Tema 6

Exerciţiul 1

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n de lege

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}$$

unde θ este un parametru pozitiv. Determinați estimatorii obținuți prin metoda momentelor și prin metoda verosimilității maxime și studiați proprietățile acestora.

Exerciţiul 2

Să se estimeze, prin metoda verosimilității maxime și prin metoda momentelor, parametrul p al unei repartiții Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ plecând de la eșantionul de talie 6: $0, 1, 1, 0, 1, 1$.

Exerciţiul 3

Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă a parametrului p al unei repartiții binomiale $\mathcal{B}(m, p)$, m fiind cunoscut. Să se afle calitățile estimatorului astfel obșinut.

Exerciţiul 4

Fie X o v.a. de lege Pareto de densitate:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x^\alpha}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

unde $\alpha > 2$ este un parametru necunoscut. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă plecând de la un eșantion de talie n și arătați că acesta este consistent.

Exerciţiul 5

Numărul de probe necesar pentru a obține pentru prima dată un *succes* urmează legea de probabilitate geometrică de parametru $\theta \in (0, 1)$ necunoscut:

$$\mathbb{P}(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1},\ k \geq 1.$$

Un eșantion de talie 4 din această populație este $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$ și $x_4 = 10$.

a) Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă al lui θ.

b) Dorind să estimăm $g(\theta) = \frac{3}{\theta}$, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate și să se stabilească dacă este consistent.

Exerciţiul 6

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație uniformă pe $[0, \theta]$, $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ.

b) Este acest estimator nedeplasat ? În caz negativ construiți unul plecând de la acesta.

c) Calculați varianța estimatorului determinat.