

# Proiect 1

Grupa 301

## Problemă <sup>1</sup>

Un segment de lungime 1 este rupt în trei bucăți. Considerăm că punctele de ruptură sunt două variabile aleatoare  $X, Y$  independente reoartizate uniform  $\mathcal{U}([0, 1])$ . Ne întrebăm care este probabilitatea ca să se poată forma un triunghi cu lungimile celor trei segmente obținute.

1. Fie  $a, b$  și  $c$  lungimile celor trei segmente obținute (luate de la stanga la dreapta). Arătați că lungimile celor trei segmente pot forma un triunghi dacă și numai dacă fiecare dintre cele trei lungimi este mai mică sau egală cu  $\frac{1}{2}$ . Traduceți această condiție în funcție de v.a.  $X$  și  $Y$ .
2. Într-o primă etapă dorim să aproximăm lungimile medii ale celor trei segmente obținute. Pentru aceasta, simulăm  $N = 5000$  de realizări independente ale cuplului  $(X, Y)$ . Care sunt valorile lungimilor medii ? Ce teoremă limită justifică acest rezultat ?
3. Dorim de asemenea să răspundem într-o manieră mai fină la întrebarea problemei:
  - a. Cuplul de puncte  $(X, Y)$  de ruptură poate fi văzut ca un punct în pătratul unitate  $[0, 1]^2$ . Plecând de la 5000 de realizări independente ale cuplului  $(X, Y)$ , reprezentați grafic punctele  $(X_i, Y_i)$  din interiorul pătratului  $[0, 1]^2$  care determină cele trei segmente cu ajutorul cărora putem forma un triunghi, cu albastru, și pe celelalte cu roșu.
  - b. Plecând de la  $N = 5000$  de realizări independente ale cuplului  $(X, Y)$ , estimați probabilitatea căutată.
  - c. Găsiți această probabilitate teoretică și comparați cu rezultatul găsit la punctul anterior.
4. Ne întrebăm acum dacă probabilitatea de formare a unui triunghi cu ajutorul celor trei segmente formate de punctele de ruptură se modifică dacă adoptăm următoarea procedură. Alegem pentru început un punct de ruptură  $X$  repartizat uniform  $\mathcal{U}([0, 1])$  și dintre cele două segmente formate îl alegem pe cel mai lung pe care alegem un al doilea punct  $Y$  repartizat uniform pe acesta. Reconsiderați punctele a., b. și c. de la punctul 3.

---

<sup>1</sup>Raportul poate fi scris în *Word* sau  $\text{\LaTeX}$  (pentru ușurință recomand folosirea pachetului *rmarkdown* din *R* - mai multe informații găsiți pe site la secțiune *Link-uri utile*). Toate simulările, figurile și codurile folosite trebuie incluse în raport. Se va folosi doar limbajul *R*.