Решение неоднородного уравнения

17 декабря 2019 г.

Условие задачи: Нужно решить неоднородное, одноменрое волновое уравнение с нулевыми начальными и граничными условиями:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axt,\ x \in [0, \ell],\ t < 0 \tag{1}$$

$$u(0,t) = u_x(\ell, t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \tag{2}$$

В данном случае всё достаточно просто: сначала ищется ***общее*** решение однородного уравнения, затем ***частное*** решение неоднородного.

0.1 Общая идеология отыскания частного решения неоднородного уравнения

Пусть нам дано неоднородное уравнение

$$u_{tt} + a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in [0, \ell], \tag{3}$$

у которого $X_k(x)$ – собственные решения ***одноролного*** уравнения. Тогда есть смысл искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$u(x,t) = \sum_k W_k(t) X_k(x). \tag{4}$$

Действительно, поскольку

$$X_k^{''} + \lambda_k X_k = 0, \tag{5}$$

имеем:

$$\sum_k W_k'' X_k = a^2 \sum_k W_k X_k'' + f, \qquad \text{(из ур. (3)+ (4))}$$

Перенесём сумму из правой части в левую, и воспользуемся равенством (5):

$$\sum_k \left(W_k'' + a^2 \lambda_k W_k \right) X_k = f. \tag{6}$$

Возьмём скалярное произведение левой и правой частей уравнения с собственной функцией X_n:

$$(W_n'' + a^2 \lambda_n W_n) \cdot ||X_n||^2 = (f, X_n),\ \text{где} \tag{7}$$

$$(f, X_n) = \int_0^\ell f(x,t) X_n(x) \mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$||X_n||^2 = (X_n, X_n), \tag{9}$$

и поскольку собственные функции ортогональны:

$$(X_n, X_m) = 0,\ n \neq m. \tag{10}$$

В итоге, для функции-коэффициента разложения $W_k(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$W_k'' + a^2\lambda_k W_k = \frac{(f, X_k)}{||X_k||^2}. \tag{11}$$

Решаем, получаем удовольствие.

0.2 Решение задачи (1)

Разделив переменные в уравнении (1) ($u(x,t) = T(t)X(x)$), мы найдём собственные решения

$$X_k(x) = \sin\omega_k x, \text{ где } \omega_k = \frac{\pi}{2\ell}(2k+1), k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Замечание 1 (Собственные решения уравнения для $T(t)$)**.** Я пока не понял суть проблемы, но для $T(t)$ мы опять имеем волновое уравнение, однако начальные условия таковы, что решение тривиальное, т.е. $T(t) \equiv 0$.

Возможно, это связано с тем, что условия не начальные, а ***конечные*** ($t < 0$); однако в моих институтских лекциях тоже есть уравнения с $t < 0$, и они решаются так же.

Физически же, условия на $T(t)$ говорят, что и координата, и скорость, в некоторый момент времени равны нулю. Поскольку $T(t)$ гармоническая функция (исходя из уравнения, которому она удовлетворяет), ускорение в этот момент времени тоже равно 0. Если бы точка 0 была начальной, не было бы ни каких вопросов почему решение тождественно равно нулю. Но поскольку $f(x + \mathrm{d}x) \approx f'\mathrm{d}x$, и $f'(x) = f''(x) = 0$, то в момент времени $t = 0-$, $T(0-) = 0$, и т.д.

В общем, если кто поймёт, где я ошибаюсь – тому **+5 баллов** на экзамене.

Для гармонических функций, $||X_k||^2 = \ell/2$, и по сути, нам нужно просто разложить функцию x в ряд Фурье:

$$(f, X_k) = \int_0^\ell At\cdot x\sin\omega_k x\mathrm{d}x = -\frac{At}{\omega_k}\int_0^\ell x\mathrm{d}\cos\omega_k x.$$

$$\int_0^\ell x\mathrm{d}\cos\omega_k x = \int_0^\ell \mathrm{d}\left(x\cos\omega_k x\right) - \int_0^\ell \cos\omega_k x\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{x\cos\omega_k x\Big|_0^\ell}_{=0} - \frac{1}{\omega_k}\underbrace{\int_0^\ell \mathrm{d}\sin\omega_k x}_{\sin\omega_k\ell=(-1)^k};$$

$$(f, X_k) = (-1)^k\cdot\frac{At}{\omega_k^2}.$$

По итогу, надо решить такой дифур:

$$W_k''(t) + (a\omega_k)^2 W_k(t) = (-1)^k\cdot C_k\cdot t, \ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$