Tema 3

Solutii

Exerciţiul 1

a) In acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ inseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilităţii totale avem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2b) &= \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b)\\ &= \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}\\ &= \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1b|2b) &= \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)}\\ &= \frac{\frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.\end{aligned}$$

c) Folosim inducţie. Pentru $n = 2$ am văzut că propoziţia este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ şi vrem să arătăm că relaţia rămane adevărată şi pentru $k = n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducţie ($\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducţie avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d]$. Inlucuind această relaţie in expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obţinem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilităţii totale că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\dots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\ &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\ &+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\dots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\ &+ \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\dots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.\end{aligned}$$

Observăm că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}\\ &= \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\to 1.\end{aligned}$$

Exerciţiul 2

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i,T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_1=1,N_2=1) = \mathbb{P}((T_1,T_2)) = \frac{1}{10},\\ &\mathbb{P}(N_1=1,N_2=2) = \mathbb{P}((T_1,T_3)) = \frac{1}{10},\\ &\mathbb{P}(N_1=1,N_2=3) = \mathbb{P}((T_1,T_4)\cup(T_1,T_5)) = \frac{2}{10},\ (N_1=1 \text{ şi } 2,\ 3,\ 4^e \text{ OK deci 5 e defect})\\ &\mathbb{P}(N_1=2,N_2=1) = \mathbb{P}((T_2,T_3)) = \frac{1}{10},\\ &\mathbb{P}(N_1=2,N_2=2) = \mathbb{P}((T_2,T_4)\cup(T_2,T_5)) = \frac{2}{10},\ (N_1=2 \text{ şi } N_2=2 \text{ sau 4 sau 5 defecte})\\ &\mathbb{P}(N_1=3,N_2=1) = \mathbb{P}((T_3,T_4)\cup(T_3,T_5)) = \frac{2}{10},\ (N_1=3 \text{ şi } N_2=1 \text{ sau 4 sau 5 defecte})\\ &\mathbb{P}(N_1=3,N_2=0) = \mathbb{P}((T_4,T_5)) = \frac{1}{10},\ (N_1=3 \text{ şi primele 3 OK atunci 4 şi } 5^e \text{ defecte})\end{aligned}$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$.

Exerciţiul 3

1. Cum f este densitate ea verifică relaţia $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$ deci $\iint_{\mathbb{R}^2} c\mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$ de unde $c \times (\pi R^2) = 1$ şi $c = \frac{1}{\pi R^2}$.

2. Legile marginale ale lui X_1 şi X_2 sunt determinate de următoarele formule: $f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2$ şi $f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_1$. Avem

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{R^2 - x_1^2}, \sqrt{R^2 - x_1^2}]}(x_2) \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1)\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1) \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2 = \frac{2\sqrt{R^2 - x_1^2}}{\pi R^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1) \end{aligned}$$

şi in mod similar găsim

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)\, dx_1 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{R^2 - x_2^2}, \sqrt{R^2 - x_2^2}]}(x_1) \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2)\, dx_1 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2) \int_{-\sqrt{R^2 - x_2^2}}^{\sqrt{R^2 - x_2^2}} dx_1 = \frac{2\sqrt{R^2 - x_2^2}}{\pi R^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2). \end{aligned}$$

3. Observăm că distanţa de la punctul (X_1, X_2) la $(0, 0)$ este $L = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$. Pentru a găsi probabilitatea $\mathbb{P}(L \leq a)$putem folosi atat o metodă geometrică cat şi una probabilistă.

   Consideraţii geometrice: cum (X_1, X_2) este uniform distribuită pe discul $D(R)$ atunci

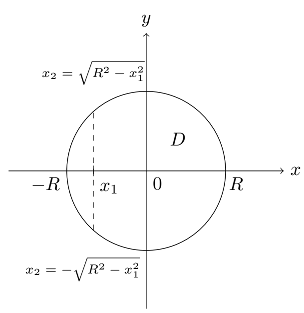
$$\mathbb{P}(L \leq a) = \mathbb{P}((X_1, X_2) \in D(a)) = \frac{\mathcal{A}(D(a))}{\mathcal{A}(D(R))} = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} = \frac{a^2}{R^2}.$$

Consideraţii probabiliste:

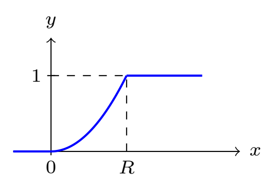
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L \leq a) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{L\leq a\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_1^2+X_2^2\leq a^2\}}\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{D(R)}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq R^2\}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}\cap\{x_1^2+x_2^2\leq R^2\}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \frac{\pi a^2}{\pi R^2}\\
&= \frac{a^2}{R^2}.
\end{aligned}$$

Am văzut că $F_L(a) = \mathbb{P}(L \leq a) = \frac{a^2}{R^2}$, $\forall a \in [0,R]$ de unde găsim că densitatea este $f_L(a) = \frac{d}{da}F_L(a) = \frac{2a}{R^2}\mathbf{1}_{[0,R]}(a)$. Media se calculează acum uşor

$$\mathbb{E}[L] = \int_{\mathbb{R}} a f_L(a)\,da = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{a^2}{R^2}\mathbf{1}_{[0,R]}(a)\,da = \frac{2}{R^2}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^R = \frac{2R}{3}.$$



(a)



(b)

Figure 1: Reprezentarea grafică a lui D şi funcţia de repartiţie F_L