Universidad de la República **Análisis Multivariado I**
Facultad de Ciencias Económicas y Administración **Primer semestre 2016**
Departamento de Métodos Matemático Cuantitativos

Práctico 1

1. Se consideran los vectores $v_1 = (1, 0, 2)'$, $v_2 = (1, 1, 2)'$, $v_3 = (2, 1, 6)'$.

   a) Calcule los vectores $-v_2, v_1 + v_3, v_2 + 4v_3$.

   b) Calcule la norma de $-3v_1$y $2v_2 - v_3$.

   c) Calcule los productos escalares $v_1'v_2$ y $v_2'v_3$

   d) Calcule la proyección de v_1 sobre v_2 y la proyección de v_1 sobre el subespacio generado por v_1 y v_2.

   e) Calcule el determinante de la matriz formada por v_1, v_2 y v_3.

2. Se consideran los vectores $v_1 = (1, 0, 0, 0, 1)', v_2 = (1, 1, 0, 0, 0)'$ y $v_3 = (0, 0, 0, 1, 1)'$

   a) Calcule la dimensión del subespacio generado por los tres vectores y dé la o las condiciones que debe verificar un vector para pertenecer a dicho subespacio.

   b) Halle el complemento ortogonal del subespacio de la parte a), halle una base del mismo y dé su dimensión.

   c) Demuestre que los vectores $v_1 + v_2, v_1 + v_3$ y $v_2 + v_3$ son linealmente independientes.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $A'A$, halle su determinante, su traza y su inversa. Hacer lo mismo para la matriz AA'.

4. Demuestre por multiplicación directa que

   a) $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$.
   Deducir que $(A + C)^{-1} = C^{-1}(A^{-1} + C^{-1})^{-1}A^{-1}$.

   b) $(I + A)^{-1} = I - (I + A^{-1})^{-1}$

   c) $(A + BCB')^{-1}BC = A^{-1}B(C^{-1} + B'A^{-1}B)$.

5. Demuestre que los valores propios de una matriz y de su transpuesta coinciden. ¿Vale lo mismo para los vectores propios? Justifique.

6. *a*) Calcule los valores y los vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y de su inversa.

   b) Halle la descomposición en valores singulares de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y de $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) Halle la descomposición de Choleski de la matriz $A'A$ siendo A la matriz del item b).

d) Halle la descomposición de Choleski de la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

7. Investigue si son o no diagonalizables las siguientes matrices. En caso afirmativo halle una matriz B y una matriz D diagonal tales que $A = BDB^{-1}$

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Para la matriz del item c) del ejercicio anterior calcule A^{100}.

9. *a*) Calcule la proyección ortogonal del vector $(1,1,3)$ sobre el espacio generado por las variables $(1,1,1)$ y $(0,1,2)$

   b) Exprese el vector anterior como combinación lineal de las dos variables y del vector ortogonal al vector proyección.

   c) Demuestre que el resultado anterior es equivalente a realizar la regresión simple entre la variable $(1,1,3)$ y la variable $(0,1,2)$.

10. Calcule la derivada respecto de $x = (x_1, x_2)'$ de

$$a)\ f_1(x) = 6x_1^3 - 3x_1x_2, \qquad b)\ f_2(x) = 2x_1^5x_2^3 + 4x_1^2x_2^2 - x_1x_2^5 + 3$$

$$c)\ g(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)', \qquad d)\ h(x) = \big(3f_1(x) + 4f_2(x), -2f_1(x)\big)'$$