Tema 2

Exerciţiul 1

Fie $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie strict crescătoare. Arătaţi că

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[g(|X|)\right]}{g(a)}, \text{ pentru } a > 0.$$

Exerciţiul 2

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, aşa incat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
   ii) Pentru toţi $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinaţi
   i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.
   ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

c) Dacă $X \sim Geom(p)$, $0 < p < 1$ calculaţi $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

Exerciţiul 3

Arătaţi că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

Exerciţiul 4

a) Fie X o variabilă repartizată exponenţial (de parametru α). Arătaţi că are loc următoarea relatţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relaţia (1). Arătaţi că X este repartizată exponenţial.

Exerciţiul 5

Un proces Bernoulli de parametru p este un şir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n\geq 1}$ cu $X_n \in \{0,1\}$ şi $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$.

a) Arătaţi că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n,p)$ şi calculaţi media şi varianţa acesteia.

b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ şi M cel mai mare număr natural aşa incat $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$. Găsiţi distribuţiile v.a. L şi M.

c) Arătaţi că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M]$, $\mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ şi calculaţi $Cov[L, M]$.

d) Calculaţi $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k)$.