

Proiect 1

Grupele 311, 321

Problemă ¹

Obiectivul acestui exercițiu este de a simula un vector aleator (X_1, X_2) repartizat uniform pe discul unitate $D(1)$ (discul de centru $(0, 0)$ de rază 1). Densitatea acestuia este

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{D(1)}(x_1, x_2).$$

Pentru aceasta vom folosi două metode. O primă metodă este metoda de simulare prin acceptare și respingere. Această metodă este des utilizată pentru generarea unei v.a. repartizate uniform pe o mulțime oarecare E . Metoda constă în generarea unei v.a. X repartizată uniform pe o mulțime $F \supset E$ mai simplă decât E , apoi de a testa dacă X se află în E sau nu. În caz afirmativ, păstrăm X altfel generăm o nouă realizare a lui X pe F .

1. Justificați teoretic că putem simula un vector (cuplu) aleator repartizat uniform pe pătratul $[-1, 1]^1$ plecând de la două v.a. independente repartizate uniform pe segmentul $[-1, 1]$.
2. Prin metoda acceptării și respingerii simulați $N = 1000$ de puncte independente repartizate uniform pe discul unitate $D(1)$. Reprezentați grafic punctele (X_i, Y_i) din interiorul discului unitate cu albastru, și pe celelalte cu roșu.
3. Calculați media aritmetică a distanței care separă cele N puncte de origine. Comparați rezultatul cu media teoretică a variabilei corespunzătoare.

O a doua metodă de simulare a unui punct (X, Y) repartizat uniform pe $D(1)$ constă în folosirea schimbării de variabilă în coordonate polare: $X = R \cos(\Theta)$ și $Y = R \sin(\Theta)$.

4. Plecând de la densitatea cuplului (X, Y) , găsiți densitatea v.a. R și Θ .
5. Simulați $N = 1000$ de puncte prin această metodă și ilustrați grafic aceste puncte (incluzând conturul cercului).

¹Raportul poate fi scris în *Word* sau \LaTeX (pentru ușurință recomand folosirea pachetului *rmarkdown* din *R* - mai multe informații găsiți pe site la secțiune *Link-uri utile*). Toate simulările, figurile și codurile folosite trebuie incluse în raport. Se va folosi doar limbajul *R*.