Филиппов 52

$$\sqrt{y^2+1}\mathrm{d}x = xy\mathrm{d}y.$$

Решаем:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}},$$
$$\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y^2}{\sqrt{y^2+1}}, \quad t = y^2+1;$$

воспользуемся тем, что $\mathrm{d}u = \mathrm{d}(u+\mathrm{const})$:

$$\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \mathrm{d}\sqrt{t},$$
$$\ln C|x| = \sqrt{t} = \sqrt{y^2+1}.$$

Филиппов 53

$$\begin{cases} (x^2-1)y' + 2xy^2 &= 0, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{1}$$

Решение:

$$2xy^2 = (1-x^2)y',$$
$$\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$
$$\frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{1-x^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right),$$

заменим $t = x^2-1$

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{d}\ln t = \mathrm{d}y^{-1},$$
$$\ln C|x^2-1| = y^-1,$$

следовательно ***общее*** решение:

$$y\ln C|x^2-1| = 1, \quad y = 0 \;\; \text{(потерянное при делении решение).}$$

Ищем частное решение. Для этого удобнее всего вынести константу из под знака логарифма:

$$y \cdot \left(\ln|x^2-1| + \underbrace{\ln C}_{C_1}\right) = 1.$$

$$y(0)\cdot\left(\underbrace{\ln|0^2-1|}_{\ln 1=0}+C_1\right)=1,$$
$$C_1=1.$$

Итого, ***частное*** решение, удовлетворяющее задаче Коши (1):

$$y\cdot\left(\ln|x^2|+1\right)=1.$$

Филиппов 101

$$(x+2y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
y' &= 1+2\cdot\frac{y}{x}=1+2t,\\
y' &= t'x+t,\\
t'x+t &= 1+2t,\\
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}x &= 1+t,\\
\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1},\\
\mathrm{d}\ln x &= \mathrm{d}\ln(t+1),\\
C_1+\ln x &= \ln(1+\frac{y}{x})=\ln(x+y)-\ln x, && (\ln\tfrac{a}{b}=\ln a-\ln b)\\
\ln(x+y) &= \ln x^2+\underbrace{\ln C}_{C_1}=\ln Cx^2, && (a\cdot\ln x=\ln x^a)\\
x+y &= Cx^2,\quad x=0.
\end{aligned}$$

Филиппов 102

$$(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0.$$

Решение:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{t-1}{t+1} = t'x + t,$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}x = -\frac{1+t^2}{1+t},$$
$$\frac{1+t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\ln x,$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}_{\mathrm{d}\arctan t} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1}}_{\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(1+t^2)} = -\mathrm{d}\ln x,$$
$$\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2}) + \underline{\ln x} = \tilde{C},$$

Домножим левую и правую части уравнения <u>на 2</u> и заменим $\ln\frac{x^2+y^2}{x^2} = \ln(x^2+y^2) - \ln x^2$

$$2\arctan\frac{y}{x} + \underbrace{\ln(x^2+y^2) - \ln x^2}_{\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}} + \underline{\ln x^2} = C.$$

Ответ:
$$\ln(x^2+y^2) = C - 2\arctan\frac{y}{x}.$$

Филиппов 189
$$\frac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0.$$

Видим, что
$$\begin{cases} F'_y &= y^3 + \ln x, \\ F'_x &= y/x. \end{cases}$$

Решаем:
$$F = \int (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = y^4/4 + y\ln x + C(x).$$

Возьмём производную вышестоящего выражения и приравняем её к F'_x:
$$y/x + C'(x) = F'_x = y/x; C'(x) = 0 \Rightarrow C = C_1.$$

Соответственно:

$$F(x,y) = y^4/4 + y\ln x + C_1;$$

решением является

$$F(x,y) = C,$$
$$y^4/4 + y\ln x = C - C_1 \equiv C,$$

и домножив всё на 4 для красоты получим ответ:

$$y^4 + 4y\ln x = C.$$

Филиппов 511 Решить

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

с корнями $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, и записываем ответ:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Филиппов 534

$$y'' + y = 4xe^x. \tag{2}$$

Фаза 1: решаем соответствующее однородное уравнение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет сопряжённые комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, и значит ответ запишется в виде

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Фаза 2: ищем частное решение неоднородного уравнения. Поскольку правая часть имеет форму $P_m(x)e^{\gamma x}$, решение можно найти ***методом неопределённых коэффициентов*** (см. [1, стр. 50, ур-е (4)]). Частное решение ищем в виде

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (A + Bx)e^x, \\ y_1' &= (A+B)e^x + Bxe^x, \\ y_1'' &= (A+2B)e^x + Bxe^x. \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение (2):

$$\underbrace{(A+2B)e^x + Bxe^x}_{y''} + \underbrace{Ae^x + Bxe^x}_{y} = 4xe^x,$$

$$2(A+B)e^x + 2Bxe^x = 4xe^x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим:

$$\begin{cases} A &= -B, \\ B &= 2. \end{cases}$$

Частное решение $y_1(x) = (2x-2)e^x$, и полный ответ:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x-2)e^x.$$

Филиппов 539 РЕШИТЬ.

Филиппов 589 Решить уравнение Эйлера

$$x^2 y'' - 4xy + 6y = 0.$$

Такие уравнения решаются заменой $x = e^t$; соответственно:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= e^t \mathrm{d}t, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dot{y} e^{-t}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dot{y}e^{-t}\right) &= \left[\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right] e^{-t} + \dot{y}\left[\frac{\mathrm{d}e^{-t}}{\mathrm{d}t}\ t'\right] \\
&= \ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}e^{-2t} = e^{-2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right).
\end{aligned}$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$\begin{aligned}
\cancel{e^{2t} e^{-2t}}(\ddot{y} - \dot{y}) - 4\cancel{e^t e^{-t}}\dot{y} + 6y = 0; \\
\ddot{y}(t) - 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 0.
\end{aligned}$$

Дальше решаем это однородное уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0; \qquad \lambda_{1,2} = 2, 3.$$

И значит

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Поскольку из замены $t = \ln x$, и $k \cdot \ln x = \ln x^k$, при возвращении к переменной x получим

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Филиппов 575

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Фаза 1. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет единственный кратный корень $\lambda = 1$; соответственно, ФСР – $\{e^x, xe^x\}$, и общее решение однородного уравнения

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Фаза 2. Ищем частное решение $y_1(x)$ неоднородного уравнения в виде $y_1(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$. Составляем систему

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' x e^x & = 0, \\ u_1' e^x + u_2' \left(e^x + xe^x\right) & = \frac{e^x}{x}. \end{cases}$$

В матричном виде это выглядит как

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} 0 & e^x/x \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель Вронского: $\Delta = e^{2x}(x+1) - xe^{2x} = e^{2x} > 0$. Как и следовало ожидать, вронскиан ФСР не равен нулю.

По методу Кронекера, вычисляем определители для искомых функций:

$$\Delta_{u_1'} = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x/x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -e^{2x};$$

$$\Delta_{u_2'} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix} = e^{2x}/x.$$

Тогда

$$u_1' = \frac{\Delta_{u_1'}}{\Delta} = -1 \Rightarrow u_1 = -x + \tilde{C}_1,$$
$$u_2' = \frac{\Delta_{u_2'}}{\Delta} = \frac{1}{x} \Rightarrow u_2 = \ln|x| + \tilde{C}_2.$$

Записываем частное решение

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \tilde{C}_1 e^x \underbrace{-xe^x + \tilde{C}_2 xe^x} + x\ln|x|e^x \\ &= \tilde{C}_1 e^x + \underbrace{\left(\tilde{C}_2 - 1\right)}_{\tilde{C}_3} xe^x + x\ln|x|e^x; \end{aligned}$$

и тогда общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y(x) &= \hat{C}_1 e^x + \hat{C}_2 xe^x + x\ln|x|e^x \\ &= e^x \left(\hat{C}_1 + \hat{C}_2 x + x\ln|x|\right). \end{aligned}$$

Литература

[1] А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. http://kvm.gubkin.ru/pub/uok/FilippovDU.pdf