Tema 5

Exerciţiul 1

Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eşantion de talie n cu funcţia de repartiţie $F(x)$ şi densitatea $f(x)$ şi $(Y_1, \ldots, Y_n)$ versiunea ordonată crescător a acestuia. Notăm cu $H_k(x)$ şi $h_k(x)$ funcţia de repartiţie şi densitatea v.a. Y_k. Fie $Y_1 = \inf X_i$ şi $Y_n = \sup X_i$.

a) Care este funcţia de repartiţie şi densitatea lui Y_1 şi Y_n ?

b) Care este probabilitatea ca o observaţie dintr-o v.a. de lege $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ să depăşească $\mu + 3\sigma$?

c) Dar intr-un eşantion de talie 100 cat este această probabilitate (i.e. probabilitatea ca o observaţie să depăşească $\mu + 3\sigma$)?

d) Dintr-un eşantion de talie 100 dintr-o populaţie repartizată $\mathcal{N}(0, 1)$ ce valoare nu poate fi depăşită cu o probabilitate de 99% ?

e) O societate de analiză a calităţii apei şi a mediului efectuează un sondaj in laboratoarele sale (50 la număr, repartizate pe tot teritoriul Romaniei) pentru a testa dacă efectuează măsurători corecte. Pentru aceasta, serviciul de calitate trimite la fiecare laborator un eşantion de apă care conţine o anumită concentraţie de crom şi le cere să determine această concentraţie de crom. Ţinand cont de fluctuaţiile care apar in prepararea soluţiei, precum şi imprecizia aparatelor de măsură, societatea presupune că repartiţia concentraţiei de crom (mg/l) este $\mathcal{N}(10, 1)$.

Printre rezultatele obţinute de la laboratoare, două dintre acestea au inregistrat măsurători mai diferite decat celelalte: laboratorul L_1 a inregistrat o concentraţie de 6 mg/l (cea mai mică valoare inregistrată) iar laboratorul L_2 a mă surat o concentraţie de 13 mg/l (cea mai mare dintre măsurători).

Puteţi spune, cu o probabilitate de 99%, că aceste valori sunt coerente sau că valorile obţinute sunt aberante (datorită erorilor de măsurare, de calibrare a aparatelor, etc.) ?

Exerciţiul 2* [1]

Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eşantion de talie n dintr-o populaţie de medie μ şi varianţă σ^2. Arătaţi că varianţa varianţei eşantionului este:

$$\mathbb{V}(S^2) = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$$

unde $\mu_4 = \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4]$ este momentul centrat de ordin 4. Ce revine această formulă in cazul Gaussian (normal) ?

Exerciţiul 3*

Fie $X_1, \ldots, X_n$ un eşantion de talie n dintr-o populaţie de medie μ şi varianţă σ^2. Arătaţi că

$$Cov(\bar{X}, S^2) = \frac{\mu_3}{n}$$

unde $\mu_4 = \mathbb{E}[(X_i - \mu)^3]$ este momentul centrat de ordin 3. Acest rezultat ne arată că cele două statistici sunt asimptotic *necorelate*.

[1] Exerciţiile cu * sunt mai dificile şi se punctează doar suplimentar

Exerciţiul 4

Nivelul de zgomot al unei maşini de spălat este o v.a. de medie 44 dB şi de abatere standard 5 dB. Admiţand aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB intr-un eşantion de talie 10 maşini de spălat ?

Exerciţiul 5

O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Ştiind că greutatea populaţiei (ţarii) este o v.a. de medie 66.3 Kg şi o abatere standard de 15.6 Kg şi presupunand că persoanele care au urcat in telecabină au fost alese in mod aleator din populaţie, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depăşească 7000 Kg ?