Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática.

Certamen No. 1 MAT-269 Análisis Multivariado

Profesor: Felipe Osorio. 28 de abril de 2011.

1. (20 puntos) Considere el estadístico

$$T = \sum_{i=1}^{m} \frac{(nX_i - n\mu_i)^2}{n\mu_i},$$

donde n es un entero positivo, $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ es un vector aleatorio tal que $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Omega}$, con $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T$ y $\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$ tal que las constantes no negativas μ_is satisfacen $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 1$.

   (a) Muestre que $\boldsymbol{\Omega}$ es una matriz singular.

   (b) Muestre que si $\sqrt{n}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Omega})$, entonces $T \sim \chi^2_{m-1}$.

2. (20 puntos) Si $\boldsymbol{A} \sim W_m(n, \boldsymbol{\Sigma})$, donde $n > m - 1$ y $\boldsymbol{\Sigma} > 0$. Muestre que el estimador máximo verosímil de $\boldsymbol{\Sigma}$ es $\frac{1}{n}\boldsymbol{A}$.

   Sugerencia: Recuerde que la densidad de una matriz $\boldsymbol{A}$ con distribución $W_m(n, \boldsymbol{\Sigma})$, está dada por

$$f(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2^{mn}\,\Gamma_m(n/2)}\, |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A}\}\, |\boldsymbol{A}|^{(n-m-1)/2}.$$

3. (30 puntos) Sea $\boldsymbol{X}$ una matriz aleatoria $n \times m$ y $\boldsymbol{P}$ una matriz $n \times n$ simétrica e idempotente de rango $k \geq m$. Si $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$, muestre que $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{X} \sim W_m(k, \boldsymbol{\Sigma})$.

   Sugerencia: Note que, si $\boldsymbol{P}$ es simétrica e idempotente, entonces existe una matriz $\boldsymbol{M}$ tal que $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$ y $\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_k$.

4. (30 puntos) Sea $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ muestra aleatoria desde $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ independiente de $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ muestra aleatoria desde $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$, donde $\boldsymbol{\Sigma}_1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_2$ son desconocidas y desiguales. Considere la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ contra la alternativa $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$.

   (a) Haga $\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Y}_i$, de modo que $\boldsymbol{Z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_n$ son vectores aleatorios independientes $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)$. A partir de $\boldsymbol{Z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_n$ contruya un estadístico T^2 apropiado para probar H_0. Indique la distribución de T^2.

   (b) Suponga $\boldsymbol{\Sigma}_1 = k\boldsymbol{\Sigma}_2$ con k conocido. Derive un estadístico T^2 de Hotelling para probar H_0.