Введение в комбинаторику и дискретную математику

Лекция (неделя 3)

Проф. Фролов Андрей Николаевич

План

- Основные комбинаторные тождества
  - **Биномиальные коэффициенты**
  - Полиномиальные коэффициенты
- Формула включения-исключения

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-1. $C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1$

Алгебраическое доказательство

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1,\ C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Комбинаторное доказательство

Существует только один способ выбрать 0 элементов из n.
Следовательно, $C_n^0 = 1$.
Существует только один способ выбрать n элементов из n.
Следовательно, $C_n^n = 1$.

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-2. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Алгебраическое доказательство

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$

Комбинаторное доказательство

Количество способов выбрать совокупность k элементов из n (равно C_n^k) совпадает с количеством способов выбрать $n-k$ элементов, не попавших в данную совокупность, равно C_n^{n-k}.

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ n > 1, k > 1$

Алгебраическое доказательство

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} == \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $n > 1, k > 1$

Комбинаторное доказательство

Количество способов выбрать совокупность k элементов из n равно C_n^k. Посчитаем по-другому.
Зафиксируем некоторый x_0. Рассмотрим случаи:
Случай 1. x_0 попал в выборку. Для выбора остальных элементов имеется C_{n-1}^{k-1} способов.
Случай 2. x_0 не попал в выборку. Выборки k из $n-1$ вместо n (без x_0): C_{n-1}^k.
Всего: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
Следовательно, $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-4. $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

Алгебраическое доказательство

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$nC_{n-1}^{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-4. $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

Комбинаторное доказательство

Из n студентов, выбрать команду из k и одно из них капитана.

Способ 1. C_n^k способов выбрать команду k способов выбрать из них капитана.
Всего: kC_n^k

Способ 2. Есть n способов выбрать капитана и C_{n-1}^{k-1} способов для остальных членов команды.
Всего: nC_{n-1}^{k-1}

Тождества с биномиальными коэффициентами

$$C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1,\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & 0 \leq \quad k \quad \leq n & & & & & & \\
\hline
 & & & & & C_0^0 & & & & & & n = 0 \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & n = 1 \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & n = 2 \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & n = 3 \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & n = 4 \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & n = 5
\end{array}$$

Тождества с биномиальными коэффициентами

$$C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1,\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

				$0 \le$	k	$\le n$					
					1						$n = 0$
				1		1					$n = 1$
			1		2		1				$n = 2$
		1		3		3		1			$n = 3$
	1		4		6		4		1		$n = 4$
1		5		10		10		5		1	$n = 5$

Тождества с биномиальными коэффициентами

$$C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1,\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$0 \le k \le n$	
1	$\sum C_0^k = 1 = 2^0$
1 1	$\sum C_1^k = 2 = 2^1$
1 2 1	$\sum C_2^k = 4 = 2^2$
1 3 3 1	$\sum C_3^k = 8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$\sum C_4^k = 16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$\sum C_5^k = 32 = 2^5$

1-5. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Тождества с биномиальными коэффициентами

Теорема (Бином Ньютона)

Пусть x, y – переменные, $n \geq 1$ – натуральное число, тогда

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$$

1-5. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Тождества с биномиальными коэффициентами

Теорема (Бином Ньютона)

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$$

1-5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} C_n^j = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Доказательство

$$(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 1^{n-j} 1^j$$

$$2^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j$$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-5. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Комбинаторное доказательство

Способ 1. Количество бинарных строк длины n всего равно 2^n.

Способ 2.
Количество бинарных строк длины n с 0 нулями равно $1 = C_n^0$.
Количество бинарных строк длины n с 1 нулем равно $n = C_n^1$.
...
Количество бинарных строк длины n с k нулями равно C_n^k.

Всего: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$.

Тождества с биномиальными коэффициентами

Теорема (Бином Ньютона)

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$$

Вывод

$$(3-1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 3^{n-j} (-1)^j$$

$$2^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 3^{n-j} (-1)^j$$

(-) $\sum_{j=0}^{n} C_n^j 3^{n-j} (-1)^j = 2^n$

Тождества с биномиальными коэффициентами

Теорема (Бином Ньютона)

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$$

Вывод

$$(1-1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 1^{n-j} (-1)^j$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j$$

1-6. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0 \ (n \neq 0)$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-5. $\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

1-6. $\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0 \ (n \neq 0)$

Алгебраический вывод

Сложим (1-5) и (1-6), поделим на 2: $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} = 2^{n-1}$

1-7. $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-5. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

1-6. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0 \ (n \neq 0)$

Алгебраический вывод

Вычтем (1-6) из (1-5), поделим на 2: $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} = 2^{n-1}$

1-8. $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-6. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0 \ (n \neq 0)$

1-7. $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$

1-8. $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2j+1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

Комбинаторное доказательство

???

Тождества с биномиальными коэффициентами

Теорема (Бином Ньютона)

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$$

Бином Ньютона, частный случай

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

Производная Бинома Ньютона

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} j C_n^j x^{j-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + nC_n^n x^{n-1}$$

Тождества с биномиальными коэффициентами

Производная Бинома Ньютона

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} jC_n^j x^{j-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + nC_n^n x^{n-1}$$

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n} jC_n^j 1^{j-1} = C_n^1 + 2C_n^2 1 + \dots + nC_n^n 1^{n-1}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} jC_n^j = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$$

1-9. $\sum_{j=1}^{n} jC_n^j = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$

Тождества с биномиальными коэффициентами

$$C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1,\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$0 \leq$	k	$\leq n$									
					1						$n=0$
				1		1					$n=1$
			1		2		1				$n=2$
		1		3		3		1			$n=3$
	1		4		6		4		1		$n=4$
1		5		10		10		5		1	$n=5$

Тождества с биномиальными коэффициентами

$$C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1,\ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$0 \le$ k $\le n$	
1	$\sum (C_n^k)^2 = 1 = C_0^0$
1 1	$\sum (C_n^k)^2 = 2 = C_2^1$
1 2 1	$\sum (C_n^k)^2 = 6 = C_4^2$
1 3 3 1	$\sum (C_n^k)^2 = 20 = C_6^3$
1 4 6 4 1	$\sum (C_n^k)^2 = 70 = C_8^4$
1 5 10 10 5 1	$\sum (C_n^k)^2 = 252 = C_{10}^5$

1-10. $$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Тождества с биномиальными коэффициентами

1-10. $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Комбинаторное доказательство

???

План

- Основные комбинаторные тождества
  - **Биномиальные коэффициенты**
  - Полиномиальные коэффициенты
- Формула включения-исключения

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Определение

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = C_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$

- "Обобщенные перестановки"
- "Обобщенные сочетания"
- "Обобщенные биномиальные коэффициенты" (полиномиальные/мультиномиальные)

Тождества с полиномиальными коэффициентами

- "Обобщенные перестановки"

Пример

Сколько различных слов можно составить из букв слова "Mississippi"?

буква "M" – 1 раз, "i" – 4 раза, "s" – 4 раза, "p" – 2 раза.

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

- "Обобщенные перестановки" (перестановки с повторениями)

Количество всех перестановок n различных объектов равно $n!$
Но если k_1 объект повторяется, то надо поделить на $k_1!$
...
Но если k_m объект повторяется, то надо поделить на $k_m!$
Таким образом, количество всех перестановок n объектов, где k_1 объект повторяется, ..., k_m объект повторяется, равно

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

- "Обобщенные сочетания"

Пример

Нужно сформировать 3 команды по 5 игроков из 15 имеющихся студентов. Сколько различных таких троек команд можно сформировать?

Решение

Имеется $\binom{15}{5} = \frac{15!}{(15-5)!5!} = 3003$ пути выбрать первую команду.
Имеется $\binom{10}{5} = \frac{10!}{(10-5)!5!} = 252$ пути выбрать вторую команду.
Имеется $\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-5)!5!} = 1$ путь выбрать третью команду.
Всего $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = 3003 \cdot 252 \cdot 1 = 756756$ вариантов.

Тождества с полиномиальными коэффициентами

- "Обобщенные сочетания"

Количество различных m подмножеств множества с n элементами, что первое множество содержит k_1 элемент, второе – k_2 элементов, ..., m-ое множество – k_m элементов (где $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$), равно

$$C_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

- "Обобщенные сочетания"

$$C_n^{k_1,k_2,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

Доказательство

$$C_n^{k_1,\dots,k_m} = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdots \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_m)!}{k_m!0!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

- “Обобщенные биномиальные коэффициенты” (полиномиальные/мультиномиальные)

Определение

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_m!}$$

$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$

Полиномиальная теорема

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1\le r\le m} x_r^{k_r}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Комбинаторное доказательство

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \underbrace{(x_1 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + \cdots + x_m)}_{n \text{ скобок}}$$

коэф. для слагаемого $\prod\limits_{1 \le r \le m} x_r^{k_r} = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$:

- "возьмём" x_1 из k_1 скобок $C_n^{k_1}$ раз,
- "возьмём" x_2 из k_2 скобок $C_{n-k_1}^{k_2}$ раз
- $\dots$
- "возьмём" x_m из $n - k_1 - \cdots - k_{m-1} = k_m$ скобок $C_{n-k_1-\cdots-k_{m-1}}^{k_m} = C_{k_m}^{k_m}$ раз

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Комбинаторное доказательство (продолжение)

Таким образом, **коэф. для слагаемого** $\prod\limits_{1 \le r \le m} x_r^{k_r}$ **равен**

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Полиномиальная теорема

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1\le r\le m} x_r^{k_r}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Полиномиальная теорема

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1\leq r\leq m} x_r^{k_r}$$

$$(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m})^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1\leq r\leq m} 1_r^{k_r}$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Полиномиальная теорема

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1 \le r \le m} x_r^{k_r}$$

$$(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m})^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1 \le r \le m} 1_r^{k_r}$$

2-1. $$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = m^n$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Полиномиальная теорема

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1\le r\le m} x_r^{k_r}$$

$$(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m})^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1\le r\le m} 1_r^{k_r}$$

2-1. $$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = m^n$$

1-5. $$\sum_{j=0}^{n} C_n^j = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Тождества с полиномиальными коэффициентами

Пример

$$(x+y+z)^3 = \binom{3}{3,0,0}x^3y^0z^0 + \binom{3}{2,1,0}x^2y^1z^0 +$$

$$+\binom{3}{2,0,1}x^2y^0z^1 + \binom{3}{1,2,0}x^1y^2z^0 + \binom{3}{1,1,1}x^1y^1z^1 +$$

$$+\binom{3}{1,0,2}x^1y^0z^2 + \binom{3}{0,3,0}x^0y^3z^0 + \binom{3}{0,2,1}x^0y^2z^1 +$$

$$+\binom{3}{0,1,2}x^0y^1z^2 + \binom{3}{0,0,3}x^0y^0z^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

План

- Основные комбинаторные тождества
  - Биномиальные коэффициенты
  - Полиномиальные коэффициенты
- **Формула включения-исключения**

Формула включения-исключения

Правило суммы

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ если } A \cap B = \emptyset$$

Почему?

Свойства

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|, \text{ если } A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$$

Формула включения-исключения

Формула включения-исключения для двух множеств

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Почему?

Формула включения-исключения

Формула включения-исключения для двух множеств

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Почему?

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ **и** $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ **и** $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Следовательно,

$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$

$|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$

Формула включения-исключения

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ и $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ и $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$
Следовательно,
$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$
$|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$

С другой стороны,
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ и
$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
Следовательно,
$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Формула включения-исключения

Формула включения-исключения для двух множеств

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Формула включения-исключения для трех множеств

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|)$$

Формула включения-исключения

Формула включения-исключения для n множеств

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| -$$

$$- \sum_{i_1, i_2 = 1 (i_1 < i_2)}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1 (i_1 < i_2 < i_3)}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Формула включения-исключения для n множеств

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

База индукции $n = 1$:

$$|A_1| = |A_1|$$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

Предположим, что формула верна для $n = k$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

Шаг индукции Докажем, что формула верна для $n = k + 1$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k \cup A_{k+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}| =$$

$$= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1}| =$$

$$= |\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k}_{k \text{ множеств}}| + |A_{k+1}| -$$

$$-|\underbrace{(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k+1})}_{k \text{ множеств}}|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

Шаг индукции Докажем, что формула верна для $n = k + 1$.

$$|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| = |\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k}_{k \text{ множеств}}| + |A_{k+1}| -$$

$$-|\underbrace{(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k+1})}_{k \text{ множеств}}| =$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| + |A_{k+1}| -$$

$$- \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{k+1})|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

Шаг индукции Докажем, что формула верна для $n = k + 1$.

$$|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| + |A_{k+1}| -$$

$$- \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{k+1})| =$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| + (-1)^{|\{k+1\}+1|} |A_{k+1}| +$$

$$+ \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I \cup \{k+1\}|+1} | \bigcap_{i \in I \cup \{k+1\}} A_i|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

Шаг индукции Докажем, что формула верна для $n = k + 1$.

$$|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| + (-1)^{|\{k+1\}+1|} |A_{k+1}| +$$

$$+ \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I \cup \{k+1\}|+1} |\bigcap_{i \in I \cup \{k+1\}} A_i| =$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I' \subseteq \{1,\ldots,k,k+1\}} (-1)^{|I'|+1} |\bigcap_{i \in I'} A_i|$$

Формула включения-исключения

Доказательство (методом математической индукции)

Таким образом, согласно принципу математической индукции, доказано, что для любого $n \geq 1$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Формула включения-исключения

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| -$$

$$- \sum_{i_1, i_2 = 1 (i_1 < i_2)}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1 (i_1 < i_2 < i_3)}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Комбинаторное доказательство

???

Есть объекты $a_1, a_2, \dots, a_N$

Есть свойства $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$N(\alpha_i)$ - кол-во об., обл. св-ом α_i

$N(\alpha_i, \alpha_j)$ - кол-во об., обл. св-ом α_i и α_j / C_n^2 - всего

...

$N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$

...

$N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

<u>Т.</u> $N(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = N - N_1(\alpha_1) - \dots N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

"α_i' - не обладает"

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} \left|\bigcap_{j \in I} A_j\right| \cdot (-1)^{|I|+1}} \quad (1)$$

Док-во:

1) $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = \overset{\overset{1}{\parallel}}{C_n^0} - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

$\Rightarrow \underbrace{1 = C_n^1 - C_n^2 + \dots + (-1)^{n+1} C_n^n}$

2) Возьмём элемент $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$, формула (1) учитывает его ровно один раз

Предположим, что x принадл. пересечению m множеств, не огр. общности, будем считать $x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ и $x \notin A_{m+1}, \ldots, x \notin A_n$. Тогда:

(•) в 1ой сумме $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ x будет учтён $m = C_m^1$ раз

(•) во 2ой сумме $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ x будет учтён C_m^2 раз
(кол-во попарных пересечений мн-в $A_1, \ldots, A_m$ равно C_m^2)

. . .

(•) в kой сумме x будет учтён C_m^k раз
(кол-во k-сочетаний мн-в $A_1, \ldots, A_m$ равно C_m^k)

. . .

(•) в mой сумме $- C_m^m = 1$

(•) для всех остальных x будет учтён 0 раз, т.к. x не входит в пересечение более чем m множеств

Таким образом x будет учтён:

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m+1} C_m^m = \underline{1} \text{ раз.}$$

ч.т.д.

Формула включения-исключения

Следствие (другая формулировка)

Пусть X – конечное множество, $|X| = n$
$P_1, \ldots, P_n$ – свойства элементов X
$N(0)$ – число эл-в, не удовлетворяющих ни одному свойству
$N_{i_1,\ldots,i_k}$ – число элементов, удовлетворяющих $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$.

Тогда $N(0) = N - \sum\limits_{i=1}^{n} N_i + \sum\limits_{i_1,i_2=1 (i_1<i_2)}^{n} N_{i_1,i_2} - \cdots$

$$\cdots + (-1)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k=1 (i_1<\cdots<i_k)}^{n} N_{i_1,\ldots,i_k} + \cdots + (-1)^n N_{1,\ldots,n}$$

Формула включения-исключения

Задача (Леонард Эйлер)

Войдя в ресторан, n гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

$$N(0) = N - \sum_{i=1}^{n} N_i + \sum_{i_1, i_2 = 1 (i_1 < i_2)}^{n} N_{i_1, i_2} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k = 1 (i_1 < \cdots < i_k)}^{n} N_{i_1, \dots, i_k} + \cdots + (-1)^n N_{1, \dots, n}$$

Формула включения-исключения

$$N(0) = N - \sum_{i=1}^{n} N_i + \sum_{i_1,i_2=1 (i_1<i_2)}^{n} N_{i_1,i_2} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k \sum_{i_1,\ldots,i_k=1 (i_1<\cdots<i_k)}^{n} N_{i_1,\ldots,i_k} + \cdots + (-1)^n N_{1,\ldots,n} =$$

$$= n! - n \cdot (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - C_n^3 (n-3)! + \cdots =$$

$$= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + \underbrace{(-1)^n}_{(-1)^n \cdot \frac{n!}{n!}} = n! \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Вероятность беспорядка: $\frac{N}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Если $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots$$

Спасибо за ваше внимание!