Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática.

Certamen No. 2 MAT-269 Análisis Multivariado

Profesor: Felipe Osorio.
Ayudante: Francisco Cuevas.

2 de junio de 2011.

1. (20 puntos) Suponga que el vector aleatorio $p \times 1$ $\boldsymbol{X}$ tiene matriz de covarianza

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Halle los componentes principales poblacionales y sus varianzas.

2. (25 puntos) Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ vector aleatorio distribuído normal con media $\boldsymbol{\mu}$ y covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$. Suponga que $\boldsymbol{\Sigma}$ tiene un valor propio λ_1 de multiplicidad p. Considere observaciones $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$, $i = 1, \dots, n$, muestre que el estimador máximo verosímil $\widehat{\lambda}_1$ de λ_1 es dado por

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2, \qquad \text{con} \quad \overline{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

3. (25 puntos) Considere un modelo de análisis factorial

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad \boldsymbol{z}_i \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}), \quad \boldsymbol{\epsilon}_i \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Psi}), \quad i = 1, \dots, n,$$

y sea $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^T + \widehat{\boldsymbol{\Psi}}$, donde $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}$ son los estimadores máximo verosímiles de $\boldsymbol{\Gamma}$ y $\boldsymbol{\Psi}$, respectivamente. Muestre que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}) = p$.

4. (30 puntos) Sea $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}$, donde $\boldsymbol{X}$ es $n \times k$ de rango k, y las filas de $\boldsymbol{E}$ son iid $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Sea $\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_2$, donde $\boldsymbol{X}_2$ es $n \times k_2$. Derive el test de razón de verosimilitudes para probar $H_0 : \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{O}$.