Автономная некоммерческая организация высшего образования
«Университет Иннополис»

Лабораторный практикум курса
«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»
(курс основывается на учебнике Д. В. Беклемишева)

2 неделя: Скалярное произведение векторов. Матрицы и определители.

лектор: И. В. Конюхов
преподаватель: Е. А. Марчук

2024 г.

2.2. Вычислить выражение $|\mathbf{a}|^2 - \sqrt{3}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 5|\mathbf{b}|^2$, если:
1) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 30^\circ$;
2) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 150^\circ$.

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{\ } \vec{b})$

2.5. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(-1, 2)$, $B(5, 10)$; 10
2) $A(3, -2)$, $B(3, 3)$; 5
3) $A(1, 2)$, $B(1, 2)$. 0

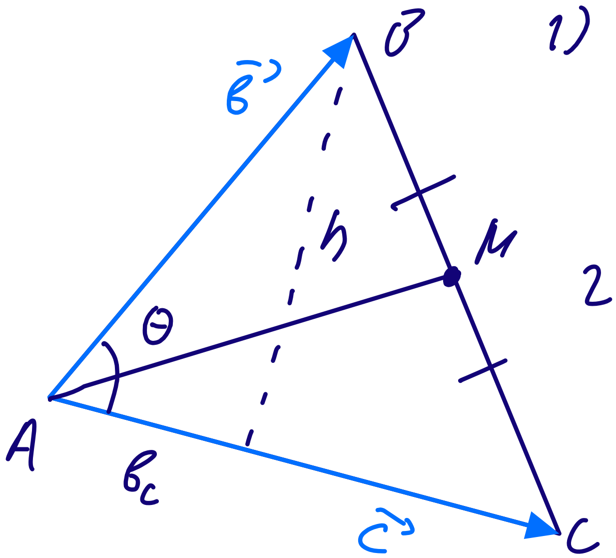
$$\rho(A, B) = \sqrt{(5+1)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

2.9. Даны три вектора: $\mathbf{a}(-1,2)$, $\mathbf{b}(5,1)$, $\mathbf{c}(4,-2)$. Вычислить:

1) $\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
2) $|\mathbf{a}|^2-(\mathbf{b},\mathbf{c})$;
3) $|\mathbf{b}|^2+(\mathbf{b},\mathbf{a}+3\mathbf{c})$.

2.15. Дан треугольник ABC. Выразить через $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$:

1) длину стороны BC;
2) длину медианы AM;
3) площадь треугольника.



1) $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

$BC^2 = (\vec{c} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{b})$

$BC^2 = c^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{c}) + b^2$

$BC = \sqrt{c^2 - 2(\vec{b}\cdot\vec{c}) + b^2}$

2) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

$AM^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 + 2(\vec{b}\cdot\vec{c}) + c^2\right)$

$AM = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2(\vec{b}\cdot\vec{c}) + c^2}$

3) $|(\vec{a}\cdot\vec{b})| = |\vec{b}|\cdot\left|\overrightarrow{Proj_{\vec{b}}\vec{a}}\right|$

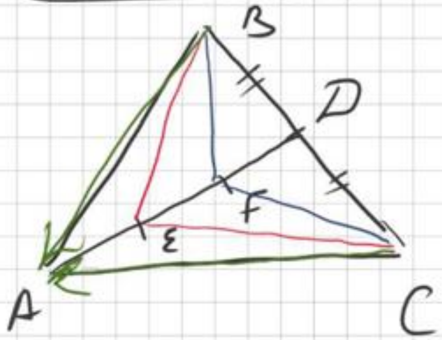
$|(\vec{b}\cdot\vec{c})| = |\vec{c}|\cdot\left|\overrightarrow{Proj_{c}\vec{b}}\right|$

$\left|\overrightarrow{Proj_{\vec{c}}\vec{b}}\right| = \dfrac{(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{c}|}$ $\qquad h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{c}|}\right)^2}$

$S = \frac{1}{2} h\cdot c = \frac{1}{2}\cdot c\cdot\sqrt{b^2 - \dfrac{((\vec{b}\cdot\vec{c}))^2}{|\vec{c}|^2}}$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2c^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2}}$$

Problem 4



ABC - triangle

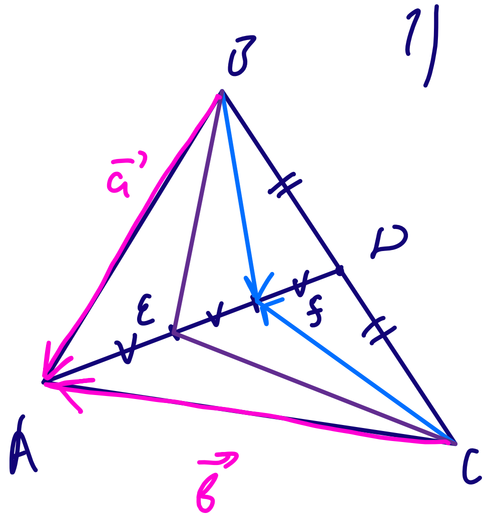
AD - median

$|AE| = |EF| = |FD|$

$\overline{BA} \cdot \overline{CA} = 4 \qquad \overline{BF} \cdot \overline{CF} = 1$

$\overline{BE} \cdot \overline{CE} = ?$

BA & CA - basis



1) $\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

$\overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

2) $\overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} = \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$

$\overrightarrow{CE} = \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\right) = \vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} = \frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$

$(\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}) = \left(\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}\right)\left(\frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{5}{36}a^2 - \frac{5}{36}b^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2(\vec{a} \cdot \vec{b})$

3) $\overrightarrow{Bf} = \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{\cancel{2}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \qquad \overrightarrow{Cf} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

$(\overrightarrow{Bf} \cdot \overrightarrow{Cf}) = \left(\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}\right) = \frac{4}{9}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{2}{9}a^2 - \frac{2}{9}b^2 + \frac{1}{9}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

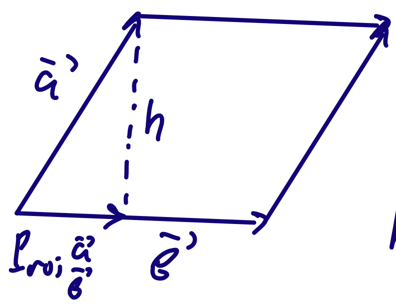
$\frac{5}{9} \cdot 4 - \frac{2}{9}(a^2 + b^2) = 1 \quad \Rightarrow (a^2 + b^2) = \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$

$\frac{20}{9} - 1 = \frac{11}{9}$

4) $(\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}) = \frac{25}{36} \cdot 4 - \frac{5}{36} \cdot \frac{11}{2} + \frac{1}{36} \cdot 4 = \frac{17}{8}$

$\sqrt{94}$

2.22. Длины базисных векторов $\overset{1}{\mathbf{e}_1}$, $\overset{1}{\mathbf{e}_2}$, $\overset{2}{\mathbf{e}_3}$ равны соответственно 1, 1, 2; углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=90^\circ$, $\angle(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)=\angle(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=60^\circ$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}(-1,0,2)$ и $\mathbf{b}(2,-1,1)$.



$$\left|\mathrm{Proj}_{\vec b}\vec a\right| = \frac{(\vec a\cdot\vec b)}{|\vec b|}$$

// $a=|\vec a|$ //

$$h=\sqrt{a^2-\frac{(\vec a\cdot\vec b)^2}{b^2}}$$

$$S=|b|\cdot\sqrt{a^2-\frac{(\vec a\cdot\vec b)^2}{b^2}} \qquad S=\sqrt{a^2b^2-(\vec a\cdot\vec b)^2}$$

$$\vec a = -\vec e_1 + 2\vec e_3$$
$$\vec b = 2\vec e_1 - \vec e_2 + \vec e_3$$

1) $(\vec a\cdot\vec a)=a^2=(-\vec e_1+2\vec e_3)\cdot(-\vec e_1+2\vec e_3)=\overset{1}{e_1^2}-\overset{-2}{2(\vec e_1\cdot\vec e_3)}-\overset{-2}{2(\vec e_1\cdot\vec e_3)}+\overset{16}{4e_3^2}$

$a^2=1+4\cdot4-4\cdot1\cdot2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=17-4=13 \qquad a=\sqrt{13}$

2) $(\vec b\cdot\vec b)=(2\vec e_1-\vec e_2+\vec e_3)(2\vec e_1-\vec e_2+\vec e_3)=$

$=\overset{4}{4\cdot e_1^2}-\overset{0}{2(\vec e_1\cdot\vec e_2)}+\overset{2}{2(\vec e_1\vec e_3)}-\overset{0}{2(\vec e_1\cdot\vec e_2)}+\overset{1}{e_2^2}-\overset{-1}{(\vec e_2\vec e_3)}+\overset{2}{2(\vec e_1\vec e_3)}-\overset{-1}{(\vec e_2\vec e_3)}+\overset{4}{e_3^2}$

$=4e_1^2+e_2^2+e_3^2-4(\vec e_1\cdot\vec e_2)+4(\vec e_1\cdot\vec e_3)-2(\vec e_2\cdot\vec e_3)$

$=4+1+4-4\cdot0+4\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=9+4-2=11 \qquad b=\sqrt{11}$

3) $(\vec a\cdot\vec b)=(-\vec e_1+2\vec e_3)(2\vec e_1-\vec e_2+\vec e_3)=\overset{-2}{-2e_1^2}+\overset{0}{(\vec e_1\vec e_2)}-\overset{-1}{(\vec e_1\cdot\vec e_3)}+\overset{2}{2(\vec e_1\vec e_3)}-$

$-\overset{-2}{2(\vec e_2\cdot\vec e_3)}+\overset{8}{2e_3^2}$

$=-2e_1^2+(\vec e_1\cdot\vec e_3)-2(\vec e_2\cdot\vec e_3)+2e_3^2$

$-2+1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot4=$

$=-2+1-2+8=7$

$$S = \sqrt{13\cdot 11 - 2\cancel{7}5^2} = \sqrt{1\cancel{9}8} = \sqrt{94}$$

2.35. Даны два вектора **a** $(1,-1,1)$ и **b** $(5,1,1)$. Вектор **c** имеет длину 1, ортогонален вектору **a** и образует с вектором **b** угол $\arccos(\sqrt{2/27})$. Вычислить координаты вектора **c**. Сколько решений имеет задача?

$$\vec a = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \vec b = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} \quad |\vec c| = 1 \quad \vec c \perp \vec a, \quad \cos(\widehat{\vec b\,\vec c}) = \frac{2}{27} = \theta$$

$$\vec c = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \quad |\vec c|^2 = 1 = \alpha^2+\beta^2\gamma^2$$

$$(\vec a\cdot\vec c) = 0 = \alpha - \beta + \gamma$$

$$(\vec b\cdot\vec c) = |\vec b|\cdot|\vec c|\cdot\cos(\theta) = 5\alpha+\beta+\gamma$$

$$\cancel{3}\cdot\sqrt3\cdot 1\cdot\frac{2}{\cancel{27}_9} = 5\alpha+\beta+\gamma$$

$$|\vec b| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt3$$

$$\frac{2\sqrt3}{9} = 5\alpha+\beta+\gamma$$

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1\\ \alpha-\beta+\gamma = 0\\ 5\alpha+\beta+\gamma = \frac{2\sqrt3}{9}\end{cases}$$

1) $6\alpha + 2\gamma = \frac{2\sqrt3}{9}$

$$\alpha = \frac{\sqrt3}{27} - \frac{1}{3}\gamma$$

2) $5\alpha - 5\beta + 5\gamma = 0$

$$5\alpha+\beta+\gamma = \frac{2\sqrt3}{9}$$

$$6\beta - 4\gamma = \frac{2\sqrt3}{9}$$

$$6\beta = \frac{2\sqrt3}{9} + 4\gamma$$

$$\beta = \frac{\sqrt3}{27} + \frac{2}{3}\gamma$$

$$\left(\frac{\sqrt3}{27} - \frac13\gamma\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3}{27} + \frac23\gamma\right)^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\frac{1}{243} - 2\cdot\frac{\sqrt3}{27}\cdot\frac13\gamma + \frac19\gamma^2 + \frac{1}{243} + 2\cdot\frac{\sqrt3}{27}\cdot\frac23\gamma + \frac49\gamma^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\frac{2}{243} + \frac23\cdot\frac{\sqrt3}{27}\gamma + \frac59\gamma^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\frac{14}{9}\gamma^2 + \frac{2\sqrt3}{81}\gamma - \frac{241}{243} = 0 \quad \Big|\cdot 243$$

$$378\gamma^2 + 6\sqrt3\gamma - 241 = 0$$

$$D = \sqrt{36\cdot 3 + 4\cdot 241\cdot 378} = \sqrt{364500} = 270\sqrt5$$

$$\gamma = \frac{-6\sqrt{5} \pm 270\sqrt{5}}{2 \cdot 378}$$

1.11. Проверить, будут ли компланарны векторы **l**, **m** и **n**; в случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую (здесь **a**, **b**, **c** — три некомпланарных вектора):

15.2. Вычислить линейную комбинацию матриц:

1) $3\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $2\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}$;