Введение в комбинаторику и дискретную математику

Лекция 4

Проф. Андрей Фролов

План

Рекуррентность

- **Базовые понятия**
- Числа Фибоначчи
- Рекуррентные соотношения
  - Линейные однородные порядка 2
  - Линейные однородные порядка k

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

010010100010 +

000000100001 +

000001100000 -

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

Пусть $F(n)$ – общее число таких строк.

Пусть $F_0(n)$ – число таких строк, заканчивающихся на 0.
Пусть $F_1(n)$ – число таких строк, заканчивающихся на 1.

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n)$$

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

$F_0(1) = 1$, так как есть только одна строка длины 1,
заканчивающаяся на 0: 0

$F_1(1) = 1$, , так как есть только одна строка длины 1,
заканчивающаяся на 1: 1

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

$F_0(2) = 2$, так как есть две строки длины 2,
заканчивающаяся на 0: $00, 10$

$F_1(2) = 1$, так как есть только одна строка длины 2,
заканчивающаяся на 1: 01

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

Добавим 0 к строке длины n:

$\underbrace{\ldots 0}_{n \text{ бит}}0$

$\underbrace{\ldots 1}_{n \text{ бит}}0$

Следовательно, $F_0(n+1) = F_0(n) + F_1(n)$.

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

Можем добавить 1 только к строке, заканчивающуюся на 0:

$$\underbrace{\ldots 0}_{n \text{ бит}} 1$$

Следовательно, $F_1(n+1) = F_0(n)$

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

Так как $F_0(n+1) = F_0(n) + F_1(n)$ & $F_1(n+1) = F_0(n)$,
Имеем $F_0(n+1) = F_0(n) + F_0(n-1)$.

Или $F_0(n+2) = F_0(n+1) + F_0(n)$, где $F_0(1) = 1, F_0(2) = 2$.

Базовые понятия

Пример

Сколько бинарных строк длины n, в которых нет двух подряд 1.

Пусть $F(n)$ – общее число таких строк.

Пусть $F_0(n)$ – число таких строк, заканчивающихся на 0.
Пусть $F_1(n)$ – число таких строк, заканчивающихся на 1.

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n)$$

Где $F_1(n+1) = F_0(n)$, $F_0(n+2) = F_0(n+1) + F_0(n)$, $F_1(1) = 1$, $F_0(1) = 1, F_0(2) = 2$

Базовые понятия

Определение (общее понятие)

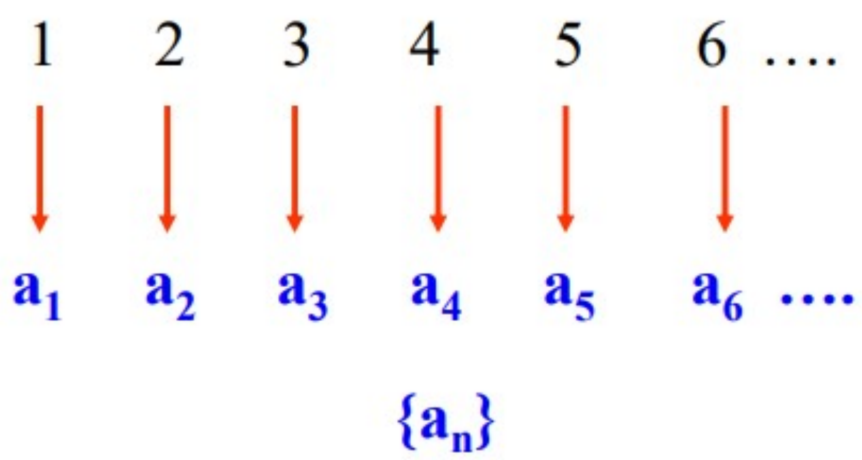
Рекурсией называется концепция, когда некоторое определение или некоторый процесс зависит от более простой версии самой себя.

$$F_0(n+2) = F_0(n+1) + F_0(n), \text{ где } F_0(1) = 1, F_0(2) = 2$$

Рекурсивные последовательности

Определение

Последовательностью является функцией (отображением) из подмножества множества натуральных чисел (обычно $\{0, 1, 2, \dots\}$ или $\{1, 2, 3, \dots\}$ в некоторое множество.



Рекурсивные последовательности

Примеры

1. $a_n = (-1)^n$, где $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

2. $a_n = 2^n$, где $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

Рекурсивные последовательности

Определение

Арифметическая прогрессия – это последовательность вида

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \dots, a_0 + nd, \dots$$

$$a_n = a_0 + nd, n \in \mathbb{N}$$

Пример

- $a_n = -10 + 5n$

$$-10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots$$

Рекурсивные последовательности

Определение

Геометрическая прогрессия – это последовательность вида

$$a_0, a_0 \cdot t, a_0 \cdot t^2, \ldots, a_0 \cdot t^n, \ldots$$

$$a_n = a_0 \cdot t^n, n \in \mathbb{N}$$

Пример

- $a_n = (-2)^n$

$$1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$$

Рекурсивные последовательности

Определение

Говорим, что n-ый элемент последовательности $\{a_n\}$ определяется **рекурсивно**, если он выражается черезпредыдущие элементы и некоторое число начальных элементов.

Пример

- Рекурсивно: $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 2$
- Перечислением: $1, 3, 5, 7, \ldots$
- Формулой (не рекурсивно): $a_n = 1 + 2n$

Рекурсивные последовательности

Арифметическая прогрессия

- Рекурсивно: a_0; $a_{n+1} = a_n + d$
- Перечислением: $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \ldots, a_0 + nd, \ldots$
- Формулой (не рекурсивно): $a_n = a_0 + nd, n \in \mathbb{N}$

Геометрическая прогрессия

- Рекурсивно: a_0; $a_{n+1} = a_n t$
- Перечислением: $a_0, a_0 \cdot t, a_0 \cdot t^2, \ldots, a_0 \cdot t^n, \ldots$
- Формулой (не рекурсивно): $a_n = a_0 \cdot t^n, n \in \mathbb{N}$

Рекурсивные последовательности

Примеры

1

- Рекурсивно: $a_0 = -1, a_{n+1} = 3a_n$
- Перечислением: $-1, -3, -9, -27, \dots$
- Формулой (не рекурсивно): $a_n = -3^n$

Примеры

2

- Рекурсивно: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
- Перечислением: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots$
- Формулой (не рекурсивно):

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

План

Рекуррентность

- Базовые понятия
- **Числа Фибоначчи**
- Рекуррентные соотношения
  - Линейные однородные порядка 2
  - Линейные однородные порядка k

Числа Фибоначчи

Определение

- Рекурсивно: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
- Перечислением: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$
- Формулой (не рекурсивно):

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Формула Бине

Числа Фибоначчи

Задача о кроликах (Леонардо Пизанский, 1202 г.)

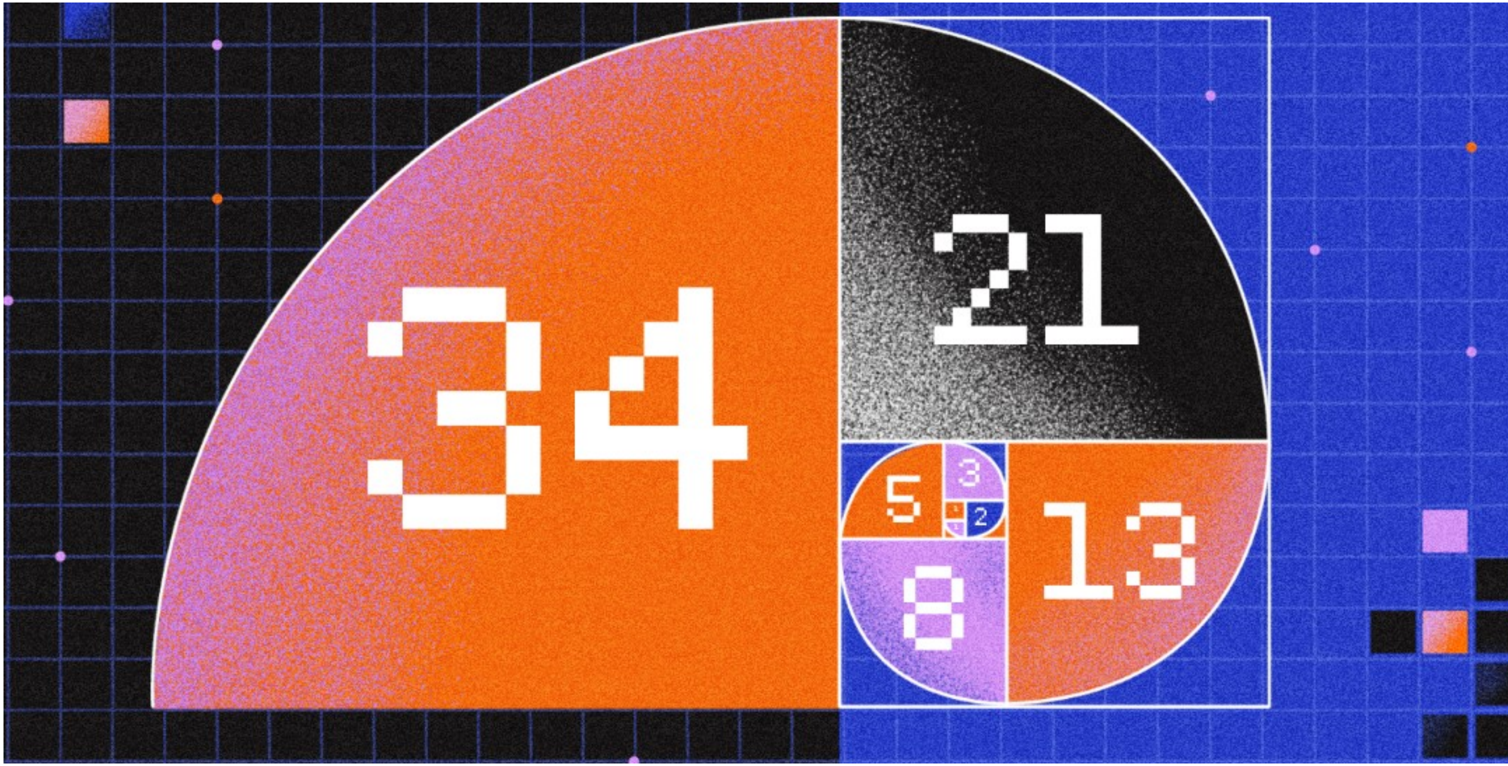
- Новорожденная пара кроликов начинает давать потомство через месяц; 1 месяц
- взрослая пара кроликов раз в месяц производит на свет одну новорожденную пару; пара даёт пару 2 → 2+2
- изначально есть одна новорожденная пара кроликов.
- Сколько кроликов будет через год?

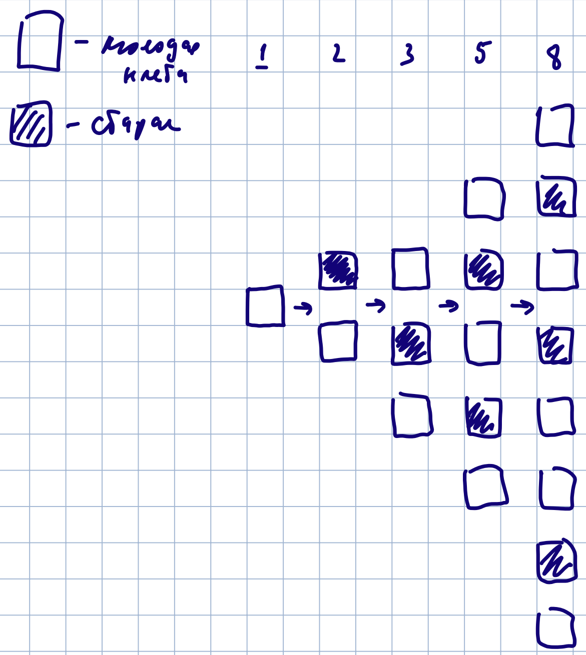
1 2 3 5

2^{12-1}

2 4 8 16

Числа Фибоначчи




– молодая клетка
– старая
1
2
3
5
8

Числа Фибоначчи

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Доказательство (по индукции)

Базис индукции. 1) $n = 0$

$$f_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$$

Числа Фибоначчи

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Доказательство (по индукции)

Базис индукции. 2) $n = 1$

$$f_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

Числа Фибоначчи

Доказательство (по индукции)

Предположение индукции. Предположим, что для всех $m \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $k \geq 1$, формула верна, т.е.

$$f_m = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{\sqrt{5}}$$

Числа Фибоначчи

Доказательство (по индукции)

Шаг индукции. Докажем для $n = k + 1$

$$f_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Числа Фибоначчи

Доказательство (по индукции)

Так как $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, имеем

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$f_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$f_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2}$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2\cdot 2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Числа Фибоначчи

Доказательство (по индукции)

Тогда

$$f_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

Числа Фибоначчи

Доказательство (по индукции)

$$f_{k+1} = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Числа Фибоначчи

Доказательство (по индукции)

Заключение Следовательно, для любого n верно, что

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Числа Фибоначчи

Упражнения (используйте мат. индукцию)

1. $F_k F_t + F_{k-1} F_{t-1} = F_{k+t-1}$
2. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
3. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
4. $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

1.) $F_k F_t + F_{k-1} F_{t-1} = F_{k+t-1}$

1 $F_kF_t + F_{k-1}F_{t-1} = F_{k+t-1}$

k · верно $\quad k+1$

$F_{k+1}F_t + F_kF_{t-1} = F_{k+t} = F_{k+t-1} + F_{k+t-2}$

$F_kF_t + F_{k-1}F_{t-1} = F_{k+t-1}$

$$F_{k+1}F_t + F_kF_{t-1} = F_kF_t + F_{k-1}F_t + F_{k-1}F_{t-1} + F_{k-2}F_{t-1}$$

$$\underbrace{(F_kF_t + F_{k-1}F_{t-1})}_{=F_{k+t-1}} + \underbrace{(F_{k-1}F_t + F_{k-2}F_{t-1})}_{=F_{k-1+t-1}} = F_{k+t-1} + F_{k+t-2} = F_{k+t}$$

2 $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

2.) Пусть верно для n

для $n+1$:

$$\underbrace{F_1 + \dots + F_n} + F_{n+1} =$$

$$F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

3 $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Пусть для n

$n+1$:

$$\underbrace{F_1 + \dots + F_{2n-1}}_{=F_{2n}} + F_{2(n+1)-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} = F_{2(n+1)}$$

4 $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

для $n=1$ $\quad F_2 = F_{2+1} - 1 \qquad 1 = 2-1 = 1$

для $n \Rightarrow n+1$:

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} + F_{2(n+1)} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+2+1} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1$$

План

Рекуррентность

- Базовые понятия
- Числа Фибоначчи
- Рекуррентные соотношения
  - **Линейные однородные порядка** 2
  - Линейные однородные порядка k

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Определение

Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется линейной однородной рекурсивной последовательностью (порядка k), если

$$a_{n+k} = \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot a_{n+k-i}$$

зависит от k членов

$$a_{n+k} = t_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + t_k \cdot a_n = \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot a_{n+k-i}, (*)$$

где t_i – некоторые фиксированные коэффициенты.
(*) называется линейным однородным рекурсивным соотношением/уравнением

Пример

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$c_1 a_n + c_2 a_{n+1} + \ldots + c_k a_{n+k-1} = 0 \qquad (c_1, \ldots, c_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

$$c_1 + c_2 \lambda + c_3 \lambda^2 + \ldots + c_k \lambda^{k-1} = 0$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Определение

Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ называется **частичным решением** рекурсивного соотношения

$$a_{n+k} = t_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + t_k \cdot a_n,$$

если соотношение верно для $a_n = x_n$.

Пример

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$7, 3, 10, 13, 23, 36, \ldots$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Определение

Для рекурсивного соотношения $a_{n+k} = t_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + t_k \cdot a_n$ следующая функция называется характеристической

$$\chi(\lambda) = \lambda^k - t_1\lambda^{k-1} - t_2\lambda^{k-2} - \cdots - t_{k-1}\lambda^1 - t_k.$$

Пример

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Лемма

Дано $a_{n+k} = t_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + t_k \cdot a_n$. Пусть p – корень характеристического многочлена $\chi(\lambda)$. Тогда

$$1, p, p^2, \ldots, p^n, \ldots$$

является решением для a_n.

Доказательство

Имеем $\chi(p) = 0$. Следовательно,

$$p^{n+k} - \sum_{i=1}^{k} t_i p^{n+k-i} = p^n \left(p^k - \sum_{i=1}^{k} t_i p^{k-i} \right) = p^n \chi(p) = 0$$

Таким образом, $p^{n+k} = \sum\limits_{i=1}^{k} t_i p^{n+k-i}$.

$$p^{n+k} - \sum_{i=1}^{k} t_i p^{n+k-i} = p^n\left(p^k - \sum_{i=1}^{k} t_i p^{k-i}\right) = p^n \cdot \chi(p) = 0$$

$$p^k = \sum_{i=1}^{k} t_i p^{k-i} = t_1 \cdot p^{k-1} + t_2 p^{k-2} + \ldots + t_k$$

$$\chi(k) = \lambda^k - t_1 - t_2\lambda - t_3\lambda^2 - \ldots - t_k\lambda^{k-1}$$

//

$$p^{n+k} = t_1 \cdot p^{n+k-1} + t_2 p^{n+k-2} + \ldots + t_k \cdot p^n$$

$$p^k = t_1 p^{n-1} + t_2 p^{k-2} + \ldots + t_k \cdot p^0$$

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \ldots + t_k a_n$$

Тогда $a_n = p^n$

Имеем

Рассм. векторное пр-во W, состоящее из рекур. посл., заданных n-элементами

$$a_{n+k} + t_1 a_{n+k-1} + \ldots + t_k a_n = 0$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Лемма

Дано $a_{n+k} = t_1 \cdot a_{n+k-1} + \cdots + t_k \cdot a_n$. Пусть p – корень характеристического многочлена $\chi(\lambda)$. Тогда

$$1, p, p^2, \ldots, p^n, \ldots$$

является решением для a_n.

Пример

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1,\ p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, \ldots$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Лемма

Пусть последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ и $y_0, y_1, y_2, \ldots$ являются решениями некоторого линейного однородного рекуррентного соотношения. Тогда

$\alpha x_0 + \beta y_0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots$ также явлется решением этого рекуррентного соотношения.

Очевидно?

Да

$$a_{n+k} + t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \ldots + t_k a_n = 0$$

$x:$ $$x_0 + t_1 x_{n+k-1} + \ldots + t_k x_k = 0 \quad | \cdot \alpha$$

$+$

$y:$ $$y_0 + t_1 y_{n+k-1} + \ldots + t_k y_k = 0 \quad | \cdot \beta$$

$$\Rightarrow (\alpha x_0 + \beta x_0) + t_1(\alpha x_{n+k-1} + \beta y_{n+k-1}) + \ldots + t_k(\alpha x_k + \beta y_k) = 0$$

Pausetas

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Теорема (общее решение)

Пусть $a_{n+2} = t_1 \cdot a_{n+1} + t_2 \cdot a_n$, где $t_1^2 + t_2^2 \neq 0$. И пусть p_1, p_2 – два корня характеристического многочлена $\chi(\lambda)$. Тогда

1) Если $p_1 \neq p_2$, то любое решение имеет вид
$x_n = \alpha \cdot p_1^n + \beta \cdot p_2^n$;
2) если $p_1 = p_2$, то любое решение имеет вид
$x_n = (\alpha \cdot n + \beta) \cdot p_1^n$.

Пример

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$a_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

порядка 2

$$a_{n+2} = t_1 a_{n+1} + t_2 a_n \qquad t_1^2 + t_2^2 \neq 0 \iff (t_1, t_2) \neq (0,0)$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - t_1\lambda - t_2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda = p_1 \\ \lambda = p_2 \end{array}\right.$$

1) //

$$a_{n+2} = t_1 a_{n+1} + t_2 a_n$$

$$p_1^2 = t_1 p_1^1 + t_2 p_1^0$$

$$p_2^2 = t_1 p_2^1 + t_2 p_2^0$$

//

$$a_n = \alpha p_1^n + \beta p_2^n$$

2) $p_1 = p_2 = p$

$$\lambda^2 = t_1 \lambda + t_2$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - t_1\lambda - t_2 = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \text{// } p_1 = p_2 \text{ //} = (\lambda - p)^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda p + p^2$$

$$t_1 = 2p \quad t_2 = -p^2$$

$$a_{n+2} = t_1 a_{n+1} + t_2 a_n = 2p\, a_{n+1} - p^2 a_n$$ // Подставим $a_n = np^n$

$$a_{n+2} = 2p^{n+2}(n+1) - p^2 \cdot np^n = (n+2)p^{n+2}$$

$$a_n = (\alpha n + \beta)p^n$$

$$a_{n+2} = 2(\alpha n + \alpha + \beta)p^{n+1} - p^2(\alpha n + \beta)p^n$$

$$a_{n+2} = (2\alpha n + 2\alpha + 2\beta - \alpha n - \beta)p^{n+2}$$

$$a_{n+2} = (\alpha n + 2\alpha + \beta)p^{n+2}$$

$$a_n = (\alpha n + \beta)p^n$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Доказательство

1) Пусть $p_1 \neq p_2$. Из леммы выше $x_n = \alpha \cdot p_1^n + \beta \cdot p_2^n$ является решением.

Пусть $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ – любое другое решение.

$$\begin{cases} \alpha \cdot p_1^0 + \beta \cdot p_2^0 & = y_0 \\ \alpha \cdot p_1^1 + \beta \cdot p_2^1 & = y_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{y_0 p_2 - y_1}{p_2 - p_1}, \beta = \frac{y_1 - p_1 y_0}{p_2 - p_1}$$

Так как $y_{n+2} = t_1 \cdot y_{n+1} + t_2 \cdot y_n$, остальные y_n однозначно определены по y_0 и y_1. Следовально, решение $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ описывается формулой $x_n = \alpha \cdot p_1^n + \beta \cdot p_2^n$.

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Доказательство

2) Пусть $p_1 = p_2 = p$, $\chi(\lambda) = \lambda^2 - t_1\lambda - t_2 = (\lambda - p)^2$. Тогда

$$t_1 = 2p, t_2 = -p^2.$$

Покажем, что np^n также является решением:

$$t_1 a_{n+1} + t_2 a_n = 2p(n+1)p^{n+1} - p^2 np^n =$$

$$= 2(n+1)p^{n+2} - np^{n+2} = (n+2)p^{n+2} = a_{n+2}$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Доказательство

2) Таким образом, $x_n = (\alpha \cdot n + \beta) \cdot p_1^n$ является решением. Пусть $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ –другое решение.

$$\begin{cases} (\alpha \cdot 0 + \beta) \cdot p^0 & = y_0 \\ (\alpha \cdot 1 + \beta) \cdot p^1 & = y_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{y_1 - py_0}{p}, \beta = y_0$$

Так как $y_{n+2} = t_1 \cdot y_{n+1} + t_2 \cdot y_n$, остальные y_n однозначно определены по y_0 и y_1. Следовально, решение $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ описывается формулой $x_n = (\alpha \cdot n + \beta) \cdot p_1^n$.

Линейные однородные рекурсии порядка 2

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Общее решение

$$f_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Так как $f_0 = 0, f_1 = 1$

$$\begin{cases} 0 = f_0 = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \alpha + \beta \\ 1 = f_1 = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

Или $\begin{cases} \beta = & -\alpha \\ 1 = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

$$\beta = -\alpha$$

$$1 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \alpha\frac{2\sqrt{5}}{2} = \alpha\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \alpha = & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = - & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Частичное/частное решение

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Алгоритм

$a_{n+2} = t_1 \cdot a_{n+1} + t_2 \cdot a_n$ – дано рекурсивное соотношение порядка 2.

1) Найдем характеристический многочлен (заменой $a_{n+i} \to \lambda^i$):
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - t_1\lambda^1 - t_2.$$
2) Найдем его корни: p_1 и p_2
3)
   - если $p_1 \neq p_2$, то общее решение: $a_n = \alpha_1 \cdot p_1^n + \alpha_2 \cdot p_2^n$;
   - если $p_1 = p_2$, то общее решение: $a_n = (\alpha_1 \cdot n + \alpha_2) \cdot p_1^n$.

4*) Используя a_0 и a_1, найдем α_1 and α_2

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Примеры

1 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$

$$\chi(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$$

один корень $p = 1$ кратности 2 $(p_1 = 1, p_2 = 1)$

Общее решение: $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)1^n = \alpha_1 + \alpha_2 n$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda(\lambda-1) - (\lambda-1) = (\lambda-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$

$p_1 = p_2 = p = 1$

Тогда $a_n = (\alpha n + \beta)\underline{p}^n = \alpha n + \beta = \beta + \alpha n$

Линейные однородные рекурсии порядка 2

Примеры

2 $a_{n+2} - a_n = 0$

$$\chi(x) = x^2 - 1 = 0$$

Два корня $p_1 = 1, p_2 = -1$

Общее решение: $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2(-1)^n = \alpha_1 + \alpha_2(-1)^n$

План

Рекуррентность

- Базовые понятия
- Числа Фибоначчи
- Рекуррентные соотношения
  - Линейные однородные порядка 2
  - **Линейные однородные порядка k**

k – порядок рекуррентности

Линейные однородные рекурсии порядка k

Любой порядок

$$a_{n+5} = -3a_{n+4} + 4a_{n+3} + 16a_{n+2} - 16a_n$$

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 - 4\lambda^3 - 16\lambda^2 + 16 = 0$$

$$p_1 = -2, p_2 = -2, p_3 = -2, p_4 = 1, p_5 = 2$$

Общее решение

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2)(-2)^n + \alpha_4 1^n + \alpha_5 2^n$$

Линейные однородные рекурсии порядка k

Теорема

Пусть $p_1, \dots, p_s$ – **различные** корни многочлена $\chi(x)$ для соотношения $a_{n+k} = t_1 \cdot a_{n+k-1} + \dots + t_k \cdot a_n$.

Причем, p_1 имеет кратность r_1, ..., p_s имеет кратность r_s и $r_1 + \cdots r_s = k$

Тогда общее решение этого соотношения имеет вид

$$\sum_{j=1}^{s} (\alpha_{j,0} + \alpha_{j,1} n + \cdots + \alpha_{j,r_j-1} n^{r_j-1}) p_j^n$$

Линейные однородные рекурсии порядка k

$$\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{j,0}+\alpha_{j,1}n+\cdots+\alpha_{j,r_j-1}n^{r_j-1})p_j^n$$

Любой порядок

$$a_{n+5}=-3a_{n+4}+4a_{n+3}+16a_{n+2}-16a_n$$

$$\underbrace{p_1=-2,p_2=-2,p_3=-2}_{\text{кратность } 3},p_4=1,p_5=2$$

Общее решение

$$a_n=(\underbrace{\alpha_1+\alpha_2n+\alpha_3n^2}_{\text{кратность } 3})(-2)^n+\alpha_4 1^n+\alpha_5 2^n$$

Линейные однородные рекурсии порядка k

Пример

$a_{n+5} - 32a_n = 0$

$$\chi(x) = x^5 - 32 = 0$$

один корень $p = 2$ кратности 5

Общее решение: $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 + \alpha_4 n^3 + \alpha_5 n^4)2^n$

Линейные однородные рекурсии порядка k

Пример

Общее решение: $a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 + \alpha_4 n^3 + \alpha_5 n^4)2^n$
Пусть $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$. Тогда

$$\begin{cases} 1 = a_0 = & (\alpha_1 + \alpha_2 0 + \alpha_3 0^2 + \alpha_4 0^3 + \alpha_5 0^4)2^0 \\ 2 = a_1 & (\alpha_1 + \alpha_2 1 + \alpha_3 1^2 + \alpha_4 1^3 + \alpha_5 1^4)2^1 \\ 3 = a_2 & (\alpha_1 + \alpha_2 2 + \alpha_3 2^2 + \alpha_4 2^3 + \alpha_5 2^4)2^2 \\ 4 = a_3 & (\alpha_1 + \alpha_2 3 + \alpha_3 3^2 + \alpha_4 3^3 + \alpha_5 3^4)3^2 \\ 5 = a_4 & (\alpha_1 + \alpha_2 4 + \alpha_3 4^2 + \alpha_4 4^3 + \alpha_5 4^4)4^2 \end{cases}$$

Решаем и находим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

Спасибо за внимание!

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases}$$

$$a_{n+1} = a_n - (b_{n+1} - 2a_n)$$

№ 1

а) $a_{n+1} = -3a_n$

$\lambda = -3$

$a_n = \alpha \cdot \lambda^n = \alpha(-3)^n$

б) $a_{n+2} = 3a_n$

$\lambda^2 = 3 \iff \left[\begin{array}{l}\lambda = -\sqrt{3} \\ \lambda = \sqrt{3}\end{array}\right.$

$a_n = \alpha(\sqrt{3})^n + \beta(-\sqrt{3})^n$

в) $a_{n+3} = 8a_n$

$\lambda^3 = 8$

$\lambda^3 - 8 = 0$

$\lambda^3 - 2^3 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i \\ \lambda = 2\end{array}\right.$

$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta(-1-\sqrt{3}i)^n + \gamma(-1+\sqrt{3}i)^n$

2)

$a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n$

$\lambda^3 = 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 4) - 3(\lambda^2 - 4) = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$ $\qquad a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 2^n + \gamma(-2)^n$

N2

a) $a_0 = 1$
$a_1 = 3$

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

$\lambda^2 = 3\lambda - 2$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ $\qquad a_n = \xi''' \cdot 2^n + \hat{\eta} \cdot 1^n$

$$\begin{cases} 1 = \xi''' + \hat{\eta} \\ 3 = 2\xi''' + \hat{\eta} \end{cases}$$

$2 = \xi'''$

$-1 = \hat{\eta}$

$a_n = 2 \cdot 2^n - 1 \cdot 1^n$

c) $a_0 = 2$
$a_1 = 1$

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$

$\lambda^2 = 4\lambda - 4$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0$

$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) \cdot 2^n$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 \\ 1 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 1) \cdot 2 \end{cases}$$ $\qquad \alpha_1 = 2$

$1 = 4 + 2\alpha_2$

$-\frac{3}{2} = \alpha_2$

$\Rightarrow \boxed{a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n}$

N5

a) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1}$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n - (a_{n+1} - 2a_n)$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n - a_{n+1} + 2a_n$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$$

$$\lambda^2 = \lambda + 3$$

$$\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n+1} - 2\alpha\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - 2\beta\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

$$b_n = \left(\alpha \cdot \frac{1+\sqrt{13}}{2} - 2\alpha\right)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\beta \cdot \frac{1-\sqrt{13}}{2} - 2\beta\right)\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

b) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases}$