Автономная некоммерческая организация высшего образования
«Университет Иннополис»

Лабораторный практикум курса
«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»

(курс основывается на учебнике Д. В. Беклемишева)

3 неделя: Операции над матрицами

лектор: И. В. Конюхов
преподаватель: Е. А. Марчук

2024 г.

15.2. Вычислить линейную комбинацию матриц:

1) $3\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;   2) $2\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}$;

3) $2\begin{Vmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$;

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -3 & -8 & 7 & -29 \\ 3 & -8 & -19 & 19 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}$

15.5. Вычислить произведение матриц:

1) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$;

1) -1

2) $\begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

15.10. Проверить, существует ли произведение, и если да, то вычислить его:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & 4 \end{Vmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1) $(2\times 2)\cdot(1\times 2)\cdot(2\times 1)$ не сущ.

2) $(2\times 1)(1\times 2)(2\times 1)$ сущ. $\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$

3) $(1\times 2)(2\times 1)(1\times 2)$ сущ. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \end{pmatrix}$$

15.36. На какую матрицу следует умножить матрицу A, чтобы в результате получить:

1) первый столбец A; 2) первую строку A?

1) $\underset{n\times m}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ $A\cdot B = K$

$K - n\times 1$

$B_{m\times 1}$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ $A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_1 + \underbrace{a_{12}\cdot b_2 + \dots}_{=0} \\ a_{22}\cdot b_1 + \underbrace{\dots}_{=0} \\ \dots \\ a_{m1}\cdot b_1 + \underbrace{\dots}_{=0} \end{pmatrix}$

$\underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

2) $\underset{1\times n}{B} \cdot \underset{n\times m}{A} = \underset{1\times m}{F}$ $A\cdot B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} =$

$\left((a_{11}\cdot b_1 + a_{21}\cdot b_2 + \dots) \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j2}\cdot b_j\right) \quad \dots \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\cdot b_j\right) \quad \dots \right)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

строка A столбца

15.37. Подобрать элементарную матрицу K так, чтобы матрица KA получалась из A:

1) перестановкой двух первых строк A;
2) прибавлением первой строки ко второй;
3) умножением первой строки A на число $\lambda \neq 0$.

$n \times m \to n \times n$

1) $$\begin{array}{cc} & m \\ n & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{cc} & m \\ n & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

2) $$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$E_{kl} = \begin{array}{cc} & \quad l \\ k & \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \lambda & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_k + \lambda a_l$

$\det E_{kl} = 1$

3) $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$\det S_i = \lambda$

масштабирование

$a_k \to \lambda a_k$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \qquad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & \iddots & \\ \dots & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \dots & & \end{pmatrix}$$

$$\overset{P_{13}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$\det$

$\det P_{13} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det(P_{13} \cdot P_{14}) = -1 \cdot -1 = 1$$

15.45. Вычислить:

1) $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}^{-1}$

1) $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ $\det A = 18 - 25 = -7$

$(\operatorname{adj} A)^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$

2) $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = 2 \cdot 1 - \overset{+2}{(-1) \cdot 2} + 0 = 4$

$(\operatorname{adj} A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$ $\frac{n+2}{2} \cdot (n-1)$

$n-1 \begin{cases} 1+n \\ 1+n-1 \\ 1+n-2 \\ \dots \\ 1+2 \end{cases}$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{adj} A = ($

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{11} = 0$

$A_{22} = 0$

$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{1+2} \lambda_3 \lambda_4$

$(-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdot \ldots \cdot (-1)^{1+2} =$

$= (-1)^{(1+n)+(1+n-1)+\ldots}$

$= (-1)^{(n-1)+\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$

$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}$

$n = 3$

$A_{1n} = (-1)^{1+n} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$(-1)^n \lambda_2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix} =$

$= (-1)^n \lambda_2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$

$A_{1n} = (-1)^{1+n} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$

$$A_{1n} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

15.47. Вычислить обратную к данной элементарной матрице:

1) $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$

15.65. Найти матрицу X из уравнения:

1) $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $X \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 10 \\ 17 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

5) $X \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$;

6) $X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} X = X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

7) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A=} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B=}$

$\det A = 1$

$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \mid A \cdot X = B$

$A^{-1} A X = A^{-1} B$

$X = A^{-1} B$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

17.1. Выписать расширенную матрицу данной системы уравнений. Решить систему:

1) $2x_1 + x_2 = 10,$ $x_1 + x_2 = 17;$

2) $3x + 5y = 2,$ $5x + 9y = 4;$

3) $2x_1 + x_2 - x_3 = 2,$ $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3,$ $x_1 + x_3 = 3;$

4) $y + 3z = -1$ $2x + 3y + 5z = 3,$ $3x + 5y + 7z = 6;$

5) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16,$ $x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23,$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10,$ $4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1;$

6) $2x + 3y + 4z + 5t = 30,$ $3x + 3y + 4z + 5t = 34,$ $4x + 4y + 4z + 5t = 41,$ $x + y + z + t = 10;$

1) $\begin{cases} 2x_1 + 1\cdot x_2 = 10 \\ 1x_1 + 1\cdot x_2 = 17 \end{cases}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}}$$

$\det A = 1$

$\text{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot \mid A \cdot X = B$

$X = A^{-1}B$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 17 \\ -10 + 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

5-min test Listening

01 **SECTION 1** ***Questions 1–10***

Questions 1–10

Complete the form below.

*Write **NO MORE THAN TWO WORDS AND/OR A NUMBER** for each answer.*

NATIONAL UNIVERSITY
ACCOMMODATION REQUEST FORM

Surname:	Blake
First name:	**1** …………………
ID number:	**2** …………………
Gender:	male
Email address:	d.blake@internet.com
Telephone number:	**3** …………………
Course attending:	**4** …………………
Start date:	**5** …………………
Accommodation type:	**6** …………………
Room type:	**7** …………………
Type of bathroom:	**8** …………………
Vehicle:	**9** …………………
Amount of deposit:	**10** £ …………………