

Тема 2. Операционное исчисление.  
Преобразование Лапласа.

25 сентября 2019 г.

# Оглавление

0.1	Определение . . . . .	1
0.2	Свойства [1] . . . . .	2
0.3	Свёртка (convolution) . . . . .	4
0.4	Связь с преобразованием Фурье . . . . .	6
0.5	Задачи . . . . .	7
0.5.1	Дифференциальные уравнения . . . . .	7
0.5.2	Интегральные уравнения . . . . .	7

## 0.1 Определение

Преобразованием Лапласа называется отображение вида [1]

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(p),$$

где  $f(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $p = s + i\sigma \in \mathbb{C}$ , такое, что

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv TF[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

$f(t)$  называется *оригиналом*, а  $F(p)$  его *изображением по Лапласу*. Пишут:

$$f(t) \doteq F(p), \text{ и } F(p) \doteq f(t).$$

### Ограничения на функцию $f(t)$ :

1.  $\forall t < 0 f(t) \equiv 0$ . Это условие всегда можно полагать верным при решении задач Коши.

2.  $\forall t > 0$ ,  $f(t)$  на каждом конечном сегменте области определения имеет только конечное число разрывов первого рода, а в остальных точках удовлетворяет условию Липшица-Гельднера:

$$\exists \tau_0 > 0 \forall \tau \leq \tau_0 |f(t + \tau) - f(t)| \leq A|\tau|^\alpha.$$

Любая непрерывно-дифференцируемая функция удовлетворяет этому условию.

3.  $f(t)$  растёт не быстрее показательной функции:

$$|f(t)| < Me^{p_0 t}.$$

Это всегда справедливо для физических процессов.

### Обратное преобразование

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad a \in \mathbb{R}.$$

## 0.2 Свойства [1]

1. Линейность.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} [\alpha f(t) + \beta g(t) \rightleftharpoons \alpha F(p) + \beta G(p)]$$

Следствие линейности интеграла.

2. Теорема подобия.

$$\forall \alpha > 0 \left[ f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \right].$$

(Заменить  $\alpha t = \tau$  в интеграле.)

3. Теорема запаздывания.

$$f(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-p\tau} F(p).$$

Поскольку  $f(t - \tau) \equiv 0$ ,  $\int_0^\infty \rightarrow \int_\tau^\infty$ ;  $\tau < t < \infty$ ,  $0 < \underbrace{t - \tau}_\theta < \infty$ ,

$$t = \theta + \tau.$$

4. Теорема сдвига.

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0).$$

5. Дифференцирование оригинала.  $f \in C^n$

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0),$$

...

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(+0).$$

6. Дифференцирование изображения.

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t).$$

7. Интегрирование оригинала.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

8. Интегрирование изображения.

$$\int_p^\infty F(q) dq \doteq \frac{1}{t} f(t).$$

9. Предельные теоремы.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0),$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

**Теорема 1** (Первая теорема разложения). *Если функция  $F(p)$  – аналитична<sup>1</sup> в окрестности  $|p| > R$  бесконечно удалённой точки, и имеет в ней разложение в ряд Лорана:*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

---

<sup>1</sup>В окрестности любой точки своей области определения представима сходящимся степенным рядом.

то её оригинал:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

**Замечание 1.** Существует вторая теорема разложения, в [1, стр. 27] можно её почитать. Также, на 26-й странице пример применения первой теоремы разложения при решении задачи.

**Теорема 2** (Планшереля). Пусть  $f_1, f_2 \in L^2$  (квадратично-интегрируемые функции),  $g_1(u), g_2(u)$  – их преобразования Фурье. Тогда верно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)g_2(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(-x)dx.$$

В упрощённой форме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2 dw = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt;$$

физическая интерпретация [3, после ф-лы 8]: энергия колебательного сигнала равна сумме энергий его гармонических компонент.

### 0.3 Свёртка (convolution)

Свёрткой называется:

$$\begin{aligned} f(t) \otimes g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Характерным для свёртки является наличие аргумента  $t-\tau$  у одной из функций (границы интеграла могут быть и другие).

**Теорема 3** (о свёртке).

$$f(t) \otimes g(t) \doteq F(p) \cdot G(p).$$

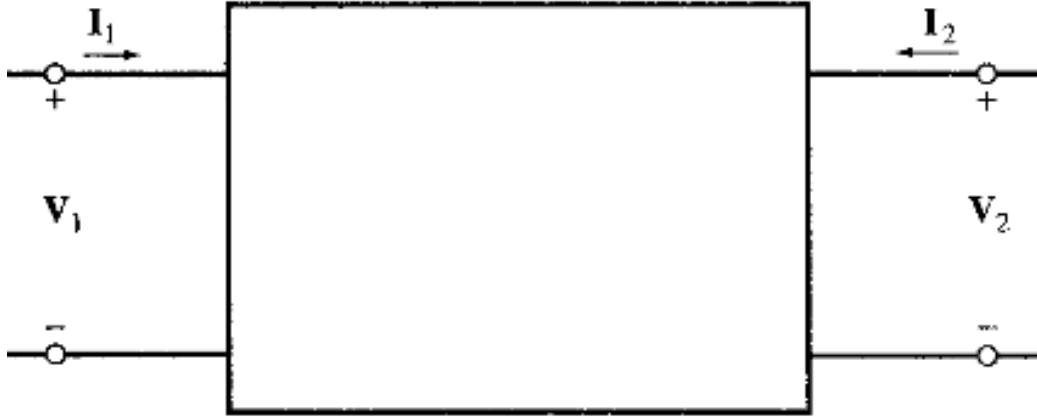


Рис. 1: Линейный четырёхполюсник с переходной характеристикой  $h(t)$ .

**Интеграл Дюамеля** В радиотехнике (см. Рис. 1)

$$V_2(t) = \int_0^t h(t - \tau)V_1(\tau)d\tau = h(t) \otimes V_1(t).$$

Где удобно использовать операционное исчисление? Для решения электротехнических задач. В цепочке из Рис. 2:

$$u = Ri, \quad (\text{R-элемент})$$

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad (\text{L-элемент})$$

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (\text{C-элемент})$$

Можно было бы записать:

$$U_1 = U_R + U_L + \underbrace{U_C}_{U_2},$$

$$U_1 = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

А можно представить L-/C-элементы как реактивное сопротивление,

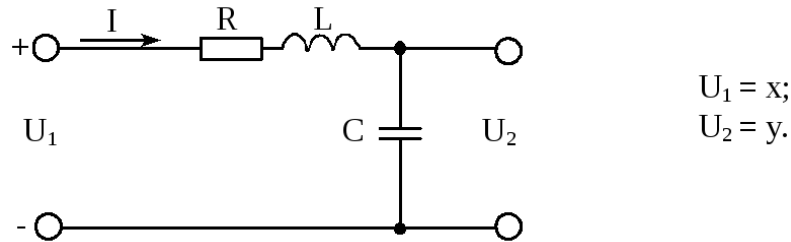


Рис. 2: RLC-четырёхполюсник.

и использовать делитель напряжения:

$$U_2(p) = K(p)U_1(p),$$

$$K(p) = \frac{1/pC}{pL + R + 1/pC},$$

$K(p)$  – коэффициент передачи.

## 0.4 Связь с преобразованием Фурье

Фурье-образ (или частотный спектр функции)

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

### Условия существования преобразования Фурье [2]

1.  $f(t)$  однозначная функция, с конечным числом минимумов, максимумов, и разрывов;
2. Условие абсолютной интегрируемости:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$ .

*Пример.*  $\int_{-\infty}^{+\infty} |1(t)| dt \rightarrow \infty$ , поэтому у этой функции нет Фурье-образа. Что можно сделать в этом случае?

Домножить  $f(t)$  на  $e^{-st}$ , чтобы интеграл получившегося произведения сходиллся. Но если так сделать, получим

$$\begin{aligned} F(s, i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}e^{-i\omega t}dt, \quad p = s + i\omega \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-pt}dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(-t)e^{-p(-t)}dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \mathcal{L}[f(-t); -p] + \mathcal{L}[f(t); p] = \mathcal{L}_B[f(t)]. \end{aligned}$$

Последнее равенство – двустороннее преобразование Лапласа; таким образом, непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа.

## 0.5 Задачи

### 0.5.1 Дифференциальные уравнения

В задачах по теме присутствуют задачи Коши, которые надо решить используя операционное исчисление. Как это делать объяснено в [4]. В целом, ничего сложного, надо просто:

1. Используя теорему о дифференцировании оригинала 5 (и таблицу преобразований для элементарных функций) записать алгебраическое уравнение для изображений. На этом шаге используется тот факт, что нам даны начальные условия – это позволяет исключить символ  $f^{(k)}(+0)$ .
2. Выразить образ искомой функции в виде дроби. В числителе и знаменателе дроби – многочлены от  $p$ , и знаменатель хорошо бы разложить на множители; это упростит следующий шаг.
3. Теперь, чтобы произвести обратное преобразование, нужно разложить получившуюся дробь в сумму простых дробей. Для этого используется метод неопределённых коэффициентов. [5]
4. Когда решение для образа функции представлено суммой простых дробей, производим обратное преобразование Лапласа.



### 0.5.2 Интегральные уравнения

Последняя задача – интегральное уравнение. Если быть точным, перед нами уравнение Вольтерра второго рода. [6, см. ф-лу 8.11] Там можно заметить интеграл типа “свёртки”  $\int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau$  (аргумент одной из функций  $t - \tau$ ).

Чтобы его решить, надо применить теорему 3 (о свёртке), получить алгебраическое уравнение для образов, разрешить его относительно образа искомой функции, по возможности упростить получившуюся дробь, и произвести обратное преобразование Лапласа.

# Литература

- [1] А.А. Дубков, Н.В. Агудов. Преобразование Лапласа. Учебно-методическое пособие. <http://www.lib.unn.ru/students/src/Laplace%20transform.pdf>
- [2] Преобразование Фурье. <http://drive.ispu.ru/elib/lebedev/2.html>
- [3] Фурье преобразование. <https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/117/965.htm>
- [4] Как решить дифференциальное уравнение методом операционного исчисления? [http://mathprofi.ru/reshenie\\_diffurov\\_metodom\\_operacionnogo\\_ischislenija.html](http://mathprofi.ru/reshenie_diffurov_metodom_operacionnogo_ischislenija.html)
- [5] Интегрирование дробно-рациональной функции. Метод неопределенных коэффициентов [http://mathprofi.ru/integraly\\_ot\\_drobno\\_racionalnoj\\_funkcii.html](http://mathprofi.ru/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii.html)
- [6] Интегральные уравнения типа “свёртки.” <https://studfiles.net/preview/6312517/page:9/>