Решениие уравнения гармонического осциилляторa

20 ноября 2019 г.

Однородное уравнение гармонического осциллятора:

$$x'' + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, вследствие чего, решение уравнения (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \\ &= C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t. \end{aligned}$$

Здесь, коэффициенты $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ – комплексные числа. При этом (!) если мы требуем, чтобы $x(t) \in \mathbb{R}$, то они комплексно-сопряжённые:

$$\begin{aligned} C_1 &= a + ib, \\ C_2 &= a - ib. \end{aligned}$$

Сооответственно,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 2a \equiv A \\ C_1 - C_2 &= 2ib \equiv iB, \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t - B\sin\omega t \\ &= A\cos\omega t + B_1\sin\omega t. \end{aligned} \tag{2}$$

Замечание 1 (Доказательство комплексной сопряжённости C_1 и C_2)**.** *Если $x(t) \in \mathbb{R}$, то $x^*(t) = x(t)$ (комплексно-сопряжённое с собой). Тогда:*

$$\begin{aligned} x^*(t) &= C_1^*(e^{i\omega t})^* + C_2^*(e^{-i\omega t})^* \\ &= C_1^* e^{-i\omega t} + C_2^* e^{i\omega t} \\ &= C_2 e^{-i\omega t} + C_1 e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Поскольку $e^{i\omega t} \perp e^{-i\omega t}$: $C_1^* = C_2$.