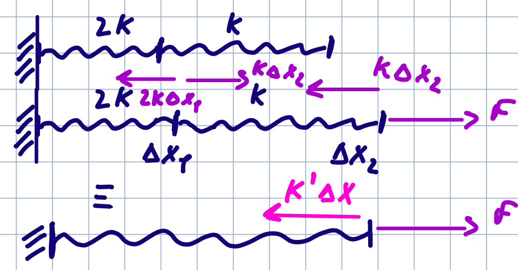
Задача 1

На гладком столе лежат два груза массами m и $2m$, скреплённые двумя последовательно соединёнными пружинами с жёсткостями k и $2k$. Найти их период колебаний.

Последов. соед. пружин

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}$$

1)

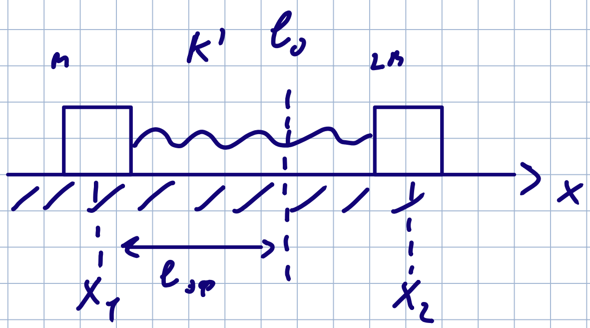


• $2k\Delta x_1 = k\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 2\Delta x_1$

• $\Delta x = \Delta x_2 + \Delta x_1 = 3\Delta x_1$

$$\left.\begin{aligned} F &= k'\Delta x \\ F &= k\Delta x_2 = 2k\Delta x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k'\cdot 3\Delta x_1 = 2k\Delta x_1$$

$$k' = \frac{2}{3}k$$



$$x_{20} - x_{10} = \ell$$

$$m\ddot{x}_1 = k'\cdot(x_2 - x_1 - \ell) = k'\cdot((x_{20} + \Delta x_2) - (x_{10} + \Delta x_1) - \ell)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k'\cdot(\Delta x_2 - \Delta x_1) \\ 2m\ddot{x}_2 = -k'(\Delta x_2 - \Delta x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{k'}{m}(\Delta x_2 - \Delta x_1) \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k'}{2m}(\Delta x_2 - \Delta x_1) \end{cases} -$$

$$\Rightarrow (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = \left(-\frac{k'}{2m} - \frac{k'}{m}\right)(\Delta x_2 - \Delta x_1)$$

Пусть $\xi = \Delta x_2 - \Delta x_1$

$\ddot{\xi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$

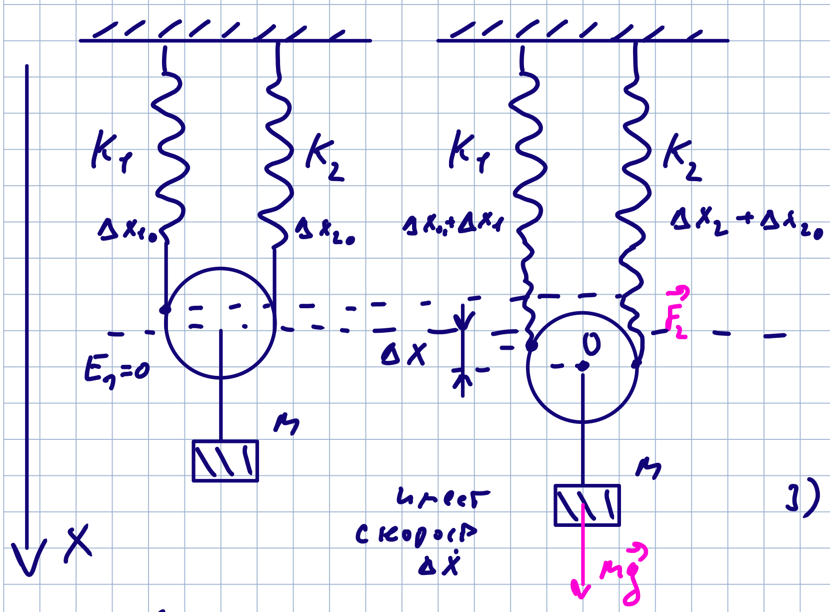
$$\ddot{\xi} = -\frac{3}{2}\frac{k'}{m}\xi = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}k\cdot\frac{1}{m}\xi = -\frac{k}{m}\xi$$

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad T = 2\pi\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

5.30. Найти период колебаний груза, подвешенного с помощью невесомого блока и двух пружин с коэффициентами упругости k_1 и k_2 (рис. 107). Найти также максимальную амплитуду A колебаний груза, при которой они происходят еще по гармоническому закону.



1) В равновесии

$$k_1\Delta x_{10} + k_2\Delta x_{20} = mg$$

2)

$$k_1(\Delta x_1 + \Delta x_{10}) = k_2(\Delta x_2 + \Delta x_{20})$$

$$- \quad k_1\Delta x_{10} = k_2\Delta x_{20}$$

$$k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2$$

$$\Delta x_1 = \frac{k_2}{k_1}\Delta x_2 \qquad \Delta x_2 = \frac{k_1}{k_2}\Delta x_1$$

3)

$$\Delta x = \frac{(\Delta x_2 + \Delta x_{20}) - (\Delta x_1 + \Delta x_{10})}{2}$$

$$\Delta\ddot{x} = \ddot{x} = \frac{\Delta\ddot{x}_2 + \Delta\ddot{x}_1}{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{\frac{k_1}{k_2}\Delta\ddot{x}_1 + \Delta\ddot{x}_1}{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{k_1+k_2}{2k_2}\Delta\ddot{x}_1$$

~~3. СЭ~~

$$\cancel{E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mg\Delta x + \frac{k_1\Delta x_1^2}{2} + \frac{k_2\Delta x_2^2}{2}}$$

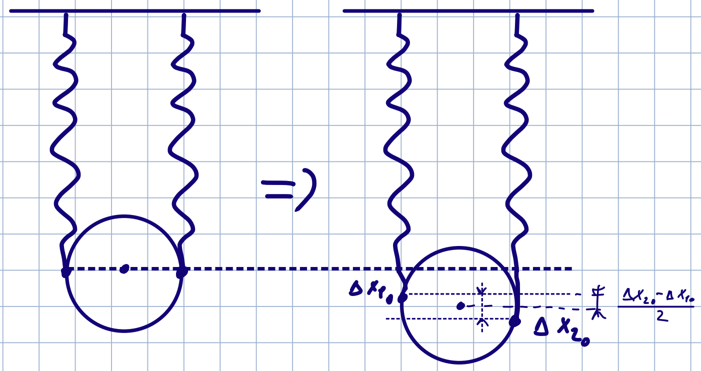
$$m\ddot{x} = mg - k_1(\Delta x_1 + \Delta x_{10}) - k_2(\Delta x_2 + \Delta x_{20})$$

$$m\ddot{x} = -k_1\Delta x_1 - k_2\Delta x = -k_1\Delta x_1 - k_2\cdot\frac{k_1}{k_2}\Delta x_1$$

$$m\cdot\frac{k_1+k_2}{2k_2}\Delta\ddot{x}_1 = -2k_1\Delta x_1$$

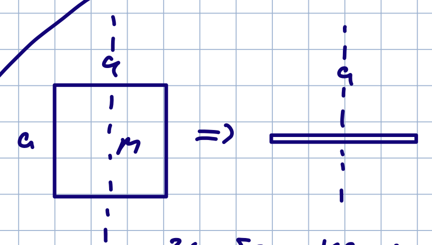
$$\Delta\ddot{x}_1 + \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)m}\Delta x_1 = 0$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{4k_1k_2}}}$$



Для плоской фигуры:

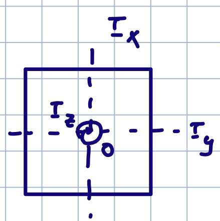
$$I_z = I_x + I_y$$



$$I_x = I_y = \frac{ma^2}{12}$$

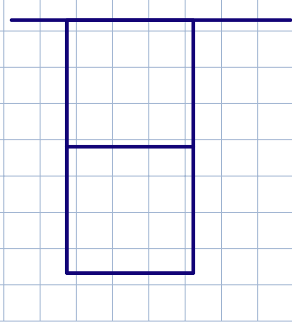
Высота не имеет значения

$$I_z = \frac{ma^2}{6}$$



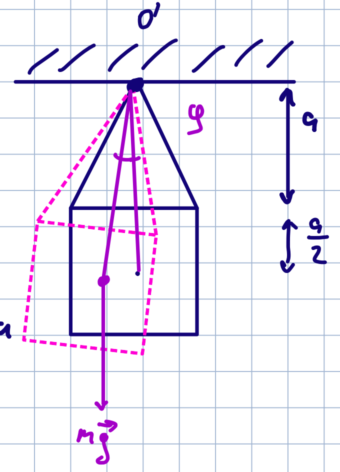
$$33\frac{ma^2}{4}\ddot{\varphi} = -mg\cdot\frac{1}{2}a\cdot\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\varphi = 0$$



10.3. Две одинаковые однородные пластинки, имеющие форму квадрата, подвешены с помощью тонких невесомых нитей двумя способами (рис. 251). Расстояние от точек подвеса до верхних сторон пластинок равно длине сторон. Найти отношение периодов малых колебаний получившихся физических маятников в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью пластинки.

1)



По т. Штейнера

$$J_{O'} = \frac{9}{4}ma^2 + \frac{1}{6}ma^2 = \frac{58}{24}ma^2 = \frac{29}{12}ma^2$$

$$J_{O'}\ddot{\varphi} = -mg\cdot\frac{3}{2}a\cdot\varphi$$

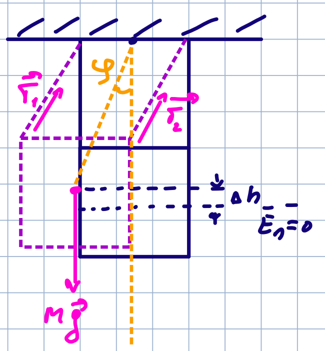
$$\ddot{\varphi} + \frac{3mga}{2\cdot\frac{29}{12}\cdot a^2 m}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{18}{29}\cdot\frac{g}{a}\varphi = 0$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{29}{18}\frac{a}{g}}$$

Тут есть вращение

2)



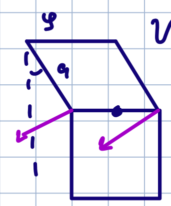
$$E = \frac{m(\dot{\varphi}a)^2}{2} + mga(1-\cos\varphi)$$

= "продифф. по врем." =>

$$0 = ma^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\varphi = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$



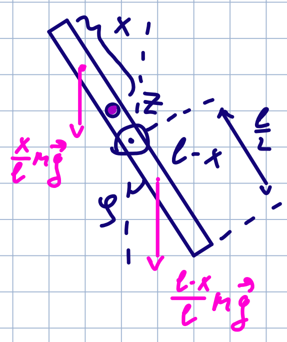
$V = a\dot{\varphi}$

$\Delta h = a\cdot(1-\cos\varphi)$

Скорость во ∀ точках одинакова
Движение поступат.

Тут нет вращение

№ 10.8 $x \in [0, \frac{l}{2}]$



1) Момент инерции отн. оси через центр стержня: $J_0 = \frac{ml^2}{12}$

Отн. оси z: $J_z = J_0 + m\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l^2}{4} - lx + x^2\right)$

2) Ур-ие моментов

$$J_z \ddot{\varphi} = \frac{x}{l}mg\left(\frac{x}{2}\cdot\sin\varphi\right) - \frac{l-x}{l}mg\cdot\left(\frac{l-x}{2}\cdot\sin\varphi\right)$$

$$J_z \ddot{\varphi} = \frac{x^2}{2l}mg\varphi - \frac{(l-x)^2}{2l}mg\varphi$$

$$\left(\frac{\cancel{m}l^2}{12} + \left(\frac{l-2x}{2}\right)^2\cancel{m}\right)\ddot{\varphi} = \cancel{m}g\varphi\,\frac{x^2-(l^2-2xl+x^2)}{2l}$$

$$\left(\frac{l^2}{12} + \frac{(l-2x)^2}{4}\right)\ddot{\varphi} = g\varphi(2x-l)$$

$$\left(\frac{l^2+3(l-2x)^2}{12}\right)\ddot{\varphi} + g(l-2x)\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{12g(l-2x)}{l^2+3(l-2x)^2}\varphi = 0$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12g(l-2x)}{l^2+3(l-2x)^2}}$$ Пусть $\eta = l-2x$

$$\nu(\eta) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12g\eta}{l^2+3\eta^2}}$$

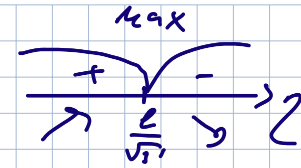
$\nu = \nu_{max} \Leftrightarrow \frac{12g\eta}{l^2+3\eta^2}$ — макс.

Рассм.

$$f(\eta) = \frac{12g\eta}{l^2+3\eta^2}$$

$$f'(\eta) = \frac{12g(l^2+3\eta^2) - 12g\eta\cdot6\eta}{(l^2+3\eta^2)^2} = \frac{12gl^2+36\eta^2g - 72\eta^2g}{(l^2+3\eta^2)^2}$$

$$f'(q) = \frac{12g\ell^2 - 36gq^2}{(\ell^2+3q^2)^2} = 12g\,\frac{\ell^2-3q^2}{(\ell^2+3q^2)^2}$$



$$f'_q = 0 \iff \ell^2 = 3q^2 \implies \ell = \sqrt{3}(\ell - 2\hat{x})$$

$$\frac{\ell}{\sqrt{3}} = \ell - 2\hat{x}$$

$$\hat{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,\ell$$

$$\boxed{\hat{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\,\ell}$$