Автономная некоммерческая организация высшего образования

«Университет Иннополис»

Лабораторный практикум курса

«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»

(курс основывается на учебнике Д. В. Беклемишева)

4 неделя: векторное произведение, смешанное произведение.

лектор: И. В. Конюхов

преподаватель: Е. А. Марчук

2024 г

**3.1.** Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}(2,\ -3,\ -5)$;
2) $\mathbf{a}(2,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{b}(-4,\ 2,\ -2)$;
3) $\mathbf{a}(6,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{b}(3,\ -2,\ 0)$.

**3.2.** Упростить выражения:

1) $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}]$;

2) $[\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}/2,\ -\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c}]$.

1) $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})] = [\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})] + [\vec{b}\times(\vec{a}-\vec{b})] =$

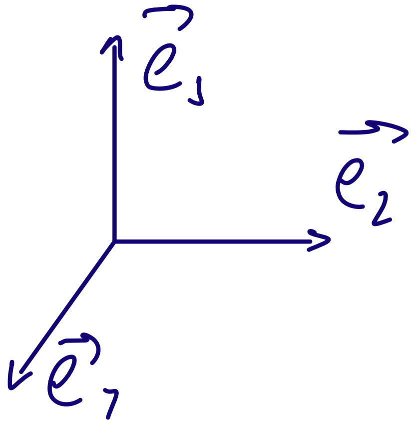
$= \underbrace{[\vec{a}\times\vec{a}]}_{=0} + [\vec{a}\times(-\vec{b})] + [\vec{b}\times\vec{a}] + \underbrace{[\vec{b}\times(-\vec{b})]}_{=0}$

**3.5.** Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют:

1) ортонормированный правый базис;
2) ортонормированный левый базис;
3) ортогональный правый базис.

Выразить векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ через векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

1)

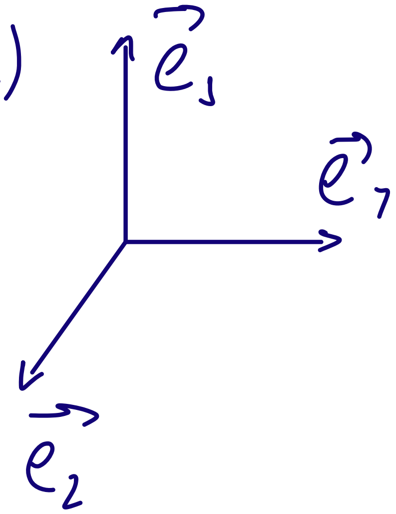



$[\vec{e}_1 \times \vec{e}_2] = \vec{e}_3$

$[\vec{e}_2 \times \vec{e}_3] = \vec{e}_1$

$[\vec{e}_3 \times \vec{e}_1] = \vec{e}_2$

2)




$[\vec{e}_1 \times \vec{e}_2] = -\vec{e}_3$

$[\vec{e}_2 \times \vec{e}_3] = -\vec{e}_1$

$[\vec{e}_3 \times \vec{e}_1] = -\vec{e}_2$

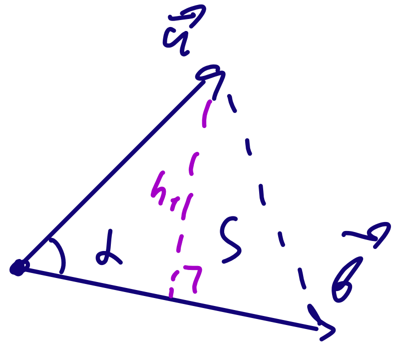
**3.6.** Известно, что $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Найти длины векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и углы между ними.

$a = b \cdot c \cdot$

**3.8.** На векторах $\mathbf{a}(2,3,1)$ и $\mathbf{b}(-1,1,2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:

1) площадь этого треугольника;

2) длины трех его высот.




1) $S = \frac{1}{2}\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25+25+25} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-1) - j(4+1) + \vec{k}(2+3)$$

$$= 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

2) $\|\vec{b}\| = \sqrt{6}$

$$h_1 = \frac{S_\triangle}{\|\vec{b}\|} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $h_1 = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

**3.9** (р). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 3 и 2, а угол между ними равен $30^\circ$. В этой системе координат даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма: $(1,3)$, $(1,0)$ и $(-1,2)$. Найти площадь параллелограмма.

**3.19.** Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(1,-1,1)$, $\mathbf{b}(7,3,-5)$, $\mathbf{c}(-2,2,-2)$;
2) $\mathbf{a}(3,5,1)$, $\mathbf{b}(4,0,-1)$, $\mathbf{c}(2,1,1)$;
3) $\mathbf{a}(2,1,0)$, $\mathbf{b}(3,4,-1)$, $\mathbf{c}(-1,-3,1)$;
4) $\mathbf{a}(1,2,3)$, $\mathbf{b}(5,-2,1)$, $\mathbf{c}(2,1,2)$.

**3.23.** Даны точки $A(2,\ 1,\ -1)$, $B(3,\ 0,\ 2)$, $C(5,\ 1,\ 1)$, $D(0,\ -1,\ 3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:

1) объем тетраэдра;

2) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины $C$.