MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado **Nombre:** ______________________

Certamen 1. Abril 5, 2023 **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (25 pts) Considere $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ un conjunto de datos con n observaciones, tal que $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^p$ para $i = 1, \dots, n$ y sea $\omega_1, \dots, \omega_n$ ponderaciones asociadas para cada una de las observaciones. Suponga,

$$\overline{\boldsymbol{x}}_n = \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n \omega_i \boldsymbol{x}_i, \qquad W_n = \sum_{i=1}^n \omega_i, \qquad \boldsymbol{Q}_n = \sum_{i=1}^n \omega_i (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}_n)(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}_n)^\top,$$

y $\boldsymbol{\delta}_n = \boldsymbol{x}_n - \overline{\boldsymbol{x}}_{n-1}$. Muestre que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_n &= \boldsymbol{Q}_{n-1} + U_n \boldsymbol{\delta}_n \boldsymbol{\delta}_n^\top, \\
\boldsymbol{Q}_n^{-1} &= \boldsymbol{Q}_{n-1}^{-1} - \frac{(\boldsymbol{Q}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\delta}_n)(\boldsymbol{Q}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\delta}_n)^\top}{U_n^{-1} + \boldsymbol{\delta}_n^\top \boldsymbol{Q}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\delta}_n},
\end{aligned}$$

siempre que $U_n^{-1} + \boldsymbol{\delta}_n^\top \boldsymbol{Q}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\delta}_n \neq 0$, con $U_n = \omega_n - \omega_n^2 / W_n$.

2. (25 pts) Suponga $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ un conjunto de datos con n observaciones p-variadas. Muestre que b_{1p} y b_{2p} son invariantes ante transformaciones de la forma $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A}$ matriz no singular, para $i = 1, \dots, n$.

3. (50 pts) Considere $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ independientes, tal que $\boldsymbol{x}_i \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$, para $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} \sim \mathsf{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Phi}),$$

sigue una distribución Wishart con n grados de libertad, matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2}\operatorname{E}(\boldsymbol{X}^\top)\operatorname{E}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{M}$ matriz $p \times p$ de parámetros de no centralidad, donde

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n^\top \end{pmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{A}$ matriz simétrica $n \times n$. Muestre que

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{X} \sim \mathsf{W}_p(r, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Phi}),$$

con $r = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A})$ y $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{M}$, si $\boldsymbol{A}$ es idempotente.

Sugerencia: Si $\boldsymbol{A}$ es matriz idempotente con rango r, entonces existe una matriz $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\top$ y $\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_r$. Además, puede ser útil:

$$\operatorname{vec}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{C}^\top \otimes \boldsymbol{A}) \operatorname{vec}(\boldsymbol{B}).$$