UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA - FCEA

Análisis Multivariado I

Cluster y Discriminante

En el presente trabajo se emplean las técnicas de Análisis de Cluster y Análisis Discriminante cubiertas en el curso. En una primera etapa se buscan formar grupos de individuos a partir de un pseudo panel de la Encuesta Continua de Hogares para los años 1995 a 2004 en función de la situación de empleo de los mismos. En la segunda etapa se busca determinar si una selección de variables adicionales (relevantes para el empleo) contribuyen a explicar la formación de grupos. Se realiza un ejercicio de seguimiento de los individuos en el tiempo para visualizar los efectos del a debacle económico de principios de siglo.

Integrantes:

- Coudet, Lucía CI: 4.545.399-9
- Czarnievicz, Daniel CI: 4.744.781-9
- Talvi, Ramón CI: 4.423.883-5

Contenido

Introducción

Para el presente trabajo se utilizó un pseudo-panel de la Encuesta Continua de Hogares (ECH) correspondiente a los años 1995 y 2004. La misma fue construida definiendo 36 individuo representativos en base a 4 componentes:

- Localidad: Interior (I), Montevideo (M)
- Sexo: Hombres (H), Mujeres (M)
- Tramo de edad: entre 20 y 29 años (1), entre 30 y 49 años (2), 50 años o más (3)
- Nivel educativo: Primario (1), Secundario[1] (2), Terciario[2] (3)

Las variables contenidas en la base de datos refieren a 5 dimensiones de la realidad laboral de los individuos[3]:

- Variables referentes al hogar:
  - Jefe
  - Tamaño
  - Ingresos
- Situación de empleo:
  - Desempleo
  - Empleo a tiempo parcial
  - Multiempleo
  - Subempleo[4]
  - Precariedad[5]
- Categoría de ocupación:
  - Empleo privado
  - Empleo público
  - Cuenta propistas con local
  - Cuenta propistas sin local
- Condición de ocupación
  - Profesionales y técnicos
  - Empleados de oficina
  - Empleados manuales
- Rama del establecimiento
  - Industria
  - Comercio
  - Servicios financieros, y a empresas
  - Servicios personales

[1] El mismo engloba tanto a la educación secundaria como a UTU.
[2] El mismo corresponde a todos los estudios de nivel terciario, incluyendo el Magisterio.
[3] Ver Anexo 1 para una explicación más detallada de cada una de ellas.
[4] Según criterio INE. Ver anexo 1.
[5] Según criterio INE. Ver anexo 1.

En una primera etapa de nuestro análisis estudiamos el agrupamiento de las observaciones en función de las variables de situación de empleo. Esto lo realizamos mediante la aplicación de las técnicas de Clustering estudiadas en el curos.

En una segunda etapa, buscamos evaluar si el resto de las variables de nuestro set de datos, contribuyen a explicar la pertenencia a los grupos definidos en la etapa 1. Para ello, aplicamos análisis discriminante.

Comenzamos entonces el análisis con estadísticas descriptivas de todas las variables, a fin de tener una primera aproximación de la estructura de datos en nuestra base.

Posteriormente, concentramos nuestra atención en las variables referentes a situación de empleo, y navegamos por todas las técnicas trabajadas en clase, para luego poder tomar una decisión acerca cuáles utilizar y ahondar en ellas.

Una vez acotadas las variables a utilizar, realizamos cluster jerárquico agregativo para los algoritmos presentados en Rencher: vecino más cercano, vecino más lejano, centroide, mediana, y average. A su vez, también complementamos el análisis con clusters no jerárquicos, específicamente: k-medoides, k-medias, Fuzzy Sets, y Clusters basados en modelos.

Dado que en nuestra base todas las variables están definidas en porcentaje (excepto el ingreso), todas ellas recorren un mismo rango de valores. Por lo tanto, entendimos que no era necesario trabajar con datos estandarizados. Igualmente, habiendo aplicado cada metodología con los datos originales, procedimos a realizar lo propio utilizando datos estandarizados, y logramos corroborar que los resultados no varían. Es importante destacar que la variable ingreso no está incluida en nuestro set de variables referentes a la situación de empleo, por lo que no se invalida nuestro apreciación respecto de los rangos de las variables.

Como medidas de disimilaridad, utilizamos la distancia eucídea, la distancia de Mahattan, y la distancia de Mahalanobis, prefiriendo la última. Esto se debe a la presencia de correlaciones entre las variables (ver anexo 2). Consideramos que la correlación entre dos variables es alta cuando la misma se encuentre entre 0.5 y 0.8 (en valor absoluto), y crítica cuando excedía 0.8 (en valor absoluto).

Marco metodológico

En virtud de que contamos con una base no demasiado extensa (360 observaciones), no tuvimos impedimentos para construir clusters jerárquico agregativo. La misma es una técnica de clasificación supervisada ya que los grupos no están definidos de forma a priori. En cada paso de un método jerárquico, los dos clusters/individuo más cercanos (individuo-individuo, individuo-cluster, o cluster-cluster), dada la medida de disimilaridad y el algoritmo utilizados, se unen en un solo grupo. Es por esto que se le conoce como un método de particiones encajadas: una vez que dos clusters se unen, seguirán juntos hasta el final.

Una de las caracteríticas interesentes del método es que, por su construcción, cuenta con una representación gráfica (dendograma) que da una primera aproximación a la estructura de grupos subyacente en los datos.

Para el caso de los ***clusters jerárquicos agregativos*** se parte de una situación en la que cada individuo forma su propio cluster, y se culmina con todos los individuos en un mismo cluster. Por el contrario, en los métodos ***jerárquicos divisivos*** se parte de un grupo inicial que contiene todos los individuos y se culmina cuando cada individuo conforma su propio cluster.

Para el presente trabajo se utilizó una amplia gama de combinaciones técnica[6]-métrica[7]-método[8] para el caso de los métodos jerárquico agregativos. Atendiendo tanto a las distintas reglas de detención formales (R cuadrado, Pseudo F, y Pseudo T), así como a las informales (inspección visual del dennnnndograma), optamos trabajar con los grupos definidos por la rutina jerárquico agregativa, con distancia de Mahalanobis, y método de Ward.

En el ***método de Ward***, la unión de dos grupos se realiza de forma tal que se minimice la variación dentro de los grupos en la nueva partición. Es decir, al descomponer la variación total en variación intra-gupo (within), y variación entre-grupos (between), el método juntará aquellos grupos que produzcan el efecto de hacer mínima la variación within en la nueva partición. El algoritmo tiende a juntar a grupos con pequeño número de observaciones, y es por ende, sesgado hacia la formación de grupos esféricos.

La métrica seleccionada (distancia de Mahalanobis) fue considerada apropiada por contemplar la correlación entre las variables para definir la distancia. La misma se calcula como:

$$d_{ij}^2 = \left(X_{ik} - X_{jk}\right)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (X_{ik} - X_{jk})$$

$$donde\ \boldsymbol{\Sigma}\ es\ la\ matriz\ de\ varianzas\ y\ covarianzas$$

REGLAS DE DETENCIÓN

Análisis visual del dendograma: dado que las barras verticales del dendograma indican el nivel al que se unen los individuos/grupos, analizar visualmente la longitud de dichas barras da una idea de la estructura de grupos que presentan los datos. Este método es muy informal y solo permite una primera aproximación. En caso de querer obtener una cantidad previamente especificada de grupos, esto determinará el nivel en el cual cortar el dendograma.

Criterio del R^2: este indicador relaciona la variación explicada y la variación total, dónde la variación explicada está representada por la estructura de grupos que se encuentra en cada nivel. Por lo tanto, el valor del R^2 se encuentra en el intervalo [0,1], valiendo 0 cuando todas las observaciones se encuentran en un mismo grupo (es decir, la variación explicada por la estructura de grupos es 0 ya que todos los individuos están en un mismo grupo), y valiendo 1 cuando cada individuo es un grupo (es decir, cuando la variación explicada es igual a la variación total).

[6] Jerárquicos agregativos, jerárquicos divisivos, y no jerárquicos.
[7] Euclídea, Manhattan, y Mahalanobis.
[8] Single Linkage, Complete Linkage, Average Linkage, y Ward.

En términos matemáticos:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ijk} - \bar{x}_{jk}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ij} - \bar{x}_{j}\right)^2}$$

$$con\ p\ variables, g\ grupos, n\ observaciones, n_k\ observaciones\ en\ el\ grupo\ k$$

Criterio pseudo-F: relaciona la suma de variaciones entre los grupos (variación explicada) con la suma de variaciones en los grupos (variación residual):

$$Pseudo\ F = \frac{Variación\ entre\ grupos/(k-1)}{Variación\ en\ los\ grupos/(n-k)} \quad k\ grupos, n\ observaciones$$

También puede calcularse como relación entre trazas de matrices:

$$Pseudo\ F = \frac{tr(B)/(k-1)}{tr(W)/(n-k)}$$

O como cociente del R^2:

$$Pseudo\ F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

Reglas empíricas de utilización:

- Si el indicador crece de forma monótona al crecer el número de grupos, no se puede determinar una estructura de grupos.
- Si disminuye de forma monótona al crecer el número de grupos, no se puede determinar una estructura de grupos, pero se puede decir que existe jerarquía.
- Cuando se halla un máximo, la población presenta una estructura de grupos en ese máximo.

Criterio pseudo-t: este indicador busca determinar la significación de juntar dos grupos. Es decir, busca determinar en cada paso, si la disminución de la SCR (variación intra-grupos) como resultado de pasar de k a k+1 grupos es significativa o no.

Algebraicamente, este indicador también se basa en las tazas de las matrices de varianza en el grupo (W), antes y después de unir dos grupos:

$$pseudo - t^2 = \frac{tr(W_{GL}) - \left[tr\left(W_G + tr(W_L)\right)\right]}{[tr(W_G) + tr(W_L)]/(n_G + n_G - 2)}$$

$$n_i\ son\ las\ observaciones\ en\ el\ grupo\ i = G, L$$

$$tr(W_i)\ es\ la\ traza\ en\ el\ grupo\ i = G, L, GL$$

Si se analiza el vector de valores de pseudo-t^2 desde abajo (1 grupo con n observaciones), hacia arriba (n grupos con 1 observación cada uno), si en k+1 grupos presenta una caída “fuerte” respecto de k, entonces nos quedamos con k+1 grupos.

Los métodos de agrupación no jerárquicos son técnicas de clasificación no supervisada en lo que requiere definirse a priori el número de grupos con el cuál se va trabajar. A lo existir una estructura jerárquica, no existe una representación gráfica.

En el presente trabajo se utilizaron las técnicas no jerarquicas: k-medoides, k-medias, Fuzzy Sets, y Clusters basados en modelos.

K- medoides requiere definir a priori k grupos y sus respectivos centros de gravedad (individuos representativos). Al comienzo, los centros de gravedad son elegidos por el investigador ("semillas"). Estos pueden ser elegidos aleatoriamente, o se pueden elegir los primeros k items de la base de datos que cumplan con determinada distancia mínima establecida. Luego de elegir las semillas, se agrupan las observaciones y se redefinen los centros de gravedad en cada grupo, permitiendo la relocalización de observaciones. Esto se repite hasta que se llega a la convergencia o al número de iteraciones máximo preestablecido.

El método de ***k-medias*** se distingue en que los centros de gravedad utilizados corresponden a los vectores de medias de los grupos.

Fuzzy Sets, a diferencia de cualquier otro método, busca calcular coeficientes de pertenencia de cada observación para los distintos grupos. Es decir, no es una clasificación rígida, sino que por el contrario, es una clasificación difusa. En el anexo 4 se presenta una tabla con el coeficiente de pertenencia promedio para cada grupo.

Las técnicas de Clusters basados en modelos en modelos se pueden dividir entre aquellas en las que se asume una distribución de probabilidad en los grupos, y las técnicas en las que no se asume una distribución, sino que se busca estimar esta, por ejemplo mediante kernels. Una explicación detallada de estos métodos pueden encontrarse en Rencher (2002). No nos detenemos aquí en esta, dado que los resultados de la aplicación de estas técnicas para nuestro set de datos fueron desechados[9].

Posterior al análisis de cluster, realizamos ***Análisis Discriminante (AD)***. El mismo es una técnica de clasificación supervisada, ya que existe previamente una categorización de las observaciones. Es decir, sabemos que las observaciones pertenecen a un determinado grupo. Lo que buscamos es encontrar una regla de clasificación asociada a las variables que se están midiendo, que permita asignar cada individuo a un grupo determinado con el menor error posible. Esta técnica encuentra su mayor utilidad a la hora de clasificar nuevas observaciones.

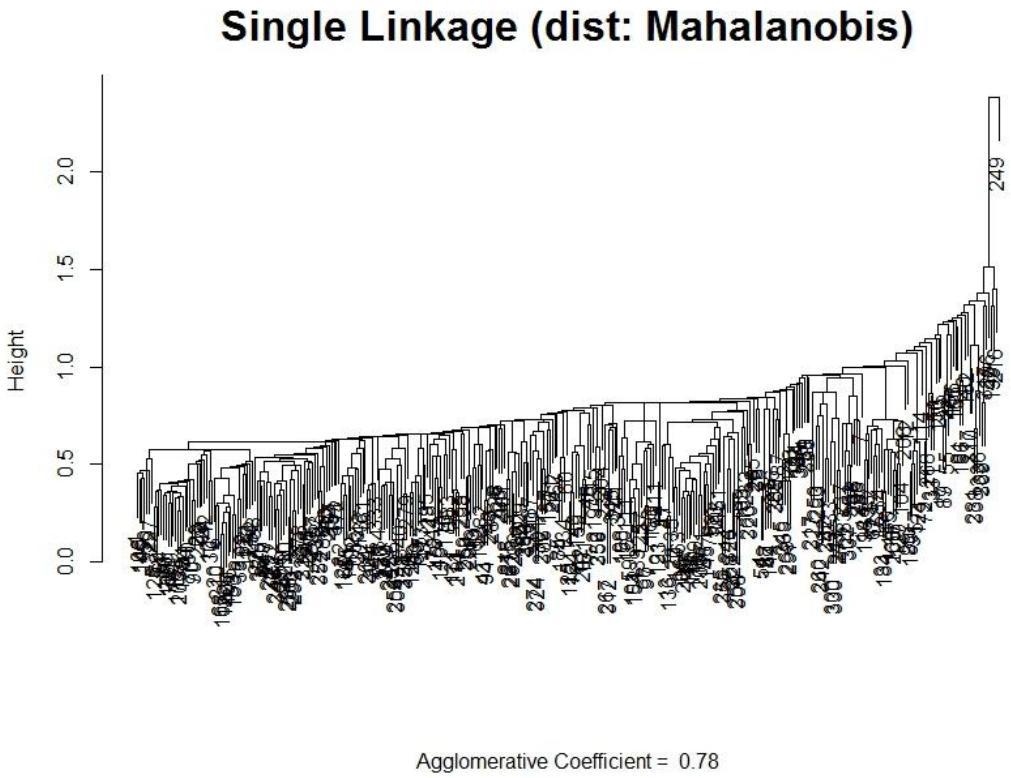
El primer paso en el análisis discriminante es evaluar, en este caso, a través del Test de Mardia, si los datos tienen una distribución normal multivariante en cada grupo. Para nuestros datos, rechazamos esta hipótesis al 5% de significación (ver anexo 7). Por ende, no nos fue posible realizar ni AD probabilístico lineal, ni AD probabilístico cuadrático (ambos basados en la normalidad de los grupos). Optamos por estimar un discriminante multilogístico.

[9] Es importante estacar aquí que la cantidad de observaciones requeridas para realizar buenas estimaciones, y poder aplicar correctamente estas técnicas, crece exponencialmente con el número de variables. El solo contar con 360 observaciones para 19 dimensiones constituye el principal argumento por el cual los resultados de la aplicación de estas técnicas fueron desechados por el equipo.

Presentación y análisis de los resultados

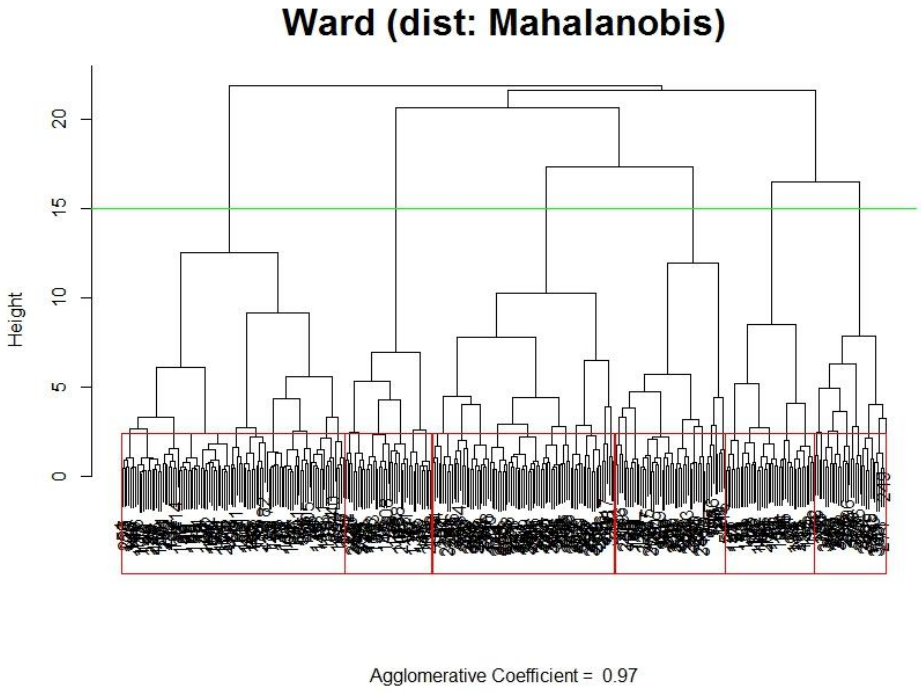
CLUSTERING POR MÉTODO DE WARD (DISTANCIA DE MAHALANOBIS[10])

En primer lugar, resulta interesante realizar un análisis visual del dendograma construido mediante el algoritmo del vecino más cercano (single linkage). De la forma del mismo puede apreciarse la presencia de un importante grupo de datos atípicos en la base.

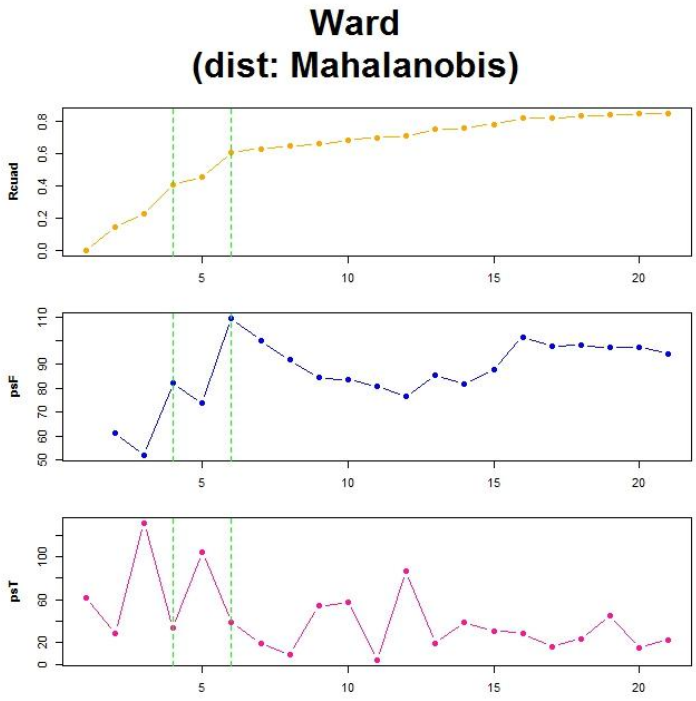


[10] En el anexo 3 se incluye la matriz de distancias calculadas con métrica de Mahalanobis.

En el dendograma, claramente podemos pareciar que se forman grupos esféricos y consdieramos el más apropiado un k=6, siendo k el número de grupos.



Según los indicadores, una estructura de 4 o 6 grupos serían las más adecuadas para nuestros datos. Según el R cuadrado, no elegimos k=4 porque este aún no se encuentra estabilizado. Sin embargo, a partir de k=6, el crecimiento marginal deja de ser significativo. El pseudo F presenta máximos locales tanto en k=4 como en k=6, por lo no nos permite discernir entre uno y otro. El pseudo t presenta caídas relevantes para ambos casos.



CARACTERIZACIÓN DE GRUPOS[11]

Grupo 1	Grupo de observaciones heterogéneas.
Grupo 2	Predominan universitarios mayores de 29 años.
Grupo 3	Mujeres. Predominan personas de 50 o más años. Todas las observaciones tienen un nivel de formación terciario (con una única excepción).
Grupo 4	Grupo de observaciones heterogéneas.
Grupo 5	Está compuesto por personas de ambos sexos. De un total de 52, solamente 4 alcanzan un nivel de formación terciario. A su vez, hay escasas observaciones con 50 o más años.
Grupo 6	Es un grupo con predominancia de mujeres de nivel educativo terciario y rango de edad de 20 a 29 años.

Medias por grupo					
	Desempleo	**T. Parcial**	**Multiempleo**	**Subempleo**	**Precariedad**
1	10.687	14.678	8.075	7.646	15.898
2	3.166	18.176	29.258	5.638	6.159
3	5.588	37.516	14.425	5.204	10.773
4	11.793	33.910	9.905	15.218	34.467
5	15.391	26.386	5.846	10.330	53.808
6	27.721	64.471	7.545	15.477	49.353

Si nos disponemos a caracterizar los grupos en funcion del set de variables seleccionado para nuestro análisis (referentes a la situación de empleo de los individuos), vemos claramente que el grupo 2, seguido del 3, se destacan por presentar situaciones más deseables en lo que respecta la calidad de la inserción laboral (bajos niveles de desempleo, a la vez que bajos niveles de subempleo, y de precariedad), mientras que los grupos 4, 5, y 6 (especialmente el 6) se destacan por presentar una situación menos deseable en calidad de inserción laboral.

A continuación se construyó un ranking de situación de empleo de los grupos. Para ellos se tuvieron en cuenta las variables: desempleo, subempleo, y precariedad. Las variables empleo a tiempo parcial, y multiempleo no fueron tenidas en cuenta dado que responden a decisiones voluntarias de los individuos. Podría argumentarse que la variable multiempleo refleja una necesidad (para al menos algunos de los individuos), y no una decisión de las

[11] El anexo 5 incluye una caracterización de la composición de cada grupo.

personas. Si bien esto puede ser cierto para algunas observaciones de la ECH[12], la alta correlación con la variable profytec (% de profesionales y técnicos), invita a pensar que en la mayoría de los casos esto no es cierto, sino que se trata de individuos con formación superior que eligen realizar varios empleos (por ejemplo: consultorías privadas, docencia, etc.).

Para la construcción del ranking se les asignaron las posiciones 1 a 6 en cada dimensión de forma tal que se otorga el menor valor, al grupo con menor media en cada respectiva dimensión, y se procedió a realizar la suma horizontal de las posiciones, obteniéndose las siguientes posiciones:

Ranking					
Grupos	**Desempleo**	**Subempleo**	**Precariedad**	**Suma**	**Posición**
1	3	3	3	9	3
2	1	2	1	4	1
3	2	1	2	5	2
4	4	5	4	13	4
5	5	4	6	15	5
6	6	6	5	17	6

El equipo no es ajeno al hecho de que la construcción del ranking con los lineamientos antes descritos es sumamente cuestionable. Por ejemplo, podría objetarse el hecho de que las posiciones en el ranking no dependen de valores absolutos, sino que son relativas a la muestra obtenida. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que las variables utilizadas para su construcción responden únicamente a disponibilidad de datos. El objetivo de este ejercicio es el seguimiento de las unidades en el tiempo (siendo este uno de los posibles análisis a realizar con la estructura de grupos seleccionada).

En dicho seguimiento, puede observarse claramente que todos los individuos (a excepción de IM33, MH23, y MM21) se deterioraron (perdieron posiciones) a partir del año 2000, fenómeno probablemente asociado al declive económico de principios del siglo XXI. No se observa una predominancia de afección ni por nivel educativo, ni por edad, ni por sexo, sino que el efecto fue generalizado. Sin embargo, parecería haber una tendencia a que, a menor nivel educativo, la afección sea mayor[13].

ANÁLISIS DISCRIMINANTE

Como se mencionó anteriormente, se rechaza la hipotesis nula de distribución normal multivariada para toda la población, y por grupos, por lo que no resulta apropiado la implementación de un AD probabilístico normal. (Ver salidas del Test de Mardia en el anexo 7). Entendimos por lo tanto que, se debía realizar un AD multinomial.

[12] Recuérdese que aquí contamos con un pseudo panel de la ECH, y no con las encuestas completas.
[13] En el anexo 6 se presentan los gráficos de seguimiento de las unidades en el tiempo para las 36 unidades.

En una primera instancia, es ajustó un modelo multinomial con la variable grupo (obtenida de los clusters formados anteriormente) como variable de respuesta, y las variables de situación de empleo como regresores, tomando la categoría 1 como referencia:

$$y_i = f(1, desemp_i, tparcial_i, multiemp_i, subemp_i, precario_i,) + \varepsilon_i \; \forall i = 1, \dots, 360 \quad [1]$$

El objetivo detrás de la estimación de este modelo es el estudio del poder de clasificación de los grupos conformados a través del análisis de cluster. Las observaciones que no fueran clasificadas en su grupo *ex ante*[14], serán reasignadas al grupo *ex post*[15].

A continuación se presentan los coeficientes estimados, los valores del AIC y del BIC de la prueba stepwise de significación global, y los p-valores correspondientes a las pruebas de significación individual para cada ecuación.

		Coeficientes estimados					
		(Intercept)	desemp	tparcial	multiemp	subemp	precario
Grupos	2	-25.875	-1.697	1.098	1.174	-1.422	0.758
	3	-58.896	-3.007	4.736	-0.757	-4.615	-0.417
	4	-27.539	-1.662	0.995	0.414	0.512	0.697
	5	-28.835	-1.915	1.031	0.536	-0.990	1.173
	6	-112.822	1.424	5.049	0.641	-9.569	0.025

Significación global

	AIC	BIC
<nonw>	134.42	251.01
- multiemp	213.79	310.95
- subemp	247.83	344.98
- desemp	270.62	367.78
- precario	341.92	439.07
- tparcial	405.61	502.76

Significación individual

		p-values					
		Intercept	desemp	tparcial	multiemp	subemp	precario
Grupos	2	0.000	0.006	0.001	0.001	0.018	0.001
	3	0.000	0.000	0.000	0.097	0.001	0.183
	4	0.000	0.000	0.001	0.120	0.101	0.001
	5	0.000	0.000	0.000	0.080	0.018	0.000
	6	0.000	0.102	0.000	0.210	0.000	0.468

El no rechazo de la hipótesis nula en la prueba de significación individual implica que la variable testeada contribuye a explicar la formación del grupo i, en la relación con el grupo 1:

- *desemp*: contribuye a explicar la formación de los grupos 2, 3, 4, y 5
- *tparcial*: contribuye a explicar la formación de los grupos 2, 3, 4, 5, y 6
- *multiemp*: contribuye a explicar la formación del grupo 2
- *subemp*: contribuye a explicar la formación de los grupos 2, 3, 5, y 6
- *precario*: contribuye a explicar la formación de los grupos 2, 4, y 5

[14] Grupo al cual fueron asignadas por el análisis de cluster.
[15] Grupo al que fueron asignadas por la función discriminante.

El modelo presenta una precisión del 96.9%, lo cual es la proporcion de valores predichos correctamente.

AD de reclasificación

Grupos	Valores Predichos 1	2	3	4	5	6	Total
1	103	0	1	1	0	0	105
2	0	40	0	1	0	0	41
3	0	0	42	0	0	0	42
4	0	0	0	82	4	0	86
5	1	0	0	4	47	0	52
6	0	0	0	0	0	34	34
Total	104	40	43	88	51	34	360

AD de reclasificación

Grupos	Valores Predichos 1	2	3	4	5	6	Total
1	98.1%	0.0%	1.0%	1.0%	0.0%	0.0%	29.2%
2	0.0%	97.6%	0.0%	2.4%	0.0%	0.0%	11.4%
3	0.0%	0.0%	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	11.7%
4	0.0%	0.0%	0.0%	95.3%	4.7%	0.0%	23.9%
5	1.9%	0.0%	0.0%	7.7%	90.4%	0.0%	14.4%
6	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	9.4%
Total	28.9%	11.1%	11.9%	24.4%	14.2%	9.4%	96.9%

Asumiendo igualdad de costos por error de clasificación en todos los gruops, construimos la tabla de contingrencia, la cual nos permite apreciar inmediatamente que los porcentajes de predicciones correctas para cada grupo superan el 90%. Inclusive, para 2 de los grupos, los porcentajes fueron del 100%. Para el total de la muestra, el porcentaje de predicciones correctas fue del 96.67%.

En una segunda instancia se procedió a ajustar un modelo multinomail, en el cual, se utilizó como variable de respuesta los grupos corregidos por el primer modelo.

$$\hat{y}_i = f(1, jefe_i, size_i, privado_i, publico_i, cpsl_i, cpcl_i, profytec_i, oficina_i, , manual_i,$$

$$indust_i, comercio_i, sfinan_i, sperson_i, ingreso_i) + \varepsilon_i \; \forall i = 1, \dots, 360 \quad [2]$$

Con este modelo se buscó estudiar la capacidad de las demás variables para explicar la formación de grupos. A continuación se presentan los coeficientes estimados para este modelo,

A continuación se presentan los coeficientes estimados, los valores del AIC y del BIC de la prueba stepwise de significación global, y los p-valores correspondientes a las pruebas de significación individual para cada ecuación.

Coeficientes estimados

	2	3	4	5	6
(Intercept)	-38.0668	14.1951	4.1441	28.8452	-0.4656
jefe	0.1198	-0.0257	-0.0179	0.0895	-0.5609
size	-0.0165	0.1153	0.1293	0.0854	-0.0728
privado	0.2019	-0.3787	-0.1009	-0.2018	0.3304
publico	0.1500	-0.2365	-0.2772	-0.2659	-0.0769
cpsl	-0.5360	0.0775	0.1520	-0.6775	-0.4464
cpcl	0.6847	0.0238	-0.0906	-0.5840	0.6952
profytec	0.2304	0.1396	0.2501	0.2726	0.3839
oficina	-0.0694	-0.0789	0.1949	0.0759	0.3621
manual	-0.1368	-0.3510	-0.1207	-0.0085	-0.0029
indust	0.1140	0.1926	-0.0287	0.0882	0.3260
comercio	0.2860	0.1618	0.1104	0.1464	-0.2934
sfinan	-0.3918	-0.7973	-1.8403	-2.4528	-2.3601
sperson	0.0810	0.1131	-0.0260	0.0103	-0.7127
ingreso	1.0479	1.8525	1.8101	-4.2050	-2.5012

Significación global

	BIC	AIC
<none>	626.5	435.44
- ingreso	627.11	436.5
- cpsl	632.69	438.13
- jefe	633.56	441.08
+ publico	635.42	441.1
+ oficina	638.17	441.71
+ cpcl	639.36	442.55
+ size	643.22	442.92
+ comercio	645.11	452
- profytec	651.22	452.88
+ indust	655.29	460.85
- manual	665.19	463.29
- sperson	681.97	468.85
- privado	693.14	483.05
- sfinan	798.14	584.32

Significación individual (p-valores)

	2	3	4	5	6
(Intercept)	0.000	0.027	0.349	0.000	0.000
jefe	0.004	0.289	0.255	0.010	0.006
size	0.447	0.044	0.023	0.068	0.324
privado	0.035	0.000	0.169	0.001	0.020
publico	0.090	0.034	0.022	0.004	0.314
cpsl	0.066	0.381	0.161	0.000	0.170
cpcl	0.001	0.446	0.300	0.000	0.087
profytec	0.005	0.055	0.000	0.001	0.008
oficina	0.313	0.216	0.020	0.268	0.031
manual	0.175	0.006	0.055	0.454	0.491
indust	0.342	0.173	0.421	0.282	0.231
comercio	0.060	0.139	0.131	0.083	0.066
sfinan	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
sperson	0.294	0.116	0.361	0.444	0.001
ingreso	0.146	0.029	0.020	0.001	0.142

El criterio de selección de AIC indica que se debe estimar el modelo sin las variables *publico* e *indust*:

$$\hat{y}_i = f(1, jefe_i, size_i, privado_i, cpsl_i, cpcl_i, profytec_i, oficina_i, , manual_i,$$

$$, comercio_i, sfinan_i, sperson_i, ingreso_i) + \varepsilon_i \ \forall i = 1, \dots, 360 \quad [3]$$

A continuación se presentan los coeficientes del modelo estimado, y los p valores correspondientes a la prueba de significación individual.

Coeficientes estimados						Significación individual (p-valores)				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
(Intercept)	-23.456	-5.819	-21.953	2.476	-2.404	0.002	0.215	0.000	0.381	0.391
jefe	0.079	-0.007	-0.004	0.097	-0.559	0.039	0.434	0.446	0.005	0.005
size	-0.047	0.107	0.160	0.087	-0.121	0.378	0.049	0.005	0.048	0.222
privado	0.045	-0.185	0.118	0.056	0.401	0.338	0.029	0.045	0.269	0.003
cpsl	-0.497	0.153	0.313	-0.489	-0.317	0.082	0.264	0.012	0.002	0.217
cpcl	0.523	0.239	0.122	-0.285	0.750	0.015	0.081	0.215	0.051	0.066
profytec	0.219	0.088	0.229	0.259	0.293	0.002	0.106	0.000	0.000	0.005
oficina	-0.039	-0.041	0.202	0.076	0.300	0.382	0.315	0.009	0.258	0.046
manual	-0.046	-0.288	-0.116	0.007	0.036	0.347	0.004	0.024	0.454	0.359
comercio	0.251	0.198	0.163	0.181	-0.268	0.093	0.092	0.035	0.034	0.089
sfinan	-0.337	-0.725	-1.766	-2.398	-2.258	0.065	0.000	0.000	0.000	0.000
sperson	0.133	0.159	-0.014	0.024	-0.648	0.160	0.051	0.416	0.360	0.001
ingreso	1.328	2.310	2.262	-3.578	-1.742	0.072	0.005	0.001	0.002	0.210

El no rechazo de la hipótesis nula en la prueba de significación individual implica que la variable testeada contribuye a explicar la formación del grupo i, en la relación con el grupo 1:

- *jefe*: contribuye a explicar la formación de los grupos 2, 5, y 6
- *size*: contribuye a explicar la formación de los grupos 3, 4, y 5
- *privado*: contribuye a explicar la formación de los grupos 3, 4, y 6
- *cpsl*: contribuye a explicar la formación de los grupos 4, y 5
- *cpcl*: contribuye a explicar la formación del grupo 2
- *profytec*: contribuye a explicar la formación de los grupos 2, 4, 5, y 6
- *oficina*: contribuye a explicar la formación de los grupos 4, y 6
- *manual*: contribuye a explicar la formación de los grupos 3, y 4
- *comercio*: contribuye a explicar la formación de los grupos 4, y 5
- *sfinan*: contribuye a explicar la formación de los grupos 3, 4, 5, y 6
- *sperson*: contribuye a explicar la formación del grupo 6
- *ingreso*: contribuye a explicar la formación de los grupos 3, 4, y 5

CROSS VALIDATION

Utilizando la función programada por Manuel Amunategui[16] (ver anexo 8), implementamos la técnica con 360 particiones (leave-one-out). Esta arrojó un nivel de precisión del 95.56% para el modelo [1], y de un 84.44% para el modelo [2]. Ambos son valores elevados y, en el caso del modelo [1], cercano al valor obtenido anteriormente al aplicar discriminante multilogístico.

[16] La función original no permitía calibrarla para la realización de Cross-Validation mediante el método de leave-one-out, pero el equipo realizó las correcciones pertinentes para la correcta aplicación del susodicho.

Conclusiones

Del analisis cluster se desprende que los grupos conformados disciernen particularmente en funcion del nivel educativo alcanzado (si bien varios de ellos resultaron bastante heterogeneos). En particular, se separan las observaicones con nivel educativo terciario (grupos 2 y 6), y primario (grupo 5) del resto de las observaciones. Asimismo, vemos que el sexo es otra característica de nuestros individuos representativos que permite discernir entre un grupo y otro. En particular, el grupo 3 esta conformado en su totalidad por mujeres, y el grupo 5 tiene una alta predominancia de estas.

Si seguimos a los individuos representativos a lo largo del tiempo, vemos que la mayoría de ellos, al comenzar la crisis de principios del siglo XXI pasan a grupos con propiedades menos deseables en materia de calidad de inserción laboral.

En lo que respecta a AD, el modelo [1] reclasificó únicamente al 3.33% de las observaciones, lo cual refleja la concordancia entre ambos métodos de clasificación (análisis de cluster, y análisis discriminante). Por su parte, el modelo [2] permitió apartar las variables *indust* y *publico*, dado que estas resultaron no significativas en la prueba de stepwise según AIC (no contribuyen a la separación de los grupos). Por último, el modelo [3] permitió estudiar la contribución de las restantes variables relevadas a la formación de los grupos.

Bibliografía y referencias

- Blanco (2006) - Introducción al análisis multivariado - 1era edición
- Dueñas Rodríguez - Modelos de respuesta multinomial con R y aplicación con datos reales (Tesis de maestría)
- Everitt & Hothorn (2014) - A handbook of statistical analyses using R - 3rd edition
- Peña (2002) - Analisis de datos multivariantes
- Rencher (2002) - Methods of multivariate analysis - 2nd edition

Anexos

ANEXO 1: DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES RELEVADAS

	Variable	Clase	Descripción
1	**jefe**	Variables referentes al hogar	*% de jefes de hogar*
2	**size**		*% de personas que trabajan en establecimientos con menos de 5 personas*
3	**ingreso**		*Mediana del ingreso total proveniente de remuneraciones del trabajo*
4	**desemp**	Situación de empleo	*% de personas desempleadas*
5	**tparcial**		*% de personas que trabajan menos de 35 horas por semana y que no buscan otro trabajo*
6	**multiemp**		*% de personas con dos o más empleos*
7	**subemp***		*% de trabajadores subempleados*
8	**preacario****		*% de trabajadores precarios*
9	**privado**	Categoría de ocupación	*% de trabajadores del sector privado*
10	**publico**		*% de trabajadores en el sector público*
11	**cpsl**		*% de trabajadores por cuenta propia sin local*
12	**cpcl**		*% de por cuenta propia con local*
13	**profytec**	Condición de ocupación	*% de profesionales y técnicos*
14	**oficina**		*% de empleados de oficina*
15	**manual**		*% de empleados manuales*
16	**indust**	Rama del establecimiento	*% de personas que trabajan en la industria*
17	**comercio**		*% de personas que trabajan en el comercio*
18	**sfinan**		*% de personas que trabajan en servicios financieros, y a empresas*
19	**sperson**		*% de personas que trabajan en servicios personales*

* Según criterio INE. Corresponde a personas que desempeñan su actividad a tiempo parcia de forma involuntaria. Incluye subempleo por insuficiencia de horas trabajadas, y subempleo por insuficiencia de volumen de trabajo. Se considera trabajador a tiempo parcial a aquel que trabaja menos de 40 horas semanales.

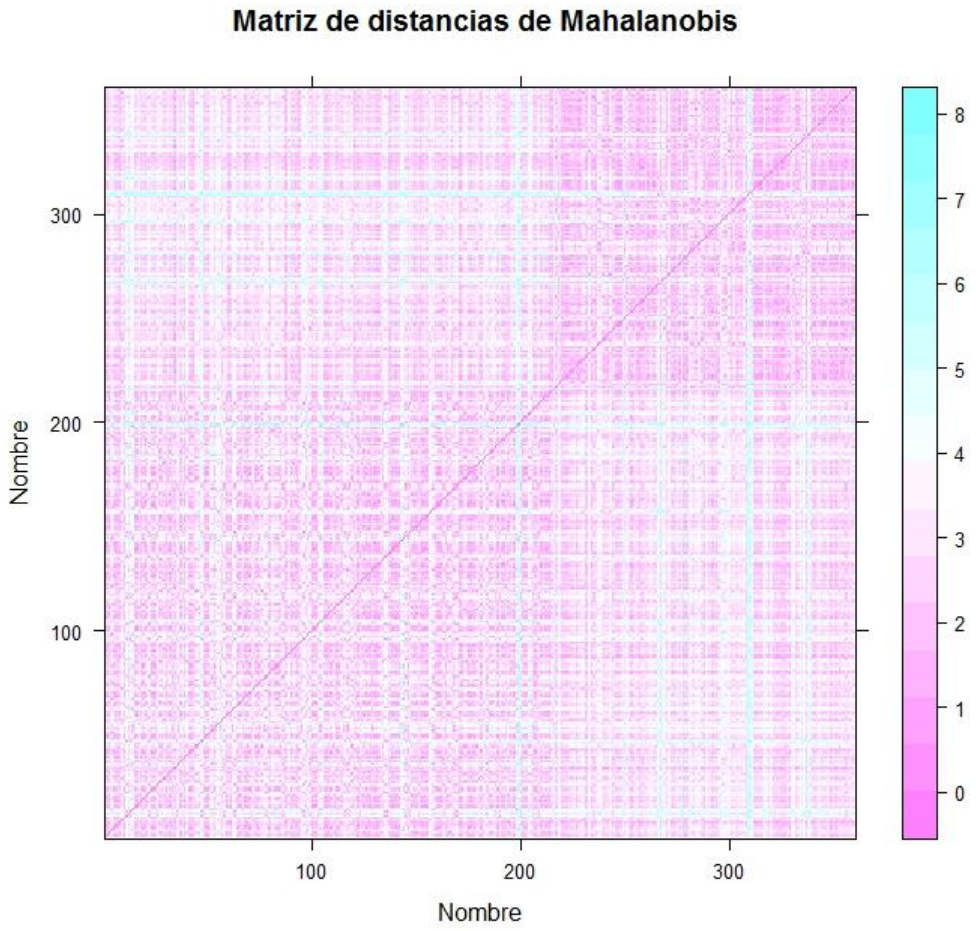
** Según criterio INE. Incluye a los asalariados en el sector privado que no están protegidos por el sistema de seguridad social, asó como a las personas que se encuentran buscando otros trabajo para sustituir al actual en razón de que el mismo es poco estable o porque son trabajadores familiares no remunerados

ANEXO 2: TABLA DE CORRELACIONES

	jefe	desemp	size	tparcial	multiemp	privado	publico	cpsl	cpcl	profytec	oficina	manual	indust	comercio	sfinan	sperson	subemp	precario	ingreso
jefe	1.00	-0.69	-0.03	-0.54	0.22	-0.61	0.17	0.44	0.55	-0.03	-0.32	0.45	0.19	-0.20	0.10	-0.33	-0.43	-0.45	0.44
desemp	-0.69	1.00	0.27	0.65	-0.48	0.77	-0.53	-0.09	-0.61	-0.31	0.10	-0.17	0.02	0.40	-0.25	0.20	0.65	0.76	-0.56
size	-0.03	0.27	1.00	0.30	-0.47	0.23	-0.57	0.30	0.31	-0.61	-0.51	0.11	0.23	0.18	-0.59	0.41	0.36	0.59	-0.54
tparcial	-0.54	0.65	0.30	1.00	-0.11	0.24	-0.08	-0.15	-0.18	0.10	0.04	-0.45	-0.34	0.00	-0.25	0.02	0.65	0.48	-0.28
multiemp	0.22	-0.48	-0.47	-0.11	1.00	-0.54	0.66	-0.47	0.23	0.83	0.12	-0.50	-0.52	-0.64	0.62	-0.22	-0.29	-0.58	0.83
privado	-0.61	0.77	0.23	0.24	-0.54	1.00	-0.80	-0.05	-0.70	-0.56	0.06	0.06	0.38	0.53	-0.20	0.37	0.44	0.68	-0.56
publico	0.17	-0.53	-0.57	-0.08	0.66	-0.80	1.00	-0.30	0.27	0.84	0.23	-0.34	-0.64	-0.62	0.36	-0.37	-0.33	-0.66	0.57
cpsl	0.44	-0.09	0.30	-0.15	-0.47	-0.05	-0.30	1.00	0.04	-0.50	-0.52	0.80	0.39	0.15	-0.45	-0.29	0.13	0.23	-0.33
cpcl	0.55	-0.61	0.31	-0.18	0.23	-0.70	0.27	0.04	1.00	0.09	-0.20	-0.02	-0.06	-0.23	-0.06	0.07	-0.31	-0.40	0.23
profytec	-0.03	-0.31	-0.61	0.10	0.83	-0.56	0.84	-0.50	0.09	1.00	0.29	-0.57	-0.74	-0.63	0.55	-0.30	-0.18	-0.55	0.69
oficina	-0.32	0.10	-0.51	0.04	0.12	0.06	0.23	-0.52	-0.20	0.29	1.00	-0.48	-0.22	0.17	0.48	-0.12	0.01	-0.34	0.15
manual	0.45	-0.17	0.11	-0.45	-0.50	0.06	-0.34	0.80	-0.02	-0.57	-0.48	1.00	0.65	0.28	-0.43	-0.20	-0.12	0.15	-0.34
indust	0.19	0.02	0.23	-0.34	-0.52	0.38	-0.64	0.39	-0.06	-0.74	-0.22	0.65	1.00	0.52	-0.34	0.17	-0.08	0.20	-0.33
comercio	-0.20	0.40	0.18	0.00	-0.64	0.53	-0.62	0.15	-0.23	-0.63	0.17	0.28	0.52	1.00	-0.24	0.12	0.10	0.36	-0.52
sfinan	0.10	-0.25	-0.59	-0.25	0.62	-0.20	0.36	-0.45	-0.06	0.55	0.48	-0.43	-0.34	-0.24	1.00	-0.29	-0.36	-0.61	0.71
sperson	-0.33	0.20	0.41	0.02	-0.22	0.37	-0.37	-0.29	0.07	-0.30	-0.12	-0.20	0.17	0.12	-0.29	1.00	0.02	0.27	-0.31
subemp	-0.43	0.65	0.36	0.65	-0.29	0.44	-0.33	0.13	-0.31	-0.18	0.01	-0.12	-0.08	0.10	-0.36	0.02	1.00	0.63	-0.44
precario	-0.45	0.76	0.59	0.48	-0.58	0.68	-0.66	0.23	-0.40	-0.55	-0.34	0.15	0.20	0.36	-0.61	0.27	0.63	1.00	-0.70
ingreso	0.44	-0.56	-0.54	-0.28	0.83	-0.56	0.57	-0.33	0.23	0.69	0.15	-0.34	-0.33	-0.52	0.71	-0.31	-0.44	-0.70	1.00

Nota: las celdas con fondo rojo señalan correlaciones mayores a 0.8 (en valor absoluto), mientras que las celdas con fondo amarillo señalan correlaciones entre 0.5 y 0.8 (en valor absoluto). El color de fuente roja señala correlaciones negativas, mientras que el verde señala correlaciones positivas.

ANEXO 3: MATRIZ DE DISTANCIAS (MÉTRICA: MAHALANOBIS)

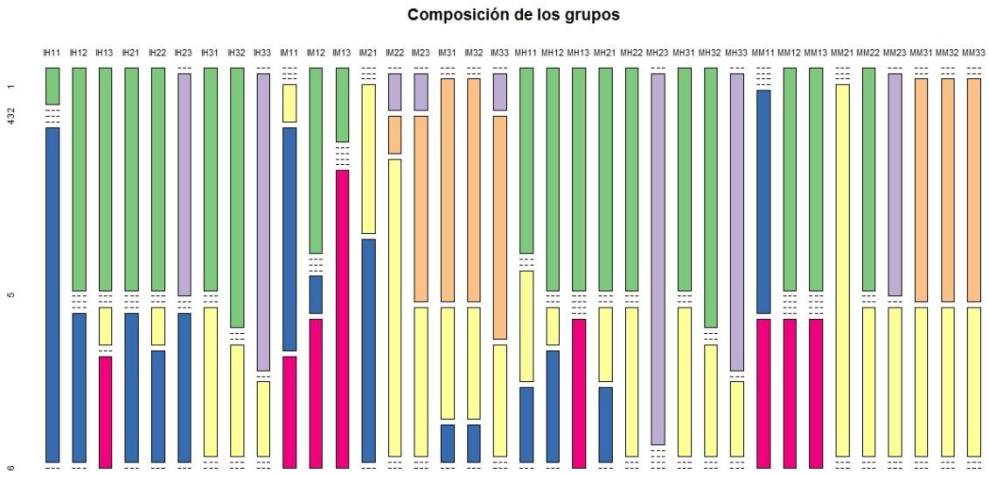


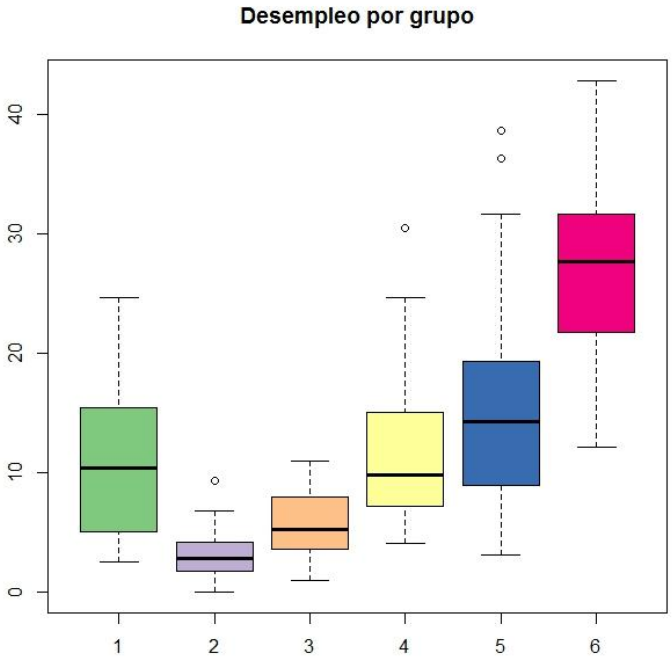
ANEXO 4: PROMEDIO DE LOS COEFICIENTES DE PERTENENCIA POR GRUPO

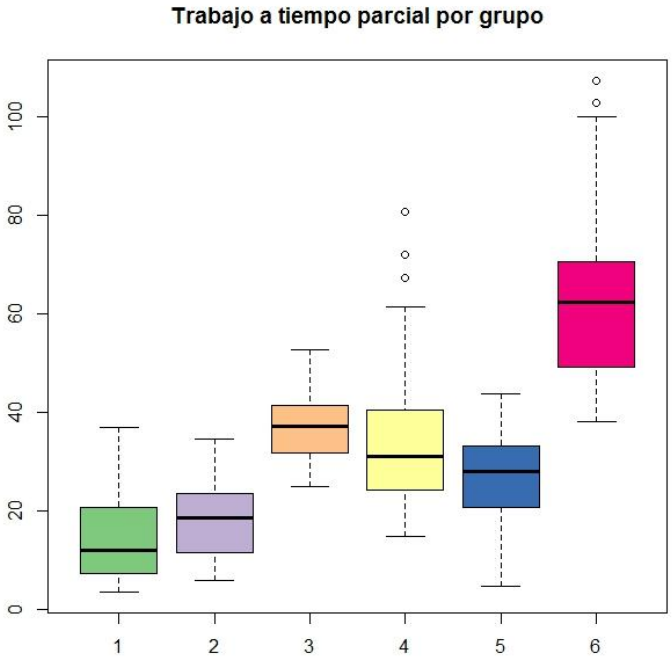
Promedio de coeficientes de pertenencia (Fuzzy Sets) por grupos						
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Grupo 1	0.29893845	0.14021227	0.14021233	0.14021232	0.14021232	0.14021231
Grupo 2	0.11319817	0.17736023	0.17736043	0.17736040	0.17736039	0.17736037
Grupo 3	0.17455447	0.16508903	0.16508914	0.16508913	0.16508912	0.16508911
Grupo 4	0.13845374	0.17230940	0.17230918	0.17230921	0.17230922	0.17230925
Grupo 5	0.11535947	0.17692827	0.17692802	0.17692806	0.17692808	0.17692811
Grupo 6	0.11455462	0.17708900	0.17708912	0.17708910	0.17708909	0.17708908

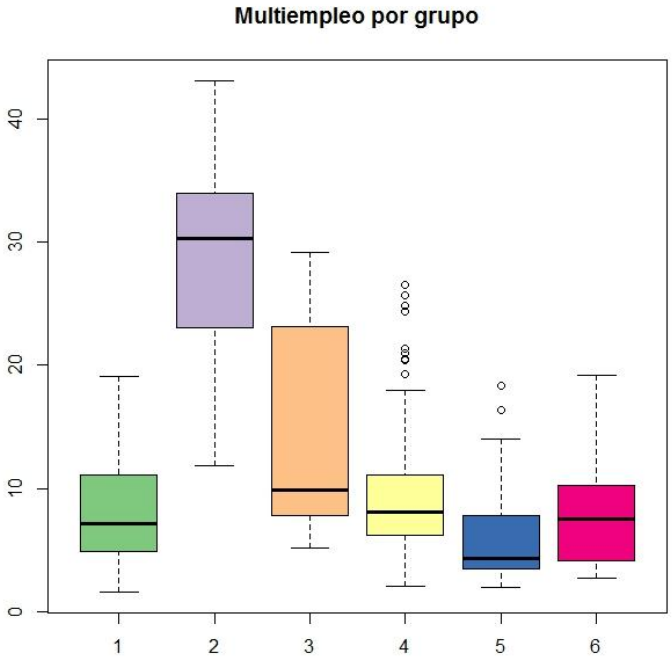
ANEXO 5: COMPOSICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LOS GRUPOS

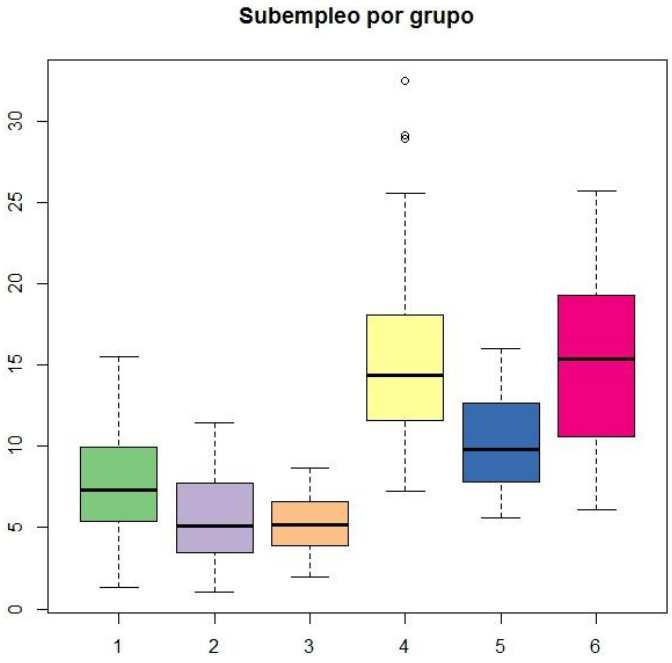
Composición de los grupos										
Grupo	Localidad		Sexo		Rango etario			Nivel educativo		
	Interior	Montevideo	Hombres	Mujeres	20 a 29	30 a 49	50 o más	Primario	Secundario	Terciario
1	42.86%	57.14%	76.19%	23.81%	46.67%	28.57%	24.76%	28.57%	52.38%	19.05%
2	41.46%	58.54%	78.05%	21.95%	0.00%	58.54%	41.46%	0.00%	2.44%	97.56%
3	57.14%	42.86%	0.00%	100.00%	0.00%	14.29%	85.71%	28.57%	30.95%	40.48%
4	43.02%	56.98%	34.88%	65.12%	6.98%	47.67%	45.35%	40.70%	36.05%	23.26%
5	75.00%	25.00%	59.62%	40.38%	59.62%	36.54%	3.85%	69.23%	23.08%	7.69%
6	52.94%	47.06%	20.59%	79.41%	100.00%	0.00%	0.00%	20.59%	23.53%	55.88%

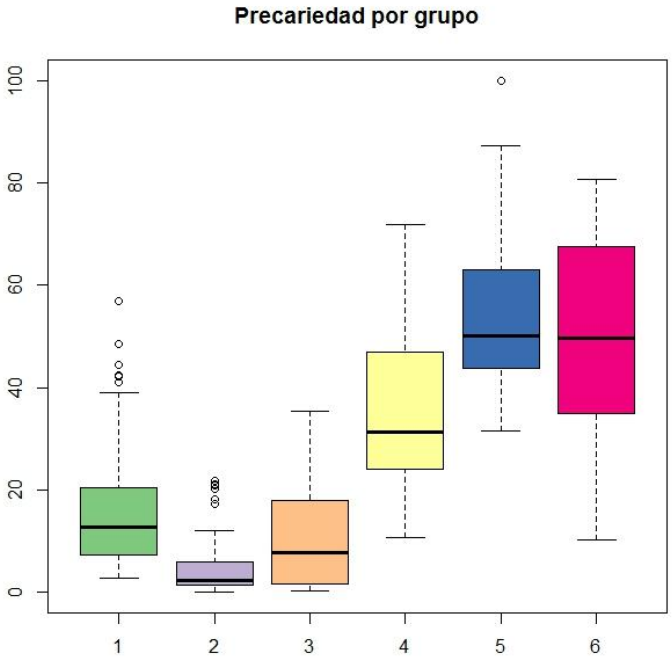


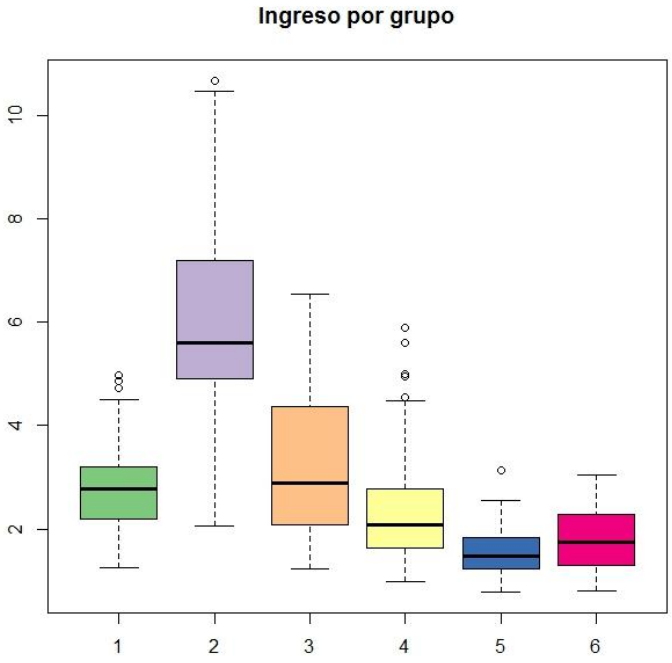

Desempleo por grupo
0
10
20
30
40
1
2
3
4
5
6


Trabajo a tiempo parcial por grupo
0
20
40
60
80
100
1
2
3
4
5
6

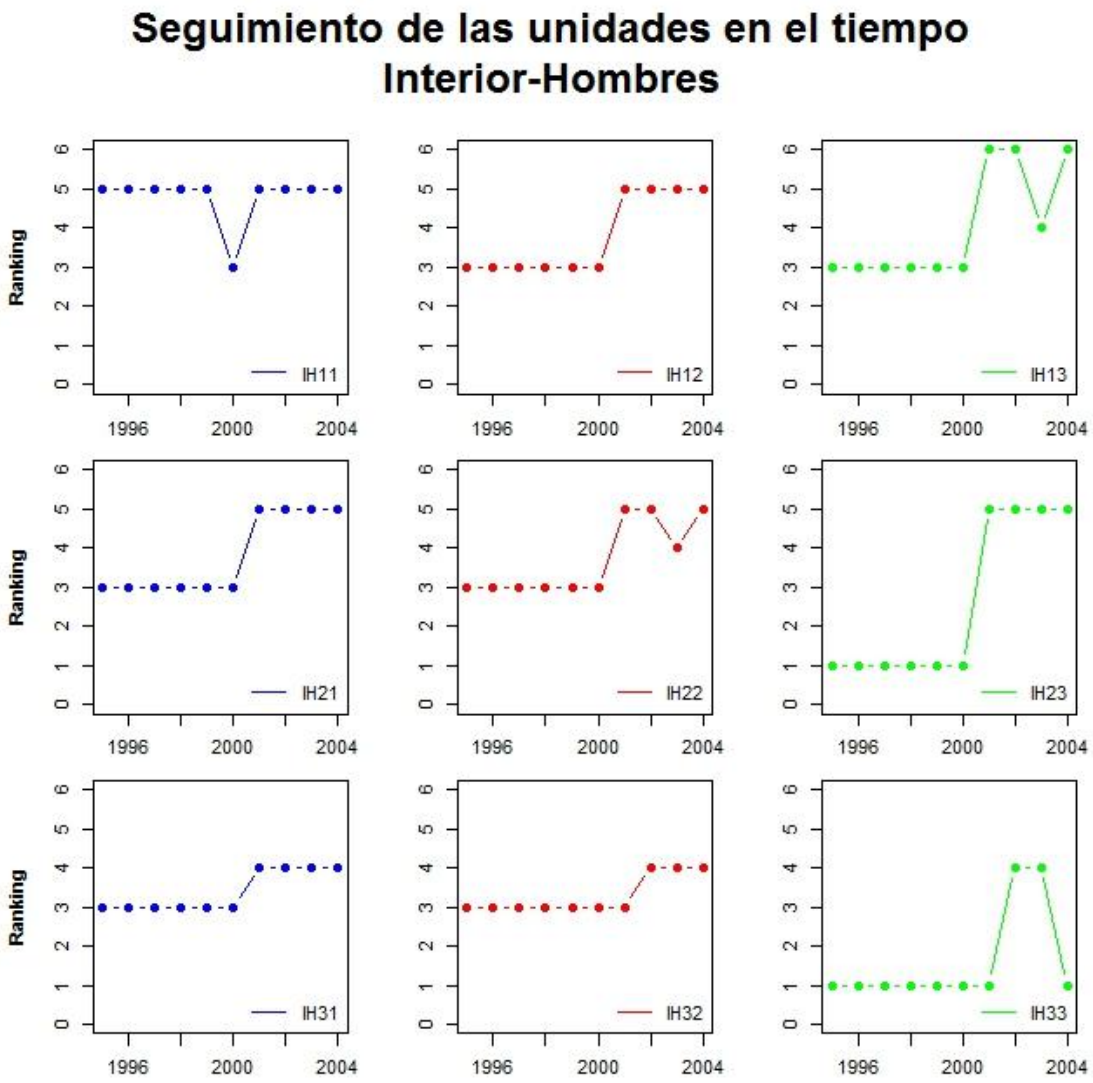

Multiempleo por grupo
0
10
20
30
40
1
2
3
4
5
6

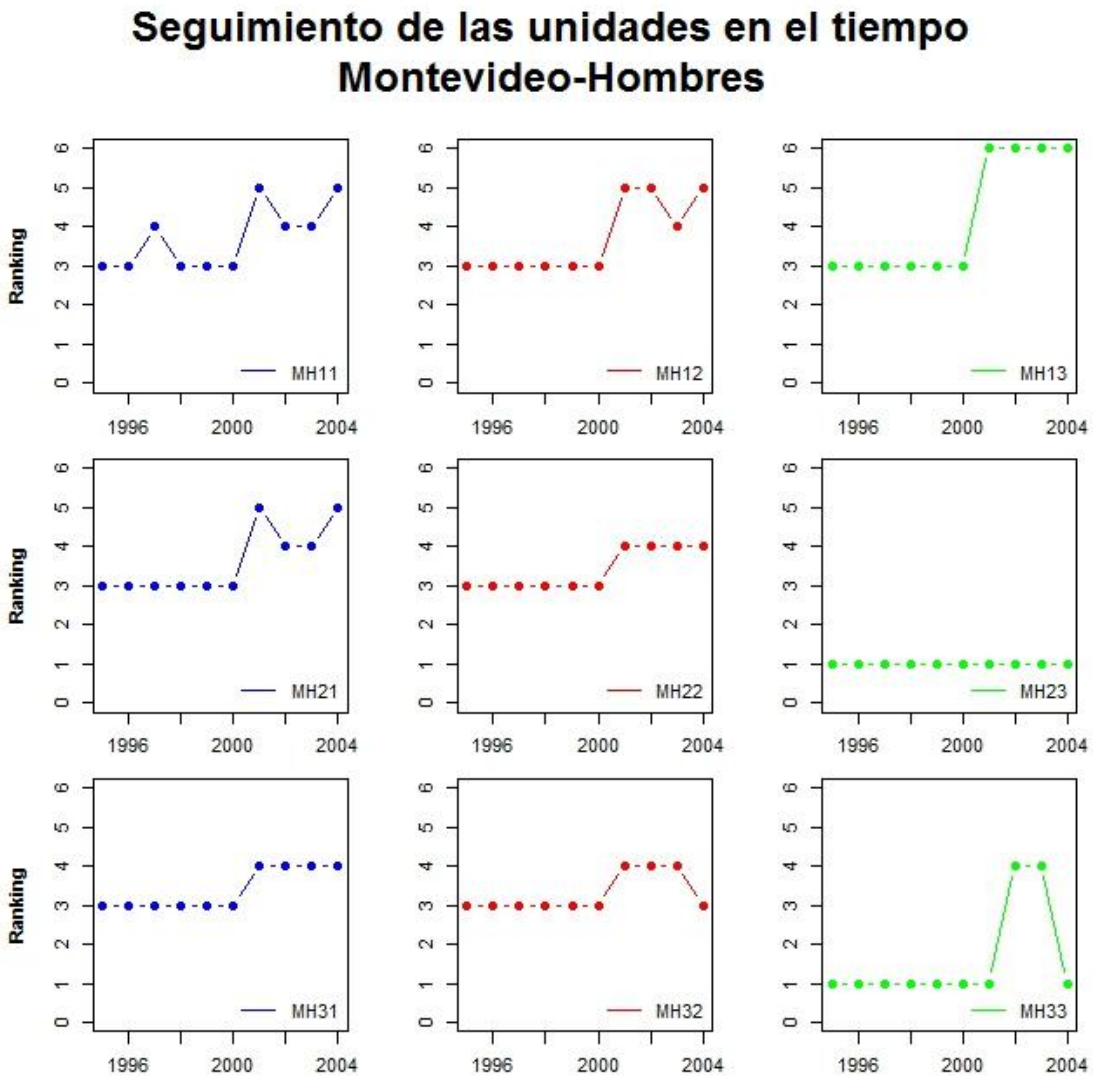

Subempleo por grupo
0
5
10
15
20
25
30
1
2
3
4
5
6

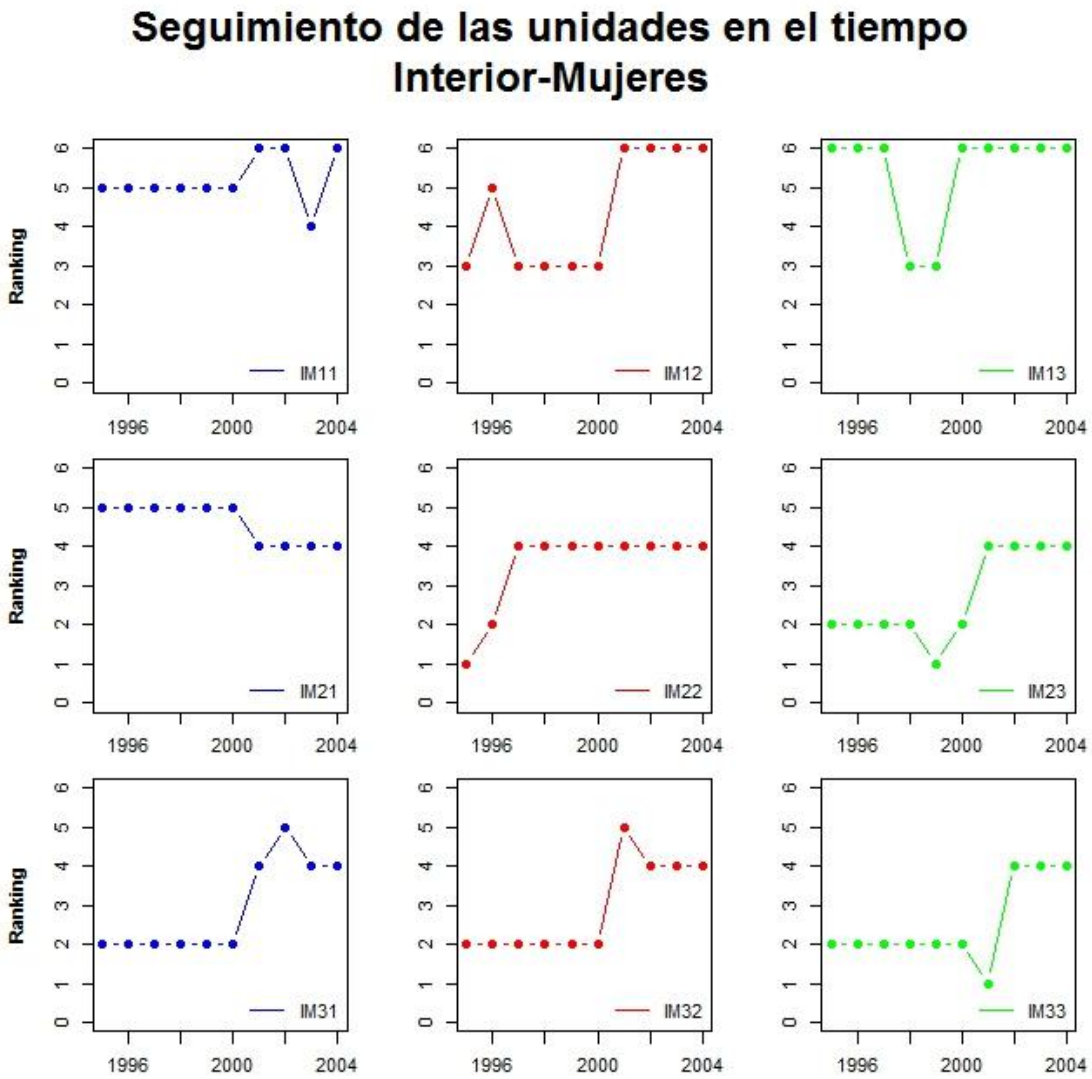

Precariedad por grupo
0
20
40
60
80
100
1
2
3
4
5
6

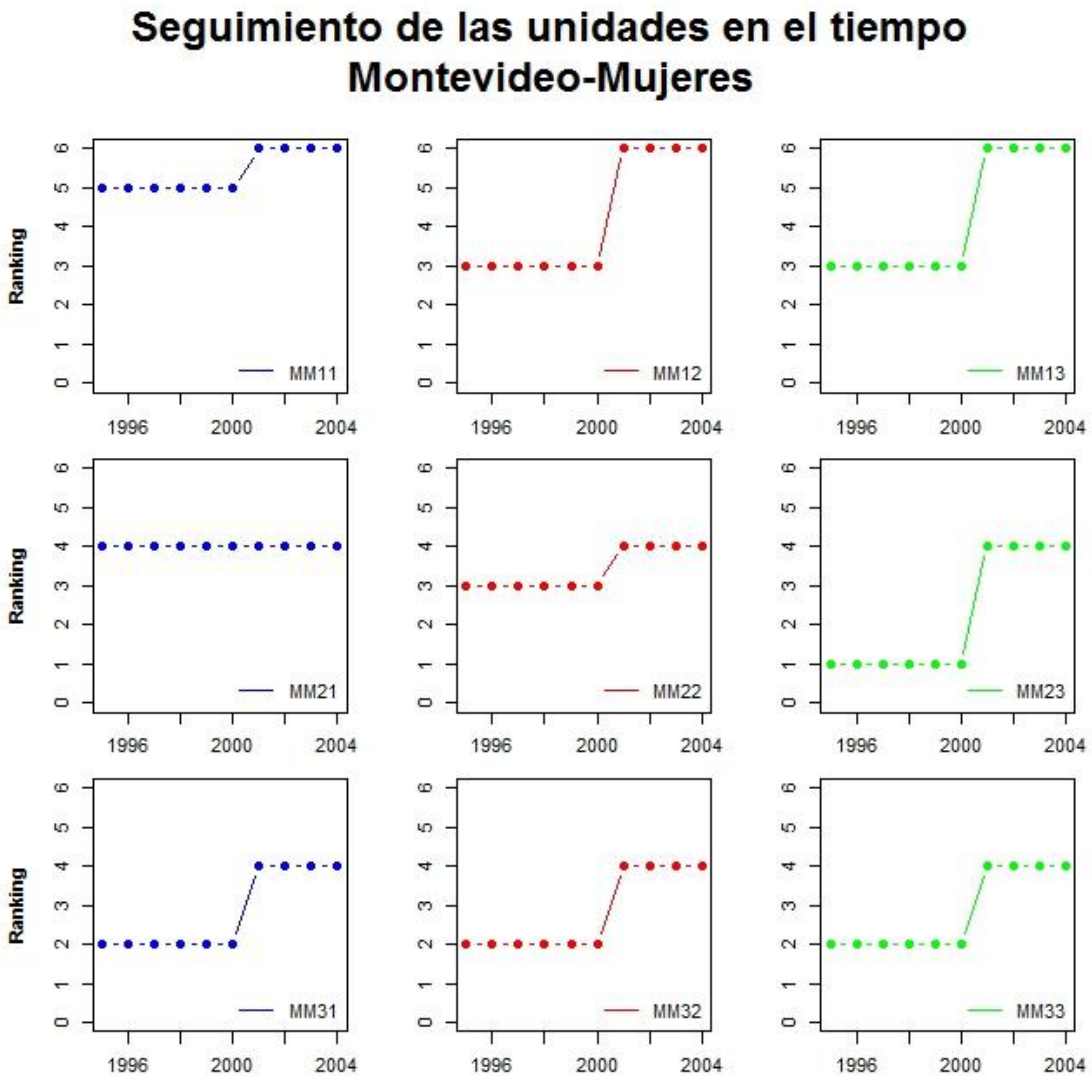

Ingreso por grupo
2
4
6
8
10
1
2
3
4
5
6

ANEXO 6: SEGUIMIENTO DE LAS UNIDADES EN EL TIEMPO




Seguimiento de las unidades en el tiempo
Montevideo-Hombres
Ranking
MH11
MH12
MH13
MH21
MH22
MH23
MH31
MH32
MH33
1996
2000
2004


Seguimiento de las unidades en el tiempo
Interior-Mujeres
Ranking
IM11
IM12
IM13
IM21
IM22
IM23
IM31
IM32
IM33
1996
2000
2004


Seguimiento de las unidades en el tiempo
Montevideo-Mujeres
Ranking
MM11
MM12
MM13
MM21
MM22
MM23
MM31
MM32
MM33
1996
2000
2004

ANEXO 7: SALIDAS DEL TEST DE MARDIA

7.A - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA TODA LA POBLACIÓN

```
   Mardia's Multivariate Normality Test
---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 75.56817
   chi.skew       : 4534.09
   p.value.skew   : 0

   g2p            : 251.8035
   z.kurtosis     : 12.46184
   p.value.kurt   : 0

   chi.small.skew : 4576.946
   p.value.small  : 0

   Result          : Data are not multivariate normal.
---------------------------------------
```

7.B - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA EL GRUPO 1

```
   Mardia's Multivariate Normality Test

---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 99.12792
   chi.skew       : 1734.739
   p.value.skew   : 2.857575e-120

   g2p            : 268.15
   z.kurtosis     : 10.687
   p.value.kurt   : 0

   chi.small.skew : 1791.061
   p.value.small  : 1.232542e-128

   Result          : Data are not multivariate normal.
---------------------------------------
```

7.C - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA EL GRUPO 2

```
   Mardia's Multivariate Normality Test

---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 124.6283
   chi.skew       : 851.6266
   p.value.skew   : 2.011102e-14

   g2p            : 243.3391
   z.kurtosis     : 2.925232
   p.value.kurt   : 0.003441997

   chi.small.skew : 922.7286
   p.value.small  : 3.329945e-20

   Result          : Data are not multivariate normal.
---------------------------------------
```

7.D - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA EL GRUPO 3

```
   Mardia's Multivariate Normality Test

---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 95.39472
   chi.skew       : 667.763
   p.value.skew   : 0.001130622

   g2p            : 219.0086
   z.kurtosis     : -0.7641452
   p.value.kurt   : 0.4447807

   chi.small.skew : 722.1783
   p.value.small  : 4.028966e-06

   Result          : Data are not multivariate normal.
---------------------------------------
```

7.E - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA EL GRUPO 4

```
   Mardia's Multivariate Normality Test

---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 117.0083
   chi.skew       : 1677.12
   p.value.skew   : 7.620153e-112

   g2p            : 267.4753
   z.kurtosis     : 9.52408
   p.value.kurt   : 0

   chi.small.skew : 1743.641
   p.value.small  : 1.387116e-121

   Result          : Data are not multivariate normal.
---------------------------------------
```

7.F - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA EL GRUPO 5

```
   Mardia's Multivariate Normality Test

---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 113.8093
   chi.skew       : 986.3473
   p.value.skew   : 5.579368e-26

   g2p            : 245.3725
   z.kurtosis     : 3.640725
   p.value.kurt   : 0.0002718713

   chi.small.skew : 1051.185
   p.value.small  : 2.230625e-32

   Result          : Data are not multivariate normal.
---------------------------------------
```

7.G - TESTEO DE NORMALIDAD MULTIVARIADA PARA EL GRUPO 6

```
   Mardia's Multivariate Normality Test

---------------------------------------
   data : .

   g1p            : 107.8603
   chi.skew       : 611.2082
   p.value.skew   : 0.06608338

   g2p            : 218.9001
   z.kurtosis     : -0.7024729
   p.value.kurt   : 0.4823843

   chi.small.skew : 672.8278
   p.value.small  : 0.0007164566

   Result         : Data are multivariate normal.
---------------------------------------
```

ANEXO 8: FUNCIÓN DE CROSS-VALIDATION[17]

```
totalAccuracy <- c()

cv <- 359
cvDivider <- floor(nrow(ech_wa) / (cv+1))

for (cv in seq(1:cv)) {
      # assign chunk to data test
      dataTestIndex <- c((cv * cvDivider):(cv * cvDivider +
cvDivider))
      dataTest <- ech_wa[dataTestIndex,]

     # everything else to train
      dataTrain <- ech_wa[-dataTestIndex, ]
      crossval   <-   multinom(grupos_agnes_mah_redu_wa_6~   .,
data=dataTrain, maxit=500, trace=F)
      pred <- predict(crossval, newdata=dataTest, type="class"

     # classification error
      cv_ac <- postResample(dataTest$grupos_agnes_mah_redu_wa_6,
pred)[[1]]
      print(paste('Current Accuracy:',cv_ac,'for CV:',cv))
      totalAccuracy <- c(totalAccuracy, cv_ac)
}

mean(totalAccuracy)
```

[17] La misma fue programada por Manuel Amunategui y puede encontrarse en su página de github (http://amunategui.github.io/multinomial-neuralnetworks-walkthrough/)