

MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado

Felipe Osorio

`fosorios.mat.utfsm.cl`

Departamento de Matemática, UTFSM



Horario:

Clases: Martes y Jueves, bloque 5-6 (10:55-12:05 hrs.), sala F265.

Contacto:

E-mail: felipe.osorios@usm.cl.

Material de clases:

Página del curso (GitHub): <https://github.com/faosorios/Curso-Multivariado>

Página personal: <http://fosorios.mat.utfsm.cl/teaching.html#MAT269>

Evaluación:

Se realizará **3 Certámenes** (06-Abril, 11-Mayo y 22-Junio).



Criterio de aprobación:

Sea NP el promedio de los Certámenes. Aquellos estudiantes que obtengan NP mayor o igual a 55 y todos los certámenes sobre 40, aprobarán la asignatura con nota final, $NF = NP$.

Criterio para rendir global:

En caso contrario, y siempre que $NP \geq 45$,¹ los estudiantes podrán rendir el certamen global (CG), en cuyo caso la nota final (NF) es calculada como sigue:

$$NF = 0.6 \cdot NP + 0.4 \cdot CG.$$

¹Si $NP < 45$ usted ha reprobado la asignatura.



Reglas adicionales

- ▶ Se llevará un **control de asistencia**.
- ▶ Se puede realizar **preguntas** sobre la materia en **cualquier momento**.
- ▶ Los alumnos deben **apagar/silenciar** sus **teléfonos celulares** durante clases.
- ▶ Conversaciones sobre asuntos ajenos a la clase no serán tolerados. Otros estudiantes tiene derecho a **asistir clases en silencio**.
- ▶ Alumnos que lleguen tarde o se retiren deben hacerlo en **silencio**.
- ▶ Al enviar algún **e-mail al profesor**, identificar el código de la asignatura en el asunto (**MAT269**).
- ▶ **E-mail** será el canal de **comunicación oficial** entre el profesor y los estudiantes.



Reglas: sobre los certámenes

- ▶ Todas las **hojas necesarias** para responder las pruebas **serán entregadas por el profesor**.
- ▶ Será permitido el uso de una **calculadora científica simple** (no del celular).
- ▶ Es derecho del estudiante conocer la **pauta de corrección** la que será publicada **en la página web del curso**.
- ▶ Use principalmente **lapiz pasta** (no utilice lapiz rojo).
- ▶ Pedidos de corrección **deben ser argumentados por escrito**.
- ▶ En modalidad online, **Certámenes** deben ser enviados en formato **PDF**.²
- ▶ **Cualquier tipo de fraude** en prueba (copia, uso de WhatsApp, suplantación, etc.) será llevado a **Comisión Universitaria**.

²En un único archivo, orientado en una dirección legible.



- ▶ Mantener la frecuencia de estudio de inicio a final del semestre. El ideal es estudiar el contenido luego de cada clase.
- ▶ Estudiar primeramente el contenido dado en clases, buscando apoyo en las referencias bibliográficas.
- ▶ Las referencias son fuentes de ejemplos y ejercicios. Resuelva una buena cantidad de ejercicios. No deje esto para la víspera de la prueba.
- ▶ Buscar las referencias bibliográficas al inicio del semestre, dando preferencia a las principales y complementarias.



- ▶ El requisito formal es [MAT-266: Análisis de Regresión](#).
- ▶ Adicionalmente usaremos algunas ideas desde [MAT-206: Inferencia Estadística](#).
- ▶ Se asume un conocimiento básico de los siguientes aspectos:
 - ▶ Vectores aleatorios.
 - ▶ Distribución normal multivariada.
 - ▶ Manipulación de matrices y vectores aleatorios.



- ▶ Inferencia en análisis multivariado.
 - ▶ Estimación y test de hipótesis para una muestra aleatoria desde $N_p(\mu, \Sigma)$.
- ▶ Técnicas multivariadas.
 - ▶ Regresión multivariada y GMANOVA.
 - ▶ Análisis de componentes principales.
 - ▶ Análisis factorial.
 - ▶ Métodos de clasificación y agrupamiento.
- ▶ Tópicos adicionales.*

³ Este es un curso **fundamental** donde exploramos métodos para abordar la inferencia estadística en análisis multivariado, **no** es un curso **enfocado** en el análisis de datos.



Referencias bibliográficas



Anderson, T.W. (2003).

An Introduction to Multivariate Statistical Analysis (3rd Ed.).

Wiley, New York.



Härdle, W.K., Simar, L. (2012).

Applied Multivariate Statistical Analysis (3rd Ed.).

Springer, New York.



Seber, G.A.F. (2004).

Multivariate Observations.

Wiley, New York.



Motivación mediante ejemplos

- ▶ ¿Existe competencia en el [mercado de AFPs](#) chileno?
- ▶ El desempeño de los estudiantes chilenos en el [SIMCE](#).
- ▶ Un problema de clasificación clásico, o por qué nos presta dinero el banco.
- ▶ Recordatorio: el [esquema de modelación](#).



Esto NO es una crítica al sistema de AFP...



Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) de Chile

Aplicación:

El **sistema de AFP** (o de **capitalización individual**) chileno está en vigor desde 1980.

Ahorros de los contribuyentes son administrados en un **sistema de multifondos**.

Existe **5 tipos de fondos** (A, B, C, D y E) divididos por la proporción del portafolio que es invertido en títulos de **renta variable**.

El fondo A tiene la mayor proporción de inversión en renta variable, la que **disminuye progresivamente** para los fondos B, C, D y E.

Conjunto de datos:

Rentabilidades mensuales de AFPs: **Cuprum**, **Habitat**, **PlanVital** y **ProVida** en el periodo de agosto/2005 a abril/2020.

Datos fueron obtenidos desde el sitio web de la superintendencia de pensiones (www.spensiones.cl)

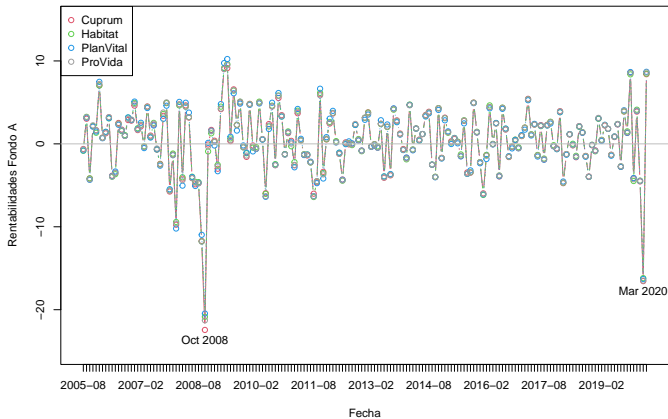
Conjunto de datos con **177 observaciones** y **4 variables** (para cada uno de los fondos).

Varias observaciones son identificadas como **outliers**.

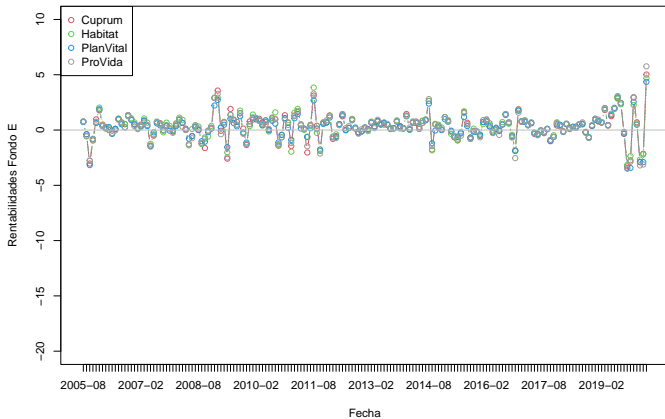
QQ-plot de distancias transformadas revelan la presencia de **colas pesadas**.



Rentabilidades de AFPs chilenas



Rentabilidades de AFPs chilenas

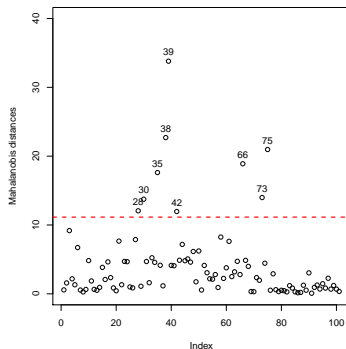


Identificando observaciones atípicas

En mercados emergentes como el chileno suele ocurrir periodos con **alta volatilidad**.

Existe una batería de procedimientos para detectar observaciones que presentan un comportamiento es **aberrante/atípico**.

Este tipo de observaciones puede tener un **efecto nefasto** sobre la inferencia estadística.⁴



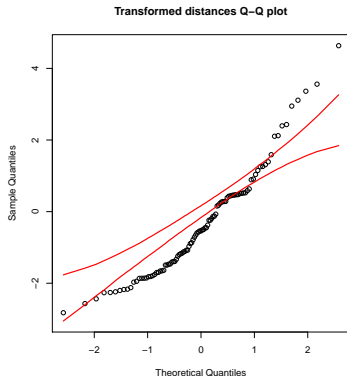
⁴Es decir, Ud. puede llegar a **conclusiones erróneas**!

Evaluando los supuestos distribucionales

El supuesto de normalidad es habitual en este tipo de problemas.

Es decir, suponga x_1, \dots, x_n una muestra aleatoria desde $N_p(\mu, \Sigma)$.

Usando test de hipótesis y técnicas gráficas se concluye que el supuesto de normalidad no es soportado por los datos.



Análisis multivariado usando la distribución t de Student

Características del problema:

- ▶ AFPs invierten esencialmente en la **misma cartera de inversiones**.
- ▶ Mercados emergentes suelen presentar **alta volatilidad**.
- ▶ Los datos son **bien modelados** usando distribuciones con colas pesadas.

Conclusiones:

- ▶ Aparentemente, **no existe competencia** en el mercado de AFP.
- ▶ Cálculo óptimo de los **porcentajes de inversión** en los distintos fondos.
- ▶ Evaluar la **igualdad entre razones de Sharpe**.



Desde 1988 el SIMCE evalúa los **resultados de aprendizaje** de los estudiantes del sistema de educación chileno.

Objetivos:

- ▶ Describir el **comportamiento del aprendizaje** de los estudiantes.
- ▶ Determinar si existe diferencias significativas entre el **tipo de dependencia** (municipal, subvencionado, particular).

Características del problema:

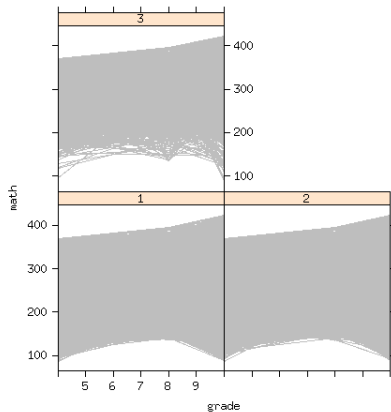
- ▶ Mediciones de un mismo individuo (estudiante) **a través del tiempo** (4º y 8º básico, 2º medio).⁵
- ▶ Datos disponibles para los años 2007, 2011 y 2013, pruebas de Lenguaje y Matemáticas.

⁵ Conocido como: **datos con estructura longitudinal**.



Datos del SIMCE

Perfiles individuales de los puntajes del SIMCE en matemáticas, organizados por tipo de dependencia.



Características del problema:

- ▶ Aproximadamente 132K estudiantes para ser analizados (base de datos de mediano porte).
- ▶ Crecimiento lineal (cuadrático?) a través del tiempo.
- ▶ Igual número de mediciones por individuo (datos balanceados).

Alternativas para análisis:

- ▶ Modelos con efectos-mixtos.
- ▶ Modelos multi-nivel.
- ▶ Modelo de curvas de crecimiento (GMANOVA).



Datos de Flores Iris (Anderson, 1935; Fisher, 1936)

Iris *setosa*



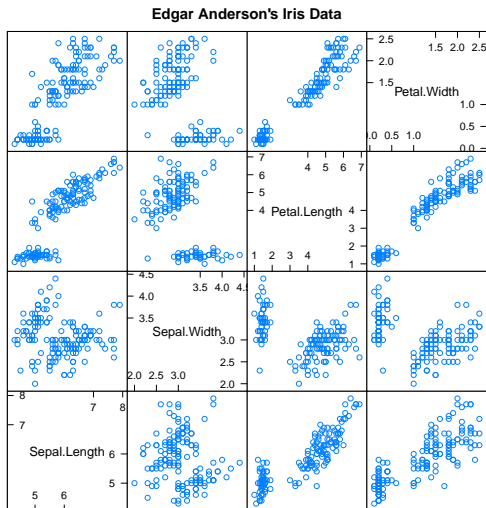
Iris *versicolor*



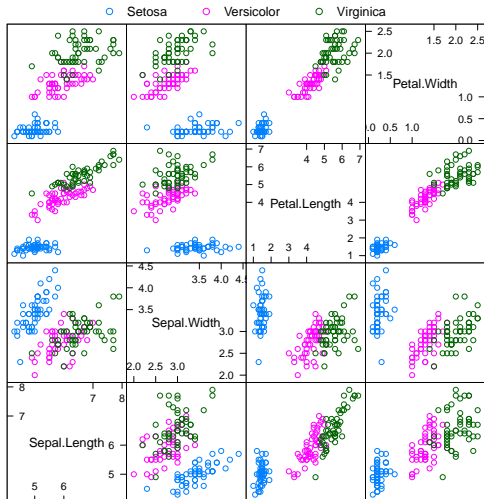
Iris *virginica*



Datos de Flores Iris (Anderson, 1935; Fisher, 1936)



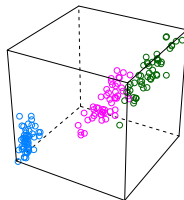
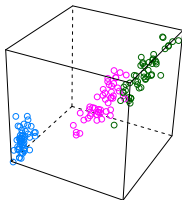
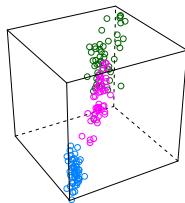
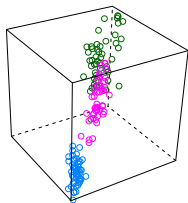
Datos de Flores Iris (Anderson, 1935; Fisher, 1936)



Scatter Plot Matrix



Datos de Flores Iris (Anderson, 1935; Fisher, 1936)



Datos de Flores Iris (Anderson, 1935; Fisher, 1936)

Datos observados:

Mediciones (cm) del largo y ancho de los **sépalos** y el largo y ancho de **pétalos** para 50 flores desde 3 especies de **Iris** (setosa, virginica y versicolor).

Objetivo:

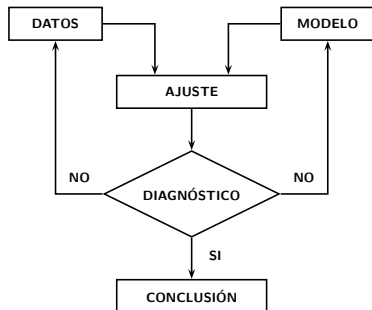
- ▶ Obtener una función que permita **discriminar** entre especies.
- ▶ Usando las medidas de una flor, **clasificarla** apropiadamente.

Características del problema:

- ▶ El análisis exploratorio revela una separación evidente en **2 grupos**.
- ▶ Técnicas más refinadas permiten identificar las 3 especies, p.ej.:
 - ▶ **Análisis discriminante**,
 - ▶ **Técnicas de clasificación** (Reconocimiento de patrones),
 - ▶ **Aprendizaje de máquina** (Máquinas de soporte vectorial, Data mining).



Esquema de Modelación Estadística



Recolección de datos: **Muestreo**.

Análisis exploratorio de datos.

Análisis Multivariado.

Técnicas de Regresión.

Series de Tiempo, entre (muchas) otras.

Inferencia Estadística.

Bondad de ajuste, técnicas gráficas.

Análisis de Sensibilidad.

Comuniqué sus resultados!

