MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado **Nombre:** ______________________

Certamen 3. Julio 20, 2022 **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (30 pts) Considere $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$ matriz de distancias y suponga que consideramos $d_{ij} = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|$. Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ con $a_{ij} = -\frac{1}{2}d_{ij}^2$ y $b_{ij} = a_{ij} - \overline{a}_i - \overline{a}_j + \overline{a}$, donde

$$\overline{a}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_{ij}, \qquad \overline{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_{ij}, \qquad \overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \overline{a}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \overline{a}_j.$$

Considere

$$\boldsymbol{B} = \Big(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{1}_n^\top\Big)\boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{1}_n^\top\Big).$$

Muestre que $\boldsymbol{B}$ es semidefinida positiva.

2. (30 pts) Sea U_1 y U_2 dos variables aleatorias independientes $\mathsf{U}(0,1)$. Suponga $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^\top$ donde

$$X_1 = U_1, \qquad X_2 = U_2, \qquad X_3 = U_1 + U_2, \qquad X_4 = U_1 - U_2.$$

Calcule la matrix de correlación $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{X}$. ¿Cuántas componentes (PC) son de interés? Muestre que

$$\boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son vectores propios de $\boldsymbol{R}$ asociados a λ's no triviales. Interprete las dos primeras PC obtenidas.

3. (40 pts) Conjunto de datos desde Mardia, Kent y Bibby sobre 88 estudiantes quienes tomaron exámenes sobre 5 materias. Los primeras 2 materias fueron realizadas con el libro de texto cerrado, mientras que los últimos 3 se llevaron a cabo con el libro abierto. Realice un análisis de componentes principales y escriba un **muy breve** reporte de sus resultados.

El conjunto de datos, llamado examScor.csv, se encuentran disponibles en la página:
http://fosorios.mat.utfsm.cl/teaching.html#MAT269