$\underline{N 1}$

a.) $a_{n+1} = -3a_n$

$\lambda = -3 = p$

$a_n = \alpha \cdot (-3)^n$

б.) $a_{n+2} = 3a_n$

$\lambda^2 = 3 \qquad \lambda = \pm\sqrt{3} \qquad \begin{matrix} p_1 = \sqrt{3} \\ p_2 = -\sqrt{3} \end{matrix}$

$a_n = \alpha(\sqrt{3})^n + \beta(-\sqrt{3})^n$

$D = 4 - 4 \cdot 4 = -12$

в.) $a_{n+3} = 8a_n$

$\lambda^3 = 8 \qquad \lambda^3 - 2^3 = 0 \qquad (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4) = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$

$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2(-1+i\sqrt{3})^n + \alpha_3(-1-i\sqrt{3})^n$

2.) $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n$

$\lambda^3 = 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$

$\lambda^2(\lambda-3) - 4(\lambda-3) = 0$

$(\lambda^2 - 2^2)(\lambda-3) = 0$

$\left[\begin{matrix} p_1 = 2 \\ p_2 = -2 \\ p_3 = 3 \end{matrix}\right. \qquad a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 3^n$

№2

a) $a_0=1 \quad a_1=3$

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

$\lambda^2=3\lambda-2$

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\lambda^2-2\lambda-\lambda+2=0$

$\lambda(\lambda-2)-(\lambda-2)=0$

$(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=2\end{array}\right.$

$a_n=\alpha_1 1^n+\alpha_2 2^n$

$\begin{array}{l} a_0 \\ a_1 \end{array}\begin{cases}1=\alpha_1+\alpha_2\\ 3=\alpha_1+2\alpha_2\end{cases}$

$2=\alpha_2$

$-1=\alpha_1$

$a_n=2\cdot 2^n-1$

б) $a_0=2 \quad a_1=1$

$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$

$\lambda^2=4\lambda-4$

$\lambda^2-4\lambda+4=0$

$(\lambda-2)^2=0$

$p_1=p_2=2=p$

$a_n=(\alpha n+\beta)\cdot 2^n$

$a_0=2=(\alpha\cdot 0+\beta)\cdot 2^0$

$a_1=1=(\alpha+\beta)\cdot 2^1$

$\begin{cases}2=\beta\\ 1=2\alpha+2\beta\end{cases}$

$1=2\alpha+4$

$-3=2\alpha$

$\alpha=-\frac{3}{2}$

$a_n=\left(-\frac{3}{2}n+2\right)2^n$

Задачи

1 Решите следующие рекуррентные соотношения (найти общее решение).

а $a_{n+1} = -3a_n$

б $a_{n+2} = 3a_n$

в $a_{n+3} = 8a_n$

г $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n$

Рекуррентные соотношения

Задачи

2 Решите следующие рекуррентные соотношения (найти частное решение).

а $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

б $a_0 = 2, a_1 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$

Задачи

3 Решите следующие системы рекуррентных соотношений (найти общее решение).

a $\begin{cases} a_{n+1} = & 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = & a_n - b_n \end{cases}$

b $\begin{cases} a_{n+1} = & a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = & 3a_n - 2b_n \end{cases}$

a) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}$

подставь

$a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n - b_n \qquad a_n = b_{n+1} + b_n$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} \qquad b_{n+2} = a_{n+1} - b_{n+1}$

$b_n = a_{n+1} - 2a_n \qquad b_{n+2} = 2a_n + b_n - b_{n+1}$

$b_{n+1} = a_n + 2a_n - a_{n+1} \qquad b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2b_n + b_n - b_{n+1}$

$b_{n+2} = b_{n+1} + 3b_n$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n - a_{n+1}$

$\underbrace{a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n}$

$\lambda^2 = \lambda + 3$

$\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$a_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$

Так не надо,

надо подставить так и a_n

$\underbrace{\cancel{b_{n+2}} = b_{n+1} + 3b_n}$

$\lambda^2 = \lambda - 3$

$\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$

$\cancel{b_n = \beta_1 \left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)^n + \beta_2 \left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^n}$

Иначе α меняется и ответ не верный получается b $\begin{cases} a_{n+1} = & a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = & 3a_n - 2b_n \end{cases}$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -2a_n + 4b_n$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} \qquad b_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 4b_n$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 2a_{n+1} + 2a_n$$

$$\underbrace{a_{n+2} = -a_{n+1} + 8a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 = -\lambda + 8$$

$$\lambda^2 + \lambda - 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$a_n = \alpha_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}\right)^n$$

b $\begin{cases} a_{n+1} = & a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = & 3a_n - 2b_n \end{cases}$

$$a_n = (b_{n+1} + 2b_n)\frac{1}{3}$$

$$b_{n+2} = 3a_{n+1} - 2b_{n+1}$$

$$b_{n+2} = 3a_n + 6b_n - 2b_{n+1}$$

$$b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 6b_n - 2b_{n+1}$$

Так не надо, надо подставлять a_n

$$\underbrace{b_{n+2} = -b_{n+1} + 8b_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 = -\lambda + 8$$

$$\lambda^2 + \lambda - 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{2}$$

$$b_n = \beta_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}\right)^n + \beta_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}\right)^n$$

Задачи

4 Найти число последовательностей длины n над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, в которых нет ни двух нулей, ни двух единиц, стоящих подряд.

5 Определенная компьютерная система разрешает только такие пароли, которые подчиняются следующим правилам:

- Пароль – это комбинация любого из десяти цифр $0 - 9$, буквы 52 (верхний и нижний) и восемь дополнительных символов $+, -, \_, \&, \%, *, (,)$.
- За любой буквой или символом обязательно следует цифра.

Определите количество возможных паролей, длина которых составляет восемь (используйте рекурсию).

4 Найти число последовательностей длины n над алфавитом $\{0,1,2\}$, в которых нет ни двух нулей, ни двух единиц, стоящих подряд.

$\{0,1,2\}$ нет $\underline{00}$, нет $\underline{11}$

- $n = \underline{1}$: 0 ; 1 ; 2 3
- $n = 2$: 01 ; 02 ; 22 3
- $n = 3$: 010 ; 020 ; 021 ; 022 ; 101 ; 102 ; 120 ; 121 ; 122
  201 ; 210 ; 220 ; 221 ; 222
  13

$\underline{00}$ $\underline{11}$

$2 \cdot F_0(n-1)$ 01, 02

$2 \cdot F_1(n-1)$ 10, 12 $\qquad F_1(n-1) = F_0(n-2) + F_2(n-2)$

$3 \cdot F_2(n-1)$ 20, 21, 22

•) $F_1(n-1) = F_0(n-2) + F_2(n-2)$ 01, 21

•) $F_2(n-2) = F_0(n-3) + F_1(n-3) + F_2(n-3)$

$$F(n) = 2F_0(n-1) + 2\cdot(F_0(n-2) + F_2(n-2)) + 3F_2(n-2)$$

$$F_0(n) = F_1(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_1(n) = F_0(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_2(n) = F_0(n-1) + F_1(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F(n) = 2F_1(n-1) + 2F_0(n-1) + 3F_2(n-1)$$

$$F_0(n) = F_1(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_1(n) = F_0(n-1) + F_2(n-1)$$

$F(n-1)$

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_0(n-1) + F_1(n-1)$$

$$F_0(n) = \left(F_0(n-2) + F_2(n-2)\right) + F_2(n-1)$$

$$F_2(n) = \left(F_0(n-2) + F_2(n-2)\right) + F_0(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_0(n) = F_2(n-2) + F_2(n-1) + F_0(n-2)$$

$$F_2(n) = F_0(n-1) + F_0(n-2) + F_2(n-2) + F_2(n-1)$$

$$F_0(n+1) = F_2(n-1) + F_2(n) + F_0(n-1)$$

$$F_0(n+1) = \left(F_0(n) - F_0(n-2) - F_2(n-2)\right) + F_2(n) + F_0(n-1)$$

$$F_0(n+1) = F_0(n) + F_0(n-1) + F_2(n) + F_0(n-1)$$

$$F_0(n) = F_1(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_1(n) = F_0(n-1) + F_2(n-1) \qquad F_1(n-1) = F_0(n-2) + F_2(n-2)$$

$$F_2(n) = F_0(n-1) + F_1(n-1) + F_2(n-2)$$

$$F_2(n) = F_0(n-1) + F_1(n-1) + F_1(n-1) - F_0(n-2)$$

$$F_0(n+1) = F_1(n) + F_0(n-1) + F_1(n-1) + F_1(n-1) - F_0(n-2)$$

$$F_1(n+1) = F_0(n) + F_0(n-1) + F_1(n-1) + F_1(n-1) - F_0(n-2)$$

$$F_0(n+1) = F_7(n) + F_0(n-1) + F_7(n-1) + F_7(n-1) - F_0(n-2)$$

$$F_7(n+1) = F_0(n) + F_0(n-1) + F_7(n-1) + F_7(n-1) - F_0(n-2)$$

$$F_0(n) = F_7(n-1) + F_7(n-2) + F_7(n-2) + F_0(n-2) - F_0(n-3)$$

$$F_7(n) = F_0(n-1) + F_0(n-2) + F_7(n-2) + F_7(n-2) - F_0(n-3)$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-2) + f(n-2) - f(n-3)$$

$$f(n) = f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3)$$

$$f(n+3) = f(n+2) + 3f(n+1) - f(n)$$

$$\lambda^3 = \lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$f(n) = f(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_2(n) = 2f(n-1) + F_2(n-1)$$

$$F_2(n-1) = f(n) - f(n-1)$$

$$F_2(n) = f(n+1) - f(n)$$

$$\Rightarrow \quad f(n+1) - f(n) = 2f(n-1) + f(n) - f(n-1)$$

$$f(n+2) - f(n+1) = 2f(n) + f(n+1) - f(n)$$

$$f(n+2) = 2f(n+1) + f(n)$$

$$\lambda^2 = 2\lambda + 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \qquad D = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

// $f(0)=0$

$f(1)=1$ кол-во посл. из 1 //

$$\Rightarrow \quad f(n) = \alpha\cdot(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha(1+\sqrt{2})+\beta(1-\sqrt{2})=1 \end{cases}$$

$$\alpha(1+\sqrt{2}) - \alpha(1-\sqrt{2}) = 1$$

$$\alpha\sqrt{2}+\alpha\sqrt{2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \quad f(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$$

Тогда $F_2(n) = f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}+1) - (1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2}-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n(2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n\right]$$

$$F(n) = 2f(n) + F_2(n) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n(2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2(1+\sqrt{2})^n - 2(1-\sqrt{2})^n + (2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + \sqrt{2}\,(1-\sqrt{2})^n \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+\sqrt{2})^n (2+2+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^n (-2+\sqrt{2}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+\sqrt{2})^n (4+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n \right]$$

$$\boxed{F(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(4+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n \right]}$$

5 Определенная компьютерная система разрешает только такие пароли, которые подчиняются следующим правилам:

- Пароль – это комбинация любого из десяти цифр $0-9$, буквы 52 (верхний и нижний) и восемь дополнительных символов $+, -, \_, \&, \%, *, (,)$.
- За любой буквой или символом обязательно следует цифра.

Определите количество возможных паролей, длина которых составляет восемь (используйте рекурсию).

10 цифр 60 символ

10 | цифра | длина $n-1$

60 | символ | цифр 10 | длина $n-2$

$$a_n = 10 \cdot a_{n-1} + 60 \cdot 10 \cdot a_{n-2}$$

$$\lambda^2 = 10\lambda + 600$$

$$\lambda^2 - 10\lambda - 600 = 0$$

$$D = 100 + 2400 = 25 \cdot 100 = 50^2$$

$$\lambda = \frac{10 \pm 50}{2} \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = 30 \\ \lambda = -20 \end{array}\right.$$

$$a_n = \alpha_1 30^n + \alpha_2 (-20)^n$$

$$a_0 = 0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 70 = 30\alpha_1 - 20\alpha_2$$

$$70 = 30\alpha_1 + 20\alpha_1$$

$$\frac{7}{5} = \alpha_1 \quad -\frac{7}{5} = \alpha_2$$

$$\boxed{a_n = \frac{7}{5} \cdot 30^n - \frac{7}{5}(-20)^n}$$

Вроде верно

$$\frac{\sqrt[3]{(t+8)^4} - 16}{t}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2^{12} \cdot \left(1+\frac{t}{8}\right)^4} - 16}{t} = \frac{2^4 \cdot \left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 16}{t} = \frac{2^4 \cdot \left(1+\frac{4}{3} \cdot \frac{t}{8}\right) - 16}{t} =$$

№ 2

б) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases}$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2\left(3a_n - \cancel{2}\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}(a_{n+1}-a_n)\right)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2\left(3a_n - a_{n+1} + a_n\right)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 8a_n - 2a_{n+1}$$

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 8a_n$$

$$\lambda^2 = -\lambda + 8$$

$$\lambda^2 + \lambda - 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_n = \alpha\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)^n \\ b_n = \alpha'\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)^n + \beta'\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)^n \end{array}\right]$$

№ 4 посл. $\{0,1,2\}$ без „00" и „11"

$$F_n = F_0(n) + F_1(n) + F_2(n)$$

Теперь $F_0(n) = F_1(n) = F_{10}(n)$

$$F_2(n) = F_1(n-1) + F_2(n-1) + F_0(n-1)$$

$$\begin{cases} F_2(n) = 2F_{10}(n-1) + F_2(n-1) \\ F_{01}(n) = F_{01}(n-1) + F_2(n-1) \end{cases}$$

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n) + F_2(n) =$$

$$= F_1(n-1) + F_2(n-1) + F_0(n-1) + F_2(n-1) + F_0(n-1) + F_1(n-1) + F_2(n-1) =$$

$$= 2F(n-1) + F_0(n-2) + F_1(n-2) + F_2(n-2) =$$

$$= 2F(n-1) + F(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad F(n+2) = 2F(n+1) + F(n)$$

$$\lambda^2 = 2\lambda + 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

0 1	2 1
0 2	2 0
1 0	2 2
1 2	

$$F(n) = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$$

$F(1) = 3$
$F(2) = 7$

$$\begin{cases} 3 = \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) \\ 7 = \alpha(1+\sqrt{2})^2 + \beta(1-\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$\frac{3 - \alpha(1+\sqrt{2})}{7 - \alpha(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$3 - \alpha(1+\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}) - \alpha(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2$$

$$\alpha(1+\sqrt{2})(1-2-1) = -3+1-\sqrt{2}$$

$$-2\alpha(1+\sqrt{2}) = -2-\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}$$

5 Определенная компьютерная система разрешает только такие пароли, которые подчиняются следующим правилам:

- Пароль – это комбинация любого из десяти цифр $0-9$, буквы 52 (верхний и нижний) и восемь дополнительных символов $+, -, \_, \&, \%, *, (,)$. 60 знаков
- За любой буквой или символом обязательно следует цифра.

Определите количество возможных паролей, длина которых составляет восемь (используйте рекурсию).

$P(n)$ - кол-во паролей длина n

(·) начало на цифру

4

| 250 згодно | ← $P(n-1)\,10$

10

(·) начало на букву

5 10 $n-2$

| /// 250-згодно | $60 \cdot 10 \cdot P(n-2)$

60 4

$$P(n) = 10P(n-1) + 600P(n-2)$$

$$P(n+2) = 10P(n+1) + 600P(n)$$

$$\lambda^2 = 10\lambda + 600$$

$$\lambda^2 - 10\lambda - 600 = 0$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100+2400}}{2} = 5 \pm \frac{5\cdot 10}{2} = 5 \pm 25 = \left[\begin{array}{l} 30 \\ -20 \end{array}\right.$$

$60 \cdot 10$

$10 \cdot 10$

$$P(n) = \Delta' \cdot 30^n + \hat{\theta}(-20)^n$$

$P(1) = 10$

$P(2) = 700$

$$\begin{cases} 10 = \Delta' \cdot 30 - 20\hat{\theta} \\ 700 = \Delta' 30^2 + 20^2\hat{\theta} \end{cases}$$

$$- \begin{array}{l} 300 = \Delta' \cdot 30^2 - 20\cdot 30\hat{\theta} \\ 700 = \Delta' \cdot 30^2 + 20^2\hat{\theta} \end{array}$$

$$-400 = 20(30-20)\cdot\hat{\theta}$$

$$\frac{2}{5} = \hat{\theta}$$

$$10 = \Delta' 30 - 8 \qquad \Delta' = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(n) = \frac{3}{5} \cdot 30^n + \frac{2}{5} \cdot (-20)^n$$