MAT-266: Análisis Estadístico Multivariado
Certamen 1. Abril 20, 2022 **Nombre:** ____________________
Tiempo: 70 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. Considere $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ una muestra de datos p-dimensionales. Sea

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a})^\top.$$

a. (15 pts) Muestre que $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{Q} + n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})^\top$, donde

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})^\top.$$

b. (10 pts) Demuestre que $|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a})| = |\boldsymbol{Q}|\{1 + n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{Q}^{-1} (\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})\}$, y de ahí muestre que

$$\min_{a} |\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a})| = |\boldsymbol{Q}|.$$

c. (15 pts) Sea

$$g_{ij} = (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{S}_*^{-1} (\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}}), \qquad i, j = 1, \dots, n,$$

donde $\boldsymbol{S}_* = \boldsymbol{Q}/n$. Muestre que

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 0, \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} g_{ii} = np.$$

2. (30 pts) Sea $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ con rango k. Determine $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ que minimice $\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^\top)$ sujeto a $\boldsymbol{G}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{I}_k$.

3. (30 pts) Sea $\boldsymbol{X}$ una matriz aleatoria $n \times p$ y sea $\boldsymbol{P}$ matriz simétrica e idempotente $n \times n$ de rango $k \geq n$. Si $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_{n,p}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{\Sigma})$, muestre que $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} \sim \mathsf{W}_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$.