Tema 5

Soluții

Exercițiul 1

a) Pentru a arăta că T_3 este un estimator nedeplasat este suficient să verificăm că $\mathbb{E}[T_3] = \theta$. Observăm că

$$\mathbb{E}[T_3] = \mathbb{E}[\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2] = \alpha\mathbb{E}[T_1] + (1-\alpha)\mathbb{E}[T_2] = \alpha\theta + (1-\alpha)\theta = \theta.$$

b) Dacă notăm cu $V_3 = V_3(\alpha) = Var(T_3)$, atunci

$$V_3(\alpha) = Var\left(\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2\right) = \alpha^2 Var(T_1) + (1-\alpha)^2 Var(T_2) = \alpha^2 V_1 + (1-\alpha)^2 V_2.$$

Pentru a determina minimul funcției $V_3(\alpha)$ rezolvom ecuația $\frac{dV_3}{d\alpha} = 0$ de unde găsim că $2\alpha V_1 - 2(1-\alpha)V_2 = 0$, prin urmare $\alpha = \frac{V_2}{V_1+V_2}$ este punct critic. Cum $\frac{d^2V_3}{d\alpha^2} = 2(V_1+V_2) > 0$, deci $V_3(\alpha)$ este convexă, deducem că valoarea minimă se atinge pentru $\alpha = \frac{V_2}{V_1+V_2}$ și aceasta este $V_3 = \frac{V_1V_2}{V_1+V_2}$.

c) Să presupunem prin reducere la absurd că ambii estimatori T_1 și T_2 sunt eficienți, ceea ce implică atingerea bornei Rao-Cramer, i.e.

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{nI_1(\theta)}.$$

Cum din punctul b) am găsit că estimatorul T_3, de dispersie minimă are dispersia $V_3 = \frac{V_1V_2}{V_1+V_2}$, deducem că

$$V_3 = \frac{V_1V_2}{V_1+V_2} = \frac{V_1^2}{2V_1} = \frac{V_1}{2} < \frac{1}{nI_1(\theta)},$$

ceea ce contrazice teorema Rao-Cramer și prin urmare T_1 și T_2 nu pot fi simultan eficienți.

Exercițiul 2

a) Folosind metoda verosimilității maxime avem că funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = e^{n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$$

de unde, pentru a găsi maximul, rezolvăm ecuația $\frac{\partial \log(L)}{\partial\theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} = 0$ care conduce la $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$. Cum $\frac{\partial^2 \log(L)}{\partial\theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} < 0, \forall\theta > 0$ concluzionăm că $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă.

Cum pentru o variabilă aleatoare $X \sim Pois(\theta)$ avem că $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \theta$, deducem că $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$, deci $\hat{\theta}_n$ este un estimator nedeplasat, și $Var(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta}{n}$.

Observăm că $MSE_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ din relația $MSE_\theta(\hat{\theta}_n) = Var(\hat{\theta}_n) + b_\theta(\hat{\theta}_n)^2$, de unde găsim că $\hat{\theta}_n$ este un estimator consistent pentru θ.

Pentru a verifica dacă este sau nu eficient trebuie să calculăm Informația lui Fisher care conduce la:

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta) = -n\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f_\theta(X)}{\partial\theta^2}\right] = -n\mathbb{E}\left[-\frac{X}{\theta^2}\right] = \frac{n}{\theta} = \frac{1}{Var(\hat{\theta}_n)}.$$

Deoarece dispersia estimatorului $\hat{\theta}_n$ este egală cu marginea din inegalitatea Rao-Cramer deducem că estimatorul este eficient.

b) Oberservăm că densitatea din problemă corespunde cu a unei normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{\theta})$ iar funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Rezolvând ecuația $\frac{\partial \log(L)}{\partial\theta} = 0$ găsim că $-\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ de unde $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ (momentul empiric de ordin doi). Proprietățile acestui estimator au fost văzute la curs.

c) Observăm că densitatea de repartiție $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}$ corespunde unei repartiții Gamma. Prin metoda verosimilității maxime avem că funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta^{n\alpha}\Gamma(\alpha)^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

de unde logaritmul ei este

$$l(\theta|x_1, \dots, x_n) = \log L(\theta|x_1, \dots, x_n) = -n\alpha\log\theta - n\log\Gamma(\alpha) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

și rezolvând ecuația $\frac{\partial \log(L)}{\partial\theta} = 0$ găsim că $-\frac{n\alpha}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = 0$ de unde $\hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{\alpha}$ iar din faptul că funcția $\frac{\partial \log(L)}{\partial\theta}$ este pozitivă la stânga soluției și negativă la dreapta concluzionăm că $\hat{\theta}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă.

Pentru a determina calitățile acestui estimator vom folosi proprietățile repartiției Gamma și anume că $\mathbb{E}[X] = \alpha\theta$ iar $Var(X) = \alpha\theta^2$. Prin urmare avem că

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta \quad \text{și} \quad Var(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n\alpha}$$

ceea ce arată că estimatorul $\hat{\theta}_n$ este nedeplasat și consistent.

Informația lui Fisher pentru eșantionul $X_1, X_2, \dots, X_n$ de talie n este $I_n(\theta) = nI_1(\theta)$ și cum

$$I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(X)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2 \log f_\theta(X)}{\partial\theta^2}\right]$$

iar $\frac{\partial^2 \log f_\theta(X)}{\partial\theta^2} = \frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2X}{\theta^3}$ găsim că

$$I_1(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^2}.$$

Prin urmare $I_n(\theta) = \frac{n\alpha}{\theta^2}$ de unde deducem că estimatorul $\hat{\theta}_n$ este eficient.

Exercițiul 3

1. Deoarece $\mathbb{E}_\theta[X] = \frac{\theta}{2}$ deducem că estimatorul $\hat{\theta}_1$ pentru θ obținut prin metoda momentelor este $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$.

2. În ceea ce privește $\hat{\theta}_2$ știm că funcția de repartiție a repartiției uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$ este dată de $F_\theta(x) = \frac{x}{\theta}$, pentru $x \in [0, \theta]$. Se poate observa că $\forall x \in [0, 1]$ avem $F_\theta(x\theta) = x$ și $F_\theta^{-1}(x) = x\theta$, prin urmare mediana repartiției $\mathcal{U}[0, \theta]$ este, aplicând definiția, $F_\theta^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$. Astfel putem defini estimatorul $\hat{\theta}_2 = 2\hat{F}_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, unde $\hat{F}_n^{-1}$ este funcția cuantilă asociată funcției de repartiție empirică $\hat{F}_n$ ce corespunde eșantionului de talie n, $X_1, \ldots, X_n$.

Deoarece F_θ este strict crescătoare în $\frac{\theta}{2}$, aplicând teorema de convergență a cuantilelor empirice (a se vedea Laboratorul 5) deducem că

$$\hat{F}_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \overset{a.s.}{\to} \frac{\theta}{2}, \qquad \left(\hat{x}_p(n) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} x_p\right)$$

de unde concluzionăm că $\hat{\theta}_2 \overset{\mathbb{P}}{\to} \theta$, deci $\hat{\theta}_2$ este un estimator consistent pentru θ.

În ceea ce privește estimatorul $\hat{\theta}_3 = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ observăm că funcția de repartiție a acestuia este

$$F_{\hat{\theta}_3}(x) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq x\right)^n = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & x \in [0, \theta] \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

și în plus, cum $\hat{\theta}_3 \leq \theta$ a.s. avem pentru $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_3 - \theta| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\theta - \hat{\theta}_3 > \epsilon\right) = F_{\hat{\theta}_3}(\theta - \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Altfel spus $\hat{\theta}_3 \overset{\mathbb{P}}{\to} \theta$ și $\hat{\theta}_3$ este un estimator consistent pentru θ.

3. Conform *Teoremei Limită Centrale* avem că

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta) \overset{d}{\to} \mathcal{N}\left(0, 4Var_\theta(X)\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right).$$

Pentru estimatorul $\hat{\theta}_2$ observăm că F_θ este continuă pe $[0, \theta]$, prin urmare derivabilă pe acest interval și derivata sa este $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$ de unde avem că $f_\theta\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\theta} > 0$. Folosind încă o dată teorema de convergență a cuantilelor empirice (a se vedea Laboratorul 5) deducem că

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\theta}{2}\right) \overset{d}{\to} \mathcal{N}\left(0, \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\theta^{-2}}\right), \qquad \left(\sqrt{n}(\hat{x}_p(n) - x_p) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f(x_p)^2}\right)\right)$$

de unde găsim că $\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta) \overset{d}{\to} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right)$.

Pentru final să studiem convergența estimatorului $\hat{\theta}_3$. Pentru că nu avem un rezultat de tipul limită centrală pentru $\hat{\theta}_3$, ne uităm la convergența simplă a funcției sale de repartiție și avem că pentru $x \in \mathbb{R}$ (alegerea lui n de mai jos în loc de $\sqrt{n}$ apare din analiză)

$$\mathbb{P}\left(n(\theta - \hat{\theta}_3) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_3 \geq \theta - \frac{x}{n}\right) = 1 - F_{\hat{\theta}_3}\left(\theta - \frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 1, & x \geq n\theta \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n, & x \in [0, n\theta] \end{cases}$$

Observăm că

$$\left(1-\frac{x}{n\theta}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{x}{n\theta}\right)} \sim e^{-\frac{nx}{n\theta}} \qquad \text{(am folosit } \log(1-x)\sim x \text{ pentru } x\to 0\text{)}$$

și că

$$\mathbf{1}_{[0,n\theta]}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad \text{și} \quad \mathbf{1}_{[n\theta,\infty)}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de unde obținem că

$$\mathbb{P}\left(n(\theta-\hat{\theta}_3)\leq x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

altfel spus $n(\theta-\hat{\theta}_3) \xrightarrow{d} \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

În concluzie $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ sunt asimptotic normal repartizați pe când $\hat{\theta}_3$ este repartizat exponențial. Dacă folosim rezultatul de la curs (atunci când am vorbit de metoda Delta) avem că toți cei trei estimatori se încadrează în contextul existenței unui șir $v_n\to\infty$ astfel ca

$$v_n(X_n-a) \xrightarrow{d} X$$

de unde (plin aplicarea *Teoremei lui Slutsky*) rezulta că $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, ceea ce conduce la consistența celor trei estimatori (acest rezultat l-am obținut și la punctul 2.).

4. Observăm că viteza de convergență pentru $\hat{\theta}_3$ este de $\frac{1}{n}$, pe când cea pentru $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ este de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Prin urmare preferăm pe $\hat{\theta}_3$. De asemenea putem observa că estimatorul $\hat{\theta}_1$ are o variantă asimptotică mai mică decât cea a lui $\hat{\theta}_2$, deci între cei doi estimatori l-am alege pe $\hat{\theta}_1$.

5. Pentru a găsi un interval de încredere pentru θ vom folosi estimatorul cel mai bun, $\hat{\theta}_3$. Știm că $\mathbb{P}(\hat{\theta}_3\leq\theta)=1$ iar $\mathbb{P}(\hat{\theta}_3\leq x)=\frac{x^n}{\theta^n}$ pentru $x\in[0,\theta]$. Astfel avem că

$$\mathbb{P}(x\leq\hat{\theta}_3\leq\theta) = 1-\frac{x^n}{\theta^n}$$

și considerând $\alpha\in[0,1]$ astfel ca $1-\frac{x^n}{\theta^n}=1-\alpha$ deducem că $x=\theta\alpha^{\frac{1}{n}}$ și

$$\mathbb{P}\left(\theta\alpha^{\frac{1}{n}}\leq\hat{\theta}_3\leq\theta\right)=1-\alpha$$

adică

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_3\leq\theta\leq\frac{\hat{\theta}_3}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right)=1-\alpha.$$

În concluzie, un interval de încredere pentru θ de nivel de încredere $1-\alpha$ este $\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_3\alpha^{-\frac{1}{n}}\right]$.

Exercițiul 4

Pentru a determina un interval de încredere de nivel de încredere $1-\alpha$ pentru proporția p de intenții de vot pentru candidatul Bugs Bunny la alegerile parlamentare să observăm că suntem în contextul unui interval de încredere pentru o proporție. Fie $X_1,\dots,X_n$ variabilele aleatoare care descriu intenția de vot a celor $n=100$ de canditați eșantionați, cu $X_i\sim\mathcal{B}(p)$.

Am văzut că un interval de încredere, de tip Wald, pentru p este dat de

$$IC_1^{1-\alpha}(p) = \left[\hat{p}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}, \hat{p}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}\right]$$

unde $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă a lui p iar $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ este cuantila de ordin $1-\frac{\alpha}{2}$ a repartiției normale standard. Înlocuind cu valorile din ipoteza problemei, $n = 100$, $\alpha = 0.05$ și respectiv $\sum_{i=1}^n X_i = 51$, găsim că

$$IC_1^{0.95}(p) = [0.412, 0.607].$$

În cazul în care am fi avut un eșantion de talie $n = 1000$ și 510 alegători (pentru a păstra proporția $\hat{p}_{1000} = 0.51$) ar fi declarat că îl preferă pe candidatul Bugs Bunny atunci intervalul ar fi devenit

$$IC_1^{0.95}(p) = [0.479, 0.540].$$

Am văzut la curs că un alt interval de încredere pentru p, de nivel de încredere $1-\alpha$, se obține rezolvând după p inecuația din interiorul probabilității

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

care conduce la

$$IC_2^{1-\alpha}(p) = \left[\frac{\hat{p}_n + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}}{1+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}} - \frac{1}{1+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\sqrt{\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\hat{p}_n(1-\hat{p}_n) + \frac{z^4_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n^2}}, \frac{\hat{p}_n + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}}{1+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}} + \frac{1}{1+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\sqrt{\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\hat{p}_n(1-\hat{p}_n) + \frac{z^4_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n^2}}\right]$$

iar numeric pentru $n = 100$

$$IC_2^{0.95}(p) = [0.413, 0.605]$$

iar pentru $n = 1000$

$$IC_2^{0.95}(p) = [0.479, 0.540].$$

Exercițiul 5

Pentru a construi un interval de încredere de nivel de încredere $1-\alpha$ pentru media μ a unei populații normale de abatere standard necunoscută σ vom folosi statistica $T_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{S_n}$ care știm că este repartizată t-Student cu $n-1$ grade de libertate.

Un interval de încredere bilateral pentru μ este

$$IC_1^{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x}_n - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

care pentru $n = 100$, $\alpha = 0,01$, $\bar{x}_n = 158$ și $s_n = 30$ devine

$$IC_1^{0.99}(\mu) = \left[158 - 2.626\frac{30}{\sqrt{100}}, 158 + 2.626\frac{30}{\sqrt{100}}\right] = [150.12, 165.87]$$

și cum valoarea anunțată de producător este în afara acestui interval cocluzionăm că reclama este falsă.

Dacă ne interesăm la un interval de încredere de nivel de încredere $1-\alpha$ unilateral spre stânga atunci am avea că

$$\mathbb{P}\left(T_n > t\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} > t\right) = 1 - \alpha$$

de unde

$$IC_2^{1-\alpha}(\mu) = \left[0, \bar{x}_n - t_{\alpha}^{n-1}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right] = \left[0, 158 + 2,364\frac{30}{\sqrt{100}}\right] = [0, 165, 09]$$

prin urmare afirmația producătorului este falsă.

Exercițiul 6

Cum măsurătorile pot fi presupuse ca un eșantion de talie n, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dintr-o populație $\mathcal{N}(\mu = 20, \sigma^2)$ considerăm ca estimator al varianței estimatorul

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \mu^2$$

iar din $\frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ deducem că un interval de încredere bilateral pentru σ^2 de nivel de încredere $1-\alpha$ este

$$IC_1^{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Înlocuind cu valorile din ipoteză, $n = 100$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 20$ și $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40011$ găsim că

$$IC_1^{0.95}(\sigma^2) = \left[\frac{100\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{100,0.975}}, \frac{100\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{100,0.025}}\right] = \left[\frac{100 \cdot 0.11}{129.56}, \frac{100 \cdot 0.11}{74.22}\right] = [0.0849, 0.1482].$$

Dacă ne uităm după un interval de încredere unilateral, de nivel de încredere $1-\alpha$, la stânga atunci

$$IC_2^{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[0, \frac{n\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{n,\alpha}}\right] = \left[0, \frac{100 \cdot 0.11}{77.929}\right] = [0, 0.1411].$$

Exercițiul 7

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eșantionul de talie $n = 200$ din populația $Pois(\theta)$ care descriu numărul de blocaje de trafic mai mari de un minut pe linia tramvaiului 41. Pentru a găsi un interval de încredere pentru θ să ne aducem aminte că estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ este $\bar{X}_n$ și aplicând Teorema Limită Centrală avem

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Un interval de încredere de tip Wald pentru θ, de nivel de încredere $1-\alpha$, este obținut prin înlocuirea la numitor a lui θ cu estimatorul său $\bar{X}_n$, deci

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\bar{X}_n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

de unde

$$IC_{Wald}^{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\right].$$

Înlocuind cu valorile din ipoteză, $n = 200$, $\alpha = 0.05$ și $\bar{x}_{200} = 3$ obținem $IC_{Wald}^{0.95}(\theta) = [2.759, 3.240]$.

Un alt interval de încredere pentru θ, de nivel de încredere $1-\alpha$, se poate obține rezolvând inecuația din probabilitate

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sqrt{\theta}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

după θ.

În acest caz găsim că

$$IC_2^{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} - \sqrt{\frac{\bar{X}_n z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^4}{4n^2}}, \bar{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} + \sqrt{\frac{\bar{X}_n z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^4}{4n^2}}\right]$$

și înlocuind cu valorile din ipoteză rezultă $IC_2^{0.95}(\theta) = [2.769, 3.249]$.