

Laborator 7

Legea Numerelor Mari și Teorema Limită Centrală

Obiectivul acestui laborator este de a prezenta noțiunea de convergență în probabilitate și convergență în repartiție precum și a *Legii Numerelor Mari* (versiunea slabă) și a *Teoremei Limită Centrale*.

1 Ilustrarea Legii Numerelor Mari

1.1 Convergența în probabilitate

Fie $X_n, n \geq 1$ și X variabile aleatoare definite pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Spunem că un șirul de variabile aleatoare $(X_n)_n$ converge în probabilitate la variabila aleatoare X , și notăm $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, dacă pentru orice $\epsilon > 0$ are loc

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De asemenea putem observa că $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ dacă și numai dacă $X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Pentru a ilustra grafic acest tip de convergență¹ vom aproxima probabilitatea $\mathbb{P}(A_n)$, unde $A_n = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$, folosind abordarea frecvenționistă. Aceasta presupune ca pentru n dat să considerăm $\omega_1, \dots, \omega_M \in \Omega$, M realizări ale experimentului (repetat în condiții identice) și să folosim aproximarea

$$\mathbb{P}(A_n) \approx p_n(M) = \frac{\#\{j \in \{1, \dots, M\} \mid |X_n(\omega_j) - X(\omega_j)| > \epsilon\}}{M}.$$

Concret, în figura de mai jos, considerăm $M = 30$ de repetiții ale experimentului (avem M curbe) cu $n = 5000$ de realizări ale unui șir de variabile aleatoare $X_k = \frac{Y_1 + \dots + Y_k}{k}$, cu Y_i independente și repartizate $\mathcal{U}[0, 1]$, $X = 0.5$ și $\epsilon = 0.01$. Pentru $i \in \{500, 1500, 2500, 3500, 4500\}$ am calculat și afișat frecvența de realizare a evenimentului A_i (câte din cele M curbe sunt în afara benzii $[-\epsilon, \epsilon]$ pentru i , fixat). Observăm că $p_{500}(30) = 0.37$ și $p_{3500}(30) = 0.03$, convergența lui $p_n(M) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ implicând convergența în probabilitate.

```
showConvergenceProbability = function(N = 2000, m = 10, e = 0.05, n = floor(N/2),  
                                       step = max(floor(N/40), 0.5), min = 0, max = 1,  
                                       seed = NULL){  
  
  # only for uniform distribution  
  mu = (min + max)/2  
  a = - e - 0.05  
  b = e + 0.05  
  
  set.seed(seed)  
  
  xmat = matrix(runif(N*m, min = min, max = max), ncol = m)  
  y = apply(xmat, 2, cumsum)/1:N  
  
  par(oma = c(0.5,0.5,0.5,0.5))
```

¹Pentru alte moduri de convergență și ilustrarea lor grafică se poate consulta lucrarea: Pierre LAFAYE DE MICHEAUX și Benoit LIQUET *Understanding Convergence Concepts: A Visual-Minded and Graphical Simulation-Based Approach*, The American Statistician, Vol. 63, No. 2, 2009

```

plot(1:N, y[,1] - mu, col = grey(0.8, 0.4), type = "l",
     bty = "n",
     ylim = c(a - 0.05, b + 0.05),
     ylab = TeX("$X_n - X$"),
     xlab = "n",
     cex.axis = 0.7,
     cex.lab = 0.9)

for (i in 2:m){
  lines(1:N, y[,i] - mu, col = grey(0.8, 0.4))
}

abline(h = - e, lty = 2, lwd = 2)
abline(h = e, lty = 2, lwd = 2)

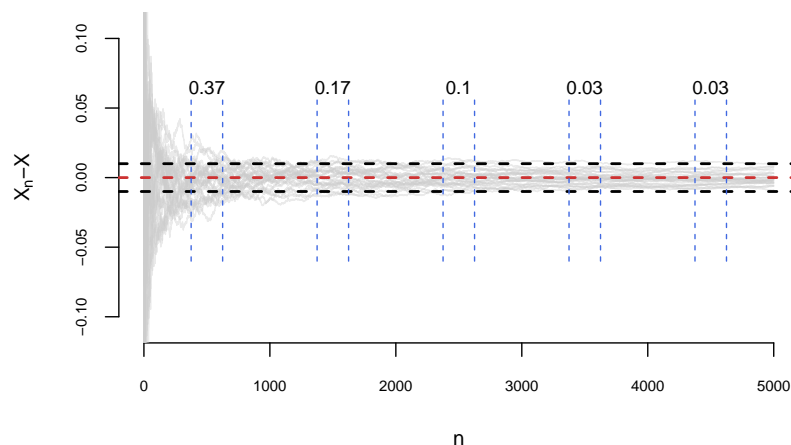
abline(h = 0, col = "brown3", lty = 2, lwd = 2)

for( j in 1:length(n)){
  pj = sum(y[n[j],]>mu+e | y[n[j],]<mu-e)/m

  segments(n[j]-step, a, n[j]-step, b, lty = 2, col = "royalblue")
  segments(n[j]+step, a, n[j]+step, b, lty = 2, col = "royalblue")

  text(n[j], b+0.005, round(pj, digits = 2),
       cex = 0.85)
}
}

showConvergenceProbability(N = 5000, m = 30, e = 0.01, n = seq(500, 4500, 1000), seed = 321)
    
```



1.2 Legea numerelor mari (versiunea slabă)



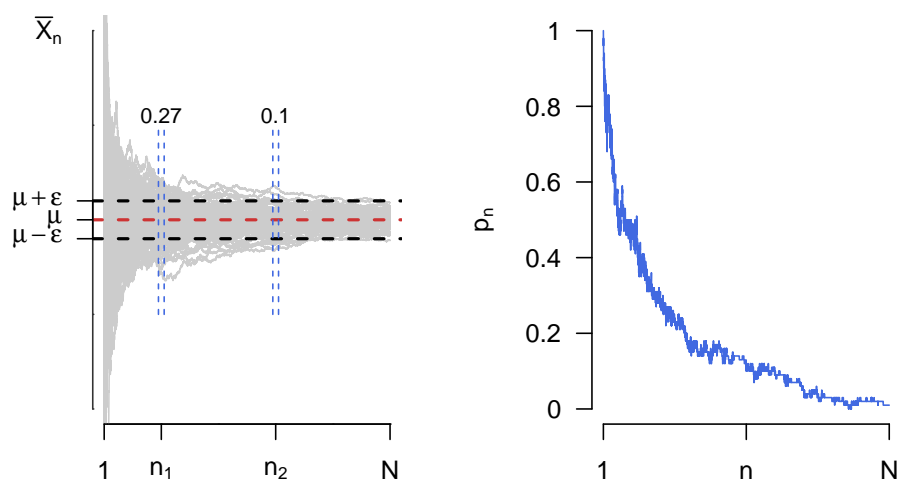
Fie X_1, X_2, \dots un șir de variabile aleatoare independente și indentic repartizate, de medie $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$ și varianță $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Atunci $\forall \epsilon > 0$ avem

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sau echivalent

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \leq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Notând $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, *Legea numerelor mari (versiunea slabă)* afirmă că $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$. Figura de mai jos ilustrează această convergență pentru $M = 100$ de traiectorii. În figura din dreapta este ilustrată evoluția probabilității p_n pentru $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.



Să presupunem că primim o monedă și ni se spune că aceasta aterizează pe fața cap în 48% din cazuri. Vrem să testăm această afirmație. Folosind *Legea numerelor mari* și știind că vrem să fim siguri în 95% din cazuri, ne întrebăm de câte ori trebuie să aruncăm moneda pentru a verifica afirmația?

Să presupunem că aruncăm moneda, independent, de n ori și fie X_i rezultatul obținut la cea de-a i -a aruncare: $X_i = 1$ dacă la a i -a aruncare am obținut cap și $X_i = 0$ dacă am obținut pajură. Avem că variabilele aleatoare X_1, X_2, \dots, X_n sunt independente și repartizare $\mathcal{B}(p)$, cu $p = 0.48$ din ipoteză.

De asemenea, observăm că $\mathbb{E}[X_1] = \mu = 0.48$ și $Var(X_1) = \sigma^2 = p(1 - p) = 0.2496$. Pentru testarea monedei permitem o eroare $\epsilon = 0.02$ ceea ce înseamnă că probabilitatea ca moneda să aterizeze cap se află în intervalul

(0.46, 0.5). Din *Inegalitatea lui Cebîșev* avem că

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - 0.48\right| > 0.02\right) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{n \times (0.02)^2},$$

de unde, având un grad de încredere de 95%, vrem să determinăm pe n pentru care

$$\frac{0.2496}{n \times (0.02)^2} = 0.05$$

ceea ce implică $n = 12480$.



Fie X_1, X_2, \dots, X_N , N v.a. i.i.d. de lege $\mathcal{U}([0, 1])$. Pentru $1 \leq n \leq N$, notăm cu $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ șirul sumelor parțiale și μ media legii $\mathcal{U}([0, 1])$. Trasați pe același grafic funcția $n \rightarrow \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ pentru $n = 1, \dots, N$ și dreapta de ecuație $y = \mu$. Faceți același lucru pentru legea normală $\mathcal{N}(2, 1)$.

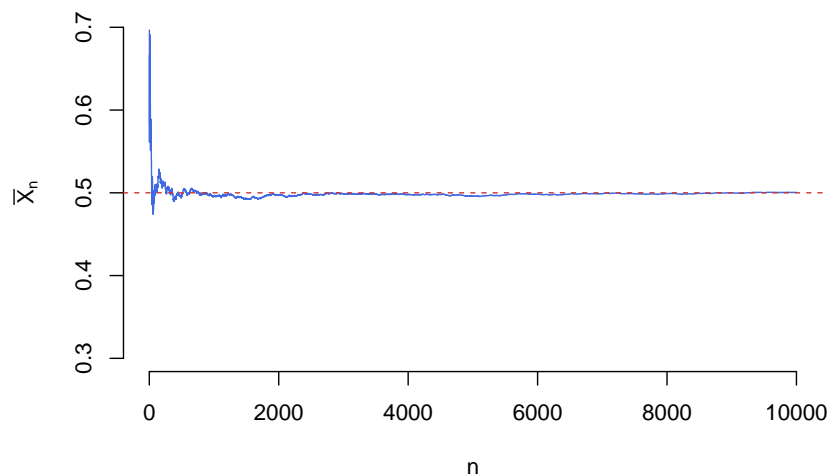
În cazul în care v.a. X_1, X_2, \dots, X_N sunt repartizate uniform $\mathcal{U}([0, 1])$ (deci media este $\mu = \frac{1}{2}$) avem:

```
n = 10000
```

```
# Pentru legea uniforma folosim comanda runif
# Pentru calculul sumelor parțiale putem folosi functia cumsum

y1 = cumsum(runif(n))
y1 = y1/(1:n)
mu1 = 1/2 # media uniformeii pe [0,1]

# trasam graficul
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.3, 0, 0))
plot(1:n, y1, type = "l",
     col= "royalblue", xlab = "n",
     ylab = expression(bar(X)[n]),
     bty = "n",
     ylim = c(0.3,0.7))
abline(h = mu1, col = "brown3", lty= "dashed") # adaugam linia orizontala
```

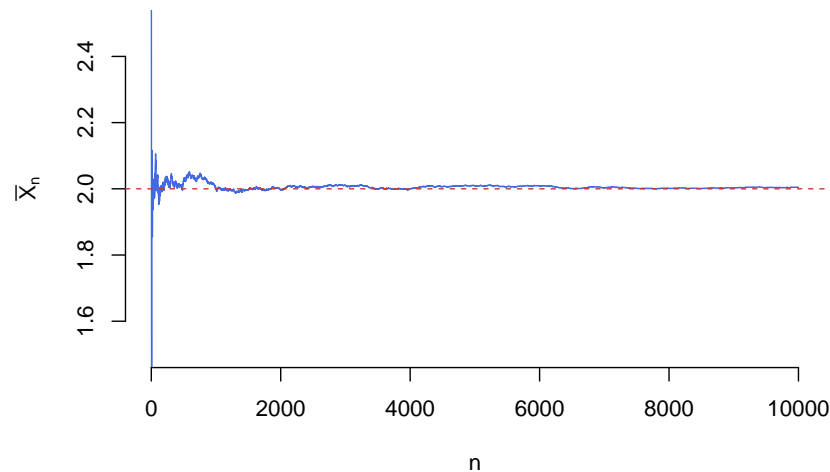


În cazul în care v.a. X_1, X_2, \dots, X_N sunt normale de parametrii $\mathcal{N}(2, 1)$ (deci media este $\mu = 2$) avem:

```
# Folosim acelasi numar de variabile n

# Pentru legea normala folosim comanda rnorm
# Pentru calculul sumelor partiale putem folosi functia cumsum
y2 = cumsum(rnorm(n, mean = 2, sd = 1))
y2 = y2/(1:n)
mu2 = 2 # media normalei N(2,1)

# facem graficul
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.3, 0, 0))
plot(1:n, y2, type = "l",
     col= "royalblue", xlab = "n",
     ylab = expression(bar(X)[n]),
     bty = "n",
     ylim = c(1.5, 2.5))
abline(h = mu2, col = "brown3", lty= "dashed") # adaugam linia orizontala
```



Construiți o funcție care să vă permită generarea a m eșantioane de volum n dintr-o populație normală de medie μ și varianță σ^2 dată. Ilustrați grafic cu ajutorul unui boxplot cum variază diferența dintre media aritmetică (media eșantionului \bar{X}_n) și media teoretică pentru $m = 100$ și diferite volume ale eșantionului $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$. Se consideră $\mu = 1$ și $\sigma^2 = 1$.

Următoarea funcție verifică cerința din problemă (`normal.mean = μ` , `normal.sd = σ` , `num.samp = m` și `samp.size = n`). Să observăm că am folosit funcția `rowMeans` pentru a calcula media fiecărui eșantion (media pe liniile matricii de observații).

```
normalSampleMean <- function(normal.mean, normal.sd, num.samp, samp.size) {  
  # generam matricea de observatii  
  x = matrix(rnorm(n = num.samp * samp.size, mean = normal.mean, sd = normal.sd),  
             nrow = num.samp, ncol = samp.size)  
  
  # calculam media esantionului pentru fiecare esantion  
  x.mean = rowMeans(x)  
  
  return(x.mean)  
}
```

Pentru a ilustra grafic să considerăm o populație $\mathcal{N}(1,1)$ și pentru talie a eșantionului, $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$, să calculăm \bar{X}_n corespunzător (aici am folosit funcția `sapply` - a se vedea laboratorul 3).

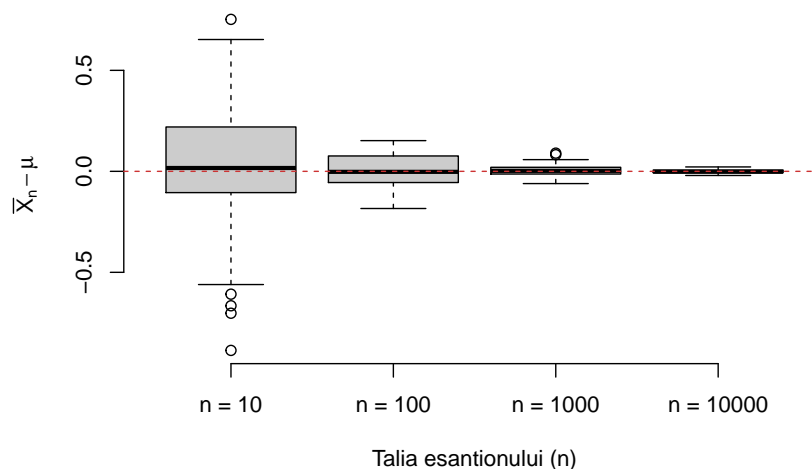
```
# date de intrare  
normal.mean = 1  
normal.sd = 1  
true.mean = normal.mean  
  
# marimea esantioanelor  
samp.sizes = c(10, 100, 1000, 10000)  
  
names(samp.sizes) = paste0("n = ", samp.sizes)
```

```
# numarul de esantioane
num.samp = 100

# calculul mediei de selectie pentru fiecare esantion
x.mean = sapply(samp.sizes, normalSampleMean, num.samp = num.samp,
                normal.mean = normal.mean, normal.sd = normal.sd)

# ilustrarea grafica
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.2, 0, 0), bty = "n")
boxplot(x.mean - true.mean,
        xlab = "Talía esantionului (n)",
        ylab = expression(bar(X)[n] - mu),
        col = "gray80",
        bty = "n")

abline(h = 0, lty = 2, col = "brown3")
```



Din boxplot-ul de mai sus observăm că pe măsură ce creștem talia eşantionului media boxplot-ului se duce spre 0 ceea ce justifică enunțul *Legii Numerelor Mari*, și anume că media eşantionului converge la media populației (media teoretică). De asemenea putem observa că și varianța scade (gradul de împrăștiere scade) odată cu creșterea numărului de observații.



Utilizați *Legea Numerelor Mari* pentru a aproxima integrala următoare

$$I = \int_0^1 e^x \sin(2x) \cos(2x) dx.$$

Calculați de asemenea valoarea exactă I a acesteia și comparați-o cu aproximarea găsită.

Fie U_1, U_2, \dots, U_n un șir de v.a. i.i.d. repartizare uniform pe $[0, 1]$. Cum g este o funcție continuă atunci $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_n)$ sunt variabile aleatoare i.i.d. și aplicând *Legea Numerelor Mari* obținem

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[g(U_1)] = \int_0^1 g(x) dx.$$

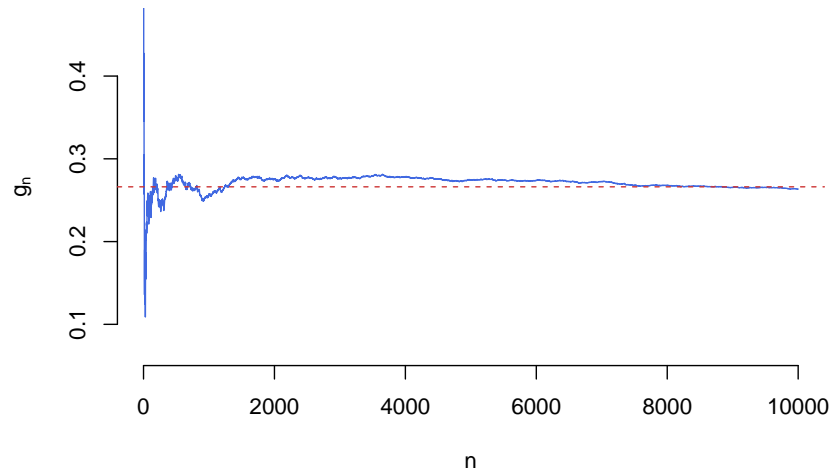
Pentru a calcula integrala numeric vom folosi funcția `integrate` (trebuie observat că această integrală se poate calcula ușor și exact prin integrare prin părți). Următorul script ne dă valoare numerică și aproximarea obținută cu ajutorul metodei Monte Carlo pentru integrale $\int_0^1 g(x) dx$:

```
myfun=function(x){  
  y = exp(x)*sin(2*x)*cos(2*x);  
  return(y);  
}  
  
# calculul integralei cu metode numerice  
I = integrate(myfun,0,1) # raspunsul este o lista si oprim prima valoare  
I = I[[1]]  
  
# calculul integralei cu ajutorul metodei Monte Carlo  
n = 10000  
  
u = runif(n) # generarea sirului U_n  
z = myfun(u) # calcularea sirului g_n  
  
I2 = sum(z)/n # aproximarea MC
```

Obținem că valoarea numerică a lui I este 0.2662 iar cea obținută cu ajutorul metodei Monte Carlo este 0.2673.

Avem următoarea ilustrare grafică a convergenței metodei Monte Carlo:

```
# graficul  
gn = myfun(runif(n))  
gn = cumsum(gn)/(1:n) # calculul lui g_n  
  
plot(1:n, gn, type = "l",  
     col = "royalblue", xlab = "n",  
     ylab = expression(g[n]),  
     bty = "n",  
     ylim = c(I-0.2, I+0.2))  
abline(h = I, lty = "dashed", col = "brown3")
```

2 Ilustrarea Teoremei Limită Centrală



Fie X_1, X_2, \dots un șir de variabile aleatoare independente și indentic repartizate, de medie $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$ și varianță $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Atunci, notând $S_n = X_1 + \dots + X_n$, avem

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Echivalent, dacă notăm media eșantionului cu $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, atunci

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Să presupunem că primim o monedă și ni se spune că aceasta aterizează pe fața cap în 48% din cazuri. Vrem să testăm această afirmație. Folosind *Teorema Limită Centrală* și știind că vrem să fim siguri în 95% din cazuri, ne întrebăm de câte ori trebuie să aruncăm moneda pentru a verifica afirmația? Comparați răspunsul cu cel din exercițiul în care am folosit *LNM*, de mai sus.

Folosind aceleași notații ca și în exercițiul din secțiunea de mai sus și notând în plus $S_n = X_1 + \dots + X_n$, avem

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < 0.5\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{(0.5 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{0.2496}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < 0.04\sqrt{n}\right) \approx \Phi(0.04\sqrt{n}) \geq 0.95 \end{aligned}$$

Prin urmare, $(0.04\sqrt{n} \geq 1.645$ de unde $n = 1692$. Putem observa că rezultatul obținut prin aplicarea *Teoremei Limită Centrală* este mai precis decât cel obținut prin aplicarea *Legii numerelor mari*.



Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un șir de v.a. i.i.d. de lege $\mathcal{E}(1)$. Pentru toți n , notăm cu $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ șirul sumelor parțiale, μ și σ^2 reprezentând media și respectiv varianța legii $\mathcal{E}(1)$. *Teorema Limită Centrală* afirmă că dacă n este mare atunci v.a.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

are aproximativ aceeași distribuție ca și legea normală $\mathcal{N}(0, 1)$. Ilustrați această convergență în distribuție cu ajutorul unei histogramme. Suprapuneți peste această histogramă densitatea legii $\mathcal{N}(0, 1)$.

Știm că media unei v.a. distribuite exponențial de parametru λ , $\mathcal{E}(\lambda)$ este $\mu = \frac{1}{\lambda}$ iar varianța acesteia este $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. Pentru fiecare valoare a lui i de la 1 la N calculăm raportul $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ (cu alte cuvinte repetăm experimentul de N ori):

```
N = 1000 # alegem numarul de repetitii ale experimentului
n = 1000 # alegem n pentru care folosim aproximarea normala

lambda = 1 # parametrul legii E(1)

mu = 1/lambda # media
sigma = 1/lambda # abaterea standard

s = rep(0,N) # initializam sirul sumelor partiale

for (i in 1:N){
  x = rexp(n, rate = lambda) # generam variabilele exponentiale
  s[i] = (sum(x)-n*mu)/(sigma*sqrt(n)) # calculam raportul
}
```

Continuăm prin trasarea histogramei cerute și adăugăm la grafic densitatea legii normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

```
# trasam histograma
# pentru mai multe optiuni latex: ?plotmath
hist(s, main = expression(paste("Histograma raportului ",
                                frac(S[n]-n*%mu,sigma*%sqrt(n)))),
     prob = TRUE,
     col = "grey80", # Culoarea de umplere
     border = "grey20",
     xlim = c(-4,4),
     cex.main=0.75,
     cex.lab = 0.75,
     cex.axis = 0.75,
     xlab = "",
     ylab = "Densitatea")

# adaugam densitatea normalei N(0,1)
x1 = seq(-4,4,by=0.1)
y1 = dnorm(x1, mean = 0, sd = 1)
lines(x1, y1, col = "brown3", lwd = 2, lty = 2)
```

