Автономная некоммерческая организация высшего образования

«Университет Иннополис»

Лабораторный практикум курса

«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»

(курс основывается на учебнике Д. В. Беклемишева)

4 неделя: методы Гаусса, смена базиса, векторное произведение.

лектор: И. В. Конюхов

преподаватель: Е. А. Марчук

2024 г

1.3. Доказать, что для любых трех векторов **a**, **b**, **c** и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}$, $\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}$ линейно зависимы.

$$\vec{e}_1 = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$$

$$\vec{e}_2 = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c} \qquad \det\begin{Vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & 0 & \beta \end{Vmatrix} = \alpha \cdot \det\Big|$$

$$\vec{e}_3 = \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$$

1.11. Проверить, будут ли компланарны векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$; в случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую (здесь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три некомпланарных вектора):

1) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\quad \mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\quad \mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Используя метод Гаусса, найти определитель матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1 1
1 1
3 1
1 3
1 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 13 \\ 9 \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 3 & 2 & -14 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \cdot -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -23 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -23 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & -7 & 55 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -23 \\ 0 & 0 & 10 & -120 \\ 1 & 0 & -7 & 55 \end{array}\right)$$

$$9-(-2\cdot 23) = 9+46 = 55$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -7 & 55 \end{array}\right)$$

$$+\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 15 & -115 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 20 & -120 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$-55$$

Используя метод Гаусса, найти решение системы линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$S_1 - S_2 \downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|} 1 & 5 & 5 \\ & & \\ & & \end{array}\right.$$

Используя метод Гаусса, найти обратную матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Фансада

4.3. На плоскости даны две системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(-1, 3)$, а базисные векторы второй системы имеют в базисе первой системы координаты $(2, 3)$ и $(1, 1)$ соответственно.

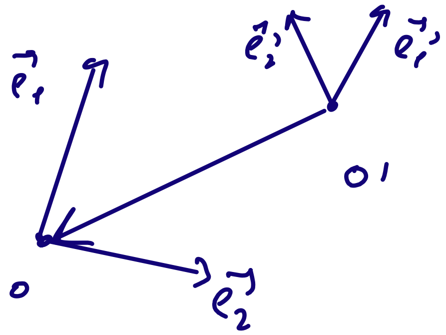
1) Найти координаты точки в первой системе, если известны ее координаты x', y' во второй системе координат.

2) Найти координаты точки во второй системе, если известны ее координаты x, y в первой системе координат.

3) Найти координаты точки O во второй системе и координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ в базисе второй системы координат.

$\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$

$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$



$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix} + \beta$$

$$S^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - S^{-1}\beta = \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}$$

1) $\vec{O'M} = \vec{O'O} + \vec{OM}$

$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

$\vec{OO'} = \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$

$\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\vec{e}_2' = 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\ -3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -9\end{pmatrix}$$

2) $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\vec{e}_2' = 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2$

$\vec{e}_1' - 2\vec{e}_2' = \vec{e}_2$

$\vec{e}_1' - 3\vec{e}_2' = -\vec{e}_1$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\ 9\end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1 = -1\cdot\vec{e}_1' + 3\vec{e}_2'$

$\vec{e}_2 = 1\cdot\vec{e}_1' - 2\vec{e}_2'$

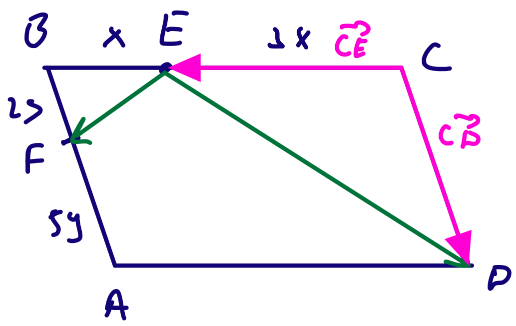
4.5. Координаты x, y каждой точки плоскости в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ выражаются через координаты x', y' этой же точки в системе O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ формулами $x = 2x' - y' + 5$, $y = 3x' + y' + 2$.

1) Выразить координаты x', y' через координаты x, y.

2) Найти координаты начала O и базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ первой системы координат во второй системе.

3) Найти координаты начала O' и базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ второй системы координат в первой системе.

4.12. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на стороне BC, а точка F — на стороне AB, причем $|BE|:|BC| = 1:4$, $|BF|:|AF| = 2:5$. Найти координаты точки плоскости в системе координат C, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$.



$$\{C, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\{E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}\} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

1) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD}$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

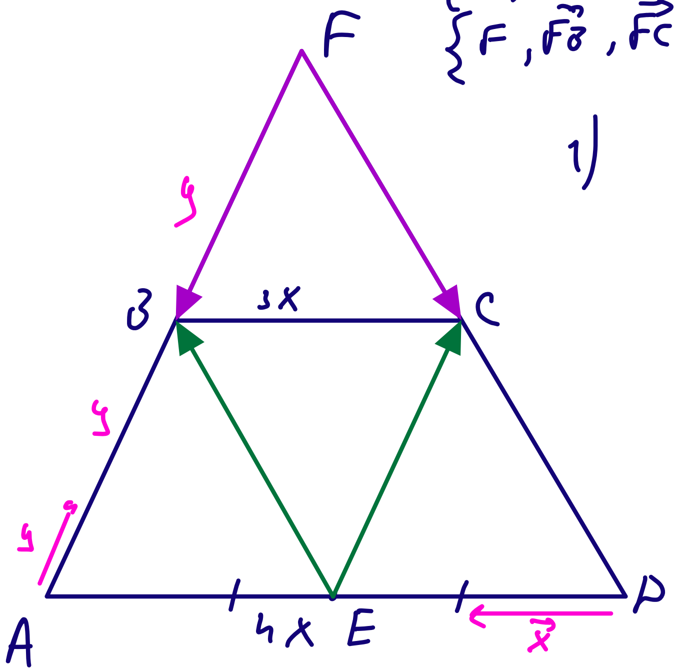
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.17. В трапеции $ABCD$ длины оснований BC и AD относятся как $3:4$, точка E является серединой основания AD, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F. Найти координаты точки плоскости в системе координат E, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат F, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FC}$.

$\{E, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\}$ x, y

$\{F, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}\}$ x', y'

1)



4.26. На плоскости даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты 1,3, а векторы $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе, считая угол φ равным:

1) $60°$; 2) $135°$; 3) $90°$; 4) $180°$.

4.28. В прямоугольном треугольнике ABC, длины катетов которого равны $|AB| = 3$ и $|BC| = 4$, точка D является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла. Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ имеют длину 1, причем $\mathbf{e}_1$ сонаправлен с $\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{e}_2$ сонаправлен с $\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{e}'_1$ сонаправлен с $\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{e}'_2$ сонаправлен с $\overrightarrow{DB}$. Найти координаты точки плоскости в системе координат B, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, если известны ее координаты x', y' в системе координат D, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$.

3.1. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}(2,\ -3,\ -5)$;
2) $\mathbf{a}(2,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{b}(-4,\ 2,\ -2)$;
3) $\mathbf{a}(6,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{b}(3,\ -2,\ 0)$.

3.2. Упростить выражения:

1) $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}]$;

2) $[\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}/2,\ -\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c}]$.

3.5. Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют:

1) ортонормированный правый базис;
2) ортонормированный левый базис;
3) ортогональный правый базис.

Выразить векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ через векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

3.6. Известно, что $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Найти длины векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и углы между ними.

3.8. На векторах $\mathbf{a}(2,3,1)$ и $\mathbf{b}(-1,1,2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:

1) площадь этого треугольника;

2) длины трех его высот.

3.9 (р). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 3 и 2, а угол между ними равен 30°. В этой системе координат даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма: $(1,3)$, $(1,0)$ и $(-1,2)$. Найти площадь параллелограмма.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \quad \Big| \cdot -\frac{2}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{e_1} = \vec{i} + 5\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{e_1}' = \vec{i} - \vec{j}$

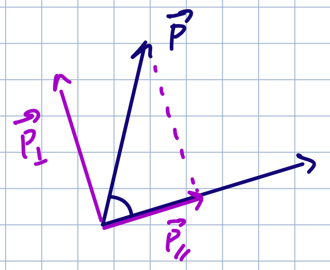
$\vec{e_2} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{e_2}' = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

1) $\begin{cases} \vec{e_1}' = \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{e_2}' = 4\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$

$\left(2\vec{e_1}' + \vec{e_2}' \right) \cdot \frac{1}{6} = \vec{i}$

№1

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{p}_\parallel = \overrightarrow{Proj_{\vec{q}}\vec{p}} = \frac{(\vec{p}\cdot\vec{q})}{\|\vec{q}\|^2}\cdot\vec{q} = -\frac{2}{9}\vec{q}$$

$$\vec{p}_\perp = \vec{p} - \overrightarrow{Proj_{\vec{q}}\vec{p}} = \vec{p} - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{q})}{\|\vec{q}\|^2}\cdot\vec{q}$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{q}) = -2$$

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{9} = 3$$