Tema 1

Soluții

Exerciţiul 1

a) A singur se realizează: $A \cap B^c \cap C^c$

b) A şi C se realizează dar nu şi B: $A \cap B^c \cap C$

c) cele trei evenimente se produc: $A \cap B \cap C$

d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce: $A \cup B \cup C$

e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

f) cel mult un eveniment se produce: $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce: $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) exact două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

i) nu mai mult de două evenimente nu se realizează: $(A \cap B \cap C)^c$

Exerciţiul 2

a) "soţul are mai mult de 40 de ani dar nu şi soţia sa" $= A \cap C^c$

b)

- $A \cap B \cap C^c = \{$ soţul are mai mult de 40 de ani dar soţia are mai puţin de 40 de ani $\}$,
- $A \setminus (A \cap B) = \{$ soţul are mai mult de 40 de ani iar soţia lui este mai in varstă decat el $\}$,
- $A \cap B^c \cap C = \{$ bărbatul are mai mult de 40 de ani iar soţia lui este mai in varstă decat el $\}$,
- $A \cup B = \{$ sau bărbatul are mai mult de 40 de ani sau femia este mai tanără decat el $\}$

c) Avem $A \cap C^c \subset (A \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) = B$

Exerciţiul 3

a) Reamintim că $d : X \times X \to \mathbb{R}$ este o distanţă pe X dacă verifică următoarele proprietăţi:

   i) $d(x, y) \geq 0$ (pozitivitate)

   ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrie)

   iii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

   iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului)

In cazul problemei noastre obsrvăm că $d(A, B) \geq 0$ şi că $d(A, B) = d(B, A)$ deoarece $A \triangle B = B \triangle A$. Să presupunem acum că $d(A, B) = 0$. Avem $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ iar din $(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$ rezultă că

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0 \text{ şi } \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0$$

de unde $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ deci $A = B$ (a.s.).

Fie $A, B, C \in \mathcal{F}$. Vrem să arătăm că $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$. Considerăm evenimentele elementare $A \cap B \cap C$, $A^c \cap B \cap C$, $A \cap B^c \cap C$, $A \cap B \cap C^c$, $A^c \cap B^c \cap C$, $A^c \cap B \cap C^c$ şi $A \cap B^c \cap C^c$ ¸ Avem următoarele descompuneri:

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \\
A \triangle C &= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\
B \triangle C &= (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C).
\end{aligned}$$

Observăm că $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ de unde

$$\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \mathbb{P}\left((A \triangle C) \cup (B \triangle C)\right) \leq \mathbb{P}(A \triangle C) + \mathbb{P}(B \triangle C)$$

ceea ce arată că d este distanţă.

b) Considerăm evenimentele elementare disjuncte $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ şi $A^c \cap B^c$. Avem următoarea descompunere

$$\begin{aligned}
A &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\
B &= (A^c \cap B) \cup (A \cap B)
\end{aligned}$$

de unde obţinem că

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ceea ce arată că

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A \triangle B).$$

Exerciţiul 4

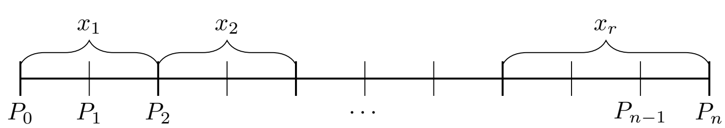

Figure 1: Interpretare geometrică

1. Considerăm un segment de dreaptă de lungime n ca şi in Fig. 1. O soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ a ecuaţiei $x_1 + \cdots + x_r = n$ astfel incat x_i sunt numere intregi strict pozitive, corespunde unei descompuneri a acestui segment de dreaptă in r părţi de lungime dată de numere intregi strict pozitive. Cele $r-1$ puncte care determină extremităţile acestor segmente (altele decat P_0 şi P_n) trebuie să fie alese din cele $n-1$ puncte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ şi acest lucru poate fi făcut in $\binom{n-1}{r-1}$ moduri diferite. Prin urmare numărul de soluţii strict pozitive ale ecuaţiei $x_1 + \ldots + x_r = n$ este $\binom{n-1}{r-1}$.

2. Fie $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$, $\ldots$, $y_r = x_r + 1$. Observăm că y_i sunt numere intregi strict pozitive şi $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n + r$. Prin urmare numărul de soluţii intregi pozitive ale ecuaţiei $x_1 + \ldots + x_r = n$ este egal cu numărul de soluţii intregi strict pozitive ale ecuaţiei $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n + r$ care am văzut că este egal cu $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$.

Exerciţiul 5

1. (a) Spaţiul stărilor Ω este $\Omega = \{(O,b),(O,m),(O,s),(N,b),(N,m),(N,s)\}$.

   (b) Avem

$$\begin{aligned} A &= \text{starea de sănătate a pacientului este serioară} = \{(O,s),(N,s)\},\\ B &= \text{pacientul nu este asigurat} = \{(N,b),(N,m),(N,s)\},\\ B^c \cup A &= \text{sau pacientul este asigurat sau starea acestuia este serioasă}\\ &= \{O,b),(O,m),(O,s),(N,s)\}. \end{aligned}$$

2. Cum măsura de probabilitate $\mathbb{P}$ corespunde echiprobabilităţii pe Ω avem că $\mathbb{P}((O,b)) = \mathbb{P}((O,m)) = \mathbb{P}((O,s)) = \mathbb{P}((N,b)) = \mathbb{P}((N,m)) = \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{6}$, deci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{3},\\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((N,b)) + \mathbb{P}((N,m)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{2},\\ \mathbb{P}(B^c \cup A) &= \mathbb{P}((O,b)) + \mathbb{P}((O,m)) + \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3. In acest caz avem

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.1 + 0.1 = 0.2,\\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((N,b)) + \mathbb{P}((N,m)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5,\\ \mathbb{P}(B^c \cup A) &= \mathbb{P}((O,b)) + \mathbb{P}((O,m)) + \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.2 + 02 + 0.1 + 0.1 = 0.6. \end{aligned}$$

Exerciţiul 6

a) Careu: $\frac{\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = 0.024\%$

b) Full-house: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} = 0.14\%$

c) Trei cărţi de acelaşi tip: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} = 2.1\%$

d) Două perechi: $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} = 4.75\%$

e) O pereche: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\left(\binom{4}{1}\right)^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} = 42.26\%$

Exerciţiul 7

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depăşit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1-\mathbb{P}(A^c|B^c)]\,(1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01\times 0.995} \approx 0.332. \end{aligned}$$

2. Căutăm p aşa incat $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde

$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995 \times 0.95}{0.995 \times 0.95 + 0.05 \times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99 \times 0.3 + 0.01 \times 0.7 \approx 0.304$ şi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil in această situaţie.

Exerciţiul 8

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este $5\}$
   - $B_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este $7\}$

   Evenimentul E_n se scrie

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

   Aplicand independenţa avem că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

   Observăm că spaţiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j)|1 \leq i,j \leq 6\}$ şi probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obţinem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 şi nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situaţiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

   In concluzie, probabilitatea evenimentului

$$A = \{\text{suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

   este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^n = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2 şi nici suma 7 iar in a n-a aruncare a apărut suma 2* şi C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

   şi probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) şi $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n-1} \frac{1}{36}$$
$$= \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36}\frac{1}{1-\frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.$$

Exerciţiul 9* [1]

Fie partiţia $\Pi = \{A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \cdots \cap A_n^{\varepsilon_n} \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = 0, 1\}$, unde $A^\varepsilon = A$ dacă $\varepsilon = 1$ şi $A^\varepsilon = A^c$ dacă $\varepsilon = 0$. Atunci $\mathcal{F} = \mathcal{A}(\{A_1, \ldots, A_n\})$ (algebra generată de $\{A_1, \ldots, A_n\}$) coincide cu algebra generată de Π, prin urmare orice element din $\mathcal{F}$ poate fi scris ca o reuniune finită (şi disjunctă) de elemente din Π (De ce?). Astfel, pentru $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{F}$ există $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'} \in \Pi$ aşa incat să avem

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{m'} c_i' \mathbb{P}(\alpha_i').$$

Este evident că implicaţia $a) \implies b)$ este adevărată. Reciproc, să presupunem că inegalitatea dorită este adevărată pentru orice măsură de probabilitate cu $\mathbb{P}(A_i) = 0$ sau 1 pentru toţi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Avem deci că

$$\sum_{i=1}^{m'} c_i' \mathbb{P}(\alpha_i') \geq 0 \tag{1}$$

pentru toate măsurile de probabilitate cu $\mathbb{P}(A_i) = 0$ sau 1, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, prin urmare $\mathbb{P}(\alpha_i) = 0$ sau 1 pentru toate elementele α_i din Π (toţi atomii). Alegand P aşa incat $\mathbb{P}(\alpha_i) = 1$, pentru un i fixat, şi $\mathbb{P}(\beta) = 0$ pentru $\beta \in \Pi$, $\beta \neq \alpha$ [2] avem $c_i' \geq 0$ $(i = 1, 2 \ldots, m')$. Asta garantează că relaţia (1) rămane valabilă pentru orice măsură de probabilitate.

Exerciţiul 10*

Conform rezultatului demonstrat in exerciţiul anterior, este suficient să verificăm relaţiile din enunţ pentru măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ care verifică $\mathbb{P}(A_1) = \cdots = \mathbb{P}(A_l) = 1$ şi $\mathbb{P}(A_{l+1}) = \cdots = \mathbb{P}(A_n) = 0$, cu $0 \leq l \leq n$.

Prin urmare, fie $0 \leq l \leq n$ şi $\mathbb{P}$ care verifică relaţiile de mai sus. Dacă $l = 0$ atunci cele două formule sunt evident adevărate $(0 = 0)$. Să presupunem că $l \geq 1$ şi că $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $k \geq 1$. Dacă $i_k \leq l$ atunci $\mathbb{P}(A_{i_1}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) = \cdots = \mathbb{P}(A_{i_k}) = 1$ de unde avem că

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) + \mathbb{P}(A_{i_2}) - \mathbb{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2}) = 2 - 1 = 1$$

şi prin inducţie se poate arăta că $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = 1$ (altfel se poate folosi inegalitatea lui Bonferroni). Dacă $i_k \geq l + 1$ atunci $0 \leq \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \leq \mathbb{P}(A_{i_k}) = 0$. Prin urmare $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = 0$ sau 1 după cum $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ este sau nu submulţime a lui $\{1, 2, \cdots, l\}$. Obţinem astfel că suma S_k^n este egală cu numărul de submulţimi $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subset \{1, 2, \cdots, l\}$, adică $S_k^n = \binom{l}{k}$.

Pentru a arăta identitatea de la punctul a) să observăm că pentru $l < r$ avem $V_n^r = 0$, pentru că $LHS = V_n^r = \mathbb{P}(B)$ unde

[1] Exerciţiile cu * sunt suplimentare şi nu sunt obligatorii

[2] putem găsi o asemenea măsură de probabilitate deoarece odată ce am ales $\mathbb{P}(\alpha_i) = 1$ am ales şi valorile pentru $\mathbb{P}(A_j)$

$$\begin{aligned}B &= \{\text{exact } r \text{ dintre } A_1, \dots, A_n \text{ se realizează } \}\\ &= \bigcup_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n}\left[\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_r\}} A_i \cap \bigcap_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}} A_j^c\right]\end{aligned}$$

iar $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_r\}} A_i \cap \bigcap_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}} A_j^c\right) = 0$ (cum $l < r$ cel puţin una din A_i are probabilitate 0). De asemenea, să observăm că $S_{r+k}^n = \binom{l}{r+k} = 0$ deci membrul drept

$$RHS = \sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}S_{r+k}^n = 0$$

şi concluzionăm că $LHS = RHS = 0$.

Dacă $l \geq r$ atunci membrul drept devine

$$\begin{aligned}RHS &= \sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}S_{r+k}^n = \sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}\binom{l}{r+k}\\ &= \sum_{k=0}^{l-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}\binom{l}{r+k} = \binom{l}{r}\sum_{k=0}^{l-r}(-1)^k\binom{l-r}{k}\end{aligned}$$

unde pentru $r = l$ avem $RHS = 1$ iar pentru $r < l$ avem $RHS = 0$. In acelaşi timp membrul stang este tot egal cu 1 atunci cand $l = r$, pentru că $\mathbb{P}(A_1 \cap A_l) = 1$ şi 0 atunci cand $l > r$. Ultima egalitate rezultă din faptul că in descompunerea evenimentului B apar evenimentele de tipul $\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_r\}} A_i \cap \bigcap_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}} A_j^c$ in care cel puţin unul dintre A_i şi A_j^c este de probabilitate 0. Conform problemei precedente avem rezultatul dorit.

Punctul b) se face in mod similar.