Автономная некоммерческая организация высшего образования
«Университет Иннополис»

Лабораторный практикум курса
«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»
(курс основывается на учебнике Д. В. Беклемишева)

1 неделя: Векторные пространства

лектор: И. В. Конюхов
преподаватель: Е. А. Марчук

2024 г.

1.5. Даны три вектора $\mathbf{a}(1,3)$, $\mathbf{b}(2,-1)$, $\mathbf{c}(-4,1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=4\\3\alpha-\beta=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=4\\6\alpha-2\beta=-2\end{cases}$$

$$7\alpha=2 \qquad \boxed{\alpha=\frac{2}{7},\ \beta=\frac{13}{7}}$$

$$\frac{2}{7}+2\beta=4$$

$$2\beta=\frac{28-2}{7}=\frac{26}{7}$$

$$\beta=\frac{13}{7}$$

1.7. Вектор **a** имеет в некотором базисе координаты $(x, 1-x)$, вектор **b** — координаты (x^2-2x, x^2-2x+1). При каких значениях x векторы 1) коллинеарны; 2) одинаково направлены?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x^2-2x \\ x^2-2x+1 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

2)

$$\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^2-2x \\ x^2-2x+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \cdot (x^2-2x) \\ 1-x = \lambda \cdot (x-1)^2 \end{cases}$$

$$x(1-x)^2 = x(x-2)\cdot(1-x)$$

$$x(1-x)(1-x-x+2) = 0$$

$$x(1-x)(3-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

1.8. Даны четыре вектора $\mathbf{a}(3,0,-2)$, $\mathbf{b}(1,2,-5)$, $\mathbf{c}(-1,1,1)$, $\mathbf{d}(8,4,1)$. Найти координаты векторов $-5\mathbf{a}+\mathbf{b}-6\mathbf{c}+\mathbf{d}$, $3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $-5\vec{a}+\vec{b}-6\vec{c}+\vec{d} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}-\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.11. Проверить, будут ли компланарны векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$; в случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую (здесь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три некомпланарных вектора):

1) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\quad \mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

1) $\lambda_1 \vec{l} + \lambda_2 \vec{m} + \lambda_3 \vec{n} = (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\vec{a} + (2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)\vec{b} + (2\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1)\vec{c}$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 3\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \\ 2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$2\lambda_2 - \lambda_2 - \lambda_2 = 0$

$0 \cdot \lambda_2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1$ - любые

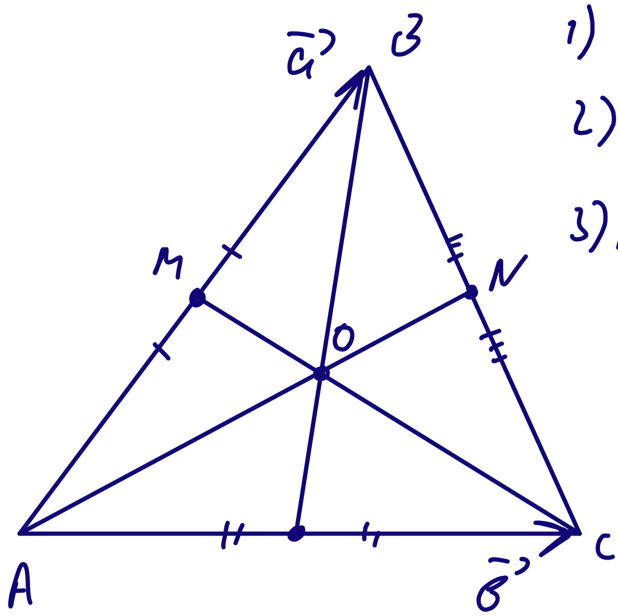
лин. зав.

2) $\lambda_1 \vec{l} + \lambda_2 \vec{m} + \lambda_3 \vec{n} = (\lambda_1 - \lambda_3)\vec{a} + (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{b} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{c}$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0$$

1.14. В треугольнике ABC точка M — середина отрезка AB и точка O — точка пересечения медиан. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$.



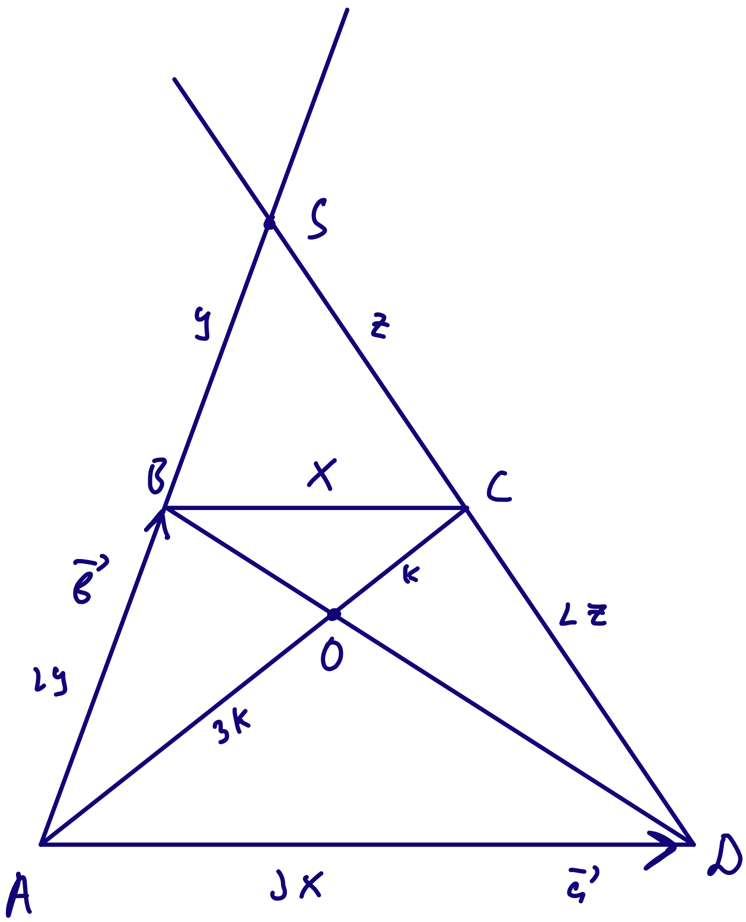
1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a}$

2) $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

3) $\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}\left(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right) =$

$= \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$

1.16. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $3:1$. O — точка пересечения диагоналей трапеции, S — точка пересечения продолжений боковых сторон. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AS}$.



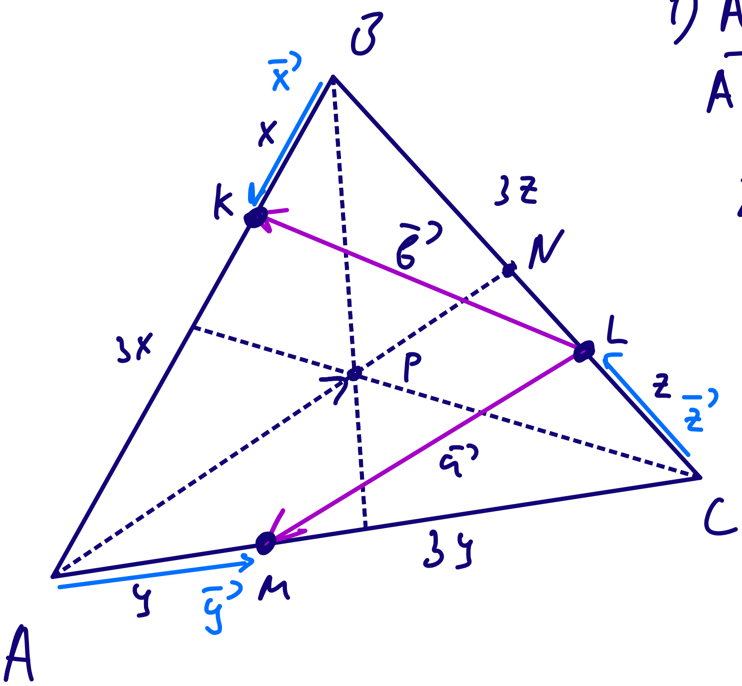
1) $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

2) $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\cdot\left(\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(3\vec{b} + \vec{a}\right)$

3) $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\cdot\vec{b}$

1.22. В треугольнике ABC точки K, L, M расположены соответственно на сторонах AB, BC и AC так, что $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MA| = 3 : 1$. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке P. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AP}$ в базисе $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LM}$.



1) $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AN} = \frac{1}{3}(4\vec{y} + 2\vec{z})$

$\vec{AP} = \frac{4}{3}\vec{y} + \frac{2}{3}\vec{z}$

2) $\vec{AN} = -4\vec{x} - 2\vec{z} = 4\vec{y} + 2\vec{z}$

$-4\vec{x} = 4\vec{y} + 4\vec{z}$

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

3) $\vec{LM} = \vec{a} = -\vec{z} - 3\vec{y}$

$\vec{a} = -\vec{z} - 3\vec{y}$

$\vec{b} = 3\vec{z} + \vec{x} = 3\vec{z} + \vec{y} + \vec{z} =$

$= 4\vec{z} + \vec{y}$

$$\begin{cases} \vec{a} = -3\vec{y} - \vec{z} \\ \vec{b} = \vec{y} + 4\vec{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\vec{a} = -12\vec{y} - 4\vec{z} \\ \vec{b} = \vec{y} + 4\vec{z} \end{cases}$$

$4\vec{a} + \vec{b} = -11\vec{y}$

$\vec{y} = -\frac{1}{11}(4\vec{a} + \vec{b})$

$$\begin{cases} \vec{a} = -3\vec{y} - \vec{z} \\ 3\vec{b} = 3\vec{y} + 12\vec{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} + 3\vec{b} = 11\vec{z} \\ 3\vec{b} = 3\vec{y} + 12\vec{z} \end{cases}$$

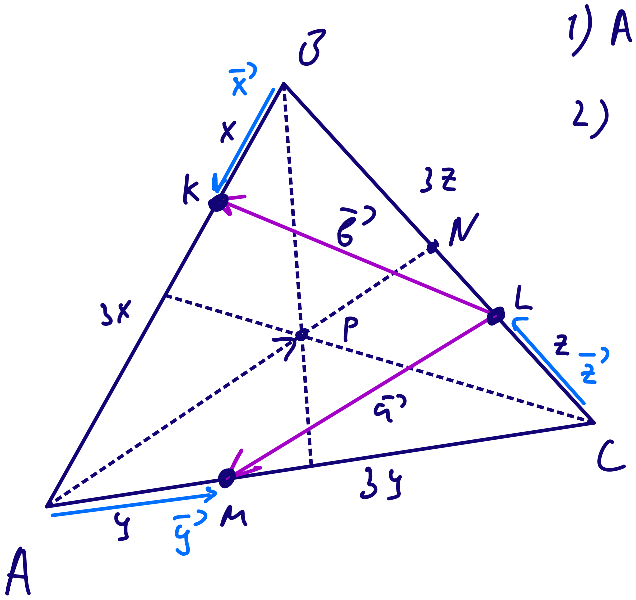
$\vec{z} = \frac{1}{11}(\vec{a} + 3\vec{b})$

$$\vec{AP} = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{11}\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{11}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\right)$$

$$\vec{AP} = -\frac{16}{33}\vec{a} - \frac{4}{33}\vec{b} + \frac{2}{33}\vec{a} + \frac{6}{33}\vec{b}$$

$$\vec{AP} = -\frac{14}{33}\vec{a} + \frac{2}{33}\vec{b}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{33} \\ \frac{2}{33} \end{pmatrix}$$



1) $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AN} = \frac{1}{3}\left(4\vec{y} - 4\vec{x}\right)$

2) $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$

3) $\vec{a} = -\vec{z} + 3\vec{y} =$

$= \vec{x} - \vec{y} + 3\vec{y} = \vec{x} + 2\vec{y}$

$\vec{b} = 3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) + \vec{x} =$

$= 4\vec{x} - 3\vec{y}$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} \\ \vec{b} = 4\vec{x} - 3\vec{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\vec{a} = 4\vec{x} + 8\vec{y} \\ \vec{b} = 4\vec{x} - 2\vec{y} \end{cases}$$

$$4\vec{a} - \vec{b} = 10\vec{y}$$