Análisis Multivariado I
Componentes Principales (parte II) – Análisis Factorial

Mathias Bourel

DMMC - Facultad de Ciencias Económicas y Administración, Universidad de la República, Uruguay
IMERL - Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

16 de junio de 2016

Plan

Plan

1. Introducción
2. Componentes Principales
3. Ejemplo con R
4. Interpretación de los resultados

Introducción

La idea del *Análisis Factorial* consiste en considerar las filas o las columnas de la matriz de datos como nube de puntos de manera de simplificar el análisis de la misma sin modificar la estructura general queriendo ganar en simplicidad.

Usamos la palabra *factorial* en el sentido que la descomposición que se pretende obtener de la matriz de datos involucra combinaciones lineales de las variables (los factores).

Consideramos distintos tipos de Análisis Factorial:

- El *Análisis en Componentes Principales* (ACP) que trabaja con matrices de individuos con todas las variables continuas.
- El *Análisis de Correspondencias Simples* (ACS) que trabaja con tablas de contingencias entre dos variables.
- El *Análisis de Correspondencias Múltiples* (ACM), que generaliza lo anterior a más de dos variables.
- El *Análisis Discriminante* (AD).

Veremos que estos métodos se basan todos en el mismo principio: se buscará proyectar las nubes de puntos de filas y las nubes de puntos de columnas en nuevos espacios euclideos para simplificar y ganar en interpretabilidad y eventualmente tomar decisiones.

A partir de

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

- Los n puntos $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2p} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$ representan la nube de puntos de las filas en $\mathbb{R}^p$.
  Podemos querer ponderar los datos acordandoles un peso p_i y considerar un vector de probabilidad $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$.
- Los p puntos $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$ representan la nube de puntos de las columnas en $\mathbb{R}^n$.

Se trabajará por separado con estas nubes pero también se buscará relacionarlas.

Introducción

Recordamos esta transparencia importante:

- Si suponemos que $\overline{x_j} = \overline{x_k} = 0$ y que $s_j = s_k = 1$ (matriz centrada y reducida) entonces:

$$x_j' x_k = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_j})(x_{ik} - \overline{x_k}) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_j})(x_{ik} - \overline{x_k})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_j})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \overline{x_k})^2}} = r_{jk}$$

- Si suponemos que $\overline{x_j} = \overline{x_k} = 0$ se tiene que:

$$cos(x_j, x_k) = \frac{x_j' x_k}{||x_j'||||x_k||} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_j})(x_{ik} - \overline{x_k})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_j})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \overline{x_k})^2}} = r_{jk}$$

Le podemos dar pesos a las observaciones. Si **p** es el vector de probabilidades de la transparencia anterior, considero $P = diag(\mathbf{p})$. Si todos tienen el mismo peso $P = \frac{1}{n} I_n$ donde I_n es la identidad. Podemos definir las mismas nociones:

- El producto escalar entre dos variables centradas es su covarianza: $\langle x_j, x_k \rangle_P = x_j^{'} P x_k = Cov(x_j, x_k) \qquad ||x_j||_P^2 = x_j^{'} P x_j = Var(x_j)$
- El producto escalar entre dos variables centradas y reducidad es el coeficiente de correlación $\langle x_j, x_k \rangle_P = x_j^{'} P x_k = r_{jk}$

Plan

Volvamos a recordar el método de las componentes principales. Recordamos que:

- Cada eje factorial, de dirección a_k, es una combinación lineal de las variables originales. Inducen una nueva variable z_k que se llama *componente principal*. El valor en esta componente z_k del i-esimo individuo es

$$c_{ik} = \langle \mathbf{x_i}, a_k \rangle = \mathbf{x_i}' a_k = x_{i1}a_{k1} + x_{i2}a_{k2} + \cdots + x_{ip}a_{kp}$$

- Se construyen las componentes principales de manera a conservar la mayor parte de la información de la matriz de datos, deformando lo menos posible la información contenida en ella. Para eso, se trata de elegir los ejes que maximizan la proyección de la "inercia" de la nube de puntos.
- Las componentes principales son no correladas, es decir que los ejes son ortogonales.
- Trabajamos siempre con una matriz de datos centrada y se trata también siempre de reducir la matriz para darle la misma importancia a todas las variables.

Componentes principales

Se quiere tratar de condensar lo más posible la información de manera a retener variables que son realmente importantes y características. Para eso vamos a querer determinar un subespacio, llamado *subespacio factorial de la nube*, de dimensión q menor a p, y para ello necesitaremos de q nuevos ejes donde vamos a proyectar las nubes de puntos para que la información sea a la vez la más "visual" y fiel posible.
Tenemos entonces dos grandes etapas:

- Hacer un cambio de referencial entre el referencial definida por las variables viejas $x_1, \ldots, x_p$ y un referencial definida por p nuevos ejes, que pasan por el centro de gravedad de la nube de puntos, y que llamaremos *ejes factoriales*.
- nos quedamos con los l primeros ejes del nuevo sistema de coordenadas tratando de recuperar las relaciones más significativas de la matriz de datos.
- Los p ejes factoriales se determinan de la siguientes manera:
  - El primer eje es el eje en el cual la nube de puntos se deforma los menos posible cuando lo proyectamos. Eso se traduce de manera a conseguir el eje para el cual la inercia proyectada es máxima.
  - El segundo es ortogonal al primero, es el eje, después del primero sobre el cual la nube de puntos se deforme lo menos posible cuando la proyectamos.
  - etc.

Inercia de una nube de puntos

- La inercia de un punto i al punto A se define como

$$I(i,A) = d^2(i,A) \times p_i$$

  donde d es una distancia.

- La inercia de una nube de puntos N al punto A es

$$I(N,A) = \sum_{i=1}^{n} d^2(i,A) \times p_i$$

- La inercia de la nube de puntos N al centro de gravedad G es

$$I = \sum_{i=1}^{n} d^2(i,G) \times p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^{p} Var(x_j)$$

I es un indicador de la cantidad de información, de la dispersión o de la forma de la nube respecto del centro de gravedad: más I será grande, más la nube es dispersa alrededor del centro de gravedad.

- Si $I = 0$ entonces todos los individuos son idénticos.
- Si la matriz es centrada el centro de gravedad de los individuos es el origen.
- Puesto que $\sum_{j=1}^{p} Var(x_j) = tr(\Sigma)$ si las variables son centradas y reducidas entonces $I = p$.
- Para obtener la inercia en R: sum(diag(cov(X))).

El nuevo sistema de coordenadas pasa por el centro de gravedad G de la nube de puntos.

Queremos buscar el eje a_1 de manera que cuando proyectamos la nube de puntos sobre él la inercia sea máxima.

Sea $z_1 = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{i1}, \ldots, c_{n1})$ el vector de coordenadas de la proyección ortogonal de los individuos sobre el eje a_1:

$$c_{i1} = \langle \mathbf{x}_i, a_1 \rangle \quad \text{y en definitiva} \quad z_1 = Xa_1$$

Si I_1 es la inercia de la proyección de la nube de puntos:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i d^2(\mathbf{x}_i, G) = \sum_{i=1}^{n} p_i c_{i1}^2 = z_1^{'} P z_1 = Var(z_1) = a_1^{'} X' P X a_1 = a_1^{'} S a_1$$

siendo $S = X'PX$ la matriz de varianzas y covarianzas de X con la matriz de pesos P.

Si X es centrada entonces $S = \Sigma$ y si X es centrada y reducida entonces $S = R$.

Maximizamos I_1 y por lo tanto $a_1^{'} S a_1$ sujeto a $a_1^{'} a_1 = 1$ cuya solución consiste en tomar a_1 un vector propio unitario asociado al mayor valor propio λ_1 de S.

Entonces:

- $I_1 = a_1^{'} S a_1 = a_1^{'} \lambda_1 a_1 = \lambda_1$
- El vector de coordenadas de los n puntos de la nube sobre el primer eje es $z_1 = Xa_1$.
- $\overline{z}_1 = \mathbf{0}$ y $Var(z_1) = z_1^{'} P z_1 = a_1^{'} S a_1 = \lambda_1$.

Recordamos que dado que maximizamos las sucesivas inercias, condicionada a que los vectores sobre los que vamos proyectar tienen norma 1, la solución consiste en obtener $a_1, a_2, \ldots, a_p$ una sucesión de vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$ de S.

De la misma manera que

- $I_1 = a_1^{'} S a_1 = a_1^{'} \lambda_1 a_1 = \lambda_1$
- El vector de coordenadas de los n puntos de la nube sobre el primer eje es $z_1 = Xa_1$.
- $\bar{z}_1 = \mathbf{0}$ y $Var(z_1) = z_1^{'} P z_1 = a_1^{'} S a_1 = \lambda_1$.

Entonces:

- $I_k = a_k^{'} S a_k = a_k^{'} \lambda_k a_k = \lambda_k$
- El vector de coordenadas de los n puntos de la nube sobre el eje k-esimo es $z_k = Xa_k$.
- $\bar{z}_k = \mathbf{0}$ y $Var(z_k) = z_k^{'} P z_k = a_k^{'} S a_k = \lambda_k$.
- $Cov(z_k, z_{k'}) = 0$ si $k \neq k'$.

Cada eje factorial a_k (loading) representa una nueva variable z_k, de dimensión n, que se construye como combinación lineal de las variables originales. A z_k la llamamos *componente principal*. La coordenada (score) $c_{ik} = \langle \mathbf{x_i}, a_k \rangle = x_{i1}a_{k1} + x_{i2}a_{k2} + \cdots + x_{ip}a_{kp}$ de un individuo i dado sobre este eje corresponde al valor de la componente principal que toma este individuo.

La inercia total es $I = \sum I_k = \sum \lambda_k$
Si la matriz de datos es centrada y reducida entonces $S = R$ y $\sum \lambda_k = p$ y por lo tanto la inercia es p.

Análisis Dual

En el proceso anterior, encontramos los ejes factoriales trabajando con la nube de puntos de las filas (individuos). Veamos que pasa si trabajamos ahora con la nube de puntos de las columnas (variables).

Dado que queremos cambiar individuos por variables, es natural sustituir $X'PX \in \mathcal{M}_{p\times p}$ por $XX'P \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Veremos que:

- Los ejes factoriales que se encuentran en este caso son los mismos que los que se hallaron cuando consideramos la nube de puntos filas.

  Se prueba que los valores propios no nulos de esta matriz son los mismos que $X'PX$ ($= R$ en el caso centrado y reducida), y por lo tanto hay p ejes que retendremos.
- Se prueba además que la inercia calculada en este caso es la misma respectivamente para cada uno de los ejes, $I_k = \lambda_k$.

La clave pasa por un resultado de Algebra Lineal que consiste en mostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times p}$ entonces $A'A \in \mathcal{M}_{p\times p}$ y $AA' \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tienen los mismos valores propios no nulos.

Análisis Dual

La demostración es totalmente general, pero veamos como la aplicamos a nuestro caso.
Si multiplicamos en ambos lados por X a

$$X'PXa_k = \lambda_k a_k$$

entonces

$$X(X'PX)a_k = X(\lambda_k a_k)$$

y como $z_k = Xa_k$ se tiene que

$$(XX'P)z_k = \lambda_k z_k$$

Entonces los valores propios de $XX'P$ son idénticos a los de $X'PX$, es decir $\lambda_k = \mu_k$ y los restantes valores propios son nulos.

- Recordar que $a_k \in \mathbb{R}^p$ pero $z_k \in \mathbb{R}^n$.
- Lo que probamos anteriormente es bastante notable, porque a pesar que $X'PX \in \mathcal{M}_{p\times p}$ y $XX'P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices con tamaños distintos (¡una puede ser 2×2 y la otra 15×15!), tienen los mismos valores propios no nulos.
- Si bien los valores propios no nulos son los mismos, los vectores propios no lo son: los de $X'PX$ son de $\mathbb{R}^p$ y los de $XX'P$ de $\mathbb{R}^n$.

Entonces, y de la misma manera, buscando los ejes que maximicen la inercia proyectada de la nube de puntos de las variables, necesitamos una sucesión $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ de vectores que maximice

$$v_k PXX'Pv_k$$

de manera que

$$v_k^{'} Pv_k = 1 \text{ (es decir } v_k \text{ unitario)} \, \forall \, k = 1, \ldots, n$$

y sean ortogonales dos a dos. Sabemos cual es la solución de este problema, la sucesión es una sucesión de n vectores propios de $XX'P$ y cumple con todo lo que tiene que cumplir pues dicha matriz es simétrica. Por lo tanto, consideramos los vectores propios unitarios $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ asociados a los vaps $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ de $XX'P$.

Como $(XX'P)v_k = \lambda_k v_k$ y $(XX'P)z_k = \lambda_k z_k$ para todo $k = 1, \ldots, p$ entonces z_k y los ejes v_k son ambos vectores propios asociados al mismo valor propio y son por lo tanto colineales. Podemos entonces tomar

$$v_k = \frac{z_k}{||z_k||_P}$$

donde

$$||z_k||_P^2 = z_k' P z_k = (Xa_k)' P (Xa_k) = \lambda_k$$

y por lo tanto

$$v_k = \frac{z_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

Análisis Dual

Si llamamos $w_k = X'Pv_k = (d_{1k}, d_{2k}, \ldots, d_{jk}, \ldots, d_{pk}) \in \mathbb{R}^p$ para todo $k = 1, \ldots, p$ entonces w_k es un vector formado por las proyecciones de los puntos de la nube columnas (las p variables) sobre v_k. Los vectores w_k son los equivalentes de z_k pero para la nube de puntos columnas. Haciendo el mismo razonamiento que en una transparencia anterior, al ser vectores propios asociados al mismo valor propio los vectores $w_k \in \mathbb{R}^p$ y $a_k \in \mathbb{R}^p$ son colineales

$$a_k = \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \text{ (verificarlo!)} \quad \text{y por lo tanto } d_{jk} = \sqrt{\lambda_k} a_{jk}$$

Entonces

$$a_k = \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Rightarrow Xa_k = X\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

y por lo tanto

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X w_k$$

De la misma manera:

$$v_k = \frac{z_k}{\sqrt{\lambda_k}} \Rightarrow (X'P)v_k = (X'P)\frac{z_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

y por lo tanto

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (X'P) z_k$$

Siendo $z_k = (c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{ik}, \ldots, c_{nk}) \in \mathbb{R}^n$ y $w_k = (d_{1k}, d_{2k}, \ldots, d_{jk}, \ldots, d_{pk}) \in \mathbb{R}^p$ entonces tenemos las fórmulas de pasaje:

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X w_k \Rightarrow c_{ik} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{p} x_{ij} d_{jk} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (X' P) z_k \Rightarrow d_{jk} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_i c_{ik} \quad \forall\, i = j, \ldots, p$$

Además:

- $I_k = \lambda_k = \sum d_{jk}^2$
- De las transparencias anteriores, recordar que probamos que si X es centrada y reducida entonces $r_{x_j, z_k} = \sqrt{\lambda_k} a_{jk}$ y por lo tanto:

$$d_{jk} = r_{x_j, z_k}$$

Ejemplo

Se considera la matriz de datos estandarizada X

	x_1	x_2	x_3
$\mathbf{x_1}$	-1.095	1.426	-0.475
$\mathbf{x_2}$	-0.548	-0.475	1.426
$\mathbf{x_3}$	0.548	-0.095	-0.856
$\mathbf{x_4}$	1.095	-0.856	-0.095

y la matriz de factores columnas w_1, w_2, w_3

	Factor 1	Factor 2	Factor 3
1	0.894	-0.446	0.048
2	-0.972	C	0.051
3	0.178	0.983	0.034

- Encontramos el valor de C planteando que

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \Rightarrow (0{,}894)(-0{,}446) + (-0{,}972)C + (0{,}178)(0{,}983) = 0 \Rightarrow C \approx 0{,}230$$

- Los valores propios son

$$\lambda_1 = ||w_1||^2 = 0{,}894^2 + (-0{,}972)^2 + 0{,}178^2 \approx 1{,}776$$

$$\lambda_2 = ||w_2||^2 = (-0{,}446)^2 + 0{,}230^2 + 0{,}983^2 \approx 1{,}218$$

$$\lambda_3 = ||w_3||^2 = 0{,}048^2 + 0{,}051^2 + 0{,}034^2 \approx 0{,}006$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3.$

Ejemplo

- El vector unitario que define el eje factorial de mayor inercia donde se proyectan las filas es

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{1{,}776}} \begin{pmatrix} 0{,}894 \\ -0{,}972 \\ 0{,}178 \end{pmatrix}$$

- El porcentaje de la inercia definida por el 3er eje es

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \approx \frac{0{,}006}{3} = 0{,}002 = 0{,}2\,\%$$

- La proyección de la fila 2 correspondiente a la tabla 1 en el eje de mayor inercia es

$$c_{21} = \mathbf{x}_2^{'} a_1 = \mathbf{x}_2^{'} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \begin{pmatrix} -0{,}548 & -0{,}475 & 1{,}426 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}894 \\ -0{,}972 \\ 0{,}178 \end{pmatrix} \approx 0{,}169$$

Plan

Ejemplo (con princomp)

```
> #Consumición anual en franco de 8 tipo de comida/bebida (variables) por 8 categorias socio-profesionales.
>
> #Variables: 1 Pan común, 2 Otro tipo de pan, 3 Vino común, 4 Otro tipo de vino,
> # 5 Papas, 6 Vegetales, 7 Uva, 8 Plato preparado
>
> #Individus 1 Productor rural, 2 Asalariado rural, 3 Profesional independiente,
> #4 Ejecutivo superior, 5 Ejecutivo medio, 6 Empleado, 7 Obrero, 8 Desocupado
>
>
> X=t(matrix(c(167,1,163,23,41,8,6,6,162,2,141,12,40,12,4,15,119,6,69,56,39,5,
+ 13,41,87,11,63,111,27,3,18,39,103,5,68,77,32,4,11,30,111,4,72,66,34,6,10,28,130,
+ 3,76,52,43,7,7,16,138,7,117,74,53,8,12,20),nrow=8) )
> colnames(X)=c("PC", "OP", "VC","OV","P","Veg","Uva", "Platos")
> rownames(X)=c("PRodRu", "Asalrur","Prof","Ejsup","Ejmoy","Emp","Obr", "Des")
> X
         PC OP  VC  OV  P Veg Uva Platos
PRodRu  167  1 163  23 41   8   6      6
Asalrur 162  2 141  12 40  12   4     15
Prof    119  6  69  56 39   5  13     41
Ejsup    87 11  63 111 27   3  18     39
Ejmoy   103  5  68  77 32   4  11     30
Emp     111  4  72  66 34   6  10     28
Obr     130  3  76  52 43   7   7     16
Des     138  7 117  74 53   8  12     20
>
> princomp(X,cor=T)
Call:
princomp(x = X, cor = T)

Standard deviations:
      Comp.1       Comp.2       Comp.3       Comp.4       Comp.5       Comp.6       Comp.7       Comp.8
2.491575e+00 9.379133e-01 6.449505e-01 5.535835e-01 4.104162e-01 1.344162e-01 5.870919e-02 2.257138e-08

 8  variables and  8 observations.
```

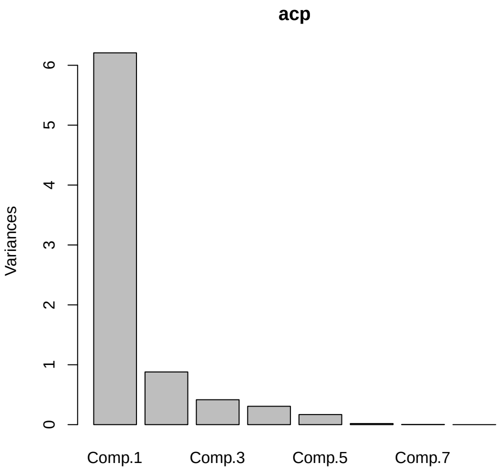
La salida es $\sqrt{\lambda_k}$ de cada una de las componentes

Ejemplo (con princomp)

```
> acp=princomp(X,cor=T)
> summary(acp)
Importance of components:
                          Comp.1    Comp.2     Comp.3     Comp.4     Comp.5      Comp.6       Comp.7       Comp.8
Standard deviation     2.4915752 0.9379133 0.64495048 0.55358348 0.41041625 0.134416177 0.0587091892 2.257138e-08
Proportion of Variance 0.7759934 0.1099602 0.05199514 0.03830683 0.02105519 0.002258464 0.0004308461 6.368342e-17
Cumulative Proportion  0.7759934 0.8859535 0.93794867 0.97625550 0.99731069 0.999569154 1.0000000000 1.000000e+00
```

- En el primer renglón aparece los $\sqrt{\lambda_k}$
- En el segundo renglón la proporción de varianza $\frac{I_k}{I}$
- En el tercer renglón esta proporción cumulada.
- $I = \sum \lambda_k = 6$.

Ejemplo (con princomp)



plot(acp)

Ejemplo (con princomp)

Las coordenadas de los vectores propios (son los a_k).

```
> loadings(acp)

Loadings:
       Comp.1 Comp.2 Comp.3 Comp.4 Comp.5 Comp.6 Comp.7 Comp.8
PC      0.391 -0.138  0.162 -0.119 -0.294  0.398 -0.107  0.729
OP     -0.349 -0.441  0.320 -0.218  0.265  0.521  0.423 -0.118
VC      0.349 -0.202  0.681        -0.246 -0.465  0.254 -0.180
OV     -0.374 -0.260         0.397  0.346 -0.423         0.575
P       0.246 -0.744 -0.558        -0.176 -0.108        -0.135
Veg     0.365 -0.128        -0.519  0.669 -0.185 -0.313
Uva    -0.373 -0.326  0.254        -0.272        -0.766 -0.159
Platos -0.362        -0.162 -0.708 -0.333 -0.360  0.225  0.219

               Comp.1 Comp.2 Comp.3 Comp.4 Comp.5 Comp.6 Comp.7 Comp.8
SS loadings     1.000  1.000  1.000  1.000  1.000  1.000  1.000  1.000
Proportion Var  0.125  0.125  0.125  0.125  0.125  0.125  0.125  0.125
Cumulative Var  0.125  0.250  0.375  0.500  0.625  0.750  0.875  1.000
>
```

Ejemplo (con princomp)

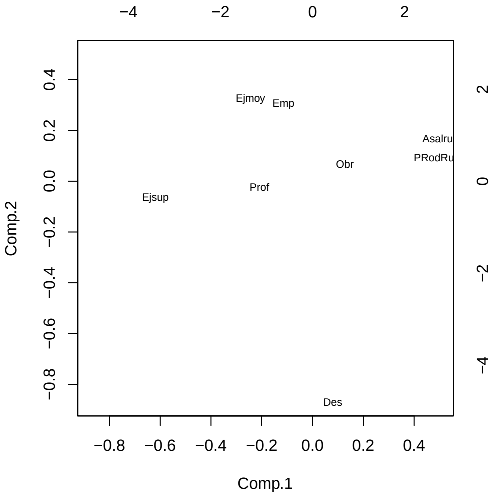
Las coordenadas de los individuos sobre los ejes (los $c_{ik} = \mathbf{x_i}' a_k$):

```
> acp$scores
            Comp.1      Comp.2     Comp.3      Comp.4      Comp.5       Comp.6       Comp.7        Comp.8
PRodRu   3.3715788  0.24581608  0.8395890  0.62172682 -0.57655700  0.021785204 -0.022311599  1.498801e-15
Asalrur  3.5217117  0.44739860  0.3515271 -0.91617942  0.49365924  0.004996441  0.031635398 -2.220446e-15
Prof    -1.4720309 -0.05851415 -0.5529570 -0.85448454 -0.74930243  0.058582704 -0.004644449 -1.609823e-15
Ejsup   -4.3587865 -0.17610682  1.0291875 -0.01517950  0.25877162  0.126514563 -0.015935125 -1.443290e-15
Ejmoy   -1.7180777  0.85664744 -0.1746349  0.41188554 -0.03988644 -0.139997633  0.116965074 -2.595146e-15
Emp     -0.8065346  0.80852679 -0.3448490  0.06912202  0.20594611 -0.195710003 -0.109502701  9.339751e-15
Obr      0.8991001  0.18303912 -0.9776683  0.55082419  0.29317809  0.233721990 -0.005887291 -3.441691e-15
Des      0.5630391 -2.30680707 -0.1701944  0.13228491  0.11419083 -0.109893267  0.009680694  4.024558e-16
```

Ejemplo

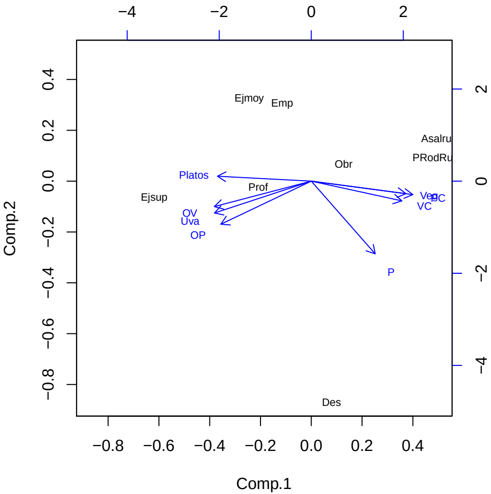
Coordenadas de los individuos sobre los ejes factoriales:

```
> biplot(acp, cex=0.7,col=c(1,0))
```



Coordenadas de los individuos sobre los ejes factoriales y proyección de las variables originales:

```
> biplot(acp, cex=0.7,col=c(1,4))
```



Las coordenadas de las variables sobre los ejes factoriales es

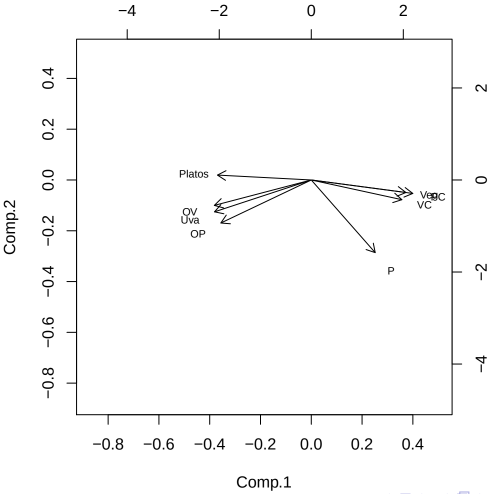
$$d_{jk} = r(x_j, z_k)$$

```
> cor(X,acp$scores)
          Comp.1      Comp.2      Comp.3      Comp.4     Comp.5       Comp.6       Comp.7       Comp.8
PC      0.9749797 -0.12926598  0.10429757 -0.06606998 -0.1206810  0.053463727 -0.006277188 -0.050156302
OP     -0.8687483 -0.41323074  0.20635173 -0.12063082  0.1089416  0.069991068  0.024838650 -0.123257316
VC      0.8700402 -0.18916036  0.43897378  0.01598936 -0.1008460 -0.062470185  0.014907633  0.015617014
OV     -0.9309151 -0.24414749  0.04739248  0.21952071  0.1418418 -0.056840057  0.001957682  0.032209797
P       0.6138529 -0.69764474 -0.35966296  0.04096049 -0.0721205 -0.014482890  0.005485109 -0.082240510
Veg     0.9089814 -0.12007291  0.02089707 -0.28724855  0.2746472 -0.024859138 -0.018382280 -0.022042647
Uva    -0.9294859 -0.30574089  0.16397854 -0.03526677 -0.1114413  0.002186234 -0.044965573 -0.003946343
Platos -0.9011429  0.04710881 -0.10428318 -0.39199413 -0.1366334 -0.048422745  0.013207567 -0.023521898
```

Ejemplo

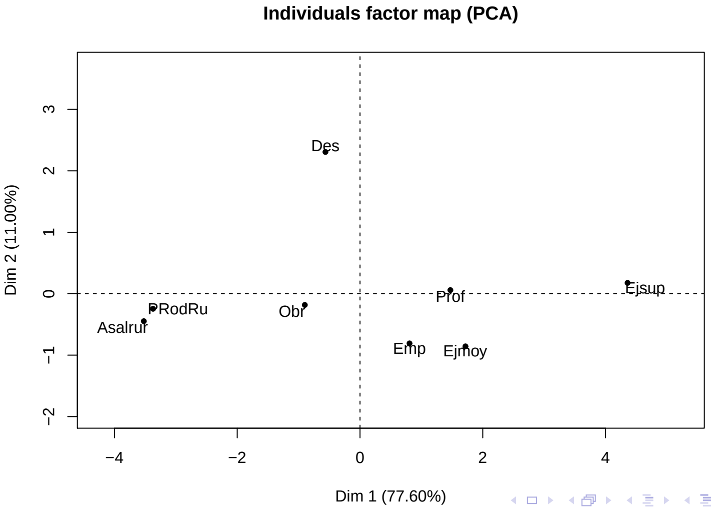
```
> biplot(acp, cex=0.7,col=c(0,1))
```

(con $c(0,1)$ activo las variables y escondo los individuos)



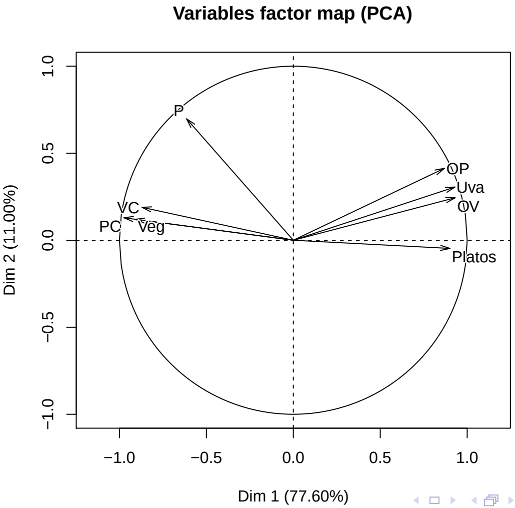
Mismo ejemplo con FactoMineR

```
> library(FactoMineR)
> acp1=PCA(X)
```



Mismo ejemplo con FactoMineR

```
> library(FactoMineR)
> acp1=PCA(X)
```



Mismo ejemplo con FactoMineR

Valores propios y varianza explicada por los ejes.

```
> acp1$eig
       eigenvalue percentage of variance cumulative percentage of variance
comp 1 6.207946839            77.59933549                          77.59934
comp 2 0.879681393            10.99601741                          88.59535
comp 3 0.415961123             5.19951404                          93.79487
comp 4 0.306454670             3.83068337                          97.62555
comp 5 0.168441497             2.10551872                          99.73107
comp 6 0.018067709             0.22584636                          99.95692
comp 7 0.003446769             0.04308461                         100.00000
```

observar que son bien los cuadrados de los valores que se obtienen con la función princomp.

Las coordenadas de los individuos sobre los ejes (los $c_{ik} = \mathbf{x_i}' a_k$):

```
> acp1$ind$coord
             Dim.1       Dim.2      Dim.3       Dim.4       Dim.5
PRodRu  -3.3715788 -0.24581608  0.8395890 -0.62172682  0.57655700
Asalrur -3.5217117 -0.44739860  0.3515271  0.91617942 -0.49365924
Prof     1.4720309  0.05851415 -0.5529570  0.85448454  0.74930243
Ejsup    4.3587865  0.17610682  1.0291875  0.01517950 -0.25877162
Ejmoy    1.7180777 -0.85664744 -0.1746349 -0.41188554  0.03988644
Emp      0.8065346 -0.80852679 -0.3448490 -0.06912202 -0.20594611
Obr     -0.8991001 -0.18303912 -0.9776683 -0.55082419 -0.29317809
Des     -0.5630391  2.30680707 -0.1701944 -0.13228491 -0.11419083
```

Coordenadas de las variables sobre los ejes factoriales (los d_{jk}):

```
> acp1$var$coord
            Dim.1       Dim.2       Dim.3       Dim.4      Dim.5
PC     -0.9749797  0.12926598  0.10429757  0.06606998  0.1206810
OP      0.8687483  0.41323074  0.20635173  0.12063082 -0.1089416
VC     -0.8700402  0.18916036  0.43897378 -0.01598936  0.1008460
OV      0.9309151  0.24414749  0.04739248 -0.21952071 -0.1418418
P      -0.6138529  0.69764474 -0.35966296 -0.04096049  0.0721205
Veg    -0.9089814  0.12007291  0.02089707  0.28724855 -0.2746472
Uva     0.9294859  0.30574089  0.16397854  0.03526677  0.1114413
Platos  0.9011429 -0.04710881 -0.10428318  0.39199413  0.1366334
```

Plan

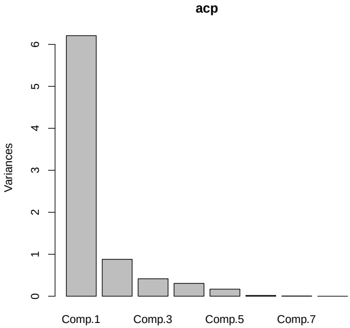
Para interpretar los resultados, debemos:

- Elegir la cantidad de ejes factoriales con los cuales nos quedamos.
- Hacer los gráficos.
- Dar un nuevo significado a las nuevas variables.
- Evaluar los resultados obtenidos.

Elección de la cantidad de ejes

Esencialmente hay dos criterios:

- Criterio del codo. Se seleccionan los ejes antes del decaimiento menor de la varianza.



- Criterio de Kaiser. Se seleccionan los ejes cuya inercia es mayor a la inercia media I/p. Si la matriz es centrada y reducida, se retienen los ejes cuyos valores propios son mayores que 1.

En la practica se retienen los ejes que el usuario sabe interpretar.

Interpretación ejes

Para cada eje que se retiene y cada nube, miramos cuales son los variables que participan más a la formación del eje y cuales son los individuos que contribuyen más a la formación del eje.
Se mide esta contribución respecto de la inercia del eje. Si estos individuos tienen una contribución superior a la media, los mismos dan un sentido al eje.

- La contribución del individuo i a la construcción del eje k es

$$ctr_k(i) = \frac{I(i)}{I_k} = \frac{p_i c_{ik}^2}{\lambda_k}$$

  La suma de las contribuciones da 1. Se suelen retener los individuos cuya contribución es mayor que $1/n$ en valor absoluto. Si todos los individuos tienen igual peso, entonces retenemos los individuos tales que $|c_{ik}| > \sqrt{\lambda_k}$

- La contribución de la variable x_j a la construcción del eje k es

$$ctr_k(x_j) = \frac{I(x_j)}{I_k} = \frac{d_{jk}^2}{\lambda_k} = \frac{(\sqrt{\lambda_k} a_{jk})^2}{\lambda_k} = a_{jk}^2$$

  La suma de las contribuciones da 1. Se suelen retener las variables cuya contribución es mayor que $1/p$ en valor absoluto, es decir tales que $|a_{jk}| > 1/\sqrt{p}$

  Si la matriz de datos es estandarizada, son las variables proximas al borde de la circunferencia que contribuyen más a la construcción del eje, puesto que

$$d_{jk}^2 = r_{x_j, z_k}^2$$

Interpretación de los ejes, ejemplo

Interpretación del primer eje. Contribución de los individuos. $c_{i1} > \sqrt{\lambda_1} = 2{,}491575$

```
> acp1$eig
       eigenvalue percentage of variance cumulative percentage of variance
comp 1 6.207946839            77.59933549                          77.59934
comp 2 0.879681393            10.99601741                          88.59535
comp 3 0.415961123             5.19951404                          93.79487
comp 4 0.306454670             3.83068337                          97.62555
comp 5 0.168441497             2.10551872                          99.73107
comp 6 0.018067709             0.22584636                          99.95692
comp 7 0.003446769             0.04308461                         100.00000

> sqrt(acp1$eig[1,1])
[1] 2.491575
> acp1$ind$contrib
            Dim.1       Dim.2      Dim.3        Dim.4      Dim.5
PRodRu  22.889096  0.85862826 21.1831585 15.766778699 24.6686523
Asalrur 24.972938  2.84428985  3.7134275 34.237720045 18.0848730
Prof     4.363107  0.04865263  9.1884034 29.781885764 41.6653666
Ejsup   38.255441  0.44069383 31.8307079  0.009398506  4.9692885
Ejmoy    5.943573 10.42770773  0.9164726  6.919852720  0.1180624
Emp      1.309809  9.28909571  3.5736754  0.194884165  3.1475171
Obr      1.627714  0.47607181 28.7236966 12.375700062  6.3785789
Des      0.638321 75.61486019  0.8704580  0.713780038  0.9676612
```

PRodRu, Asalrur, Ejsup son los individuos que contribuyen más a la construcción del primer eje.

Interpretación de los ejes, ejemplo

```
> a$ind$coord
            Dim.1       Dim.2      Dim.3       Dim.4       Dim.5
PRodRu  -3.3715788 -0.24581608  0.8395890 -0.62172682  0.57655700
Asalrur -3.5217117 -0.44739860  0.3515271  0.91617942 -0.49365924
Prof     1.4720309  0.05851415 -0.5529570  0.85448454  0.74930243
Ejsup    4.3587865  0.17610682  1.0291875  0.01517950 -0.25877162
Ejmoy    1.7180777 -0.85664744 -0.1746349 -0.41188554  0.03988644
Emp      0.8065346 -0.80852679 -0.3448490 -0.06912202 -0.20594611
Obr     -0.8991001 -0.18303912 -0.9776683 -0.55082419 -0.29317809
Des     -0.5630391  2.30680707 -0.1701944 -0.13228491 -0.11419083
```

Interpretación de los ejes, ejemplo

Interpretación del primer eje. Contribución de las variables ($1/\sqrt{8} \approx 0{,}35$).

```
> a$var$contrib #devuelve porcentajes, la suma de cada columna es 100
           Dim.1      Dim.2      Dim.3       Dim.4     Dim.5
PC     15.312396  1.8995166  2.6151444  1.42443318  8.646269
OP     12.157378 19.4115329 10.2367831  4.74843319  7.045927
VC     12.193565  4.0675682 46.3259598  0.08342491  6.037657
OV     13.959573  6.7760892  0.5399656 15.72478652 11.944270
P       6.069888 55.3277802 31.0984451  0.54747464  3.087936
Veg    13.309507  1.6389460  0.1049827 26.92461130 44.781774
Uva    13.916742 10.6262892  6.4642966  0.40584971  7.372980
Platos 13.080951  0.2522777  2.6144227 50.14098653 11.083187

> sqrt(a$var$contrib[,1])# Son los loadings de la primera componente (en val. abs)
      PC       OP       VC       OV        P      Veg      Uva   Platos
3.913106 3.486743 3.491929 3.736251 2.463714 3.648220 3.730515 3.616760

> a$var$coord #los d_{jk}
            Dim.1       Dim.2       Dim.3       Dim.4      Dim.5
PC     -0.9749797  0.12926598  0.10429757  0.06606998  0.1206810
OP      0.8687483  0.41323074  0.20635173  0.12063082 -0.1089416
VC     -0.8700402  0.18916036  0.43897378 -0.01598936  0.1008460
OV      0.9309151  0.24414749  0.04739248 -0.21952071 -0.1418418
P      -0.6138529  0.69764474 -0.35966296 -0.04096049  0.0721205
Veg    -0.9089814  0.12007291  0.02089707  0.28724855 -0.2746472
Uva     0.9294859  0.30574089  0.16397854  0.03526677  0.1114413
Platos  0.9011429 -0.04710881 -0.10428318  0.39199413  0.1366334
```

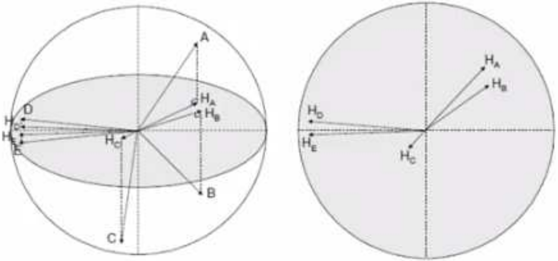
Interpretación de los ejes, ejemplo

La primer componente mide la repartición de la consumición entre alimentos básicos (PC,VC,Veg) y alimentos más refinados (OP, OV, Uva, Platos) y contraponen los ejecutivos superiores a los trabajadores rurales.

El segundo eje es más característico de la consumición de papas, comida generalmente consumida por inactivos.

Variables e individuos bien representadas - Calidad de la proyección

Vamos a querer ver si los individuos y las variables están bien proyectados sobre el plano factorial. Eso nos permite interpretar la proximidad global.



$r(A, B) = \cos(A, B)$ y si $\cos(A, B) \approx \cos(H_A, H_B)$ si las variables están bien proyectadas.
Sólo las variables bien proyectadas (cerca del eje y del borde del círculo) pueden ser correctamente interpretadas.
Lo mismo en cuanto a los individuos. Si dos individuos están mal proyectados, quizás estén lejos en el espacio de partido.

1. **Calidad de representación de los individuos.** Se mide si $\mathbf{x}_i$ es próximo a su proyección sobre el eje o el plano factorial con el angulo que forman. Sobre el eje k-esimo la calidad de representación de $\mathbf{x_i}$ es

$$cal_k(i) = \cos^2(\theta_{ik}) = \frac{p_i c_{ik}^2}{||\mathbf{x}_i||^2}$$

Cuando este coseno está cerca de 1, es decir el angulo es 0 o π el individuo está bien representado. En caso contrario el coseno está cerca de cero y el individuo mal representado. Sobre el plano factorial la calidad de la representación es

$$cal_{k_1,k_2}(i) = cal_{k_1}(i) + cal_{k_2}(i)$$

2. **Calidad de representación de las variables.** De la misma manera la calidad de la representación de la variable x_j sobre el eje k es:

$$cal_k(x_j) = \cos^2(\theta_{jk}) = \frac{d_{jk}^2}{||x_j||^2}$$

y si la matriz de datos es centrada reducida $d_{jk}^2 = r_{jk}^2$.

```
> (a$var$coord[,1])^2==a$var$cos2[,1]
   PC     OP     VC     OV      P    Veg    Uva Platos
 TRUE   TRUE   TRUE   TRUE   TRUE   TRUE   TRUE   TRUE
```

Una variable está bien representada cuando está cerca del borde del circulo de correlación y del eje, y en caso que esté proxima el origen está mal representada. Las variables que contribuyen más a la construcción del eje son aquellas que están mejor representadas y al revez: aquellas que contribuyen menos son las que no tienen una buena representación. Esto es porque $cal_k(x_j) = \frac{d_{jk}^2}{||x_j||^2}$ y $ctr_k(x_j) = \frac{d_{jk}^2}{\lambda_k}$.

Descripción de las dimensiónes por las variables

A mayor correlación las variables están muy ligadas a los nuevos ejes. A la derecha tenemos los p-valores que nos indican si el coeficiente de correlación es significativamente distinto de cero.

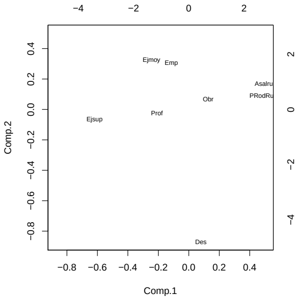
```
> dimdesc(a,axes=c(1,2))
$Dim.1
$Dim.1$quanti
       correlation      p.value
OV       0.9309151 7.821882e-04
Uva      0.9294859 8.308315e-04
Platos   0.9011429 2.239726e-03
OP       0.8687483 5.110853e-03
VC      -0.8700402 4.966446e-03
Veg     -0.9089814 1.758745e-03
PC      -0.9749797 3.842664e-05


$Dim.2
$Dim.2$quanti
     correlation p.value

> dimdesc(a,axes=c(1,2),p=0.2)
$Dim.1
$Dim.1$quanti
       correlation      p.value
OV       0.9309151 7.821882e-04
Uva      0.9294859 8.308315e-04
Platos   0.9011429 2.239726e-03
OP       0.8687483 5.110853e-03
P       -0.6138529 1.054770e-01
VC      -0.8700402 4.966446e-03
Veg     -0.9089814 1.758745e-03
PC      -0.9749797 3.842664e-05


$Dim.2
$Dim.2$quanti
  correlation    p.value
P   0.6976447 0.05437981
```

Calidad de la representación

Mirar la calidad de la representación permite mirar las proximidades de los puntos bien representados en el eje factorial.

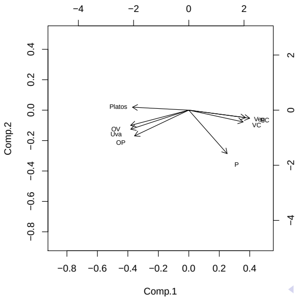
1. La proximidad entre dos individuos bien representados indica un parecer entre estos individuos en cuanto a los valores que toman las variables. Si la calidad de representación entre estos dos individuos es buena, la proximidad que se observa es real. Si los individuos no están bien representados, no se puede interpretar nada en cuanto a su proximidad.
2. La proximidad entre dos variables bien representadas (cerca del borde del círculo y del eje) es una aproximación de su correlación: si están cercanas están correladas positivamente, si están opuestas negativamente, y si son ortogonales no están correladas.

```
> a$ind$cos2
             Dim.1        Dim.2       Dim.3        Dim.4        Dim.5
PRodRu  0.88444010 0.0047013477 0.054844774 3.007468e-02 0.0258634411
Asalrur 0.89805821 0.0144939287 0.008947765 6.077961e-02 0.0176462090
Prof    0.57459845 0.0009079299 0.081079929 1.936150e-01 0.1488829157
Ejsup   0.94181776 0.0015374041 0.052507908 1.142223e-05 0.0033194718
Ejmoy   0.75288231 0.1871740871 0.007778640 4.327076e-02 0.0004057814
Emp     0.42778496 0.4299008580 0.078205503 3.142044e-03 0.0278924499
Obr     0.36060411 0.0149452245 0.426380807 1.353445e-01 0.0383422502
Des     0.05551846 0.9319290611 0.005072836 3.064650e-03 0.0022836142
```



ejemplo

```
> a$var$cos2
          Dim.1      Dim.2        Dim.3        Dim.4       Dim.5
PC     0.9505854 0.01670969 0.0108779840 0.0043652420 0.014563904
OP     0.7547236 0.17075964 0.0425810378 0.0145517953 0.011868265
VC     0.7569700 0.03578164 0.1926979829 0.0002556595 0.010169921
OV     0.8666029 0.05960800 0.0022460470 0.0481893426 0.020119107
P      0.3768154 0.48670819 0.1293574416 0.0016777616 0.005201366
Veg    0.8262471 0.01441750 0.0004366874 0.0825117286 0.075431090
Uva    0.8639440 0.09347749 0.0268889606 0.0012437454 0.012419159
Platos 0.8120585 0.00221924 0.0108749822 0.1536593947 0.018668686
```



Conclusión

El Análisis de Componentes Principales permite analizar las correlaciones entre variables. Se construyen nuevas variables no correladas con varianza importante.

Sin embargo si bien este análisis permite visualizar las correlaciones, las mismas son visibles unicamente sobre planos lo que complica la interpretabilidad si la cantidad de variables es grande y las relaciones entre las mismas más complejas.

Referencias

- D. Peña, *Analisis de Datos Multivariantes*, Mac Graw Hill, 2002.
- J. Blanco, *Introducción al Análisis Multivariado*, Instituto de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Administración, Universidad de la República.