Введение в комбинаторику и дискретную математику

Лаборатория 3

Проф. Фролов Андрей Николаевич

Биномиальные & полиномиальные коэффициенты

Задачи.

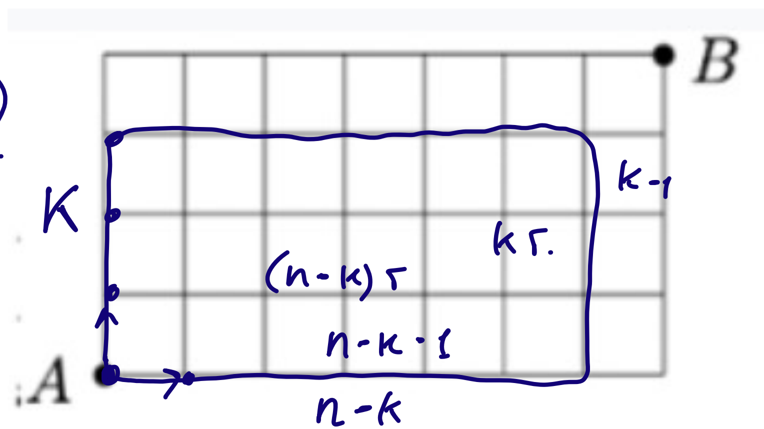
1. Докажите, что количество маршрутов из A в B в прямоугольнике со сторонами k и $n-k$, если идти можно только вправо и вверх, равно C_n^k.

28 по 2

11 по 1

4 вверх - k

7 вправо -(n-k)



надо выбрать k вверх и (n-k) вправо.

k(n-k) точек

(k+n-k) шагов = n шагов

8×5=40

Биномиальные & полиномиальные коэффициенты

$(x+y)^{n+m} = (x+y)^n\cdot(x+y)^m = (C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1}y^1 + \dots + C_n^n x^0 y^n)(C_m^0 x^m y^0 + C_m^1 x^{m-1}y^1 + \dots + C_m^m x^0 y^m) =$

$= C_n^0\cdot C_m^0\cdot x^n y^m + \dots + (C_n^0 x^n y^0)(C_m^k x^{m-k} y^k)$

$C_n^1 x^{n-1} y^1 \cdot C_m^{k-1} x^{m-k+1}\cdot y^{k-1} =$

$(C_n^0\cdot C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots)\, x^{n+m-k}\cdot y^k =$

$= C_n^1\cdot C_m^{k-1}\, x^{n+m-k}\cdot y^k$

$C_{n+m}^k\, x^{n+m-k}\, y^k$

Задачи. Найдите следующие суммы

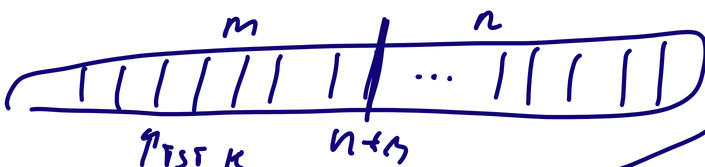
2. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$
3. $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$
4. $C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+m}^n$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} x^k$

$((1+x)^n)'$

$\sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k 1^{n-k} x^{k-1}$

$= n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k\cdot 1^{n-k}\cdot x^{k-1}$



$C_m^k\cdot C_n^0$

$C_m^{k-1}\cdot C_n^1$

$\sum_{l=0}^{k}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

$\frac{1}{k+1} C_n^k$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}C_n^k\right)$$

$$(k+1)^{-1}$$

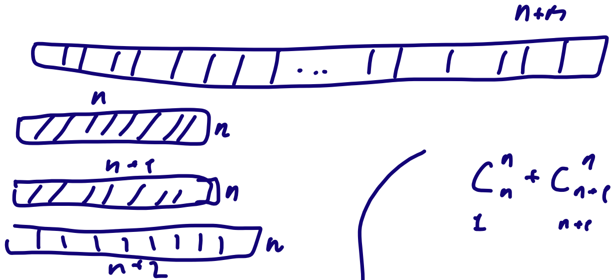
$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k \cdot 1^{n-k}\cdot x^{k-1}$$

$$F\left((1+x)^n\right) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\left((1+x)^{n+1}\right)' = (n+1)(1+x)$$

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}C_n^i x^i + \frac{1}{n+1}$$

4. $\underset{1}{C_n^n} + \underset{(n+1)}{C_{n+1}^n} + \cdots + \underset{\frac{(n+m)!}{n!\,m!}}{C_{n+m}^n}$



$$C_{n+1}^n = C_n^n + C_n^{n-1}$$

$$\underset{1}{C_n^n} + \underset{n+1}{C_{n+1}^n} + \underset{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{C_{n+2}^n} + \ldots + C_{n+m}^n$$

$$1 + (n+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} + \ldots$$

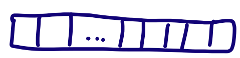
$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m}^n =$$

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+m}^m =$$

$$C_n^0 + (C_n^1 + C_n^0) + (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2)$$

$(n+m)$ объектов

C



$$n$$

$$\{a_1, \ldots, a_{n+m}\}$$

1. Есть a_1: $\underset{\text{есть}}{C_{n+m-1}^m} + \underset{\text{нет}}{C_{n+m-1}^{m-1}}$

a_2

есть $\quad$ нет

$$C_{n+m-2}^{m-2} \qquad C_{n+m-2}^{m-1}$$

Биномиальные & полиномиальные коэффициенты

$n+m+1$ элемент

$\{0, 1, 2, \dots, n, \dots, n+m\}$

$$\left.\begin{array}{l} 0\text{-min} \Rightarrow C^n_{n+m} \\ 1\text{-min} \Rightarrow C^n_{n+m-1} \\ \dots \\ i\text{-min} \Rightarrow C^n_{n+m-i} \\ \dots \\ m\text{-min} \Rightarrow C^n_n \end{array}\right\} + = C^{n+1}_{n+m+1}$$

Задачи. Найдите

5. Найдите коэффициенты при x^{57} и x^{58} в разложении $(x^2 + x^7 + x^9)^{20}$.
6. Найдите коэффициент при x^{100} в разложении $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})^3$.
7. Где коэффициент при x^{17} больше в разложении $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$ или $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$?

$k_1 + k_2 + \dots + k_{1000} = 17$

$$(1 + x^2 - x^3)^{1000} = \sum_{k_1+k_2+k_3=1000} \Pi \binom{1000}{k_1, k_2, k_3} \quad 1^{k_1} \cdot x^{2k_2} \cdot (-x)^{3k_3}$$

5) 5. Найдите коэффициенты при x^{57} и x^{58} в разложении $(x^2+x^7+x^9)^{20}$.

$$(x^2+x^7+x^9)^{20}$$

$$x^{40}(1+x^5+x^7)^{20} = x^{40}\cdot\sum_{k_1+k_2+k_3=20}\binom{20}{k_1,k_2,k_3}\prod_{1\le r\le 3} x_r^{k_r}$$

$$P(k_1,k_2,k_3) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$$

$k_2+k_3=17 \leftarrow C_{19}^{1}$

$k_2+k_3=18 \leftarrow C_{20}^{1}$

$$(x^2+x^7+x^9)(x^2+x^7+x^9) \quad \dots \quad (x^2+x^7+x^9)$$

$$(x^2+x^7+x^9)^{20}$$

$$\binom{n}{k_1,k_2,k_3} x^{2k_1}\cdot x^{7\cdot k_2}\cdot x^{9k_3}$$

$k_1+k_2+k_3=20$

$2k_1+7k_2+9k_3=57 \ /58$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \sum_{k_1,k_2,k_3\ldots k_m} P(k_1,k_2,\ldots,k_m)\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{k_m}$$

6. Найдите коэффициент при x^{100} в разложении $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100})^3$.

$$\begin{cases} 1^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} \cdot x^{2\alpha_3} \cdot x^{3\alpha_4} \cdot \ldots \cdot x^{100 \cdot \alpha_{100}} = x^{100} \\ \sum\limits_{i=1}^{100} \alpha_i = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \ldots + 100\alpha_{100} = 100 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{100} = 100 \end{cases}$$

$(0, 100, 0, 0, \ldots, 0)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & & 99 & 100 \\ (99, & 0, & \ldots, & & 0, & 1) \end{array}$$

$(0, 98, 1, 0, \ldots, 0)$

$(0, 96, 2, 0, \ldots, 0)$

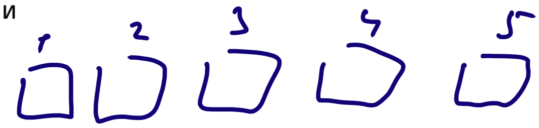
$(0, 0, 50, 0, \ldots, 0)$

Биномиальные & полиномиальные коэффициенты

Задачи. Найдите

8. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?
9. Сколькими способами можно выдать 18 различных задач пяти студентам, чтобы
   а) один (любой) из студентов получил две задачи, а остальные – по четыре задачи?
   б) двое получили по три задачи, а остальные – по четыре задачи?

8. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?



д)

а) 5 студентов
один – 2 зад
остальные – 4 зад

18 задач

$$\frac{18!}{4!4!4!4!2!}\cdot 5$$

б) двое по 3
трое по 4

$$\frac{18!}{3!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}\cdot C_5^2$$

$$(C_{18}^3\cdot C_{15}^3\cdot C_{12}^4\cdot C_8^4\cdot C_4^4\cdot)\cdot C_5^2$$

Задачи. Найдите

10. Сколько существует слов, образованных перестановками букв слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ? Сколько среди них таких, что две буквы О не идут подряд?