$a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$

$\exists c : (a < c < b) \wedge (c \in \mathbb{Q})$ плотность.

- Супремум $\sup(a_n) = M$, $M \geqslant a_n$ // верхняя грань.
- Инфимум // нижняя грань.

<u>Опр.</u> Фундамент. послед.: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geqslant N : |a_m - a_n| < \varepsilon$

<u>Пример</u>. Фунд. посл. рац. ($\mathbb{Q}$) чисел, не имеющая предела в $\mathbb{Q}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

$x_1 = 2$

$\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) \cdot \frac{1}{2} = x_2$

1) $x_1 > 1 \Rightarrow x_n > 1$

2) Для $\forall m, n$ имеем:

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{2}\left| x_{m-1} - x_{n-1} + \frac{2x_{n-1} - 2x_{m-1}}{x_{m-1} \cdot x_{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |x_{m-1} - x_{n-1}| \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\underset{\vee \atop 1}{x_{m-1} \cdot x_{n-1}}} \right|}_{\wedge \atop \frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ послед. фундам.

3) $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

<u>$\sqrt{2}$ — иррац</u>:

От противного: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{a^2}{b^2} = 2 \quad a^2 = 2b^2$

Если $a^2 \vdots 2$ $\Rightarrow$ $a \vdots 2$

$a=2k$ $\Rightarrow$ $2b^2=4k^2$ $\Rightarrow$ b - чётное $\Rightarrow$ $\frac{a}{b}$ - сократимая дробь

Дедекиндово сечение

Т. Лиувилля об аппрокс. ирр. чисел

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}$$

α - корень многочлена d степени

$C = const$

Канторово множество

Вычислим: $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$

$$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$S = 1 + q(S - q^n)$

$S = 1 + qS - q^{n+1}$

$(1-q)S = 1 - q^{n+1}$ $\Rightarrow$ $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S = \frac{1}{1-q}$ $//\, n \to \infty \,//$

$S = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

$n_{10} \to n_3$
$\frac{1}{3} \to 0{,}1_3$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \to 0{,}11_3$

Фибоначчи:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

характ. ур-ие:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F(n) = A\varphi^n + B\psi^n$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

1	$1/4$	$<$	$1/3$
2	$1/9$		$1/6$
3	$1/16$		$1/12$
4	$1/25$		$1/20$

$$x_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$x_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$