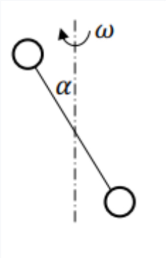
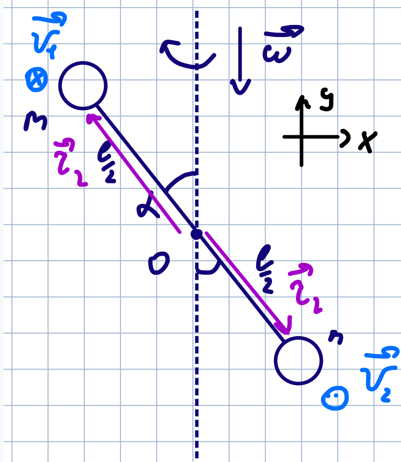
Задача 1



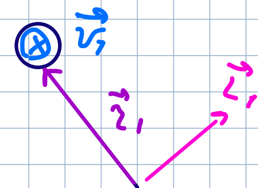
Два маленьких шарика массы m каждый, закреплённых на лёгкой штанге длины l, вращаются с угловой скоростью ω вокруг фиксированной оси, проходящей через центр штанги (т. O) под углом α к ней. Найти направление и модуль вектора момента импульса системы относительно т. O в произвольный момент времени.



1) Система : шар 1 и шар 2

$$\vec L = \vec L_1 + \vec L_2$$

2) $\vec L_1 = [\vec r_1 \times \vec p_1]$

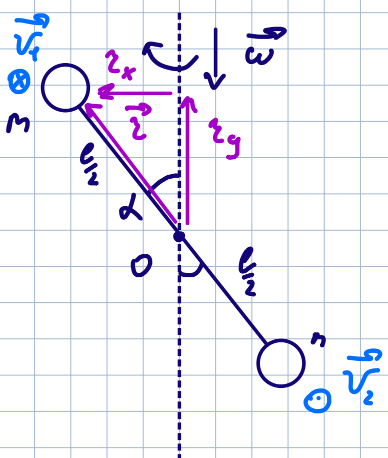


$\vec p_1 = m\vec v_1$, $\vec v_1 = [\vec\omega \times \vec r_1]$

$\Rightarrow \vec L_1 = [\underset{a}{\vec r_1} \times m[\underset{b}{\vec\omega} \times \underset{c}{\vec r_1}]]$

$$\vec L_1 = m(\underset{bac}{\vec\omega(\vec r_1\cdot\vec r_1)} - \underset{cab}{\vec r_1(\vec r_1\cdot\vec\omega)})$$

$$\vec L_1 = m[r_1^2\cdot\vec\omega - \vec r_1\cdot(\vec r_1\cdot\vec\omega)]$$



2) Аналогично для 2 :

$$\vec L_2 = m[r_2^2\cdot\vec\omega - \vec r_2\cdot(\vec r_2\cdot\vec\omega)]$$

3) Заметим, что $|\vec r_1| = \frac{l}{2}$ $|\vec r_2| = \frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ $\vec r_1 = -\vec r_2$

$(\vec r_1\cdot\vec\omega) = |\vec r_1||\vec\omega|\cdot\cos(180-\alpha)$

$(\vec r_2\cdot\vec\omega) = |\vec r_2||\vec\omega|\cdot\cos\alpha = -|\vec r_2||\vec\omega|\cdot\cos\alpha$ $\Rightarrow$

Пусть $\vec r = \vec r_1$ $\Rightarrow$ $\vec r_2 = -\vec r$

Тогда $\vec L = \vec L_1 + \vec L_2 = m r^2\vec\omega + m r^2\vec\omega - m\vec r\cdot(\vec r\cdot\vec\omega) + m\vec r(-\vec r\cdot\vec\omega) =$

$$= 2mr^2\vec\omega - m\vec r\cdot(\vec r\cdot\vec\omega) - m\vec r\cdot(\vec r\cdot\vec\omega) =$$

$$= 2m[r^2\vec\omega - \vec r\cdot(\vec r\cdot\vec\omega)]$$

Угли поменялись т.к. $\vec\omega$ в другую сторону

$$\vec{L} = 2m\left[r^2\cdot\vec{\omega} + \vec{r}\cdot(r\omega\cos\alpha)\right]$$

Найдём проекции:

(1) $L_y = 2m\left[r^2\omega + r\cdot\cos\alpha\,(r\omega\cos\alpha)\right]$ // $\omega_y = -\omega$, $r_y = r\cos\alpha$ //

$\Rightarrow L_y = 2m\left(-r^2\omega + r^2\omega\cos^2\alpha\right) = -2m\omega r^2\left(1-\cos^2\alpha\right)$

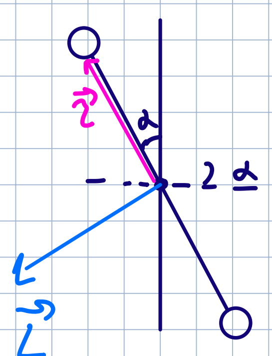
$L_y = -2m\,r^2\omega\cdot\sin^2\alpha$

(2) $L_x = 2m\Big(0 + (-r\sin\alpha)(r\omega\cos\alpha)\Big) = -2m\,r^2\omega\,\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ // $r_x = -r\sin\alpha$ //

$L_x = -2m\,r^2\omega\,\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{L_y}{L_x} = \frac{-\sin^2\alpha}{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = +\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \vec{L}$ под углом α

$\Rightarrow \vec{L} \perp \vec{r}$!!



$L^2 = L_x^2 + L_y^2$

$L = 2mr^2\omega\sqrt{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$

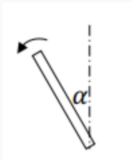
$L = 2mr^2\omega\,\sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$

$L = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\cdot\omega\,\sin\alpha$

$L = \frac{m\ell^2}{2}\omega\sin\alpha$

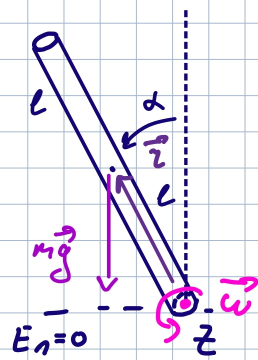
$$\boxed{L = \frac{m\ell^2}{2}\omega\sin\alpha}$$

Задача 2



Высокая и тонкая фабричная труба треснула у основания и стала падать. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε как функции угла α между трубой и вертикалью.

Пусть 2ℓ - длина трубы
m - масса трубы



1) В проекции на ось z:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\cdot\varepsilon_z = mg\ell\cdot\sin\alpha$$

2)

$\rho = \frac{m}{\ell}$

$$I = \int_0^{x} x^2\cdot dm = \int_0^{x} x^2\cdot\rho\cdot dx =$$

$$= \frac{m}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - 0\right) = \frac{mx^2}{3}$$

3) $$\frac{m(2\ell)^2}{3}\varepsilon = mg\ell\cdot\sin\alpha$$

$$\varepsilon = g\cdot\frac{3}{4}\frac{\sin\alpha}{\ell}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{3\sin\alpha}{4\ell}\cdot g}$$

4) З.С.Э. :

$E_{0_{пот.}} = mg\ell$ $\qquad E_{0_{кин.}} = 0$

$E_п(\alpha) = mg\ell\cos\alpha$ $\qquad E_{кин}(\alpha) = \frac{I\omega^2(\alpha)}{2} = \frac{m(2\ell)^2}{3\cdot 2}\cdot\omega^2(\alpha) = \frac{2m\ell^2}{3}\omega^2(\alpha)$

З.С.Э. : $\quad mg\ell + 0 = mg\ell\cos\alpha + \frac{2}{3}m\ell^2\omega^2(\alpha) \;\Big|\cdot\frac{1}{m\ell}$

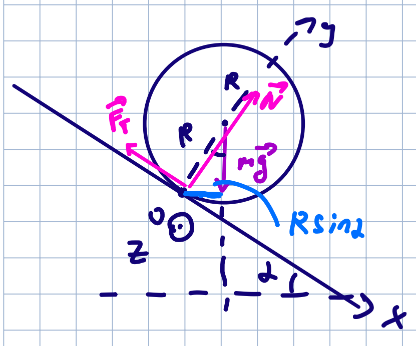
$$g(1-\cos\alpha) = \frac{2}{3}\ell\,\omega^2(\alpha)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(1-\cos\alpha)}{\ell}} = \omega(\alpha)$$

$$\boxed{\omega(\alpha) = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{2\ell}}}$$

Задача 3

Найти ускорение центра тонкостенного мяча, скатывающегося без проскальзывания с плоскости, установленной под углом α к горизонту.



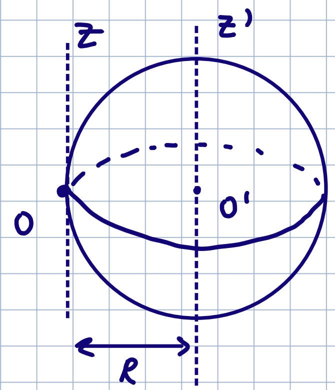
Т.к. без проск. => т.О – мгновенный центр вращения

1) в проекции на ось Z (перпенд. плоскости)

$$I\varepsilon = M_{mg} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{M_{F_{тр}}}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{M_N}}$$

$$I\varepsilon = M_{mg} = mgR\sin\alpha$$

2) Найдём момент инерции отн. оси Z тонкостенной сферы



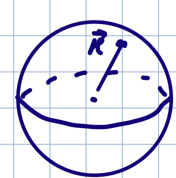
Отн. точки

$$\Theta = \int R^2 \cdot dm =$$

$$= \int (x^2+y^2+z^2)\,dm$$

$$\to 2\Theta = \int(x^2+y^2) + \int(x^2+z^2) + \int(y^2+z^2) =$$

$$= I_x + I_y + I_z \qquad I = \frac{2}{3}\Theta$$



$$\Theta = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 m$$

$$I = \frac{2}{3} mR^2$$

По т. Гюйгенса-Штейнера

$$I = mR^2 + I_{z'} = mR^2 + \frac{2}{3}mR^2$$

$$I = \frac{5}{3}mR^2$$

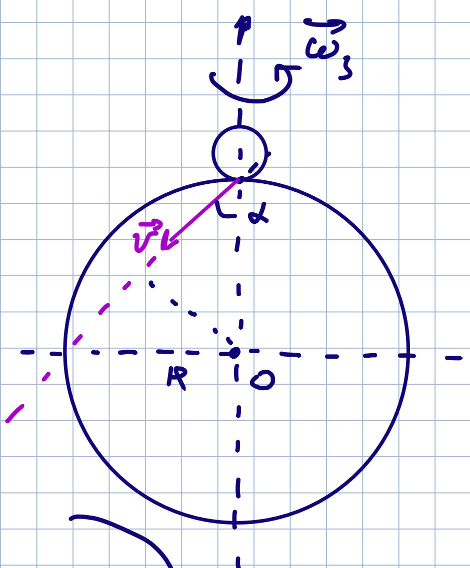
3) $\frac{5}{3}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\varepsilon = \cancel{m}g\cancel{R}\sin\alpha$

$\Rightarrow$ $\varepsilon = \dfrac{3g\sin\alpha}{5R}$

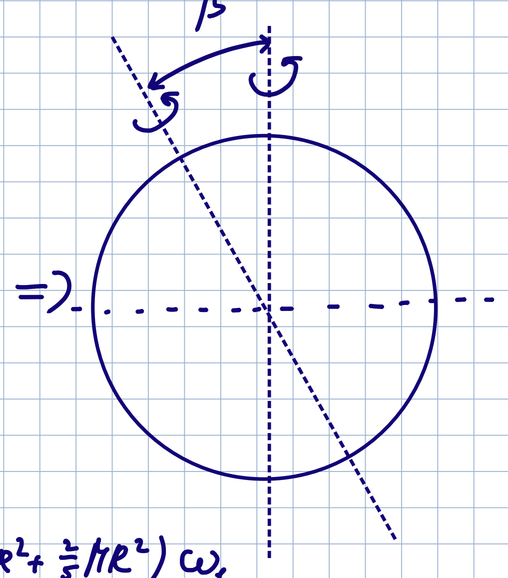
4) $a = a_\tau = \varepsilon \cdot R = \dfrac{3gR\sin\alpha}{5R}$

<u>Ответ</u>: $\boxed{a = \frac{3}{5} g \cancel{R} \sin\alpha}$

11.7. В районе северного полюса на Землю падает метеорит под углом 45° к вертикали. Масса метеорита 1000 т. Его скорость 20 км/с. Найти, на сколько повернется земная ось в результате соударения с метеоритом. Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, ее радиус 6400 км.



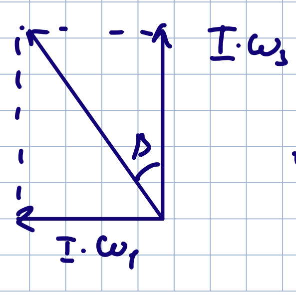
$\Rightarrow$



$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$

$$vm \cdot R\sin\alpha = \left(mR^2 + \frac{2}{5}MR^2\right)\omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{vmR\sin\alpha}{mR^2 + \frac{2}{5}MR^2}$$



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{vmR\sin\alpha}{\cancel{mR^2} + \frac{2}{5}MR^2} \cdot \frac{1}{\omega_3}$$

мало пренебрежём

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{A(1-\cos\alpha)} \qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{A(1-\cos\alpha)}} = dt$$

$$// \quad \omega(\alpha) = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{2l}} = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$A = \frac{3g}{2l}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = dt$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2A}} \frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = dt \qquad \beta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sin\beta} = \int_0^t dt$$

$$\sqrt{\frac{2}{A}} \left(\ln\left(tg\frac{\beta}{2}\right) - \ln(tg\,0) \right) = t$$

$$\sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \ln\left(tg\frac{\alpha}{4}\right) = t$$

$$tg\frac{\alpha}{4} = e^{t\sqrt{\frac{A}{2}}}$$

$$\alpha(t) = 4 \cdot arctg\left(e^{t\sqrt{\frac{A}{2}}}\right)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4 \frac{1}{1+e^{2t\sqrt{\frac{A}{2}}}} \cdot e^{t\sqrt{\frac{A}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{A}{2}}$$

$$\omega(t) = 4\sqrt{\frac{3g}{4l}} \cdot \frac{e^{t\sqrt{\frac{3g}{4l}}}}{1+e^{2t\sqrt{\frac{3g}{4l}}}}$$

$$\boxed{\omega(t) = 2\sqrt{\frac{3g}{l}} \cdot \frac{e^{t\cdot\sqrt{\frac{3g}{4l}}}}{1+e^{t\sqrt{\frac{3g}{l}}}}}$$