

Национальный Исследовательский Ядерный Университет “МИФИ”  
(НИЯУ МИФИ)



На правах рукописи

Аксентьев Александр Евгеньевич

**Метод замороженного спина для поиска электрического  
дипольного момента дейтрана в накопительном кольце**

Специальность 01.04.20 —

«Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор Сеничев Юрий Валерьевич  
кандидат физ.-мат. наук, доцент Полозов Сергей Маркович

Москва — 2019

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Принцип измерения ЭДМ методом “замороженного спина” . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1 Общее введение в методологию . . . . .	14
1.1.1 Уравнение Т-БМТ . . . . .	14
1.1.2 Концепция замороженного спина . . . . .	15
1.1.3 Реализация условия замороженности спина в накопительном кольце . . . . .	15
1.2 Методы, основанные на принципе “замороженного спина” . . . . .	16
1.2.1 Метод коллаборации srEDM . . . . .	16
1.2.2 Spin Wheel метод . . . . .	18
1.2.3 Общая классификация методов FS-типа . . . . .	19
1.2.4 Общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце . . . . .	20
1.2.5 Метод Frequency Domain . . . . .	23
1.2.6 Понятие эффективного Лоренц-фактора . . . . .	26
1.3 Варианты магнитооптических структур накопительных колец с “замороженным,” и “квази-замороженным” спином . . . . .	28
1.3.1 Структура с “замороженным” спином . . . . .	28
1.3.2 Структура с “квази-замороженным” спином . . . . .	29
<b>Глава 2. Общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце, и их решения . . . . .</b>	<b>36</b>
2.1 Возмущения спиновой динамики . . . . .	36
2.1.1 Постановка проблемы . . . . .	36
2.1.2 Численное моделирование . . . . .	37
2.1.3 Анализ . . . . .	38
2.1.4 Выводы . . . . .	40
2.2 Декогеренция спинов частиц пучка . . . . .	41
2.2.1 Требования к времени когеренции пучка . . . . .	41

2.2.2	Происхождение декогеренции . . . . .	42
2.2.3	Теория сектупольного подавления декогеренции . . . . .	42
2.2.4	Численное моделирование сектупольного подавления декогеренции в идеальном ускорителе . . . . .	43
2.2.5	Переход декогеренции из горизонтальной плоскости в вертикальную, при появлении неидеальностей . . . . .	45
2.2.6	Численное моделирование эксперимента по подавлению декогеренции в неидеальном ускорителе . . . . .	46
2.2.7	Анализ механизма подавления декогеренции сектупольными полями . . . . .	48
2.3	Ошибки неидеальности ускорителя . . . . .	50
2.3.1	Зависимость от распределения неидеальностей . . . . .	51
2.3.2	Равенство частот прецессии спинов частиц при движении в прямом и обратном направлениях . . . . .	52
2.4	Смена полярности ведущего поля . . . . .	53
2.4.1	Алгоритм калибровки . . . . .	54
2.4.2	Численное моделирование . . . . .	55
2.4.3	Результаты . . . . .	56
2.5	Спин-тюн эквивалентность траекторий частиц с одинаковыми значениями эффективного Лоренц-фактора . . . . .	57
2.5.1	Формулировка А . . . . .	57
2.5.2	Формулировка В . . . . .	60
<b>Глава 3. Результаты на COSY</b>	. . . . .	<b>87</b>
3.1	Ускоритель COSY . . . . .	87
3.2	Высокоточное измерение спин-тюна . . . . .	88
3.3	Юстировка квадрупольей при помощи пучка . . . . .	89
3.4	Оптимизация времени когерентности . . . . .	90
3.4.1	Процедура оптимизации . . . . .	91
3.4.2	Изменение SCT при переходе от внешней к внутренней части пучка . . . . .	93
3.4.3	Зависимость времени когерентности спина от силы сектуполя . . . . .	93

<b>Заключение . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>Приложение А. Статистическое моделирование . . . . .</b>	<b>110</b>
A.1 Предварительный анализ . . . . .	111
A.1.1 Дисперсия оценки частоты . . . . .	112
A.1.2 Модуляция выборки . . . . .	114
A.2 Модель частоты событий на поляриметре . . . . .	115
A.3 Асимметрия сечения . . . . .	116
A.4 Временное окно измерений . . . . .	117
A.5 Результаты моделирования . . . . .	119

## Введение

Данное диссертационное исследование является частью проекта, посвящённого поиску ЭДМ элементарных частиц.

Одной из основных проблем современной физики является барионная асимметрия Вселенной, т.е. преобладание числа частиц над числом античастиц в наблюданной Вселенной. На текущий момент нет никаких свидетельств существования первичной антиматерии в нашей галактике; количество наблюданной антиматерии согласуется с её производством во вторичных процессах. Также не наблюдается фонового гамма-излучения от нуклон-антинуклонных взаимодействий, которое можно было бы ожидать, если бы вещество и антивещество во Вселенной были бы разделены на кластеры галактик. [1]

В своей статье 1967 года, академик АН СССР А.Д. Сахаров сформулировал три необходимых условия, которым должен был удовлетворять процесс бариогенеза, чтобы материя и антиматерия в первичной Вселенной произошли с разными скоростями. Побудительным мотивом формулировки стало открытие космического фонового излучения и нарушение СР четности в системе нейтральных К-мезонов. [2] Три необходимых условия Сахарова таковы:

- несохранение барионного числа;
- нарушение зарядовой симметрии С- и СР-симметрии;
- взаимодействие вне теплового равновесия.

Если они существуют, перманентные ЭДМ частиц нарушают Р- и Т-симметрии, а значит, по теореме СРТ — их существование можно связать с нарушением СР-симметрии. Стандартная Модель (СМ) элементарных частиц позволяет учесть СР-нарушение посредством матрицы Кабибо-Кабаяши-Масакавы, однако значения ЭДМ, предсказываемые ей для, например, нейтрона, лежат в диапазоне от  $10^{-33}$  до  $10^{-30}$  e·см. [3] К примеру, теория SUSY (суперсимметрия) предсказывает наличие ЭДМ гораздо большей величины (на уровне  $10^{-29} - 10^{-24}$  e·см). Таким образом, ЭДМ элементарных частиц являются чувствительным индикатором физики за гранью СМ.

Поиск ЭДМ частиц был начат более 50-ти лет назад. Первый эксперимент по измерению ЭДМ нейтрона был проведён др. Н.Ф. Рэмзи (dr. N.F. Ramsey) в конце 1950-х годов. По результатам эксперимента, верхняя граница ЭДМ нейтрона была ограничена величиной  $5 \cdot 10^{-20}$  e·см. [4] С тех пор было проведено

множество более точных экспериментов, и на данный момент, верхняя граница на ЭДМ нейтрона находится на уровне  $2.9 \cdot 10^{-26} \text{ e}\cdot\text{см}$ . [5; 6]

Большинство экспериментов проводятся на зарядово-нейтральных частицах, таких как нейтрон или атомы. ЭДМ заряженных частиц, таких как протон или дейtron, можно измерить в накопительном кольце, на основе прецессии поляризации пучка в электрическом поле в системе центра масс пучка.

Идея использования накопительного кольца для детектирования ЭДМ заряженный частиц появилась в процессе разработки  $g - 2$  эксперимента [7] в Брукхейвенской Национальной Лаборатории (BNL, США). По результатам экспериментов в BNL, верхняя граница электрического дипольного момента мюона была установлена на уровне  $10^{-19} \text{ e}\cdot\text{см}$ . [8] В 1990-х годах, дискуссия преимущественно велась вокруг мюонного эксперимента [9], однако также рассматривался и дейtron, у которого похожее отношение аномального магнитного момента к массе.

В 2004 году, коллаборацией srEDM (Storage Ring EDM Collaboration) [10] в BNL был предложен эксперимент 970 по детектированию ЭДМ дейтрана на уровне  $10^{-27} \text{ e}\cdot\text{см}$  в накопительном кольце.

Тогда же была предложена идея “замороженного спина” (“frozen spin” method [9]), в котором направления векторов спина и импульса частицы совпадают в каждый момент времени. Это условие должно обеспечивать максимальный рост сигнала электрического дипольного момента при его наличии. Теретически, условие “замороженного спина” означает нулевой спиновый резонанс, при котором ориентация спин-вектора остается пространственно-неизменной при отсутствии электрического дипольного момента. Тогда, любой рост вертикальной компоненты поляризации пучка детектирует наличие электрического дипольного момента. Таким образом, измеряя амплитуду вертикальной компоненты спина, мы определяем величину электрического дипольного момента. Реализация этой концепции потребует специальное накопительное кольцо и определенных параметров пучка.

Однако, в последствии выяснилось, что “замороженный спин” – лишь одно из условий успешного детектирования электрического дипольного момента. В частности, для измерения ЭДМ с требуемой точностью необходимо накопление большой статистики, которое возможно при сохранении поляризации, то есть максимальной односторонности спина всех частиц в пучке, в течение достаточно длительного времени, порядка 1000 секунд.

Другим важным условием является требование исключения примешивания к сигналу ЭДМ сигнала магнитного дипольного момента, возникающего из-за различного рода несовершенств элементов кольца и соизмеримого с ЭДМ.

Сложность метода “замороженного спина” заключается в том, что при нулевом спиновом резонансе малейшие возмущения со стороны магнитного и электрического полей приведут к нарушению ориентации оси стабильного спина, что сразу же внесет неопределенность в измерение вертикальной компоненты спина. Причем, чем выше точность измерения ожидаемой величины электрического дипольного момента, тем более нереализуемы технологические требования к методике измерения электрического дипольного момента. Например, численные оценки показывают (личное обсуждение с Ю.В. Сеничевым), что для измерения ЭДМ на уровне  $10^{-29} \text{ e}\cdot\text{см}$  потребуется установка всех элементов кольца с точностью  $10^{-14} \text{ м}$ , что находится за пределами технологических возможностей современных геодезических методов.

Начиная с 2005 года, на циклотроне AGOR KVI-центра передовых радиационных технологий (KVI-Center for Advanced Radiation Technology) в университете Гронингена была проведена серия тестов по технико-экономическому обоснованию эксперимента.

В 2008 году начались исследования на накопительном кольце COSY в Исследовательском центре “Юлих” (Forschungszentrum Jülich GmbH, Германия). В период с 2015 по 2019 автор принимал непосредственное участие в этих работах. Исследования велись по трем направлениям.

Первое: экспериментальное изучение декогеренции спина частиц в пучке. Поскольку кольцо COSY не отвечает требованиям реализации условия “замороженного спина,” декогеренция изучалась по времени исчезновения средней по пучку ассиметрии сечения взаимодействия в реакции рассеяния дейtronного пучка на углеродной мишени [11]. Вектор поляризации пучка при этом быстро прецессировал в плоскости замкнутой орбиты, что, однако, не влияет на сделанные выводы.

Второе направление — экспериментальное детектирование сигнала электрического дипольного момента с помощью возбуждения параметрического резонанса прецессии спина. Сила резонанса при этом пропорциональна величине детектируемого ЭДМ. Резонансный метод не требует условия “замороженного спина,” но его чувствительность на четыре-пять порядков ниже; в лучшем случае, его достижимый предел измерения ЭДМ находится на уровне  $10^{-24} \text{ e}\cdot\text{см}$ .

Третье направление — разработка метода измерения ЭДМ, и его полномасштабное моделирование с целью его совершенствования, а также разработки новых подходов к измерению электрического дипольного момента заряженной частицы с использованием накопительного кольца.

Впоследствии, эти тесты развились в программу по изучению спин-орбитальной динамики пучка для разработки технологий, требуемых для эксперимента по поиску ЭДМ. В этом же году было сделано второе предложение [12] эксперимента по поиску ЭДМ дейtronна на основе концепции “замороженного спина”; в этот раз — на уровне  $10^{-29}$  e·см при условии накопления результатов измерения в течение года.

В то же время было решено, что эксперимент по детектированию ЭДМ протона, поскольку его можно измерить в полностью электростатическом кольце, обладает некоторыми техническими достоинствами. Среди таковых предполагается возможность одновременной инжекции противоположно-циркулирующих пучков, что позволяет уменьшить систематические ошибки измерения ЭДМ протона, вызванные несовершенством элементов накопительного кольца. Тем не менее, на COSY была продолжена работа над экспериментом с дейtronом, ввиду того, что результаты, полученные для дейтрана, распространяются и на протон.

В 2011 году была сформирована коллаборация JEDI (Jülich Elecric Dipole moment Investigations). [13] Целью коллаборации является не только разработка ключевых технологий для srEDM, но также и проведение предварительного эксперимента прямого наблюдения ЭДМ дейтрана.

В 2018 году, JEDI-коллаборация выполнила первое измерение дейтранного ЭДМ на COSY на основе резонансного метода [14; 15] с использованием специально разработанного для этой цели RF Wien filter [16; 17]. В кольце с незамороженным спином ЭДМ генерирует мало-амплитудные осцилляции вертикальной компоненты поляризации пучка; например, при импульсе дейтранов 970 МэВ/с, как на COSY, амплитуда колебаний ожидается на уровне  $3 \cdot 10^{-10}$  при величине ЭДМ  $d = 10^{-24}$  e·см. В связи с малостью амплитуды колебаний, установленный в данном эксперименте предел измерения ЭДМ оценивается на уровне  $d = 10^{-24}$  e·см.

**Целью** данной работы является развитие метода поиска электрического дипольного момента дейтрана с использованием накопительного кольца на

основе измерения частоты прецессии спина (frequency domain method) с экспериментально подтвержденной точностью.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Формулирование метода измерения электрического дипольного момента дейтрона на основе измерения частоты прецессии спина (frequency domain method).
2. Анализ требований к магнитооптической структуре кольца-накопителя, ориентированного на поиск электрического дипольного момента дейтрона.
3. Исследование явления декогеренции спина пучка дейтронов в окрестности состояния “замороженного” спина.
4. Разработка метода подавления декогеренции спина с помощью нелинейных элементов.
5. Исследование влияния различного рода несовершенств элементов кольца на спин-орбитальную динамику.
6. Математическое моделирование процесса калибровки нормализованной частоты прецессии спина (спин-тюн) при попеременной смене полярности ведущего поля.
7. Анализ систематических ошибок в различных предложениях по проведению эксперимента по поиску электрического дипольного момента, и их сравнение с методом frequency domain.
8. Изучение накопления необходимой статистики измерения электрического дипольного момента.

#### **Научная новизна:**

1. Впервые предложен метод измерения электрического дипольного момента дейтрона основанный исключительно на измерении частоты прецессии спина в накопительном кольце (frequency domain method), с предположительным ограничением по точности оцениваемым на уровне  $10^{-29} \text{ e}\cdot\text{см}$ .
2. Изучена спин-орбитальная динамика дейтронного пучка в окрестности состояния “замороженного” спина в накопительном кольце для поиска электрического дипольного момента.

3. Предложен метод калибровки средней по пучку нормированной частоты прецессии спина, позволяющий уменьшить вклад систематических ошибок.
4. Введено определение эффективного значения фактора Лоренца, необходимое для определения зависимости частоты прецессии спина от координат в 3-х мерном пространстве.
5. Сделаны статистические оценки предельной чувствительности измерения ЭДМ предложенным методом в накопительном кольце.
6. Проведена общая классификация методов поиска ЭДМ в накопительном кольце; систематизированы их общие проблемы.

**Практическая значимость.** Результаты исследования вошли в Yellow Report под названием “Feasibility Study for an EDM Storage Ring,” подготавливаемый для CERN коллаборацией CPEDM, в которую входит коллаборация JEDI.

Отметим, что целью экспериментов по поиску ЭДМ является проверка СР-инвариантности. При этом, ЭДМ элементарных частиц нарушают одновременно и Р-, и Т-симметрию, а следовательно требуют дополнительных модельных предположений, для того, чтобы связать их существование с СР-нарушением. [18, стр. 1926]

Альтернативой является эксперимент TRIC (Time Reversal Invariance at Cosy), [18] в котором используется Т-нечётное, Р-чётное взаимодействие, и следовательно нарушается только Т-симметрия. В связи с этим, никаких дополнительных предположений не требуется.

TRIC входит в физическую программу PAX (Polarised Antiproton eXperiments) [19], для которой требуются высокоинтенсивные поляризованные пучки. Существует два подхода к получению поляризованных пучков: спин-флиппинг, и спин-фильтринг. Спин-флиппинг позволяет получать более интенсивные пучки, однако на данный момент не существует стабильно- работающих методов спин-флиппинга.

Рассмотренные в настоящей работе особенности спиновой динамики вблизи состояния “замороженного” спина (в частности — подавление спин-декогеренции секступольными полями) представляют большой интерес с точки зрения сохранения поляризации в окрестности нулевого спинового резонанса.

**Методология и методы исследования.** Основными методами исследования являются математическое и компьютерное моделирование, и численный эксперимент.

## **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод измерения электрического дипольного момента дейтрона, основанный исключительно на измерении частоты прецессии спина.
2. Принцип построения магнитооптической структуры кольца-накопителя, ориентированного на поиск электрического дипольного момента дейтрона.
3. Результаты исследования декогеренции спина пучка дейтронов в окрестности состояния “замороженного” спина, и метод подавления декогеренции спина с помощью нелинейных элементов.
4. Исследование влияния различного рода несовершенств элементов кольца на спин-орбитальную динамику.
5. Метод калибровки нормализованной частоты прецессии спина (спинтюн) при попеременной смене полярности ведущего поля и его численное моделирование.
6. Результаты исследования систематических ошибок в различных предложении по проведению эксперимента по поиску электрического дипольного момента, и их сравнение с методом frequency domain.
7. Оценка требуемой статистики измерения электрического дипольного момента в накопительном кольце методом frequency domain.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается согласованием аналитических вычислений с результатами численных экспериментов. Результаты компьютерных симуляций находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

- IX международной конференции по ускорителям заряженных частиц IPAC’17, Копенгаген, Дания.
- X международной конференции по ускорителям заряженных частиц IPAC’19, Мельбурн, Австралия.
- конференциях коллаборации JEDI, Юлих, Германия, 2017–2019.
- III международной конференции “Лазерные, плазменные исследования и технологии,” (LaPlas) Москва, Россия.
- IV международной конференции LaPlas, Москва, Россия.
- V международной конференции LaPlas, Москва, Россия.
- студенческих семинарах Института Ядерных Исследований, Исследовательский Центр “Юлих,” Германия.

**Личный вклад.** Все положения, выносимые на защиту, получены автором лично. Результаты аналитического и численного исследования спин-орбитальной динамики пучка для моделирования метода измерения электрического дипольного момента дейтрона с помощью измерения прецессии спина в накопительном кольце получены автором лично либо при участии научного руководителя. Вклад соавторов в результаты, полученные совместно, оговаривается в тексте диссертации для каждого случая.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях: 4 изданы в журналах, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и Web of Science, а 7 – в трудах докладов на международных конференциях. Из последних, 4 работы входят в базу Scopus, 3 в РИНЦ.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 122 страницы, включая 38 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 47 наименований.

В **первой главе**: вводится понятие “замороженного спина”; проводится сравнительный анализ методов поиска ЭДМ в накопительном кольце с “замороженным спином”; классифицируются проблемы, общие для всех методов поиска ЭДМ в накопительном кольце; описывается метод измерения ЭДМ в накопительном кольце, позволяющий решить поставленные проблемы; представлена магнитооптическая структура накопительного кольца, в котором возможно детектировать ЭДМ дейтрона предлагаемым методом.

Во **второй главе** содержится подробное рассмотрение проблем, обозначенных в первой главе, и методов их решения; описаны результаты моделирования.

Рассматриваемые проблемы:

1. возмущения спиновой динамики частицы, вызванные её бетатронными колебаниями, и их эффект на ЭДМ-статистику частотного метода измерения;
2. декогеренция спинов частиц продольно-поляризованного пучка при работе в режиме нулевого спинового резонанса;
3. величина и свойства систематической ошибки эксперимента, связанной с МДМ-прецессией спинов частиц пучка, и вызванной неидеальностями оптической структуры ускорителя;

4. процедура смены полярности ведущего поля накопительного кольца, необходимая для исключения обозначенной выше ошибки из ЭДМ-статистики.

Отдельно рассматривается вопрос интерпретации введённого в первой главе понятия *эффективного Лоренц-фактора* ( $\gamma_{eff}$ ).

Большая часть методологии, исследованию которой посвящена настоящая работа, основана на этом понятии. Его можно определять таким образом: если две частицы имеют одно и то же значение  $\gamma_{eff}$ , то они эквивалентны с точки зрения спиновой динамики (а именно, направления и величины вектора угловой скорости спин-прецессии), независимо от частностей их орбитального движения.

Именно фиксация значения  $\gamma_{eff}$  позволяет нам исключить МДМ-прецессию, связанную с неидеальностями машины, из конечной ЭДМ-статистики частотного метода.

В третьей главе приведены наиболее значимые (для данной работы) технологии, разработанные в рамках исследований, проводимых на синхротроне COSY,<sup>1</sup> описаны результаты процедуры оптимизации времени когерентности спина (spin coherence time, SCT) при помощи семейств секступолей, установленных на COSY.

Отдельно стоит отметить наблюдение явления изменения SCT при длительном измерении поляризации деструктивными методами, связанного с переходом от внешней (оболочки) к внутренней (ядру) частям пучка. Наблюдение этого явления косвенно подтверждает теорию спин-декогеренции, изложенную в данной работе.

В **заключении** приведены результаты работы.

**Приложение А** посвящено статистическому моделированию эксперимента, и оценке его возможной статистической точности.

---

<sup>1</sup>Принадлежащем институту ядерных исследований Исследовательского центра “Юлих”, Германия

# Глава 1. Принцип измерения ЭДМ методом “замороженного спина”

## 1.1 Общее введение в методологию

### 1.1.1 Уравнение Т-БМТ

Уравнение Томаса-Баргманна-Мишеля-Телегди описывает динамику спин-вектора  $\mathbf{s}$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$  и электростатическом поле  $\mathbf{E}$ . Его обобщённая версия, включающая влияние ЭДМ, может быть записана (в системе центра масс пучка) как: [20, стр. 6]

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{s} \times (\boldsymbol{\Omega}_{MDM} + \boldsymbol{\Omega}_{EDM}), \quad (1.1a)$$

где МДМ и ЭДМ угловые скорости  $\boldsymbol{\Omega}_{MDM}$  и  $\boldsymbol{\Omega}_{EDM}$

$$\boldsymbol{\Omega}_{MDM} = \frac{q}{m\gamma} \left[ (\gamma G + 1) \mathbf{B} - \left( \gamma G + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\beta \times \mathbf{E}}{c} \right], \quad (1.1b)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{EDM} = \frac{q \eta}{m 2} \left[ \beta \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{E}}{c} \right]. \quad (1.1c)$$

В уравнениях выше,  $m$ ,  $q$ ,  $G = (g - 2)/2$  есть, соответственно, масса, заряд, и магнитная аномалия частицы;  $\beta = v_0/c$ , нормализованная скорость частицы;  $\gamma$  её Лоренц-фактор. ЭДМ множитель  $\eta$  определяется уравнением  $d = \eta \frac{q}{2mc} s$ , где  $d$  — ЭДМ частицы, а  $s$  её спин.

В стандартном формализме принято оперировать с матрицей преобразования (поворота) спина за оборот в кольце  $R$ : [15, стр. 4]

$$\mathbf{t}_R = \exp(-i\pi \mathbf{v}_s \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{n}) = \cos \pi \mathbf{v}_s - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{n}) \sin \pi \mathbf{v}_s,$$

где  $\mathbf{v}_s = \Omega_s / \Omega_{cyc}$  отношение угловой скорости поворота спин-вектора частицы к её циклотронной частоте, называемое *спин-тюн*, а  $\bar{n}$  определяет направление оси прецессии спина, и называется *инвариантной спиновой осью*.

### 1.1.2 Концепция замороженного спина

Из уравнения (1.1b) можно видеть, что, в отсутствии ЭДМ, направление вектора спина частицы пучка может быть зафиксировано относительно её вектора импульса:  $\Omega_{MDM} = \mathbf{0}$ ; иными словами, можно реализовать условие замороженности спина (Frozen Spin condition).

Достоинство работы в FS-состоянии в накопительном кольце следующее: в соответствии с уравнениями ф-л. 1.1a—1.1c, векторы МДМ и ЭДМ угловых скоростей ортогональны, а потому в общей скорости прецессии они складываются квадратично, в связи с чем сдвиг частоты прецессии, связанный с ЭДМ, становится эффектом второго порядка величины: [21, стр. 5]

$$\omega \propto \sqrt{\Omega_{MDM}^2 + \Omega_{EDM}^2} \approx \Omega_{MDM} + \frac{\Omega_{EDM}^2}{2\Omega_{MDM}}.$$

Это обстоятельство значительно ухудшает чувствительность эксперимента.

Однако, заморозив спин в горизонтальной плоскости, единственная остающаяся МДМ компонента угловой скорости сонаправлена с ЭДМ компонентой, а значит складывается с ней линейно. Таким образом, чувствительность значительно улучшается.

### 1.1.3 Реализация условия замороженности спина в накопительном кольце

Накопительные кольца могут быть классифицированы в три группы:

1. чисто магнитные (как COSY, NICA, etc),
2. чисто электростатические (Brookhaven AGS Analog Ring),
3. комбинированные.

Ввиду уравнения (1.1b), условие FS не может быть выполнено в чисто магнитном кольце.

Для некоторого числа частиц, таких как протон, чья  $G > 0$ , чисто электростатическое кольцо может быть использовано в рамках FS методологии ЭДМ эксперимента с пучком на так называемой “магической” энергии, определяемой как  $\gamma_{mag} = \sqrt{(1+G)/G}$ .

Для частиц с  $G < 0$  (таких как дейtron), это невозможно, и необходимо использовать комбинированное кольцо. Для того, чтобы реализовать FS условие в комбинированном кольце, вводится [12] радиальное электрическое поле величины

$$E_r = \frac{GB_y c \beta \gamma^2}{1 - G\beta^2 \gamma^2}. \quad (1.2)$$

## 1.2 Методы, основанные на принципе “замороженного спина”

В этом разделе мы сначала приведём два основополагающих примера методов поиска ЭДМ в накопительном кольце, основанных на принципе замороженного спина; затем обобщим эти методы до двух взаимоисключающих категорий; и завершим описанием метода Frequency Domain.

Отметим, что помимо метода замороженного спина существуют альтернативные подходы к измерению ЭДМ, например [14; 15], в котором поляризация пучка свободно вращается вокруг вертикального ведущего поля ускорителя.

### 1.2.1 Метод коллаборации srEDM

В 2008 году коллаборацией, занимающейся разработкой метода измерения ЭДМ в накопительном кольце в Брукхейвенской Национальной Лаборатории (США), [10] был предложен [12] метод измерения ЭДМ в комбинированном накопительном кольце. Пучок продольно-поляризованных дейtronов инжектируется в кольцо; с помощью поляриметрии наблюдается его спин-прецессия в вертикальной и горизонтальной плоскостях; ЭДМ сигнал — это изменение вертикальной компоненты поляризации со временем, выражаемое как: [12, стр. 8]

$$\Delta P_V = P \frac{\omega_{edm}}{\Omega} \sin(\Omega t + \Theta_0), \quad (1.3)$$

где  $\Omega = \sqrt{\omega_{edm}^2 + \omega_a^2}$ ,  $\omega_a$ ,  $\omega_{edm}$  угловые скорости вызываемые, соответственно, магнитным и электрическим дипольными моментами.

Прилагая радиальное электрическое поле  $E_r$  (величины, определяемой уравнением (1.2)), ожидается уменьшение компоненты  $\omega_a$  по крайней мере на фактор  $10^9$ ; ввиду малости величины гипотезируемой  $\omega_{edm}$ ,  $\Delta P_V \approx P\omega_{edm}t$ , и максимальная величина  $\Delta P_V$  возрастает в  $10^9$ .

Ожидаемая чувствительность эксперимента  $10^{-29} e \cdot cm$  за  $10^7$  секунд (6 месяцев) полного времени измерения. На этом уровне чувствительности, асимметрия сечения  $\varepsilon_{LR} \approx 5 \cdot 10^{-6}$  для наименьших практически реализуемых значений  $\omega_a$ . [12, стр. 18] Последнее обстоятельство ставит серьёзную проблему для поляриметрии. [21] Один из вариантов её решения лежит в применении внешнего радиального магнитного поля и измерении общей частоты прецессии засчёт МДМ и ЭДМ вместе. Это основа так называемого метода Спинового Колеса (Spin Wheel), также часто называемого Кооп-Колесом (Koop Wheel), о котором в следующем разделе.

Единственный известный систематический эффект спиновой динамики первого порядка это присутствие ненулевой средней вертикальной компоненты электрического поля  $\langle E_V \rangle$ . В этом случае, спин будет прецессировать вокруг радиального направления с частотой [12, стр. 11]

$$\omega_{syst} \approx \frac{\mu \langle E_V \rangle}{\beta c \gamma^2}.$$

Здесь важно рассмотреть два обстоятельства:

- присутствие  $\langle E_V \rangle \neq 0$  вызвано ошибкой юстировки элементов ускорителя;
- этот систематический эффект меняет знак при инжекции пучка в обратном направлении.

Последнее обстоятельство является причиной структуры инжекции пучка использованной в этом методе (сначала по-часовой, потом против-часовой; CW/CCW). Хотя  $\omega_{syst}$  меняет знак при смене направления движения пучка а значит поддаётся контролю, эта методология тем не менее не учитывает его величину. В разделе 2.3 (численно в 2.3.1), мы показываем, что при реалистичной величине (стандартного отклонения) ошибки установки спин-ротаторов 100 мкм, частота МДМ прецессии вокруг радиальной оси находится на уровне 50–100 рад/сек. [22] В связи с этим, невозможно использовать данную методологию в её оригинальном варианте.

Также, стоит отметить, что при попытке уменьшения  $\omega_{syst}$ , увеличивается влияние так называемой ошибки геометрической фазы, т.е. аккумуляции поворота вектора спина вокруг радиальной оси, связанного с некоммутативностью спин-поворотов вокруг продольной и вертикальной осей. [12, стр. 23]

### 1.2.2 Spin Wheel метод

Альтернативным подходом является “spin wheel” метод, предложенный проф. И. Коопом. [23]

В данном методе используется коллайдер с противоположно-циркулирующими ионными пучками: ЭДМ частиц первого (поляризованного) требуется измерить, а второй (неполяризованный) используется в качестве комагнетометра, чувствительного к радиальной компоненте магнитного поля.

В связи с присутствием в структуре радиальной компоненты магнитного поля, замкнутые орбиты пучков разделяются в вертикальном ( $z$ ) направлении. Если контролировать разделение орбит  $\Delta = \langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle$  с достаточной точностью (а именно, на уровне  $10^{-12}$  м [24], при ограничении ошибки измерения ЭДМ на уровне  $10^{-29}$   $e\cdot\text{см}$ ), то возможно определить ЭДМ по формуле

$$\hat{\Omega}_{EDM} = \frac{\hat{\Omega}_x(+\Delta) + \hat{\Omega}_x(-\Delta)}{2},$$

где  $\pm\Delta$  получают путём варьирования поля специально введённого для этого магнитного диполя.

В данном методе делаются как минимум два предположения, с которыми не согласен автор данной работы:

- (1) возможность измерения вертикального разделения замкнутых орбит пучков на уровне  $10^{-12}$  м посредством использования SQUID-магнитометров;
- (2) ... ????

Мы не согласны с предположением (1) на том основании, что (a) такая точность измерения смещения орбиты не была показана экспериментально, но (b) даже предполагая такую возможность, оценки [24] предполагают слабую вертикальную фокусировку и набег бета-тронной фазы 0.1, что исключает возможность коррекции спин-декогеренции в такой структуре.

### 1.2.3 Общая классификация методов FS-типа

Методы поиска электрического дипольного момента элементарных частиц можно отнести к одной из двух больших категорий, которые мы будем называть *a)* методами пространственной области (Space Domain methods), и *b)* методами частотной области (Frequency Domain methods).

В парадигме пространственной области, наблюдают за *изменением пространственной ориентации* вектора поляризации пучка, *вызванным ЭДМ*.

Метод BNL FS — это канонический пример методологии пространственной области: изначально продольно-поляризованный пучок инжектируется в накопительное кольцо; наблюдают за вертикальной компонентой его вектора поляризации. При идеальных условиях, любое отклонение вектора поляризации от горизонтальной плоскости связывают с действием ЭДМ.

Сразу же очевидны две технические проблемы такого подхода:

1. он ставит трудную задачу для поляриметрии [21];
2. он налагает очень строгие ограничения на точность установки оптических элементов ускорителя.

Первая проблема обусловлена необходимостью детектирования изменения асимметрии сечения взаимодействия  $\epsilon_{LR}$  на уровне  $5 \cdot 10^{-6}$ , чтобы достичь уровня чувствительности ЭДМ  $10^{-29}$  е·см. [12, стр. 18]

Вторая — требованием минимизировать величину угловой скорости МДМ прецессии в вертикальной плоскости [12, стр. 11]

$$\omega_{syst} \approx \frac{\mu \langle E_v \rangle}{\beta c \gamma^2}, \quad (1.4)$$

индуцированной неидеальностями ускорителя.

В соответствии с оценками, сделанными проф. Сеничевым, чтобы выполнить это условие, геодезическая точность установки элементов ускорителя должна достичь  $10^{-14}$  м. Технологии сегодняшнего дня позволяют получить только около  $10^{-4}$  м.

При практически-достижимом уровне неточности установки элементов,  $\omega_{syst} \gg \omega_{edm}$ , и изменения ориентации вектора поляризации по большей части не имеют отношения к ЭДМ.

Другой критичной проблемой, возникающей в пространственной области, является ошибка геометрической фазы. [25, стр. 6] Проблема заключается в

том, что даже если каким-то образом занулить неидеальности электромагнитного поля (связанные с неточностью установки оптических элементов, или же случайными возмущениями поля) в *среднем*, поскольку повороты спина не коммутируют, угол поворота поляризации, вызванный ими, не будет равен нулю.

Напротив, методология частотной области основана на измерении ЭДМ-добавки к полной (МДМ и ЭДМ вместе) *угловой скорости* прецессии спина.

Вектор поляризации заставляют вращаться вокруг почти-постоянного, выделенного направления, определённого вектором  $\bar{n}$ , с достаточно высокой угловой скоростью, при которой её величину можно всегда легко измерить. Помимо упрощения условий поляриметрии, определённость вектора угловой скорости является защитой от ошибки геометрической фазы.

Так называемое Спин-Колесо может быть введено в систему извне (как в методе spin wheel), или же под ту же цель можно приспособить поля неидеальности машины (скорость вращения колеса определяется уравнением (1.4)). Последнее возможно потому, что  $\omega_{syst}$  меняет знак при смене направления движения пучка. [12, стр. 11]

#### 1.2.4 Общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце

В качестве введения в предлагаемую методологию частотной области, кратко суммируем некоторые проблемы, общие для всех методов поиска ЭДМ в накопительном кольце; их можно разделить на две большие категории:

- Проблемы, решаемые Спин-Колесом:
  - случайные возмущения электромагнитного поля;
  - бетатронное движение.
- Проблемы, имеющие частные решения:
  - декогеренция спина;
  - неидеальности ускорителя.

## Возмущения спиновой динамики

Проблемы первой категории — это такие, из-за которых возникает ошибка геометрической фазы.

И случайно-возникающие, и фокусирующие поля, действуя на бетатронно-осциллирующую частицу, возмущают направление и величину вектора угловой скорости спин-прецессии. Эффектом является спин-кик в направлении, определяемом возмущением.

Положим ЭДМ создаёт спин-кик вокруг радиальной ( $\hat{x}$ -) оси. Величина вектора угловой скорости имеет общую форму

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

где  $\omega_y$  минимизируется путём удовлетворения условия замороженного спина;  $\omega_z$  (чья постоянная составляющая вызвана неидеальностями ускорителя) может быть минимизирована установкой продольного соленоида на оптической оси.<sup>1</sup>

В пространственной области, стремятся также минимизировать добавку  $\omega_{\langle E_v \rangle}$  к радиальной компоненте угловой скорости  $\omega_x = \omega_{edm} + \omega_{\langle E_v \rangle}$ . Следовательно, и спин-кики должны быть минимизированы до величины (значительно) меньшей чем  $\omega_{edm}$ , чтобы понизить набег геометрической фазы до значений меньших, чем аккумулированная ЭДМ фаза.

Польза от Спин-Колеса, сонаправленного с угловой скоростью угловой скорости ЭДМ состоит в том, что МДМ добавки к общей угловой скорости складываются как квадраты, а потому, их эффект значительно уменьшен:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{(\omega_{edm} + \omega_{SW})^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \\ &\approx (\omega_{edm} + \omega_{SW}) \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{\omega_{SW}^2} \right]^{1/2} \\ &\approx (\omega_{edm} + \omega_{SW}) \cdot \left( 1 + \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{2\omega_{SW}^2} \right) \\ &\approx \omega_{SW} + \underbrace{\omega_{edm} + \frac{1}{2} \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{\omega_{SW}}}_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Длины 1 м, магнитное поле приблизительно  $10^{-6}$  Т.

Поскольку наша цель — наблюдение смещения значения  $\omega$ , связанное с ЭДМ, необходимо минимизировать случайную переменную  $\epsilon$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{\omega_{SW}} < \omega_{edm}.$$

Сделаем предварительные оценки. Положим  $\omega_{SW} \approx 50$  рад/сек (причины выбора этого значения разъяснены в разделе 2.3),  $\omega_{edm} \approx 10^{-9}$  рад/сек (соответствует величине ЭДМ  $10^{-29} e\cdot\text{см}$ ). Тогда, сумма  $\omega_y^2 + \omega_z^2$  должна быть меньше  $10^{-7}$  рад/сек, или же каждая из угловых скоростей меньше  $3 \cdot 10^{-4}$  рад/сек. Это на несколько порядков меньше, чем ожидаемая стандартная ошибка оценки угловой скорости, [26] и потому не является проблемой.

Остаётся рассмотреть МДМ спин-кики вокруг  $\hat{x}$ -оси; они не аттенюированы, вызывают наибольшие проблемы. Их можно поделить на три вида:  
a) постоянные, не индуцированные ошибкой юстировки оптических элементов;  
b) полу-постоянные, индуцированные ошибками юстировки; c) случайные.

Полу-постоянные радиальные спин-кики (не важно, вызванные ли магнитными, или электрическими полями) меняют знак, когда обращается направление циркуляции пучка. Влияние случайных спин-киков можно контролировать статистическим усреднением. Перманентные, нечувствительные ни к направлению ведущего поля, ни к направлению движения пучка, не поддаются контролю. Но с другой стороны, их источники не должны присутствовать в ускорителе при нормальных обстоятельствах. Мы рассматриваем влияние возмущений спиновой динамики пучка на измерение ЭДМ в разделе 2.1.

## Декогеренция спина

Когеренцией спина называется мера или качество сохранения поляризации в изначально полностью поляризованном пучке. [20, стр. 205] Под декогеренцией спина понимают деполяризацию, связанную с различием частот прецессии спина частиц пучка.

Разница угловых скоростей, в свою очередь, связана с разницей длин орбит частиц, и следовательно их уровней равновесной энергии, от которых

зависит спин-тюн. Одним из способов подавления декогеренции спина является утилизация сектупольных полей. Как это работает, мы рассматриваем в разделе 2.2.

## Неидеальности ускорителя

Как мы уже указывали, проблема неидеальностей ускорителя имеет две стороны: *a)* они практически не могут быть убраны настоящими технологиями; но что *ещё хуже b)* если их убрать, мы попадаем в пространственную область, и открываем метод для геометрической фазы.

К счастью, спин-кики, возбуждаемые ими, меняют знак при смене направления движения пучка. К тому же, их величина достаточна, чтобы использовать их в качестве Спин-Колеса. Подробнее, вопрос МДМ прецессии, связанной с полями неидеальности ускорителя, рассматривается в разделе 2.3.

Остаётся одна проблема: точность установки скорости вращения колеса при смене его направления. Этот момент рассматривается в разделе 2.4.

### 1.2.5 Метод Frequency Domain

## Главные особенности

Предлагаемый метод обладает следующими основными характеристиками:

1. Это метод временной области;
2. Вместо подавления, поля, связанные с неидеальностями ускорителя, используются в качестве Спин-Колеса.
  - Смена направления вращения Спин-Колеса производится сменой полярности ведущего поля ускорителя;
  - контроль скорости его вращения производится на основе наблюдения прецессии спина в горизонтальной плоскости.

Мы уже рассмотрели достоинства частотной области, такие как

- упрощение поляриметрии, и
- иммунитет к ошибке геометрической фазы.

Уделим более пристальное внимание вопросу использования полей неидеальности ускорителя в качестве Спин-Колеса.

## ЭДМ-статистика

Поскольку угловая скорость измеряемая в методологии частотной области включает добавки и от магнитного, и от электрического, дипольных моментов, для построения ЭДМ-эстиматора требуется использование двух циклов: в первом МДМ вращение происходит в одну сторону, во втором в обратную.

В связи с тем, что Кооп-Колесо в FDM — это продукт ведущего поля, для обращения направления его вращения необходимо поменять полярность ведущего поля. Когда это происходит:  $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{B}$ , направление циркуляции пучка изменяется с по-часовой (CW) до против-часовой (CCW):  $\boldsymbol{\beta} \mapsto -\boldsymbol{\beta}$ , в то время как электростатическое поле остаётся неизменным:  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$ . В соответствии с уравнением Т-БМТ, компоненты частоты прецессии спина меняются как:

$$\begin{aligned}\omega_x^{CW} &= \omega_x^{MDM,CW} + \omega_x^{EDM}, \\ \omega_x^{CCW} &= \omega_x^{MDM,CCW} + \omega_x^{EDM}, \\ \omega_x^{MDM,CW} &= -\omega_x^{MDM,CCW},\end{aligned}\tag{1.5a}$$

и ЭДМ-эстиматор

$$\hat{\omega}_x^{EDM} := \frac{1}{2} (\omega_x^{CW} + \omega_x^{CCW})\tag{1.5b}$$

$$= \omega_x^{EDM} + \underbrace{\frac{1}{2} (\omega_x^{MDM,CW} + \omega_x^{MDM,CCW})}_{\varepsilon \rightarrow 0}.\tag{1.5c}$$

Для того, чтобы удерживать систематическую ошибку  $\varepsilon$  ниже уровня требуемой точности, т.е. гарантировать что условие (1.5a) выполняется с достаточной точностью, проф. Сеничев разработал [22] процедуру смены полярности ведущего поля, основанную на наблюдении частоты прецессии поляризации пучка в горизонтальной плоскости. Принцип работы процедуры описан в

разделе 2.4; для его объяснения необходимо ввести понятие эффективного Лоренц-фактора (см. раздел 1.2.6).

## Метод оценки частоты и свойства данных

Подробно вопрос оценки частоты рассмотрен в приложении А. В настоящем разделе, вкратце опишем лишь основные заключения.

Во-первых, частота прецессии поляризации пучка оценивается путём фитирования данных поляриметрии синусоидальной функцией с постоянными параметрами. В связи с этим, возникает проблема возмущения спиновой динамики (например, связанное с бетатронными колебаниями), рассматриваемая в разделе 2.1. По результатам проведённого анализа, мы заключаем что этот эффект не составляет проблему в рамках предлагаемой методологии.

Во-вторых, данные поляриметрии обладают свойством *гетероскедастичности*, т.е. ошибка измерения поляризации пучка растёт к концу измерительного цикла. [27] Обыкновенный метод наименьших квадратов (Ordinary Least Squares) теряет эффективность при фитировании данных, обладающих таким свойством; также, даваемые им стандартные ошибки оценок параметров оказываются смещены и несостоительны. При этом, ожидания оценок остаются валидными. Поэтому, при использовании OLS необходимо использовать стандартные ошибки в форме Уайта. Но лучше вместо OLS использовать гетероскедастичные модели. [28; 29]

В-третьих, деполяризация пучка налагает более жёсткие ограничения на длительность измерительного цикла, чем время жизни пучка. Предположим пучок с бесконечным временем жизни.<sup>2</sup> Очевидно, что когда пучок полностью деполяризуется, мы не сможем получать информацию о скорости вращения его поляризации; т.е. существует принципиальное ограничение на полное количество информации (обозначим её  $FI_{tot}$ ) о частоте прецессии спина, которое можно получить из одной инжекции. Будем называть период времени, за который поляризация уменьшается в  $e$  раз, постоянной времени деполяризации  $\tau_d$ . В таблице 4 отражено количество выбранной (относительно  $FI_{tot}$ ) информации

---

<sup>2</sup>Помимо прочего, это означает недеструктивную поляриметрию.

о частоте прецессии спина как функция длительности цикла, а также соответствующее отношение сигнал/шум.<sup>3</sup> Исходя из данных таблицы, полезная длительность измерительного цикла ограничена тремя постоянными временеми деполяризации.

В четвёртых, наши симуляции показывают возможность достичь точности оценки частоты прецессии спина на уровне  $8 \cdot 10^{-7}$  рад/сек за один измерительный цикл, при постоянной времени деполяризации 1,000 секунд, частоте измерения поляризации 375 Гц, и начальной ошибке измерения поляризации 3%. При 70% временной загрузке ускорителя, это позволяет выйти на уровень  $5 \cdot 10^{-9}$  рад/сек стандартного отклонения среднего значения оценки частоты. Такая точность достаточна для получения оценки ЭДМ на уровне  $10^{-29} e\cdot\text{см}$ .

Таблица 1 — Количество выбранной информации (в долях от потенциального максимума), в зависимости от длительности измерительного цикла, и соответствующее отношение сигнал/шум.

Инфо. (%FI <sub>tot</sub> )	Длительность ( $\times\tau_d$ )	Сигнал/шум
95	3.0	0.4
90	2.3	1.1
70	1.2	5.5
50	0.7	11.7

### 1.2.6 Понятие эффективного Лоренц-фактора

Спиновая динамика описывается понятиями *спин-тюна*  $\nu_s$  и *оси стабильного спина*  $\bar{n}$ . Спин-тюн зависит от равновесного уровня энергии частицы, выражаемого Лоренц-фактором:

$$\begin{cases} \nu_s^B = \gamma G, \\ \nu_s^E = \beta^2 \gamma \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \\ = \frac{G+1}{\gamma} - G\gamma. \end{cases} \quad (1.6)$$

<sup>3</sup>Отношение вычислено исходя из модели сигнала поляризации и модели ошибки измерения поляризации.

К сожалению, не все частицы пучка обладают одним и тем же Лоренц-фактором. Частица вовлечённая в бетатронное движение имеет более длинную орбиту, и как прямое следствие принципа автофазировки, в ускорительной структуре использующей ВЧ-резонатор, её равновесный уровень энергии должен вырасти. Иначе она не сможет оставаться внутри сепаратрисы. В этом разделе мы анализируем как Лоренц-фактор частицы должен измениться при учёте бетатронного движения, а также нелинейностей коэффициента сжатия орбиты.

Продольная динамика частицы на референсной орбите накопительного кольца описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta\varphi &= -\omega_{RF}\eta\delta, \\ \frac{d}{dt}\delta &= \frac{qV_{RF}\omega_{RF}}{2\pi h\beta^2 E} (\sin\varphi - \sin\varphi_0). \end{cases} \quad (1.7)$$

В уравнениях выше,  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$  и  $\delta = (p - p_0)/p_0$  отклонения фазы и нормализованного импульса частицы от фазы и импульса референсной частицы;  $V_{RF}$ ,  $\omega_{RF}$ , соответственно, напряжение и частота ВЧ-поля;  $\eta = \alpha_0 - \gamma^{-2}$  слип-фактор, где  $\alpha_0$  есть коэффициент сжатия орбиты, определяемый как  $\Delta L/L = \alpha_0\delta$ ,  $L$  длина орбиты;  $h$  гармоническое число;  $E$  полная энергия частицы.

Решения этой системы формируют семейство эллипсов в плоскости  $(\varphi, \delta)$ , с общим центром в точке  $(\varphi_0, \delta_0)$  (см. Рисунок 1.1а). Однако, если рассматривать частицу вовлечённую в бетатронный колебания, и учитывать разложение ряда Тэйлора коэффициента сжатия орбиты более высокого порядка  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\delta$ , то первое уравнение системы трансформируется в: [30, р. 2579]

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\varphi}{dt} &= -\omega_{RF} \left[ \left( \frac{\Delta L}{L} \right)_\beta + (\alpha_0 + \gamma^{-2}) \delta \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_1 - \alpha_0\gamma^{-2} + \gamma^{-4}) \delta^2 \right], \end{aligned}$$

где

$$\left( \frac{\Delta L}{L} \right)_\beta = \frac{\pi}{2L} [\varepsilon_x Q_x + \varepsilon_y Q_y], \quad (1.8)$$

это удлинение орбиты, связанное с бетатронным движением;  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  горизонтальный и вертикальный эмиттансы пучка, и  $Q_x$ ,  $Q_y$  горизонтальный и вертикальный тюны.

Решения трансформированной системы более не центрированы на одной точке (см. Рисунок 1.16). Удлинение орбиты и отклонение импульса вызывают сдвиг равновесного уровня энергии: [30, р. 2581]

$$\Delta\delta_{eq} = \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2\alpha_0 - 1} \left[ \frac{\delta_m^2}{2} (\alpha_1 - \alpha_0\gamma_0^{-2} + \gamma_0^{-4}) + \left( \frac{\Delta L}{L} \right)_\beta \right], \quad (1.9)$$

где  $\delta_m$  есть амплитуда синхротронных колебаний.

Мы называем равновесный уровень энергии, ассоциированный со сдвигом импульса (1.9), *эффективным Лоренц-фактором*:

$$\gamma_{eff} = \gamma_0 + \beta_0^2\gamma_0 \cdot \Delta\delta_{eq}, \quad (1.10)$$

где  $\gamma_0$ ,  $\beta_0$  Лоренц-фактор и нормализованная скорость референсной частицы.

Отметим, что понятие эффективного Лоренц-фактора позволяет нам учитывать вариацию величины спин-тюона, вызванную вариацией длины орбиты частицы. Оно является краеугольным камнем в анализе декогеренции спина (рассматривается в разделе 2.2) и её подавления посредством секступольных полей.

Оно также играет важную роль в успешном воспроизведении МДМ-компоненты совокупной угловой скорости спин-прецессии. В связи с этим моментом, мы хотели бы обратить особое внимание читателя на раздел 2.5.

### 1.3 Варианты магнитооптических структур накопительных колец с “замороженным,” и “квази-замороженным” спином

Существуют два подхода к проблеме построения накопительного кольца для измерения ЭДМ дейтрона: *a)* структура с “замороженным” спином (FS), и *b)* структура с “квази-замороженным” спином (QFS).

В следующих разделах мы рассмотрим возможные варианты колец обоих типов.

### 1.3.1 Структура с “замороженным” спином

В структуре FS-типа, горизонтальная проекция вектора спина частицы пучка *непрерывно* сонаправлена с вектором её импульса. Для реализации условия непрерывности, в такой структуре используются цилиндрические спин-ротаторы, создающие одновременно и электростатическое, и магнитное поля. На Рисунке 1.2 представлен вариант кольца FS-типа. [31] Данное кольцо имеет длину 145.85 м, и рассчитано на инжекцию пучка дейtronов на энергию 270 МэВ. В структуре предусмотрено использование ВЧ-резонатора для подавления линейного эффекта декогеренции спина путём усреднения энергии вокруг значения равновесной энергии частицы. Продольное напряжение резонатора  $V = 100$  кВ, частота поля  $f_{RF} = 5 \cdot f_{rev}$ , где частота оборота пучка  $f_{rev} = 1.00$  МГц. Остающиеся нелинейные эффекты декогеренции подавляются с помощью трёх<sup>4</sup> семейств сектуполей.

Основная цель FS-концепции кольца — максимизация ЭДМ сигнала. Однако, следует обратить внимание на то, что строгое выполнение условия замороженности спина возможно только для референсной частицы. Это связано с тем, что, как следует из уравнения (1.1b), для заданных Е-, В-полей, существует уникальное значение Лоренц-фактора  $\gamma$ , при котором  $\Omega_y^{MDM} = 0$ . Таким образом, даже в FS-структуре, спин-векторы большинства частиц “заморожены” лишь приблизительно.

### 1.3.2 Структура с “квази-замороженным” спином

В QFS-концепции кольца отказываются от непрерывного выполнения условия сонаправленности векторов поляризации и импульса пучка, требуя лишь равенства нулю *совокупного за оборот* угла поворота вектора поляризации относительно импульса в электростатических ( $\Phi_s^E$ ) и магнитных ( $\Phi_s^B$ ) элементах (углы отсчитываются в системе центра масс): [31]

$$\sum_i \Phi_{s,i}^E = - \sum_j \Phi_{s,j}^B.$$

---

<sup>4</sup>Некоторые авторы используют два семейства [20] в этой структуре.

Как следует из определения спин-тюна (см. раздел 1.1.1), угол поворота спин-вектора частицы относительно её импульса в электромагнитном поле  $\Phi_s = \mathbf{v}_s \cdot \Phi$ , где  $\Phi$  угол поворота импульса, а  $\mathbf{v}_s$  спин-тюн.

Угловая скорость поворота вектора импульса частицы в магнитном поле  $\mathbf{B}$  есть

$$\omega_B = \frac{q}{m} \frac{B}{\gamma},$$

в электростатическом  $\mathbf{E}$ :

$$\omega_E = \frac{q}{E} \frac{\mathbf{E} \times \beta}{c\beta^2\gamma},$$

из чего следуют выражения для спин-тюна частицы в электростатическом и магнитном полях:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_s^B = \gamma G, \\ \mathbf{v}_s^E = \beta^2 \gamma \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right). \end{cases} \quad (1.11)$$

Преимущество кольца QFS-типа над кольцом FS-типа в относительной простоте исполнения: нет необходимости использовать совмещённые цилиндрические электро-магнитные элементы; в двух вариантах QFS-кольца, рассматриваемых ниже, используются *a*) либо прямые фильтры Вина, *b*) либо цилиндрические электростатические дефлекторы и магнитные диполи раздельно. С другой стороны, из-за появления вертикальной компоненты оси прецессии спина  $\bar{n}_y$ , максимальная амплитуда ЭДМ-сигнала уменьшается по сравнению с полностью замороженным случаем. Фактор, на который уменьшается амплитуда [32]

$$J_0(\Phi_s) \approx 1 - \frac{\Phi_s^2}{4},$$

где  $\Phi_s$  есть максимальный угол отклонения горизонтальной проекции вектора спина частицы от вектора импульса. Предположим, что этот угол не превосходит половины набега спиновой фазы за оборот  $\pi \cdot \gamma G / 2n$ ; в данном контексте  $n$  — периодичность оптики кольца. Поскольку магнитная аномалия дейтрана  $G = -0.142$ , для рассматриваемых ниже QFS структур  $J_0 \geq 0.98$ . Это означает, что скорость роста ЭДМ сигнала в QFS структуре уменьшается лишь на 2 % по сравнению с FS структурой.

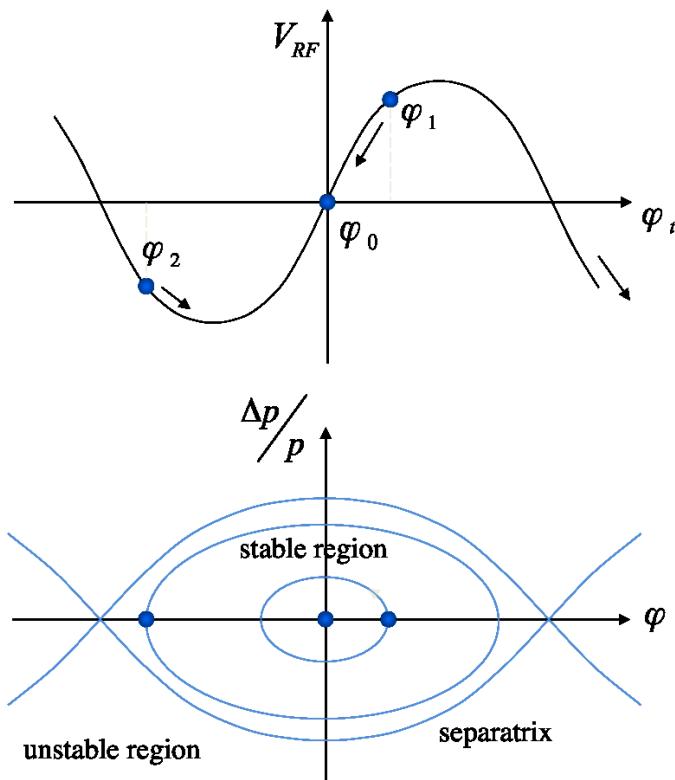
## Структура с кодовым названием 6.3

На Рисунке 1.3 представлена структура, построенная по принципу квази-замороженного спина, в которой электростатические и магнитные поля разделены в пространстве. [31] Электростатические цилиндрические дефлекторы с отрицательной кривизной орбиты используются для компенсации набега фазы, связанного с МДМ-прецессией в магнитных арках. [32] Кольцо длины 166.67 м рассчитано на инжекцию пучка дейtronов на энергию 270 МэВ. Для подавления эффектов декогеренции первого порядка используется ВЧ резонатор, с продольным полем  $V = 100$  кВ, и рабочей частотой  $f_{RF} = 5 \cdot f_{rev}$ , где  $f_{rev} = 0.87$  МГц. Нелинейные эффекты декогеренции подавляются с помощью шести семейств секступолей.

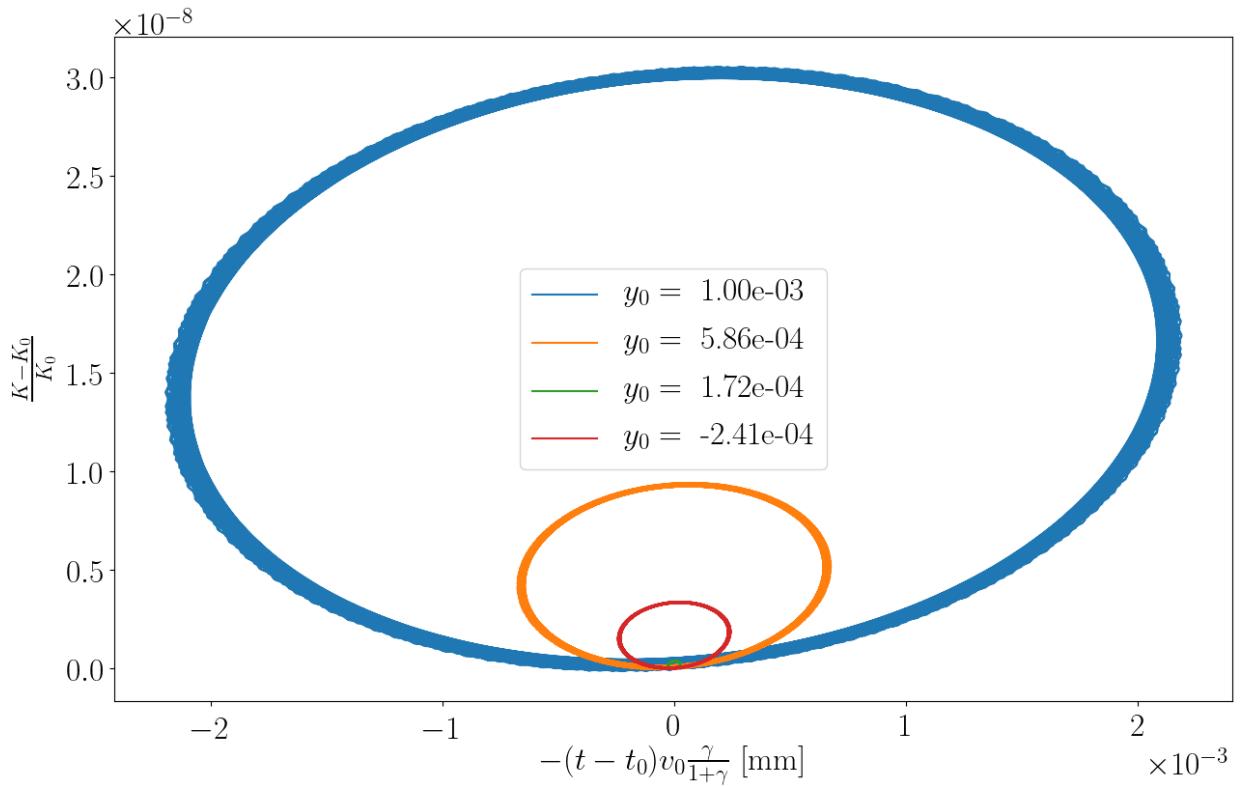
## Структура с кодовым названием E+B

В структуре, представленной на Рисунке 1.4, используются прямые, статические фильтры Вина. Это позволяет: *a)* исключить нелинейные компоненты электростатического поля, возникающие в связи с кривизной дефлектора, и *b)* упростить структуру с инженерной точки зрения.

Длина структуры 149.21 м, энергия инжектируемых дейtronов 270 МэВ. Для подавления эффекта декогеренции первого порядка используется ВЧ-резонатор с продольным напряжением  $V = 100$  кВ и частотой  $f_{RF} = 5 \cdot f_{rev}$ , где  $f_{rev} = 0.98$  МГц. Нелинейные эффекты декогеренции подавляются с помощью четырёх семейств секступолей.



а) Линейная теория.



б) Результаты моделирования с трансфер-матрицами третьего порядка.  
Рисунок 1.1 — Продольные фазовые портреты частиц в структуре с ВЧ  
продольной фокусировкой. Цветом различаются частицы с разными  
начальными сдвигами в вертикальной плоскости относительно референсной  
частицы; остальные координаты идентичны.

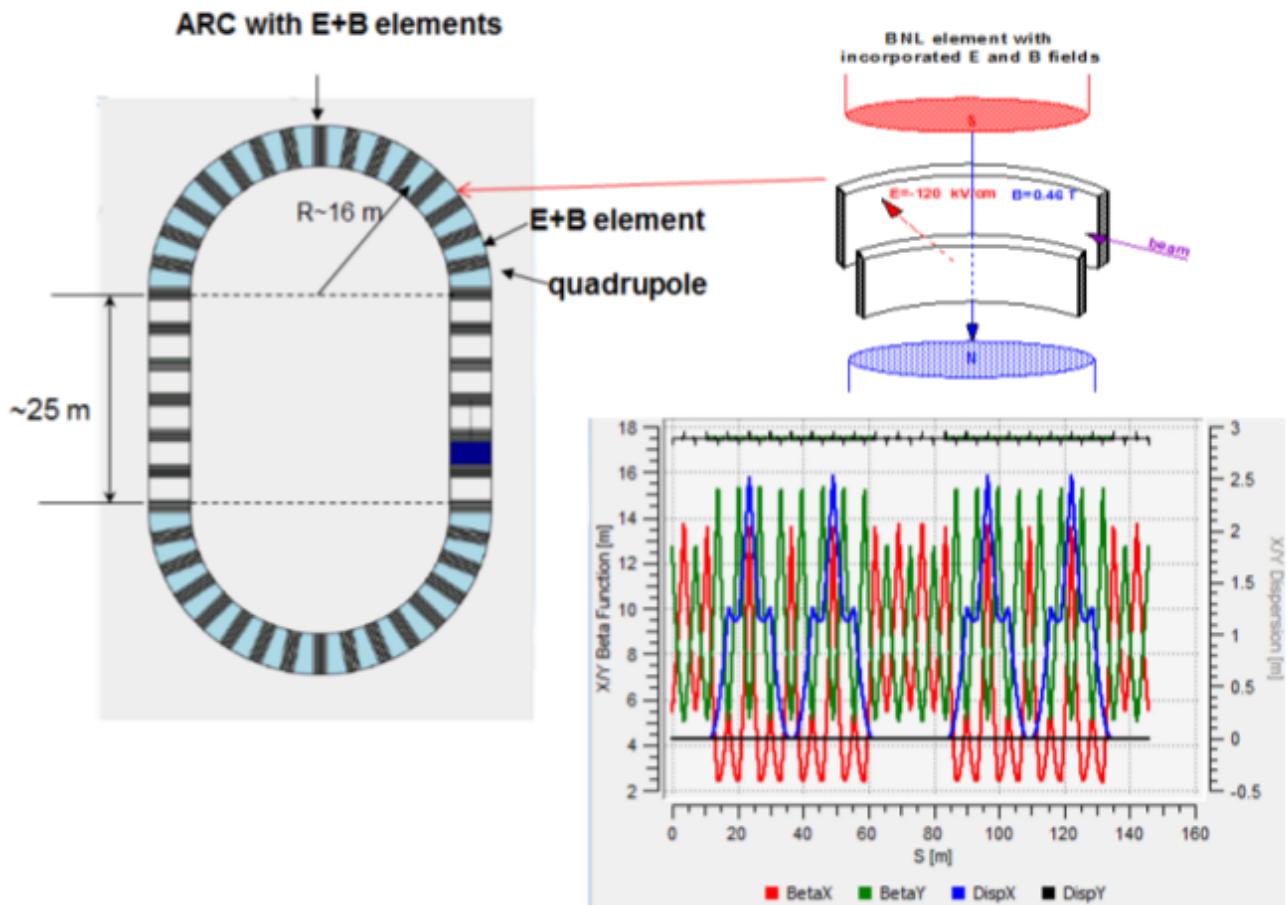


Рисунок 1.2 — Вариант кольца, построенного по принципу “замороженного” спина. В арках использованы цилиндрические электро-магнитные элементы  
(Рисунок взят из [31])

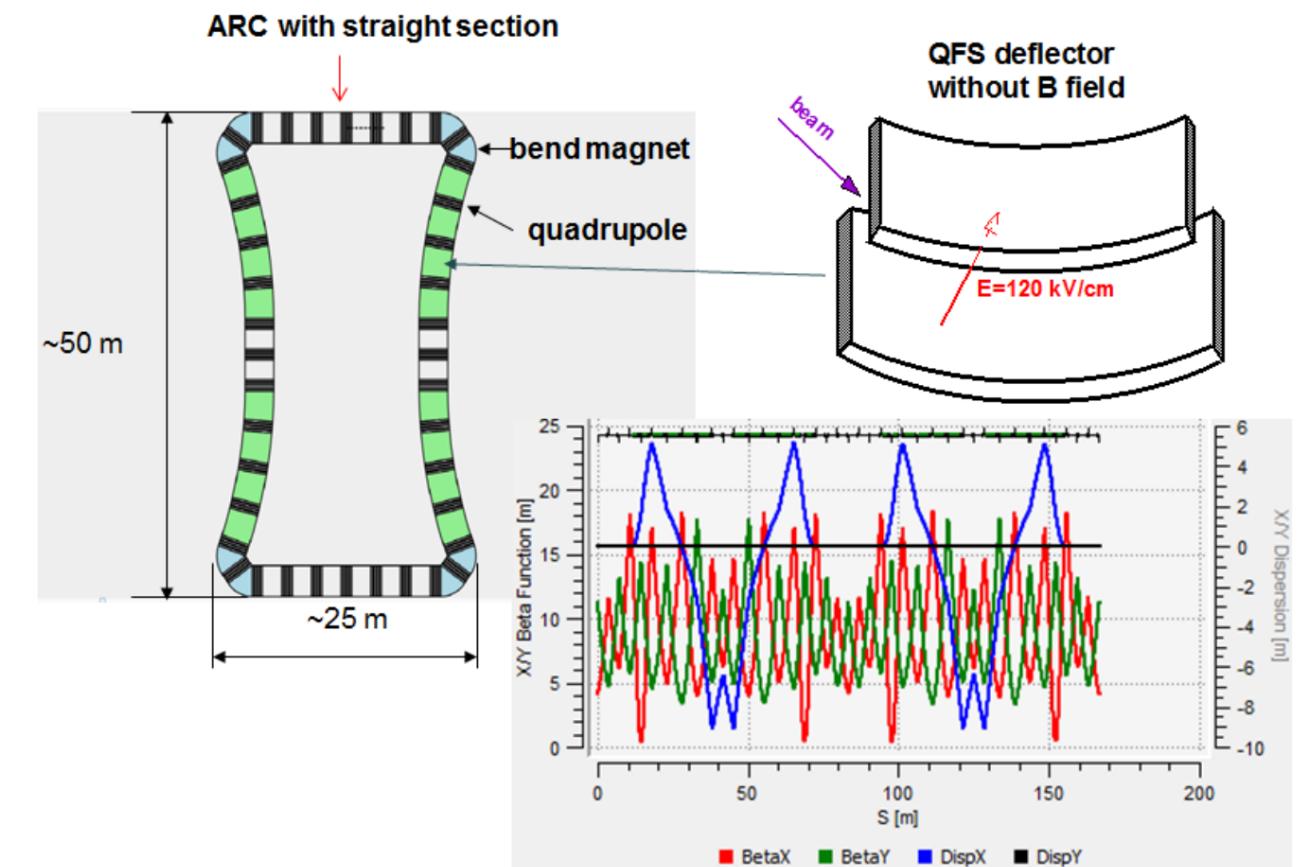


Рисунок 1.3 — Вариант кольца, построенного по принципу квази-замороженного спина, дизайн с разделением Е- и В-полей. (Рисунок взят из [31])

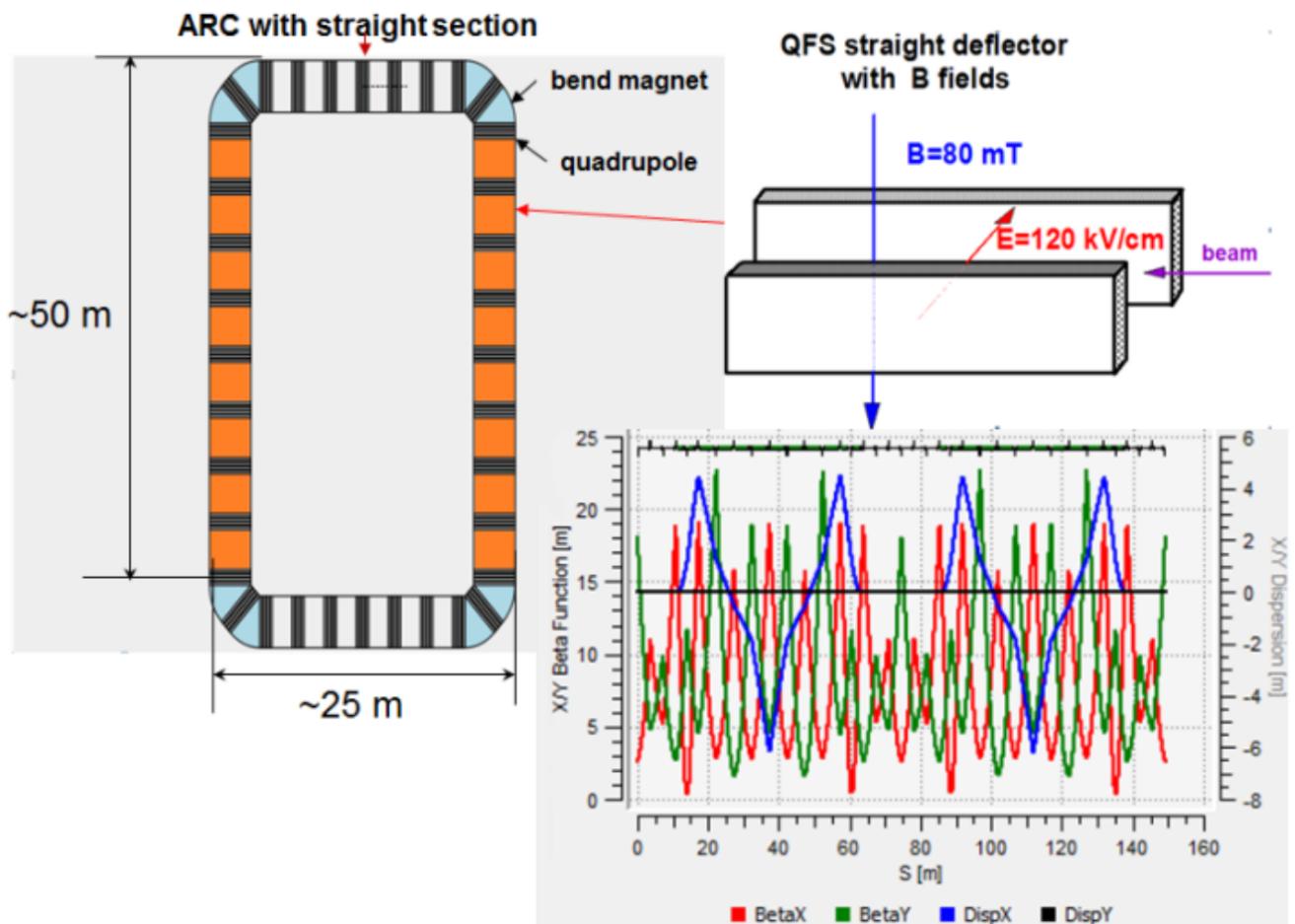


Рисунок 1.4 — Вариант кольца, построенного по принципу квази-замороженного спина, дизайн с прямыми фильтрами Вина. (Рисунок взят из [31])

## Глава 2. Общие проблемы методов поиска ЭДМ в накопительном кольце, и их решения

Универсальные проблемы методов по поиску ЭДМ фундаментальных частиц в накопительном кольце можно разделить на две категории: *i*) проблемы, решаемые введением в систему Спин-Колеса, и *ii*) проблемы, имеющие специфические решения.

Проблемы первой категории следуют из нестабильности оси стабильного спина частиц. К ним относятся, например, локальные возмущения электромагнитных полей, а также бетатронные колебания частиц. В обоих случаях, ось стабильного спина частицы отклоняется от своего равновесного значения на непродолжительное время.

К проблемам, имеющим специфические решения относятся спин-декогеренция, и фальш-сигнал, вызванный неидеальностями ускорителя. В этом разделе мы рассмотрим суть каждой из данных проблем, опишем их возможные решения, и проведём соответствующие симуляции.

### 2.1 Возмущения спиновой динамики

#### 2.1.1 Постановка проблемы

Инвариантная спиновая ось частицы, участвующей в бетатронном движении, колеблется вокруг своего референсного значения. [33, стр. 11] По этой причине, амплитуда решения уравнения Т-БМТ для вертикальной компоненты спин-вектора:

$$\begin{aligned} s_y &= \sqrt{\left(\frac{\omega_y \omega_z}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega_x}{\omega}\right)^2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \\ &= \sqrt{(\bar{n}_y \bar{n}_z)^2 + \bar{n}_x^2} \cdot \sin(2\pi \cdot \nu_s \cdot n_{turn} + \varphi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

превращается в изменяющуюся во времени функцию. Если вариация оси стабильного спина (а также спин-тюна частицы) имеет достаточно большую ам-

плитуду, использование гармонической функции с постоянными параметрами в качестве модели для фитирования сигнала повлечёт за собой систематическую ошибку спецификации модели. Ошибки данного типа отражаются на валидности оценок параметров модели, то есть на оценке частоты, и потому требуют анализа.

Вариация спин-тюна  $\nu_s$  особенно проблематична в этом отношении, т.к. она напрямую влияет на фазу сигнала; однако, эта проблема может быть решена введением в ускорительную структуру сектупольных полей, как описано в разделе 2.2.3. В связи с этим, в настоящем разделе мы сфокусируемся на рассмотрении вариации  $\bar{n}$ .

### 2.1.2 Численное моделирование

Симуляция проводилась следующим образом: частица, смещённая с референсной орбиты в вертикальном направлении на 0.3 мм, многократно инжектируется в неидеальную структуру с замороженным спином [31], использующую сектуполи для подавления декогеренции, вызванной бетатронными колебаниями в вертикальной плоскости (см. раздел 2.2.3). Неидеальности структуры симулируются наклонами E+B элементов. Введённые таким образом неидеальности не ведут к возмущению референсной орбиты (то есть, референсная орбита — равно как и орбита бетатрон-осциллирующей частицы — одинакова для всех инжекций.)

На каждой инжекции, углы наклонов E+B элементов генерируются случайным образом из нормального распределения  $\alpha \sim N(\mu_i, 3 \cdot 10^{-4})$  градусов,  $i \in \{1, \dots, 11\}$ , где  $\mu_i$  изменяется в диапазоне  $[-1.5 \cdot 10^{-4}, +2.5 \cdot 10^{-4}]$  градусов. Ненулевые ожидания  $\mu_i$  симулируют введение в систему Кооп-Колеса. [34] Величины  $\mu_i$  и  $\sigma_\alpha$  выбраны с целью детализации эффекта. При больших значениях, труднее различимы эффекты влияния вариации  $\nu_s$  и  $\bar{n}$ .

Ещё одним аспектом симуляции, требующим упоминания, является то, что частица инжектируется на энергию 270 МэВ, в то время как условие замороженности спина выполняется строго при 270.0092 МэВ. Из-за этого, ось стабильного спина  $\bar{n}$  смотрит в основном в вертикальном направлении (отклоняясь от него не более чем на  $51^\circ$  при больших скоростях поворота Кооп-Колеса);

её радиальная компонента (определяющая амплитуду колебаний вертикальной компоненты спин-вектора) относительно мала, и потому ещё более чувствительна к вариации, вызванной бетатронным движением в вертикальной плоскости.

Трэкинг спина выполнялся с помощью кода COSY Infinity [35], на протяжении  $1.2 \cdot 10^6$  оборотов; каждые 800 оборотов  $\mathbf{v}_s$  и  $\bar{n}$  вычисляются (процедурой TSS [36, стр. 41]) в точке фазового пространства, занимаемой частицей на данный момент, что даёт нам серию  $(\mathbf{v}_s(n), \bar{n}(n))$ ,  $n$  — номер оборота частицы в ускорителе. Соответствующие компоненты спин-вектора  $(s_x^{trk}(n), s_y^{trk}(n), s_z^{trk}(n))$ , вычисленные трэкером (процедура TR [36, стр. 41]), составляют вторую серию данных, используемых в анализе.

### 2.1.3 Анализ

Используя данные первой серии, мы сгенерировали ожидаемую  $s_y^{gen}(t)$  “генераторную” серию, в соответствии с уравнением (2.1), а также “идеальную” серию  $s_y^{idl}$ , в которой мы положили постоянные значения  $\mathbf{v}_s = \langle \mathbf{v}_s(t) \rangle$  и  $\bar{n} = \langle \bar{n}(t) \rangle$ .

Наша гипотеза состоит в том, что бетатронное движение частицы должно ввести несоответствие между синусоидальной моделью

$$f(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta), \quad (2.2)$$

и данными трекера, путём вариации оси прецессии спина  $\bar{n}$ , а значит амплитуды фитируемого сигнала. “Идеальная” серия служит базой сравнительного анализа, так как она идеально соответствует модели; “генераторная” серия учитывает вариацию  $\bar{n}$ , всё ещё оставаясь в пределах модели. “Трекерная” серия — наиболее близкое приближение к реальным измерительным данным.

Для сравнения серий между собой, мы *a*) вычислили и проанализировали невязки  $\varepsilon_1(t) = s_y^{gen}(t) - s_y^{idl}(t)$  и  $\varepsilon_2(t) = s_y^{trk}(t) - s_y^{idl}(t)$ ; *b*) профитировали модель (2.2) к трём сериям данных, и сравнили качество фита; *c*) вычислили стандартные отклонения компонент  $\bar{n}$  при каждом значении скорости Спин-Колеса.

На Рисунке 2.1 мы наблюдаем, что “генераторная” серия почти идентична “идеальной” серии, при  $\varepsilon_1 \leq 1 \cdot 10^{-6}$  (даже если её частота немного отличается)

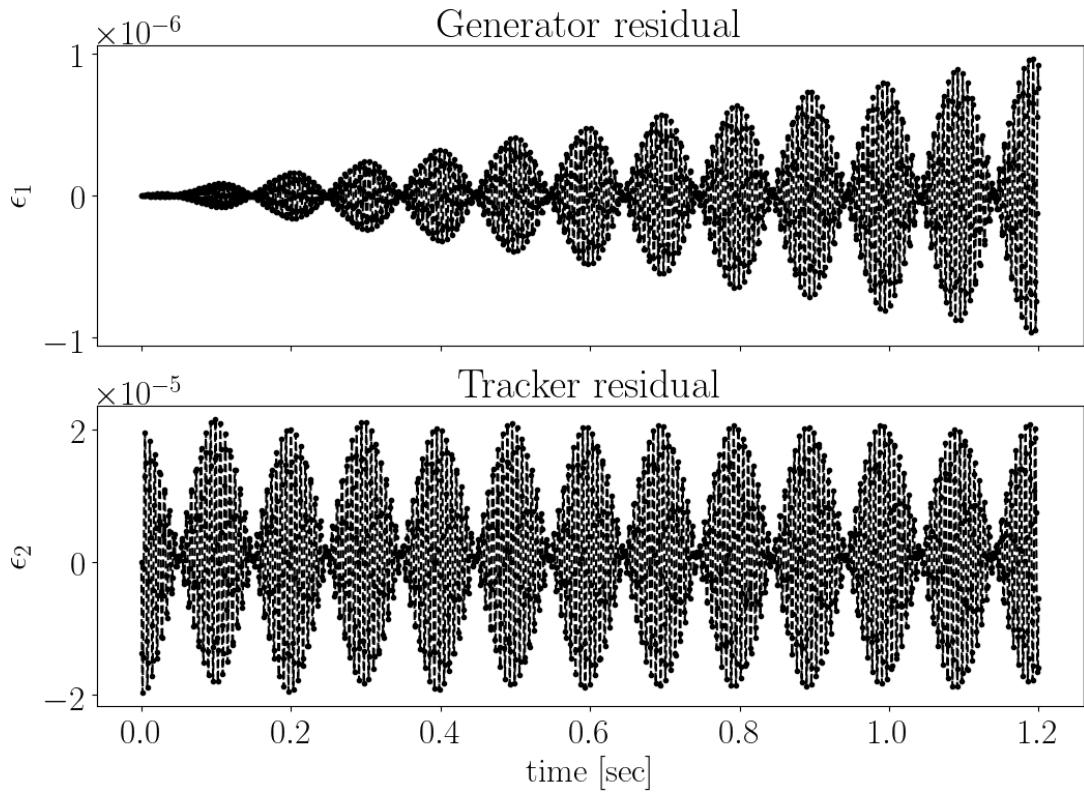


Рисунок 2.1 — Сравнительные невязки как функции времени. Верхняя панель: невязка  $\epsilon_1$ ; нижняя панель: невязка  $\epsilon_2$

Таблица 2 — Оценки параметров модели (медленный SW)

Серия	Пар.	Величина	Ст.Ошибка	AIC
$s_y^{idl}$	$\hat{f}$	4.220359687911	$6.9 \cdot 10^{-11}$	
	$\hat{a}$	0.12514597851	$4 \cdot 10^{-11}$	-62093
	$\hat{\delta}$	$-1.50 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-10}$	
$s_y^{gen}$	$\hat{f}$	4.2203596911	$1.9 \cdot 10^{-9}$	
	$\hat{a}$	0.125145979	$1 \cdot 10^{-9}$	-52142
	$\hat{\delta}$	$-1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	
$s_y^{trk}$	$\hat{f}$	4.2203603	$1.3 \cdot 10^{-6}$	
	$\hat{a}$	0.12514597	$3.7 \cdot 10^{-7}$	-34567
	$\hat{\delta}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	

в течении длительности цикла, в то время как “трекерная” серия отклоняется от неё на уровне  $\epsilon_2 \leqslant 2 \cdot 10^{-5}$ . Это различие между  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  наблюдается систематически для всех величин скорости Спин-Колеса (см. Рисунок 2.2б), и пока что не имеет объяснения.

На Рисунке 2.26 мы наблюдаем, что стандартные отклонения обеих невязок показывают такую же зависимость от скорости колеса, как и  $\nu_s$  (Рисунок 2.2a, нижняя панель), но не как стандартное отклонение компонент  $\bar{n}$ . Это свидетельствует о том, что вариация частоты даёт значительно больший вклад в несоответствие между моделью (2.2) и трекерными данными, чем предполагаемая вариация амплитуды, вызванная изменением ориентации  $\bar{n}$ .

Таблица 2 характеризует качество фита модели по отношению к данным, в случае самого медленного Кооп-Колеса. Видно, что попарные разницы между оценками параметров серий не являются статистически-значимыми. Хотя вариация вектора угловой скорости спин-прецессии ухудшила качество фита модели, она не ввела никакого статистически-значимого систематического смещения в оценки.

#### 2.1.4 Выводы

Вопрос влияния бетатронного движения на ЭДМ статистику в FD-методологии следует рассматривать ввиду трёх обстоятельств:

1. Осцилляции амплитуды сигнала очень малы. Они происходят на уровне не более  $10^{-4}$  (при  $\alpha \sim N(0, 3 \cdot 10^{-2})$  градусов), тогда как ожидаемая неточность измерений поляризации находится на уровне процентов. Это значит суперпозиция систематической ошибки и случайной ошибки измерения не будет проявлять статистически-значимую систематичность.
2. Коэффициент корреляции между оценками амплитуды и частоты не значителен. Колебания амплитуды влияют на оценку  $\hat{a}$  в первую очередь; их эффект на оценку  $\hat{\omega}$  опосредован, и описывается коэффициентом корреляции. Поскольку он меньше 10%, даже если колебания окажутся достаточными, чтобы повлиять на оценку амплитуды, их эффект на оценку частоты будет уменьшен по крайней мере в 10 раз.
3. Этот систематический эффект контролируется. И этот фактор является основным достоинством методологий частотной области. Вводя в систему внешнее Спин-Колесо, колебания  $\bar{n}$  могут быть непрерывно ми-

нимизированы до необходимого уровня, без каких-либо модификаций паттерна эксперимента.

## 2.2 Декогеренция спинов частиц пучка

Когеренцией спина называется мера или качество сохранения поляризации в изначально полностью поляризованном пучке. [20, стр. 205]

Когда поляризованный пучок инжектируется в накопительное кольцо, спин-векторы частиц пучка начинают прецессировать вокруг вертикального (ведущего) поля. Частота прецессии зависит от равновесного уровня энергии частицы, который различен для частиц пучка.

Это обстоятельство не является проблемой в том случае, когда начальная поляризация пучка вертикальна; однако метод измерения ЭДМ в накопительном кольце, основанный на принципе замороженного спина требует, чтобы вектор поляризации пучка был сонаправлен с его вектором импульса, т.е. лежал в горизонтальной плоскости. Таким образом, декогеренция спина есть внутренняя проблема метода замороженного спина.

В настоящем разделе мы исследуем причины возникновения спин-декогеренции, метод борьбы с ней, а также приведём результаты симуляции, подтверждающей действенность метода. Для начала, однако, определим время когеренции спина, требуемое для измерения ЭДМ методом замороженного кольца в пространственной области.

### 2.2.1 Требования к времени когеренции пучка

Время когеренции спина (spin coherence time; SCT) для метода замороженного спина, выполненного в накопительном кольце с идеально установленными элементами определяется минимальным детектируемым углом отклонения вектора поляризации пучка из горизонтальной плоскости только засчёт ЭДМ. Для уровня чувствительности  $10^{-29} e \cdot cm$  это примерно  $5 \cdot 10^{-6}$ . [12]

В соответствии с уравнением Т-БМТ,

$$\Omega_{EDM,x} = \eta \frac{qE_x}{2mc},$$

где  $\eta$  есть коэффициент пропорциональности между ЭДМ и спином, равный  $10^{-15}$  для дейтрона, для данного уровня чувствительности. [20, стр. 206]

Для дейтронного BNL FS кольца,  $E_x = 12$  МВ/м, [12, стр. 19] так что  $\Omega_{EDM,x} \approx 10^{-9}$  рад/сек. Таким образом получаем, что для того, чтобы достичь детектируемый уровень отклонения вектора поляризации на 1 мкрад требуется SCT порядка 1000 секунд. [20, стр. 207]

## 2.2.2 Происхождение декогеренции

Декогеренция спина в пучке вызвана разницей угловых скоростей прецессии спинов частиц, которая, в свою очередь, вызвана разницей их длин орбит и импульсов. Влияние длины орбиты на спин-тюн частицы описывается понятием эффективного Лоренц-фактора, введённым в разделе 1.2.6.

Из уравнений (1.6) для спин-тюна частицы в электромагнитном поле следует, что спин-тюны двух частиц с одинаковыми эффективными Лоренц-факторами равны, независимо от их траекторий в ускорителе. Этот принцип используется при использовании сектупольных полей для подавления спиновой декогеренции, а также при смене полярности ведущего магнитного поля кольца.

## 2.2.3 Теория сектупольного подавления декогеренции

Чтобы минимизировать декогеренцию спина, связанную с бетатронным движением и отклонением импульса, могут быть использованы сектупольные (или октупольные) поля [20, стр. 212]

Сектуполь силы

$$S_{sext} = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2},$$

где  $B\rho$  магнитная жёсткость, влияет на коэффициент сжатия орбиты первого порядка как [30, стр. 2581]

$$\Delta\alpha_{1,sext} = -\frac{S_{sext}D_0^3}{L}, \quad (2.3)$$

и одновременно на длину орбиты как

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{sext} = \mp\frac{S_{sext}D_0\beta_{x,y}\varepsilon_{x,y}}{L}, \quad (2.4)$$

где  $D(s,\delta) = D_0(s) + D_1(s)\delta$  обозначает функцию дисперсии.

Принцип действия сектупольного подавления декогеренции можно сформулировать следующим образом. Частица в ускорителе совершает бетатронные колебания вокруг замкнутой орбиты. Из-за дисперсии, замкнутая орбита отличается для разных частиц пучка. Сектуполь работает как призма, фокусируя (либо дефокусируя) замкнутые орбиты различных частиц.

В следующих разделах мы будем называть декогеренцию, связанную с горизонтальными/вертикальными бетатронными, и синхротронными колебаниями соответственно X-/Y-, и D-декогеренцией. Семейства сектуполей, подавляющие X-, Y-, и D-декогеренцию, будем обозначать соответственно GSX, GSY, GSD.

Из уравнений (2.3), и (2.4) можно видеть, что для подавления декогеренции необходимы три семейства сектуполей, помещённых в максимумы функций:  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  для подавления X-,Y-декогеренции, и  $D_0$  для D-декогеренции.

#### 2.2.4 Численное моделирование сектупольного подавления декогеренции в идеальном ускорителе

Мы провели симуляцию для проверки возможности подавления декогеренции сектупольными полями. В симуляции была использована идеальная структура с замороженным спином, описанная в разделе 1.3.1. Поскольку элементы в структуре установлены идеально, спин-векторы частиц не поворачиваются вокруг радиальной оси; прецессия происходит только в горизонтальной плоскости, вокруг вектора  $\hat{y}$ .

Оптимизация производится на энергии пучка 270.00 МэВ, орбитальная и спиновая трансфер-матрицы структуры вычисляются до пятого порядка разложения ряда Тэйлора.

В структуре используются три семейства сектуполей, для подавления, соответственно, декогеренции связанной с горизонтальными, вертикальными бетатронными колебаниями, и с синхротронными колебаниями частиц. Оптимальное значение градиента для каждого семейства отыскивается по отдельности; значения полей двух других семейств зануляются. Решение оптимизировать сектуполи отдельно было принято потому, что одновременная оптимизация всех трёх градиентов вела к численным проблемам в процедуре TSS.<sup>1</sup>

В процессе оптимизации сначала вычисляются трансфер-матрицы структуры для заданного значения градиента, затем процедурой TSS вычисляются разложения Тэйлора спин-тюна и оси стабильного спина

$$\mathbf{v}_s(x, a, y, b, \ell, \delta) = a_0 + a_{1,x}x + a_{2,x}x^2 + a_{1,y}y + \dots$$

В зависимости от оптимизируемого семейства, из разложения спин-тюна выбирается коэффициент при квадрате соответствующей координаты фазового пространства ( $a_{2,x}$ ,  $a_{2,y}$ , или  $a_{2,\delta}$ ). Модуль коэффициента служит целевой функцией: т.е., при оптимальном значении градиента сектуполей, спин-тюн не зависит (параболически) от соответствующего отклонения частицы от референсной.

При оптимизации используется алгоритм Simplex. [37, стр. 37]

На Рисунке 2.3 изображены зависимости спин-тюна от смещения частицы от референсной по трём координатам фазового пространства до и после включения оптимизированных сектуполей. Можно наблюдать, что во всех трёх случаях удалось подавить параболическую зависимость спин-тюна от координаты. При этом сохраняется линейная зависимость, которая не чувствительна к сектупольным полям. Линейная зависимость наблюдается при моделировании ускорителя в коде COSY INFINITY, в коде MODE, а также при помощи

---

<sup>1</sup>Также, мы изучали принципиальную возможность оптимизации всех трёх семейств сектуполей, посредством прямого вычисления необходимых коэффициентов разложения ряда Тэйлора на трёхмерной сетке значений градиентов. Вопрос требует более детального рассмотрения, но на данном этапе мы сомневаемся в принципиальной возможности оптимизации всех трёх семейств сектуполей. Возможно по этой причине в [20, стр. 219] в BNL структуре используется всего два семейства.

программы MAD (из личной беседы с проф. Сеничевым). Исходя из этого, можно предположить, что эффект не является численным артефактом COSY INFINITY, а имеет физическое обоснование. Этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения, но на данный момент считается, что он подавляется соответствующей подстройкой параметров ВЧ-резонатора. [20, стр. 210, 219]

### 2.2.5 Переход декогеренции из горизонтальной плоскости в вертикальную, при появлении неидеальностей

Целью данной симуляции было показать, что секступольный метод подавления спин-декогеренции пространственно-неориентированно.

В неидеальную структуру с замороженным спином инжектировался ансамбль из 30 частиц, равномерно смещённых от референсной в вертикальном направлении в диапазоне  $y \in [-1, +1]$  мм. Поскольку анализ производится только на основании данных трекинга, пучок инжектирован на кинетической энергии строго замороженного спина 270.0092 МэВ.

Неидеальности структуры моделируются наклонами E+B элементов вокруг оптической оси на углы, взятые из нормального распределения  $\Theta_{tilt} \sim N(0, 1 \cdot 10^{-4})$  радиан. Поскольку при введении таких неидеальностей сохраняется величина силы Лоренца, они не искажают орбитальную динамику частицы, и отражаются только на спиновой динамике. Величина стандартного отклонения отражает реалистичную неточность установки элементов ускорителя.

На Рисунке 2.4 представлено стандартное отклонение распределения радиальных компонент спин-векторов ансамбля до и после включения секступолей. Поскольку частицы движутся в неидеальной структуре, их спин-векторы врашаются в вертикальной плоскости с большой скоростью, и потому  $\sigma_{s_x}$  — быстро-осцилирующая функция, не показывающая долгосрочной тенденции к росту (наклон прямой  $(2 \pm 2) \cdot 10^{-8}$  1/сек). Таким образом, не наблюдается декогеренции спина в горизонтальной плоскости. При использовании секступолей амплитуда колебаний  $\sigma_{s_x}$  уменьшается на порядок.

На Рисунке 2.5 представлена та же статистика для вертикальных компонент спин-векторов. Наблюдаются долгосрочный тренд, (наклон  $(4.5 \pm 0.6) \cdot 10^{-7}$  1/сек) до включения корректирующих секступолей. Секступольная коррекция

не уменьшает амплитуду колебаний, но подавляет тренд (наклон после включения секступолей  $(5 \pm 6) \cdot 10^{-8}$  1/сек).

### 2.2.6 Численное моделирование эксперимента по подавлению декогеренции в неидеальном ускорителе

При проведении нижеследующих тестов симулировалась инжекция плоского, гауссовского пучка в структуру с замороженным спином. E+B спин-ротаторы в структуре были установлены со случайно распределённым углом наклона вокруг оптической оси, взятым из распределения  $N(0, 5 \cdot 10^{-4})$  радиан.

Инжектируемые пучки состояли из 30 частиц, распределённых в вертикальной плоскости  $y - z$  как  $y \sim N(y_0, 0.1)$  мм; все остальные координаты равны нулю. Оффсет  $y_0$  варьировался в диапазоне  $[-1, +1]$  мм. Начальное направление спин-векторов всех частиц — продольное:  $\mathbf{S}(t = 0) = (0, 0, 1)$ .

Также в структуре варьировалось значение градиента  $G_Y$  секступоля, модулирующего декогеренцию в вертикальной плоскости.  $G_Y$  менялся в диапазоне  $[G_Y^0 - 5 \cdot 10^{-3}, G_Y^0 + 5 \cdot 10^{-3}]$ , где  $G_Y^0 = -5.77 \cdot 10^{-4}$  — оптимальное значение градиента для заданных неидеальностей структуры. Величина  $G_Y^0$  была найдена путём минимизации коэффициента разложения  $a_2$  ряда Тэйлора  $\mathbf{v}_s(y) \approx a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + O(y^3)$ .

На каждое значение градиента приходится 10 инжекций.

Для того, чтобы обеспечить устойчивость процедуры TSS COSY Infinity [36], пучок инжектировался на энергии 270 МэВ (строгий FS находится на энергии 270.0092 МэВ), а матрицы перехода орбитального и спинового движений строились до третьего порядка разложения ряда Тэйлора.

Далее ансамбль начальных значений, представляющий пучок, трекается через структуру на протяжении  $1.2 \cdot 10^6$  оборотов, что примерно эквивалентно 1.2 секундам. Каждые 800 оборотов производится запись необходимых для анализа данных.

Собираемые данные: *a*) результаты вычислений процедуры TSS: спин-тюн  $\mathbf{v}_s$  и компоненты вектора оси инвариантного спина  $\bar{n}$ , и *b*) компоненты спина ( $S_X, S_Y, S_Z$ ), и фазового пространства ( $X, A, Y, B, T, D$ ). Мы также записывали

разложения ряда Тэйлора функций  $\mathbf{v}_s$ ,  $\bar{n}$ , орбитальной, и спиновой трансфер матриц структур для каждого значения  $G_Y$ .

Из данных по компонентам спина вычисляется вектор поляризации банча:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{s}_i}{|\sum_i \mathbf{s}_i|}. \quad (2.5)$$

Вертикальная компонента вектора фирируется функцией  $f(t; a, f, \varphi) = a \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)$ , оцениваются все три параметра  $(\hat{a}, \hat{f}, \hat{\varphi})$ .

### Эффект секступольных полей на спин-тюн и на ось стабильного спина

На Рисунке 2.6 представлена зависимость спин-тюна от вертикального смещения частицы от референсной орбиты:  $\mathbf{v}_s(y) \approx a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + O(y^3)$ . На Рисунке 2.6а можно наблюдать разгибание ветвей параболы при  $G_Y \rightarrow G_Y^0$ .

Аналогичная зависимость для вертикальной компоненты оси стабильного спина частицы представлена на Рисунке 2.7. На Рисунке 2.7а мы обнаруживаем, что компонента оси стабильного спина ведёт себя аналогично спин-тюну при  $G_Y \rightarrow G_Y^0$ . Как и в случае идеальной структуры, на Рисунке 2.7б наблюдается присутствие в разложении  $\bar{n}_y(y)$  линейного члена, не чувствительного к секступольным полям.

На рисунках выше, значения спин-тюна и компонент оси стабильного спина были вычислены как функции только одной переменной; все остальные координаты фазового пространства приняты равными нулю. Анализируя трекинговые данные, мы обнаружили, что компоненты оси стабильного спина (как впрочем и спин-тюн) частицы практически не варьируются, как можно было бы ожидать исходя из рисунков, а находятся на практически постоянном уровне. Мы предположили, что зависимости  $\mathbf{v}_s$  и  $\bar{n}$  от вертикальной координаты и от её производной ( $y' \equiv a$ ) компенсируют друг друга во время движения частицы по реальной траектории. На следующих рисунках мы изобразили значения функций  $\mathbf{v}_s$ ,  $\bar{n}$  на истинных траекториях частиц в ускорителе.

На Рисунке 2.8 изображены траектории частиц в плоскости  $(Y, B)$  фазового пространства, полученные в результате трекинга через неидеальный ускоритель.

На Рисунках 2.9, 2.10, 2.11, и 2.12 изображены, соответственно: спин-тюн, радиальная, вертикальная, и продольная компоненты оси прецессии спина, вычисленные на траекториях частиц из Рисунка 2.8, в двух случаях: *i)* с выключенными, и *ii)* с включенными секступолями  $G_Y$ .

Исходя из рисунков можно отметить следующее:

1. в безсекступольном случае, и  $\nu_s$  и направление  $\bar{n}$  частицы по большей части (с точностью до влияния линейного члена разложения) фиксированы величиной её поперечного эмиттанса;
2. при применении секступольных полей, уровни  $\nu_s$  и  $\bar{n}$  различных частиц сравниваются, и становится виден эффект бетатронных колебаний, связанный с присутствием в разложении Тэйлора функций линейной компоненты.

Таким образом, Рисунки 2.10 и 2.11 свидетельствуют о том, что применение секступольных полей не только выравнивает модули **частот** прецессии частиц банча, но и их **направления**. Продольная компонента оси стабильного спина не чувствительна к секступольным полям, как видно из Рисунка 2.12.

На Рисунке 2.13 представлены зависимости средних значений (уровней) радиальной и вертикальной компонент оси стабильного спина частицы от среднего значения её спин-тюна. На основании этого рисунка, в разделе 2.5.2 мы сделали вывод о полной эквивалентности спиновых динамик частиц с одинаковыми эквивалентными Лоренц-факторами. <sup>2</sup>

## 2.2.7 Анализ механизма подавления декогеренции секступольными полями

Исходя из уравнений (1.6) и (1.9), зависимость спин-тюна от равновесной энергии частицы можно выразить следующим образом:

$$\nu_s = G\gamma_0 + G \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0} \cdot C_0 \cdot f_1(\varepsilon_x, \varepsilon_y, Q_x, Q_y) + G \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0} \cdot C_0 \cdot f_2(\alpha_1, \langle \Delta K/K \rangle^2),$$

где  $C_0$  константа, а  $f_1$  и  $f_2$  определяются уравнением (1.9).

Поскольку частица, совершающая бетатронные колебания, автоматически совершает и синхротронные колебания, эффект секступольных полей на

---

<sup>2</sup>По крайней мере при работе ускорителя в режиме нулевого спинового резонанса.

её спин-тюн — это суперпозиция эффектов. Однако же частица, находящаяся на референсной орбите, но имеющая начальное отклонение по импульсу, имеет такую же длину орбиты, и совершает только синхротронные колебания. Соответственно, секступольные поля влияют на спин-тюн такой частицы только путём модификации коэффициента сжатия орбиты, т.е. функции  $f_2$ .

В связи с этим, мы провели симуляцию, в которой последовательно инжектировали два пучка по 30 частиц: в первом, D-банче, частицы были распределены как  $\delta \sim N(0, 0.5 \cdot 10^{-6})$ , во втором, Y-банче, —  $y \sim N(0, 0.5)$  мм. Остальные координаты фазового пространства имели начальное значение равное нулю.

Пучки инжектировались в идеальную структуру, для того, чтобы исключить эффекты, связанные с возмущением орбит нереференсных частиц. Для первого пучка были включены только GSD секспутоли, для второго — GSY. Градиенты секступолей варьировались  $\pm 5 \cdot 10^{-3}$  от оптимального значения соответствующего семейства.

Трекинг проводился на протяжении  $1.2 \cdot 10^6$  оборотов, данные выводились каждые 800 оборотов.

На Рисунке 2.14 представлены фазовые траектории частиц пучков в продольном фазовом пространстве. Мы видим, что фазовые эллипсы частиц D-банча центрированы практически<sup>3</sup> на одной и той же точке, а их эмиттансы не меняются при изменении силы поля секступоля.

В то же время фазовые портреты частиц Y-банча меняются при изменении значения градиента секступоля. При этом мы видим, что максимальная скученность их центров (следовательно равновесных уровней энергии) не соответствует оптимальному значению градиента секступоля (фазовый портрет для последнего изображён на центральной панели). Именно это наблюдение послужило для нас стимулом инжекции в структуру D-банча. Мы объясняем это наблюдение суперпозицией эффектов сжатия равновесных орбит частиц, и модификации коэффициента сжатия орбиты.

Для более тщательного рассмотрения эффектов секступоля на функции  $f_1$  и  $f_2$ , мы построили зависимости средних уровней спин-тюнов частиц от их равновесных уровней энергии (Рисунок 2.15). Мы видим, что скученность

---

<sup>3</sup>При увеличении можно наблюдать различие центров фазовых эллипсов, но это различие не чувствительно к значению градиента секступоля, и скорее всего следствие конечности статистики.

точек графика для D-банча не меняется при варьировании значения градиента секступоля, а меняется только функциональная зависимость спин-тюна от равновесной энергии, как и предполагается функциональной формой  $f_2$  (см. раздел 1.2.6). Таким образом, сигнатурой оптимизации коэффициента сжатия орбиты служит изменение функциональной зависимости  $\langle \mathbf{v}_s \rangle = f(\langle \Delta K / K \rangle)$ .

На рисунке для Y-банча наблюдаются оба эффекта секступольного подавления декогеренции: изменяется и скученность точек (т.е. эмиттанс пучка), и функциональная зависимость.

**Вывод:** Симуляция подтверждает утверждения (2.3) и (2.4).

### 2.3 Ошибки неидеальности ускорителя

Систематические ошибки, вызванные физическими неидеальностями ускорителя, включая неточность юстировки оптических элементов, вызывают фальш-сигнал ЭДМ. [20, стр. 230] Особенно в этом отношении проблематичны наклоны элементов вокруг оптической оси, поскольку они индуцируют паразитные горизонтальные компоненты магнитного поля  $B_x$  и  $B_z$ , которые обе врашают спин в вертикальной плоскости; той, в которой измеряется ЭДМ.

Ю. Сеничевым были сделаны [22] аналитические оценки МДМ частоты прецессии спина вокруг радиальной оси. Из уравнения Т-БМТ, и выражения силы Лоренца, скорость МДМ прецессии вокруг радиальной оси есть

$$\sigma [\Omega_x^{MDM}] = \frac{q}{m\gamma} \frac{G+1}{\gamma} \frac{\sigma [B_x]}{\sqrt{n}}, \quad (2.6)$$

где  $n$  есть число наклонённых спин-роторов, и  $\sigma [B_x] = B_y \sigma [\delta h] / L$ , при стандартном отклонении ошибки юстировки  $\sigma [\delta h]$ . При величине ошибки  $\sigma [\delta h] = 100$  мкм, и длине дефлектора  $L = 1$  м,  $\sigma [\Omega_x^{MDM}] \approx 100$  рад/сек. [22]

Мы изучили спиновую динамику в структурах с замороженным и квази-замороженным спином в присутствии наклонов оптических элементов с помощью кода COSY INFINITY. Результаты нашей симуляции согласуются с оценками, представленными выше.

**Имплементация паразитного поля** Имплементируя неидеальности полей, мы следовали рекомендациям изложенным в [20, стр. 235]. Малое возмущение магнитного поля, в первом приближении, действует как маленький пропорциональный поворот спин-вектора. Поэтому мы имплементировали наклон E+B элемента как домножение соответствующей матрицы поворота на его спиновую матрицу перехода, “спин-кик.” Такая имплементация наклона элемента гарантирует сохранение замкнутой орбиты, что физически обусловлено появлением компенсирующего электрического поля спин-ротатора при его наклоне.

В соответствии с уравнением (1.1b), изменение МДМ частоты прецессии, ассоциированное с введённым паразитным полем  $(B_x, 0, B_z)$  есть

$$\Delta\Omega_{MDM} = \frac{q}{m} G \cdot (B_x, 0, B_z),$$

поэтому угол спин-кика равен

$$\Theta_{kick} = t_0 \Delta\Omega_{MDM},$$

где  $t_0 = L/v_0$  пролётное время референсной частицы через элемент.

### 2.3.1 Зависимость от распределения неидеальностей

Данная серия симуляций была проведена с целью подтвердить два тезиса касательно систематической ошибки измерения частоты прецессии спина в вертикальной плоскости, вызванной неточностью установки E+B элементов: 1) индуцированный МДМ-эффект зависит только от среднего значения угла наклона элементов, но не от конкретной последовательности углов; и 2) эта зависимость носит линейный характер.

Симуляция была проведена следующим образом: мы распределили наклоны  $\Theta_{tilt}$  E+B элементам FS структуры случайным образом. После построения матриц перехода 3-го порядка (спиновой и орбитальной), были вычислены разложения Тэйлора функций спин-тюна и оси прецессии спина (SPA). Члены нулевого порядка этих разложений представляют собой спин-тюн и SPA референсной частицы.

Угловая скорость поворота спин-вектора референсной частицы вычисляется по формуле: [15, стр. 4]

$$\Omega = 2\pi/\tau_0 \cdot \nu_s \cdot \bar{n},$$

где  $\tau_0 = f_{rev}^{-1} = 10^{-6}$  секунд есть пролётное время частицы через ускоритель.

Симуляция была проведена 11 раз; каждый раз углы наклона спин-роторов выбирались из нормального распределения  $N(\mu_0 \cdot (i - 5), \sigma_0)$ , где  $\mu_0 = 10 \cdot \sigma_0 = 10^{-4}$  рад,  $i \in \{0, \dots, 10\}$ . Результаты представлены на Рисунке 2.16.

Из рисунка видно, что при такой установке элементов, при которой среднее значение угла наклона равно  $10^{-4}$  радиан, поляризация пучка будет вращаться в вертикальной плоскости с угловой скоростью около 500 радиан/секунду. Это согласуется с оценками выше (раздел 2.3), поскольку в них предполагается стандартное отклонение ошибки наклона  $10^{-4}$  радиан, а также наклон  $n = 100$  элементов. В этом случае, стандартное отклонение среднего угла наклона элементов равно  $10^{-5}$  радиан, и значит с вероятностью 67%, МДМ прецессия в вертикальной плоскости будет происходить со скоростью до 50 рад/сек, а с вероятностью 95% — до 100 рад/сек.

На Рисунке 2.17 изображены результаты теста, в котором Е+В элементы попарно повёрнуты на противоположные углы (три случайные пары), а один элемент повернут на угол  $\mu_i = (i - 5) \cdot 10^{-6}$  рад,  $i \in \{0, \dots, 10\}$ . Обе симуляции были выполнены на энергии 270.0092 МэВ.<sup>4</sup> Можно наблюдать, что скомпенсированные элементы не дают вклад во вращение спин-вектора референсной частицы.

### 2.3.2 Равенство частот прецессии спинов частиц при движении в прямом и обратном направлениях

На Рисунке 2.18 изображена относительная разница между радиальной компонентой оси стабильного спина/угловой скоростью поворота спина части-

---

<sup>4</sup>На этой энергии, в идеальной структуре,  $\nu_s$  и  $\bar{n}$  не определены в системе координат связанной с пучком, использованной COSY INFINITY. Это соответствует ситуации, когда спин не прецессирует ни в какой плоскости (горизонтальной или вертикальной), что есть условие трёхмерно-замороженного спина, для идеальной структуры.

цы, соответственно для случайно-распределённой ошибки наклона элементов, и в случае попарной компенсации наклонов.

Для радиальной компоненты оси стабильного спина, относительная разница вычислялась как

$$\delta \bar{n}_x = \frac{\bar{n}_x^{CW}(\langle \Theta_{tilt} \rangle) - \bar{n}_x^{CCW}(\langle \Theta_{tilt} \rangle)}{\bar{n}_x^{CW}(\langle \Theta_{tilt} \rangle)},$$

для угловой скорости, соответственно:

$$\delta \Omega_x = \frac{\Omega_x^{CW}(\langle \Theta_{tilt} \rangle) - \Omega_x^{CCW}(\langle \Theta_{tilt} \rangle)}{\Omega_x^{CW}(\langle \Theta_{tilt} \rangle)}.$$

Из рисунков следует, что в обоих случаях движения пучка, ось стабильного спина наклонена одинаково; при этом существует различие между спин-тюнами CW и CCW пучков, на уровне не более десятых долей процента, которое тем сильнее, чем с меньшей скоростью крутится Спин-Колесо. Эта разница свидетельствует об асимметричности ускорительной структуры относительно обращения направления движения, с точки зрения спиновой динамики, и может объясняться различием референсных орбит прямого и обратного пучков.

## 2.4 Смена полярности ведущего поля

Необходимо уделить внимание двум аспектам проблемы смены полярности ведущего поля:

1. Какой параметр системы должен оставаться постоянным от цикла к циклу;
2. Как его можно наблюдать.

Целью смены полярности ведущего поля является точное воспроизведение радиальной компоненты частоты МДМ прецессии, индуцированной полями неидеальности ускорителя. Этот момент часто упускается из виду: простое воспроизведение *величины магнитного поля* не достаточно, поскольку точка инжекции центроида пучка, а значит его длина орбиты — и соответственно, ввиду уравнений (1.10) и (1.6), спин-тюн, — подвержена вариации. (Помимо этого, ускорительная структура может быть асимметрична, с точки зрения спиновой динамики, относительно обращения направления движения пучка.)

Таким образом, необходимо восстанавливать не величину поля, а эффективный Лоренц-фактор центроида.

Касательно второго вопроса, мы уже говорили, что скорость вращения Спин-Колеса контролируется через измерения частоты прецессии спина в горизонтальной плоскости. Эта плоскость была выбрана потому, что вектор угловой скорости ЭДМ прецессии смотрит (по большей части) в радиальном направлении; его вертикальная компонента возникает из-за полей неидеальности ускорителя, и мала по сравнению с ихмеряемым ЭДМ эффектом. Поэтому, в первом приближении, когда мы манипулируем вертикальной компонентой совокупной угловой скорости спин-прецессии, мы манипулируем вертикальной компонентой вектора угловой скорости МДМ-прецессии.

Процедура калибровки эффективного Лоренц-фактора состоит в следующем.

#### 2.4.1 Алгоритм калибровки

Пусть  $\mathcal{T}$  обозначает множество всех возможных траекторий частицы в ускорителе.  $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cup \mathcal{F}$ , где  $\mathcal{S}$  это все стабильные траектории, а  $\mathcal{F}$  — это такие траектории, при попадании на одну из которых частица теряется из пучка.

Калибровка производится в два этапа:

- На первом этапе величина поля выставляется таким образом, чтобы частицы инжектированного пучка попадали на траектории  $t \in \mathcal{S}$ . В первом приближении, это будет та же величина, что и для обратноциркулирующего пучка, но с противоположным знаком.
- Затем величина поля уточняется, путём удовлетворения условия замороженности спина в горизонтальной плоскости. При выполнении этого условия, из  $\mathcal{S}$  выбирается подмножество  $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$  траекторий, для которых  $\Omega_y = 0$ .

Предположим, что  $\Omega_y = \Omega_y(\gamma_{eff})$  — инъективная функция, а значит  $\Omega_y(\gamma_{eff}^1) = \Omega_y(\gamma_{eff}^2) \rightarrow \gamma_{eff}^1 = \gamma_{eff}^2$ . Пространство траекторий делится на классы эквивалентности по величине эффективного Лоренц-фактора: траектории с одинаковым  $\gamma_{eff}$  эквивалентны с точки зрения спин-динамики (то есть, обладают одним и тем же значением спин-тюна  $\mathbf{v}_s$  и направлением оси стабильного

спина  $\bar{n}$ ), и принадлежат одному классу. Поскольку  $\Omega_y$  инъективная, значит существует уникальное  $\gamma_{eff}$ , один класс эквивалентности, при котором  $\Omega_y = 0$ :  $[\Omega_y = 0] \equiv [\gamma_{eff}^0] = \mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$ .

Если бы в структуре кольца не использовались секступоли,  $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$  было бы синглетоном (множеством с единственным элементом). В разделе 2.2, мы уже показали, что при использовании секступолей,  $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{S}|_{\Omega_y=0}: \mathbf{v}_s(t_1) = \mathbf{v}_s(t_2)$ ,  $\bar{n}(t_1) = \bar{n}(t_2)$ , и значит  $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$  содержит несколько траекторий.<sup>5</sup>

Тогда, чтобы подтвердить валидность калибровочной процедуры, нам нужно показать следующее:

1.  $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}^{CCW} = \mathcal{S}|_{\Omega_y=0}^{CW}$  — то есть, что и в прямом, и в обратном случае циркуляции пучка,  $\Omega_y = 0$  для одних и тех же траекторий (эквивалентно,  $\Omega_y = 0$  при одном и том же  $\gamma_{eff}$  и в CW, и в CCW случаях);
2.  $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{S}|_{\Omega_y=0}^{CCW}: \mathbf{v}_s(t_1) = \mathbf{v}_s(t_2), \bar{n}(t_1) = \bar{n}(t_2)$  — то есть, те же самые секступольные поля подавляют декогеренцию и прямого, и обратного пучков.

Для выполнения этой задачи мы:

1. строим зависимости  $\mathbf{v}_s(z)$ ,  $z \in \{x, y, \delta\}$  для CW и CCW пучков;
2. вычисляем их невязку  $\varepsilon(z) = \mathbf{v}_s^{CW}(z) - \mathbf{v}_s^{CCW}(z)$ .

Если невязка мала в широком диапазоне  $z$ , значит: 1) секступольное подавление декогеренции работает без изменений значений градиентов для обоих пучков, и 2) спин-тюн (соответственно  $\gamma_{eff}$ ) одинаков для обоих пучков, и значит их Спин-Колёса врачаются с одинаковой скоростью.

Углы наклона  $\bar{n}^{CW}, \bar{n}^{CCW}$  по отношению к горизонтальной плоскости определяются точностью установки  $\Omega_y = 0$ .

#### 2.4.2 Численное моделирование

В симуляции используется неидеальная FS структура [31], в которой углы наклонов элементов вокруг оптической оси  $\alpha \sim N(0, 5 \cdot 10^{-4})$  радиан. В

---

<sup>5</sup>Строго говоря, как видно из рисунка 2.6 раздела 2.2, даже при использовании секступольных полей сохраняется некоторая, пренебрежимо малая, зависимость спин-тюна от длины траектории частицы. В связи с этим, равенства здесь приближённые, а множество  $\mathcal{S}|_{\Omega_y=0}$  следует считать нечётким множеством: мы будем полагать траектории, на которых  $|\Omega_y| < \delta$  для некоторого малого  $\delta$ , как принадлежащими классу  $[\Omega_y = 0]$ .

структуре используется сектупольное подавление декогеренции. Симуляция повторяется три раза; каждый раз включено только одно семейство сектуполей. Значение градиента каждого из семейств оптимизируется по отдельности, по процедуре, описанной в разделе 2.2.4.

Кинетическая энергия пучка 270.00 МэВ. Спин- и орбитальная трансфер-матрицы вычисляются до третьего порядка разложения ряда Тэйлора.

Основное тело симуляции состоит в следующем: с помощью процедуры TSS [36, стр. 41] вычисляются разложения рядов Тэйлора третьего порядка спин-тюна  $\mathbf{v}_s$  и оси стабильного спина  $\bar{n}$  структуры, в которой пучок движется по часовой стрелке. Затем, используя комбинацию процедур MR и SMR [20, стр. 233] вычисляются спин- и орбитальная трансфер-матрицы обратной структуры, и вычисляются разложения  $\mathbf{v}_s$  и  $\bar{n}$  для обратной структуры (как её видит пучок, циркулирующий в обратном направлении).

### 2.4.3 Результаты

На рисунках 2.19, 2.20, и 2.21 представлены результаты тестов. Конкретнее, на рисунках 2.19a, 2.20a, и 2.21a изображены  $\mathbf{v}_s$  и  $\bar{n}_y$  CW и CCW пучков в зависимости от смещения частицы от референсной в горизонтальной и вертикальной плоскостях, и по энергии, соответственно. Можно наблюдать, что зависимости  $\mathbf{v}_s^{CW}$  и  $\mathbf{v}_s^{CCW}$  (равно как и  $\bar{n}_y^{CW}$  и  $\bar{n}_y^{CCW}$ ) отличаются друг от друга, но при этом невязка частоты  $\Delta\Omega_y$  не превосходит  $\pm 3 \cdot 10^{-6}$  рад/сек; невязка спин-тюна не превосходит уровня  $10^{-13}$ , поперечных компонент  $\bar{n}$  уровня  $10^{-8}$ . Рисунки 2.19б, 2.20б, и 2.21б изображают зависимости разницы между CW и CCW пучками радиальных компонент частоты прецессии спина от разницы их вертикальных компонент. Можно видеть, что при уменьшении разницы  $\Delta\Omega_y < 10^{-7}$  рад/сек (точность определения частоты, достигаемая при фитировании данных с одного цикла), разница  $\Delta\Omega_x < 10^{-8}$  рад/сек (т.е. на порядок меньше статистической погрешности). Это говорит о принципиальной возможности использования частоты прецессии спина в горизонтальной плоскости для калибровки частоты прецессии в вертикальной плоскости.

## 2.5 Спин-тюн эквивалентность траекторий частиц с одинаковыми значениями эффективного Лоренц-фактора

В контексте процедуры смены направления вращения Спин-Колеса, важно рассмотреть вопрос эквивалентности спин-динамики CW и CCW пучков.

Отправной точкой нашего анализа является утверждение 1: частицы с одинаковым значением эффективного Лоренц-фактора имеют одинаковый спин-тюн, то есть эквивалентны с точки зрения спиновой динамики. Это следствие уравнения (1.6).

В следующих разделах мы проанализируем две формулировки утверждения 1:

- A. интерпретируя эффективный Лоренц-фактор как математическое ожидание кинетической энергии частицы;
- B. функция многих переменных  $v_s(x, a, y, b, \ell, \delta)$  агностична к фазовой траектории частицы в поперечном фазовом пространстве  $(x, a)$ , и  $(y, b)$ , т.е. может быть сведена к функции одной переменной  $v_s(\gamma_{eff})$ .

### 2.5.1 Формулировка А

В данном разделе, рассмотрим утверждение 1, интерпретируя эффективный Лоренц-фактор как математическое ожидание Лоренц-фактора частицы.

Для проверки утверждения мы выполнили следующую симуляцию: мы инжектировали три бенча по 10 частиц, X, Y, и D, в идеальную структуру с замороженным спином. Орбитальная и спин-трансфер матрицы построены до третьего порядка разложения Тэйлора, энергия инжекции 270 МэВ. Частицы X-банча имели начальное смещение по радиальной координате в диапазоне  $\pm 1$  мм, Y-банча по вертикальной координате  $\pm 1.318$  мм,<sup>6</sup> а D-банча по энергии,

---

<sup>6</sup>Такой диапазон принят исходя из требования получить одинаковые эмиттансы частиц, совершающих бетатронные колебания в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Начальное отклонение задаёт амплитуду колебаний  $A$ , которая в свою очередь связана с бета-функцией  $\beta$  и эмиттансом  $\varepsilon$  частицы как  $A = \sqrt{\varepsilon\beta}$ .

$\Delta K/K_0$ , в диапазоне  $\pm 10^{-4}$ . Далее проводился трекинг частиц на протяжении 12,000 оборотов, с выводом данных каждые 80 оборотов.

Данные трекинга — координаты частицы в фазовом пространстве  $\mathbf{z} = (x, x', y, y', \ell, \delta)$ , где  $\ell = -(t - t_0)v_0 \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0}$  продольное смещение частицы относительно референсной,  $\delta = \Delta K/K$  — её смещение по энергии, а также значение её спин-тюна  $\mathbf{v}_s(\mathbf{z})$ . На основании этих данных, мы вычислили среднее значение спин-тюна  $\langle \mathbf{v}_s \rangle$ , среднее значение смещения частицы по энергии  $\langle \Delta K/K \rangle$ , продольные и поперечные эмиттансы частиц.

На Рисунке 2.22 представлены результаты эксперимента. На верхней панели изображена зависимость  $\langle \mathbf{v}_s \rangle$  от  $\langle \Delta K/K \rangle$ , для бетатрон-осциллирующих банчей, при выключенных секступолях. Из рисунка следует, что при одинаковых средних уровнях энергии, частицы, совершающие бетатронные колебания в вертикальной плоскости, имеют спин-тюн, отличный от частиц, совершающих колебания в горизонтальной плоскости. То есть, на сколько мы можем судить, утверждение 1 в формулировке А опровергнуто.

Мы предположили, что различие наклонов прямых связано с *пространственной зависимостью* коэффициента сжатия орбиты. Это предположение основано на нашем анализе секступольного подавления декогеренции, подробнее описанного в разделе 2.2.7. Чтобы проверить наше предположение, мы повторили эксперимент для нескольких значений градиента секступоля GSX, взятых из диапазона  $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ . Результаты представлены на нижней панели Рисунка 2.22. На рисунке изображена та же зависимость, но только для X-банча, при различных значениях силы поля секступоля. Как видно из рисунка, при варьировании силы поля изменяется наклон касательной зависимости. Точно такое же поведение мы наблюдали и в разделе 2.2.7.

Для проверки нашей гипотезы о пространственной зависимости коэффициента сжатия орбиты, мы построили зависимости равновесных уровней энергии частиц X-, и Y-банчей от произведения их поперечных эмиттансов и бетатронных тюнов (Рисунок 2.23). Исходя из уравнения (1.8), удлинение орбит с одинаковым произведением поперечного эмиттанса на бетатрон-тюн должно быть одинаковым. Дельта равновесного уровня энергии частицы связана с удлинением её орбиты через коэффициент сжатия орбиты; в связи с этим, разница наклонов прямых на Рисунке 2.23 свидетельствует о том, что коэффициенты сжатия орбит разнятся для X-, и Y-банчей.

Пространственная зависимость коэффициента сжатия орбиты подтверждается уравнением (15) работы [30], в которой обнаруживаем:

$$\alpha_0 = \left\langle \frac{D_0}{\rho} \right\rangle, \quad \alpha_1 = \left\langle \frac{D_1}{\rho} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle D_0'^2 \right\rangle,$$

где  $D(s) = D_0(s) + D_1(s) \cdot \delta$  есть функция дисперсии, а  $\rho$  — радиус замкнутой орбиты частицы. В первом приближении, дисперсия существует только в горизонтальной плоскости, и равна нулю в вертикальной. Таким образом, пространственная зависимость функции дисперсии находит отражение в пространственной зависимости коэффициента сжатия орбиты.

Для сравнения, результаты тех же тестов в случае линейных спин- и орбитальной трансфер матриц представлены на Рисунках 2.24б, и 2.24а. Как видно на Рисунке 2.24а, у всех частиц, совершающих бетатронные колебания в вертикальной плоскости, один и тот же уровень равновесной энергии, что свидетельствует о равенстве их замкнутых орбит, что в свою очередь говорит об отсутствии дисперсии в вертикальной плоскости. При этом, из Рисунка 2.24б следует, что спин-тюн всех этих частиц одинаков.

На Рисунке 2.25 изображены зависимости продольных эмиттансов частиц от их поперечных эмиттансов (отнормированных бетатронными тюнами). Как видим, поперечные эмиттансы индуцируют продольные эмиттансы с разной скоростью, в зависимости от плоскости бетатронных колебаний частицы. В линейном случае, бетатронные колебания в вертикальной плоскости не индуцируют синхротронные колебания вовсе.

**Вывод:** Формулировка А не верна.

### 2.5.2 Формулировка В

При помощи кода COSY Infinity мы вычисляем функцию спин-тюна  $\nu_s(\mathbf{z})$  в виде разложения ряда Тэйлора, где

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= (x, a, y, b, \ell, \delta), \\ \ell &= -(t - t_0)v_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \\ \delta &= \frac{\Delta K}{K}.\end{aligned}$$

В настоящем разделе, проверим утверждение 1 в обобщённой форме В: функцию многих переменных  $\nu_s(\mathbf{z})$  можно представить в виде функции скалярного параметра  $\nu_s(\gamma_{eff})$ ; при этом, мы не будем предполагать никакого формального выражения параметра  $\gamma_{eff}$ .

Если формулировка В верна, то существует система координат (одной из осей которых является  $\nu_s$ ), в которой частицы, совершающие бетатронные колебания в горизонтальной плоскости, неотличимы, с точки зрения спин-тюна, от частиц, совершающих колебания в вертикальной плоскости. К тому же, в этой системе координат не должны присутствовать координаты из поперечного фазового пространства  $(x, a)$ , и  $(y, b)$ .

Таким образом, будем рассматривать пространство  $\mathcal{P} = (\ell, \delta, \nu_s)$ . Если формулировка В верна, различие траекторий частиц в поперечном фазовом пространстве не должно отражаться на траектории частиц в  $\mathcal{P}$ .

В анализе использованы данные симуляции, описанной в предыдущем разделе.

На Рисунке 2.26а изображена зависимость  $\nu_s(\mathbf{z})$  от  $(\ell, \delta)$  в том случае, когда  $\mathbf{z}$  представляет реальную фазовую координату частицы в ускорителе. Мы наблюдаем:

1. стратификацию среднего уровня спин-тюна, как мы это видели в симуляциях по подавлению декогеренции в разделе 2.2.6;
2. стратификация гораздо значительнее для X-банча (синие точки), чем для Y-банча (красные точки).

Последнее объясняется большим значением функции дисперсии в горизонтальной плоскости. Отметим, что при одинаковом приведённом поперечном

эмиттансе<sup>7</sup> (то есть одинаковом удлинении орбит, если исходить из уравнения (1.8)), частицы, совершающие бетатронные колебания в горизонтальной плоскости, обладают значительно большим продольным эмиттансом, чем совершающие колебания в вертикальной плоскости.

В связи с последним, мы решили построить ту же самую зависимость, но подбирать пары частиц на основе равенства не приведённых поперечных эмиттансов, а на продольных эмиттансов. На Рисунке 2.26б мы наблюдаем, что частицы, с приблизительно одинаковыми продольными эмиттансами имеют приблизительно одинаковый уровень спин-тюна, независимо от плоскости совершения бетатронных колебаний.

**Вывод:** формулировка В подтверждается симуляцией; эффективный Лоренц-фактор отражает величину продольного эмиттанса частицы.

Ввиду рисунка 2.13, можно также заключить о *полной* эквивалентности спиновых динамик<sup>8</sup> частиц с одинаковыми эффективными Лоренц-факторами.<sup>9</sup>

---

<sup>7</sup>Приведённым эмиттансом будем называть произведение  $\varepsilon_\alpha \cdot Q_\alpha$ , где  $\alpha \in \{x,y\}$ .

<sup>8</sup>Имеется ввиду равенство спин-тюнов и осей стабильного спина.

<sup>9</sup>Во всяком случае, при работе ускорителя в режиме нулевого спинового резонанса.

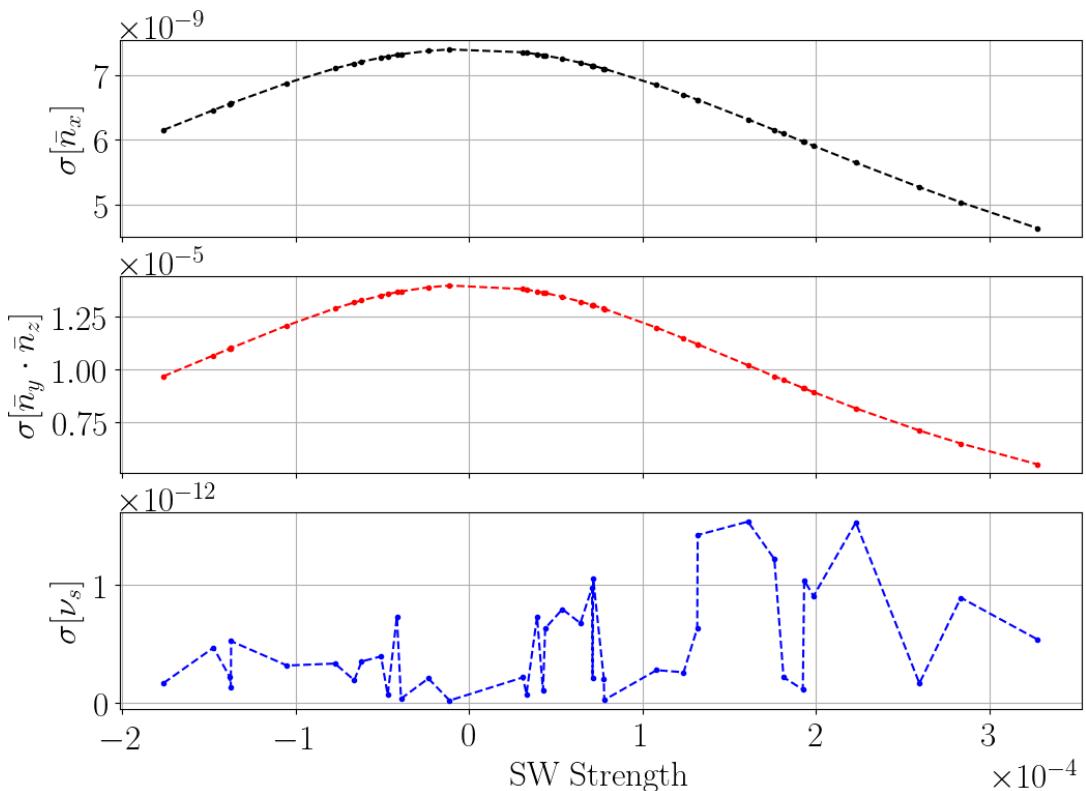
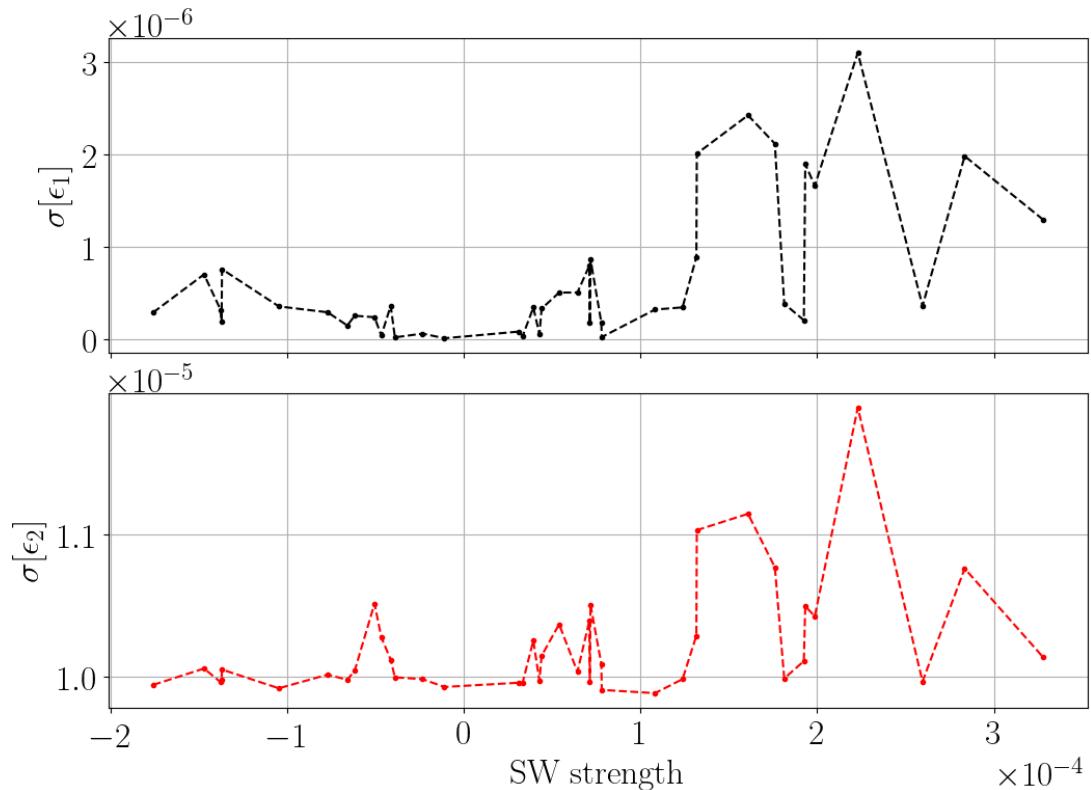
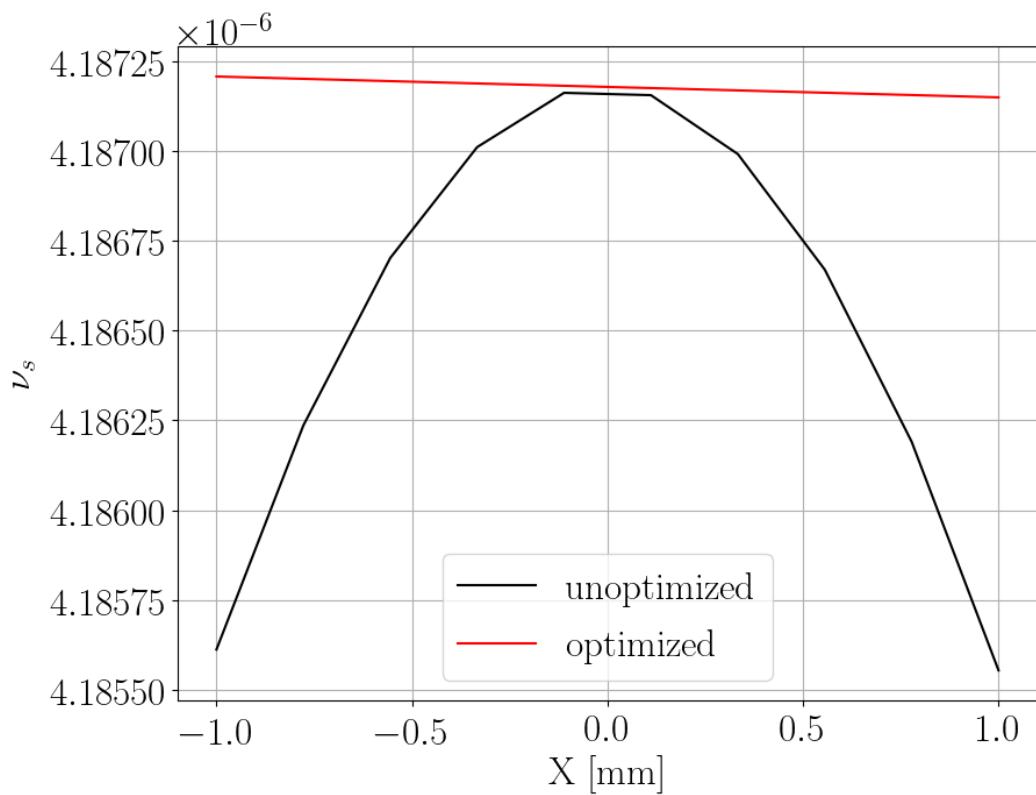
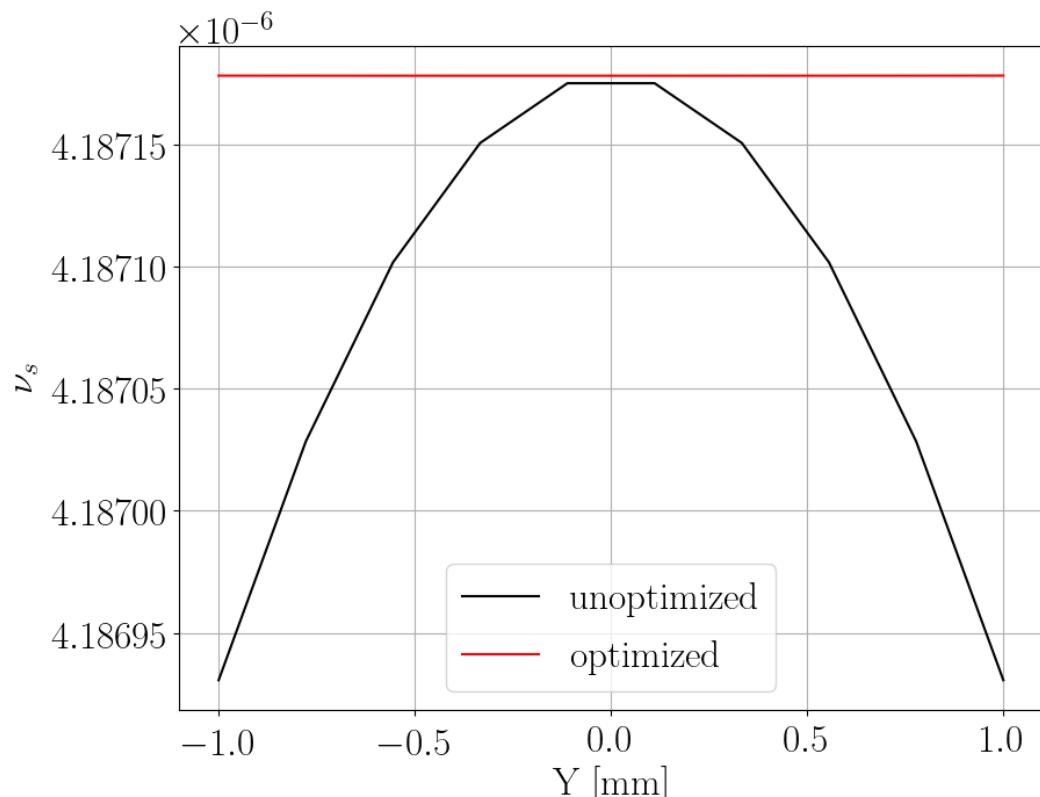
a) Компонент  $\bar{n}$ б) Сравнительных невязок. Верхняя панель: невязка  $\epsilon_1$ ; нижняя панель: невязка  $\epsilon_2$ 

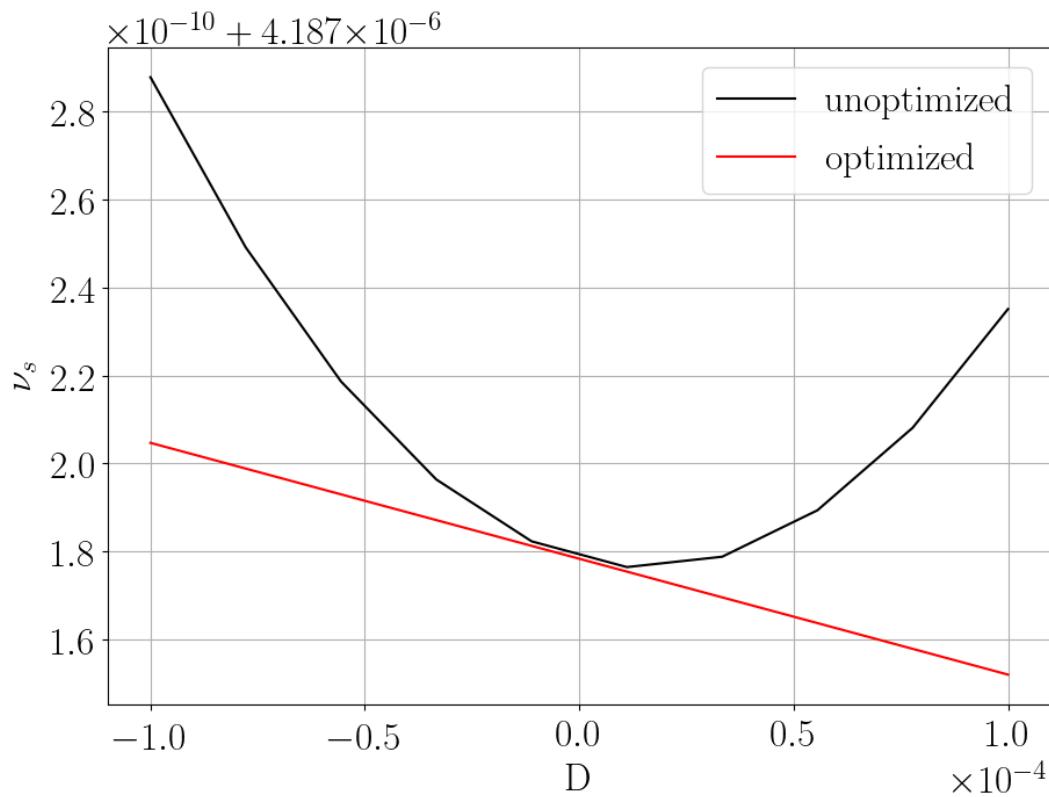
Рисунок 2.2 — Стандартные отклонения против относительной скорости Спин-Колеса



a) В горизонтальном направлении



б) В вертикальном направлении



в) По энергии

Цветом выделены зависимости при нулевом (чёрный) и оптимизированном (красный) значениях градиента секступоля

Рисунок 2.3 — Зависимость спин-тюна частицы от её смещения от референсной частицы.

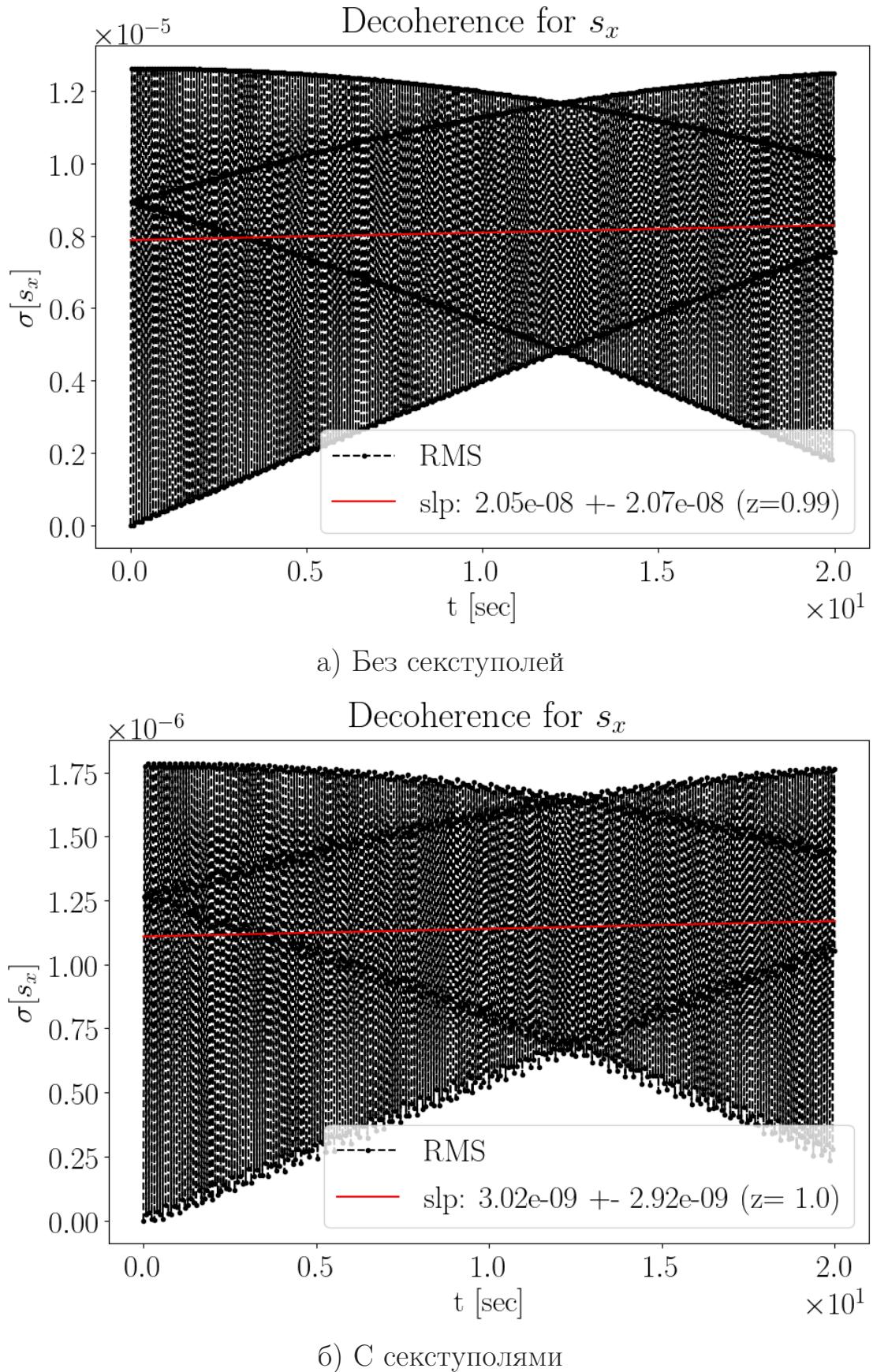


Рисунок 2.4 — Стандартное отклонение радиальной компоненты спин-вектора частицы от спин-вектора референсной частицы

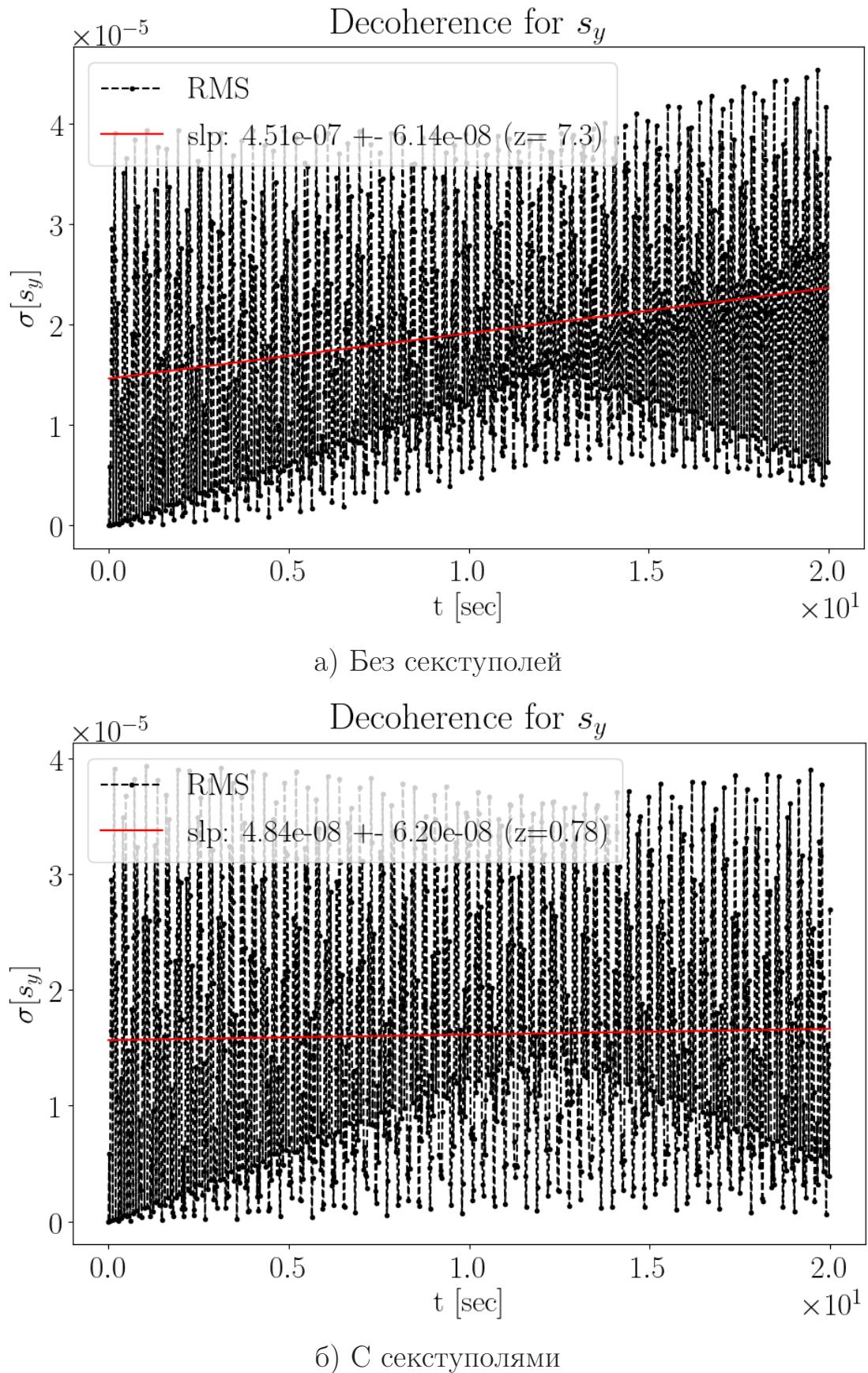
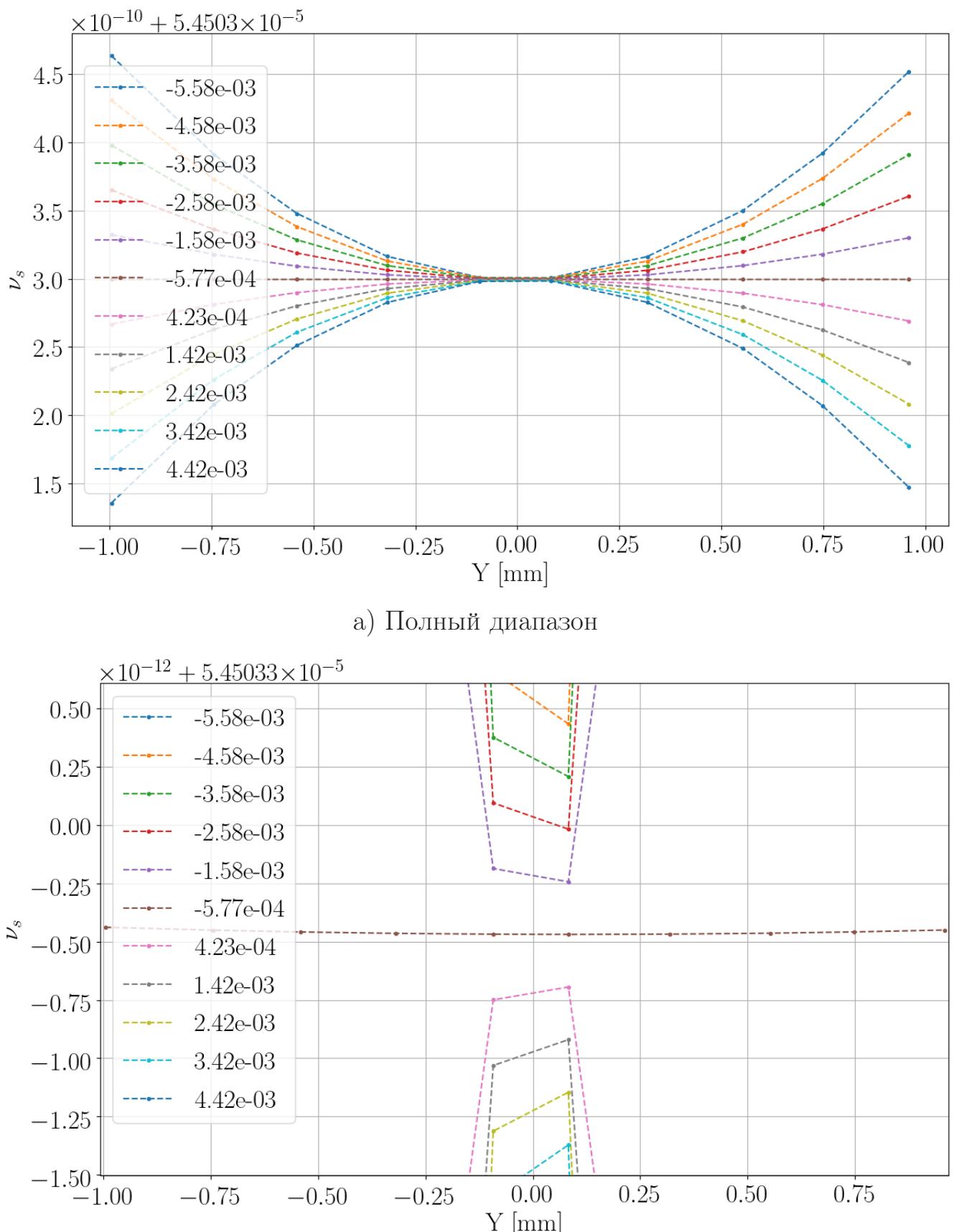


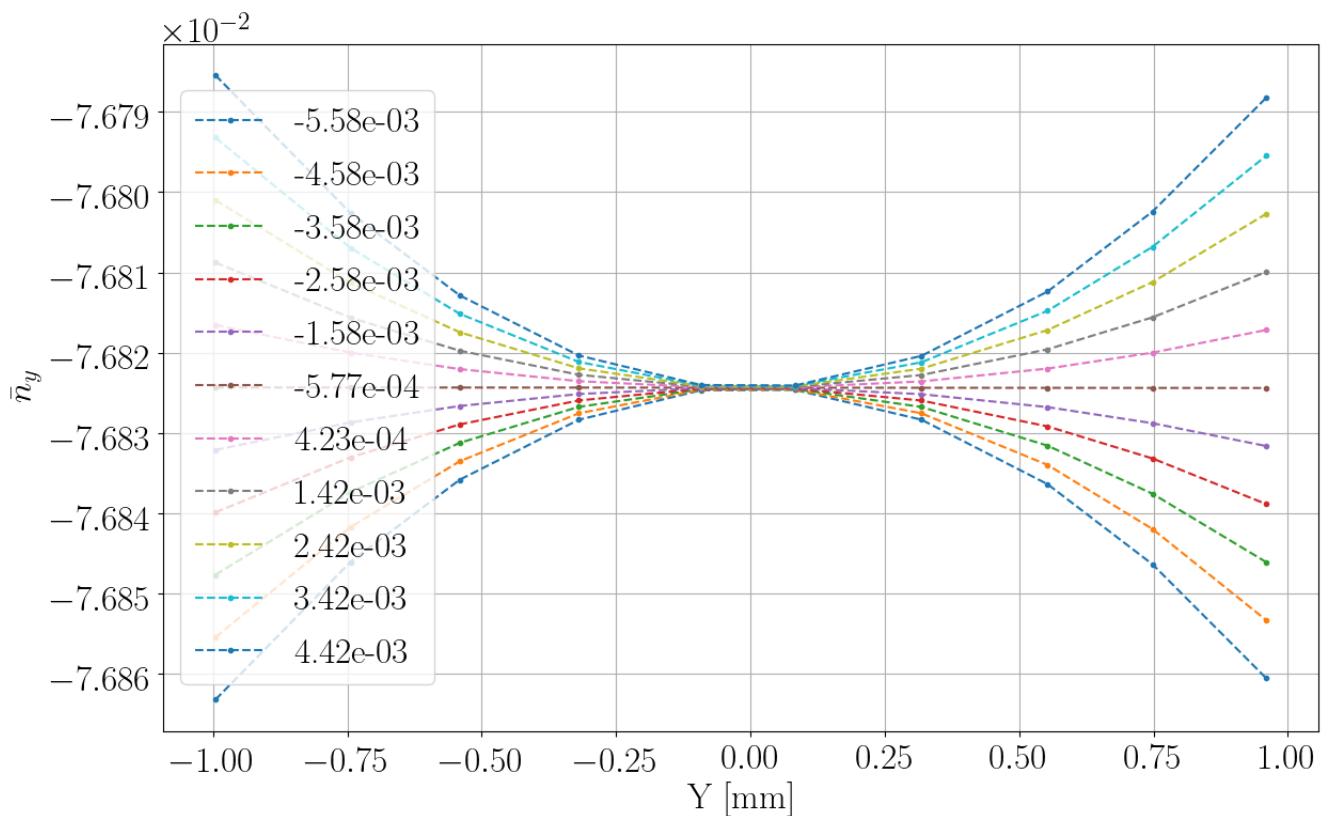
Рисунок 2.5 — Стандартное отклонение вертикальной компоненты спин-вектора частицы от спин-вектора референсной частицы



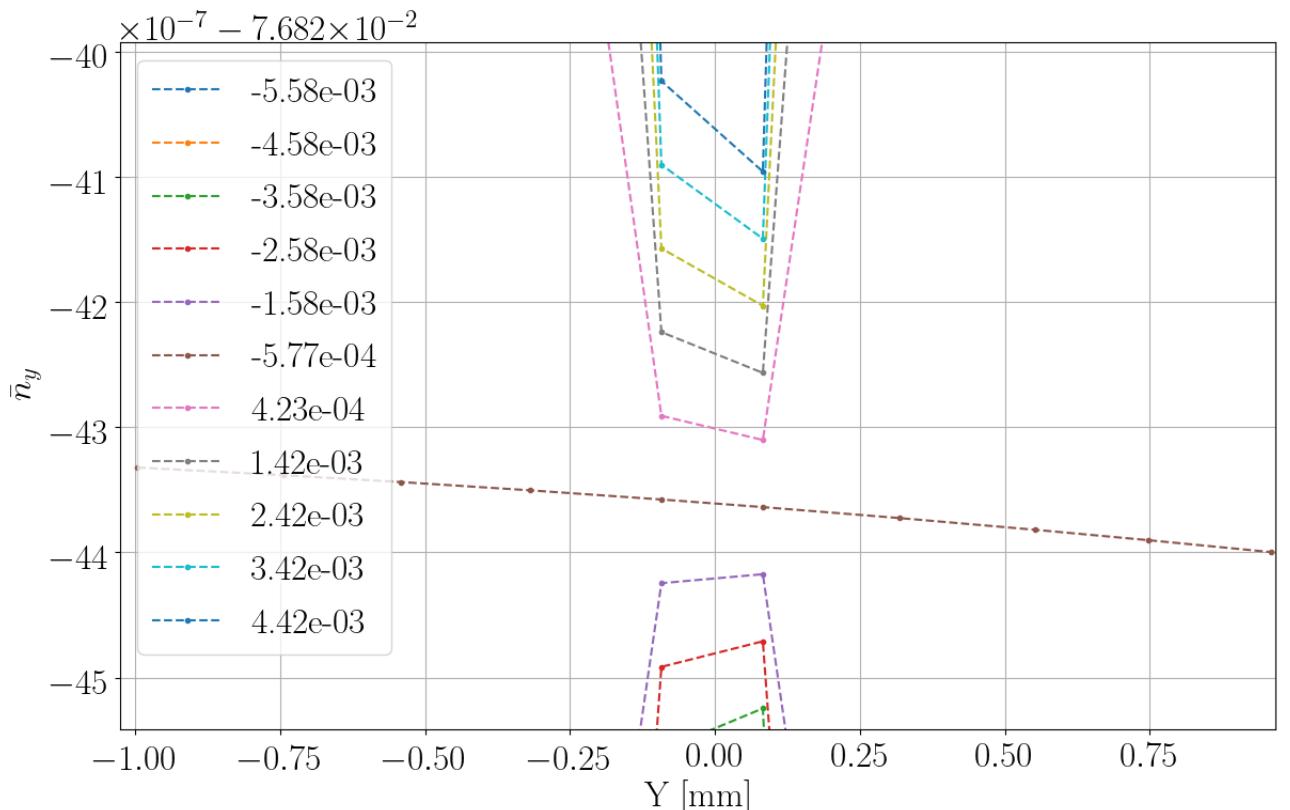
б) Детализировка кривой при оптимальном значении  $G_Y$

Цветом обозначены данные для различных значений градиента  $G_Y$   
Y-секступоля.

Рисунок 2.6 — Спин-тион  $\nu_s$  в зависимости от смещения частицы от референсной орбиты.



а) Полный диапазон.

б) Детализировка кривой при оптимальном значении  $G_Y$ .

Цветом обозначены данные для различных значений градиента  $G_Y$   
Y-секступоля.

Рисунок 2.7 — Вертикальная компонента  $\bar{n}_y$  оси прецессии спина в зависимости от смещения частицы от референсной орбиты.

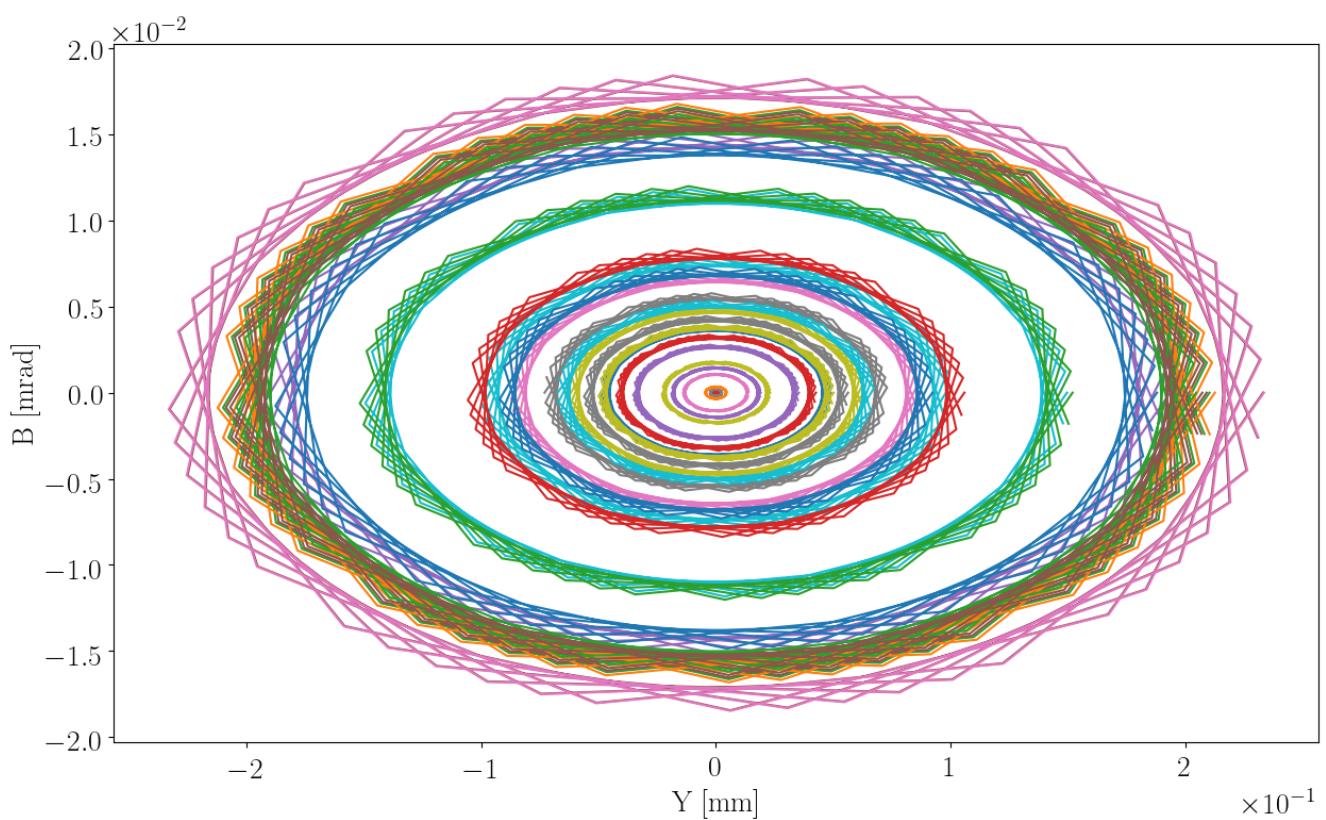
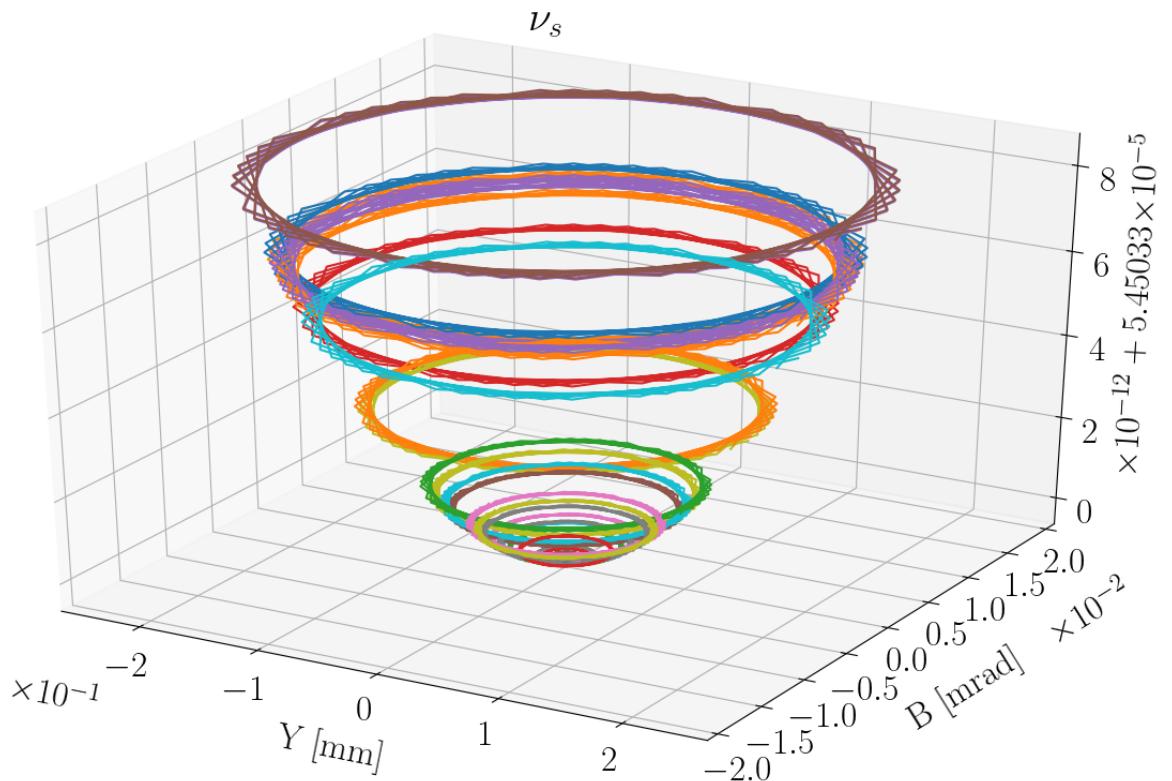
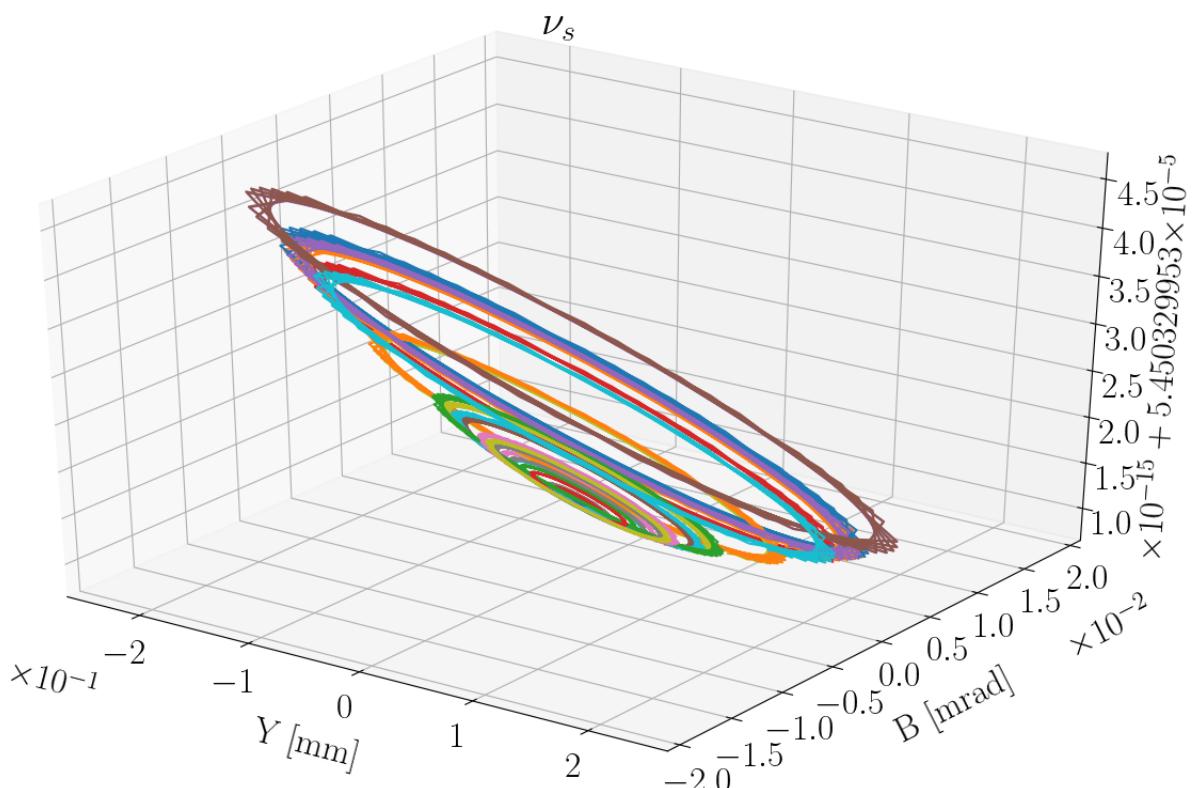


Рисунок 2.8 — Траектории частиц в плоскости  $(Y, B)$  фазового пространства.

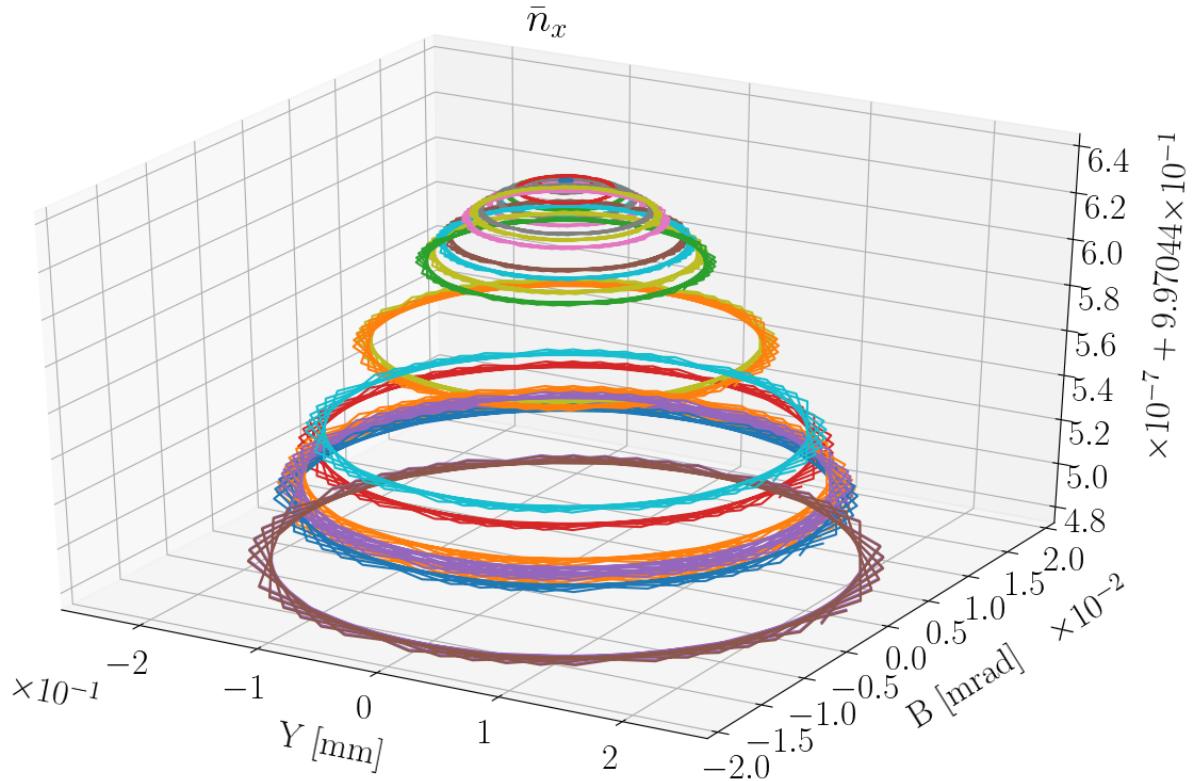


a) С выключенными секступолями.

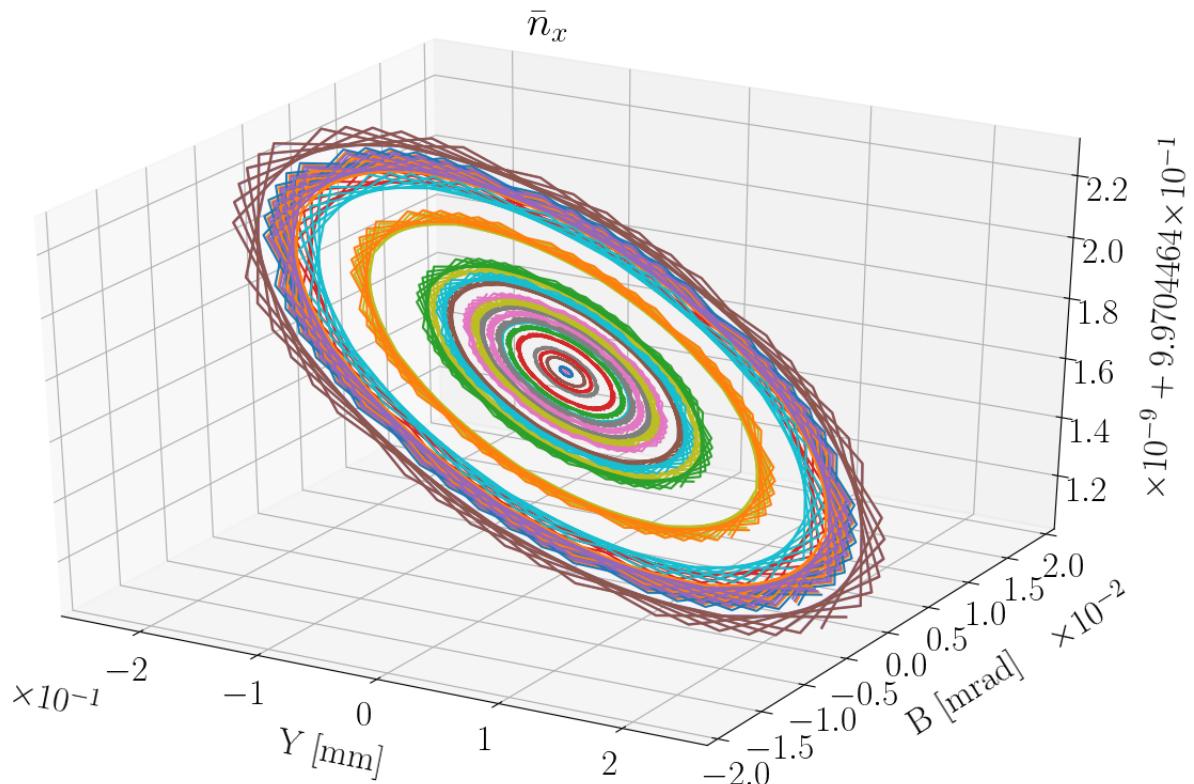


б) С включенными секступолями.

Рисунок 2.9 – Спин-тионы частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре.

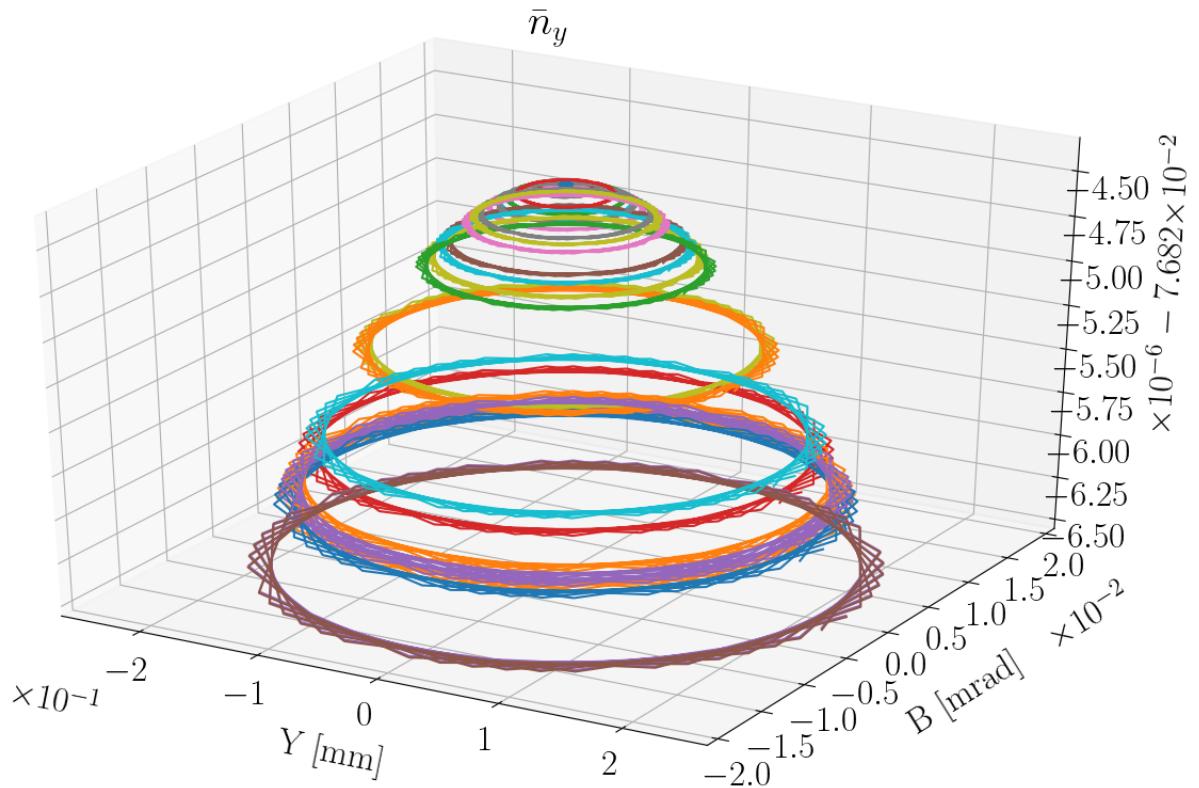


а) С выключенными секступолями.

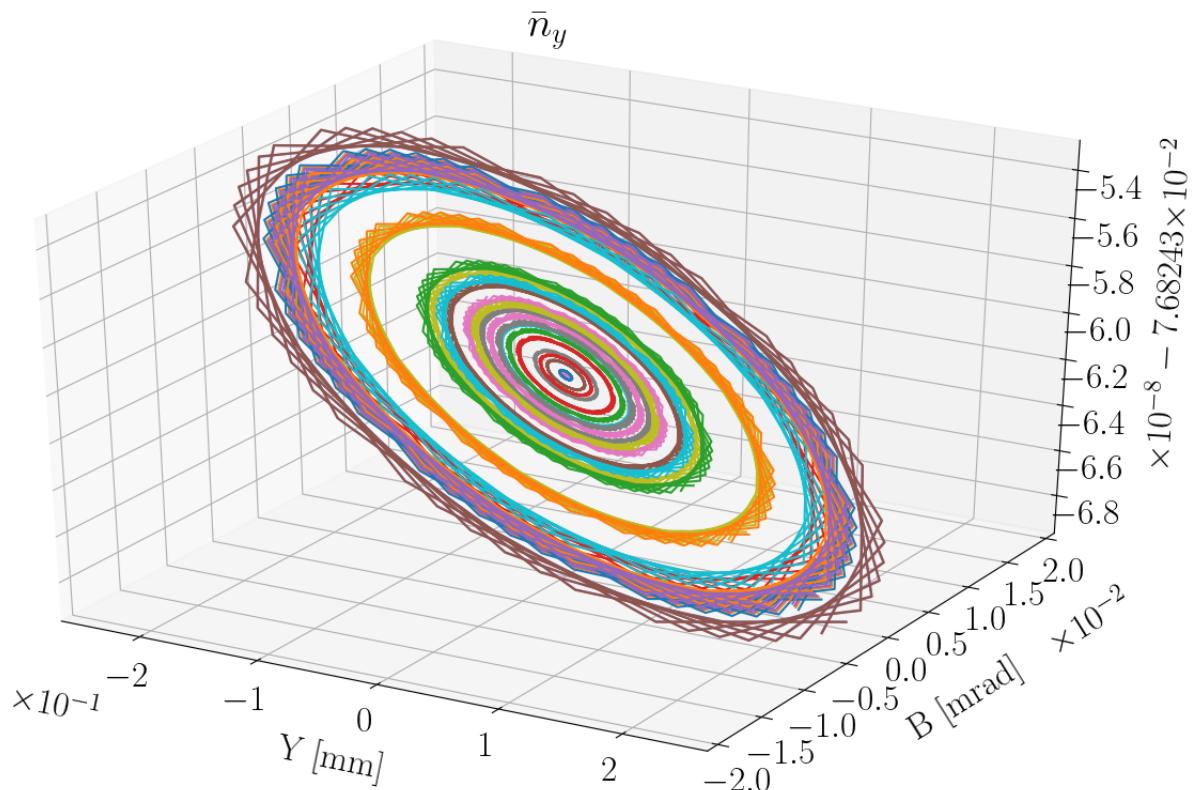


б) С включенными секступолями.

Рисунок 2.10 — Радиальные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре.

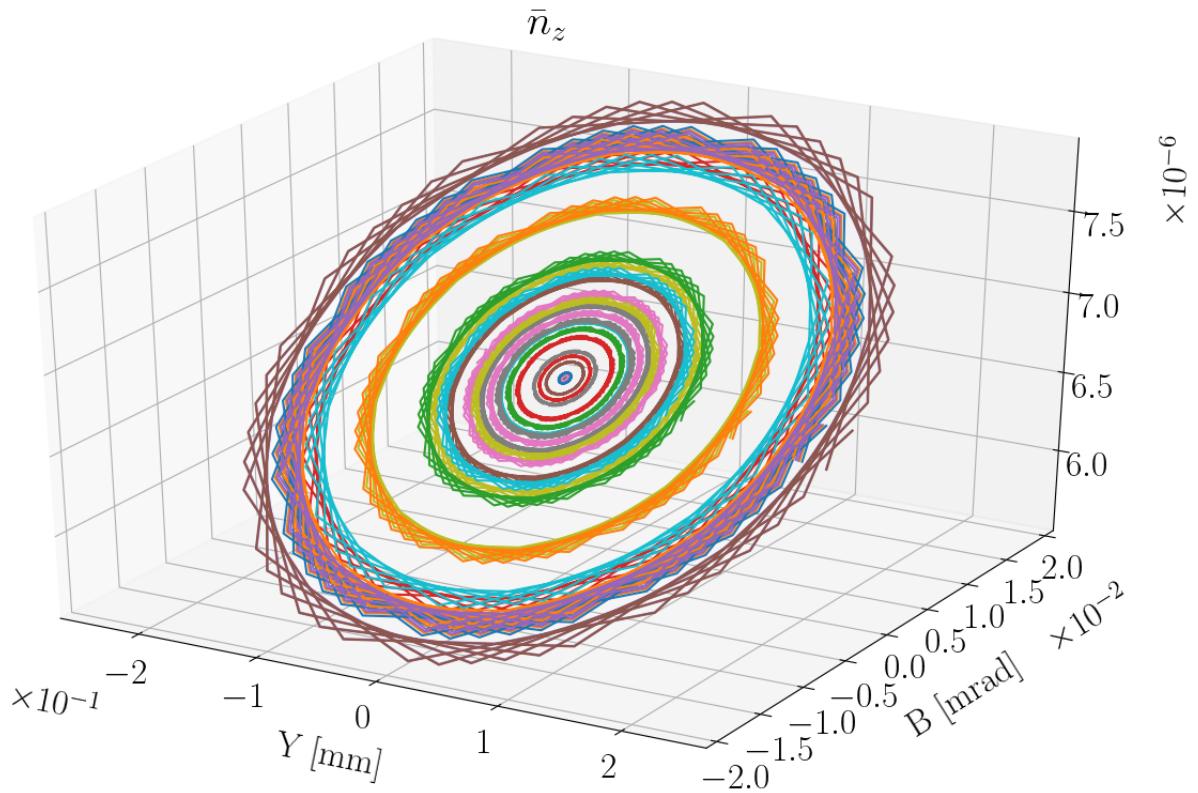


а) С выключенными секступолями.

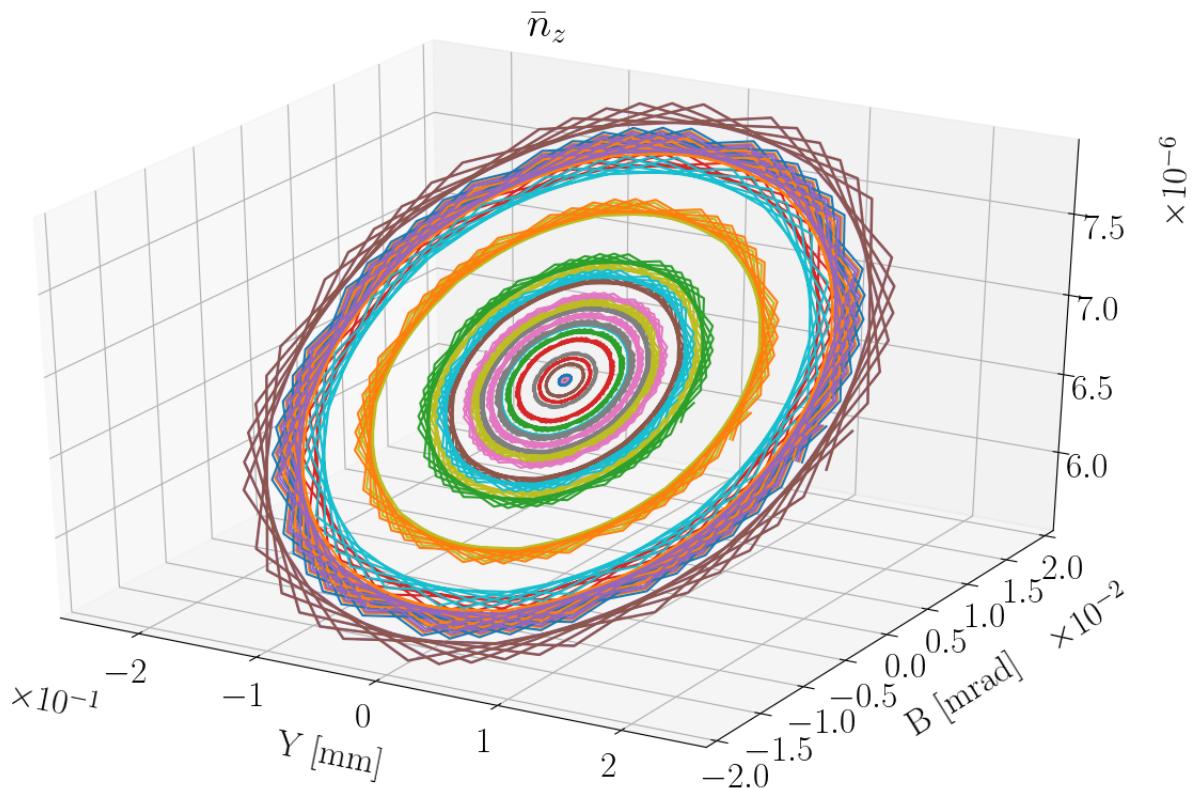


б) С включенными секступолями.

Рисунок 2.11 — Вертикальные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре.



а) С выключенными секступолями.



б) С включенными секступолями.

Рисунок 2.12 — Продольные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре.

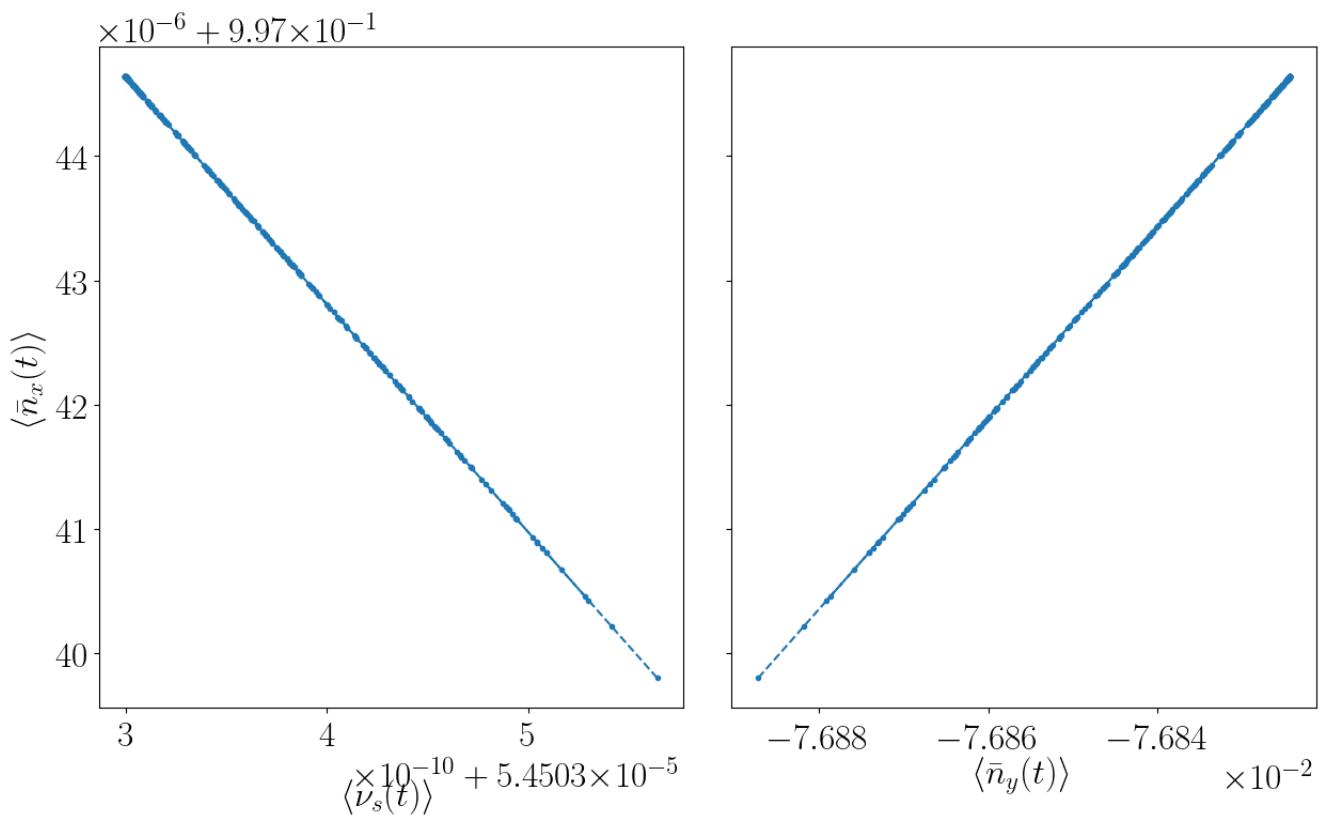
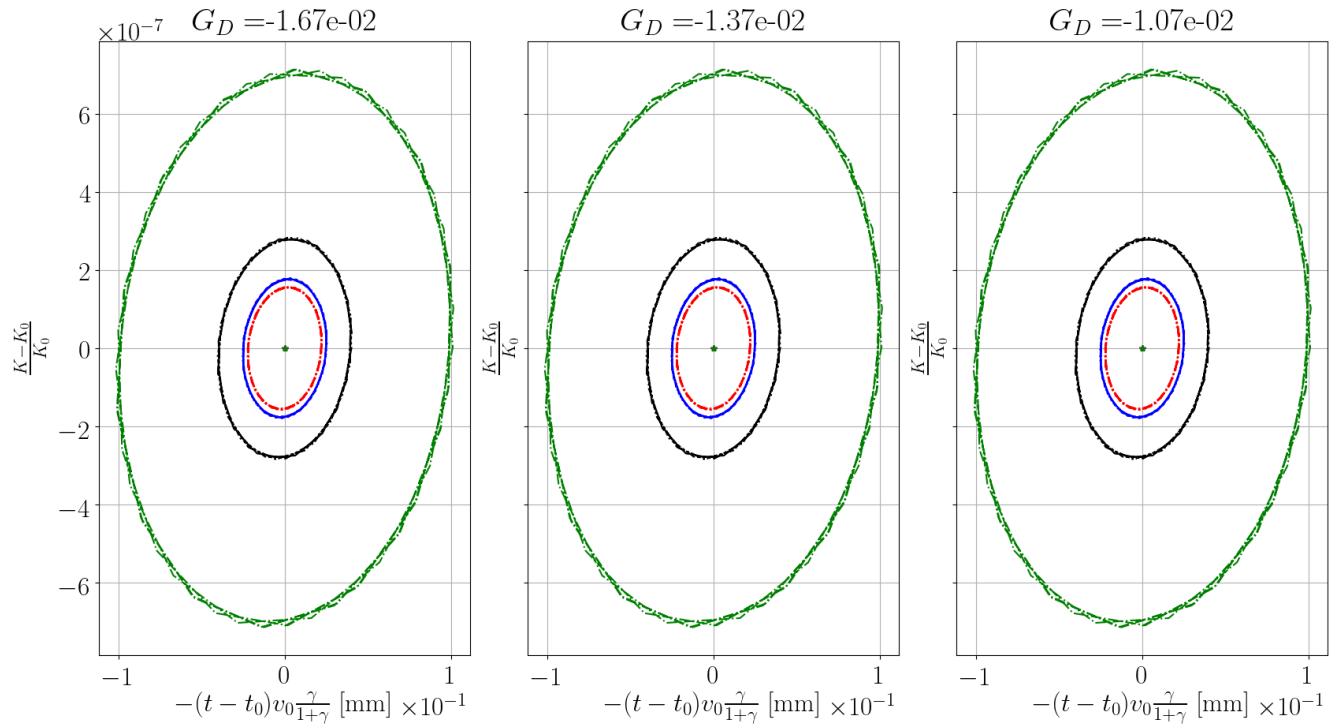
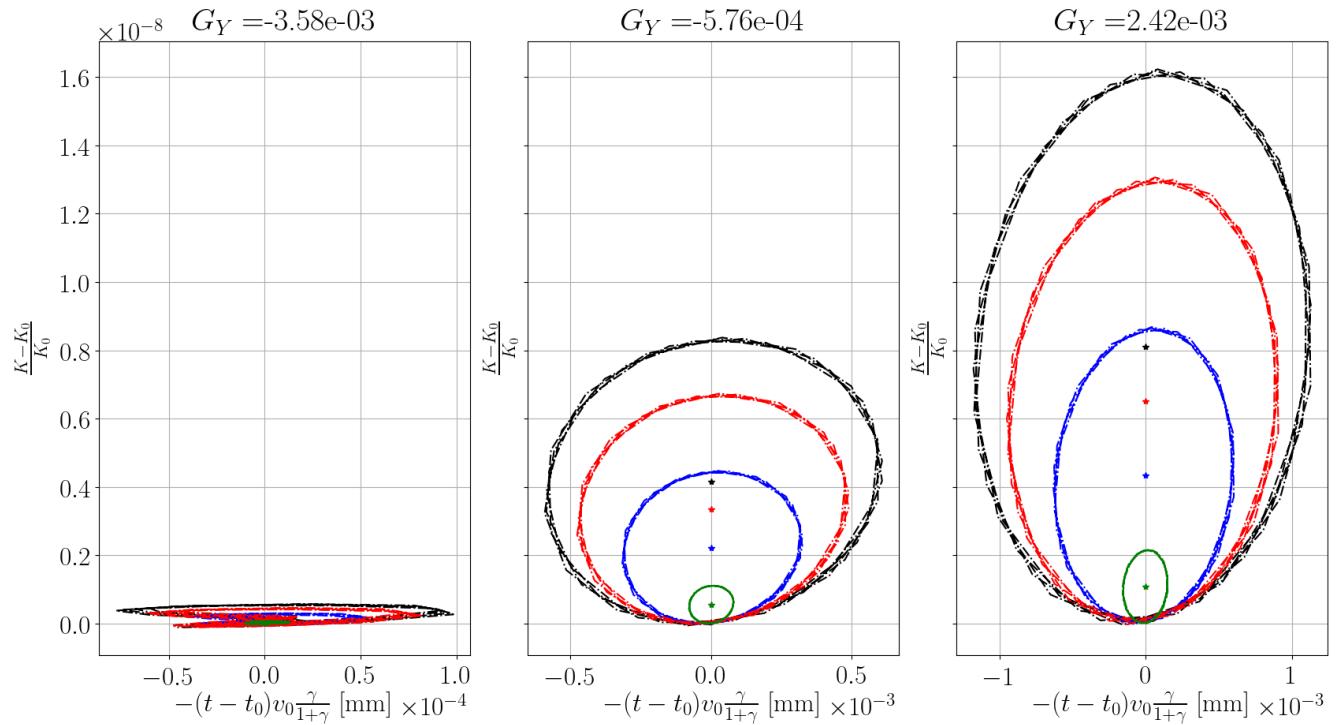


Рисунок 2.13 — Средние уровни поперечных компонент осей стабильного спина частиц, в зависимости от уровня их спин-тюна.



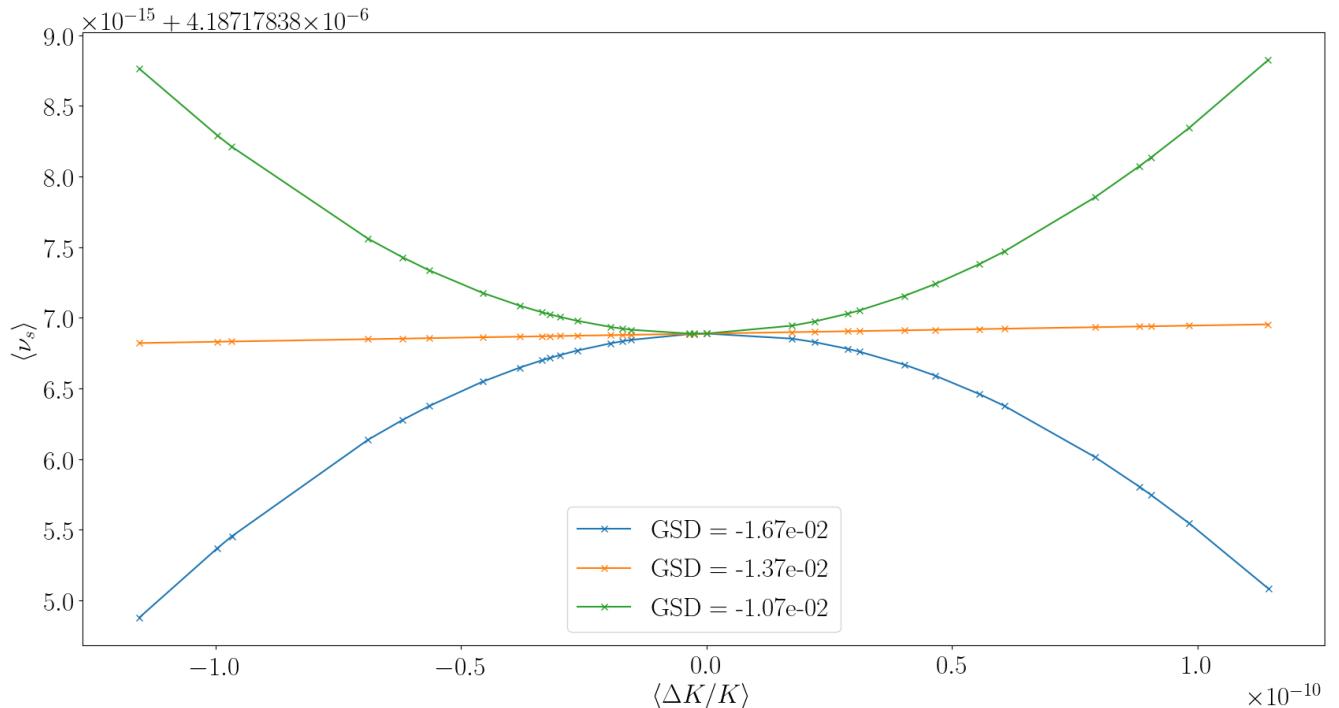
а) Фазовые эллипсы D-банча.



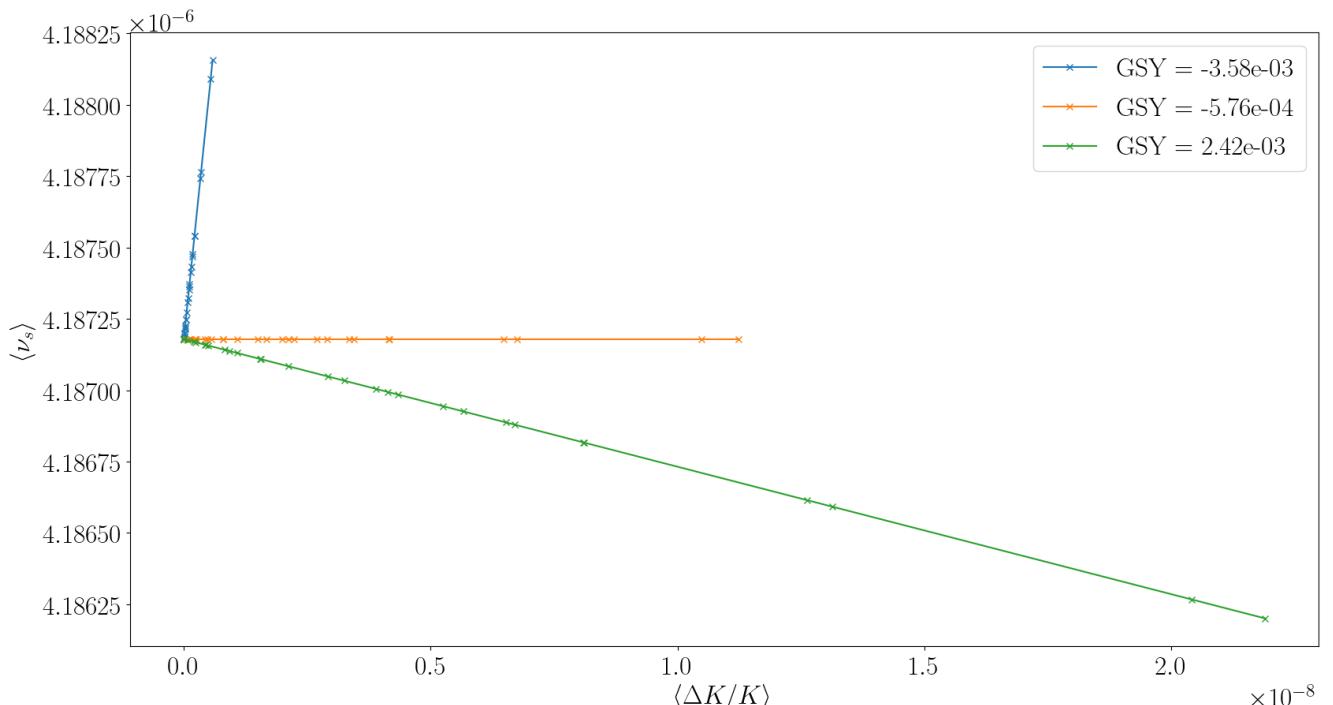
б) Фазовые эллипсы Y-банча.

Цветом различаются траектории частиц с разным начальным вертикальным смещением от замкнутой орбиты.

Рисунок 2.14 — Продольное фазовое пространство пучка. Звёздочками отмечены центры эллипсов.

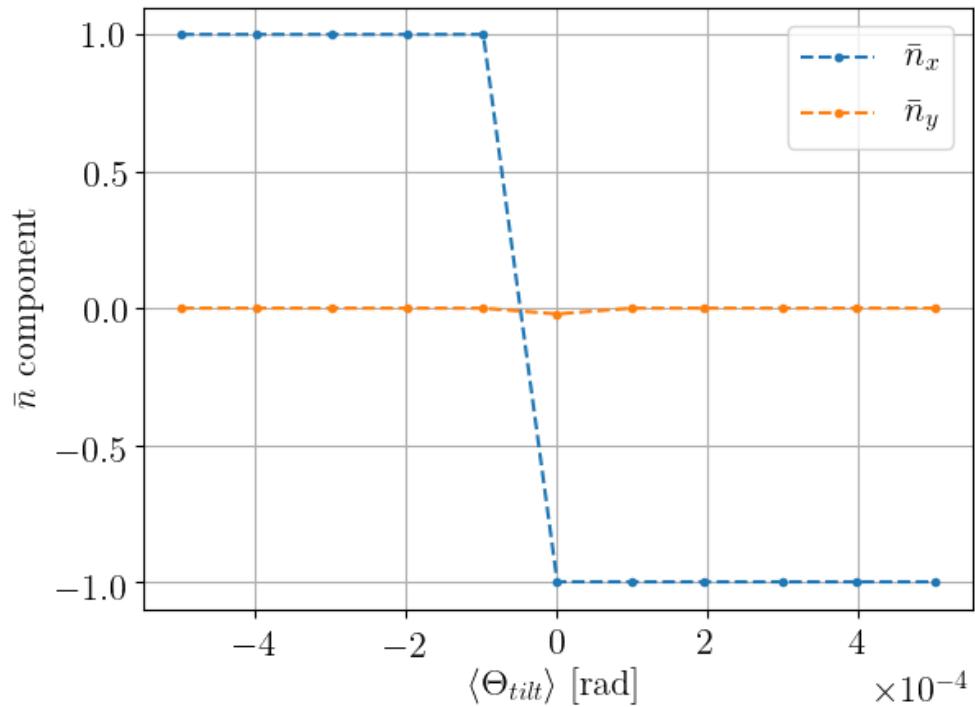
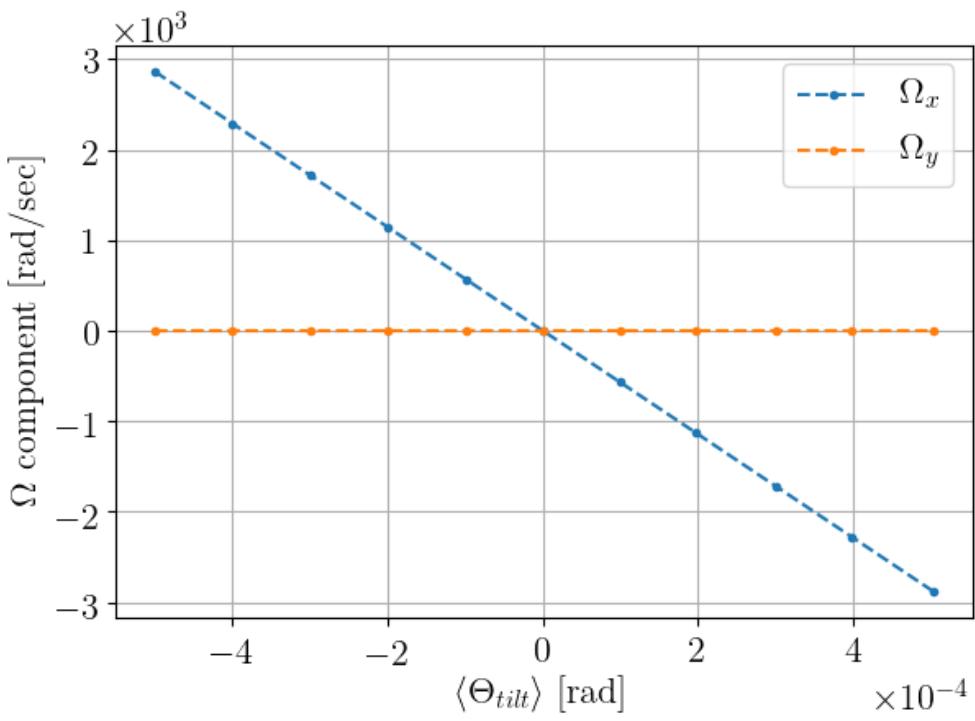


а) Для D-банча.



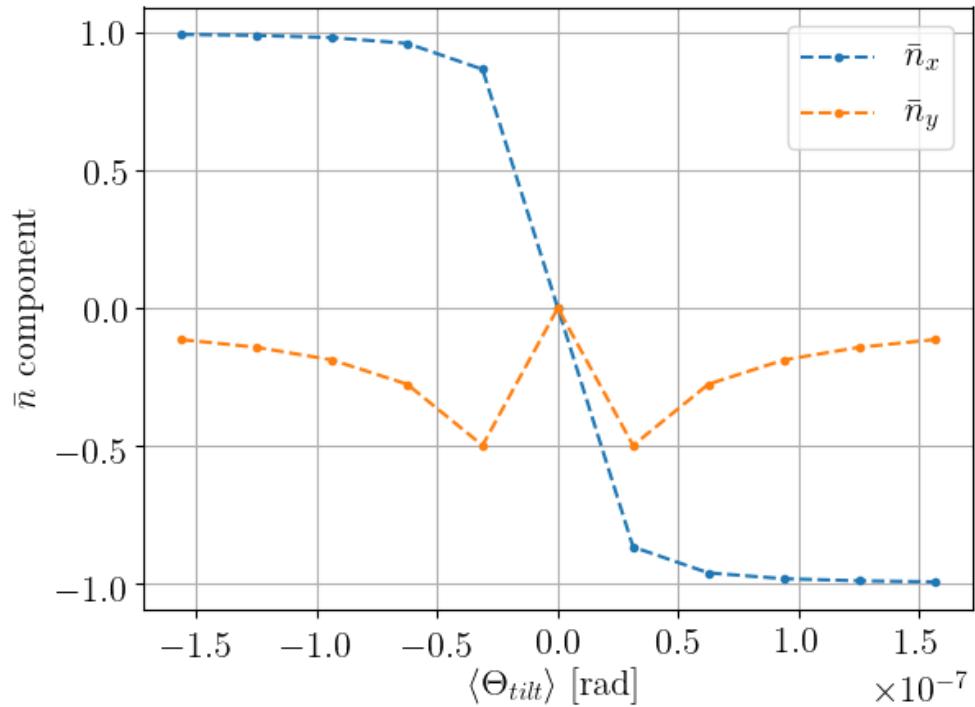
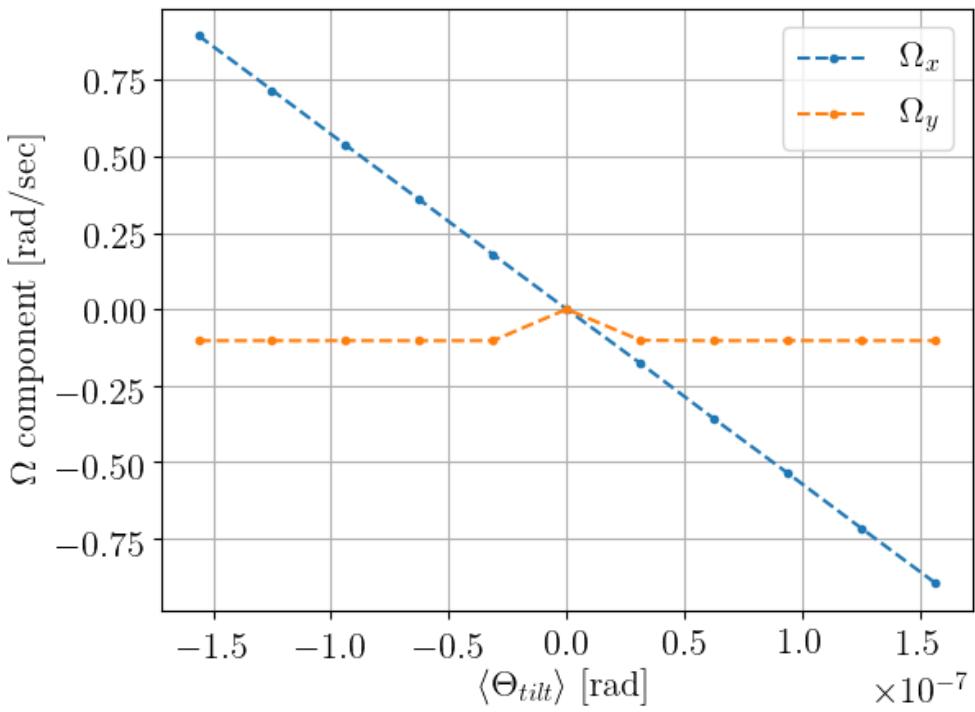
б) Для Y-банча.

Рисунок 2.15 — Зависимость среднего уровня спин-тюна частицы от её равновесного уровня энергии для различных значений градиента секступоля.

а) Компоненты оси прецессии  $\bar{n}$ б) Компоненты частоты прецессии  $\Omega$ 

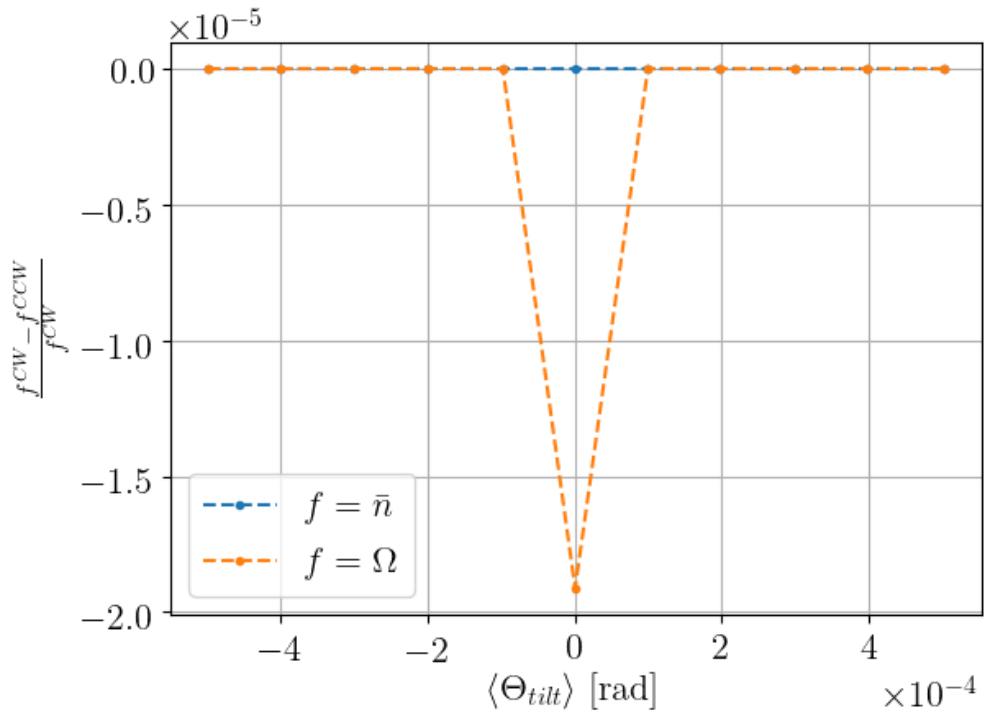
Цветом различаются радиальная (синий) и вертикальная (оранжевый) компоненты векторов  $\bar{n}$ ,  $\Omega$ .

Рисунок 2.16 — Зависимость направления и частоты прецессии спина референсной частицы в неидеальной FS-структуре со случайно-распределёнными ошибками установки спин-ротаторов от их среднего угла наклона.

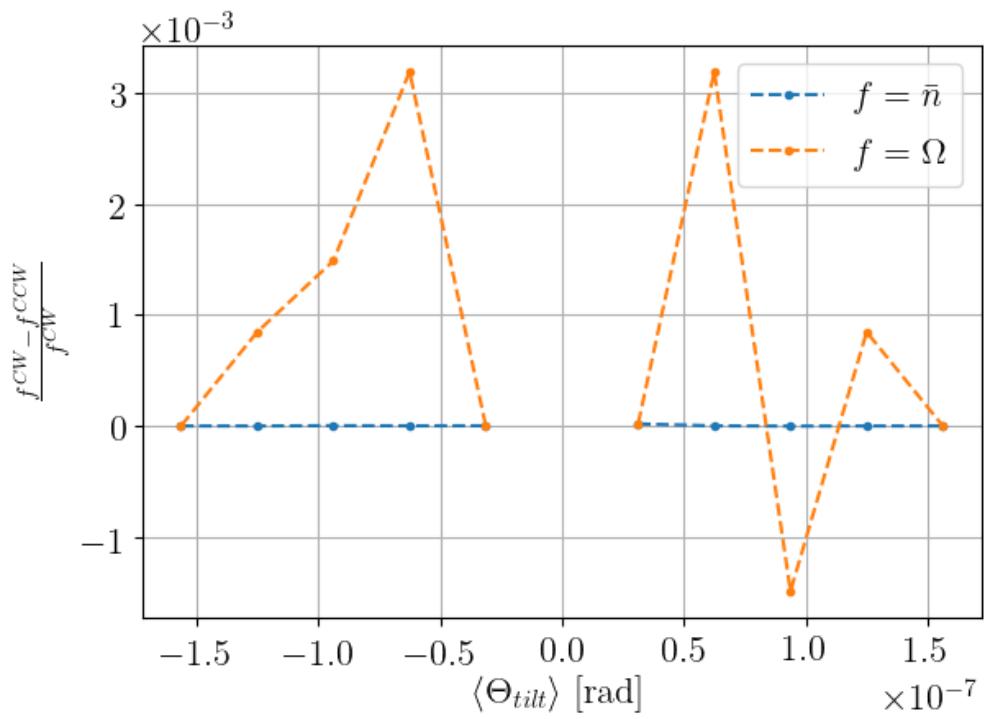
а) Компоненты оси прецессии  $\bar{n}$ б) Компоненты частоты прецессии  $\Omega$ 

Цветом различаются радиальная (синий) и вертикальная (оранжевый) компоненты векторов  $\bar{n}$ ,  $\Omega$ .

Рисунок 2.17 — Зависимость направления и частоты прецессии спина референсной частицы в неидеальной FS-структуре в случае попарно-компенсированных ошибок установки спин-ротаторов от их среднего угла наклона.



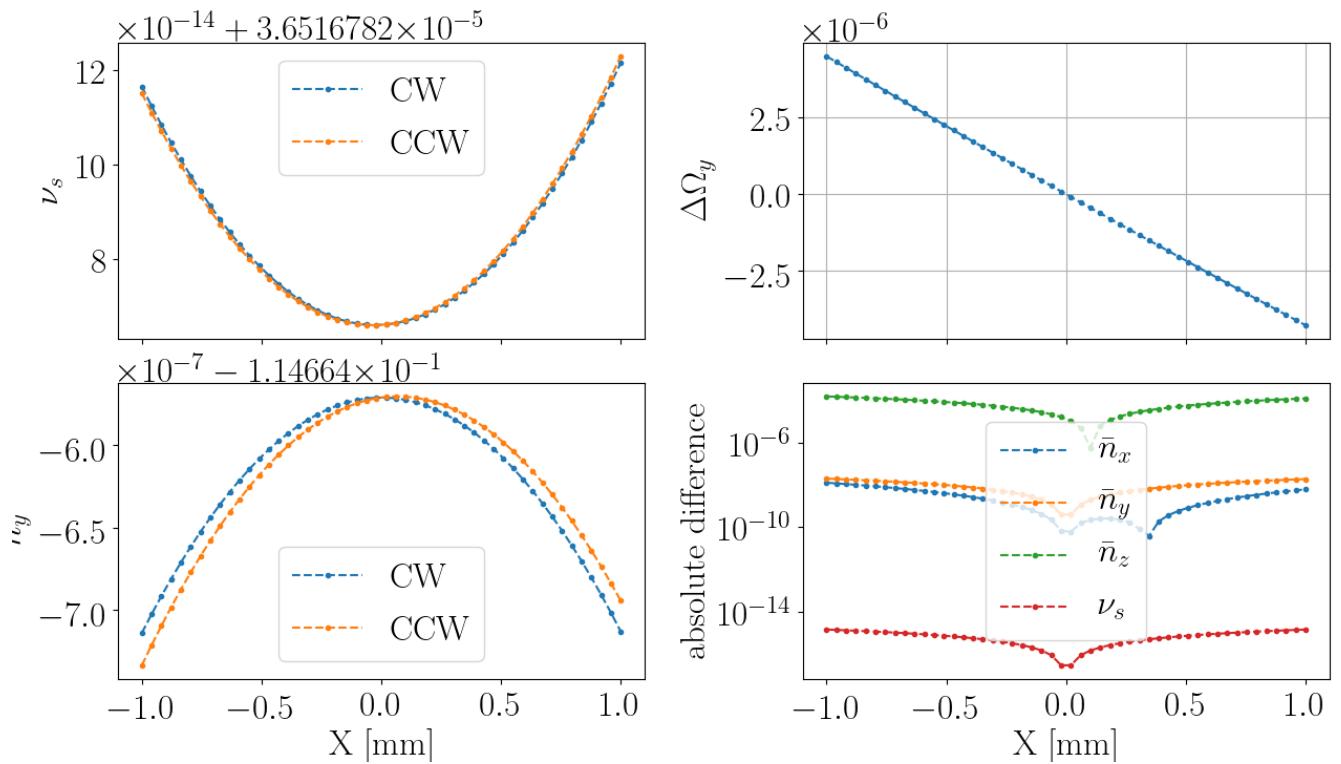
a) Случайно-распределённые наклоны Е+В элементов



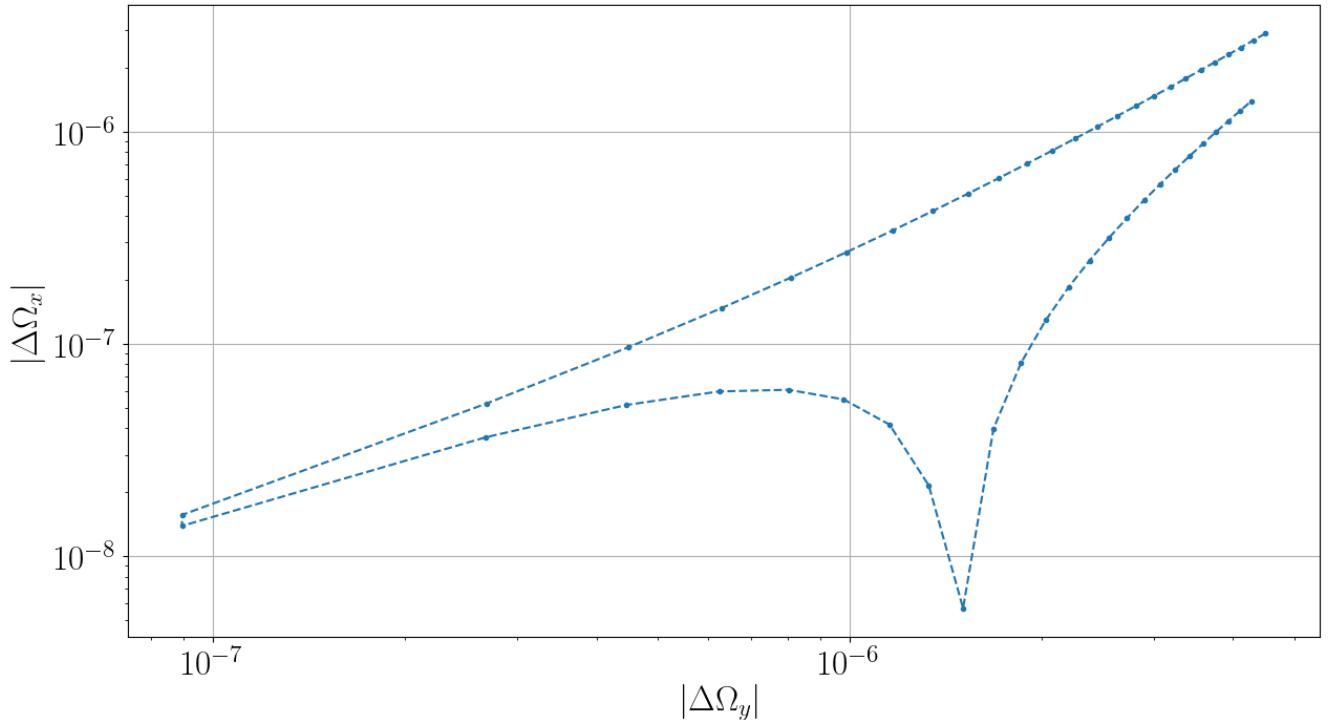
б) Попарно-компенсированные наклоны

Цветом обозначена разница между радиальными компонентами (синий) оси стабильного спина, (оранжевый) угловой скорости поворота спина CW и CCW пучков

Рисунок 2.18 — Относительная разница между радиальными компонентами оси стабильного спина и угловой скоростью поворота спина, посчитанная относительно значения для CW-циркулирующего пучка

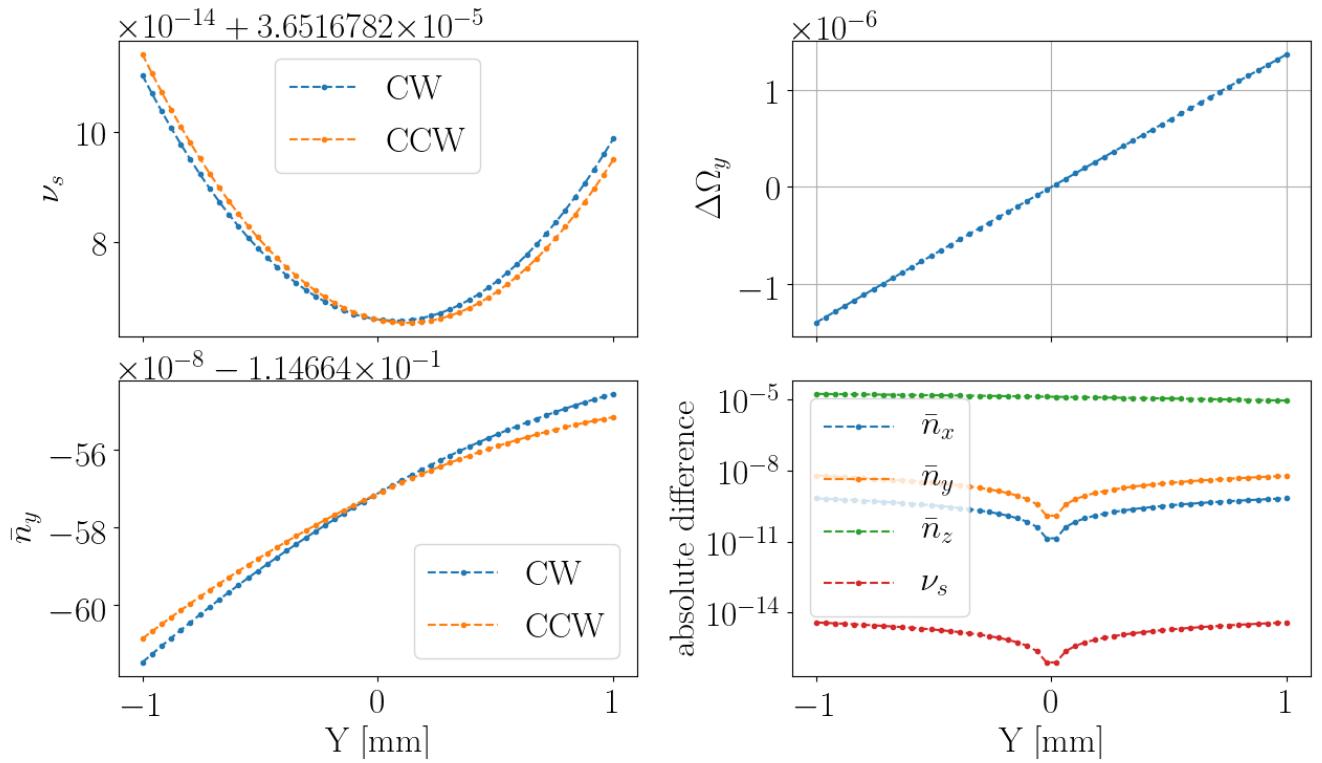


а) Зависимости спин-тюна и оси стабильного спина от горизонтального смещения частицы от референсной орбиты

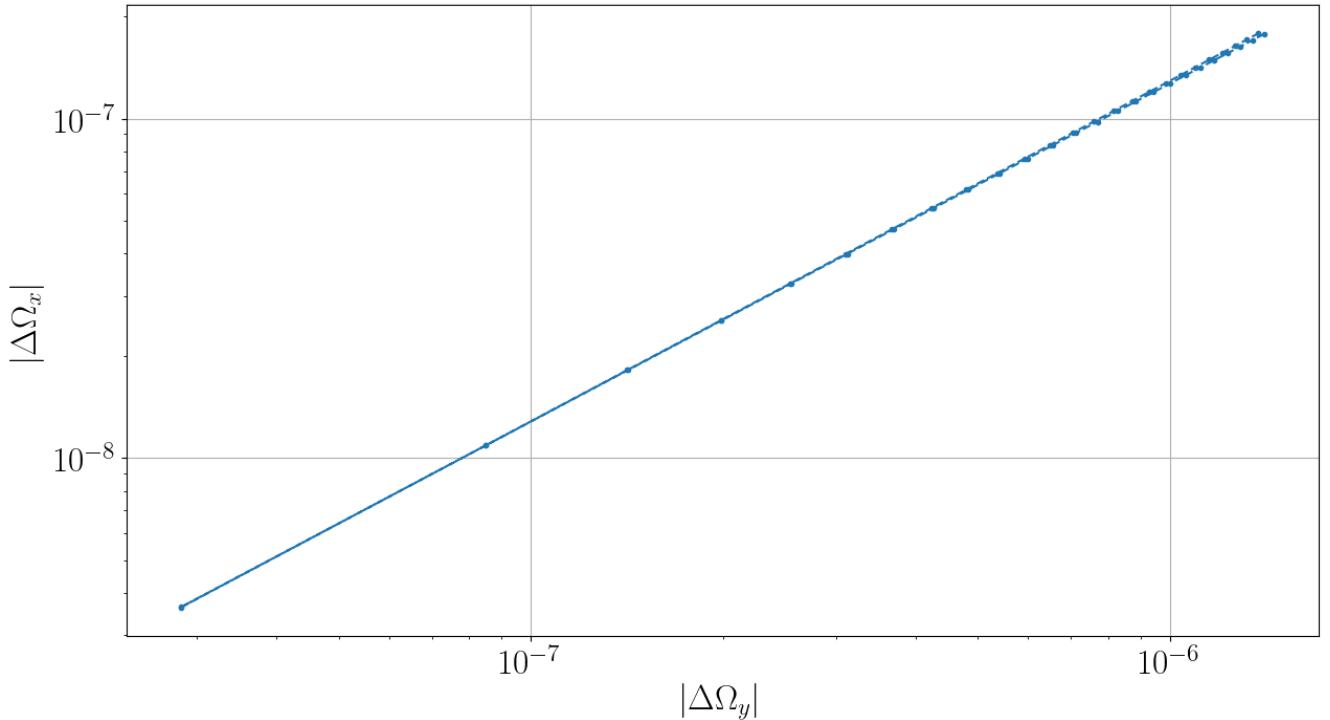


б) Разница между радиальными компонентами частоты прецессии CW и CCW пучков против разницы вертикальных компонент (калибровочный график)

Рисунок 2.19 — Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной бетатронным движением в горизонтальной плоскости

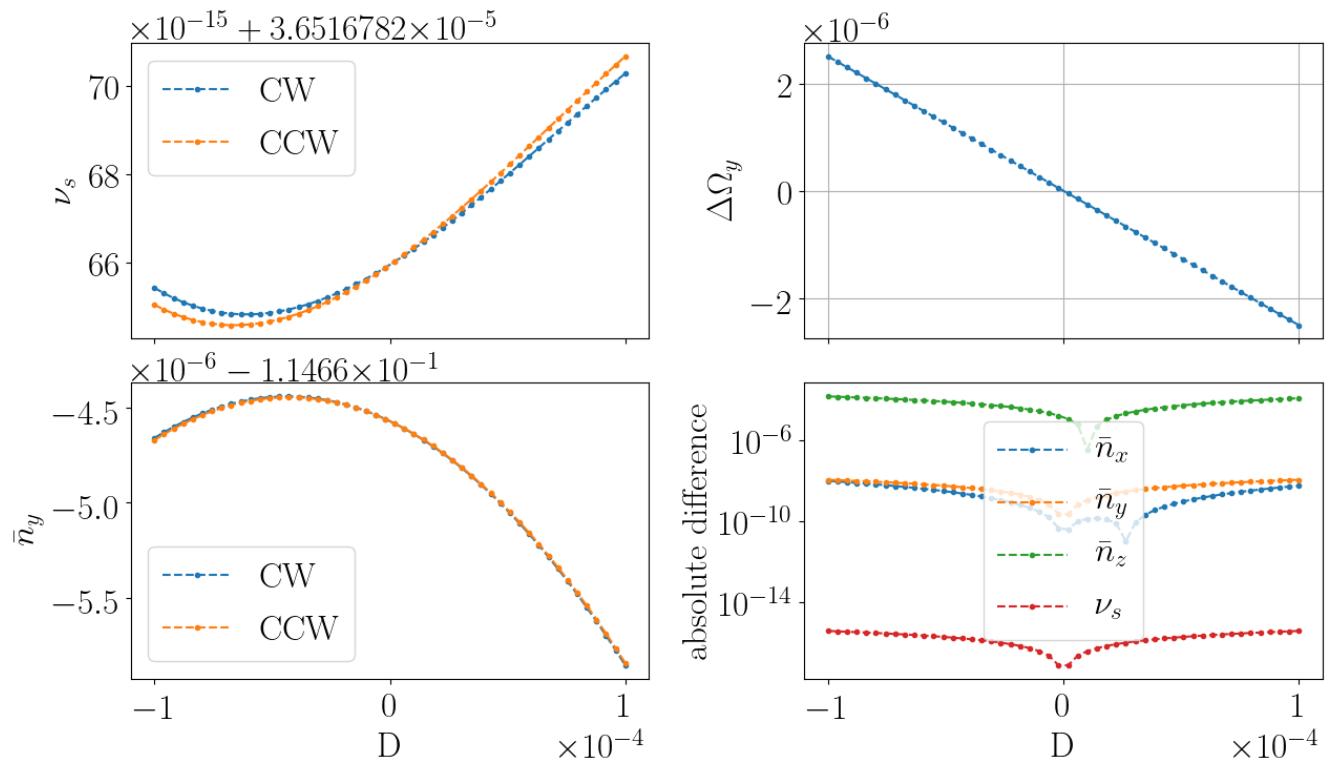


а) Зависимости спин-тюна и оси стабильного спина от вертикального смещения частицы от референсной орбиты

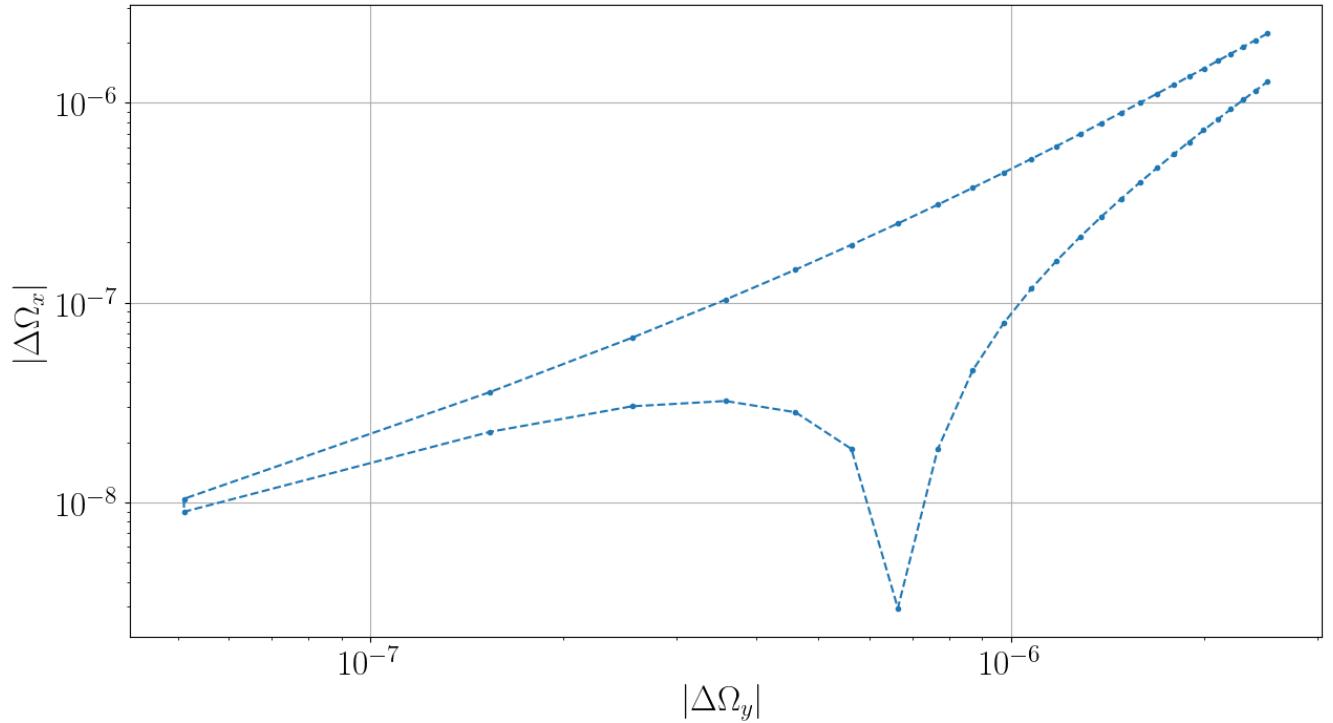


б) Разница между радиальными компонентами частоты прецессии CW и CCW пучков против разницы вертикальных компонент (калибровочный график)

Рисунок 2.20 — Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной бетатронным движением в вертикальной плоскости



a) Зависимости спин-тюна и оси стабильного спина от энергетического сдвига частицы от референсной энергии



б) Разница между радиальными компонентами частоты прецессии CW и CCW пучков против разницы вертикальных компонент (калибровочный график)

Рисунок 2.21 — Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной синхротронным движением

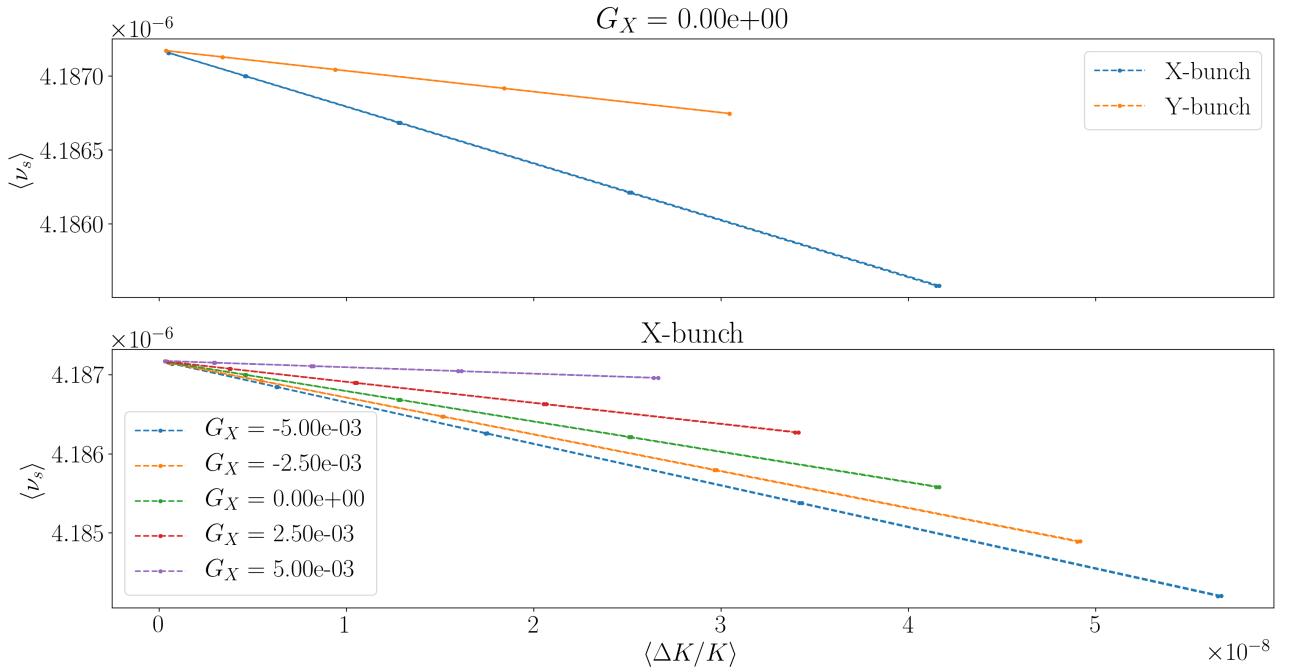


Рисунок 2.22 — Зависимость среднего уровня спин-тюна частицы от её среднего уровня кинетической энергии. Верхняя панель: безсекступольный случай, для обоих инжектированных бандчей. Нижняя панель: для X-бандча, при разных значениях градиента секступоля GSX.

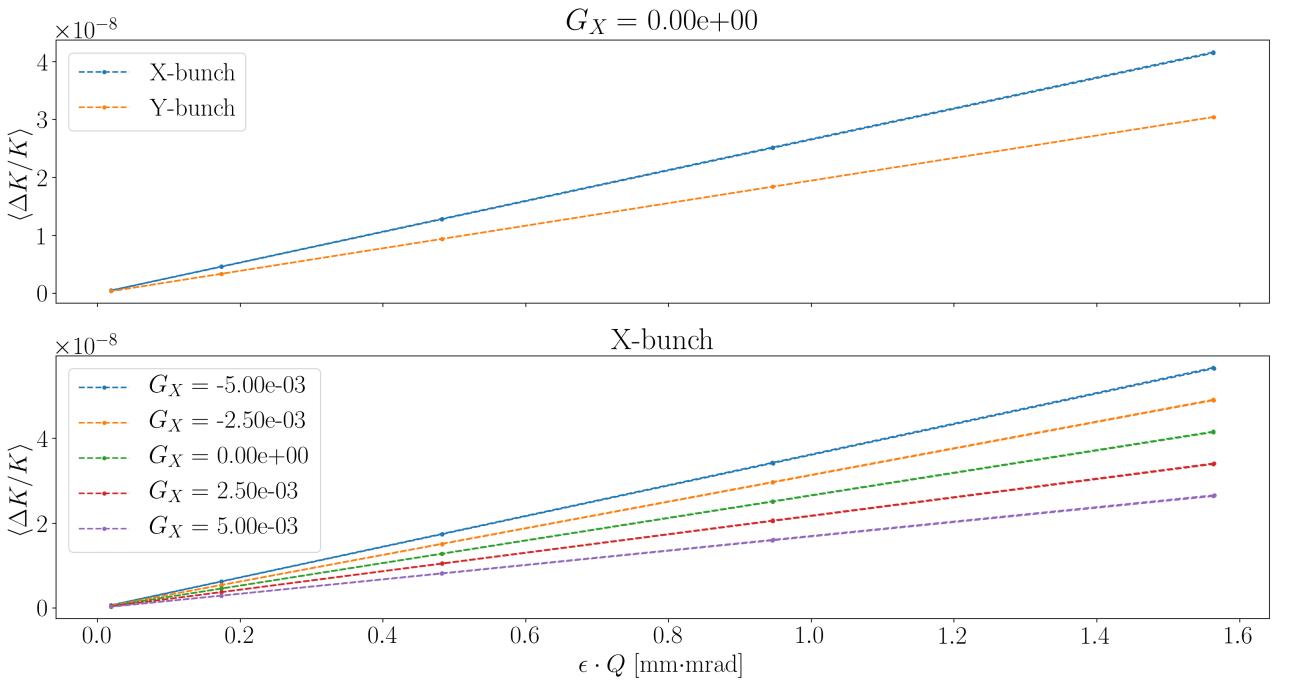
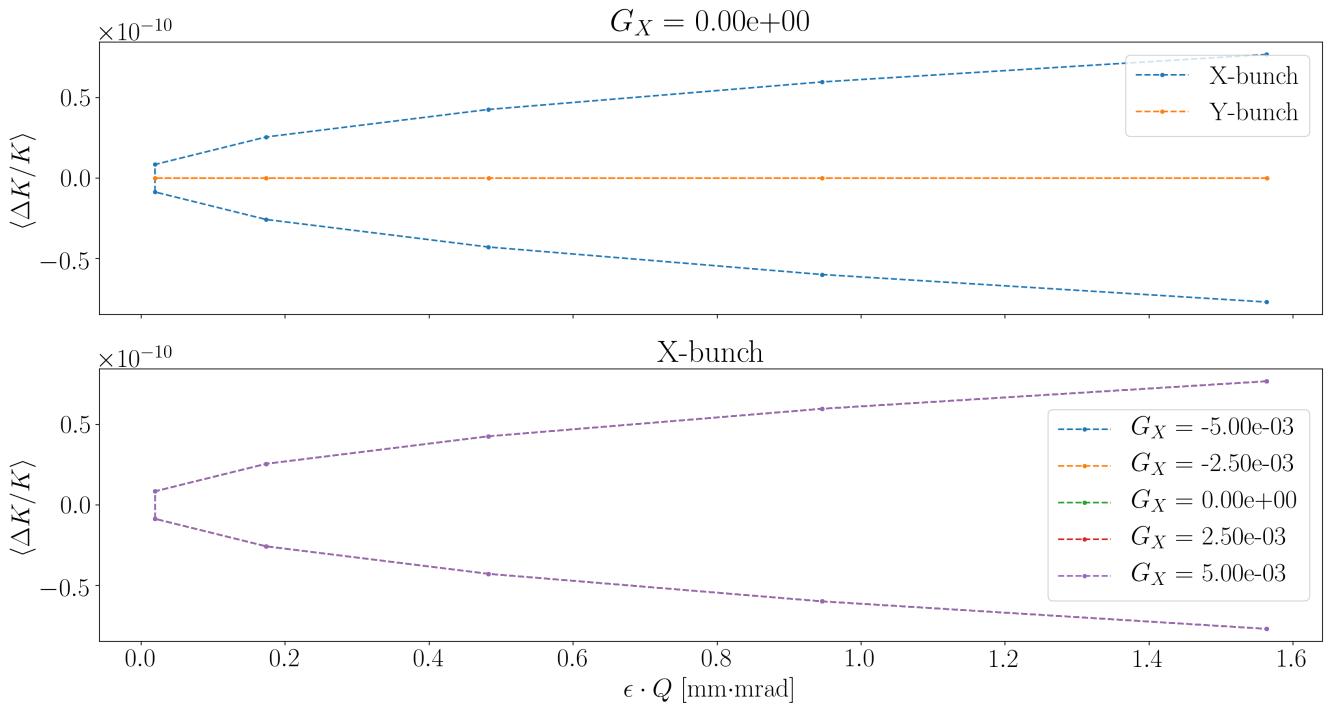
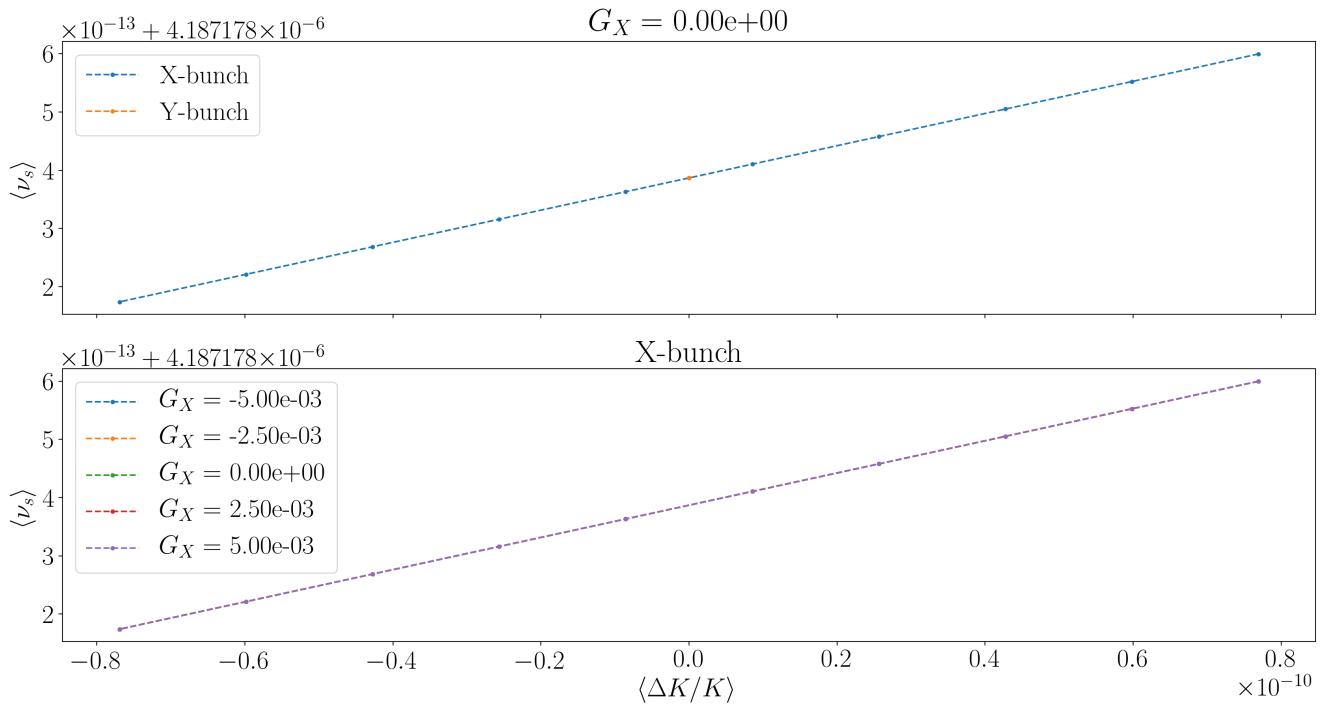


Рисунок 2.23 — Зависимость равновесного уровня энергии частицы от её поперечного эмиттанса.

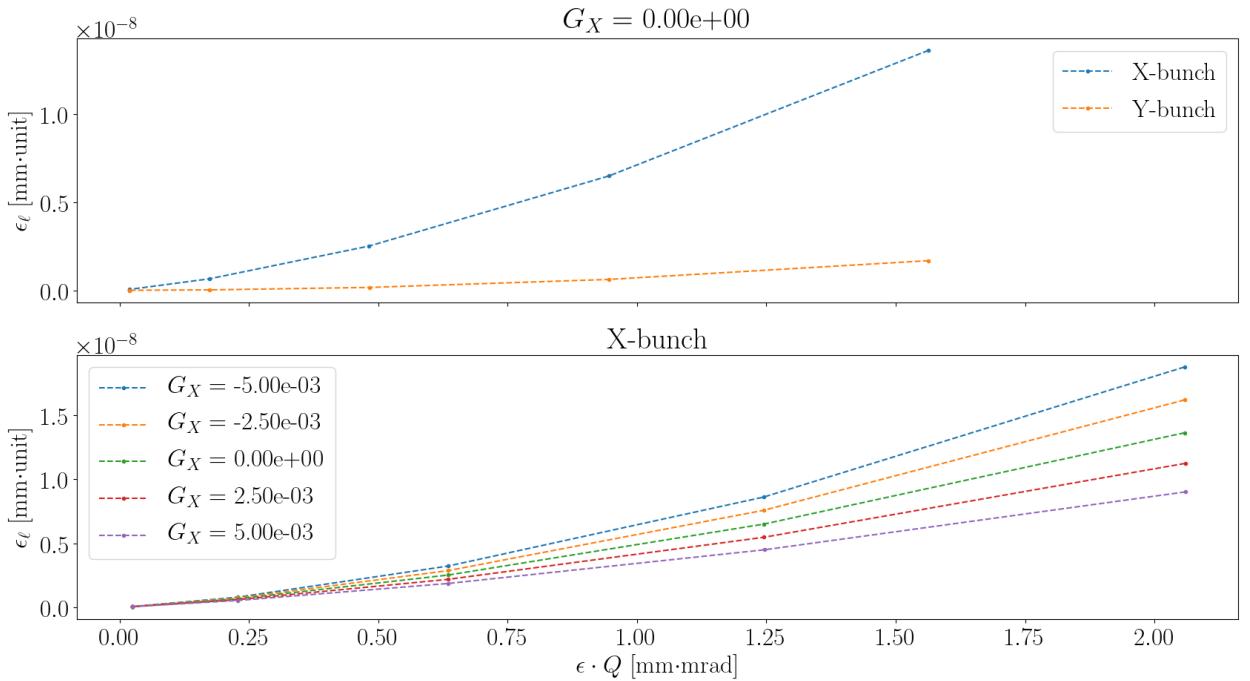


a) Зависимость среднего уровня энергии от поперечного эмиттанса частицы.

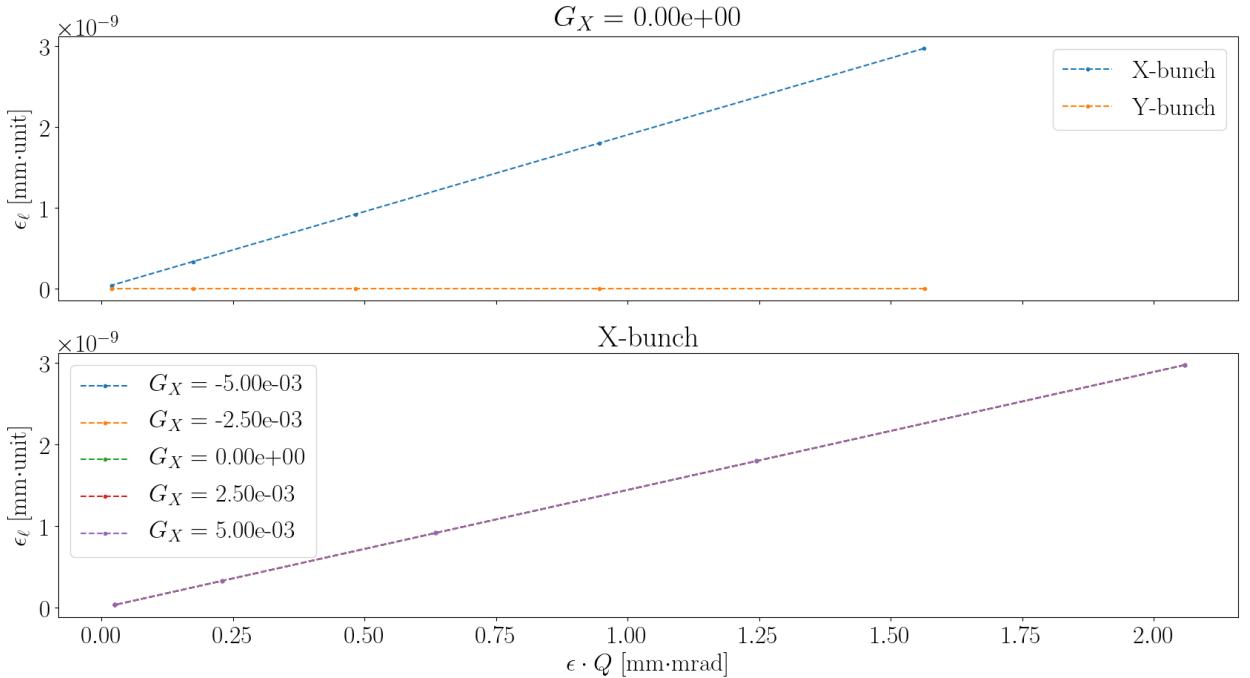


б) Зависимость среднего уровня спин-тюна от среднего уровня энергии.

Рисунок 2.24 — Результаты симуляции в случае линейного разложения трансфер матриц.

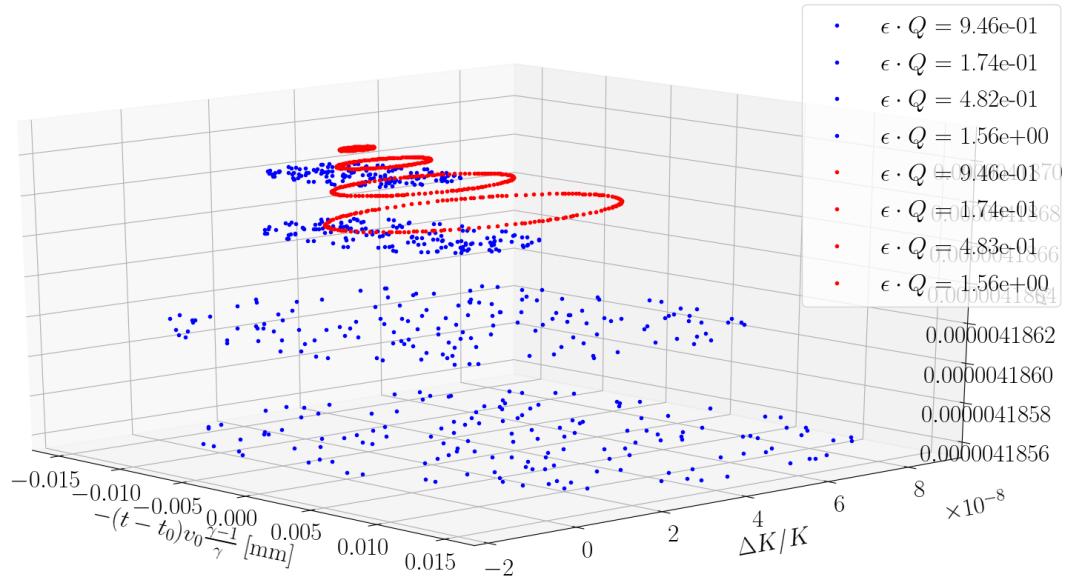


а) Нелинейные разложения трансфер-матриц.

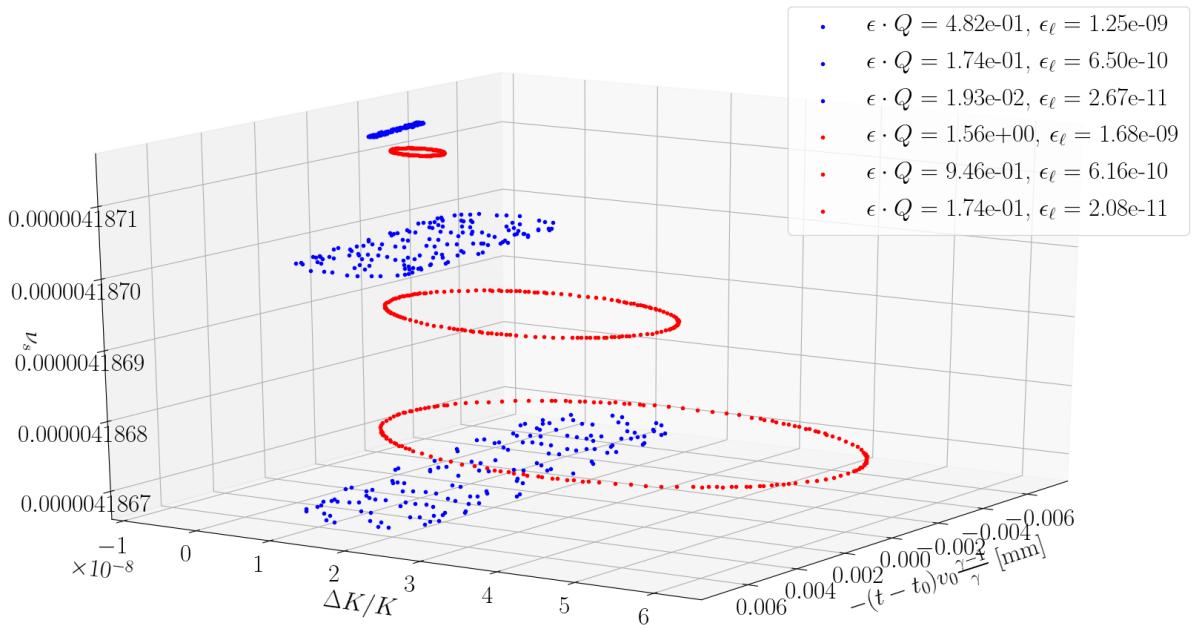


б) Линейные разложения трансфер-матриц.

Рисунок 2.25 — Зависимость продольного эмиттанса пучка от его поперечного эмиттанса.



a) Подобраны траектории с равными приведёнными *поперечными* эмиттансами.



б) Подобраны траектории с приблизительно равными *продольными* эмиттансами.

Цветом обозначены частицы из разных бенчей. Синий: из X-бенча; красный: из Y-бенча. В легенде указаны значения соответствующего бенчу приведённого поперечного эмиттанса ( $\epsilon \cdot Q$ ), и значение продольного эмиттанса ( $\epsilon_\ell$ ) частицы.

Рисунок 2.26 — Зависимость спин-тюна частицы от её положения в продольном фазовом пространстве.

## Глава 3. Результаты на COSY

### 3.1 Ускоритель COSY

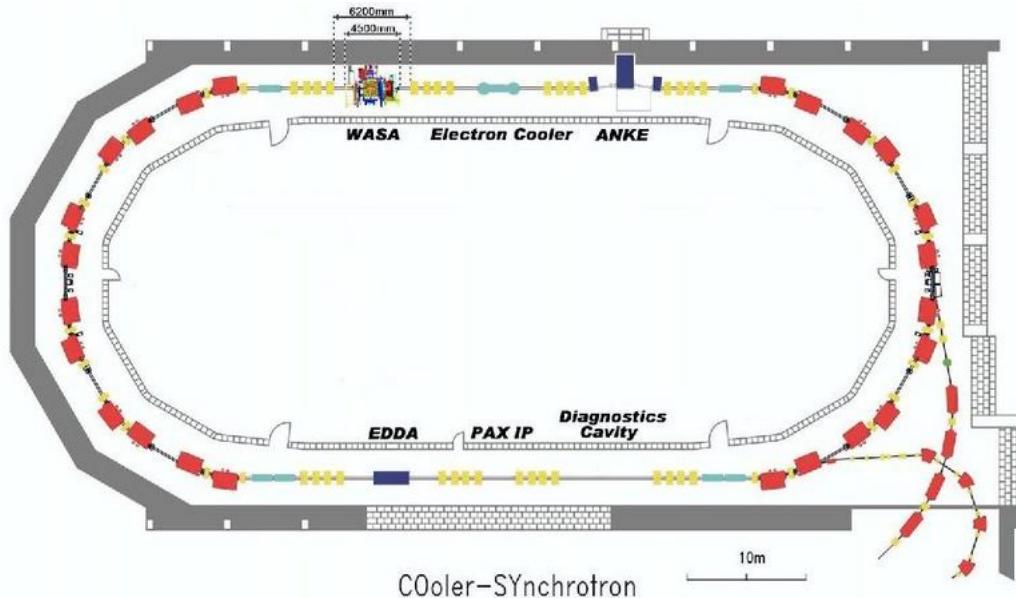


Рисунок 3.1 — Синхротрон COSY.

Ускорительный комплекс COSY [38] — это синхротрон длиной 183 метра, позволяющий проводить эксперименты с поляризованными и охлаждёнными пучками протонов и дейtronов в диапазоне энергии от 45 МэВ до 3.7 ГэВ. Схема ускорителя приведена на Рисунке 3.1.

Для инжекции ионов  $H^-$  и  $D^-$  в COSY используется циклотрон JULIC (Jülich Light Ion Cyclotron), предоставляющий 8 мкА неполяризованных (или 1 мкА поляризованных) ионов  $H^-$  с импульсом 45 МэВ/с. При инжекции отрицательные ионы проходят через углеродный стриппер для изменения их заряда на положительный. Экстракция пучка из циклотрона производится с помощью септум-дефлектора. [39]

Возможности направляющей магнитной системы синхротрона ограничивают импульс пучка в диапазоне до 3700 МэВ/с. Экстракция из кольца осуществляется с помощью кикера.

На COSY доступны два типа охлаждения пучка: электронное (диапазон энергий электронов в “старом” и “новом” кулере: 20–100 кэВ и 20–2,000 кэВ, соответственно) и стохастическое. Два электронных кулера, установленные в кольце

на прямой секции, обеспечивают электронное охлаждение во всём диапазоне энергий кольца. Система стохастического охлаждения обеспечивает охлаждение пучка при импульсах 1.5–3.7 ГэВ/с.

Поляризация пучка непрерывно отслеживается на поляриметре EDDA. Также недавно был установлен поляриметр на основе детекторов WASA, а в конце 2019 года будет установлен новый поляриметр на основе LYSO-сцинцилляторов. Поляризация протонов достигает 75% вплоть до наивысших значений импульса; векторная и тензорная поляризации дейtronного пучка достигают 60%. [40, **Historical background**]

В настоящий момент на COSY проводятся исследования по изучению поведения поляризованных пучков в накопительном кольце для будущего эксперимента по измерению ЭДМ в электростатическом кольце. [15; 41–45] В большинстве исследований были использованы параметры, представленные в Таблице 3.

Таблица 3 — Рабочие параметры COSY, использованные в проводимых исследованиях.

Параметр	Величина	Размерность
Длина окружности COSY	183	м
Импульс дейтрана	970	МэВ/с
$\beta / \gamma$	0.459 / 1.126	
Аномальный магнитный момент G	-0.143	
Частота оборота пучка $f_{\text{rev}}$	752543	Гц
Длительность измерительного цикла	100–1500	с
Число частиц в пучке	$\approx 10^9$	

Выделим следующие разработки.

### 3.2 Высокоточное измерение спин-тюна

Пучок дейtronов с вертикально-ориентированным вектором поляризации инжектировался в ускоритель. После подготовительной фазы, во время которой он охлаждался и банчивался, поляризация пучка разворачивалась в

горизонтальную плоскость, при помощи ВЧ-соленоида, создающего спиновый резонанс. [15, р. 7]

Далее, пучок непрерывно экстрагировался на углеродную мишень, и изменилась асимметрия частоты событий на верхней и нижней секциях детектора, пропорциональная горизонтальной поляризации пучка. Благодаря использованию специально разработанной для этого системы сбора данных, [46] было возможно точно определить количество оборотов, сделанных пучком к времени наблюдения события на детекторе.

Проблема измерения заключается в невозможности вычислить спин-тюн путём простого фитирования данных поляриметрии, с  $\nu_s$  как оцениваемым параметром, поскольку частота прецессии спина происходит с частотой приблизительно 120 кГц, в то время как частота детектирования событий не превосходит 5 кГц, в связи с чем наблюдалось только одно событие за 24 оборота поляризации вокруг вертикальной оси. Для решения проблемы разреженности данных, был применён алгоритм отображения измерений на период одной осцилляции. [43]

В результате была получена беспрецедентная точность определения спин-тюна на уровне  $10^{-10}$  в измерительном цикле цикле длительностью 100 секунд, что теоретически позволяет определить величину ЭДМ на уровне  $10^{-24} e\cdot\text{см}$ .

### 3.3 Юстировка квадрупольей при помощи пучка

Для юстировки положения квадруполя (Beam Based Alignment [45]), варьируют силу поля квадруполя, и наблюдают за реакцией пучка. Если пучок проходит не через центр квадруполя, он отклоняется. Величина отклонения описывается выражением

$$\Delta x = \frac{\Delta k \cdot x(s_0) \ell}{B\rho} \cdot \frac{1}{1 - k \frac{\ell \beta(s_0)}{2B\rho \tan \pi\nu}} \cdot \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2 \sin \pi\nu} \cos(\varphi(s) - \varphi(s_0) - \pi\nu),$$

где  $\Delta x$  изменение орбиты;  $s$  координата, в которой измеряется отклонение пучка;  $s_0$  точка расположения квадруполя;  $\Delta k$  изменение силы квадруполя;  $\ell$  длина квадруполя;  $\nu$  бетатронный тюн;  $\varphi$  бетатронная фаза;  $x(s_0)$  положение пучка относительно магнитного центра квадруполя.

Поскольку изменение орбиты  $\Delta x(s)$  — линейная функция отклонения пучка от магнитного центра квадруполя, возможно определить оптимальное положение квадруполя, минимизируя функцию

$$f = \frac{1}{N_{\text{BPM}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{BPM}}} (x_i(+\Delta k) - x_i(-\Delta k))^2 \propto x^2(s_0).$$

Впервые, проверка технологии ВВА была проведена в ноябре-декабре 2017 года. Методология требует варьирования силы одного квадруполя за раз, иначе наблюдаемый эффект отклонения пучка будет суперпозицией нескольких отклонений. Поскольку квадруполи на COSY пытаются группами по четыре, для варьирования силы поля единичного квадруполя были использованы дополнительные обмотки полюсов некоторых квадруполей. В этом случае, поле квадруполя становится суперпозицией двух квадрупольных полей, но это не отражается на работе методики.

Для варьирования точки входа пучка в квадруполь использовались кикеры, отклоняющие пучок от референсной орбиты.

Повторная отработка методологии была проведена в феврале 2019 года.

По результатам работы, положения квадруполей были определены с точностью 0.2 мм. [40, стр. 182]

Особенно релевантны для данной работы исследования по оптимизации времени когерентности спина; рассмотрим эту процедуру более подробно.

### 3.4 Оптимизация времени когерентности

Изначальной целью экспериментов по изучению времени когерентности спина (Spin Coherence Time) на COSY было подтверждение возможности секступольных полей противодействовать дисперсии спин-тюнов, ассоциированной с эмиттансом и дисперсией импульсов ( $\Delta p/p$ ) частиц пучка. [11] На настоящий момент, оптимизация SCT является первой фазой любого предварительного эксперимента по поиску ЭДМ на COSY.

Секступольное подавление декогеренции используется совместно с электронным охлаждением пучка, для уменьшения его фазового объёма, и бандчингом, для подавления линейного вклада дисперсии импульсов частиц в

декогеренцию. Секступоли, располагающиеся в арках, призваны подавлять эффект декогеренции второго порядка.

Для контроля декогеренции используются три семейства секступолей, которые маркированы соответственно: MXG, расположенный в максимуме дисперсионной функции, и контролирующий эффект декогеренции связанный с  $\Delta p/p$ ; MXS, расположенный в максимуме горизонтальной бета-функции  $\beta_x$ , и контролирующий дисперсию, связанную с горизонтальными бетатронными колебаниями; MXL, в максимуме  $\beta_y$ , контролирующий дисперсию, возникающую из-за вертикальных бетатронных колебаний.

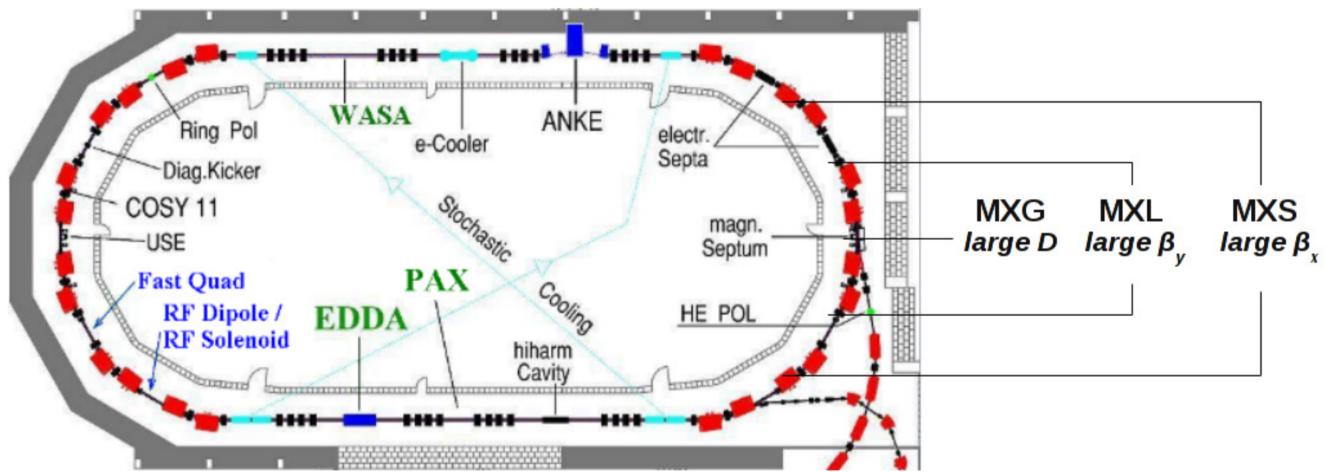


Рисунок 3.2 — Кольцо COSY с отмеченными положениями секступолей для контроля времени когерентности спина. (Рисунок взят из [47].)

### 3.4.1 Процедура оптимизации

В этом разделе описана процедура оптимизации SCT, на примере эксперимента 2014 года. [47] Первый оптимизационный эксперимент проводился в 2012 году, но тогда варьировалась только напряжённость поля секступоля MXS. В 2014 году впервые проведён полноценный (варьировались градиенты всех трёх секступолей) эксперимент по оптимизации SCT.

Чтобы отделить эффекты декогеренции, связанные с конечностью эмиттанса пучка, и с вторым порядком дисперсии импульсов частиц  $(\Delta p/p)^2$ , подготовка пучка к эксперименту проводится по-разному.

Для получения пучка с большим разбросом  $(\Delta p/p)^2$ , поляризованный дейtronный пучок с импульсом  $p = 0.97$  ГэВ/с сначала охлаждается в течении 60 секунд для минимизации его эмиттанса. После отключения охлаждения пучок банчируется (гармоническое число  $h = 1$ ). Банчивание необходимо для подавления линейных эффектов декогеренции.

В случае изучения декогеренции, связанной с горизонтальным эмиттансом пучка,<sup>1</sup> охлаждение и банчивание проводятся одновременно в течении первых 60 секунд, после чего охлаждение отключается, и на пять секунд включается горизонтальное нагревание. Пучок нагревается подачей белого шума на обкладки конденсатора горизонтального кикера.

В обоих случаях, пучок инжектируется с вертикально-ориентированным вектором поляризации. Поворот поляризации в горизонтальную плоскость производится ВЧ соленоидом, после подготовки пучка, на 80-й секунде.

Мониторинг поляризации пучка производится непрерывно, путём приложения белого шума на вертикальный кикер, для экстракции пучка на 17-мм углеродную мишень. Далее, эластично-рассеянные дейтроны детектируются на поляриметре EDDA. Эластичное рассеяние дейtronов на углеродной мишени чувствительно к направлению спина, и имеет большое сечение взаимодействия.

Сцинтилляторы поляриметра поделены на четыре группы: верхние, нижние, левые, правые; асимметрия частот событий на левом и правом детекторах пропорциональна вертикальной поляризации, а на верхнем и нижнем — горизонтальной поляризации. Прецессия поляризации пучка в горизонтальной плоскости происходит с частотой, значительно превышающей частоту выборки поляриметра, поэтому в 2012 году была разработана специальная система сбора данных [46].

По результатам эксперимента [47] была доказана возможность получать на COSY SCT свыше 1,000 секунд.

---

<sup>1</sup>Декогеренция, связанная с вертикальным эмиттансом не может быть изучена ввиду ограничений по акцептансу.

### 3.4.2 Изменение SCT при переходе от внешней к внутренней части пучка

Ниже представлены результаты оптимизации SCT, полученные в период измерений апрель-май 2019 года.

На серии рисунков 3.3 представлены измерения асимметрии частоты событий на верхнем и нижнем детекторах (так называемая асимметрия верх-низ), которая пропорциональна горизонтальной компоненте поляризации пучка. На первых двух рисунках можно наблюдать, что на начальном этапе (в промежутке от 100 до 150 секунд) деполяризация происходит со значительной скоростью, но во второй половине цикла скорость деполяризации падает. На Рисунке 3.3а особенно, мы видим, что в промежутке времени приблизительно от 130 до 150 секунд поляризация начинает возрастать, прежде чем снова спадает со значительно меньшей скоростью.

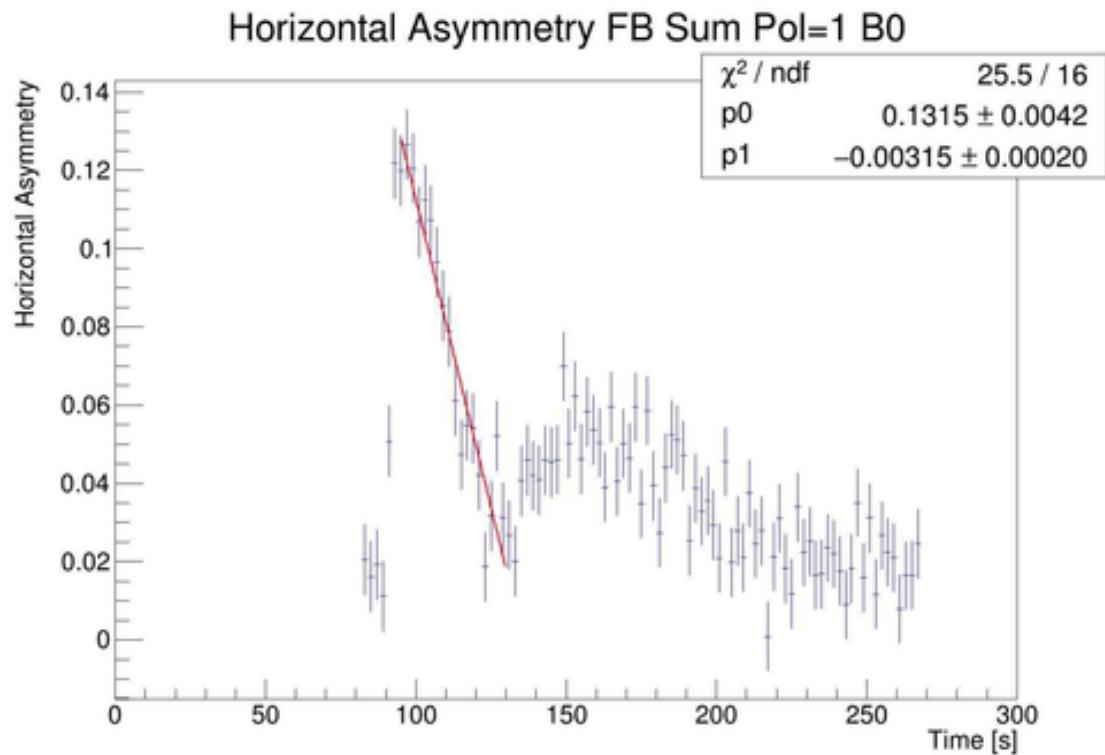
Такое поведение поляризации на данный момент объясняется неоднородностью поляризованности пучка. В первой половине цикла на детектор преимущественно попадают частицы из внешней (halo) части пучка (оболочки); к второй половине цикла начинается выборка частиц из центральной (core) части (ядра). Поскольку ядро плотнее чем оболочка, разброс длин орбит частиц ядра меньше, чем частиц оболочки, а значит меньше и разброс спин тюнов частиц.

### 3.4.3 Зависимость времени когерентности спина от силы сектуполя

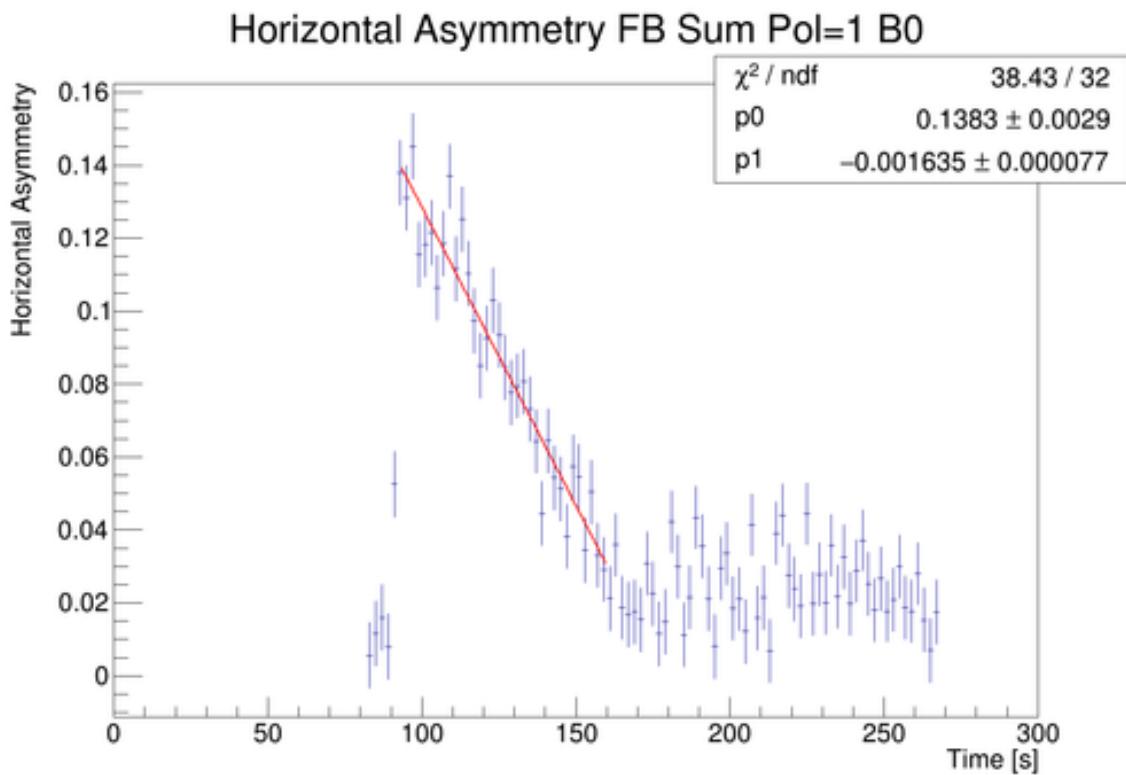
На Рисунках 3.4 представлена зависимость времени когерентности спина от относительной силы поля, соответственно MXL и MXG сектуполей, измеренная во время оптимизации в апреле 2019 года. Наблюдается зависимость резонансного типа времени когерентности от значений относительной силы поля сектуполей.

Мы проверили, соблюдается ли такая же зависимость в рамках нашей численной модели, с учётом того, что измерения на COSY проводятся на энер-

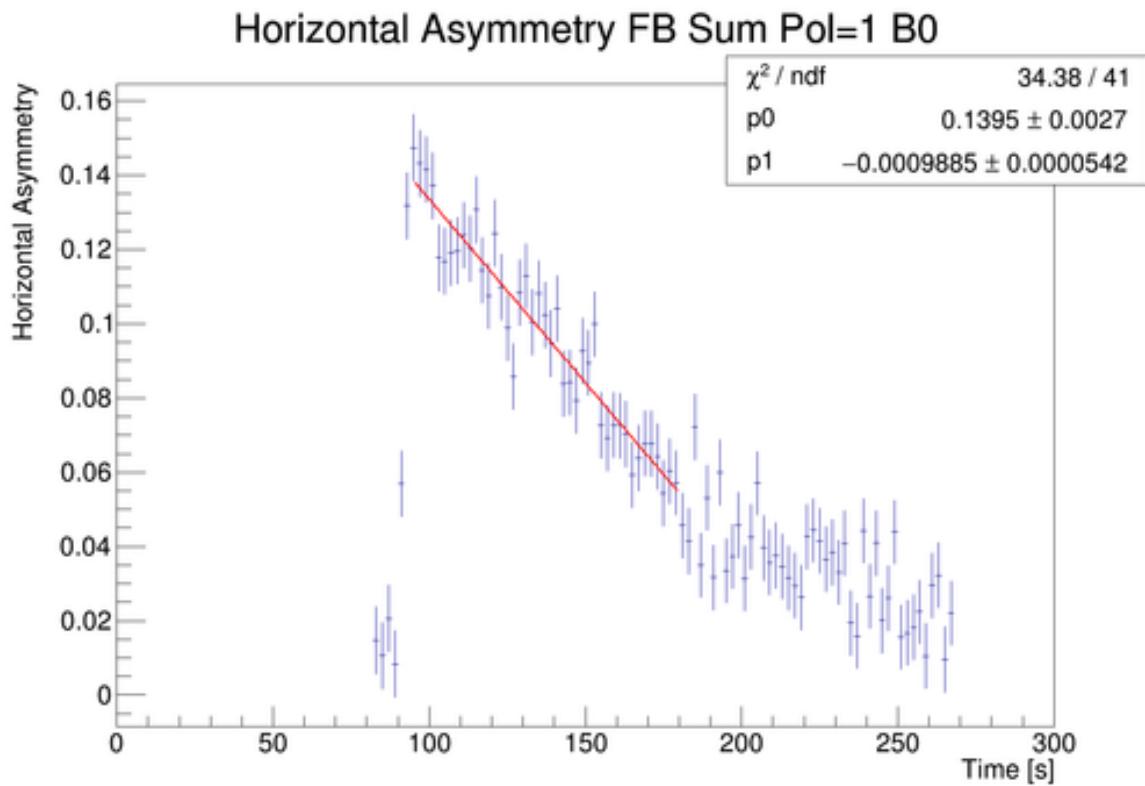
гии, значительно удалённой от спин-резонансной. На Рисунке 3.5 изображена зависимость стандартного отклонения спин-тюнов частиц пучка от значения градиента подавляющего декогеренцию секступоля (данные взяты из симуляции, описанной в разделе 2.2.6). Зависимость показывает такой же резонансный характер, как и данные эксперимента.



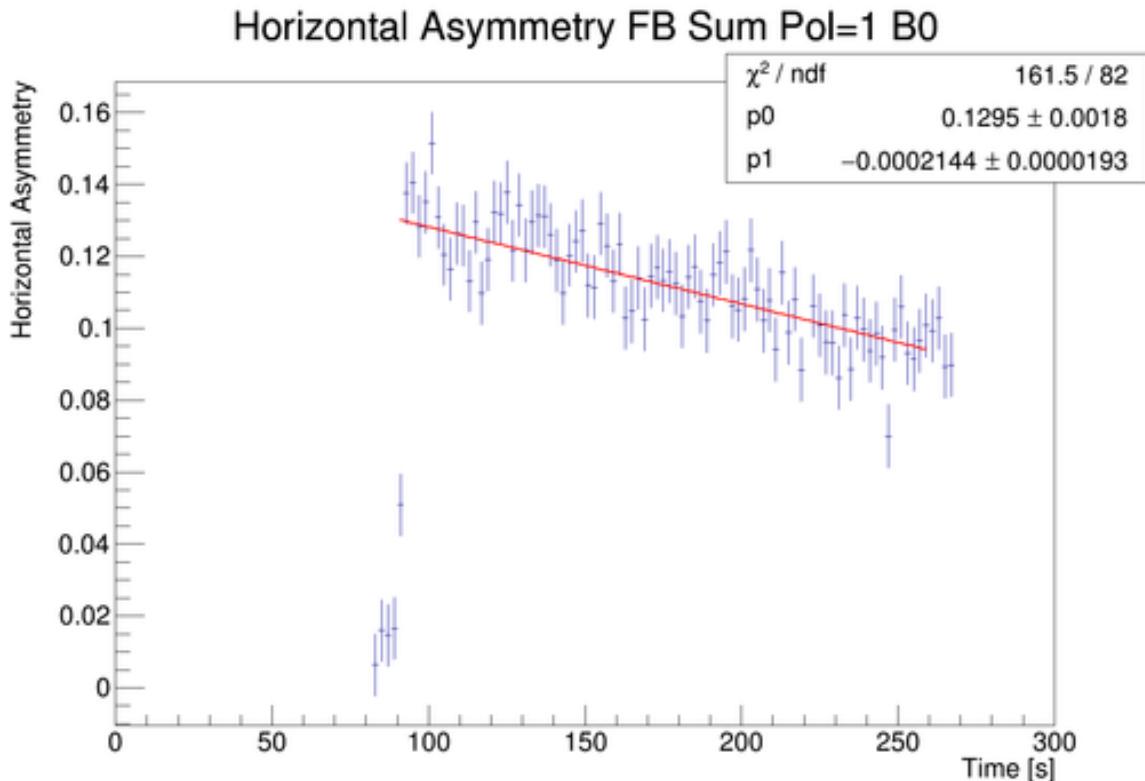
a) SCT =  $20.87 \pm 1.49$  секунд.



б) SCT =  $42.3 \pm 2.2$  секунд.



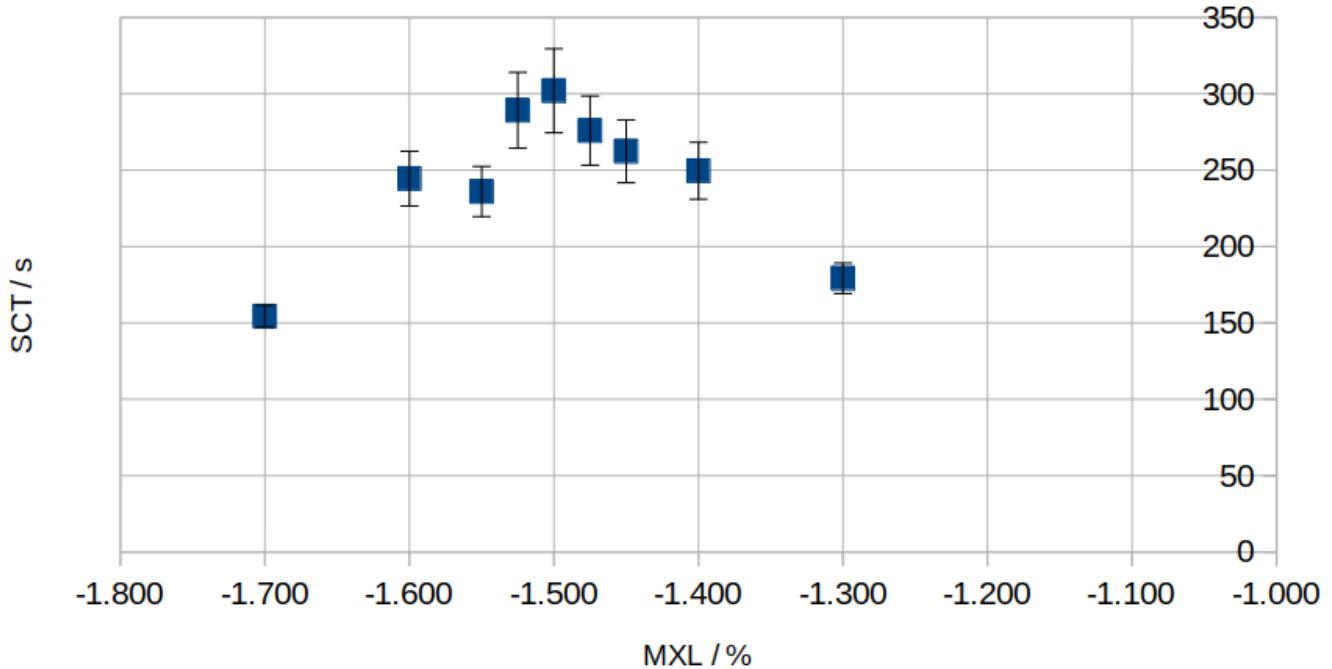
в)  $\text{SCT} = 70.6 \pm 4.1$  секунд.



г)  $\text{SCT} = 302.0 \pm 27.5$  секунд.

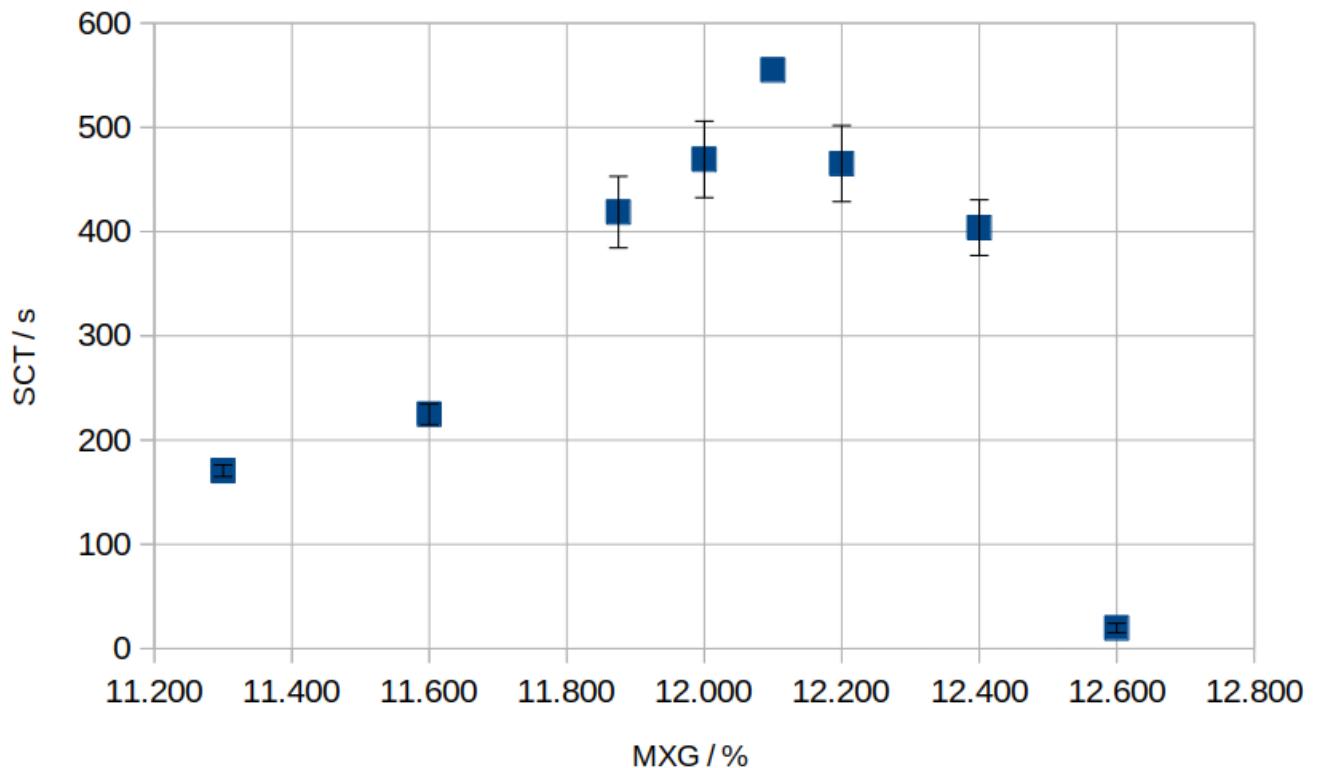
Рисунок 3.3 — Измерения горизонтальной поляризации во время оптимизации времени когерентности спина при подготовке к эксперименту по поиску аксионов в апреле 2019 года.

### MXL scan at MXG= %, MXS= %



a) Секступоль MXL.

### first diag. scan, MXL -1.575 %



б) Секступоль MXG.

Рисунок 3.4 – Зависимость SCT от градиента секступоля.

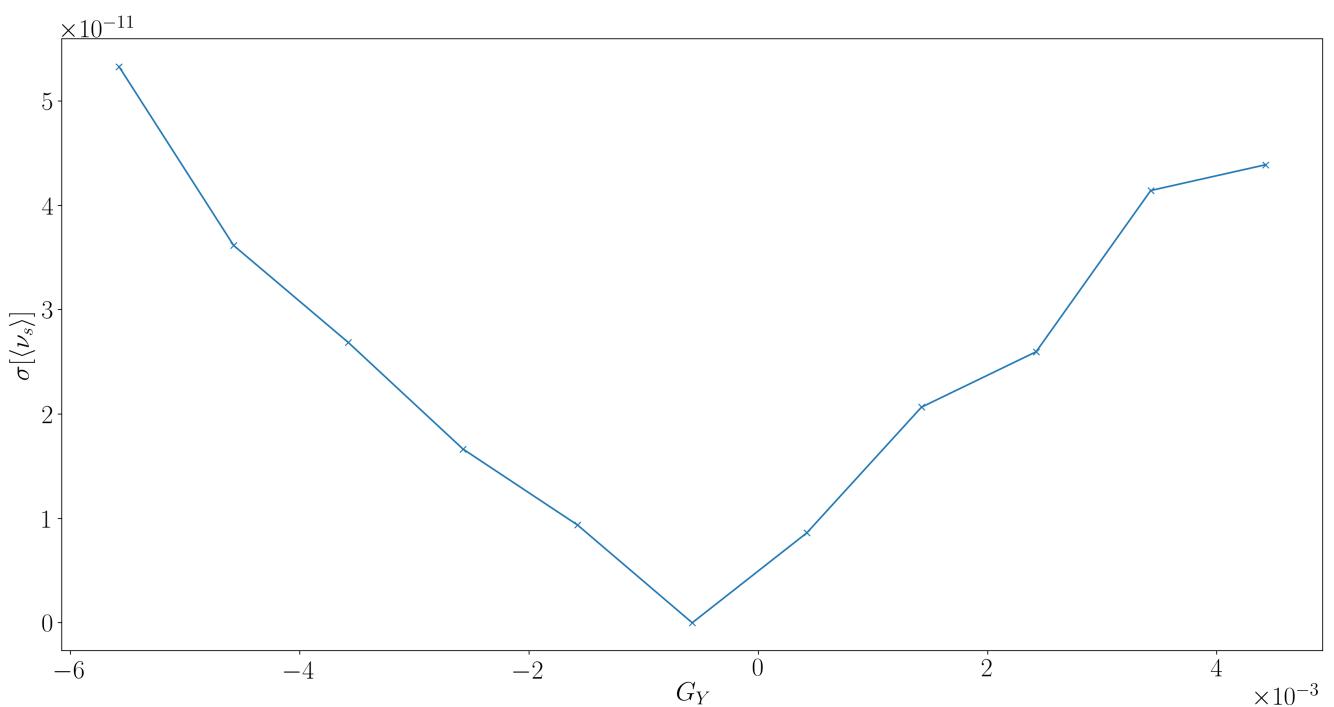


Рисунок 3.5 — Зависимость стандартного отклонения спин-тюнов частиц банча от используемого градиента подавляющего декогеренцию секступоля.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Были изучены эффекты спиновой динамики, составляющие систематические ошибки эксперимента по поиску электрического дипольного момента частицы методом замороженного спина в накопительном кольце, как то:
  - возмущения спиновой динамики вызванные бетатронным движением частицы;
  - декогеренция спинов частиц пучка;
  - МДМ прецессия спина, вызванная неидеальностями ускорителя.
2. Для каждого из эффектов, было описано средство борьбы, и проведено численное моделирование, подтверждающее его эффективность.
3. Были сформулированы:
  - понятия методов пространственной и временной областей;
  - понятие двумерно-замороженного спина;
  - необходимые условия успешного измерения ЭДМ в накопительном кольце;
  - метод Frequency Domain, удовлетворяющий всем сформулированным условиям.
4. Описаны структуры накопительных колец с непрерывно- и квази-замороженным спином.

В заключение, автор выражает благодарность научным руководителям, Сеничеву Ю. В. и Полозову С. М., за научное руководство, Салееву А. В. и Валетову Е. В. за плодотворные дискуссии, Институту Ядерных Исследований (ИКР-2) Исследовательского центра “Юлих,” и в частности коллективу коллаборации JEDI, за возможность участвовать в проекте по поиску ЭДМ.

## Список литературы

1. *Trodden, M.* Electroweak baryogenesis / M. Trodden // Rev. Mod. Phys. — 1999. — Окт. — Т. 71, вып. 5. — С. 1463—1500. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.1463>.
2. Evidence for the  $2\pi$  Decay of the  $K_2^0$  Meson / J. H. Christenson [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 1964. — Июль. — Т. 13, вып. 4. — С. 138—140. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.138>.
3. *Harris, P. G.* The Neutron EDM Experiment / P. G. Harris // arXiv:0709.3100 [hep-ex]. — 2007. — 19 сент. — arXiv: 0709.3100. — URL: <http://arxiv.org/abs/0709.3100> (дата обр. 16.04.2019).
4. *Smith, J. H.* Experimental Limit to the Electric Dipole Moment of the Neutron / J. H. Smith, E. M. Purcell, N. F. Ramsey // Phys. Rev. — 1957. — Окт. — Т. 108, вып. 1. — С. 120—122. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.120>.
5. Improved Experimental Limit on the Electric Dipole Moment of the Neutron / C. A. Baker [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Сент. — Т. 97, вып. 13. — С. 131801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.131801>.
6. Baker et al. Reply: / C. A. Baker [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Апр. — Т. 98, вып. 14. — С. 149102. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.149102>.
7. Precise Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment / H. N. Brown, G. Bunce, R. M. Carey [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Март. — Т. 86, вып. 11. — С. 2227—2231. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.2227>.
8. Improved limit on the muon electric dipole moment / G. W. Bennett, B. Bousquet, H. N. Brown [и др.] // Phys. Rev. D. — 2009. — Сент. — Т. 80, вып. 5. — С. 052008. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.052008>.

9. New Method of Measuring Electric Dipole Moments in Storage Rings / F. J. M. Farley, K. Jungmann, J. P. Miller [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Июль. — Т. 93, вып. 5. — С. 052001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.052001>.
10. srEDM Collaboration. — URL: <https://www.bnl.gov/edm/>.
11. *Greta Guidoboni*. Overview of Spin Coherence Time study results at COSY / Greta Guidoboni. — Richmond, VA, USA, 03.05.2015. — URL: [http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public\\_files/workshop/G.Guidoboni\\_IPAC15.pdf](http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public_files/workshop/G.Guidoboni_IPAC15.pdf) ; Topical meeting of Spin Tracking for Precision Measurements (IPAC15).
12. AGS Proposal: Search for a permanent electric dipole moment of the deuteron nucleus at the  $10^{-29}$  e· cm level. Tex. отч. / D. Anastassopoulos, V. Anastassopoulos, D. Babusci [и др.] ; BNL. — 2008. — URL: [https://www.bnl.gov/edm/files/pdf/deuteron\\_proposal\\_080423\\_final.pdf](https://www.bnl.gov/edm/files/pdf/deuteron_proposal_080423_final.pdf) (дата обр. 25.11.2016).
13. JEDI Collaboration. — URL: <http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/about/introduction.shtml>.
14. *Morse, W. M.* rf Wien filter in an electric dipole moment storage ring: The “partially frozen spin” effect / W. M. Morse, Y. F. Orlov, Y. K. Semertzidis // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2013. — Ноябр. — Т. 16, вып. 11. — С. 114001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.16.114001>.
15. Spin tune mapping as a novel tool to probe the spin dynamics in storage rings / A. Saleev, N. N. Nikolaev, F. Rathmann [и др.] // Phys. Rev. Accel. Beams. — 2017. — Июль. — Т. 20, вып. 7. — С. 072801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.072801>.
16. Electromagnetic Simulation and Design of a 11el Waveguide RF Wien Filter for Electric Dipole Moment Measurements of Protons and Deuterons / J. Slim [и др.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2016. — 21 авг. — Т. 828. — С. 116–124. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900216303710> (дата обр. 18.04.2019).

17. *Slim, J.* First commissioning results of the waveguide RF Wien filter / J. Slim, for the JEDI Collaboration // Hyperfine Interactions. — 2019. — Янв. — Т. 240, № 1. — С. 7. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10751-018-1547-6>.
18. The Test of Time Reversal Invariance at COSY (TRIC) / A. Aksentyev [и др.] // Acta Physica Polonica B. — 2017. — Окт. — Т. 48. — С. 1925—1934. — URL: <http://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=48&page=1925>.
19. The physics program of PAX at COSY / Y. Valdau [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Т. 678. — URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/678/1/012027/meta>.
20. *Valetov, E.* FIELD MODELING, SYMPLECTIC TRACKING, AND SPIN DECOHERENCE FOR EDM AND MUON G-2 LATTICES : PhD thesis / Valetov Eremey. — Michigan, USA : Michigan State University. — URL: [http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public\\_files/theses/valetovphd.pdf](http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public_files/theses/valetovphd.pdf).
21. *Mane, S. R.* Spin Wheel / S. R. Mane // arXiv:1509.01167 [physics]. — 2015. — Сент. — URL: <http://arxiv.org/abs/1509.01167> (дата обр. 28.09.2018) ; arXiv: 1509.01167.
22. Frequency domain method of the search for the deuteron electric dipole moment in a storage ring with imperfections / Y. Senichev [и др.] // arXiv:1711.06512 [physics]. — 2017. — Нояб. — URL: <http://arxiv.org/abs/1711.06512> (дата обр. 23.10.2018) ; arXiv: 1711.06512.
23. *Koop, I. A.* Colliding or co-rotating ion beams in storage rings for EDM search / I. A. Koop // Phys. Scr. — 2015. — С. 014034.
24. *Kawall, D.* Beam position monitors with SQUIDs for the deuteron EDM in a storage ring : тех. отч. / D. Kawall ; 485 WE-Heraeus EDM Seminar. — 2011.
25. A storage ring experiment to detect a proton electric dipole moment / V. Anastassopoulos, S. Andrianov, R. Baartman [и др.] // Review of Scientific Instruments. — 2016. — Т. 87, № 11. — С. 115116. — eprint: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4967465>. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4967465>.

26. *Aksentev, A. E.* Statistical precision in charged particle EDM search in storage rings / A. E. Aksentev, Y. V. Senichev // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Дек. — Т. 941. — URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/941/i=1/a=012083>.
27. *Dennis Eversmann.* Analysis of the Spin Coherence Time at the Cooler Synchrotron COSY : master's thesis / Dennis Eversmann. — Aachen : Rheinisch-Westfaelische Technische Hochschule Aachen (RWTH), 2013. — URL: [http://www.physik.rwth-aachen.de/fileadmin/user\\_upload/www\\_physik/Institute/Inst\\_3B/Mitarbeiter/Joerg\\_Pretz/DEMasterarbeit.pdf](http://www.physik.rwth-aachen.de/fileadmin/user_upload/www_physik/Institute/Inst_3B/Mitarbeiter/Joerg_Pretz/DEMasterarbeit.pdf) (дата обр. 28.02.2017).
28. NLREG package documentation. — URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/nlreg/index.html>.
29. *Beal, S. L.* Heteroscedastic Nonlinear Regression / S. L. Beal, L. B. Sheiner // Technometrics. — 1988. — Т. 30, № 3. — С. 327—338. — URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1988.10488406>.
30. *Senichev, Y.* SPIN TUNE DECOHERENCE EFFECTS IN ELECTRO- AND MAGNETOSTATIC STRUCTURES / Y. Senichev, D. Zyuzin // Beam Dynamics and Electromagnetic Fields. Vol. 5. — Shanghai, China : JACoW, 2013. — P. 2579—2581. — URL: <https://accelconf.web.cern.ch/accelconf/IPAC2013/papers/wepea036.pdf> (visited on 07/31/2017) ; OCLC: 868251790.
31. INVESTIGATION OF LATTICE FOR DEUTERON EDM RING / Y. Senichev [и др.] // Modeling of current and future machnies. — Shanghai, China, 2015. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/ICAP2015/papers/modbc4.pdf>.
32. Quasi-frozen Spin Method for EDM Deuteron Search / Y. Senichev [и др.] // Beam dynamics and EM fields. — 06.2015.
33. *Шатунов, Ю. М.* Пучки поляризованных частиц в ускорителях и накопителях / Ю. М. Шатунов. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2015. — 205 с.
34. *Koop, I. A.* Asymmetric energy colliding ion beams in the EDM storage ring / I. A. Koop // Beam Dynamics and Electromagnetic Fields. — Shanghai, China, 2013. — P. 1961—1963. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2013/papers/tupwo040.pdf>.

35. *Berz, M.* COSY Infinity website / M. Berz, K. Makino. — 220 Trowbridge Rd, East Lansing, MI 48824, USA : Michigan State University. — URL: [cosyinfinity.org](http://cosyinfinity.org).
36. *Berz, M.* COSY INFINITY 10.0 Beam Physics Manual / M. Berz, K. Makino ; Michigan State University. — 1st ed. — 220 Trowbridge Rd, East Lansing, MI 48824, USA, 08/2017.
37. *Berz, M.* COSY INFINITY 10.0 Programmer's manual / M. Berz, K. Makino ; Michigan State University. — 1st ed. — 220 Trowbridge Rd, East Lansing, MI 48824, USA, 08/2017.
38. Status of the Cooler Synchrotron COSY Juelich / U. Bechstedt [и др.] // Conf. Proc. — 2001. — Т. C0106181. — С. 3350—3352. — [3350(2001)].
39. H<sup>-</sup>-Operation of the Cyclotron 7IC as Injector for the Cooler Synchrotron COSY-Jülich / W. Bräutigam [и др.] // 15th Int. Cyclotron Conf. and Their Applications (Cyclotrons'98). — Caen, France : JACoW, 1998. — С. 654—657.
40. Feasibility Study for a Storage Ring to Search for Electric Dipole Moments of Charged Particles / F. Abusaif [и др.]. — 2019. — URL: <https://doi.org/xxxxx>.
41. Precursor Experiments to Search for Permanent Electric Dipole Moments (EDMs) of Protons and Deuterons at COSY / A. Lehrach [и др.] // arXiv:1201.5773 [hep-ex, physics:nucl-ex, physics:physics]. — 2012. — 27 янв. — URL: <http://arxiv.org/abs/1201.5773> (дата обр. 16.04.2019).
42. *Lehrach, A.* Beam and Spin Dynamics for Storage Ring Based EDM Search / A. Lehrach // Proceedings, 6th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2015): Richmond, Virginia, USA, May 3-8, 2015. — 2015. — WEAB2. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2015/papers/weab2.pdf>.
43. New Method for a Continuous Determination of the Spin Tune in Storage Rings and Implications for Precision Experiments / D. Eversmann, V. Hejny, F. Hinder [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Авг. — Т. 115, вып. 9. — С. 094801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.094801>.

44. How to Reach a Thousand-Second in-Plane Polarization Lifetime with 0.97–GeV/c Deuterons in a Storage Ring / G. Guidoboni, E. Stephenson, S. Andria11 [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Июль. — Т. 117, вып. 5. — С. 054801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.054801>.
45. *Wagner, T.* Beam-based alignment tests at the Cooler Synchrotron (COSY) / T. Wagner, on behalf of JEDI Collaboration // Hyperfine Interact. — 2018. — Nov. 28. — Vol. 239, no. 1. — P. 61. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10751-018-1539-6> (visited on 04/16/2019).
46. Measuring the polarization of a rapidly precessing deuteron beam / Z. Bagdasarian [и др.] // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2014. — Май. — Т. 17, вып. 5. — С. 052803. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.17.052803>.
47. *Guidoboni, G.* Spin coherence time studies of a horizontally polarized deuteron beam at COSY / G. Guidoboni, on behalf of JEDI Collaboration // Physica Scripta. — 2015. — Нояб. — Т. T166. — С. 014036.

## Список рисунков

1.1 Продольные фазовые портреты частиц в структуре с ВЧ продольной фокусировкой. Цветом различаются частицы с разными начальными сдвигами в вертикальной плоскости относительно референсной частицы; остальные координаты идентичны. . . . .	32
1.2 Вариант кольца, построенного по принципу “замороженного” спина. В арках использованы цилиндрические электро-магнитные элементы (Рисунок взят из [31]) . . . . .	33
1.3 Вариант кольца, построенного по принципу квази-замороженного спина, дизайн с разделением Е- и В-полей. (Рисунок взят из [31]) . .	34
1.4 Вариант кольца, построенного по принципу квази-замороженного спина, дизайн с прямыми фильтрами Вина. (Рисунок взят из [31]) . .	35
2.1 Сравнительные невязки как функции времени. Верхняя панель: невязка $\varepsilon_1$ ; нижняя панель: невязка $\varepsilon_2$ . . . . .	39
2.2 Стандартные отклонения против относительной скорости Спин-Колеса . . . . .	62
2.3 Зависимость спин-тюна частицы от её смещения от референсной частицы. . . . .	64
2.4 Стандартное отклонение радиальной компоненты спин-вектора частицы от спин-вектора референсной частицы . . . . .	65
2.5 Стандартное отклонение вертикальной компоненты спин-вектора частицы от спин-вектора референсной частицы . . . . .	66
2.6 Спин-тюн $v_s$ в зависимости от смещения частицы от референсной орбиты. . . . .	67
2.7 Вертикальная компонента $\bar{n}_y$ оси прецессии спина в зависимости от смещения частицы от референсной орбиты. . . . .	68
2.8 Траектории частиц в плоскости $(Y, B)$ фазового пространства. . . . .	69
2.9 Спин-тюны частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре. . . . .	70
2.10 Радиальные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре. . . . .	71
2.11 Вертикальные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре. . . . .	72

2.12 Продольные компоненты осей прецессии спинов частиц на их траекториях в неидеальной FS-структуре. . . . .	73
2.13 Средние уровни поперечных компонент осей стабильного спина частиц, в зависимости от уровня их спин-тюна. . . . .	74
2.14 Продольное фазовое пространство пучка. Звёздочками отмечены центры эллипсов . . . . .	75
2.15 Зависимость среднего уровня спин-тюна частицы от её равновесного уровня энергии для различных значений градиента секступоля. . . . .	76
2.16 Зависимость направления и частоты прецессии спина референсной частицы в неидеальной FS-структуре со случайно-распределёнными ошибками установки спин-ротаторов от их среднего угла наклона. . . . .	77
2.17 Зависимость направления и частоты прецессии спина референсной частицы в неидеальной FS-структуре в случае попарно-компенсированных ошибок установки спин-ротаторов от их среднего угла наклона. . . . .	78
2.18 Относительная разница между радиальными компонентами оси стабильного спина и угловой скоростью поворота спина, посчитанная относительно значения для CW-циркулирующего пучка	79
2.19 Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной бетатронным движением в горизонтальной плоскости . . . . .	80
2.20 Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной бетатронным движением в вертикальной плоскости . . . . .	81
2.21 Результаты симуляции для случая декогеренции, вызванной синхротронным движением . . . . .	82
2.22 Зависимость среднего уровня спин-тюна частицы от её среднего уровня кинетической энергии. . . . .	83
2.23 Зависимость равновесного уровня энергии частицы от её поперечного эмиттанса. . . . .	83
2.24 Результаты симуляции в случае линейного разложения трансфер матриц. . . . .	84
2.25 Зависимость продольного эмиттанса пучка от его поперечного эмиттанса. . . . .	85
2.26 Зависимость спин-тюна частицы от её положения в продольном фазовом пространстве. . . . .	86

3.1	Синхротрон COSY. . . . .	87
3.2	Кольцо COSY с отмеченными положениями секступолей для контроля времени когерентности спина. (Рисунок взят из [47].) . . .	91
3.3	Измерения горизонтальной поляризации во время оптимизации времени когерентности спина при подготовке к эксперименту по поиску аксионов в апреле 2019 года. . . . .	96
3.4	Зависимость SCT от градиента секступоля. . . . .	97
3.5	Зависимость стандартного отклонения спин-тюнов частиц бенча от используемого градиента подавляющего декогеренцию секступоля. .	98
A.1	Зависимость информации Фишера измерения синусоидального сигнала от его производной. . . . .	114
A.2	Относительная ошибка измерения частоты событий на правом и левом детекторах как функция времени. . . . .	121
A.3	Ожидание (чёрная линия) и измерения (красные точки) асимметрии сечения. . . . .	122

## Список таблиц

1	Количество выбранной информации (в долях от потенциального максимума), в зависимости от длительности измерительного цикла, и соответствующее отношение сигнал/шум. . . . .	26
2	Оценки параметров модели (медленный SW) . . . . .	39
3	Рабочие параметры COSY, использованные в проводимых исследованиях. . . . .	88
4	Выбранная информация Фишера, длительность измерений, соответствующее отношение сигнал-шум. . . . .	118
5	Параметры модели частоты событий детекторов . . . . .	120
6	Результаты фитирования . . . . .	120

## Приложение А

### Статистическое моделирование

В этом приложении мы рассматриваем стандартную ошибку оценки частоты прецессии спина, в эксперименте по поиску ЭДМ дейтрана в накопительном кольце. Основное рассмотрение начинается с раздела A.2; раздел A.1 предоставляет обоснование некоторым используемым понятиям (таким как информация Фишера выборки, информативность точки), но может быть пропущен.

Частота прецессии спина определяется путём фитирования данных поляриметрии синусоидальной функцией  $f(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$  с постоянными параметрами  $(a, \omega, \delta)$ . Данные о поляризации получают при рассеянии пучка на углеродной мишени. Двумя важными обстоятельствами поляриметрии являются: a) уменьшение числа частиц в пучке при каждом измерении поляризации, и b) деполяризация.

В связи с первым обстоятельством возникает желание использовать каждое измерение поляризации максимально эффективно. В выборке измерений сигнала, максимальной информативностью обладают точки, измеренные в моменты, когда сигнал имел наибольшую скорость изменения (см. раздел A.1 ниже). По этой причине возникла идея измерять поляризацию пучка только в моменты пересечения его нуля (модулированная схема измерения): таким образом увеличивается время жизни пучка, а потеря частиц происходит наиболее выгодным образом.

При этом необходимо отметить, что анализирующая способность детектора как раз максимальна в экстремумах, и стремится к нулю в узлах сигнала. Это ограничивает возможность увеличения эффективности выборки модулированной схемой: наиболее ценные для нас измерения поляризации имеют наименьшую точность, а наименее ценные — максимальную.

Также, это влияет и на гетероскедастичность данных: в проведённой нами симуляции мы использовали непериодическую модель роста ошибки стандартного отклонения измерения поляризации из [27, стр. 18], в то время как колебания анализирующей способности детектора вводят периодическую зависимость от времени.

Фактор деполяризации в свою очередь ограничивает наши возможности по продлению времени жизни пучка, а следовательно накладывает ограничения и на длительность измерительного цикла, возможную точность единичной оценки частоты, и длительность полного времени измерения ЭДМ.

В следующих разделах мы рассмотрим модель временной зависимости частоты событий на детекторе, введём понятие асимметрии сечения взаимодействия, и определим адекватную, ввиду деполяризации, длительность измерительного цикла. Также, мы промоделируем статистическую обработку данных, и попытаемся определить потенциал применения модулированной схемы измерения поляризации.

## A.1 Предварительный анализ

Вероятность наблюдения величины  $y_i \equiv y(t_i)$ , при ожидании  $\mu(t_i)$  и нормальном распределении ошибки:

$$f(y_i|\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mu(t_i))^2}{\nu}\right),$$

$$\Theta = (\nu, \omega, \varphi),$$

$$\mu(t_i) = N_0 (1 + P \sin(\omega t_i + \varphi)).$$

Вероятность наблюдения набора измерений  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_K)$ , предполагая что они все происходят из одного и того же распределения, это произведение вероятностей, взятое как функция параметров:

$$\mathcal{L}(\Theta|\mathbf{y}) = \prod_i f(y_i|\Theta),$$

и логарифм вероятности

$$\ell(\Theta|\mathbf{y}) = -\frac{K}{2} \log 2\pi - \frac{K}{2} \log \nu - \frac{1}{2\nu} \sum_i \varepsilon_i^2, \quad \varepsilon_i = y_i - \mu(t_i).$$

Обычными предположениями на ошибку являются равенство нулю её ожидания, и строгая экзогенность:

$$\mathbb{E} [\varepsilon_i | \Theta_0] = \mathbb{E} [t_i \varepsilon_i | \Theta_0] = 0,$$

связь между производными ожидания:

$$\begin{aligned}\mu'_\varphi &= N_0 P \cos(\omega t + \varphi), \\ \mu'_\omega &= t \cdot \mu'_\varphi, \varepsilon'_\xi = -\mu'_\xi.\end{aligned}$$

### A.1.1 Дисперсия оценки частоты

После вычисления производных логарифма вероятности (и их ожиданий), получим матрицу Фишера:

$$I(\Theta_0) = \begin{pmatrix} K/2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1/\nu \sum (t_i \mu'_\varphi(t_i))^2 & 1/\nu \sum t_i (\mu'_\varphi(t_i))^2 \\ 0 & 1/\nu \sum t_i (\mu'_\varphi(t_i))^2 & 1/\nu \sum (\mu'_\varphi(t_i))^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы

$$|I(\Theta_0)| = \frac{K}{2\nu^3} \underbrace{\left( \sum (t_i \mu'_\varphi(t_i))^2 \sum (\mu'_\varphi(t_i))^2 - \left( \sum t_i (\mu'_\varphi(t_i))^2 \right)^2 \right)}_{\omega}.$$

Матрица вариации-ковариации

$$vcov = \begin{pmatrix} 2\nu/K & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\sum (\mu'_\varphi(t_i))^2}{\omega}} & \sqrt{\frac{\sum t_i (\mu'_\varphi(t_i))^2}{\omega}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\sum t_i (\mu'_\varphi(t_i))^2}{\omega}} & \sqrt{\frac{\sum (t_i \mu'_\varphi(t_i))^2}{\omega}} \end{pmatrix}.$$

Дисперсия оценки частоты

$$\text{var} [\hat{\omega}] = \nu \frac{\sum (\mu'_\varphi(t_i))^2}{\sum (t_i \mu'_\varphi(t_i))^2 \sum (\mu'_\varphi(t_i))^2 - \left( \sum t_i (\mu'_\varphi(t_i))^2 \right)^2}. \quad (\text{A.1})$$

## Проверка

Положим  $\mu(t_i) = \varphi + \omega t_i$ . В этом случае  $\mu'_\varphi(t_i) = 1$ ,  $\mu'_\omega(t_i) = t_i = t_i \cdot \mu'_\varphi(t_i)$ , и определитель матрицы Фишера упрощается:

$$\begin{aligned} |I(\boldsymbol{\theta}_0)| &= \frac{K}{2\nu^4} \left( K \sum_i t_i^2 - \left( \sum_i t_i \right)^2 \right) \\ &= \frac{K^3}{2\nu^4} \left( \frac{1}{K} \sum_i t_i^2 - \langle t \rangle^2 \right) \\ &= \frac{K}{2\nu^4} \cdot \underbrace{K \sum_i (t_i - \langle t \rangle)^2}_{\omega} \end{aligned}$$

а матрица вариации-ковариации становится

$$vcov = \begin{pmatrix} 2\nu^2/K & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{\sum t_i}{\sum (t_i - \langle t \rangle)^2} & \nu \frac{\sum t_i}{K \sum (t_i - \langle t \rangle)^2} \\ 0 & \nu \frac{\sum t_i}{K \sum (t_i - \langle t \rangle)^2} & \nu \frac{\sum t_i^2}{K \sum (t_i - \langle t \rangle)^2} \end{pmatrix},$$

с хорошо известным выражением дисперсии оценки наклона прямой

$$\text{var} [\hat{\omega}] = \frac{\nu}{\sum (t_i - \langle t \rangle)^2}.$$

Обозначим  $(\mu'_\varphi(t_i))^2 = (N_0 P)^2 \cos^2(\omega t_i + \varphi) \equiv x_i$ . Уравнение (A.1) может быть записано в виде:

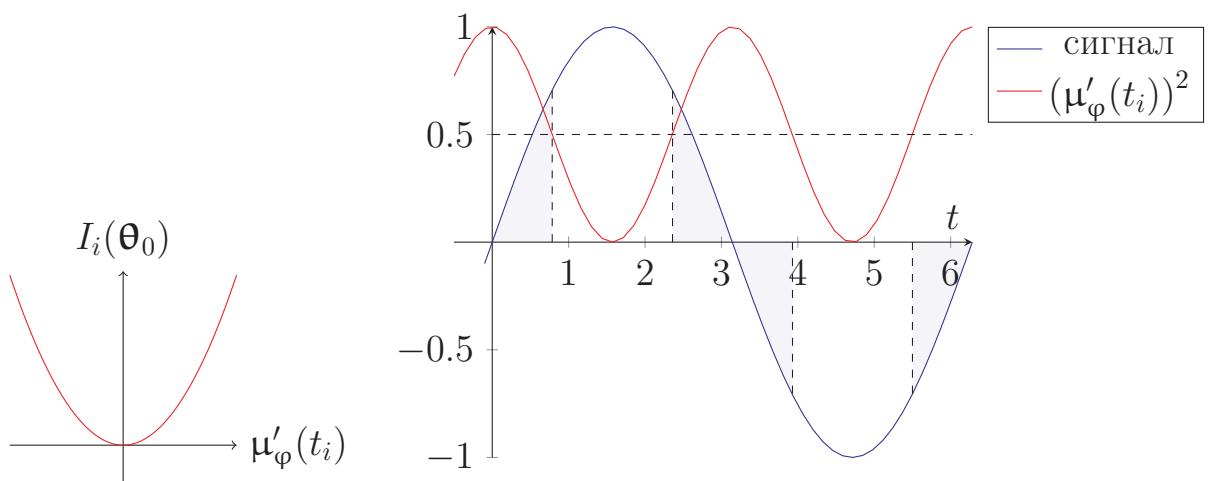
$$\begin{aligned} \text{var} [\hat{\omega}] &= \frac{\nu}{\sum_j x_j \left( \sum_i t_i^2 \frac{x_i}{\sum_j x_j} - \left( \sum_i t_i \frac{x_i}{\sum_j x_j} \right)^2 \right)} \\ &= \frac{\nu}{\sum_j x_j \sum_i w_i (t_i - \langle t \rangle_w)^2} \\ &= \frac{\nu}{\sum_j x_j \cdot \text{var}_w [t]}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

### A.1.2 Модуляция выборки

Запишем матрицу Фишера в виде суммы

$$I(\boldsymbol{\Theta}_0) = \sum_i I_i(\boldsymbol{\Theta}_0); \quad I_i(\boldsymbol{\Theta}_0) = \frac{1}{\nu} \begin{pmatrix} (\sqrt{2} \cdot \mu'_\varphi(t_i))^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & t_i^2 & t_i \\ 0 & t_i & 1 \end{pmatrix} \cdot (\mu'_\varphi(t_i))^2. \quad (\text{A.3})$$

$I_i(\Theta_0) = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \log f(y_i | \Theta) \Big|_{\Theta=\Theta_0} \right]$  будем интерпретировать как информацию о параметре, заложенную в измерение  $y_i$ .



а) Информация  
Фишера точки  
зависит  
параболически от  
производной сигнала.

б) Точки в заштрихованных областях более информативны.

Рисунок А.1 – Зависимость информации Фишера измерения синусоидального сигнала от его производной.

Если дать каждой точке вес, пропорциональный её информации Фишера, т.е.  $w_i = \cos^2(\omega t_i + \varphi)$ , вес области с  $(\mu'_\varphi(t_i))^2 \geq 1/2$  больше чем у эквивалентной области с  $(\mu'_\varphi(t_i))^2 < 1/2$  на множитель

$$\int_{t_0}^{t_1} \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{\omega} \int_{\omega t_0}^{\omega t_1} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2\omega} \sin \omega \Delta t \cos \omega \Sigma t \approx 1.9.$$

То есть, если бы все точки находились в заштрихованной области, выборка была бы информативнее примерно в два раза.<sup>1</sup>

## A.2 Модель частоты событий на поляриметре

В наших рассуждениях мы предположили следующую простую модель изменения количества событий на поляриметре как функции времени:

$$N(t) = N_0(t) \cdot \left(1 + P \cdot e^{-t/\tau_d} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\right), \quad (\text{A.4})$$

где  $N_0(t)$  частота событий, связанная с неполяризованным сечением,  $\tau_d$  время жизни поляризации, связанное с декогеренцией.

Ток пучка, рассеиваемого на мишени может быть описан с помощью:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{t/\tau_b} = \nu N_0^b \cdot e^{t/\tau_b},$$

где  $\tau_b$  — время жизни пучка,  $N_0^b$  его начальное число частиц, и  $\nu$  частота оборота пучка в ускорителе. Обозначая  $p$  вероятность что рассеянная частица полетит в сторону детектора, ожидаемое число частиц, детектируемых в течении времени измерения  $\Delta t_c$  может быть записано как

$$\begin{aligned} N_0(t) &= p \cdot \int_{-\Delta t_c/2}^{+\Delta t_c/2} I(t + \tau) d\tau \\ &= p \cdot \frac{\nu N_0^b}{\lambda_b} e^{\lambda_b t} \cdot \left(e^{\lambda_b \Delta t_c/2} - e^{-\lambda_b \Delta t_c/2}\right) \\ &\approx \underbrace{p \cdot \nu N_0^b e^{\lambda_b t}}_{\text{rate } r(t)} \cdot \Delta t_c. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Таким образом, получаем распределение Пуассона

$$P_{N_0(t)}(\tilde{N}_0) = \frac{(r(t)\Delta t_c)^{\tilde{N}_0}}{\tilde{N}_0!} \cdot e^{-r(t)\Delta t_c},$$

с дисперсией  $\sigma \left[ \tilde{N}_0 \right]^2(t) = N_0(t)$ .

---

<sup>1</sup>Это не учитывая что в случае поляриметрии неопределенность измерений обратно пропорциональна информативности, как было уже сказано во введении к этому приложению.

Нас интересует ожидание  $N_0(t) = \mathbb{E} [\tilde{N}_0(t)]$ , и его стандартное отклонение  $\sigma [N_0](t)$ . Обозначая время измерения одного события  $\Delta t_\varepsilon$ , полное время измерений  $\Delta t_c$ , и число событий за измерение  $n_{c/\varepsilon} = \Delta t_\varepsilon / \Delta t_c$ , ожидание

$$\mathbb{E} [\tilde{N}_0(t)]_{\Delta t_\varepsilon} = \frac{1}{n_{c/\varepsilon}} \sum_{i=1}^{n_{c/\varepsilon}} \tilde{N}_0(t_i).$$

Поскольку это сумма случайных переменных,  $N_0(t)$  имеет нормальное распределение; тогда стандартное отклонение среднего

$$\begin{aligned} \sigma [N_0](t) &= \sigma [\tilde{N}_0](t) / \sqrt{n_{c/\varepsilon}} = \sqrt{N_0(t) \frac{\Delta t_c}{\Delta t_\varepsilon}} \\ &\approx \sqrt{\frac{p \cdot \nu N_0^b}{\Delta t_\varepsilon}} \cdot \Delta t_c \cdot \exp\left(\frac{\lambda_b}{2} \cdot t\right). \end{aligned}$$

Отметим, что относительная ошибка растёт со временем:

$$\frac{\sigma [N_0](t)}{N_0(t)} \approx \frac{A}{\sqrt{\Delta t_\varepsilon}} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_b}{2} t\right) = \frac{A}{\sqrt{\Delta t_\varepsilon}} \cdot \exp\left(\frac{t}{2\tau_b}\right), A = \frac{1}{\sqrt{p \cdot \nu N_0^b}}. \quad (\text{A.6})$$

### A.3 Асимметрия сечения

В качестве меры поляризации пучка используют асимметрию частоты событий детекторов. [27, стр. 17] Асимметрия сечения взаимодействия — это нормализованная разность числа событий (в единицу времени) на детекторах, расположенных по разные стороны от вакуумной камеры:

$$\mathcal{A} = \frac{N(\frac{\pi}{2}) - N(-\frac{\pi}{2})}{N(\frac{\pi}{2}) + N(-\frac{\pi}{2})}. \quad (\text{A.7})$$

В нижеследующей симуляции, мы профитировали данные функцией:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) \cdot e^{\lambda_d \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (\text{A.8})$$

в которой, помимо частоты, оценивались параметры  $\mathcal{A}(0)$ ,  $\lambda_d$ , и  $\varphi$ .

В связи с уменьшением числа частиц в пучке, измерение асимметрии сечения гетероскедастично. Из [27, стр. 18], мы приняли модель гетероскедастичности

$$\sigma [\mathcal{A}]^2(t) \approx \frac{1}{2N_0(t)}. \quad (\text{A.9})$$

## А.4 Временное окно измерений

Предполагая нормальное распределение ошибки измерений, с нулевым ожиданием и дисперсией  $\sigma[\varepsilon]^2$ , эстиматор максимального правдоподобия дисперсии оценки частоты колебаний асимметрии сечения взаимодействия  $\mathcal{A}$  может быть выражен как

$$\text{var}[\hat{\omega}] = \frac{\sigma[\varepsilon]^2}{X_{tot} \cdot \text{var}_w[t]}, \quad (\text{A.10})$$

где

$$\begin{aligned} X_{tot} &= \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} x_j = \sum_{s=1}^{n_{zc}} \sum_{j=1}^{n_{\varepsilon/zc}} x_{js}, \\ \text{var}_w[t] &= \sum_i w_i (t_i - \langle t \rangle_w)^2, \quad \langle t \rangle_w = \sum_i w_i t_i, \\ w_i &= \frac{x_i}{\sum_j x_j}, \quad x_i = (\mathcal{A}(0) \exp(\lambda_d t_i))^2 \cos^2(\omega t_i + \varphi) = (\mu'_\varphi(t_i))^2. \end{aligned}$$

В выражении выше,  $X_{tot}$  есть полная информация Фишера сэмпла, и  $\text{var}_w[t]$  — мера длительности его измерения. Можно наблюдать, что выбирая подходящие моменты времени для измерения, можно увеличить фактор  $X_{tot}$ , поскольку он пропорционален сумме временных производных сигнала. Если частота и фаза колебаний уже известны до приемлемого уровня, можно дальше улучшить эффективность измерений, применяя схему измерений в которой выбираются только моменты быстрого изменения сигнала (модуляция сэмплинга).

Оба фактора  $\text{var}_w[t]$  и  $X_{tot}$  ограничены конечным временем жизни поляризации. Можно выразить  $\sum_{j=1}^{n_{\varepsilon/zc}} x_{js} = n_{\varepsilon/zc} \cdot x_{0s}$ , для некоторого среднего значения  $x_{0s}$  в данном узле  $s$ , где  $n_{\varepsilon/zc}$  измерений асимметрии на узле. Будем называть временем сжатия<sup>2</sup> (обозначение  $\Delta t_{zc}$ ) период времени вокруг узла сигнала, в течении которого производятся измерения. Значение суммы  $\sum_{j=1}^{n_{\varepsilon/zc}} x_{js}$  спадает

---

<sup>2</sup>Поскольку, не изменяя количества измерений за единицу времени, они все “сжимаются” вокруг узла сигнала.

экспоненциально из-за деполяризации, так что  $x_{0s} = x_{01} \exp\left(\lambda_d \cdot \frac{(s-1) \cdot \pi}{\omega}\right)$ . Тогда:

$$X_{tot} = n_{\varepsilon/zc} \cdot x_{01} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\lambda_d \pi}{\omega} n_{zc}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\lambda_d \pi}{\omega}\right) - 1} \equiv n_{\varepsilon/zc} \cdot x_{01} \cdot g(n_{zc}); \quad (\text{A.11})$$

$$x_{01} = \frac{1}{\Delta t_{zc}} \int_{-\Delta t_{zc}/2}^{+\Delta t_{zc}/2} \cos^2(\omega \cdot t) dt = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sin \omega \Delta t_{zc}}{\omega \Delta t_{zc}}\right), \quad (\text{A.12})$$

$$n_{\varepsilon/zc} = \frac{\Delta t_{zc}}{\Delta t_\varepsilon}. \quad (\text{A.13})$$

Уравнение (A.11) может быть использовано чтобы оценить пределы длительности эксперимента. В Таблице 4 мы собрали: процент от предела информации Фишера сэмпла, время (как фактор времени жизни поляризации) исчерпания этого процента информации из сэмпла, и соответствующее этому времени отношение сигнал-шум. Отношение сигнал-шум вычислено по формуле:

$$\text{SNR} = \frac{\mathcal{A}(0) \cdot e^{-t/\tau_d}}{\sigma[\mathcal{A}](t)} \approx \sqrt{2 \cdot p \cdot \nu N_0^b \cdot \Delta t_c} \cdot \mathcal{A}(0) \cdot \exp\left[-\frac{t}{\tau_d} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_d}{\tau_b}\right)\right], \quad (\text{A.14})$$

в которой, полагая  $\sigma[\mathcal{A}(0)] / \mathcal{A}(0) \approx 3\%$  (точность измерения поляриметрии), коэффициент перед экспонентой равен 33.

Таблица 4 — Выбранная информация Фишера, длительность измерений, соответствующее отношение сигнал-шум.

Предел ИФ(%)	длительность ( $\times \tau_d$ )	SNR
95	3.0	0.4
90	2.3	1.1
70	1.2	5.5
50	0.7	11.7

Предполагая отсутствие деполяризации ( $\lambda_d = 0$ ) и однородный сэмплинг с частотой  $1/\Delta t$ , уравнение (A.10) может быть записано через физические пе-

ременные как

$$\begin{aligned} X_{tot} &= \sum_{k=1}^K \mathcal{A}^2(0) \cos^2(\omega t_k + \varphi) = \frac{1}{2} \mathcal{A}^2(0) \cdot K, \\ \text{var}_w [t] &= \sum_{k=1}^K (k\Delta t - \langle t \rangle_w)^2 \underbrace{w_k}_{1/K} \\ &\approx \frac{\Delta t^2}{12} K^2 = \frac{T^2}{12}, \end{aligned}$$

и тогда

$$\text{var} [\hat{\omega}] = \frac{24}{KT^2} \cdot \left( \frac{\sigma [\varepsilon]}{\mathcal{A}(0)} \right)^2.$$

## A.5 Результаты моделирования

Мы симулировали сбор данных двух детекторов с параметрами собранными в Таблице 5 на протяжении  $T_{tot} = 1,000$  секунд, выбираемыми равномерно по времени с частотой  $f_s = 375$  Гц.

Данные параметры симуляции были выбраны исходя из следующих соображений: число частиц в пучке порядка  $10^{11}$ ; если мы хотим сохранить время жизни пучка равным времени жизни поляризации, мы не можем исчерпать более 75% от его начального числа частиц; всего лишь 1% всех рассеяний на мишени полезны для поляриметрии, так что остаётся  $7.5 \cdot 10^8$  полезных рассеяний. Измерение частоты событий  $N_0(t)$  с точностью примерно 3% требует приблизительно 2000 событий на детекторе, что ещё уменьшает число измерений до  $3.75 \cdot 10^5 = f_s \cdot T_{tot}$ . Ожидаемая длительность цикла 1000 секунд, отсюда  $f_s = 375$  Гц.

Относительная ошибка измерения частоты событий на детекторах отражена на Рисунке A.2; асимметрия сечения, вычисленная в соответствии с уравнением (A.7), представлена на Рисунке A.3. Данные асимметрии фитируются нелинейной, гетероскедастичной моделью заданной как

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) \cdot e^{\lambda_d \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

с функцией дисперсии весов заданной уравнением (A.9). Результаты фитирования представлены в Таблице 6.

Таблица 5 — Параметры модели частоты событий детекторов

	Левый	Правый	
$\varphi$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	рад
$\omega$	3		рад/сек
$P$	0.4		
$\tau_d$	721		сек
$\tau_b$	721		сек
$N_0(0)$	6730		

Таблица 6 — Результаты фитирования

	Оценка	Ст.	Ошибка	Единицы
$\mathcal{A}(0)$	0.400		$9.03 \cdot 10^{-5}$	
$\lambda_d$	-0.001		$7.86 \cdot 10^{-7}$	1/сек
$\omega$	3.000		$7.55 \cdot 10^{-7}$	рад/сек
$\varphi$	-1.571		$2.25 \cdot 10^{-2}$	рад

Если начальная оценка частоты, полученная из равномерно собранного сэмпла, имеет стандартную ошибку порядка  $10^{-6}$  рад/сек, симуляции подтверждают, что стандартная ошибка оценки может быть улучшена до примерно  $5.8 \cdot 10^{-7}$  рад/сек.

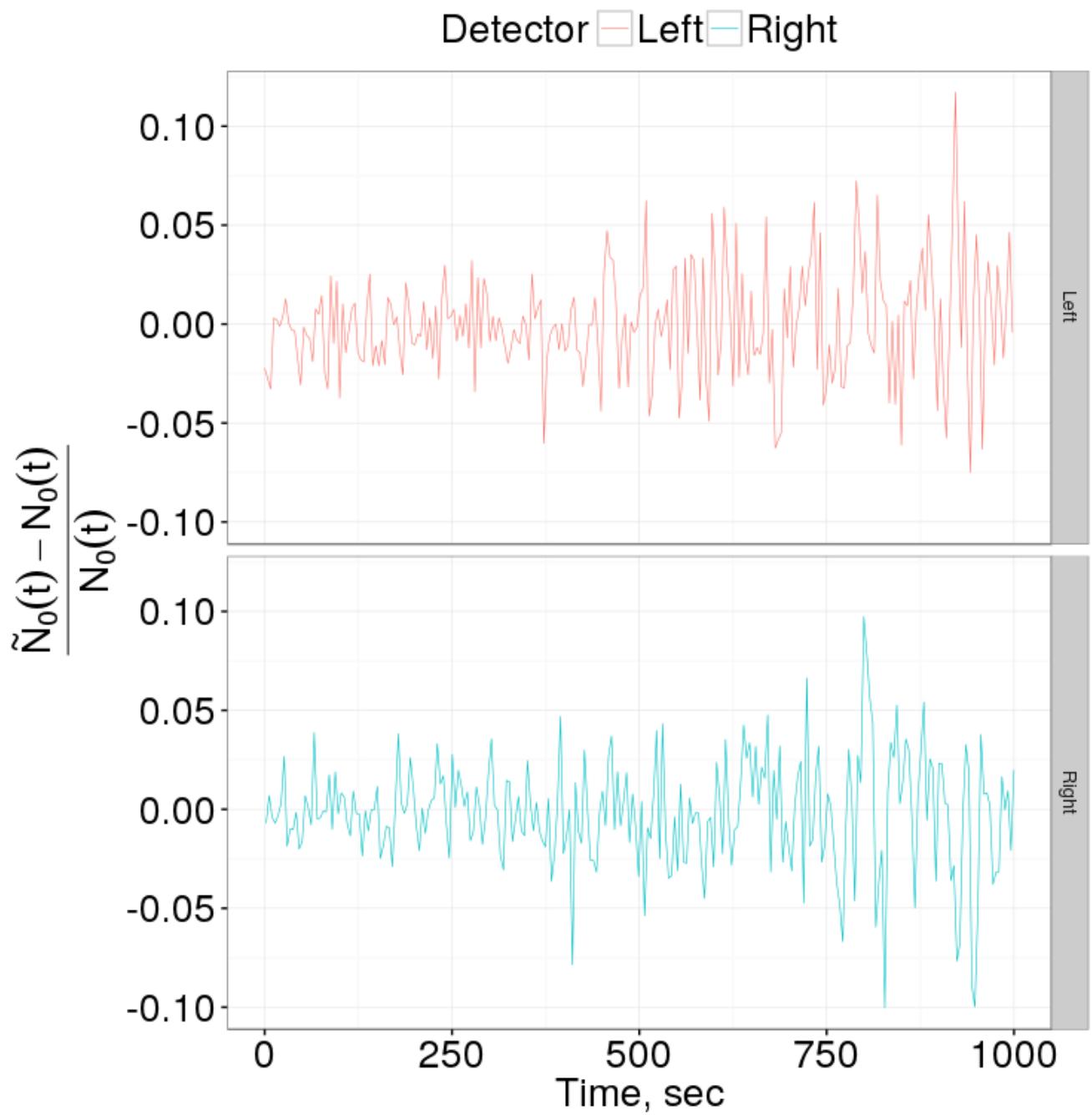


Рисунок А.2 — Относительная ошибка измерения частоты событий на правом и левом детекторах как функция времени.

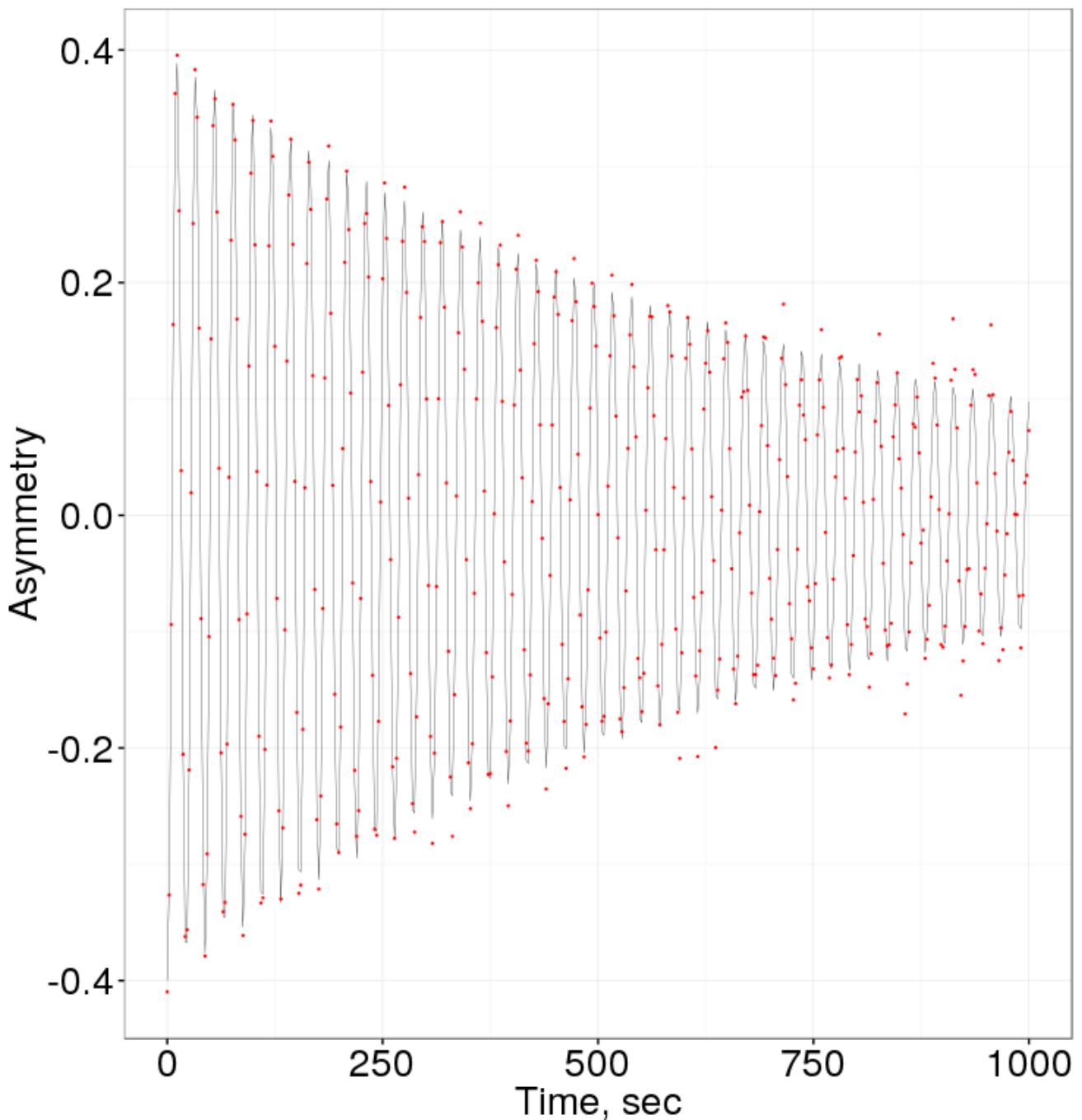


Рисунок А.3 — Ожидание (чёрная линия) и измерения (красные точки) асимметрии сечения.