

Введение в комбинаторику и дискретную математику

Лаборатория 2

Проф. Фролов Андрей Николаевич



Основные комбинаторные величины

	без повторений	с повторениями
порядок важен	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{A}_n^k = n^k$
порядок не важен	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Основные комбинаторные величины

Задачи

1. Требуется создать флаг с тремя горизонтальными линиями. Для этого должны использоваться одни из следующих цветов: красный, зеленый, синий, желтый, черный и белый. Цвет средней линии должен отличаться от двух других. Сколько различных флагов может быть создано с такими условиями?
2. Сколько диагоналей у 12-стороннего выпуклого многоугольника?
3. Палиндром – это слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево (например, "потоп" или "ХУУХ"). Сколько существует 9-буквенных палиндромов, составленных из букв латинского алфавита (возможно, бессмысленных)?

Основные комбинаторные величины

Задачи

4. Ректор университета Иннополис решил создать ученый совет из физиков и математиков. Всего в университете 20 физиков и 15 математиков. Сколько всего различных советов из 8 ученых можно создать, если в нем математиков должно быть больше, чем физиков (как минимум 1 физик должен быть в совете)?
5. Среди друзей 4 девушки: Анна, Беатрис, Валентина и Галина; и 6 мужчин: Дмитрий, Евгений, Жорж, Зиновий, Ипполит и Кирилл. Каждая девушка хочет выйти замуж за одного из этих мужчин. Сколькими различными способами можно поженить всех девушек.
6. Сколькими способами можно назначить четырёх человек на четыре должности, если всего есть девять кандидатов на эти должности?

Основные комбинаторные величины

Задачи

7. Как много 5-элементных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, содержащих хотя бы одно нечетное число?
8. Как много 3-элементных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, содержащих хотя бы одно четное число и хотя бы одно число, делящееся на 5?
9. В кафе есть 4 вида пирожных: шоколадное, кремовое, ореховое и с джемом. Сколько различных заказов можно сделать, выбирая 7 пирожных?
10. Сколько различных решений в целых положительных имеет следующее уравнение?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

Домашняя работа

Задачи

1. У королевы есть 12 одинаковых зеркал. Сколькими способами их можно повесить в 8 разных залах замка так, чтобы в каждом зале было хотя бы одно зеркало?
2. В пекарне продавались 4 вида пирожков: элеши, эчпочмаки, перемячи и кыстыбыи. Сколькими способами можно купить 7 пирожков?
3. Сколько имеется способов раздать 11 разных цветков, трём девушкам: какой-то — 5, а остальным — по 3 цветка?

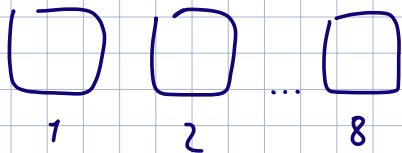
Домашняя работа

Задачи

4. На книжной полке стоят 40 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы
- а) три тома сочинений А. С. Пушкина, имеющиеся среди них, расположились в правильном порядке (но не обязательно вплотную друг к другу)?
 - б) те же тома по-прежнему шли в порядке нумерации, но никакие два из них друг к другу не примыкали?
5. Сколько различных решений в натуральных числах (0 – натуральное число) имеет следующее уравнение, если известно, что $x_1 \neq 0$?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

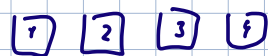
N1



как можно раздать 4 зеркала \Rightarrow надо 4 зеркала

$$k=4, n=8 \quad C_{k+n-1}^k = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$$

N2



$$\overline{C_4^7} = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$


3. Сколько имеется способов раздать 11 разных цветков, трём девушкам: какой-то — 5, а остальным — по 3 цветка?

$$3 \cdot \overline{C_{11}^5} \cdot \overline{C_{11}^3} \cdot \overline{C_{11}^3}$$

$$3 \cdot C_{11}^5 \cdot C_{11}^3 \cdot C_{11}^3 = 736900169$$

4. На книжной полке стоят 40 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы

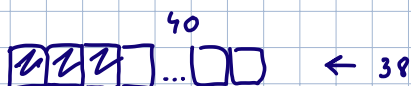
- три тома сочинений А. С. Пушкина, имеющиеся среди них, расположились в правильном порядке (но не обязательно вплотную друг к другу)?
- те же тома по-прежнему шли в порядке нумерации, но никакие два из них друг к другу не примыкали?

а) 

$$\frac{A_{40}^3}{3!} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{6} = 9880$$

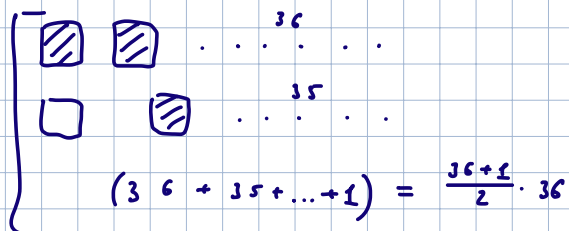
$$9880 \cdot 37!$$

б)

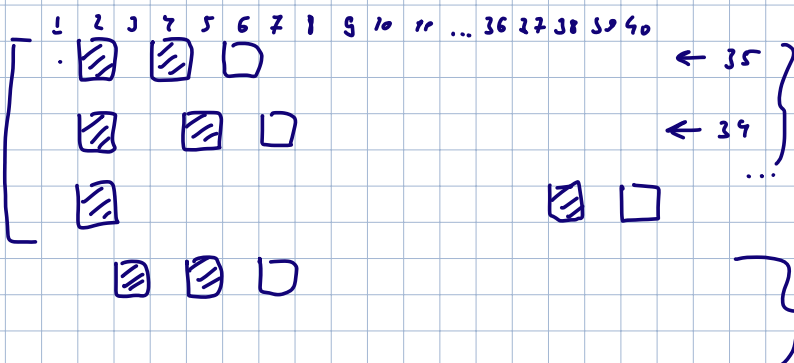




$$\frac{A_{37}^3}{3!} \cdot 37!$$

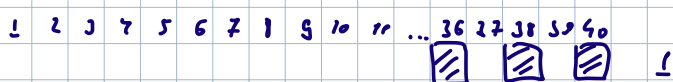


$$(36 + 35 + \dots + 1) = \frac{36+1}{2} \cdot 36$$



$$35 + 34 + \dots + 1 = \frac{35+1}{2} \cdot 35$$

$$39 + \dots + 1 = \frac{39+1}{2} \cdot 39$$



$$\sum_{i=1}^{35} S_i, \text{ где } S_i - \text{число}$$

5. Сколько различных решений в натуральных числах (0 – натуральное число) имеет следующее уравнение, если известно, что $x_1 \neq 0$?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

x_1	x_2	x_3
1	0	14
	1	13
	2	12

	14	0
2	0	13
	1	12
	2	11

	13	0


количество решений: $15 + 14 + \dots + 1 = \frac{1+15}{2} \cdot 15 = 8 \cdot 15 = 120$

...

15			
	0	0	1

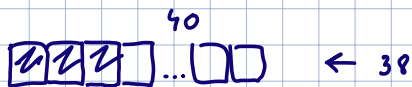
4. На книжной полке стоят 40 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы

- три тома сочинений А. С. Пушкина, имеющиеся среди них, расположились в правильном порядке (но не обязательно вплотную друг к другу)?
- те же тома по-прежнему шли в порядке нумерации, но никакие два из них друг к другу не примыкали?

а) 

$$\frac{A_{40}^3}{3!} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{6} = 9180$$

б)

 ← 38



$$\left[\begin{array}{cccc} \text{shaded} & \text{shaded} & \dots & 36 \\ \text{empty} & \text{shaded} & \dots & 35 \end{array} \right] (36 + 35 + \dots + 1) = \frac{36+1}{2} \cdot 36$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ \cdot & \text{shaded} & \text{shaded} & \text{empty} & & & & & & & & & & & & & \\ \text{shaded} & & \text{shaded} & \text{empty} & & & & & & & & & & & & & \\ \text{shaded} & & & & & & & & & & & & \text{shaded} & \text{empty} & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \text{shaded} & \text{empty} & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \leftarrow 35 \\ \leftarrow 34 \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$35 + 34 + \dots + 1 = \frac{35+1}{2} \cdot 35 = \frac{36}{2} \cdot 35$$

$$34 + \dots + 1 = \frac{34+1}{2} \cdot 34$$

$$\sum_{i=1}^{35} S_i, \text{ где } S_i - \text{сумма } i \text{ элементов}$$

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \right]$$

$$\frac{(n+2)}{2}(n+1) + \frac{(n+1)}{2}n + \dots + 1 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

$$(n+2) = 36$$

$$n = 34$$

$$\sum_{n=0}^{34} \frac{(n+2)}{2}(n+1) = 1 + \frac{1+2}{2} \cdot 2 + \frac{2+1}{2} \cdot 3 + \dots + \frac{36}{2} \cdot 35 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 7770$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... 36 37 38 39 40



37

