Производные (часть 2).

О.М. Киселев
o.kiselev@innopolis.ru

Университет Иннополис

Производная неявной функции

Производная функции в параметрической форме

Производная обратной функции

Производные высших порядков

Функция в неявной форме

Типичный вид неявного определения функции $y(x)$ выглядит как уравнение

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Пример:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 1); \\ y = -\sqrt{1 - x^2}, & x \in (-1, 1]. \end{cases}$$

Продифференцируем эту формулу по x:

$$2yy' + 2x = 0, \quad \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

$$y^2 + x^2 = 1, \quad \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{1 - x^2}, \Rightarrow$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{1 - x^2} \Rightarrow y' = \pm\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример

$$x^3 + 4y^3 + 2x = 0,$$

$$3x^2 + 12y^2 y' + 2 = 0,$$

$$y' = -\frac{2+3x^2}{12y^2}, \quad y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3},$$

$$y' = -\frac{2+3x^2}{12\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3}\right)^2}.$$

Правило вычисления производной неявной функции

- Продифференцируем уравнение $\Phi(x, y) = 0$ по x (или по y).
- Соберем все слагаемые, содержащие $\frac{dy}{dx}$ (или $\frac{dx}{dy}$).
- Решим полученное уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx}$ (или $\frac{dx}{dy}$).

Вычисление неявной производной в точке

Если необходимо вычислить производную в заданной точке (x_0, y_0):

- Продифференцируем $\Phi(x, y) = 0$ по x (или y). В результате получим:

$$y' \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = 0.$$

- Перепишем формулу в виде:

$$y' = -\frac{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}}.$$

- Подставим значения $x = x_0$ и $y = y_0$ в правую часть формулы.

Пример

Найдем производную неявной функции $y(x)$:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

в точке $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
Продифференцируем формулу:

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Подставим значения $x = 1/2$ и $y = \sqrt{3}/2$.

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Еще пример

Найдем производную y' функции, заданной формулой:

$$x^3 + 4y^3 + 2x = 0$$

на прямой $x = 1$.

- Выведем формулу для производной:

$$y' = -\frac{2 + 3x^2}{12y^2}$$

- Найдем пересечение прямой $x = 1$ и алгебраической кривой:

$$1 + 4y^3 + 2 = 0, \quad y = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

Еще пример

- Подставим значения $x = 1$ и $y = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ в формулу для производной:

$$y' = -\frac{5}{12\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2} = -\frac{5}{3\sqrt[3]{36}}.$$

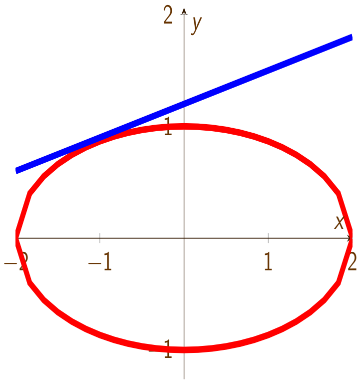
Параметрическая форма записи функции

Параметрическое определение кривой $y(x)$:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

В геометрии и физике параметрическая форма записи кривых используется повсеместно.

Параметрическое уравнение для эллипса



$$x = a\cos(t),\ \ y = b\cos(t), \qquad \frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2 = 1.$$

Чтобы построить касательную нужно вычислить производную $\frac{dy}{dx}$.

Дифференцирование функции в параметрической форме

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Пример

$$\begin{aligned} x = a\cos(t),\ y = b\sin(t),\\ dx = -a\sin(t)dt,\ dy = b\cos(t)dt,\\ \frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Особая точка кривой

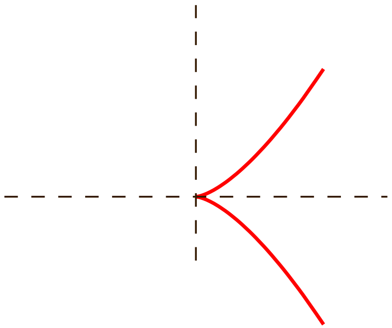
Особенной точкой кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

называется точка, в которой:
1. Производные $x'(t)$ и $y'(t)$ одновременно равны нулю (т.е. касательная к кривой в этой точке не определена).
2. Существует хотя бы одна производная более высокого порядка ($x''(t)$, $y''(t)$, и т.д.), которая не равна нулю (т.е. кривая имеет особенность, например, изгиб, острие или самопересечение).

Важно:
Особые точки могут быть точками перегиба, остриём, самопересечения кривой или иметь другие особенности.

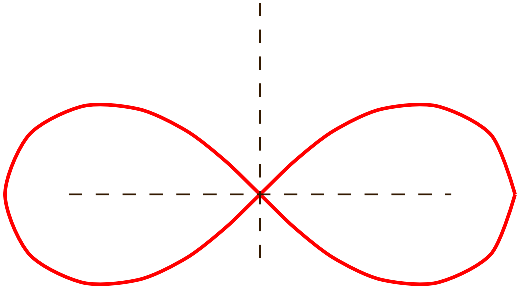
Кривая с остриём. Полукубическая парабола



$$x(t) = t^2, \; y(t) = t^3$$

Первые производные обращаются в начале координат $(0, 0)$.

Кривая с самопересечением



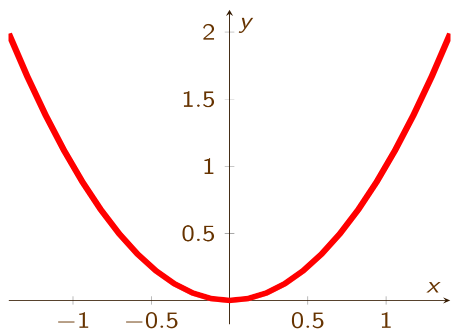
Лемниската Бернулли

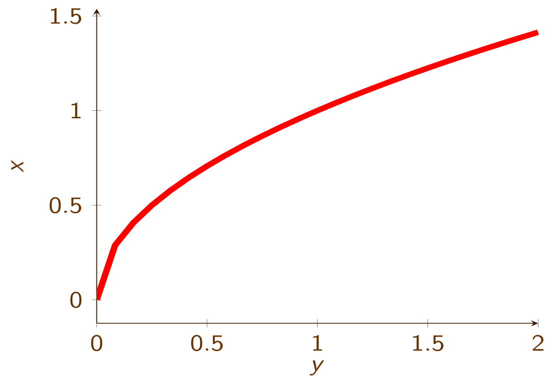
Эта известная кривая задается следующими параметрическими уравнениями:

$$x(t) = \frac{2\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \ y(t) = \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)}$$

Самопересечение: Лемниската Бернулли имеет точку самопересечения в начале координат (0, 0). При $t = \pi/2, 3\pi/2$ кривая проходит через точку (0, 0), создавая точку самопересечения.

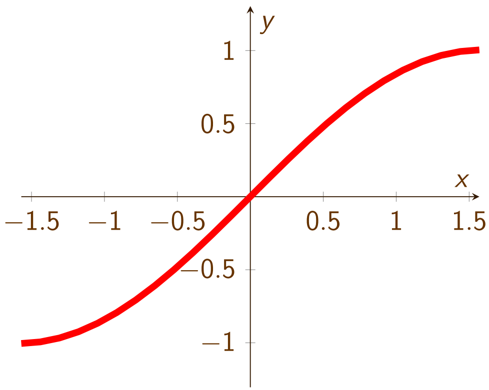
Обратная функция. Примеры

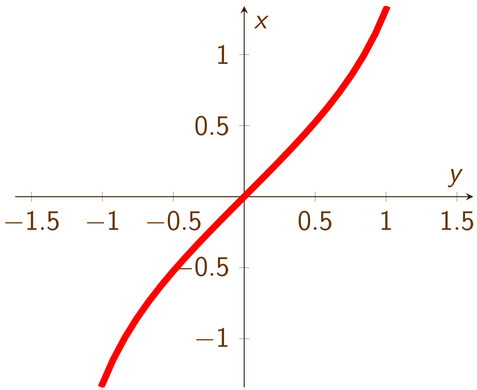




- $y = x^2$, область определения $x \in (-\infty, \infty)$ область значений $y \in [0, \infty)$.
- Обратная функция $x = \sqrt{y}$, область определения $y \in [0, \infty)$, область значений $x \in [0, \infty)$.

Обратная функция. Примеры





- $y = \sin(x)$, $x = \arcsin(y)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y \in [-1, 1]$.

Обратная функция

Определение

Пусть $y(x)$ непрерывна и строго монотонно возрастающая (убывающая) функция. Функция $x(y)$ обратная к $y(x)$, если $y(x(y)) \equiv y$, где область определения $y(x)$: $x \in [a, b]$, область значений $y : [y(a), y(b)]$, область определения $x(y) : y \in [y(b), y(a)]$, область значений $x(y) : [a, b]$.

Производная обратной функции

Положим, что $y(x)$ имеет обратную функцию

$$y(x(y)) = y, \quad \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dx}{dy} y'(x) = 1 \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}.$$

Пример.

$$\frac{d}{dx}\arcsin(sin(x)) = 1, \quad \arcsin'(\sin(x))\cos(x) = 1,$$

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}, \ \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)},$$

Обозначим $\sin(x) = y$, тогда

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Пример

$$\arctan(\tan(x))) = x,$$

$$\arctan'(\tan(x)))\frac{1}{\cos^2(x)} = 1, \quad \arctan'(\tan(x))) = \cos^2(x),$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x), \Rightarrow 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}, \quad y = \tan(x), \Rightarrow \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

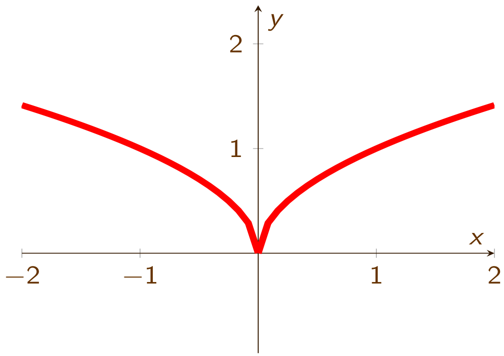
Теорема об обратной функции

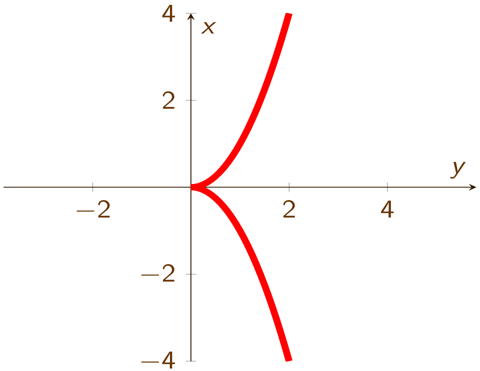
Теорема

Пусть $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 и $f(x)$ строго монотонна в окрестности x_0. Тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ в окрестности $y_0 = f(x_0)$ существует. Производная обратной функции:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Контрпримеры





- Если $f(x)$ немонотонна на интервале, тогда нет возможности построить однозначную обратную функцию.
- Если $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, тогда не существует однозначная обратная функция.

Доказательство теоремы об обратной функции

Пусть $(x_0 + h, x_0 - h)$ – интервал строгой монотонности $f(x)$. Положим, для определенности, что функция строго возрастающая.
Функция непрерывна на интервале $(x_0 + h, x_0 - h)$ тогда из теоремы о промежуточном значении:

$$\forall y \in (f(x_0 - h), f(x_0 + h)), \exists x \in (x_0 - h, x_0 + h) : f(x) = y.$$

Положим, что $\exists y_*$: $f(x_*) = y_*$ и $f(x^*) = y_*$, и $x_* < x^*$.
Тогда из-за строгой монотонности: $f(x_*) < f(x_*)$. Получим противоречие.

Вывод формулы для производной обратной функции

$$\Delta x = x - x_0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)} =$$

$$\frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Производные второго порядка

Определение второй производной:

$$f''(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Вопрос. Почему индекс 2 в числителе и знаменателе обозначения второй производной записывается по-разному?

$$f''(x) \equiv \lim_{\Delta\to 0} \frac{f'(x+\Delta) - f'(x)}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \left(\frac{f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)}{\Delta} - \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} \right) \frac{1}{\Delta}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)}{\Delta^2} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Производные второго порядка

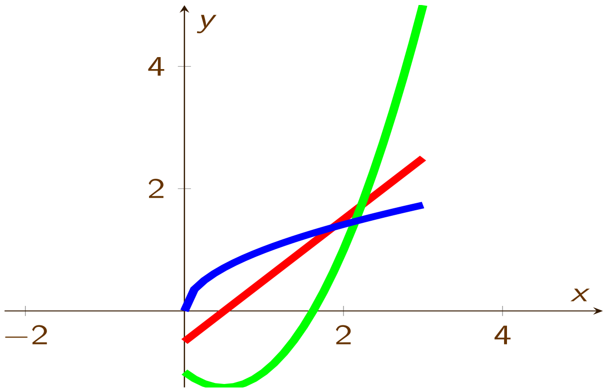
Определим разностный оператор второго порядка:

$$
\begin{aligned}
D(f(x)) &:= f(x+\Delta) - f(x).\\
D^2(f) &\equiv D(D(f(x))) = D(f(x+\Delta) - f(x))\\
&= D(f(x+\Delta)) - D(f(x)) =\\
&\quad (f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)) - (f(x+\Delta) - f(x)).
\end{aligned}
$$

Тогда формула для второй производной:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{D^2(f(x))}{\Delta^2}.$$

Геометрический смысл второй производной



Для линейной функции:

$$y(x) = kx + b, \;\; y'(x) = k,$$
$$y''(x) \equiv 0.$$

Для квадратичной функции:

$$y(x) = x^2 + bx + c, \quad y'(x) = 2x + b$$

Для квадратного корня:

$$y(x) = \sqrt{x}, \quad y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

Наблюдение: Если функция возрастает быстрее линейной, то вторая производная положительна.

Физический смысл второй производной

Рассмотрим движение вдоль прямой линии:

- Пусть $x(t)$ –зависимость расстояния от времени.
- $\dot{x}$ – скорость.
- $\ddot{x}$ – ускорение.

Пример. Падение материальной точки

- $\ddot{x} = -g$ – ускорение.
- $\dot{x} = -gt$ скорость.
- $x = -g\frac{t^2}{2}$ мгновенная координата.

Производные высших порядков. Примеры

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^3 + 2x^2 + \sin(x), \\
F'(x) &= 3x^2 + 4x + \cos(x), \\
F''(x) &= 6x + 4 - \sin(x), \\
F'''(x) &= 6 - \cos(x), \\
F^{(4)}(x) &= \sin(x).
\end{aligned}
$$

Производная второго порядка произведения функций

Формула для второй производной произведения:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

1. Первая производная:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

2. Вторая производная:

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv''$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

Производная n-го порядка от произведения функций

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

где:
$(u(x)v(x))^{(n)}$ - n-я производная произведения $u(x)$ и $v(x)$.
$\binom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент, который рассчитывается как $n!/(k!(n-k)!)$.
$u^{(k)}(x)$ - k-я производная функции $u(x)$.
$v^{(n-k)}(x)$ - (n-k)-я производная функции $v(x)$.

Производная второго порядка от сложной функции

Формула для второй производной сложной функции:

$$(f(g(x)))'' = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

Формула для второй производной сложной функции получается с помощью правила цепочки, которое применяется дважды.
1. Первое применение правила цепочки:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Здесь мы умножаем производную внешней функции f по аргументу g(x) на производную внутренней функции g(x).

Производная второго порядка от сложной функции

2. Теперь найдём вторую производную сложной функции. Для этого нужно продифференцировать результат, полученный на первом шаге:

$$(f(g(x)))'' = \frac{d}{dx}[f'(g(x)) \cdot g'(x)]$$

Используем правило произведения:

$$(f(g(x)))'' = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

Производные высшего порядка для функции, заданной параметрически

$$
\begin{aligned}
y &= y(t), \;\; x = x(t), \Rightarrow y(x) = y(t(x)), \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}(y(t)) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}(y(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{1}{x'(t)}\frac{y''(y)x'(t) - y'(t)x''(t))}{(x'(t))^2} = \\
&\frac{y''(y)x'(t) - y'(t)x''(t))}{(x'(t))^3}.
\end{aligned}
$$

Формула для дифференцирования функции, заданной параметрически

$dy = y'_t\,dt$

$dx = x'_t\,dt$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(y(t(x)))}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{d(y'(t(x)))}{dt} = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^2}$

$\frac{1}{x'_t}$

$$
\begin{aligned}
y &= y(t),\ x = x(t),\\
\frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \equiv \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).
\end{aligned}
$$

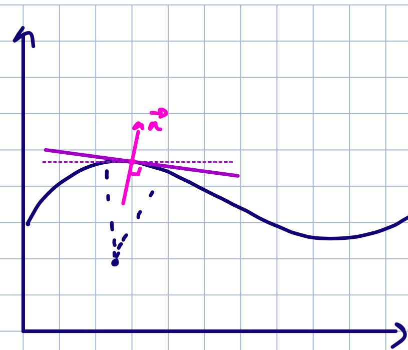
$$y = kx + b$$

$$y = f'_x(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\vec{l} = (1, f'(x_0))$$

$$\vec{n} = (-f'(x_0), 1)$$

$$(\vec{l}\cdot\vec{n}) = 0$$



$$\begin{cases} y = k_1 t + y_0 \\ x = k_2 t + x_0 \end{cases}$$

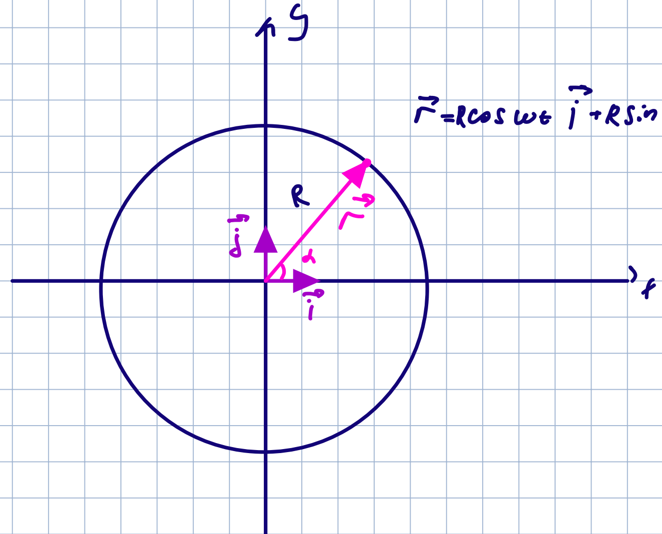
$$(y - y_0) = f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{=\varkappa}$$

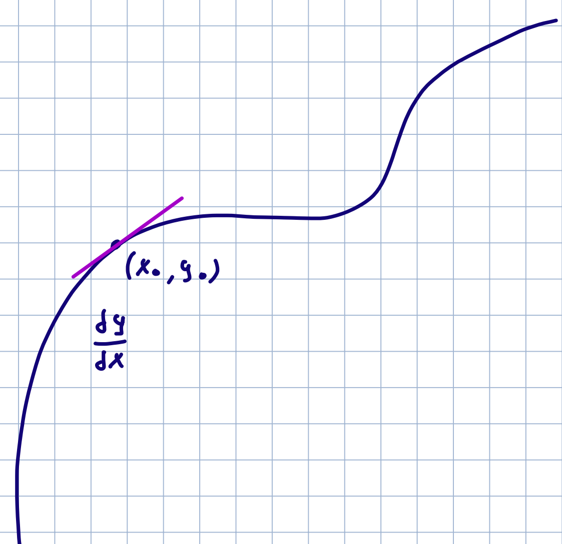
$$\vec{l} = ((x - x_0), (y - y_0))$$

$$\vec{l} = (\varkappa, f'(x_0)\varkappa)$$

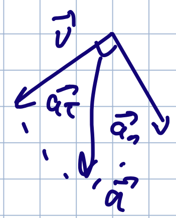
Тогда $\vec{n} = (-f'(x_0)\varkappa, \varkappa)$

$$\vec{r} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}$$





$$\vec{v} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$$
$$\vec{a} = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j}$$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \frac{1}{|\vec{v}|}\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

$$a_n = (\vec{a}\cdot\vec{n}) = \frac{1}{|\vec{v}|}\left(-x''(t)\,y'(t) + y''(t)\,x'(t)\right)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = k\,v^2$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{a_n}{v^2} = \frac{\left(-x''(t)\,y'(t) + y''(t)\,x'(t)\right)}{|\vec{v}|^3}$$

$$\left(x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}\right)^2 = |\vec{v}|^2$$
$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + \dots \underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{0} = |\vec{v}|^2$$

$$\boxed{k = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}}$$

- $F = x \cdot e^{\frac{x}{y^2} \cdot 1} - 2y$

- $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right)$

$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = \left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right)'_x \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right)^2}$

$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\operatorname{tg}'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \operatorname{tg}(x)$

$x = \operatorname{arctg}(y)$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \cos^2 x = \frac{1}{y^2+1}$

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{tg}^2 x + 1)\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$

-

$f(a) = a_0$ | $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$

$f'(a) = a_1$ | $f'_x(x) = 0 + a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2$

$f''(a) = 2a_2$ | $f''_x(x) = 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3(x-a) + \dots$

$\frac{f^k(a)}{k!} = a_k$ | $f^k_x(x) = k!\,a_k + (k+1)!\,a_{k+1}(x-a) + \dots$

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^i(a)}{i!}\cdot(x-a)^i + \dots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{ряд Тейлора}}$$

Если $k=0$ => ряд Маклорена

Лемма Ферма

$\exists \xi:$

$$f(\xi) = M = \max_{x \in (a,b)} f(x)$$

$$x < \xi \Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

$$x > \xi \Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

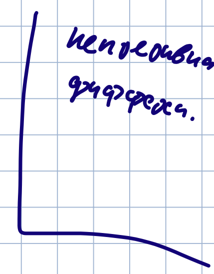
Теорема Ролле

$$m = \min_{x \in (a,b)} f(x)$$

$$M = \max_{x \in (a,b)} f(x)$$

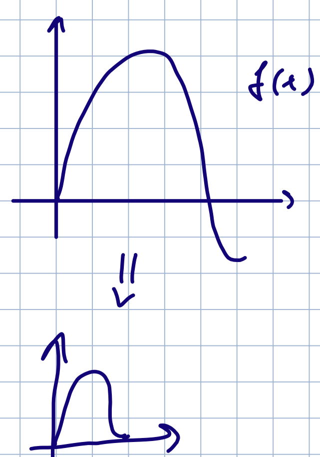
$$f(a) = f(b) \Rightarrow$$

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$



непрерывна
дифференц.

Теорема Лагранжа



$f(x)$ - непрерыв. на $[a,b]$ и дифференц. на $[a,b]$

Тогда $\exists \xi \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Proof: