MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado **Nombre:** ____________________

Certamen 2. Junio 8, 2022 **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (30 pts) Sea $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ una muestra aleatoria desde una distribución $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \lambda\boldsymbol{\Sigma}_0)$, con $\boldsymbol{\Sigma}_0$ matriz conocida. Obtenga los estimadores ML de $\boldsymbol{\mu}$ y λ.

2. (30 pts) Considere $\boldsymbol{x} \sim \mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$, donde $\boldsymbol{\mu}$ satisface que $\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\mu} = 1$. Muestre que el estimador ML basado en esta única observación es $\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|$.

3. Suponga el modelo lineal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{1}_n\boldsymbol{\beta}_1^\top + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_2$, con $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{1}_n, \boldsymbol{X}_2)$ matriz $n \times p$ de rango p, $\boldsymbol{X}_2^\top\boldsymbol{1}_n = \boldsymbol{0}$ y las filas de $\boldsymbol{U}$ son IID $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

a. (20 pts) Muestre que los estimadores ML de $\boldsymbol{\beta}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ son $\overline{\boldsymbol{y}}$ y $(\boldsymbol{X}_2^\top\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2^\top\widetilde{\boldsymbol{Y}}$, respectivamente, donde $\widetilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{y}_1 - \overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{y}_2 - \overline{\boldsymbol{y}}, \dots, \boldsymbol{y}_n - \overline{\boldsymbol{y}})^\top$.

b. (20 pts) Obtenga el test de razón de verosimilitudes para probar $H_0 : \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{0}$