Тема 2. Операционное исчисление.
Преобразование Лапласа.

24 сентября 2019 г.

Преобразованием Лапласа называется отображение вида [1]

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(p),$$

где $f(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p = s + i\sigma \in \mathbb{C}$, такое, что

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv TF[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t.$$

$f(t)$ называется *оригиналом*, а $F(p)$ его *изображением по Лапласу*. Пишут:

$$f(t) \risingdotseq F(p), \text{ и } F(p) \fallingdotseq f(t).$$

Ограничения на функцию $f(t)$:

1. $\forall t < 0 f(t) \equiv 0$. Это условие всегда можно полагать верным при решении задач Коши.

2. $\forall t > 0,\ f(t)$ на каждом конечном сегменте области определения имеет только конечное число разрывов первого рода, а в остальных точках удовлетворяет условию Липшица-Гельднера:

$$\exists \tau_0 > 0 \forall \tau \leq \tau_0 |f(t + \tau) - f(t)| \leq A|\tau|^\alpha.$$

   Любая непрерывно-дифференцируемая функция удовлетворяет этому условию.

3. $f(t)$ растёт не быстрее показательной функции:

$$|f(t)| < Me^{p_0 t}.$$

   Это всегда справедливо для физических процессов.

Обратное преобразование

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) \mathrm{d}p,\ a \in \mathbb{R}.$$

0.1 Свойства [1]

1. Линейность.

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\left[\alpha f(t)\beta g(t)\risingdotseq\alpha F(p)+\beta G(p)\right]$$

   Следствие линейности интеграла.

2. Теорема подобия.

$$\forall\alpha>0\left[f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\right].$$

   (Заменить $\alpha t=\tau$ в интеграле.)

3. Теорема запаздывания.

$$f(t-\tau)\risingdotseq e^{-p\tau}F(p).$$

   Поскольку $f(t-\tau)\equiv 0$, $\int_0^\infty\to\int_\tau^\infty$; $\tau<t<\infty$, $0<\underbrace{t-\tau}_{\theta}<\infty$, $t=\theta+\tau$.

4. Теорема смещения.

$$e^{p_0t}f(t)\risingdotseq F(p-p_0).$$

5. Дифференцирование оригинала. $f\in C^n$

$$f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(+0),$$
$$\dots$$
$$f^{(n)}(t)\risingdotseq p^nF(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-1-k}f^{(k)}(+0).$$

6. Дифференцирование изображения.

$$F^{(n)}(p)\fallingdotseq(-t)^nf(t).$$

7. Интегрирование оригинала.

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\risingdotseq\frac{1}{p}F(p).$$

8. Интегрирование изображения.

$$\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q \risingdotseq \frac{1}{t} f(t).$$

9. Предельные теоремы.

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0),$$
$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty) \equiv \lim_{t\to\infty} f(t).$$

0.1.1 Свёртка

Свёрткой называется:

$$\begin{aligned} f(t) \otimes g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Теорема о свёртке:

$$f(t) \otimes g(t) \fallingdotseq F(p) \cdot G(p).$$

Интеграл Дюамеля В радиотехнике (см. Рис. 1)

$$V_2(t) = \int_0^t h(t-\tau) V_1(\tau)\mathrm{d}\tau = h(t) \otimes V_1(t).$$

Где удобно использовать операционное исчисление? Для решения электротехнических задач. В цепочке из Рис. 2:

$$u = Ri, \tag{R-элемент}$$
$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{L-элемент}$$
$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{C-элемент}$$

Рис. 1: Линейный четырёхполюсник с переходной характеристикой $h(t)$.

Можно было бы записать:

$$U_1 = U_R + U_L + \underbrace{U_C}_{U_2},$$
$$U_1 = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t.$$

А можно представить L-/C-элементы как реактивное сопротивление, и использовать делитель напряжения:

$$U_2(p) = K(p)U_1(p),$$
$$K(p) = \frac{{}^1/_{pC}}{pL + R + {}^1/_{pC}},$$

$K(p)$ – коэффициент передачи.

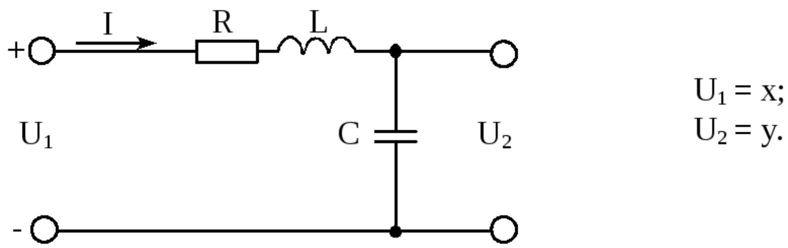

Рис. 2: RLC-четырёхполюсник.

0.2 Первая теорема разложения

Если функция $F(p)$ – аналитична [1] в окрестности $|p| > R$ бесконечно удалённой точки, и имеет в ней разложение в ряд Лорана:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

то её оригинал:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

Существует вторая, можно её почитать в [1, стр. 27]. На 26-й странице пример применения первой теоремы разложения при решении задачи.

0.3 Связь с преобразованием Фурье

Фурье-образ (или частотный спектр функции)

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

[1] В окрестности любой точки своей области определения представима сходящимся степенным рядом.

Условия существования преобразования Фурье [2]

1. $f(t)$ однозначная функция, с конечным числом минимумов, максимумов, и разрывов;

2. Условие абсолютной интегрируемости: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$.

Пример. $\int_{-\infty}^{+\infty} |1(t)|\mathrm{d}t \to \infty$, поэтому у этой функции нет Фурье-образа. Что можно сделать в этом случае?

Домножить $f(t)$ на e^{-st}, чтобы интеграл получившегося произведения сходился. Но если так сделать, получим

$$\begin{aligned}
F(s, i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t,\ p = s + i\omega \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(-t)e^{-p(-t)}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}[f(-t); -p] + \mathcal{L}[f(t); p] = \mathcal{L}_B[f(t)].
\end{aligned}$$

Последнее равенство – двустороннее преобразование Лапласа; таким образом, непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа.

0.4 Теорема Планшереля

Пусть $f_1, f_2 \in L^2$ (квадратично-интегрируемые функции), $g_1(u), g_2(u)$ – их преобразования Фурье. Тогда верно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)g_2(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(-x)\mathrm{d}x.$$

В упрощённой форме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2\mathrm{d}w = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t;$$

физическая интерпретация [3]: *энергия колебательного сигнала равна сумме энергий его гармонических компонент.*

Литература

[1] http://www.lib.unn.ru/students/src/Laplace%20transform.pdf

[2] http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/2.html

[3] https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/117/965.htm