

Proiect

Grupele 311, 312, 321, 322

Notă: Raportul poate fi scris în *Microsoft Word* sau \LaTeX (pentru ușurință recomand folosirea pachetului *markdown* din *R* - mai multe informații găsiți pe site la secțiunea *Link-uri utile*). Toate simulările, figurile și codurile folosite trebuie incluse în raport. Se va folosi doar limbajul *R*.

1 Problema 1

Generați 100000 de variabile aleatoare folosind **metoda transformării inverse** pentru repartițiile definite mai jos:

- a) Repartiția logistică are densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}{\beta \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\right)^2}$ și funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}.$$

- b) Repartiția Cauchy are densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ și funcția de repartiție $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Comparați rezultatele obținute cu valorile date de funcțiile **rlogis** și respectiv **rcauchy** (funcțiile de repartiție predefinite în *R* pentru repartițiile logistică și respectiv Cauchy). Ilustrați grafic aceste rezultate.

2 Problema 2

Folosiți **metoda respingerii** pentru a genera observații din densitatea de probabilitate definită prin $f(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2}} [\sin(6x)^2 + 3\cos(x)^2 \sin(4x)^2 + 1]$ ¹ parcurgând pașii următori:

- a) Reprezentați grafic $f(x)$ și arătați că aceasta este mărginită de $Mg(x)$ unde $g(x)$ este densitatea de probabilitate a repartiției normale standard. Determinați o valoare potrivită pentru constanta M , chiar dacă nu este optimă. (**Indiciu:** Folosiți funcția **optimise** din *R*).
- b) Generați 25000 de observații din densitatea de mai sus folosind metoda respingerii.
- c) Deduceți, pornind de la rata de acceptare a acestui algoritm, o aproximare a *constantei de normalizare* a lui $f(x)$, apoi comparați histograma valorilor generate cu reprezentarea grafică a lui $f(x)$ normalizată.

3 Problema 3

Construiți două funcții în *R* **frcpois** și respectiv **frcexp** care să calculeze **marginea inferioară Rao-Cramer (MIRC)** pentru varianța estimatorilor parametrilor repartițiilor *Poisson* și respectiv *Exponențială* pentru un eșantion de dimensiune n (generați voi un asemenea eșantion într-o manieră corespunzătoare și folosiți-l în apelul funcției!).

¹Notăția \propto înseamnă că $f(x)$ este proporțională cu expresia din dreapta

4 Problema 4

Folosind funcția `check.convergence` din pachetul `R ConvergenceConcepts` verificați dacă pentru următoarele exemple sunt verificate convergența în lege (în distribuție), în probabilitate și respectiv convergența aproape sigură. Interpretați și comentați rezultatele obținute.

- Fie X_1, X_2, \dots, X_n variabile aleatoare i.i.d. $X_i \sim \text{Beta}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ și $X \sim \text{Bin}(1, \frac{1}{2})$. Verificați dacă $X_n \xrightarrow{d} X$. Dar în cazul în care $X_i \sim \text{Beta}(\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$ cu $a > 0, b > 0$?
- Fie X_1, X_2, \dots, X_n variabile aleatoare i.i.d. uniform repartizate pe mulțimea $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ și $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Verificați dacă $X_n \xrightarrow{d} X$. Dar $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$?
- Fie X_1, X_2, \dots, X_n variabile aleatoare i.i.d. Notăm cu m și respectiv M infimumul și respectiv supremumul mulțimii valorilor pe care le poate lua X_1 , i.e. $\mathbb{P}(m \leq X_1 \leq M) = 1$, $\mathbb{P}(X_1 < a) > 0$ și $\mathbb{P}(X_1 > b) > 0$ pentru $a > m$ și respectiv $b < M$. Verificați că $X_{(1)} \xrightarrow{a.s.} m$ și că $X_{(n)} \xrightarrow{a.s.} M$.

5 Problema 5

- Pentru repartițiile *logistică* și respectiv *Cauchy* (vezi problema 1) construiți funcția de verosimilitate pentru parametrul μ considerând că parametrii β și respectiv σ sunt cunoscuți (alegeți valori potrivite pentru aceștia).
- Reprezentați grafic funcțiile de verosimilitate pentru cele două cazuri și folosind funcția `optimise` determinați o estimare pentru μ în baza unui eșantion de dimensiune 1000 pe care l-ați construit în prealabil. Explicați modul în care ați generat valorile din eșantion. Comentați și interpretați rezultatele.