Тема 4. Задача 12

10 декабря 2019 г.

Условие задачи: Решить уравнение Пуассона **в кольце**

$$\begin{aligned}\Delta u &= 8r^{-5}\sin\phi,\\ u(1,\phi) &= \sin\phi,\\ u'_r(2,\phi) &= -12\sin\phi.\end{aligned}$$

Решение ищем в виде суммы общего решения ***однородного уравнения*** с ***неоднородными граничными условиями***, и частного решения ***неоднородного уравнения*** с ***однородными граничными условиями***.

0.1 Отыскание решения однородного уравнения

...

0.2 Отыскание частного решения

Будем решать частное решение уравнения в виде функции в правой части:

$$u_1(r,\phi) = W(r)\sin\phi.$$

Поставив u_1 в исходное уравнение и сократим $\sin\phi$:

$$\cancel{\sin\phi}\frac{1}{r}[W' + rW''] - \frac{W}{r^2}\cancel{\sin\phi} = 8r^{-5}\cancel{\sin\phi}.$$

В итоге, надо решить уравнение

$$r^2W'' + rW' - W = 8r^{-3}. \tag{1}$$

Введём замену $r = e^t$. Напоминаю, что:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{r},\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} &= \frac{\mathrm{d}W}{r\mathrm{d}t},\\ \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}r^2} &= \frac{\mathrm{d}^2W}{r^2\mathrm{d}t^2}.\end{aligned}$$

Здесь подобное уравнение решается. Каким образом они свели (5.2) к (5.3) через эту замену я не очень понял. У меня W' не уходит.

Но в целом, понятно, что получаем диффур, который надо решить.