Автономная некоммерческая организация высшего образования

«Университет Иннополис»

Лабораторный практикум курса

«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»

(курс основывается на учебнике Д. В. Беклемишева)

6 неделя: прямые на плоскости

лектор: И. В. Конюхов

преподаватель: Е. А. Марчук

2024 г

5.1. При каком необходимом и достаточном условии прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ $(\mathbf{a}_i \neq 0,\ i = 1, 2)$:

1) пересекаются в единственной точке;

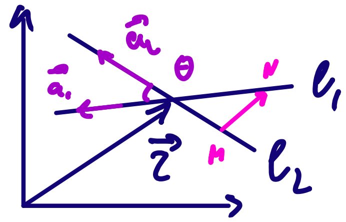
2) параллельны, но не совпадают;

3) совпадают?

$l_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t_1$

$l_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t_2$

1) $\theta \neq 0$ $[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] \neq 0$ и $([\vec{a}_1 \times \vec{a}_2] \cdot \vec{MN}) = 0$



$\vec{MN} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

2) $\theta = 0$

$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0 \\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}_1 \neq 0 \end{cases}$$

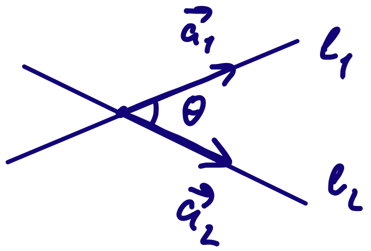
3) $$\begin{cases} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0 \\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}_1 = 0 \end{cases}$$

5.2. Найти угол между прямыми, заданными своими уравнениями:

1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ $\quad (\mathbf{a}_i \neq 0,\ i = 1, 2)$;

2) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ $\quad (\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2)$.

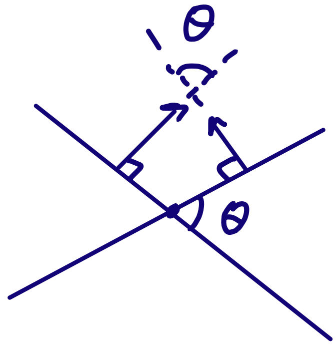
1)



$$\cos\theta = \frac{|(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

2) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_1) = D_1$

$(\vec{r}_2 \cdot \vec{n}_2) = D_2$

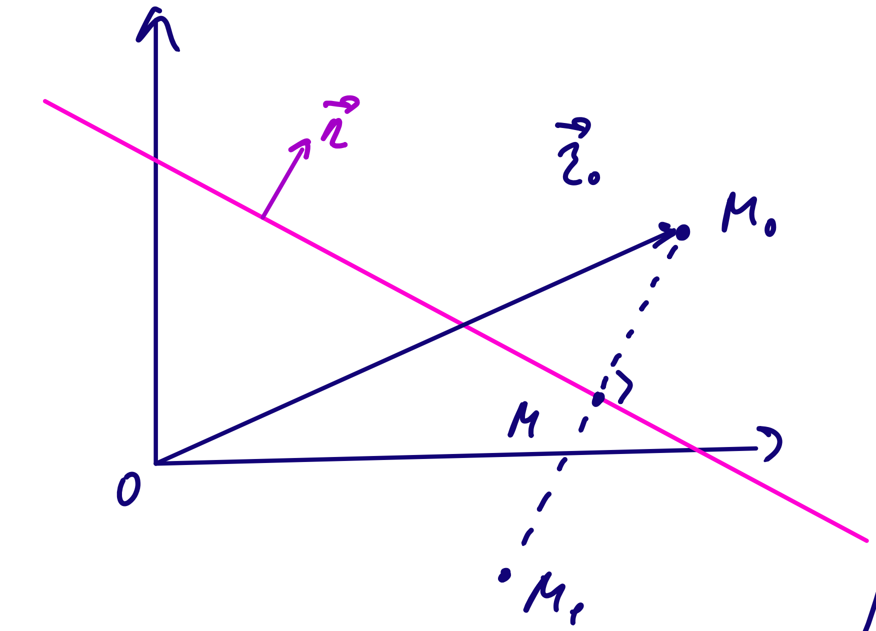


$$\cos\theta = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

5.4. Даны точка M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и прямая $(\mathbf{r},\mathbf{n}) = D$ $(\mathbf{n}\neq 0)$. Найти радиус-векторы:

1) проекции точки M_0 на прямую;

2) точки M_1, симметричной с M_0 относительно данной прямой.



1) $\overrightarrow{MM_0} = \lambda\cdot\vec{n}$

$\overrightarrow{MM_0} = \vec{M_0} + \vec{r}_0$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}_0 - \overrightarrow{MM_0}$

$(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}) = D$

$(\vec{r}_0 - \overrightarrow{MM_0})\cdot\vec{n} = D$

$(\vec{r}_0\cdot\vec{n}) - (\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}) = D$

$(\vec{r}_0\cdot\vec{n}) - MM_0\cdot n = D$

$$MM_0 = \frac{|(\vec{r}_0\cdot\vec{n}) - D|}{|\vec{n}|}$$

// $(a\cdot b) := (a,b)$ //

1) $\overrightarrow{MM_0} = \lambda\vec{n} = -\overrightarrow{OM} + \vec{r}_0$

Пусть $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$

$\vec{r}_M = \vec{r}_0 - \overrightarrow{MM_0} = \vec{r}_0 - \lambda\vec{n}$

$((\vec{r}_0 - \lambda\vec{n})\cdot\vec{n}) = D$

$(\vec{r}_0\cdot\vec{n}) - \lambda(\vec{n}\cdot\vec{n}) = D$

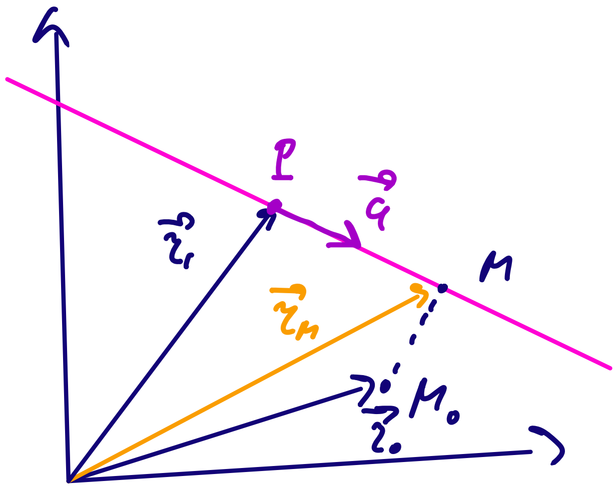
$$\lambda = \frac{(\vec{r}_0\cdot\vec{n}) - D}{(\vec{n}\cdot\vec{n})} \Rightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0\cdot\vec{n})}{(\vec{n}\cdot\vec{n})}\cdot\vec{n}$$

2) $$\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_0 + -2\cdot\overrightarrow{MM_0} = \vec{r}_0 - 2\cdot\frac{(\vec{r}_0\cdot\vec{n}) - D}{(\vec{n}\cdot\vec{n})}\vec{n}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_0 + 2\cdot\frac{D - (\vec{r}_0\cdot\vec{n})}{(\vec{n}\cdot\vec{n})}\vec{n}$$

5.5. Найти расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой, заданной уравнением:

1) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D \ (\mathbf{n} \neq 0)$; 2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t \ (\mathbf{a} \neq 0)$.



1) $\rho(M_0, l) = |MM_0| = \left| \dfrac{(\vec{r}_0 \cdot \vec{n}) - D}{(\vec{n} \cdot \vec{n})} \right| \cdot |\vec{n}|$

2) $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$

$\overrightarrow{M_0M} = -\vec{r}_0 + \vec{r}_M$

$\vec{r}_M = \overrightarrow{M_0M} + \vec{r}_0$

$\overrightarrow{M_0M} + \vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \vec{a}t \qquad \overrightarrow{MM_0} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \vec{a}t$

$(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a}) = 0 \qquad \big((\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}\big) + (\vec{a} \cdot \vec{a})t = 0$

$$t = \frac{\big((\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \cdot \vec{a}\big)}{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{M_0M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + \vec{a} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \cdot \vec{a}}{(\vec{a} \cdot \vec{a})}}$$

$\overrightarrow{PM} = t\vec{a}$

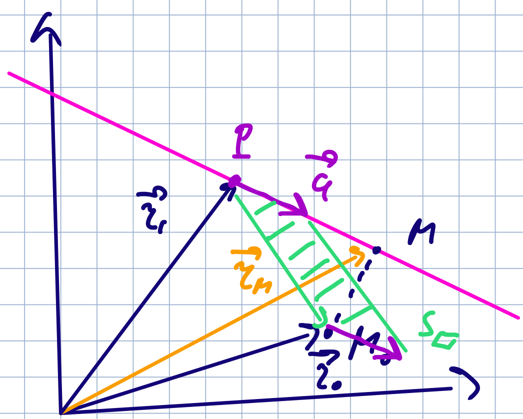
$\overrightarrow{PM_0} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_0$

$\big|[\overrightarrow{PM} \times \overrightarrow{PM_0}]\big| = |\overrightarrow{MM_0}| \cdot |\overrightarrow{PM}|$

$$\left|\left[t\vec{a} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\right]\right| = \rho(M, l)\cdot|t\vec{a}| \quad \Big|\cdot\frac{1}{t}$$

$$\frac{\left|\left[\vec{a} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\right]\right|}{\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}} = \rho(M, l)$$

Беклемишев
гл. 5



На д.з.! Обсуждаем идею решения.

5.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$ и параллельной прямой:

1) $x - 2y + 5 = 0$; $Ax + By + C = 0$
2) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3}$; $\dfrac{x-x_0}{a_x} = \dfrac{y-y_0}{a_y}$
3) $x = 2$;
4) $y = -1$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$
5) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

5.9. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

1) $A(-3,1)$ и $B(1,2)$;
2) $A(0,2)$ и $B(-1,0)$;
3) $A(2,1)$ и $B(2,-5)$;
4) $A(1,-3)$ и $B(3,-3)$.

5.10. Установить, пересекаются, параллельны или совпадают прямые данной пары; если прямые пересекаются, найти координаты точки их пересечения:

1) $x - 3y - 2 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$;
2) $x + 3y - 1 = 0$ и $2 - 2x - 6y = 0$;
3) $-x - y - 3 = 0$ и $3x + 3y + 1 = 0$;
4) $x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$ и $x = 2 - t$, $y = 2 + t$.

N 5.8

1) $x-2y+5=0$ $A(-3,4)$

$Ax+By+C=0$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}-B\\A\end{pmatrix}$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$$

N 5.9

1) $A(-3,1) \quad B(1,2)$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4,1)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , t \in \mathbb{R}$$

№ 5.10

1) $x-3y-2=0$ и $2x+y-1=0$;

$(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2) = -3+2=-1 \neq 0 \iff$ пересекаются

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{r}_0^{\,1} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{r}_0^{\,2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_0^{\,1} + t_1\vec{a}_1$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_0^{\,2} + t_2\vec{a}_2$

$2x = 1-y$

$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = t$ $\begin{cases} x=-t \\ y=2t+1\end{cases}$

$\Rightarrow$

4) $x=1+2t$, $y=1-t$ и $x=2-t$, $y=2+t$.

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t\end{cases}$ 1

$\begin{cases} x=2-t \\ y=2+t\end{cases}$ 2

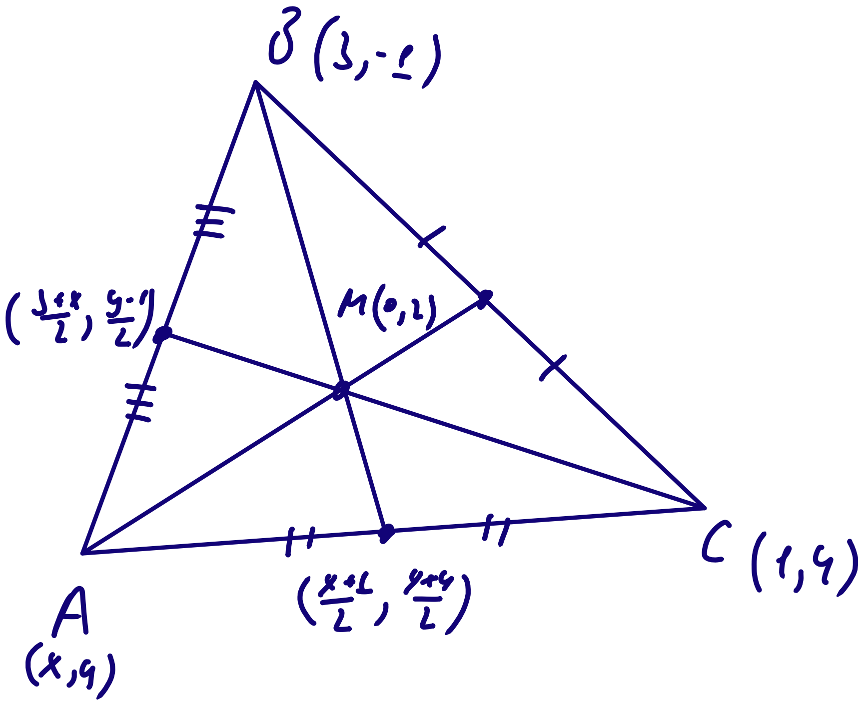
подставим

$x+y=4$ для l_2

$1+2t+1-t=4$

$2+t=4$ $t=2$ $\Rightarrow A(5,-1)$

5.15. Даны две вершины треугольника $(3, -1)$ и $(1, 4)$ и точка пересечения его медиан $(0, 2)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.



$$\begin{pmatrix} \frac{1+x}{2} \\ \frac{y-4}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1+x}{2} = -\frac{3}{2}$ $\quad 1+x=-3 \quad x=-4$

$\frac{y-4}{2} = -\frac{3}{2}\cdot 2 \quad y-4=-6 \quad y=3$

$A(-4, 3)$

$$\begin{pmatrix} \frac{x-5}{2} \\ \frac{y+6}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x-5=-9 \quad x=-4$

$y+6=9 \quad y=3$

$A(-4, 3)$

5.23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$ и перпендикулярной прямой:

1) $x-2y+5=0$;
2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$; $\quad \dfrac{x-1}{a_x}=\dfrac{y+2}{a_y}$
3) $x=2$;
4) $y=-1$;
5) $x=3+t,\ y=4-7t.$ $\quad \dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=t$

1) $x-2y+5=0$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{a}'=\lambda\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \lambda=1$ Тогда $\underbrace{l':\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}$

2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3} \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

На д.з.! Обсуждаем идею решения.

5.25. Длина стороны ромба с острым углом 60° равна 2. Диагонали ромба пересекаются в точке $M(1,2)$, причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнения сторон ромба.

5.27. Найти расстояние от точки $A(1,-2)$ до прямой, заданной своим уравнением:

1) $2x-3y+5=0$;
2) $4x-3y-15=0$;
3) $4x=3y$;
4) $4x-3y-10=0$;
5) $x=7$;
6) $y=9$.

$$\rho(A,\ell)=\frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}-B\\A\end{pmatrix}$$

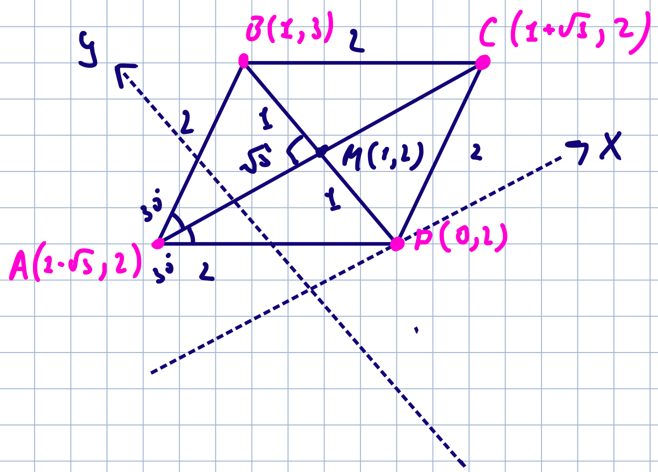
$$n_x=a_y$$
$$n_y=-a_x$$

5.47. Найти угол между прямыми:

1) $2x+y-1=0$ и $y-x=2$;
2) $x=4$ и $2x-y-1=0$;
3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-4}$ и $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}$;
4) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}$ и $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y}{-4}$;
5) $x=3t,\ y=-1+2t$ и $x=1-2t,\ y=-5+t$.

$$MK=\frac{|(\vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1))|}{|\vec{n}|}=\rho(M,\ell)$$

5.25. Длина стороны ромба с острым углом 60° равна 2. Диагонали ромба пересекаются в точке $M(1,2)$, причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнения сторон ромба.



5.30. Точка A лежит на прямой $2x-3y+4=0$. Расстояние от точки A до прямой $3y=4x$ равно 2. Найти координаты точки A.

$A \in l_1: 2x-3y+4=0$

$l_2: 4x-3y=0 \qquad \vec{n}_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$$\rho(A,l_2)=\frac{|\vec{n}_2\cdot(-\vec{r}_0+\vec{r}_A)|}{|\vec{n}_2|} \qquad \vec{r}_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{r}_A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}y-2\\y\end{pmatrix}$$

$$(\vec{r}_A-\vec{r}_0)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}y-2\\y\end{pmatrix} \qquad n_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

$$\rho(A,l_2)=2=\frac{|(6y-8)-3y|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|3y-8|}{5}$$

$$|3y-8|=10$$

$$\left[\begin{array}{l}3y-8=10\\3y-8=-10\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}y=6\\y=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t \qquad \vec{r}_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad 4x-3y=0$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

1) рм l_1:

$2x-3y+4=0$

$A\in l_1$

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t\\2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t+1\\2t+2\end{pmatrix}$$

2)

$$\rho(A,l_2)=\frac{|12t+4-6t-6|}{5}=\frac{|6t-2|}{5}=2$$

$$\left[\begin{array}{l}6t-2=10\\6t-2=-10\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}t=2\\t=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

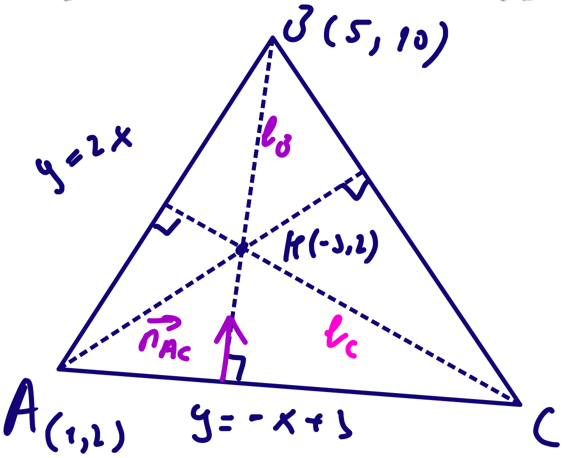
1) $t=2$:

$$\boxed{\begin{array}{l}x=7\\y=6\end{array}}$$

2) $t=-\frac{4}{3}$

$$\boxed{\begin{array}{l}x=-3\\y=-\frac{2}{3}\end{array}}$$

5.37. Точка $H(-3,2)$ является точкой пересечения высот треугольника, две стороны которого лежат на прямых $y=2x$ и $y=-x+3$. Составить уравнение третьей стороны.



1) $2x - y = 0 \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

$$\frac{(x+3)}{2} = \frac{y-2}{-1}$$

$$x + 3 = -2y + 4$$

l_C: $\underbrace{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$

2) AC: $x + y - 3 = 0$

$\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$l_B : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

$x + 3 = y - 2$

$\underbrace{x - y + 5 = 0}$ где l_B

3) $B = l_B \cap l_{AB}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 5 \end{cases}$$

$2x = x + 5 \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} \\ \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ \begin{cases} n_x = a_y \\ n_y = -a_x \end{cases} \end{array}} \quad \begin{array}{l} a_y = n_x \\ a_x = -n_y \end{array}$$

4) $A = l_{AB} \cap l_{AC}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

5) $\vec{AH} = (-4, 0)$

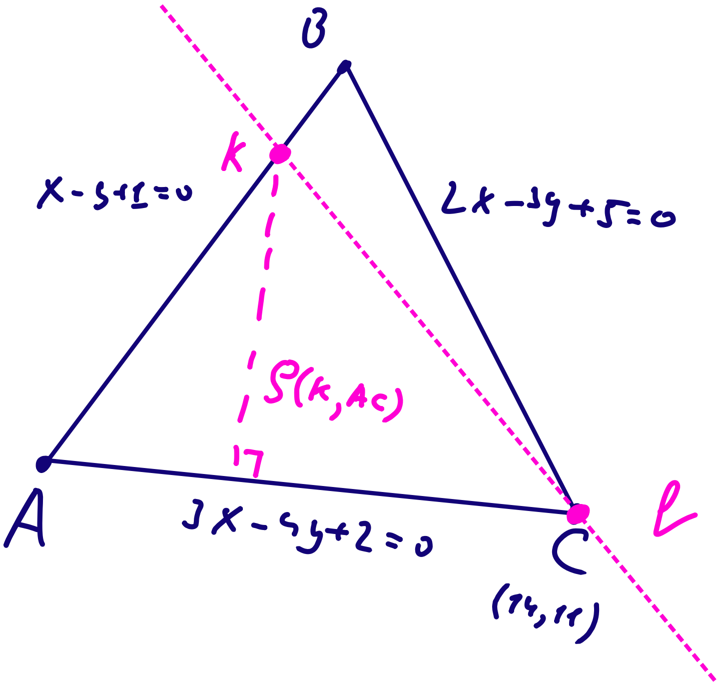
$\vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{a}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$l_{BC} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} t$$

5.59. Сторона AB треугольника ABC задана уравнением $x - y + 1 = 0$, сторона BC — уравнением $2x - 3y + 5 = 0$, сторона AC — уравнением $3x - 4y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину C так, что точка пересечения этой прямой со стороной AB удалена от стороны AC на расстояние $1/5$.

$$y = \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \cancel{14}^{7} + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} + \frac{1}{2} = 11$$



1) т. C:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 11 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\frac{9-8}{12}x = \frac{10}{6} - \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{12}x = \frac{7}{6} \qquad x = 14$$

$$\frac{x-14}{a_x} = \frac{y-11}{a_y}$$

$$k(x-14) = y - 11$$

$$l: \; y = kx - k \cdot 14 + 11$$

5.65. Прямые $3y = x + 2$ и $3x + 2y - 5 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1, 2)$ имеет в новой системе координаты $(1, 1)$.

1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты x', y' в новой системе.

2) Составить в новой системе координат уравнение прямой, которая в исходной системе задается уравнением $5x - 4y + 7 = 0$.