Свойства функций и графики

О.М.Киселев
o.kiselev@innopolis.ru

Университет Иннополис

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Вывод формулы для остатка

Рассмотрим

Если $k=1$: $\dfrac{f'(\xi)(x-\xi)}{1!}$

$$\phi(\xi) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)(\xi)}}{k!}(x-\xi)^k.$$

Тогда

$$\phi(x) = 0, \; \phi(x_0) = R_n(x),$$

$$\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0} = \phi'(\xi)$$

где $R_n(x)$ – остаток в формуле Тейлора.
Рассмотрим разность:

$$\phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(\xi), \; \xi \in [x, x_0].$$

$$x - x_0$$

$$\phi'(\xi) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1}$$

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

$\varphi(x) = f(x)$

$\varphi(x_0) = f(x) - R_n(x)$

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(\xi)}{k!}(x_0-\xi)^k$$

по т. Лагранжа:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi) \quad , \xi \in (x, x_0)$$

$$\varphi'_\xi(\xi) = 0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \underset{\overset{\|}{0}}{\left(f^{(0)}(\xi)\right)'_\xi} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1} + f'(\xi)$$

$$\varphi'_\xi(\xi) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{f^{k}(\xi)}{(k-1)!} + \frac{f^{k}(\xi)}{(k-1)!}\right)(x-\xi)^{k-1}}_{=0} - \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'_\xi(\xi) = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}$$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

$$\phi(x) - \phi(x_0) = -\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

$$-\frac{f^{n}(\xi)(x-x_0)^n}{n!} = -\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{n}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}$$

$$\psi'(\xi) = (\psi(x) - \psi(x_0)) \cdot n \cdot \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$

$$\psi(\xi) = (x-\xi)^n$$

$$-n(x-\xi)^{n-1} = (0 - (x-x_0)^n) \cdot n \cdot \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(x-x_0)^n} \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$n(x-\xi)^{n-1} = n(x-\xi)^{n-1}$$

$$1 = 1$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = (\psi(x) - \psi(x_0)) \cdot \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = (0 - (x-x_0)^n) \cdot \frac{-\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}}{-n(x-\xi)^{n-1}}$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -(x-x_0)^n \frac{f^{n}(\xi)(x-\xi)^{n-1}}{n(x-\xi)^{n-1}(n-1)!} = -\frac{f'(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

$f($ $\quad f(x_0) + \sum \ldots =$

Вывод формулы для остатка

$$\phi'(\xi) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!} - \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!} \right)(x-\xi)^{k-1} - \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

В результате:

$$\phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(\xi)(x - x_0),\ \ \phi'(\xi) = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

Вывод формулы для остатка

Воспользуемся теоремой Коши:

$$\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

$\psi(x) = ?$

$$\phi(x)-\phi(x_0) = -\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

Остаток:

$$-\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n = -\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1},$$

$$\psi'(\xi) = -n(x-\xi)^{n-1}, \quad \psi(x) = (x-\xi)^n.$$

Хотим для ξ

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Примеры. $\sin(x)$

$$\sin'(x)|_{x=0} = \cos(x)|_{x=0} = 1$$

$$\cos'(x)|_{x=0} = -\sin(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\sin(x) = \sin(x)|_{x=0} + \cos(x)|_{x=0}x + (-\sin(x)|_{x=0})\frac{x^2}{2!} -$$

$$(-\cos(x)|_{x=0})\frac{x^3}{3!} + (-\sin(x)|_{x=0})\frac{x^4}{4!} + (\cos(x)|_{x=0})\frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5);$$

Примеры. $\log(1+x)$

$$\log'(1+x)|_{x=0} = \frac{1}{1+x}|_{x=0} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)'|_{x=0} = \frac{-1}{(1+x)^2}|_{x=0} = -1$$

$$\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)'|_{x=0} = \frac{2}{(1+x)^3}|_{x=0} = 2,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Примеры. $\sqrt{1+x}$

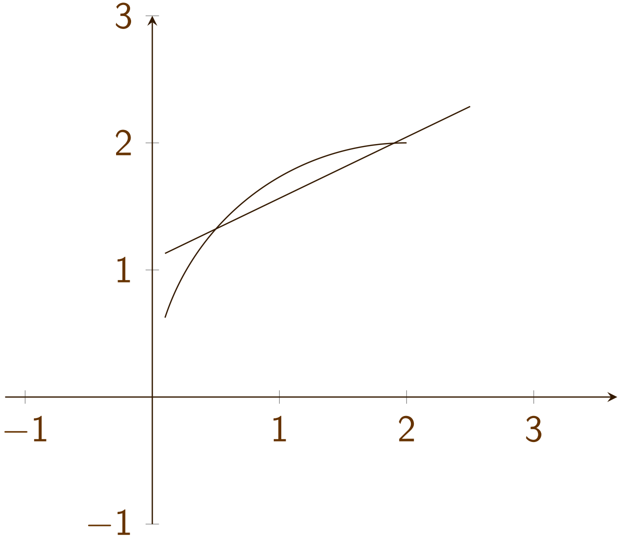
$$\left(\sqrt{1+x}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}\Big|_{x=0} = \frac{-1}{4},$$

$$\left(\frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\Big|_{x=0} = \frac{3}{8},$$

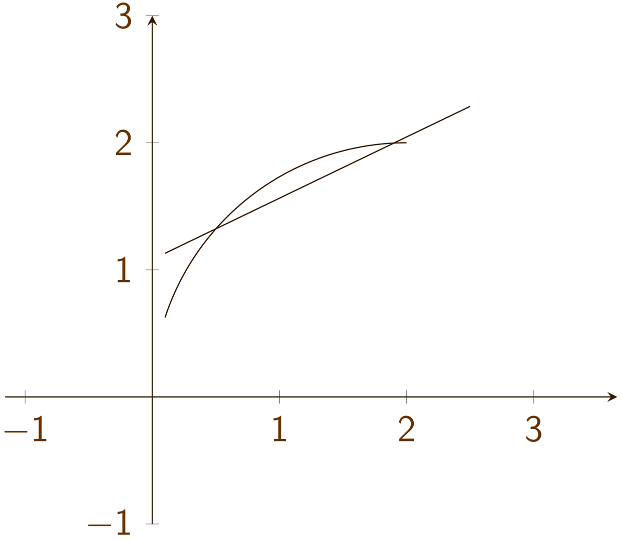
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Монтонная функция



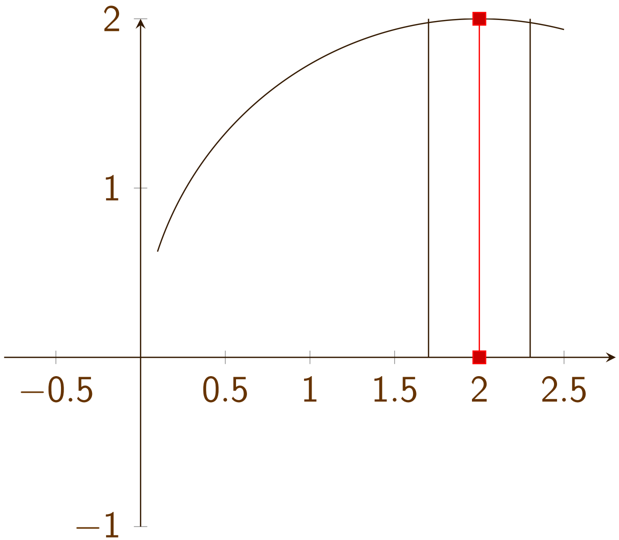
Теорема.
Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на (a, b).
Если $f'(x) > 0$ на (a, b), тогда функция возрастает на этом интервале, и если $f'(x) < 0$ на (a, b), тогда $f(x)$ убывает на (a, b).

Доказательство теоремы



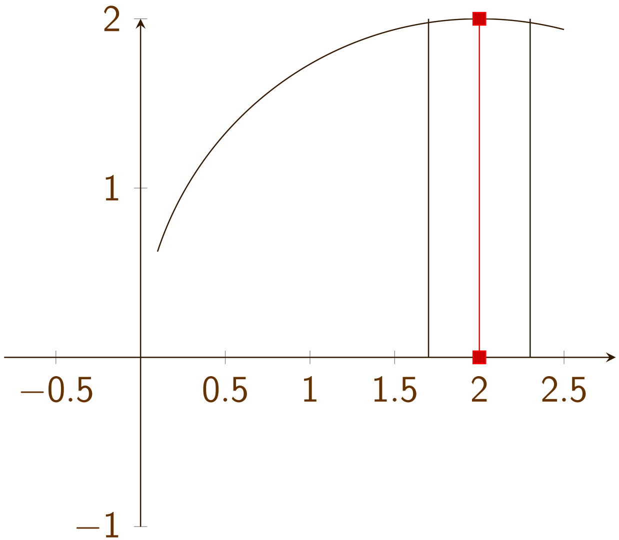
Доказательство.
Пусть $a < x_1 < x_2 < b$,
тогда по теореме Лагранжа
$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$
и $f'(\xi) > 0$. Обратное утверждение можно доказывается аналогично.

Экстремум функции



Пусть $f(x)$ определена в окрестности x_0. Точка x_0 называется точкой максимума (или минимума) функции $f(x)$, если $\exists\, \delta > 0$:
$f(x_0 + \Delta) \leq f(x_0),\ \ |\Delta| < \delta$
(или $f(x_0 + \Delta) \geq f(x_0)$).
Если знак $\leq$ можно изменить на $f(x) < f(x_0)$, тогда будем говорить, что это точка строгого максимума или, соответственно, строгого минимума для знака $f(x) > f(x_0)$.

Экстремум функции

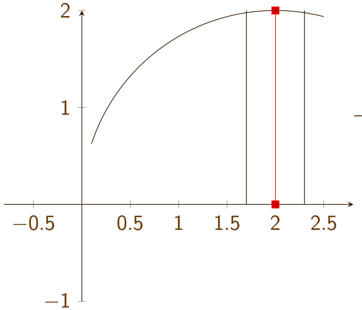


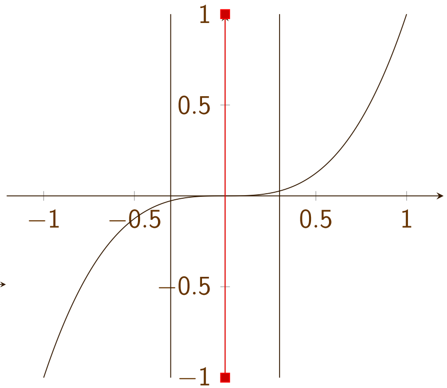
Пусть $f(x)$ определена в окрестности x_0. Точка x_0 называется точкой максимума (или минимума) функции $f(x)$, если $\exists\,\delta > 0:$
$$f(x_0+\Delta) \le f(x_0),\quad |\Delta| < \delta$$
$(\text{или } f(x_0+\Delta) \ge f(x_0))$.
Если знак $\le$ можно изменить на $f(x) < f(x_0)$, тогда будем говорить, что это точка строгого максимума или, соответственно, строгого минимума для знака $f(x) > f(x_0)$.

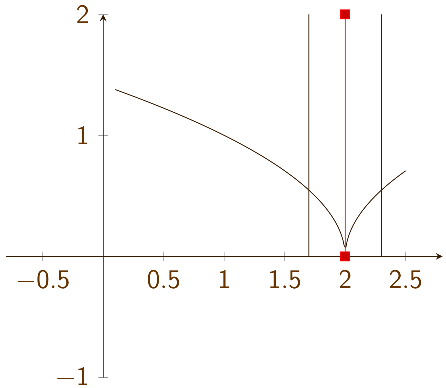
Экстремум функции

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.
Точки строгого максимума и строго минимума называются точками **строгого экстремума**.

Необходимые условия экстремума



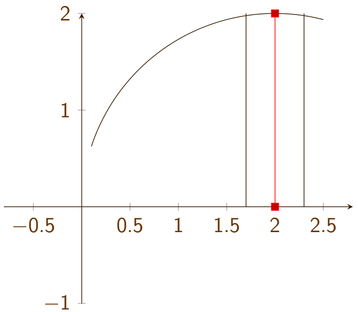


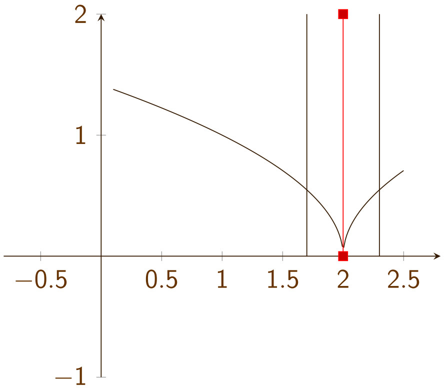


Теорема Пусть точка x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, тогда $f'(x_0) = 0$ или производной не существует.

Эта теорема прямое следствие леммы Ферма.

Достаточные условия строгого экстремума





Пусть $f(x)$ непрерывна при $x \in (a, b)$ и дифференцируема на $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Если $\exists \epsilon > 0, \forall \delta_1, \delta_2, \epsilon > \delta_1 > 0, \epsilon > \delta_2 > 0 : \operatorname{sign}(f'(x_0 - \delta_1)) \neq \operatorname{sign}(f'(x_0 + \delta_2))$, тогда x_0 – точка строгого экстремума.

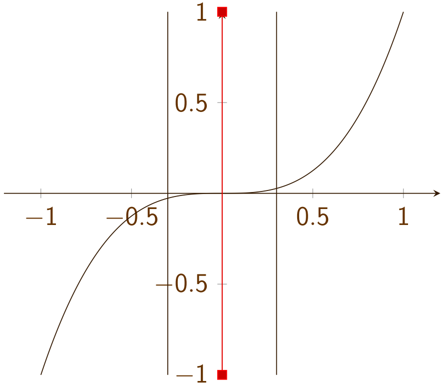
Доказательство

Пусть $f'(x) > 0$ при $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, b)$.
Из теоремы Лагранжа следует:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Если $x < x_0$, тогда $f'(\xi) > 0$, $x < \xi < x_0$, следовательно $f(x) - f(x_0) < 0$.
Если $x > x_0$, тогда $f'(\xi) < 0$, $x_0 < \xi < x$, следовательно $f(x) - f(x_0) < 0$. Тогда x_0 – точка строгого максимума.
Случай строгого минимума может быть рассмотрен таким же образом.

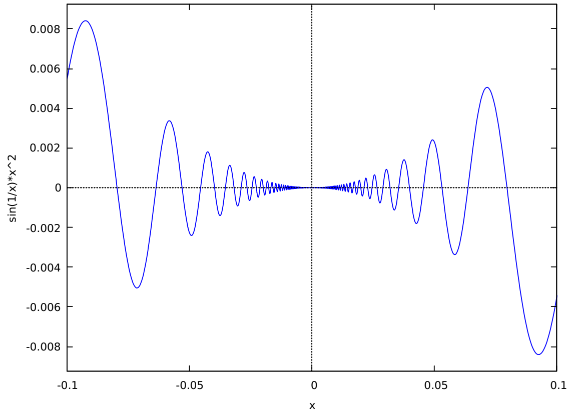
Точки возрастания и убывания



Определение

Точка x_0 называется точкой возрастания (или убывания) функции $f(x)$, если $\exists\delta > 0$
$f(x) - f(x_0) < 0, x_0 - \delta < x < x_0$ (или $f(x) - f(x_0) < 0$) и
$f(x) - f(x_0) < 0, x_0 < x < x_0 + \delta$ (или $f(x) - f(x_0) > 0$).

Контрпример



Рассмотрим функцию:

$$y(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Точка $x = 0$ не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания функции.

Точки экстремума и производные высших порядков

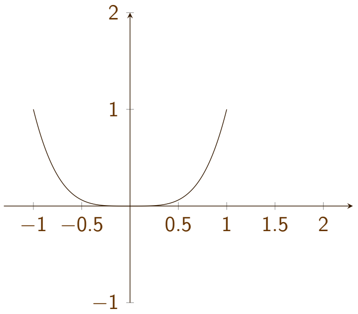
Теорема

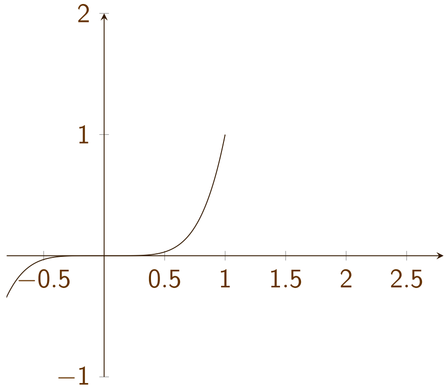
Пусть $f(x)$ определена в окрестности x_0 и

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad 0 < k < n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n четная, тогда x_0 – точка строгого максимума или $f^{(n)}(x_0) < 0$ строгого минимума для $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n нечетна, тогда x_0 точка возрастания, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и точка убывания в противном случае.

Доказательство теоремы об экстремуме и производных высших порядков

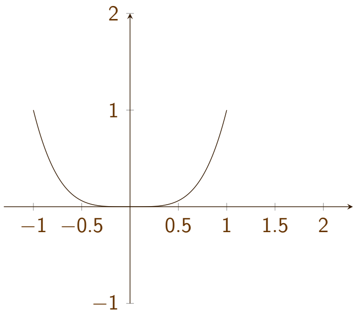


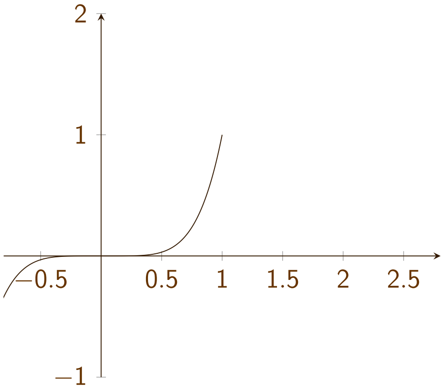


$$\Delta f = f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\frac{\Delta^n}{n!}$$

Для четных значений n знак разности Δf тот же самый, что и знак производной. Следовательно, x_0 точка максимума при отрицательном значении $f^{(n)}(x_0)$ и точка минимума при положительном.

Доказательство теоремы об экстремуме и производных высших порядков



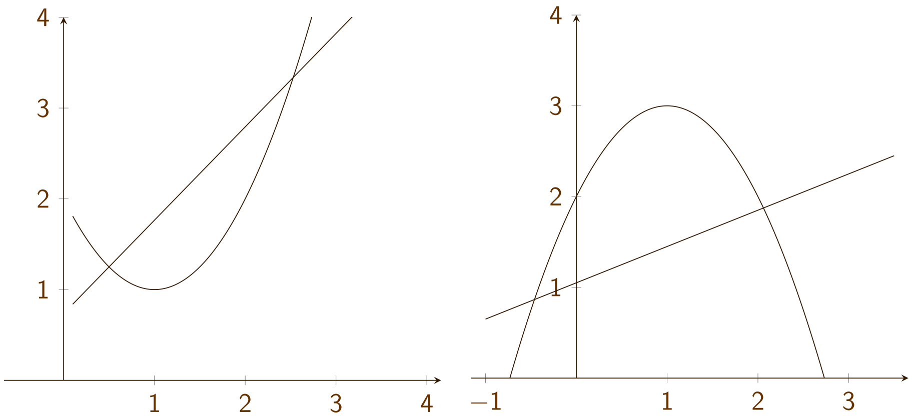


Для нечетных значений n знак Δf меняется и поэтому точка x_0 – точка возрастания при положительном значении $f^{(n)}(x_0)$ и убывания при отрицательном.

Следствия

Если $f'(x_0) > 0$, тогда x_0 – точка возрастания.
Если $f'(x_0) < 0$, тогда x_0 – точка убывания.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, тогда x_0 – точка минимума.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, тогда x_0 – точка максимума.

Выпуклость и вогнутость



Рассмотрим секущую кривой.

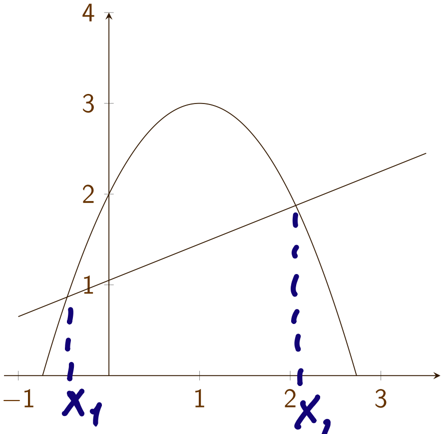
Утверждение

Рассмотрим секущую линию в окрестности некоторой точки кривой. Если сегмент кривой лежит выше секущей, тогда вторая производная отрицательна.
Если сегмент секущей лежит ниже секущей, тогда вторая производная положительна.

Выпуклость и вогнутость

Вторая производная касательной прямой равна нулю. Тогда функция с положительной второй производной растет быстрее относительно касательной прямой. Тогда касательная линия ниже, чем кривая справа от точки касания, и наоборот, отрицательная вторая производная означает, что функция растет медленно относительно касательной линии, а кривая ниже, чем касательная линия справа от точки касания.

Выпуклая кривая



Рассмотрим кривую $f(x)$ на интервале $x \in [a, b]$.

Теорема о выпуклой кривой

Если отрезок кривой лежит поверх любой секущей линии, то кривая является выпуклой на этом отрезке. Если у этой кривой есть вторая производная, то вторая производная отрицательна.

Доказательство теоремы о выпуклой кривой

Уравнение секущей:

$$y(x)=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$$

Рассмотрим разность:

$$y(x)-f(x)=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)-f(x)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$$

$$\frac{(f(x_2)-f(x))(x-x_1)-(f(x)-f(x_1))(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

$$\frac{f'(\xi_2)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\xi_1)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$$

$$x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2.$$

Доказательство теоремы о выпуклой кривой

Уравнение секущей:

$$y(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Рассмотрим разность:

$$y(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{f'(\xi_2)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi_1)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2.$$

Доказательство теоремы о выпуклой кривой

Уравнение секущей:

$$y(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Рассмотрим разность:

$$y(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{f'(\xi_2)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi_1)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2.$$

Доказательство теоремы о выпуклой кривой

Уравнение секущей:

$$y(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Рассмотрим разность:

$$y(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{f'(\xi_2)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi_1)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2.$$

Доказательство теоремы о выпуклой кривой

$$y(x) - f(x) = \frac{(f'(\xi_2) - f'(\xi_1))(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} =$$
$$\frac{f''(\eta)(\xi_2 - \xi_1)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2, \quad \xi_1 < \eta < \xi_2.$$

Тогда

$$y(x) - f(x) > 0 \Rightarrow f''(\eta) > 0.$$

Заключение

На предыдущей лекции

Монотонные функции

Точки экстремума и производные высших порядков

Геометрические свойства и производные второго порядка

$$\begin{cases} y(t) = t^3 \\ x(t) = (t+1)^2 \end{cases} \qquad t = \sqrt{x} - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(t+1)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2(t+1)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3t^2}{2(t+1)}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2(t+1)} \cdot \frac{3t^2+6}{2(1+t)^2}$$

$$\frac{6t \cdot 2(t+1) - 3t^2 \cdot 2}{2^2(t+1)^2}$$

$$\frac{\cancel{12}^{\,6}\, t(t+1) - \cancel{6}^{\,3}\, t^2}{\cancel{2} \cdot 2(1+t)^2} = \frac{3t^2+6}{2(1+t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2+2)}{2(t+1^2)}$$

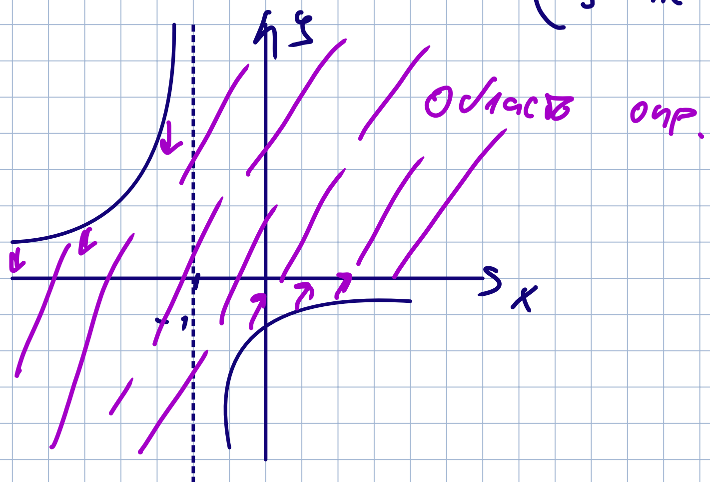
$$y'_x = \frac{3 \cdot (\sqrt{x} - 1)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$y''_x = \frac{3 \cdot (\sqrt{x} - 1)^2 + 6}{2x}$$

$$\sqrt[3]{x^2+y^2} = 2+y+xy$$

1) $2+y+xy>0$

$$y(1+x) > -2 \iff \begin{cases} y > \frac{-2}{x+1}, & x>-1 \\ y < \frac{-2}{x+1}, & x<-1 \\ y \in \mathbb{R}, & x=-1 \end{cases}$$



2) $$\frac{1}{3}\,\frac{2x+2yy'_x}{(x^2+y^2)^{2/3}} = \overset{=0}{(2)'_x} + y'_x + xy'_x + y$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{2x+2yy'}{(2+y+xy)^2} = y'+xy'+y$$

$y'=0$:

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(2+y+xy)^2} = y$$

$$2x = 3y(2+y+xy)^2$$

$$2x = 3y(2+y+xy)(2+y+xy)$$