Введение в комбинаторику и дискретную математику

Лабораторияя 5

Проф. Фролов Андрей Николаевич

Разбор примеров из лекции

(1)

$$G(n) - G(n-1) - G(n-2) = \frac{1}{4} 2^n$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ 2 - не корень

$$\Rightarrow \quad G(n) = C_0 \cdot 2^n$$

$$C_0 \cdot \cancel{2^n} - C_0 \cdot \cancel{2^{n-1}} - C_0 \cancel{2^{n-2}} = 4^{-1} \cdot \cancel{2^n}$$

$$C_0 - \frac{1}{2} C_0 - \frac{1}{4} C_0 = 4^{-1}$$

$$C_0 = \frac{4}{4} = 1$$ Тогда $G(n)^{ч.н} = 2^n$

(2)

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = n \cdot 2^{n+1}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left[\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\right.$$ ← корень кратности 1

$$\Rightarrow \quad a_n = n(C_0 + C_1 n) \cdot 2^n$$

$$4(n+2)(C_0 + C_1(n+2)) + (n+1)(C_0 + C_1(n+1))2 - 6n(C_0 + C_1 n) = 2n$$

$$4(nC_0 + \cancel{C_1 n^2} + 2C_1 n + 2C_0 + 2C_1 n + 4C_1)$$
$$+\ 2(nC_0 + \cancel{C_1 n^2} + C_1 n + C_0 + C_1 n + C_1)$$
$$-\ 6(nC_0 + \cancel{C_1 n^2}) = 2n$$

$$\cancel{4C_0 n} + 16C_1 n + 8C_0 + 16C_1$$
$$+\ \cancel{2C_0 n} + 4C_1 n + 2C_0 + 2C_1$$
$$-\ \cancel{6nC_0} = 2n$$

$$\Rightarrow \quad n(20C_1 - 2) + (10C_0 + 18C_1) = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{10}$$

$$C_0 = -\frac{18}{100}$$

$$a_n^{чн} = n \cdot \left(-\frac{18}{100} + \frac{1}{10} n\right) \cdot 2^n$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 2n\,2^n$$

<u>Однородное</u> :

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}\right.$$

$$a_n^{oo} = \alpha \cdot 2^n + \beta\,(-3)^n$$

$$a_n^{oн} = a_n^{oo} + a_n^{чн} = \alpha \cdot 2^n + \beta\,(-3)^n + 2^n \cdot n\left(-\frac{18}{100} + \frac{1}{10}n\right)$$

Задачи

1. Решите следующие рекуррентные соотношения (найти частное решение).

а $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

б $a_0 = 1, a_1 = -9, a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$

в $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$

г $a_0 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 8a_{n+1} + 7a_n = (-1)^n(n-2)$

N 1

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$a_{n+1} - a_n = (0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2) \cdot 1^n$

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad a_1 = 1$

$a_{n+1} - a_n = \left(0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right)\cdot \underline{1}^n$

$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ – решение $\Rightarrow a_n^{чн} = n^1\left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2\right)\cdot \underline{1}^n$

$(n+1)\left(c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2\right)\cdot \underline{1}^{n+1} - n^1\left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2\right)\cdot \underline{1}^n =$

$= \left(0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right)\cdot \underline{1}^n$

$\Rightarrow \underline{c_0 \cdot n} + c_1 n^2 + \underline{c_1 n} + c_2(n^2 + 2n + 1)\cdot n + c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2 -$

$\underline{nc_0} - c_1 n^2 - c_2 n^3 =$

$n(c_0 + c_1 - c_0) + \underline{\underline{c_1 n^2}} + \quad + \underline{\underline{c_2 2n^2}} + \underline{c_2 n} + c_0 + \underline{c_1 n} + c_1 + \underline{\underline{c_1 n^2}} + \underline{2nc_2} - c_2$

$-\underline{\underline{c_1 n^2}} + \qquad =$

$\cancel{= n(2c_0 + c_1 + c_2 + c_1 + 2c_2) + (c_1 + 2c_2 + \quad)\cdot n^2 + 2c_2 n^3 +}$

$\cancel{(c_1 - c_2 + c_0) = \left(0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right)}$

$$\begin{cases} 2c_0 + 2c_1 + 3c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 - c_2 + c_0 = 0 \end{cases}$$

$2c_0 + 2\cancel{c_1} + 3c_2 = \frac{1}{2}$

$-$

$\cancel{2c_1 + 4c_2 = 1}$

$\cancel{2c_0 - c_2 = -\frac{1}{2}}$

$\cancel{c_2 = 2c_0 - \frac{1}{2}}$

$\cancel{-3c_2 + c_0 = -\frac{1}{2}}$

$\cancel{-6c_0 + \frac{1}{2} + c_0 = -\frac{1}{2}}$

$a_n = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}n^2\right)n$

6 $a_0 = 1, a_1 = -9, a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$

1) $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda - 8 = 0$

$\lambda(\lambda - 2) + 4(\lambda - 2) = 0$

$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\lambda = -4 \\ \lambda = 2\end{array}\right.$

$a_n^{чн} = C_0 \cdot 5^n$

$C_0 \cdot 5^{n+2} + 2C_0 \cdot 5^{n+1} - 8C_0 \cdot 5^n = 27 \cdot 5^n$

$(25C_0 + 10C_0 - 8C_0) = 27$

$27C_0 = 27 \quad C_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n^{чн} = 1 \cdot 5^n$

$a_n^{оо} = \alpha \cdot (-4)^n + \beta \cdot 2^n$

$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -9 = -4\alpha + 2\beta \end{cases}$

$4 = 4\alpha + 4\beta$
$-9 = -4\alpha + 2\beta$

$-5 = 0 + 6\beta \quad \beta = -\frac{5}{6} \quad \alpha = \frac{11}{6}$

$a_n^{оо} = \frac{11}{6} \cdot (-4)^n - \frac{5}{6} \cdot 2^n$

$a_n^{он} = \underbrace{\alpha(-4)^n + \beta(2)^n}_{= a_n^{оо}} + \underbrace{5^n}_{= a_n^{чн}}$

$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta + 1 \\ -9 = -4\alpha + 2\beta + 5 \end{cases}$ $\quad \alpha = -\beta$

$-14 = -4\alpha - 2\alpha \quad 14 = 6\alpha$

$\alpha = \frac{7}{3} \quad \beta = -\frac{7}{3}$

$a_n = \frac{7}{3}(-4)^n - \frac{7}{3} 2^n + 5^n$

B $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) + 4(\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda = -4 \\ \lambda = 2 \end{array}\right. \leftarrow \text{есть двойка}$$

$$a_n^{\text{чн}} = n \cdot C_0 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow (n+2)C_0 \cdot 4 \cdot 2^n + 2 \cdot nC_0 \cdot 2\, 2^n - 8 \cdot C_0 \cdot n \cdot 2^n = 2^n$$

$$4C_0(n+2) + 4nC_0 - 8C_0 \cdot n = 1$$

$$4C_0 \cdot n + 8C_0 + 4n \cdot C_0 - 8C_0 \cdot n - 1 = 0$$

$$n(4C_0 + 4C_0 - 8C_0) + (8C_0 - 1) = 0$$

$$C_0 = \frac{1}{8} \qquad a_n^{\text{чн}} = \cancel{\frac{1}{8}}\, n\, 2^n \quad \frac{1}{12}$$

$$a_n^{\text{оо}} = \alpha(-4)^n + \beta 2^n$$

$$a_n^{\text{он}} = \alpha(-4)^n + \beta 2^n + \frac{1}{8} n 2^n$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + 0 \\ 8 = -4\alpha + 2\beta + \frac{2}{8} \end{cases}$$

$$\beta = 2 - \alpha$$

$$\frac{32 - 1}{4} = -4\alpha + 2(2 - \alpha)$$

$$\frac{31}{4} = -6\alpha + 4 \qquad 2 + \frac{15}{24} = \frac{48 + 15}{24} = \frac{63}{24}$$

$$\frac{31 - 16}{4} = -6\alpha \qquad \alpha = -\frac{15}{24} \qquad \beta = \frac{63}{24}$$

$$a_n = -\frac{15}{24}(-4)^n + \frac{63}{2} 2^n + \frac{1}{8} n 2^n$$

$a_0 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 8a_{n+1} + 7a_n = (-1)^n(n-2)$ $= (-2 + 1\cdot n)\cdot(-1)^n$

$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 7\lambda + 7 = 0$

$\lambda(\lambda+1) + 7(\lambda+1) = 0$

$(\lambda+7)(\lambda+1) = 0$ $\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -7 \end{array}\right.$

$a_n^{чн} = n(c_0 + c_1 n)\cdot(-1)^n$

$(n+2)(c_0+c_1(n+2))\cdot\cancel{(-1)^n} - 8(n+1)(c_0+c_1(n+1))\cancel{(-1)^n} + 7n(c_0+c_1 n)\cdot\cancel{(-1)^n} = (-2+1\cdot n)\cancel{(-1)^n}$

$(nc_0 + c_1n^2 + c_1 n + 2c_0 + 2c_1\cdot n + 2c_1) - 8(nc_0 + c_1n^2 + c_1 n + c_0 + c_1 n + c_1) + 7(c_0 n + c_1 n^2)$

$16-3=13$

$n(\cancel{c_0} + c_1 + 2c_1 - \cancel{8c_0} - 8c_1 - 8c_1 + \cancel{7c_0}) + n^2\cancel{(c_1 - 8c_1 + 7c_1)} + (2c_0 + 2c_1 - 8c_0 - 8c_1) =$

$= n(-13c_1) + (-6c_0 - 6c_1) = (-2 + 1\cdot n)$

$-6(c_0+c_1) - 13c_1\cdot n = -2 + 1\cdot n$

$\begin{cases} 6(c_0+c_1) = 2 \\ -13c_1 = 1 \end{cases}$ $c_1 = -\frac{1}{13}$ $c_0 = \frac{16}{39}$

$a_n^{чн} = \left(\frac{16}{39} - \frac{1}{13}n\right)n\cdot(-1)^n$

$c_0 - \frac{1}{13} = \frac{1}{3}$

$c_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{13} = \frac{13+3}{39} = \frac{16}{39}$

$a_n^{oo} = \alpha(-1)^n + \beta(-7)^n$

$a_n^{он} =$ $\left(\frac{16}{39} - \frac{1}{13}n\right)n\cdot(-1)^n$

Математическая индукция

Задачи

2 Докажите, используя мат. индукцию

- а $1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, где $n \geq 0$
- б $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$, где F_n – последовательность Фибоначчи
- в $4^n > 3^n + 2^n$, где $n \geq 2$
- г $4^n - 1$ делиться на 3 для любого натурального n

в $4^n > 3^n + 2^n,$ где $n \geq 2$

1) база:

$16 > 9 + 4 = 13$

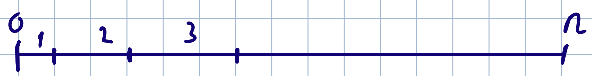
2) шаг

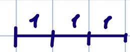
Рекуррентные соотношения

Задачи. Составьте рекуррентные соотношения и дополните начальными условиями

3. для числа способов разбить отрезок длины n отрезками длины 1, 2 и 3 так, чтобы в разбиении не было трех рядом стоящих отрезков длины 1;
4. для числа цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, в которых есть рядом стоящие символы b и c.

3 для числа способов разбить отрезок длины n отрезками длины 1, 2 и 3 так, чтобы в разбиении не было трех рядом стоящих отрезков длины 1;





← нельзя

1) в начале 2

S_{n-2}

2) в начале 3

S_{n-3}

3) в начале 1

а) 1 2 $\quad S_{n-3}$

б) 1 3 $\quad S_{n-4}$

в) 1 1 $\frac{2}{3}$ $\quad S_{n-4}+S_{n-5}$

$\Rightarrow S_{n-3}+S_{n-4}+S_{n-4}+S_{n-5}$

$$S_n = S_{n-2} + 2S_{n-3} + 2S_{n-4} + S_{n-5}$$

$$S_{n+5} = S_{n+3} + 2S_{n+2} + 2S_{n+1} + S_n$$

V ответ

$S_1 = 1$
$S_2 = 2$
$S_3 = 4$
$S_4 = 6$
$S_5 = 8$

//

$$\lambda^5 = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 = (\lambda+1)^2$$

$$\lambda^2(\lambda^3 - \lambda - 1)$$

4 для числа цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, в которых есть рядом стоящие символы b и c.

$\{a, b, c\}$ есть bc

(·) ka $\underline{1}$

$\underbrace{1\ \underline{1}\ 0 \ldots}_{n}$ $\quad f_0(n-2)$

$1\ 0 \ldots .$ $\quad f_0(n-1)$

$$f_1(n) = f_0(n-2) + f_0(n-1)$$

$$f_0(n) = f_1(n-1)$$

(·) ka 0

$0\ \underbrace{\underline{1} \ldots}_{n-1}$ $\quad f_1(n-1)$

$$f_0(n) = f_0(n-3) + f_0(n-2)$$

$$f(n) = f_1(n) + f_0(n) = \underbrace{f_1(n-1) + f_0(n-1)}_{= f(n-1)} + f_0(n-2) = f(n-\underline{1}) + f_1(n-3)$$