

# Examen

11 Februarie 2018



Timp de lucru 2h. Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Aveți 3 subiecte, fiecare valorând 10 puncte. Mult succes !

## Exercițiul 1

Fie  $X$  o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde  $\theta \in (0, 1)$  un parametru necunoscut și  $A \in \mathbb{R}$  este o constantă.

1. Determinați constanta  $A$  și calculați  $\mathbb{E}[X]$  și  $Var(X)$ .

Dorim să estimăm pe  $\theta$  plecând de la un eșantion  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de talie  $n$  din populația dată de repartiția lui  $X$ .

2. Determinați estimatorul  $\tilde{\theta}$  a lui  $\theta$  obținut prin metoda momentelor și calculați  $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$ .
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă  $\hat{\theta}$  a lui  $\theta$  și verificați dacă acesta este bine definit.
4. Studiați consistența estimatorului  $\tilde{\theta}$  și determinați legea lui limită.

## Exercițiul 2

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un eșantion de talie  $n$  din populația  $f_\theta$  unde

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty)}(x)$$

cu  $\theta > 0$ , parametru necunoscut.

1. a) Determinați repartiția lui  $\frac{X_1}{\theta} - 1$ .  
b) Determinați estimatorul  $\tilde{\theta}$  a lui  $\theta$  obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestuia.  
c) Găsiți legea limită a lui  $\tilde{\theta}$ .
2. a) Determinați estimatorul  $\hat{\theta}$  a lui  $\theta$  obținut prin metoda verosimilității maxime.  
b) Calculați eroarea pătratică medie a lui  $\hat{\theta}$  și verificați dacă estimatorul este consistent.  
c) Construiți un interval de încredere pentru  $\theta$  de nivel de încredere  $1 - \alpha$ .  
d) Pe care dintre cei doi estimatori îl preferați ?

### Exercițiul 3

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un eșantion de talie  $n$  din populația  $f_\theta$  unde

$$f_\theta(x) = \frac{3}{(x-\theta)^4} \mathbf{1}_{[1+\theta, +\infty)}(x)$$

1. a) Calculați  $\mathbb{E}_\theta[X_1]$ ,  $\text{Var}_\theta(X_1)$  și funcția de repartiție  $F_\theta(x)$  a lui  $X_1$ .  
b) În cazul în care  $\theta = 2$  dorim să generăm 3 valori aleatoare din repartiția lui  $X \sim f_\theta(x)$ . Pentru aceasta dispunem de trei valori rezultate din repartiția uniformă pe  $[0, 1]$  :  $u_1 = 0.25$ ,  $u_2 = 0.4$  și  $u_3 = 0.5$ . Descrieți procedura.
2. a) Determinați estimatorul  $\hat{\theta}_n^M$  a lui  $\theta$  obținut prin metoda momentelor și calculați eroarea pătratică medie a acestui estimator. Care este legea lui limită ?  
b) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru  $\theta$ .
3. a) Exprimați în funcție de  $\theta$  mediana repartiției lui  $X_1$  și plecând de la aceasta găsiți un alt estimator  $\hat{\theta}_n^Q$  al lui  $\theta$ .  
b) Determinați legea lui limită a lui  $\hat{\theta}_n^Q$  și arătați că, asimptotic, acesta este mai bun decât  $\hat{\theta}_n^M$ .  
c) Găsiți un interval de încredere asimptotic de nivel de încredere de 95% pentru  $\theta$ .
4. a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă  $\hat{\theta}_n^{VM}$  a lui  $\theta$  și verificați dacă este deplasat.  
b) Calculați funcția de repartiție a lui  $\hat{\theta}_n^{VM} - \theta$ .  
c) Pe care dintre cei trei estimatori îl preferați ?