d}x}{x}&=\frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1},\\
\mathrm{d}\ln x&=\mathrm{d}\ln(t+1),\\
C_1+\ln x&=\ln(1+\frac{y}{x})=\ln(x+y)-\ln x, && (\ln\tfrac{a}{b}=\ln a-\ln b)\\
\ln(x+y)&=\ln x^2+\underbrace{\ln C}_{C_1}=\ln Cx^2, && (a\cdot\ln x=\ln x^a)\\
x+y&=Cx^2,\quad x=0.
\end{aligned}$$

**Филиппов 102**

$$(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0.$$

Решение:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{t-1}{t+1} = t'x + t,$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}x = -\frac{1+t^2}{1+t},$$
$$\frac{1+t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\ln x,$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}_{\mathrm{d}\arctan t} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1}}_{\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(1+t^2)} = -\mathrm{d}\ln x,$$
$$\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2}) + \underline{\ln x} = \tilde{C},$$

Домножим левую и правую части уравнения <u>на 2</u> и заменим $\ln\frac{x^2+y^2}{x^2} = \ln(x^2+y^2) - \ln x^2$

$$2\arctan\frac{y}{x} + \underbrace{\ln(x^2+y^2) - \ln x^2}_{\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}} + \underline{\ln x^2} = C.$$

Ответ:

$$\ln(x^2+y^2) = C - 2\arctan\frac{y}{x}.$$

**Филиппов 189**

$$\frac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0.$$

Видим, что

$$\begin{cases} F'_y &= y^3 + \ln x, \\ F'_x &= y/x. \end{cases}$$

Решаем:

$$F = \int (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = y^4/4 + y\ln x + C(x).$$

Возьмём производную вышестоящего выражения и приравняем её к $F'_x$:

$$y/x + C'(x) = F'_x = y/x; C'(x) \qquad = 0 \Rightarrow C = C_1.$$

Соответственно:

$$F(x, y) = y^4/4 + y \ln x + C_1;$$

решением является

$$F(x, y) = C,$$
$$y^4/4 + y \ln x = C - C_1 \equiv C,$$

и домножив всё на 4 для красоты получим ответ:

$$y^4 + 4y \ln x = C.$$