Tema 1

Soluții

Exerciţiul 1

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depăşit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1-\mathbb{P}(A^c|B^c)]\,(1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01\times 0.995} \approx 0.332.$$

2. Căutăm p aşa incat $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde

$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995\times 0.95}{0.995\times 0.95 + 0.05\times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99\times 0.3 + 0.01\times 0.7 \approx 0.304$ şi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil in această situaţie.

Exerciţiul 2

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 5$\}$
   - $B_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 7$\}$

   Evenimentul E_n se scrie

$$E_n = (A_1^c\cap B_1^c)\cap(A_2^c\cap B_2^c)\cap\cdots\cap(A_{n-1}^c\cap B_{n-1}^c)\cap A_n.$$

   Aplicand independenţa avem că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c\cap B_1^c)\cap(A_2^c\cap B_2^c)\cap\cdots\cap(A_{n-1}^c\cap B_{n-1}^c)\cap A_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c\cap B_1^c)\times\mathbb{P}(A_2^c\cap B_2^c)\times\cdots\times\mathbb{P}(A_{n-1}^c\cap B_{n-1}^c)\times\mathbb{P}(A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_1^c\cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

   Observăm că spaţiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j)|1\le i,j\le 6\}$ şi probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obţinem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 şi nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c\cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situaţiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

In concluzie, probabilitatea evenimentului

$$A = \{\text{suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2 şi nici suma 7 iar in a n-a aruncare a apărut suma 2* şi C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

şi probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) şi $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}\frac{1}{36}\\ &= \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36}\frac{1}{1-\frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Exerciţiul 3

Dacă numărul de maşini vandute intr-un an de reprezentanţă este mai mare decat N, $X \geq N$, atunci caştigul administratorului este $G = aN$. Dacă $X < N$, atunci administratorul vinde X maşini şi ii răman $N - X$, deci caştigul devine $G = aX - b(N - X)$. Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N \\ aX - b(N-X) & \text{dacă } X < N \end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1}[ax - b(N-x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză ştim că toţi intregii $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sunt de aceeaşi probabilitate, mai exact ştim că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde acelasi număr de maşini cu aceeaşi probabilitate - in realitate nu este cazul !). Obţinem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= aN\sum_{x=N}^{n}\frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N}\frac{(a+b)x - bN}{n+1}\\ &= \frac{aN(n-N+1)}{n+1} + (a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1}\\ &= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de maşini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuaţia $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

Exerciţiul 4

Avem că legea lui X este uniformă pe mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ iar din definiţia lui $Y = X(7-X)$ observăm că $Y \in \{6, 10, 12\}$ cu $\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(Y=10) = \mathbb{P}(Y=12) = \frac{1}{3}$. Obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6+10+12) = \frac{28}{3}\\
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36+100+144) = \frac{280}{3}\\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.
\end{aligned}$$

Variabila aleatoare M_n ia valori in aceeaşi mulţime ca şi Y, $M_n \in \{6, 10, 12\}$. Pentru a găsi legea lui M_n trebuie să calculăm $\mathbb{P}(M_n = x)$ cu $x \in \{6, 10, 12\}$.

Pentru evenimentul $\{M_n = 6\}$ este necesar ca toate variabilele $Y_i = 6$ deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă $\{M_n = 12\}$ atunci cel puţin unul din evenimentele $\{Y_i = 12\}$ se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula $\mathbb{P}(M_n = 10)$ (fără a face diferenţa $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$) observăm că realizarea evenimentului $\{M_n = 10\}$ implică realizarea tuturor evenimentelor $\{Y_i \leq 10\}$ dar excludem evenimentul in care toţi $\{Y_i = 6\}$. Astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Exerciţiul 5

Putem presupune că $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ deoarece in caz contrar am avea $\infty = \mathbb{E}[|Y-a|] \leq \mathbb{E}[|Y-b|] = \infty$.

Să considerăm cazul in care $m \leq a \leq b$. Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Y-b|]-\mathbb{E}[|Y-a|] &= \mathbb{E}[(b-Y)\mathbf{1}_{\{Y\leq b\}}]+\mathbb{E}[(Y-b)\mathbf{1}_{\{Y>b\}}]-\mathbb{E}[(a-Y)\mathbf{1}_{\{Y\leq a\}}]-\mathbb{E}[(Y-a)\mathbf{1}_{\{Y>a\}}]\\ &= (b-a)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y\leq a\}}]+\mathbb{E}[(a+b-2Y)\mathbf{1}_{\{a<Y\leq b\}}]+(a-b)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y\geq b\}}]\\ &= 2\mathbb{E}[(b-Y)\mathbf{1}_{\{a<Y\leq b\}}]+(b-a)\left[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y\leq a\}}]-\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y>a\}}]\right]\\ &\geq (b-a)\left[2\mathbb{P}(Y\leq a)-1\right]\geq 0\end{aligned}$$

deoarece $\mathbb{P}(Y\leq a)\geq \mathbb{P}(Y\leq m)\geq \frac{1}{2}$. Dacă $m\geq a\geq b$ atunci $-m\leq -a\leq -b$ şi $-m$ este mediana lui $-Y$ de unde avem concluzia.

Exerciţiul 6* [1]

Fie partiţia $\Pi=\{A_1^{\varepsilon_1}\cap A_2^{\varepsilon_2}\cap\cdots\cap A_n^{\varepsilon_n}\,|\,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=0,1\}$, unde $A^{\varepsilon}=A$ dacă $\varepsilon=1$ şi $A^{\varepsilon}=A^c$ dacă $\varepsilon=0$. Atunci $\mathcal{F}=\mathcal{A}(\{A_1,\dots,A_n\})$ (algebra generată de $\{A_1,\dots,A_n\}$) coincide cu algebra generată de Π, prin urmare orice element din $\mathcal{F}$ poate fi scris ca o reuniune finită (şi disjunctă) de elemente din Π (De ce?). Astfel, pentru $B_1,\dots,B_m\in\mathcal{F}$ există $\alpha_1,\dots,\alpha_{m'}\in\Pi$ aşa incat să avem

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbb{P}(B_i)=\sum_{i=1}^{m'}c_i'\mathbb{P}(\alpha_i').$$

Este evident că implicaţia $a)\implies b)$ este adevărată. Reciproc, să presupunem că inegalitatea dorită este adevărată pentru orice măsură de probabilitate cu $\mathbb{P}(A_i)=0$ sau 1 pentru toţi $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Avem deci că

$$\sum_{i=1}^{m'}c_i'\mathbb{P}(\alpha_i')\geq 0 \tag{1}$$

pentru toate măsurile de probabilitate cu $\mathbb{P}(A_i)=0$ sau 1, $\forall\, i\in\{1,2,\dots,n\}$, prin urmare $\mathbb{P}(\alpha_i)=0$ sau 1 pentru toate elementele α_i din Π (toţi atomii). Alegand P aşa incat $\mathbb{P}(\alpha_i)=1$, pentru un i fixat, şi $\mathbb{P}(\beta)=0$ pentru $\beta\in\Pi$, $\beta\neq\alpha$ [2] avem $c_i'\geq 0$ $(i=1,2\dots,m')$. Asta garantează că relaţia (1) rămane valabilă pentru orice măsură de probabilitate.

Exerciţiul 7*

Conform rezultatului demonstrat in exerciţiul anterior, este suficient să verificăm relaţiile din enunţ pentru măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ care verifică $\mathbb{P}(A_1)=\cdots=\mathbb{P}(A_l)=1$ şi $\mathbb{P}(A_{l+1})=\cdots=\mathbb{P}(A_n)=0$, cu $0\leq l\leq n$.

Prin urmare, fie $0\leq l\leq n$ şi $\mathbb{P}$ care verifică relaţiile de mai sus. Dacă $l=0$ atunci cele două formule sunt evident adevărate $(0=0)$. Să presupunem că $l\geq 1$ şi că $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$, $k\geq 1$. Dacă $i_k\leq l$ atunci $\mathbb{P}(A_{i_1})=\mathbb{P}(A_{i_1})=\cdots=\mathbb{P}(A_{i_k})=1$ de unde avem că

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2})=\mathbb{P}(A_{i_1})+\mathbb{P}(A_{i_2})-\mathbb{P}(A_{i_1}\cup A_{i_2})=2-1=1$$

şi prin inducţie se poate arăta că $\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=1$ (altfel se poate folosi inegalitatea lui Bonferroni). Dacă $i_k\geq l+1$ atunci $0\leq\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\leq\mathbb{P}(A_{i_k})=0$. Prin urmare $\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=0$ sau 1 după cum $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ este sau nu submulţime a lui $\{1,2,\cdots,l\}$. Obţinem astfel că suma S_k^n este egală cu numărul de submulţimi $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,l\}$, adică $S_k^n=\binom{l}{k}$.

Pentru a arăta identitatea de la punctul a) să observăm că pentru $l<r$ avem $V_n^r=0$, pentru că $LHS=V_n^r=\mathbb{P}(B)$ unde

[1] Exerciţiile cu * sunt suplimentare şi nu sunt obligatorii
[2] putem găsi o asemenea măsură de probabilitate deoarece odată ce am ales $\mathbb{P}(\alpha_i)=1$ am ales şi valorile pentru $\mathbb{P}(A_j)$

$$\begin{aligned}B &= \{\text{exact } r \text{ dintre } A_1, \dots, A_n \text{ se realizează }\}\\ &= \bigcup_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n}\left[\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_r\}} A_i \cap \bigcap_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}} A_j^c\right]\end{aligned}$$

iar $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_r\}} A_i \cap \bigcap_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}} A_j^c\right) = 0$ (cum $l < r$ cel puţin una din A_i are probabilitate 0). De asemenea, să observăm că $S_{r+k}^n = \binom{l}{r+k} = 0$ deci membrul drept

$$RHS = \sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}S_{r+k}^n = 0$$

şi concluzionăm că $LHS = RHS = 0$.

Dacă $l \geq r$ atunci membrul drept devine

$$\begin{aligned}RHS &= \sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}S_{r+k}^n = \sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}\binom{l}{r+k}\\ &= \sum_{k=0}^{l-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}\binom{l}{r+k} = \binom{l}{r}\sum_{k=0}^{l-r}(-1)^k\binom{l-r}{k}\end{aligned}$$

unde pentru $r = l$ avem $RHS = 1$ iar pentru $r < l$ avem $RHS = 0$. In acelaşi timp membrul stang este tot egal cu 1 atunci cand $l = r$, pentru că $\mathbb{P}(A_1 \cap A_l) = 1$ şi 0 atunci cand $l > r$. Ultima egalitate rezultă din faptul că in descompunerea evenimentului B apar evenimentele de tipul $\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_r\}} A_i \cap \bigcap_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}} A_j^c$ in care cel puţin unul dintre A_i şi A_j^c este de probabilitate 0. Conform problemei precedente avem rezultatul dorit.

Punctul b) se face in mod similar.