EJERCICIO 1

Parte 1: derivar el estadístico de razón de verosimilitud para la prueba de igualdad de medias.

La matriz de información tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_{111} & x_{121} & \cdots & x_{1p1} \\ x_{211} & x_{221} & \cdots & x_{2p1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_1 11} & x_{n_1 21} & \cdots & x_{n_1 p1} \\ x_{112} & x_{122} & \cdots & x_{1p2} \\ x_{212} & x_{222} & \cdots & x_{2p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_2 11} & x_{n_2 21} & \cdots & x_{n_2 p1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{11k} & x_{12k} & \cdots & x_{1pk} \\ x_{21k} & x_{22k} & \cdots & x_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k 1k} & x_{n_k 2k} & \cdots & x_{n_k pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_1 \\ \mathbb{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{X}_k \end{bmatrix}$$

$$con\ i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p \quad g = 1, \dots, k \ con\ n = \sum_{g=1}^{k} n_g$$

Donde cada $\mathbb{X}_g$ representa la sub-matriz que contiene los datos provenientes de la población g

$$X_g \sim N_p(\mu_g; \mathbf{\Sigma}_g) \ \ con\ i = 1, \dots, n\ y\ g = 1, \dots, k$$

La función de densidad multivariada es:

$$f_X(x) = (2\pi)^{-p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(x-\mu)\right\}$$

Asumiendo que $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}_2 = \cdots = \mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{\Sigma}$

La prueba puede plantearse de la siguiente forma:

$$H0)\ \vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2 = \cdots = \vec{\mu}_k = \vec{\mu}_0 \qquad Versus \qquad H1)\ \exists \vec{\mu}_g \neq \vec{\mu}_0$$

La verosimilitud bajo H0 cierta y asumiendo Σ conocida será:

$$L(\vec{\mu}_0;\ \mathbf{\Sigma}|\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_i - \vec{\mu}_0)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}_i - \vec{\mu}_0)\right\}$$

La cual puede expresarse en término logarítmicos, y remplazando la matriz de varianzas y covarianzas por su expresión máximo verosímil como:

$$l(\vec{\mu}_0;\ \mathbf{\Sigma}|\mathbb{X}) = -\frac{n}{2} log|\mathbf{S}| - \frac{np}{2}$$

La verosimilitud bajo H1 cierta y asumiendo Σ conocida será:

$$L(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots, \vec{\mu}_k;\ \mathbf{\Sigma}|\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^{n_1} f_{\mathbb{X}_1}(x_{i1}) * \prod_{i=1}^{n_2} f_{\mathbb{X}_2}(x_{i2}) * \dots * \prod_{i=1}^{n_k} f_{\mathbb{X}_k}(x_{ik}) =$$

$$= \prod_{g=1}^{k} \prod_{i=1}^{n_g} (2\pi)^{-p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_{ig} - \vec{\mu}_g)' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_{ig} - \vec{\mu}_g)\right\}$$

La cual se maximiza cuando: $\bar{\vec{x}}_g = \vec{\mu}_g$

$$= \prod_{g=1}^{k} \prod_{i=1}^{n_g} (2\pi)^{-p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-np/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-n/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{g=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_g} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)\right\}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{g=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_g} \left[(\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)\right] = tr\left\{\sum_{g=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_g} \left[(\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{g=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_g} tr\left[\mathbf{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)' (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)\right] = tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{W})$$

Si llamamos W a la matriz de suma de cuadrados dentro de los grupos:

$$W = \sum_{g=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_g} (\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)(\vec{x}_{ig} - \bar{\vec{x}}_g)'$$

Con esto, la función de verosimilitud bajo H1 nos queda:

$$L(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots, \vec{\mu}_k;\ \mathbf{\Sigma}|\mathbb{X}) = (2\pi)^{-np/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-n/2} * exp\left\{-\frac{n}{2} tr\left(\mathbf{\Sigma}^{-1} W/_n\right)\right\}$$

O, en términos logarítmicos:

$$l(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots, \vec{\mu}_k;\ \mathbf{\Sigma}|\mathbb{X}) = -\frac{np}{2} log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(|\mathbf{\Sigma}|) - \frac{n}{2} * tr\left(\frac{\mathbf{\Sigma}^{-1} W}{n}\right)$$

La matriz de varianzas y covarianzas común cuando la media es distinta (es decir, bajo H_1), se estima de la siguiente forma:

$$\mathbf{S}_w = \frac{\mathbf{W}}{n}$$

Por lo que obtenemos:

$$l(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots, \vec{\mu}_k;\ \mathbf{\Sigma}|\mathbb{X}) = -\frac{np}{2} - \frac{n}{2}\log(|\mathbf{S}_w|)$$

Recordando que el cociente de verosimilitudes adquiere la siguiente forma:

$$RV = \frac{L(H_0)}{L(H_1)}$$

O, expresada en forma logarítmica:

$$RV = -2[l(H_0) - l(H_1)]$$

Obtenemos que:

$$RV = -2\left[-\frac{n}{2}log(|\mathbf{S}|) - \frac{np}{2} + \frac{np}{2} + \frac{n}{2}\log\left(\left|\mathbf{S}_{pl}\right|\right)\right] =$$

$$= -n\left[-log|\mathbf{S}| + \log\left(\left|\mathbf{S}_{pl}\right|\right)\right] = n\left[log(\mathbf{S}) - \log\left(\left|\mathbf{S}_{pl}\right|\right)\right] = n * log\left[\frac{|\mathbf{S}|}{\left|\mathbf{S}_{pl}\right|}\right]$$

El cociente distribuye chi-cuadrado:

$$RV = n * log\left[\frac{|\mathbf{S}|}{\left|\mathbf{S}_{pl}\right|}\right] \sim \chi^2_g$$

Donde sus grados de libertad se obtienen como la diferencia entre las dimensiones de los espacios paramétricos de H_0 (es decir: Ω_0), y de H_1 (es decir: Ω).

$$g = \dim(\Omega) - \dim(\Omega_0) = \left[p + \frac{p(p+1)}{2}\right] - \left[kp + \frac{p(p+1)}{2}\right] = p(k-1)$$

Por lo tanto:

$$H0)\ \vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2 = \cdots = \vec{\mu}_k = \vec{\mu}_0 \quad Versus \quad H1)\ \exists \vec{\mu}_g \neq \vec{\mu}_0$$

$$RC = \left\{muestras/RV > \chi^2_{p(k-1)}(1-\alpha)\right\}$$

$$RV = n * log\left[\frac{|\mathbf{S}|}{\left|\mathbf{S}_{pl}\right|}\right] \sim \chi^2_{p(k-1)}$$

Parte 2: derivar el estadístico de razón de verosimilitud para la prueba de igualdad de matices de varianzas y covarianzas.

La matriz de información tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_{111} & x_{121} & \cdots & x_{1p1} \\ x_{211} & x_{221} & \cdots & x_{2p1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_1 11} & x_{n_1 21} & \cdots & x_{n_1 p1} \\ x_{112} & x_{122} & \cdots & x_{1p2} \\ x_{212} & x_{222} & \cdots & x_{2p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_2 11} & x_{n_2 21} & \cdots & x_{n_2 p1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{11k} & x_{12k} & \cdots & x_{1pk} \\ x_{21k} & x_{22k} & \cdots & x_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k 1k} & x_{n_k 2k} & \cdots & x_{n_k pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_1 \\ \mathbb{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{X}_k \end{bmatrix}$$

$$con\ i = 1, \dots, n \ \ j = 1, \dots, p \ \ g = 1, \dots, k \ con\ n = \sum_{g=1}^{k} n_g$$

Donde cada $\mathbb{X}_g$ representa la sub-matriz que contiene los datos provenientes de la población g

$$X_g \sim N_p\left(\mu_g; \boldsymbol{\Sigma}_g\right) \ con\ i = 1, \dots, n\ y\ g = 1, \dots, k$$

La función de densidad multivariada es:

$$f_X(x) = (2\pi)^{-p/2} * |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x-\mu)\right\}$$

La prueba a evaluar es:

$$H0)\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}_k = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad Versus \quad H1)\ \exists \boldsymbol{\Sigma}_g \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

La verosimilitud bajo H0 cierta y asumiendo igualdad de medias será:

$$L(\vec{\mu};\ \boldsymbol{\Sigma}_0|\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^{n}(2\pi)^{-p/2} * |\boldsymbol{\Sigma}_0|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_i - \vec{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}_0{}^{-1}(\vec{x}_i - \vec{\mu})\right\}$$

La verosimilitud bajo H1 cierta y asumiendo Σ conocida será:

$$L(\vec{\mu};\ \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_k|\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^{n_1} f_{\mathbb{X}_1}(x_{i1}) * \prod_{i=1}^{n_2} f_{\mathbb{X}_2}(x_{i2}) * \dots * \prod_{i=1}^{n_k} f_{\mathbb{X}_k}(x_{ik}) =$$

$$= \prod_{g=1}^{k}\prod_{i=1}^{n_g}(2\pi)^{-p/2} * |\boldsymbol{\Sigma}_g|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_{ig} - \vec{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}_g{}^{-1}(\vec{x}_{ig} - \vec{\mu})\right\}$$

La cual se maximiza cuando: $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_g = \mathbf{S}_g$

El cociente de verosimilitud será:

$$\frac{L(\vec{\mu};\ \mathbf{\Sigma}_0|\mathbb{X})}{L(\vec{\mu};\ \mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2, \dots, \mathbf{\Sigma}_k|\mathbb{X})} = \frac{|\mathbf{\Sigma}_0|^{-n/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\vec{x}_i - \vec{\mu})'\mathbf{\Sigma}_0{}^{-1}(\vec{x}_i - \vec{\mu})\right\}}{\prod_{g=1}^{k}\prod_{i=1}^{n_g} * |\mathbf{S}_g|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_{ig} - \vec{\mu})'\mathbf{S}_g{}^{-1}(\vec{x}_{ig} - \vec{\mu})\right\}} =$$

EJERCICIO 2

Parte 1: deduzca la esperanza condicional de $X_1|X_2$

Los parámetros de la normal multivariada pueden descomponerse de la siguiente manera:

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \vec{\mu}_1 \\ \vec{\mu}_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

La distribución conjunta de $\mathbb{X}$ es:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = (2\pi)^{p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\}$$

Llamo a la distancia de Mahalanobis:

$$\mathcal{D}(\vec{x}_1;\vec{x}_1) = (\vec{x}-\vec{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) = [(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)' \quad (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'] * \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) \\ (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{11} + (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'\mathbf{\Sigma}^{21} \\ (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{12} + (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'\mathbf{\Sigma}^{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) \\ (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) \end{bmatrix} =$$

$$= (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{11}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) + (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'\mathbf{\Sigma}^{21}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) + (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{12}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) + (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'\mathbf{\Sigma}^{22}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) =$$

$$= (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{11}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) + 2 * (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{12}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) + (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'\mathbf{\Sigma}^{22}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)$$

Donde supusimos que:

$$\mathbf{\Sigma^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{11} & \mathbf{\Sigma}^{12} \\ \mathbf{\Sigma}^{21} & \mathbf{\Sigma}^{22} \end{bmatrix}$$

De forma tal que:

$$\mathbf{\Sigma}^{11} = (\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}')^{-1} = \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} + \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}(\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}$$

$$\mathbf{\Sigma}^{22} = (\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})^{-1} = \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} + \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}'(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}')^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}$$

$$\mathbf{\Sigma}^{12} = -\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}(\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})^{-1}$$

Reemplazamos los valores en la ecuación $\mathcal{D}(\vec{x}_1;\vec{x}_1)$

$$\mathcal{D}(\vec{x}_1;\vec{x}_1) = (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{11}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) + 2 * (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'\mathbf{\Sigma}^{12}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) + (\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'\mathbf{\Sigma}^{22}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) =$$

$$= (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'[\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} + \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}(\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}](\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) -$$

$$-2 * (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)'[\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}(\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})^{-1}](\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) +$$

$$+(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)'[\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} + \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}'(\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}')^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}](\vec{x}_2-\vec{\mu}_2) =$$

Aplicando distributiva:

$$= (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1) + (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12} (\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12})^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1) -$$

$$-2 * (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)' [\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12} (\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12})^{-1}] (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) +$$

$$+(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)' \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) + (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)' \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}' (\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12} \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}')^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12} \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) =$$

$$= (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1) +$$

$$+[(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)]' [\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}]^{-1} [(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)]$$

Entonces la distribución conjunta es:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = (2\pi)^{p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2} \mathcal{D}(\vec{x}_1; \vec{x}_1)\right\} =$$

$$= (2\pi)^{p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2} \mathcal{D}(\vec{x}_1; \vec{x}_1)\right\}$$

Aplico que:

$$|\mathbf{\Sigma}| = |\mathbf{\Sigma}_{11}| * \left|\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}\right|$$

Y obtengo:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = (2\pi)^{p/2} * |\mathbf{\Sigma}_{11}|^{-1/2} * \left|\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}\right|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2} \mathcal{D}(\vec{x}_1; \vec{x}_1)\right\}$$

Ahora remplazo la expresión $\mathcal{D}(\vec{x}_1; \vec{x}_1)$ y separo en dos expresiones:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = (2\pi)^{p_1/2} * |\mathbf{\Sigma}_{11}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)\right\} *$$

$$* (2\pi)^{p_2/2} * \left|\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}\right|^{-1/2} *$$

$$* exp\left\{-\frac{1}{2} [(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)]' * [\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12}]^{-1} \right.$$
$$\left. * [(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)]\right\}$$

Entonces lo que generé fueron dos productos de dos densidades de funciones normales. La primera de ellas es la densidad de X_1 tal que:

$$X_1 \sim N_{p_1}(\vec{\mu}_1;\ \Sigma_{11})$$

La otra es la densidad condicional:

$$\vec{X}_2 | \vec{X}_1 \sim N_{p_2}(\vec{\mu}_2 + \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1);\ \mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{12}' \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12})$$

Debido a que:

$$f_{\vec{X}_2|\vec{X}_1}(\vec{x}_2|\vec{x}_1) = \frac{f_{\vec{X}_2;\vec{X}_1}(\vec{x}_1;\vec{x}_2)}{f_{\vec{X}_1}(\vec{x}_1)}$$

Por lo cual, dada la simetría de la normal:

$$\vec{X}_1|\vec{X}_2 \sim N_{p_1}\left(\vec{\mu}_1 + \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}'(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2);\ \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}'\right)$$

En conclusión, la esperanza de $X_1|X_2$ es:

$$E(\vec{X}_1|\vec{X}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{x}_1 * f_{\vec{X}_2|\vec{X}_1}(\vec{x}_2|\vec{x}_1)\, d\vec{x}_1 = \vec{\mu}_1 + \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}'(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)$$

Parte 2: demuestre que $a'X \sim N_p(a'\mu;\ a'\Sigma a)$

$$E(a'\vec{X}) = a' * E(\vec{X}) = a'\vec{\mu}$$

$$V(a'\vec{X}) = a'V(\vec{X})a = a'\mathbf{\Sigma}a$$

Parte 3: derive la distribución de X_{p-1}

Necesito calcular la distribución marginal de X_{p-1}:

$$f_{X_{p-1}}(x_{p-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, dX_1; \dots; dX_{p-2}; dX_p$$

Nótese que estoy haciendo la misma descomposición que en la parte 1, solo que ahora $p_1 = p - 1$, mientras que $p_2 = 1$. Por simplicidad de notación, reorganizo las variables de forma tal de que la p-1, la coloco en la posición p, y les alterno los nombres (sub-índices).

El vector de medias queda partido de la siguiente forma:

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \vec{\mu}_1 \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

Mientras que la matriz de varianzas y covarianzas queda:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{\Sigma}_{21} = (\mathbf{\Sigma}_{12})' = (\sigma_{1p} \quad \sigma_{2p} \quad \cdots \quad \sigma_{p-1;p})$$

La función de densidad conjunta de las p variables puede expresarse como:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = (2\pi)^{p-1/2} * |\mathbf{\Sigma}_{11}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}_{1,\dots,p-1} - \vec{\mu}_{1,\dots,p-1}\right)'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\left(\vec{x}_{1,\dots,p-1} - \vec{\mu}_{1,\dots,p-1}\right)\right\} *$$

$$* (2\pi)^{1/2} * \left|\sigma_p^2 - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\right|^{-1/2} *$$

$$* exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(x_p - \mu_p\right) - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}(\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)\right]' * \left[\sigma_p^2 - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}\right]^{-1} * \left[\left(x_p - \mu_p\right) - \mathbf{\Sigma}_{12}'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}(\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1)\right]\right\}$$

Nótese que la misma fue expresa como el producto entre la densidad condicionada a las primeras p-1 variables por la densidad marginal de la p-ésima variable:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = f_{\vec{X}_{1,\dots,p-1}|X_p}\left(\vec{x}_{1,\dots,p-1}|x_p\right) * f_{X_p}(x_p)$$

Para calcular la función marginal de p, puede dividir la distribución conjunta entre la condicional:

$$\frac{f_{\vec{X}}(\vec{x})}{f_{\vec{X}_{1,\dots,p-1}|X_p}\left(\vec{x}_{1,\dots,p-1}|x_p\right)} = f_{X_p}(x_p)$$

Operando llego a que:

$$\boxed{f_{X_p}(x_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{\sigma_p} * exp\left\{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x_p - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right\}}$$

También puedo calcularla como la integral de la densidad conjunta respecto de los primeros p-1 diferenciales:

$$f_{X_p}(x_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{p/2} * |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} * exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right\} dX_1; \dots; dX_{p-1} =$$

Esta integral puedo separarla en el producto de la densidad de de las primeras p-1 variables, por la densidad de la p-ésima variable operando la matriz de varianzas y covarianzas como se realizó en la parte 1 del ejercicio. Luego, todo lo que esté expresado en función de p, puede sacarse de la integral por ser una constante en los diferenciales 1, ..., p-1.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{\sigma_p} * exp\left\{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x_p - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right\} *$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{p-1/2} * |\mathbf{\Sigma}_{11}|^{-1/2} *$$

$$* exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}_{1,\dots,p-1} - \vec{\mu}_{1,\dots,p-1}\right)'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\left(\vec{x}_{1,\dots,p-1} - \vec{\mu}_{1,\dots,p-1}\right)\right\} dX_1; \dots; dX_{p-1}$$

Dado que lo que queda entre las integrales es una densidad, la misma vale 1, por lo que:

$$\boxed{f_{X_p}(x_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{\sigma_p} * exp\left\{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x_p - \mu_p}{\sigma_p}\right)^2\right\}}$$

$$X_p \sim N(\mu_p;\ \sigma_p^2)$$

EJERCICIO 3

Parte 1: demostrar que $X_1 * u \ = X_2 \ \sim \ N(0,1)$

$$u \in \{-1,1\} \; y \; X_1 \sim N(0,1) \Rightarrow X_2 = X_1 * u = \begin{cases} X_1 * (-1) & si \; u = -1 \\ X_1 * (1) & si \; u = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{X_2} = \begin{cases} f_{X_1} * (-1) & si \; u = -1 \\ f_{X_1} * (1) & si \; u = 1 \end{cases} \Rightarrow X_2 \sim N(0,1)$$

Parte 2: demostrar que $X = (X_1, X_2) \nsim N(\mu_X, \ \sigma_X^2)$