Тема 4. Математические модели электродинамики.

30 октября 2020 г.

УЧЕБНИК ДНЯ: А.Н. Тихонов, А.А Самарский. Уравнения математической физики. `http://ind.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html`

Эта тема посвящена поиску распределения потенциала в пространстве, то есть решению краевой задачи для уравнения Лапласа. (То есть в учебнике Тихонова нас интересует глава 4.)

Типы краевых задач Любая краевая задача – это решение дифференциального уравнения в частных производных (урмата) $Lu = f(x)$ в некоторой области Ω (внутренняя задача), или вне её (внешняя задача), при заданных на границе области (обозначается как $\partial\Omega$) ***граничных условиях***:

Дирихле граничные условия налагаются на значения ***самой*** функции:

$$u|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Неймана граничные условия налагаются на ***производную*** функции:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = g(x),$$

$\boldsymbol{n}$ – нормаль к $\partial\Omega$. То есть, ***физический смысл***: задан поток поля $-\nabla u$ через границу.

Ньютона смесь первых двух:

$$\left.\left(a \cdot u + b \cdot \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right|_{\partial\Omega} = g(x).$$

0.1 Потенциалы простого и двойного слоя

Пусть $x \in \mathbb{R}^3$. Функция $\Phi(x) = |x|^{-1}$ является ***фундаментальным решением*** уравнения Лапласа (в пространстве). [1, стр. 282]

Пусть нам задана некоторая функция $\rho(x)$.

Объёмный потенциал $\rho : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$u(x) = \int_\Omega \rho(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}V(y) \tag{1}$$

Потенциал простого слоя $\rho : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$

$$\bar{u}(x) = \int_{\partial\Omega} \rho(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}S(y). \tag{2}$$

См. [1, стр. 346, ур-е (26)], и [2, ур-е (5.1)].
Служит решением задачи Неймана.

Потенциал двойного слоя $\rho : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$\bar{\bar{u}}(x) = -\int_{\partial\Omega} \rho(x)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Phi(x-y)\mathrm{d}S(y). \tag{3}$$

См. [1, стр. 348, ур-е (28)] и [2, ур-е (5.2)].
Служит решением задачи Дирихле.

Собственно, решение задач Дирихле и Неймана сводится к отысканию функции $\rho(x)$, такой, что на границе $\partial\Omega$ она примыкает к граничному условию. [2, стр. 15]

Замечание 1 (Откуда уравнения Фредгольма на стр. 15?)**.** Дело в том, что для потенциалов верны предельные уравнения [1, стр. 353, ур-е (39)]:

$$\lim_{x\in\Omega\to x_0} \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{u}}(x_0) + \pi\rho(x_0),$$
$$\lim_{x\in\Omega^c\to x_0} \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{u}}(x_0) - \pi\rho(x_0).$$

и [1, стр. 359, ур-е (48)]

$$\lim_{x\in\Omega\to x_0} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\boldsymbol{n}} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\boldsymbol{n}}(x_0) + 2\pi\rho(x_0),$$
$$\lim_{x\in\Omega^c\to x_0} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\boldsymbol{n}} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\boldsymbol{n}}(x_0) - 2\pi\rho(x_0).$$

Где $x_0 \in \partial\Omega$.

0.2 Полиномы Лежандра

Фундаментальное решение уравнения Лапласа $\Phi(x)$ можно разлоижть в степенной ряд. Для этого его сначала приводят в форму: [1, стр. 672]

$$\begin{aligned}\Phi(r, r_0) &= \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta}} && \text{(теорема косинусов)}\\ &= \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}\\ &= \frac{1}{r}\Psi(\rho, x),\end{aligned}$$

где $\rho = r_0/r < 1$, $x = \cos\theta \in [-1, 1]$, а $\Psi(\rho, x)$ называется ***производящей функцией*** полиномов Лежандра $P_n(x)$:

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n.$$

Полиномы Лежандра:

- являются решениями дифференциального ***уравнения Лежандра***

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0$$

  (физический смысл имеют решения только при $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$);

- связаны рекуррентным соотношением

  $$\begin{aligned} 0 = (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x),\\ P_n(1) = 1, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),\\ P_0(x) = 1, P_1(x) = x.\end{aligned}$$

- ортогональны на отрезке $x \in [-1, 1]$:

  $$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\cdot P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

  (обратите внимание на параграф 5 в [7]: норма полиномов Лежандра. Оттуда появился коэффициент $2/(2n+1)$.)

Сейчас вылетит птичка Имеем уравнение Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = 0, u = u(r, \theta, \phi),$$

и пусть в задаче присутствует симметрия относительно ϕ: $u = u(r, \theta)$.

Уравнение станет

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] = 0$$

Разделяем переменные, записываем задачу Штурма-Лиувилля:

$$u = R(r)\Theta(\theta),$$

$$\frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right]}{R} = \frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]}{\Theta} = -\lambda, \qquad \text{(Задача Ш-Л)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \lambda\Theta = 0,$$

заменим $x = \cos\theta$, и ВНЕЗАПНО

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda\Theta = 0. \qquad \text{(уравнение Лежандра)}$$

А это значит, что

$$\boxed{\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta).}$$

0.2.1 Присоединённые функции Лежандра

Присоединённые функции Лежандра появляются когда мы не ограничиваем искомую функцию:

$$u = u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi).$$

При разделении переменных, получим задачу Ш-Л для функции $Y(\theta, \phi)$ в виде

$$\Delta_{\theta,\phi}Y + \lambda Y = 0, Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi).$$

Снова разделяем переменные

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi);$$

обозначив $x = \cos\theta$ придём к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0. \tag{4}$$

Здесь

(1) $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, чтобы $|\Theta| < \infty$;

(2) $m \le n$, чтобы $P_n^{(m)}(x) \not\equiv 0$.

Решением уравнения 4 является ***присоединённая функция Лежандра***

$$P_n^{(m)} = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^2}P_n(x).$$

Собираем решение:

$$\begin{aligned} Y_n^{(m)}(\theta,\phi) &= P_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot\Phi_m(\phi) \\ &= P_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot\begin{cases}\cos m\phi, & m \le 0,\\ \sin m\phi, & m \ge 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Замечание 2 (Формальное разделение переменных)**.** В последнем равенстве мы формально разделили $\sin, \cos$ для значений m разных знаков чтобы не писать $\sum(\sin + \cos)$.

Замечание 3 (Фундаментальная сферическая функция)**.** Именно так называется функция $Y_n^{(m)}$.

Замечание 4 (Сферическая гармоника)**.**

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{m=-n}^{n} C_{n,m} Y_n^{(m)}(\theta,\phi) \\ &= \sum_{m=0}^{n}\left(A_{n,m}\cos m\phi + B_{n,m}\sin m\phi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta). \end{aligned}$$

0.3 Задачи по поиску поля по распределению заряда

На сколько я понимаю, это задачи на применение **теоремы Гаусса** и **закона полного тока**. Теорема Гаусса

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

позволяет вычислять электрическое поле заряда Q, распределённого в пространстве с плотностью ρ.

Альтернативный для магнитного поля закон полного тока

$$\oint_L \boldsymbol{B} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$$

позволяет вычислять магнитное поле, создаваемое током I, распределённым в пространстве с некоторой плотностью j.

0.4 Электростатическое поле внутри бесконечной призмы

Задача состоит в следующем: есть четыре бесконечных (в длину) проводящих электрода, каждый под каким-то своим потенциалом. Надо найти распределение потенциала внутри призмы. Эта задача решается простым разделением переменных. Нужно только отметить, что, поскольку призма *бесконечно длинная*, потенциал не зависит от продольной координаты. То есть, остаётся просто решить задачу Дирихле для двуменрого уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u & = 0, \\ u(x=0) & = u_1, \\ u(x=a) & = u_2, \\ u(y=0) & = u_3, \\ u(y=b) & = u_4. \end{cases}$$

Важно! при решении уравнения методом разделения переменных предполагается, что граничные условия однородные (нулевые). Это нужно потому (на сколько я могу судить), что при решении задачи Штурма-Лиувилля, если условия неоднородные, невозможно разделить аргумент функции-решения, и коэффициент перед ней. Если же условие нулевое, то всё просто. Например, при решении данной задачи, получим уравнение

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

с решением $X_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x)$. Для примера, возьмём $X(0) = u_1$. Тогда:

$$u_1 = A_n \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = A_n.$$

Пока всё относительно хорошо, но теперь для второго граничного условия для $X(x)$:

$$u_2 = u_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot a) + B_n \sin(\sqrt{\lambda} \cdot a).$$

И что делать? А если бы условия были нулевые, всё было бы решаемо.

Поэтому, чтобы сделать граничные условия однородными, надо воспользоваться линейностью уравнения Лапласа, и разделить задачу на четыре [6], в каждой из которых достаточное количество нулевых граничных условий. Ненулевое граничное условие нужно будет разложить в ряд Фурье, и таким образом отыскать значение недостающего коэффициента, который не определяется из нулевых условий.

Литература

[1] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. http://ind.pskgu.ru/ebooks/tihonov.html

[2] Potential theory. https://web.stanford.edu/class/math220b/handouts/potential.pdf

[3] Теорема Гаусса её применение к вычислению электрических полей простейших распределений плотности заряда. http://phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/Gos_Ekzam-13-14-1.pdf

[4] А.Н. Паршаков. Принципы и практика решения задач по общей физике. http://pstu.ru/files/file/oksana/2011/fakultety_i_kafedry/fpmm/prikladnaya_fizika/informacionnye_resursy/principy_i_praktika_resheniya_zadach_po_obschey_fizike__chast_2__elektromagnetizm.pdf

[5] А.М. Купцов. Теоретические основы электротехники. Решения типовыз задач. http://window.edu.ru/resource/045/76045/files/emp.pdf

[6] Anthony Peirce. Lecture 24: Laplace's equation. https://www.math.ubc.ca/~peirce/M257_316_2012_Lecture_24.pdf

[7] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математический физики. Дополнение II Специальные функции. Часть II Сферические функции. http://old.pskgu.ru/ebooks/ts/ts_dop2_2_1.pdf