**MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado** **Nombre:** __________________________

**Certamen 2. Julio 11, 2017**

**Tiempo: 90 minutos** **Profesor:** Felipe Osorio

---

**1. (30 pts)** Suponga que la matriz de covarianza de un vector aleatorio $p$-dimensional es dada por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\{(1-\rho)\boldsymbol{I} + \rho\boldsymbol{J}\}$$

Obtenga las componentes principales poblaciones y determine sus varianzas.

**2. (30 pts)** Considere un modelo de análisis factorial

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{z}_i \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{\epsilon}_i \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Psi})$, y $\boldsymbol{\Psi} = \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_p)$. Sea $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^\top + \widehat{\boldsymbol{\Psi}}$, con $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}$ los MLE de $\boldsymbol{\Gamma}$ y $\boldsymbol{\Psi}$, respectivamente. Muestre que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}) = p$.

*Recuerde que:* por el Teorema de Sherman-Morrison-Woodbury, tenemos

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}$$

**3. (40 pts)** Considere $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ vectores $p$-dimensionales representando los excesos de retorno para $p$ activos (o portfolio de activos), los que pueden ser descritos usando un *modelo de valoración de activos de capital* (CAPM) dado por:

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}x_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \qquad t = 1, \dots, n,$$

donde $x_t$ denota el exceso de retorno para el mercado. En este contexto, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ y $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, para $t = 1, \dots, n$.

**a)** Obtenga los MLE de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$.

**b)** Derive el test de razón de verosimilitudes para probar $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.