MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado **Nombre:** ____________________

Prueba 1. Mayo 4, 2017

Tiempo: 90 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (25 pts) Considere $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_{n,p}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}_p)$ con función característica,

$$\varphi_Z(\boldsymbol{T}) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{T}^\top\boldsymbol{T}\big), \qquad \boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times p},$$

y considere la transformación

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2},$$

donde $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son matrices definidas positivas de órdenes $n \times n$ y $p \times p$, respectivamente. Determine la función característica de $\boldsymbol{X}$.

Sugerencia: Recuerde que la función característica de una matriz aleatoria $r \times c$, $\boldsymbol{Y}$ es dada por:

$$\varphi_Y(\boldsymbol{T}) = \operatorname{E}\{\exp(i\operatorname{tr}\boldsymbol{T}^\top\boldsymbol{Y})\}, \qquad \boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{r\times c}.$$

2. (35 pts) Considere $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ vectores aleatorios, p-dimensionales, definidos como

$$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{1}_p z_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ y $z_i \sim \mathcal{N}_1(0, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\epsilon}_i \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Phi})$, con $\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{diag}(\phi_1, \dots, \phi_p)$. Suponga también que z_i y $\boldsymbol{\epsilon}_i$ son independientes, para $i = 1, \dots, n$.

a) Determine la distribución de $\boldsymbol{Y}_i$.

b) Obtenga el estimador de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^\top, \sigma^2, \boldsymbol{\phi}^\top)^\top$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ mediante maximizar la siguiente función objetivo:

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta}) = {} & -\frac{n}{2}\log|\boldsymbol{\Phi}| - \frac{n}{2}\boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{1}z_i)^\top\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{1}z_i) \\ & - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n z_i^2. \end{aligned}$$

3. (40 pts) Sea $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ una muestra aleatoria desde $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y considere la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \lambda\boldsymbol{\mu}_0$ con $\boldsymbol{\mu}_0$ fijado y $\boldsymbol{\Sigma}$ conocido.

a) Muestre que el MLE de λ restringido por la hipótesis H_0 es dado por:

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\overline{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{\mu}_0^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_0},$$

b) Obtenga el estadístico de razón de verosimilitudes para probar H_0.