1) Правило сложения

A – множество объектов

$A=\{a_1,\dots,a_n\}$

$B=\{b_1,\dots,b_m\}$

$A\cap B=\varnothing$

Кол-во способов выбрать 1 об. из A или один из B $= n+m$

2) Правило умножения

$A=\{a_1,\dots,a_n\}$

$B=\{b_1,\dots,b_m\}$

Кол-во способов выбрать 2 об. вида $(a_i; b_i)$ "один из A, затем один из B"

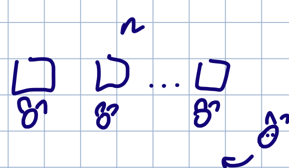
$= n\cdot m$

Пересечение не важно

Принцип Дирихле

n ящиков

n+1 кролик



где-то хотя бы два кролика

Терминология

Размещение, перестановки, сочетания

$A=\{a_1,\dots,a_n\}$

k-размещение

$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$

$\bar{A}_n^k=n^k$

k-сочетание

$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ← без повтор.

$\bar{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\binom{n+k-1}{k}$ ← с повтор.

а из n по k

k-сочетания из n объектов без/с повторениями

Теорема 1. $\bar{A}_n^k = n^k$

Теорема 2. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Теорема 3.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Теорема 4.

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Д-во:

$n=33$ $\{а, б, в, \dots, м, \dots, я\}$

$k=4$ $\{м, а, б, а\}$

А Б В М

1 1 0 1 0 0 0 … 0 1 0 … 0

перегородка

Я

Перегородок: $n-1$ колв

Единиц: k

Длина: $(n+k-1)$

$C^k_{(n+k-1)}$ – кол-во способов выбрать k позиций

$\square\square\square\square \dots \square$

$1\ 2\ 3\ 4 \dots (n+k-1)$

- $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots \overset{?}{=} C_{2n}^n$

$$C_n^0 \cdot C_n^0 + C_n^1 \cdot C_n^1 + \dots = C_{2n}^n$$

$$\{\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{k}, \underbrace{a_{n+1}, \dots, a_{2n}}_{n-k}\}$$

$$C_n^k \cdot C_k^{n-k} = C_n^k \cdot C_n^k = (C_n^k)^2$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

$$(x+y)^{2n} = (x+y)^n (x+y)^n =$$

$$= \left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^n y^n\right) \cdot \left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^n y^n\right) =$$

$$= C_n^0 \cdot C_n^n \cdot x^n y^n + \underbrace{C_n^1 \cdot C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} y \cdot x^1 y^{n-1}}_{= \; C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot x^n y^n} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad x^n y^n \left(C_n^0 \cdot C_n^n + \ldots + C_n^n \cdot C_n^0\right)$$

$$\quad\quad x^n y^n \cdot C_{2n}^n$$

$$\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\, 2!\, 1!\, 2!} = C_{13}^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot \ldots$$, где $2,1,2$ – кол-во повт. конкр. буквы

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 - n_1 \\ a_2 - n_2 \\ \ldots \\ a_k - n_k \end{matrix} \qquad P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots}^{n_k}}$$

Полиномиальная формула:

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}^{n \text{ штук}} =$$

$$= C_n^0 x_1^n + C_n^1 x_1^{n-1} \cdot x_2^1 + C_n^1 x_1^{n-1} x_3^1 \ldots = \sum P(n_1, \ldots, n_k)\, x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, $n_i \geq 0$

$$x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots = P(n_1, \ldots, n_k)$$

5

$$\sum P(n_1, \ldots, n_k) = k^n$$

(все $x_i = 1$)

$x_1 + \ldots + x_k = k \cdot 1$

$k = n+1$

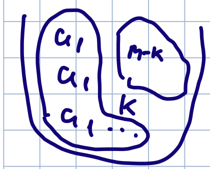
$n = k-1$

6.

$\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ → m сочет. с повт. $C^m_{n+m+1-1} = \underset{\displaystyle \overset{\parallel}{C^n_{m+n}}}{C^m_{n+m}} = \bar{C}^m_{n+1}$

• пройдём по a_1:

a_1 входит в m-сочетание сколько-то раз: $k \in \{0, 1, \dots, m\}$



$$\bar{C}^{m-k}_{n+1-1} = \bar{C}^{m-k}_{n} = C^{m-k}_{n+m-k-1} = C^{n-1}_{n+m-k-1}$$

// $n-1 = (n+m-k-1) - (m-k)$ //

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m} C^{n-1}_{n+m-k-1} = C^{n}_{m+n}}$$

по всем k для a_1 всего сочет. с повт.

// $\bar{C}^m_{n+1} = C^m_{n+1+m-1} = C^m_{n+m} = C^n_{n+m}$ //

// ex. тождество 6

1) $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{m} \overset{=1}{C^{0}_{m-k}} = C^{1}_{m+1} = (m+1)$$

$$\sum_{k=0}^{m} 1 = (m+1)$$

2) $n = 2$

$$\sum_{k=0}^{m} (m-k+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$1 + \dots + (m+1)$

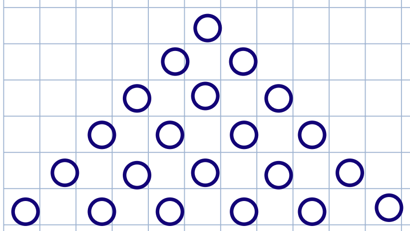
3) $n = 3$

$$C^{3}_{m+3} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{m} C^{2}_{2+m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2+m-k)!}{2\,(m-k)!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2+m-k)(1+m-k)}{2} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2} + \dots + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$$

$$\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2} + \dots + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}\right]$$



пирамида из апельсинов

$$\frac{(m+1)(m+1+1)}{2} = \frac{(m+1)^2}{2} + \frac{m+1}{2} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} + \frac{(m-1)^2}{2} + \frac{(m-1)}{2} + \dots + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

$$\frac{1}{2}\left((m+1)^2 + m^2 + \dots + 1^2\right) + \frac{1}{2}\left((m+1) + m + \dots + 1\right) = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$$

$$\frac{1}{2}\left((m+1)^2 + m^2 + \dots + 1^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$$

$$\left(1 + \dots + (m+1)^2\right) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = (m+1)(m+2)\frac{2m+3}{6}$$

$n = m+1$

$$\left(1 + \dots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\boxed{\left(1 + \dots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}$$

7. $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

Выбор капитана и команды

8. $$\left((y+x)^n\right)' = n(x+y)^{n-1}$$

$$n(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1} = n\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Полиномиальный коэф.

$$\underline{P}(k_1,\dots,k_m) = C_n^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \binom{n}{k_1,\dots,k_n} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

$$C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-k_1-k_2-\ldots}^{k_n} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\ldots = \underline{P}(k_1,\dots,k_m)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k,\, n-k}$$