Tema 2

Exerciţiul 1

Fie $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție strict crescătoare. Arătați că

$$\mathbb{P}(|X| \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)}$$
, pentru $a > 0$.

Exercițiul 2

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in \mathbb{N} , așa incat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toți $n \in \mathbb{N}$.

- a) Arătați că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmații sunt echivalente:
 - i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
 - ii) Pentru toți $n \geq 1$ ave
m $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$
- b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinați
 - i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.
 - ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.
- c) Dacă $X \sim Geom(p), \ 0 calculați <math>\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right].$

Exercițiul 3

Arătaţi că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb N$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \ge 1} \mathbb{P}(X \ge n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \ge x) \, dx.$$

Exercițiul 4

a) Fie X o variabilă repartizată exponențial (de parametru α). Arătați că are loc următoarea relatție (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relația (1). Arătați că X este repartizată exponențial.

Grupele: 301, 311, 321

Exerciţiul 5

Un proces Bernoulli de parametru p este un şir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n\geq 1}$ cu $X_n\in\{0,1\}$ şi $\mathbb{P}(X_n=1)=p$.

- a) Arătați că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n,p)$ și calculati media și varianța acesteia.
- b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ și M cel mai mare număr natural așa incat $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$. Găsiți distribuțiile v.a. L și M.
- c) Arătați că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M], \, \mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ și calculați Cov[L,M].
- d) Calculați $\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(M=n\,|\,L=k).$

Grupele: 301, 311, 321 Pagina 2