Laborator 6

Proprietăți ale estimatorilor

Obiectivul acestui laborator este de a ilustra noțiunea de consistență a unui estimator precum și de a compara mai mulți estimatori.

1 Exemplu de comparare a trei estimatori

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație normală de medie μ și variantă σ^2. Atunci

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\mu}_2 = M_n \,(\text{mediana}), \quad \hat{\mu}_3 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

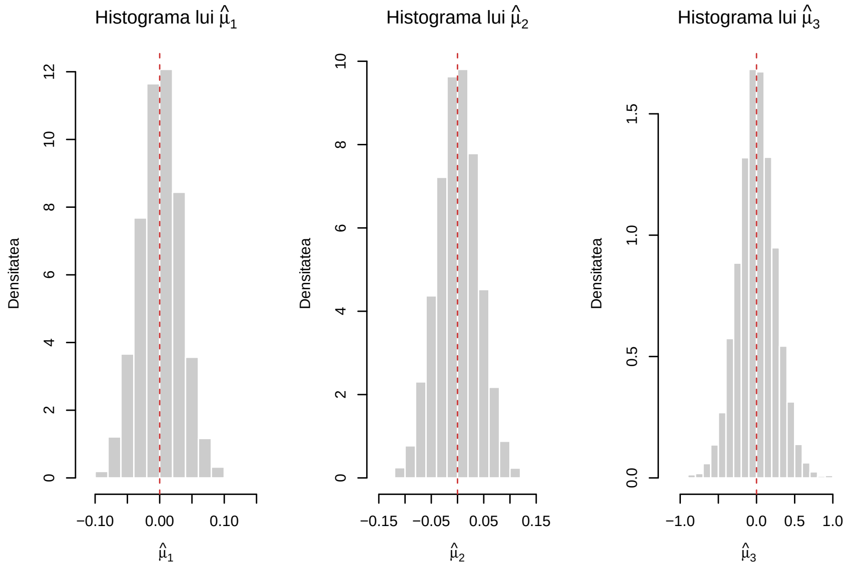
sunt trei estimatori punctuali pentru μ. Creați o funcție care să ilustreze cum sunt repartizați cei trei estimatori. Începeți cu $n = 10$, $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ și trasați histogramele pentru a-i compara. Ce se întâmplă dacă schimbați n, μ sau σ^2 ?

Vom crea o funcție numită `norm_estimators` care va construi repartițiile celor trei estimatori:

```
norm_estimators = function(n, mu, sigma, S){
  # Initializam
  mu1 = numeric(S)
  mu2 = numeric(S)
  mu3 = numeric(S)

  # repetam experimentul de S ori
  for (i in 1:S){
    x = rnorm(n, mean = mu, sd = sigma)

    # calculam estimatorii
    mu1[i] = mean(x)
    mu2[i] = median(x)
    mu3[i] = (min(x)+max(x))/2
  }

  # afisam variantele estimatorilor
  print(cbind(var_mu1 = var(mu1), var_mu2 = var(mu2), var_mu3 = var(mu3)))

 return(cbind(mu1 = mu1, mu2 = mu2, mu3 = mu3))

}
```

Pentru a ilustra grafic histogramele celor trei estimatori, considerăm $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ și avem:

```
          var_mu1     var_mu2    var_mu3
[1,] 0.0009932978 0.001566703 0.06160938
```



2 Ilustrarea consistenței unui estimator

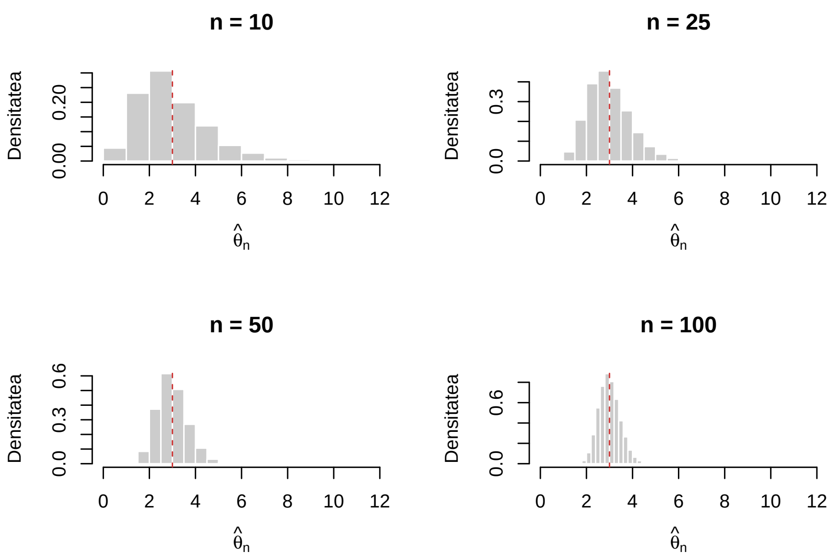
Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație $Pois(\theta)$. Ilustrați grafic consistența estimatorului $\hat{\theta}_n = S_n^2$ trasând histograma repartiției lui $\hat{\theta}_n$ pentru $n \in \{10, 25, 50, 100\}$. Ce observați?

Considerăm funcția `pois_est` care pentru θ fixat simulează repartiția estimatorului $\hat{\theta}_n$:

```r
pois_est1 = function(n, theta, S){
  # initializare
  sigma1 = numeric(S)

  for (i in 1:S){
    x = rpois(n, theta)
    sigma1[i] = var(x)
  }
  # afisam varianta estimatorului
  print(paste0("Pentru n = ", n," varianta estimatorului este ", var(sigma1)))
  return(sigma1)
}
```

Considerând $\theta = 3$ și $n \in \{10, 25, 50, 100\}$ avem:

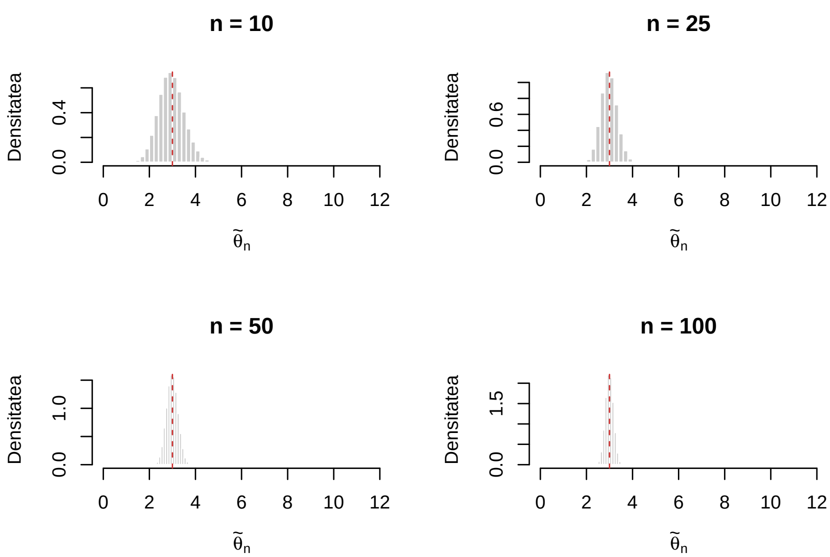
```
[1] "Pentru n = 10 varianta estimatorului este 2.35589143397559"
[1] "Pentru n = 25 varianta estimatorului este 0.869958122138972"
[1] "Pentru n = 50 varianta estimatorului este 0.428576062015341"
[1] "Pentru n = 100 varianta estimatorului este 0.211720157485395"
```



Ce se întâmplă dacă în loc de $\hat{\theta}_n$ considerăm estimatorul $\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n$ sau estimatorul $\dot{\theta}_n = \sqrt{\bar{X}_n S_n^2}$?

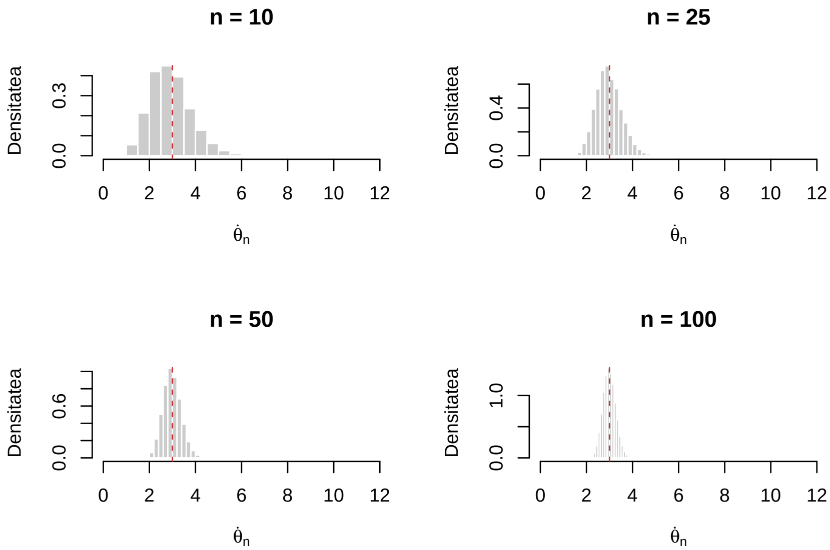
Pentru $\tilde{\theta}_n$ avem

```
[1] "Pentru n = 10 varianta estimatorului este 0.301055748790976"
[1] "Pentru n = 25 varianta estimatorului este 0.118347691085662"
[1] "Pentru n = 50 varianta estimatorului este 0.0600801199663993"
[1] "Pentru n = 100 varianta estimatorului este 0.0296748320834817"
```



iar pentru $\dot{\theta}_n$ avem

```
[1] "Pentru n = 10 varianta estimatorului este 0.771286077961343"
[1] "Pentru n = 25 varianta estimatorului este 0.305968043909498"
[1] "Pentru n = 50 varianta estimatorului este 0.151093564634052"
[1] "Pentru n = 100 varianta estimatorului este 0.075734675439954"
```


n = 10
n = 25
n = 50
n = 100
Densitatea
0.0
0.3
0.4
0.6
1.0
0
2
4
6
8
10
12
$\dot{\theta}_n$