Exerciții de seminar 1

Metoda verosimilității maxime și testare de ipoteze statistice

Obiectivul acestui seminar este de a prezenta câteva exerciții de calcul cu metode utile atunci când vrem să verificăm dacă eșantionul provine ditnr-o populație normală.

1 Estimare prin metoda verosimilității maxime

1.1 Metoda verosimilității maxime și repartiția Geometrică

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Geometrică a cărei funcție de masă este dată de

$$f_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \quad \forall x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

unde $\theta \in (0, 1)$ este necunoscut. Presupunem că

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta}, \quad Var(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

a) Scrieți logaritmul funcției de verosimilitate pentru eșantionul dat.
b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ pentru θ.
c) Arătați că estimatorul de verosimilitate maximă este consistent.
d) Folosind proprietățile asimptotice ale estimatorilor de verisimilitate maximă, derivați repartiția asimptotică a lui $\hat{\theta}_n$.
e) Folosind *Teorema Limită Centrală* și *metoda Delta*, derivați repartiția asimptotică a lui $\hat{\theta}_n$.
f) Determinați marginea Rao-Cramer.
g) Generați un eșantion de talie $n = 1000$ dintr-o populație Geometrică de parametru $\theta = 0.345$. Estimați parametrul θ prin metoda verosimilității maxime folosind funcția `optim()` (sau `optimize()`).

a) Din definiția funcției de verosimilitate avem

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i - 1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$$

de unde logaritmul funcției de verosimilitate este

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(x_i) = n \log\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) \log(1-\theta).$$

b) Estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ este definit prin

$$\hat{\theta}_n = \underset{0<\theta<1}{\arg\max}\, L(\theta|\mathbf{x}) = \underset{0<\theta<1}{\arg\max}\, l(\theta|\mathbf{x})$$

iar pentru determinarea acestuia (sub anumite condiții de regularitate) trebuie să rezolvăm ecuația de verosimilitate $\frac{\partial l(\theta|\mathbf{x})}{\partial\theta} = 0$ (condiție de ordin unu). Trebuie remarcat că în cazul în care $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ condiția se scrie sub forma

$$\nabla L(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluțiile acestei ecuații ne dau punctele critice (din interiorul domeniului) iar pentru determinarea maximului este necesară verificarea unor condiții de ordin doi: matricea Hessiană

$$\frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta \partial \theta^\intercal} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k^2} \end{pmatrix}$$

evaluată în $\hat{\theta}_n$ trebuie să fie negativ definită, adică

$$\mathbf{x}^\intercal \frac{\partial^2 L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta \partial \theta^\intercal} \mathbf{x} < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

În cazul problemei noastre obținem

$$\frac{\partial l(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \frac{1}{1-\theta}$$

și rezolvând ecuația $\frac{\partial l(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta} = 0$ găsim că

$$\frac{n}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \frac{1}{1-\theta} \iff \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \iff \frac{1}{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

de unde $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$. Pentru a vedea că $\hat{\theta}_n$ este într-adevăr valoarea care maximizează funcția de verosimilitate, avem

$$\left. \frac{\partial^2 l(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right|_{\hat{\theta}_n} = -\frac{n}{\hat{\theta}_n^2} - \left(\frac{1}{1-\hat{\theta}_n} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right)$$

și cum $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{x}_n}$ deducem că $\sum_{i=1}^{n} x_i - n = n \left(\frac{1}{\hat{\theta}_n} - 1 \right)$ iar

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 l(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right|_{\hat{\theta}_n} &= -\frac{n}{\hat{\theta}_n^2} - \left(\frac{1}{1-\hat{\theta}_n} \right)^2 n \left(\frac{1}{\hat{\theta}_n} - 1 \right) = -n \left(\frac{1}{\hat{\theta}_n^2} + \frac{1}{\hat{\theta}_n (1-\hat{\theta}_n)} \right) \\ &= -\frac{n}{\hat{\theta}_n^2 (1-\hat{\theta}_n)} < 0 \end{aligned}$$

ceea ce arată că $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ este estimatorul de verosimilitate maximă.

c) Aplicând *Legea numerelor mari* (varianta slabă) avem că

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\theta}$$

Cum $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ putem aplica *Teorema aplicațiilor continue* pentru funcția $g(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$ și găsim că

$$\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g\left(\frac{1}{\theta}\right) = \theta$$

ceea ce arată că $\hat{\theta}_n$ este consistent.

d) Observăm că funcția de masă verifică condițiile de regularitate[1] prin urmare are loc

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, I_1^{-1}(\theta_0))$$

unde θ_0 este valoarea adevărată a parametrului iar $I_1^{-1}(\theta_0)$ este informația lui Fisher pentru o observație. În general *Informația lui Fisher* pentru eșantion este

$$\begin{aligned}
I_n(\theta) &= Var_\theta\left(\nabla l(\theta|\mathbf{X})\right) = Var_\theta\left(\frac{\partial \log f_\theta(\mathbf{X})}{\partial\theta}\right) \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial \log f_\theta(\mathbf{X})}{\partial\theta} \times \frac{\partial \log f_\theta(\mathbf{X})}{\partial\theta}^\intercal\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[-\frac{\partial^2 \log f_\theta(\mathbf{X})}{\partial\theta\partial\theta^\intercal}\right].
\end{aligned}$$

Pentru cazul nostru găsim că informația lui Fisher este

$$I_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[-\frac{\partial^2 \log f_\theta(X_i)}{\partial\theta^2}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\frac{1}{\theta^2} - \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2 (X_i - 1)\right] = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)}$$

și astfel

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \theta_0^2(1-\theta_0))$$

sau echivalent $\hat{\theta}_n \approx \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{\theta_0^2(1-\theta_0)}{n}\right)$.

e) Știind că $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta_0}$ și $Var(X) = \frac{1-\theta_0}{\theta_0^2}$ și aplicând *Teorema Limită Centrală* avem că

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta_0}{\theta_0^2}\right).$$

Estimatorul de verosimilitate maximă este $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ și considerând $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$ (g este derivabilă cu derivata continuă) putem aplica metoda Delta care conduce la

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g\left(\frac{1}{\theta_0}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, g'\left(\frac{1}{\theta_0}\right)^2 \frac{1-\theta_0}{\theta_0^2}\right)$$

[1] e.g. Suportul $\{x \,|\, f_\theta(x) > 0\}$ nu depinde de θ; $f_\theta(x)$ este de cel puțin 3 ori derivabilă în raport cu θ și derivatele sunt continue; Valoarea adevărată θ se află într-o mulțime compactă.

și cum $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ obținem același rezultat ca și în cazul punctului anterior

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \theta_0^2(1-\theta_0)).$$

f) Marginea inegalității Rao-Cramer ($MIRC$) este $I_n^{-1}(\theta_0)$ și cum

$$I_n(\theta_0) = \mathbb{E}_\theta\left[-\left.\frac{\partial^2 \log f_\theta(\mathbf{X})}{\partial\theta\partial\theta^\intercal}\right|_{\theta_0}\right] = nI_1(\theta_0) = \frac{n}{\theta_0^2(1-\theta_0)}$$

găsim

$$MIRC = I_n^{-1}(\theta_0) = \frac{\theta_0^2(1-\theta_0)}{n}.$$

g) Pentru a genera eșantionul $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vom folosi funcția `rgeom()`. Atenție, această funcție permite generarea de observații repartizate Geometric de parametru θ, cu funcția de masă

$$\mathbb{P}_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^x, \quad \forall x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

deci trebuie să adăugăm 1 la fiecare observație pentru a fi în contextul din exercițiu.

```
theta = 0.345
n = 1000

x = rgeom(n, theta) + 1

# EVM gasit este
EVM = 1/mean(x)
EVM
[1] 0.3558719
```

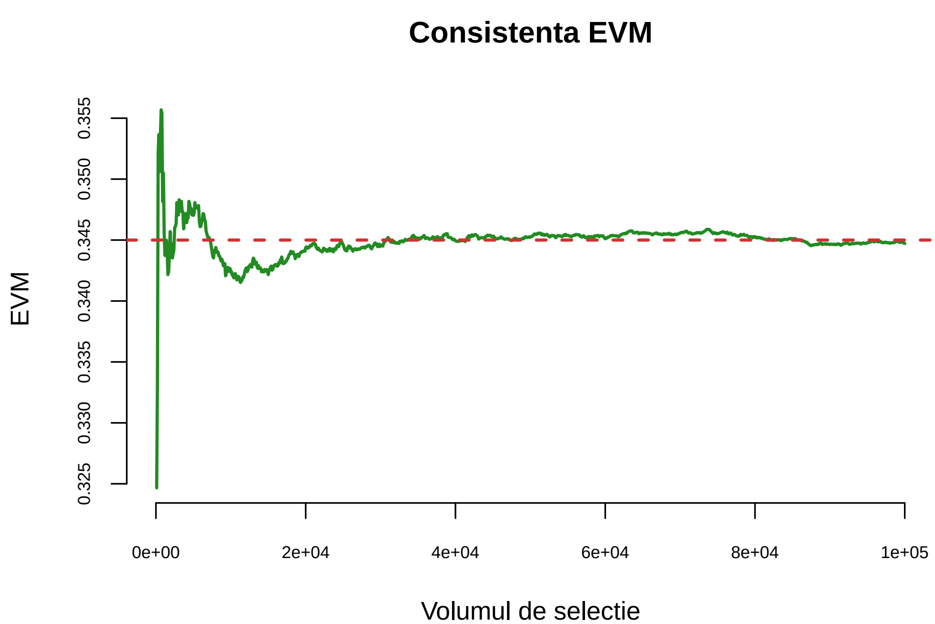
Vom crea o funcție care să calculeze estimatorul de verosimilitate maximă plecând de la logaritmul funcției de verosimilitate (îi determinăm maximul cu ajutorul funcției `optimize()`):

```
EVM_geom = function(theta, n, init = 0.5, seed = NULL){

  if (!is.null(seed)){
    set.seed(seed)
  }

  x = rgeom(n, theta)+1

  loglik_geom = function(param){

    l = n*log(param) + (sum(x) - n)*log(1-param)
    # intoarcem -l pentru ca vrem maximul
    return(-l)
  }
  # folosim functia optimize
  # a se vedea ?optimize
  return(optimize(loglik_geom, c(0,1))[[1]])
}

# exemple
```

```
EVM_geom(0.345, 1000)
[1] 0.3433987
EVM_geom(0.478, 1000)
[1] 0.4899384
EVM_geom(0.222, 1000)
[1] 0.2253667
```

În figura de mai jos este ilustrată proprietatea de consistență a estimatorului de verosimilitate maximă, pentru $\theta = 0.345$:

```
theta = 0.345
t = seq(100, 100000, 100)

y = sapply(t, function(x){
 r = EVM_geom(theta, x, seed = 2018)
 return(r)
})

plot(t, y, type = "l",
     col = "forestgreen",
     xlab = "Volumul de selectie",
     ylab = "EVM",
     main = "Consistenta EVM",
     bty = "n",
     cex.axis = 0.7,
     lwd = 2)

abline(h = theta, col = "brown3",
       lty = 2, lwd = 2)
```



1.2 Exemplu de EVM determinat prin soluții numerice

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație logistică a cărei densitate este dată de formula

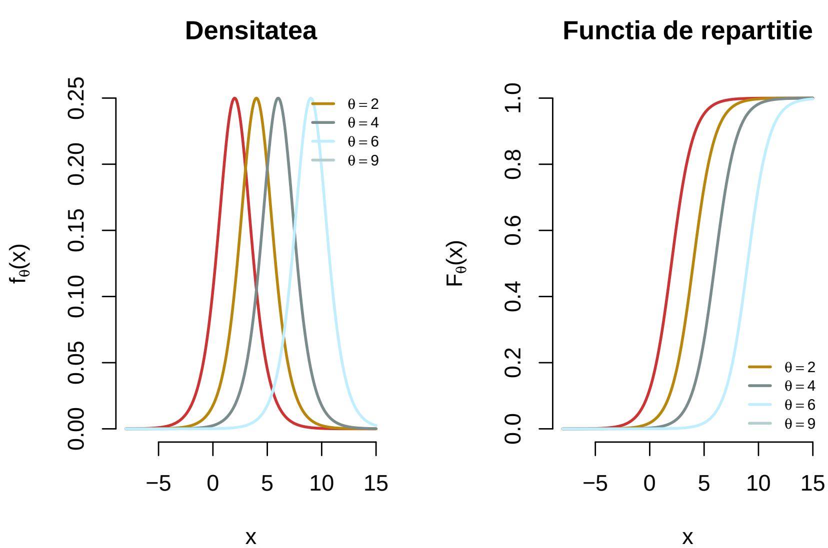
$$f_\theta(x) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\left(1 + e^{-(x-\theta)}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R},\, \theta \in \mathbb{R}$$

Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ pentru θ.

Densitatea de repartiție și funcția de repartiție a repartiției logistice sunt ilustrate mai jos (în R se folosesc funcțiile: `rlogis`, `dlogis`, `plogis` și respectiv `qlogis`):

```
# Generam graficele
pars = c(2, 4, 6, 9)

x = seq(-8, 15, length.out = 250)

set.seed(1234)
cols = sample(colors(), length(pars))

par(mfrow = c(1, 2))
# densitatile
plot(x, dlogis(x, location = pars[1]),
     xlab = "x",
     ylab = TeX("$f_{\\theta}(x)$"),
     # ylim = c(0,1),
     col = "brown3",
     lwd = 2, type = "l",
     bty = "n",
     main = "Densitatea")

for (i in seq(length(pars)-1)){
  location = pars[i+1]

  y = dlogis(x, location = location)

  lines(x, y, lwd = 2,
        col = cols[i])
}

legend("topright",
       legend = TeX(paste0("$\\theta = ", pars, "$")),
       col = cols,
       lwd = rep(2, length(pars)),
       bty = "n",
       cex = 0.7,
       seg.len = 1.5)

# functiile de repartitie
plot(x, plogis(x, location = pars[1]),
     xlab = "x",
```

```
     ylab = TeX("$F_{\\theta}(x)$"),
     ylim = c(0,1),
     col = "brown3",
     lwd = 2, type = "l",
     bty = "n",
     main = "Functia de repartitie")

for (i in seq(length(pars)-1)){
  location = pars[i+1]

  y = plogis(x, location = location)

  lines(x, y, lwd = 2,
        col = cols[i])
}

legend("bottomright",
       legend = TeX(paste0("$\\theta = ", pars, "$")),
       col = cols,
       lwd = rep(2, length(pars)),
       bty = "n",
       cex = 0.7,
       seg.len = 1.5)
```



Observăm că funcția de verosimilitate este dată de

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{\left(1+e^{-(x_i-\theta)}\right)^2}$$

iar logaritmul funcției de verosimilitate este

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(x_i) = n\theta - n\bar{x}_n - 2\sum_{i=1}^{n} \log\left(1+e^{-(x_i-\theta)}\right).$$

Pentru a găsi valoarea lui θ care maximizează logaritmul funcției de verosimilitate și prin urmare a funcției de verosimilitate trebuie să rezolvăm ecuația $l'(\theta|\mathbf{x}) = 0$, unde derivata lui $l(\theta|\mathbf{x})$ este

$$l'(\theta|\mathbf{x}) = n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{1+e^{-(x_i-\theta)}}$$

ceea ce conduce la ecuația

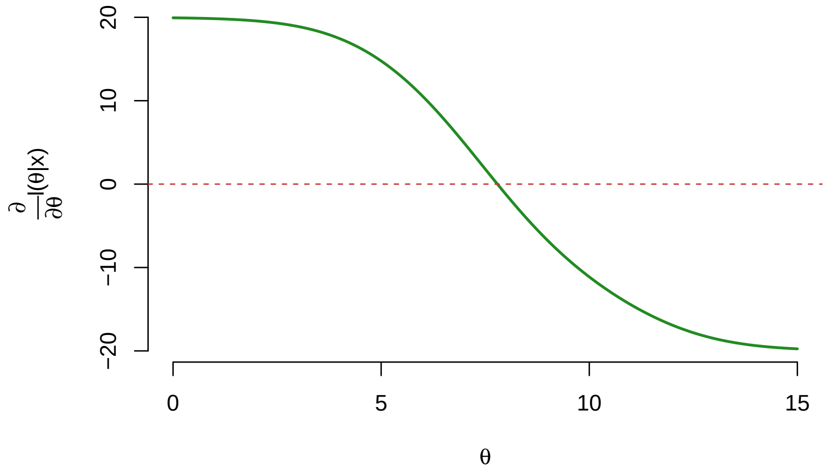
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{1+e^{-(x_i-\theta)}} = \frac{n}{2} \tag{$\star$}$$

Chiar dacă această ecuație nu se simplifică, se poate arăta că această ecuația admite soluție unică. Observăm că derivata parțiala a membrului drept în ($\star$) devine

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{1+e^{-(x_i-\theta)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{\left(1+e^{-(x_i-\theta)}\right)^2} > 0$$

ceea ce arată că membrul stâng este o funcție strict crescătoare în θ. Cum membrul stâng în ($\star$) tinde spre 0 atunci când $\theta \to -\infty$ și spre n pentru $\theta \to \infty$ deducem că ecuația ($\star$) admite soluție unică (vezi graficul de mai jos).

```r
set.seed(112)
n = 20
x = rlogis(n, location = 7.5)

# derivata logaritmului functiei de verosimilitate
dLogLogistic = function(n, x, theta){
  sapply(theta, function(t){
    y = exp(-(x - t))
    n - 2*sum(y/(1+y))
  })
}

theta = seq(0, 15, length.out = 250)

mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 1.2, 0, 0))

plot(theta, dLogLogistic(n, x, theta), type = "l",
     col = "forestgreen", lwd = 2,
     bty = "n",
     xlab = TeX("$\\theta$"),
     ylab = TeX("$\\frac{\\partial}{\\partial \\theta} l(\\theta | x)$"))

abline(h = 0, col = "brown3",
       lty = 2)
```



Cum nu putem găsi o soluție a ecuației $l'(\theta|\mathbf{x}) = 0$ sub formă compactă, este necesar să apelăm la metode numerice. O astfel de metodă numerică este binecunoscuta metodă a lui Newton-Raphson. Metoda presupune să începem cu o valoare (soluție) inițială $\hat{\theta}^{(0)}$ și să alegem, plecând de la aceasta, o nouă valoare $\hat{\theta}^{(1)}$ definită prin

$$\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\theta}^{(0)} - \frac{l'\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)}{l''\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)},$$

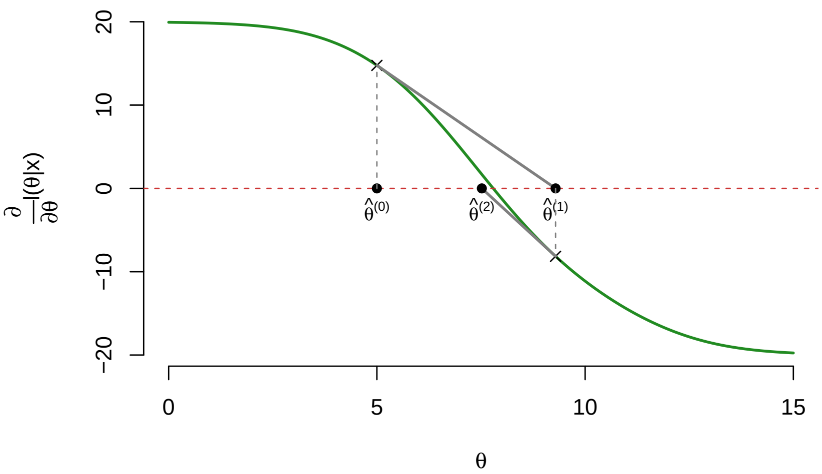
adică $\hat{\theta}^{(1)}$ este intersecția cu axa absciselor a tangentei în punctul $\left(\hat{\theta}^{(0)}, l'\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)\right)$ la graficul funcției $l'(\theta)$. Ideea este de a itera procesul până când soluția converge, cu alte cuvinte pornind de la o valoare *rezonabilă* de start $\hat{\theta}^{(0)}$ la pasul $k+1$ avem

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \frac{l'\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)}{l''\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)}$$

și oprim procesul atunco când k este suficient de mare și/sau $\left|\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}\right|$ este suficient de mic. Următorul grafic ilustrează grafic algoritmul lui Newton:

```r
set.seed(112)
n = 20
x = rlogis(n, location = 7.5)

# derivata logaritmului functiei de verosimilitate
dLogLogistic = function(n, x, theta){
  sapply(theta, function(t){
    y = exp(-(x - t))
    n - 2*sum(y/(1+y))
  })
}

theta = seq(0, 15, length.out = 250)
```

```r
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 1.2, 0, 0))

plot(theta, dLogLogistic(n, x, theta), type = "l",
     col = "forestgreen", lwd = 2,
     bty = "n",
     xlab = TeX("$\\theta$"),
     ylab = TeX("$\\frac{\\partial}{\\partial \\theta} l(\\theta | x)$"))

abline(h = 0, col = "brown3",
       lty = 2)

# ilustrarea metodei Newton

dl = function(theta) n - 2 * sum(exp(theta - x) / (1 + exp(theta - x)))
ddl = function(theta) {-2 * sum(exp(theta - x) / (1 + exp(theta - x))^2)}

x0 = 5 # punctul de start

points(x0, 0, pch = 16, col = "black")
text(x0, 0, labels = TeX("$\\hat{\\theta}^{(0)}$"), pos = 1, cex = 0.8)
segments(x0, 0, x0, dl(x0), lty = 2, col = "grey50")
points(x0, dl(x0), pch = 4)

x1 = x0 - dl(x0)/ddl(x0)

segments(x0, dl(x0), x1, 0, lty = 1, lwd = 2, col = "grey50")
points(x1, 0, pch = 16, col = "black")
text(x1, 0, labels = TeX("$\\hat{\\theta}^{(1)}$"), pos = 1, cex = 0.8)
segments(x1, 0, x1, dl(x1), lty = 2, col = "grey50")
points(x1, dl(x1), pch = 4)

x2 = x1 - dl(x1)/ddl(x1)

segments(x1, dl(x1), x2, 0, lty = 1, lwd = 2, col = "grey50")
points(x2, 0, pch = 16, col = "black")
text(x2, 0, labels = TeX("$\\hat{\\theta}^{(2)}$"), pos = 1, cex = 0.8)
```



Obs: Singurul lucru care se schimbă atunci când trecem de la scalar la vector, este funcția $l(\theta)$ care acum este o funcție de $p > 1$ variabile, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^\intercal \in \mathbb{R}^p$. În acest context $l'(\theta)$ este un vector de derivate parțiale iar $l''(\theta)$ este o matrice de derivate parțiale de ordin doi. Prin urmare itarațiile din metoda lui Newton sunt

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \left[l''\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)\right]^{-1} l'\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)$$

unde $[\cdot]^{-1}$ este pseudoinversa unei matrici.

Funcția de mai jos implementează metoada lui Newton pentru cazul multidimensional:

```r
# Metoda lui Newton

newton <- function(f, df, x0, eps=1e-08, maxiter=1000, ...) {
  # in caz ca nu e incarcat pachetul sa putem accesa pseudoinversa
  if(!exists("ginv")) library(MASS)

  x <- x0
  k <- 0

  repeat {
    k <- k + 1

    x.new <- x - as.numeric(ginv(df(x, ...)) %*% f(x, ...))

    if(mean(abs(x.new - x)) < eps | k >= maxiter) {
      if(k >= maxiter) warning("S-a atins numarul maxim de iteratii!")
      break
    }
    x <- x.new
  }
  out <- list(solution = x.new, value = f(x.new, ...), iter = k)

  return(out)
}
```

Să presupunem că am observat următorul eșantion de talie 20 din repartiția logistică:

```
 [1]  6.996304  9.970107 12.304991 11.259549  6.326912  5.378941  4.299639
 [8]  8.484635  5.601117  7.094335  6.324731  6.868456  9.753360  8.042095
[15]  8.227830 10.977982  7.743096  7.722159  8.562884  6.968356
```

```
set.seed(112)
x = rlogis(20, location = 7.5)

n = length(x)
dl = function(theta) n - 2 * sum(exp(theta - x) / (1 + exp(theta - x)))
ddl = function(theta) {-2 * sum(exp(theta - x) / (1 + exp(theta - x))^2)}

logis.newton = newton(dl, ddl, median(x))
```

și aplicând metoda lui Newton găsim estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n = 7.7933$ după numai 3 iterații (datele au fost simulate folosind $\theta = 7.5$).

1.3 Metoda verosimilității maxime și procese autoregresive $AR(r)$

Se numește proces autoregresiv de ordin 1 $AR(1)$, un proces Gaussian staționar definit prin

$$Y_t = c + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

cu ϵ_t variabile aleatoare i.i.d. repartizate $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ și $|\rho| < 1$.

Observăm că din condiția de staționaritate[2] rezultă că

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{c}{1-\rho}, \quad Var[Y_t] = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}.$$

Fie $\theta = (c, \rho, \sigma^2)^\intercal$ vectorul parametrilor modelului. Scrieți funcția de verosimilitate și logaritmul funcției de verosimilitae pentru o observație, y_1.

Cum variabila aleatoare Y_1 are media și varianța date de

$$\mathbb{E}[Y_1] = \frac{c}{1-\rho}, \quad Var[Y_1] = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}.$$

iar ϵ_t sunt i.i.d. repartizate $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, deducem că Y_1 este repartizată tot normal, cu $Y_1 \sim \mathcal{N}\left(\frac{c}{1-\rho}, \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right)$. Astfel funcția de verosimilitate pentru y_1 este

$$L(\theta; y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(y_1 - \frac{c}{1-\rho}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}}}$$

iar logaritmul funcției de verosimilitate pentru y_1 este

[2] Aici ne referim la proprietatea de staționaritate în sens larg (wide-sense stationary) care presupune că $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ și $\forall \tau \in \mathbb{N}$ avem $\mathbb{E}[Y_{t_1}] = \mathbb{E}[Y_{t_2}]$ și $\mathbb{E}[Y_{t_1}Y_{t_2}] = \mathbb{E}[Y_{t_1+\tau}Y_{t_2+\tau}]$.

$$l(\theta; y_1) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\left(y_1 - \frac{c}{1-\rho}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}}.$$

Care este repartiția condiționată a lui Y_2 la $Y_1 = y_1$? Scrieți funcția de verosimilitate și logaritmul funcției de verosimilitate (condiționată) pentru a doua observație y_2.

Observăm că pentru $t = 2$ avem

$$Y_2 = c + \rho Y_1 + \epsilon_2,$$

unde $\epsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Prin urmare repartiția condiționată a lui Y_2 dat fiind $Y_1 = y_1$ este

$$Y_2 | Y_1 = y_1 \sim \mathcal{N}(c + \rho y_1, \sigma^2)$$

de unde funcția de verosimilitate (condiționată) pentru y_2 este

$$L(\theta; y_2|y_1) = f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1; \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_2 - c - \rho y_1)^2}{\sigma^2}}$$

iar logaritmul funcției de verosimilitate (condiționată) pentru y_2 este

$$l(\theta; y_2|y_1) = \log f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1; \theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\frac{(y_2 - c - \rho y_1)^2}{\sigma^2}.$$

Considerați eșantionul $\{y_1, y_2\}$ de talie 2. Scrieți funcția de verosimilitate (completă) și logaritmul funcției de verosimilitate a modelului $AR(1)$ pentru acest eșantion. Extindeți rezultatul pentru un eșantion $y_1, y_2, \dots, y_T$ de talie T.

Reamintim că dacă avem două variabile aleatoare continue (absolut continue) X și Y atunci densitatea cuplului (X, Y) este

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x),$$

prin urmare funcția de verosimilitate (completă) pentru eșantionul $\{y_1, y_2\}$ este

$$L(\theta; y_1, y_2) = f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2; \theta) = f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1; \theta) f_{Y_1}(y_1; \theta)$$

sau echivalent

$$L(\theta; y_1, y_2) = L(\theta; y_2|y_1) L(\theta; y_1) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(1-\rho^2)\left(y_1 - \frac{c}{1-\rho}\right)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(y_2 - c - \rho y_1)^2}{\sigma^2}}.$$

În mod similar, logaritmul funcției de verosimilitate este

$$l(\theta; y_1, y_2) = l(\theta; y_2|y_1) + l(\theta; y_1) = \frac{1}{2}\log(1-\rho^2) - \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\frac{(1-\rho^2)\left(y_1 - \frac{c}{1-\rho}\right)^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(y_2 - c - \rho y_1)^2}{\sigma^2}.$$

Observăm că densitatea lui Y_3 condiționată la primele două variabile este

$$f_{Y_3|Y_2,Y_1}(y_3|y_2,y_1;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_3-c-\rho y_2)^2}{\sigma^2}}$$

de unde

$$\begin{aligned} f_{Y_3,Y_2,Y_1}(y_3,y_2,y_1;\theta) &= f_{Y_3|Y_2,Y_1}(y_3|y_2,y_1;\theta)f_{Y_2,Y_1}(y_2,y_1;\theta) \\ &= f_{Y_3|Y_2,Y_1}(y_3|y_2,y_1;\theta)f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1;\theta)f_{Y_1}(y_1;\theta). \end{aligned}$$

În general, valoarea lui $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{t-1}$ influențează valoarea lui Y_t doar prin valoarea lui Y_{t-1} ceea ce arată că densitatea lui Y_t condiționată la celelalte $t-1$ variabile este

$$f_{Y_t|Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots,Y_1}(y_t|y_{t-1},y_{t-2},\ldots,y_1;\theta) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1};\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t-c-\rho y_{t-1})^2}{\sigma^2}}.$$

Astfel, pentru un eșantion $y_1, y_2, \ldots, y_T$ de talie T avem

$$\begin{aligned} L(\theta; y_1, y_2, \ldots, y_T) &= L(\theta; y_1) \times \prod_{t=2}^{T} L(\theta; y_t|y_{t-1}) \\ l(\theta; y_1, y_2, \ldots, y_T) &= l(\theta; y_1) + \sum_{t=2}^{T} l(\theta; y_t|y_{t-1}) \end{aligned}$$

ceea ce conduce la

$$L(\theta; y_1, y_2, \ldots, y_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(y_1-\frac{c}{1-\rho}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}}} \times \prod_{t=2}^{T}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t-c-\rho y_{t-1})^2}{\sigma^2}}$$

și respectiv la

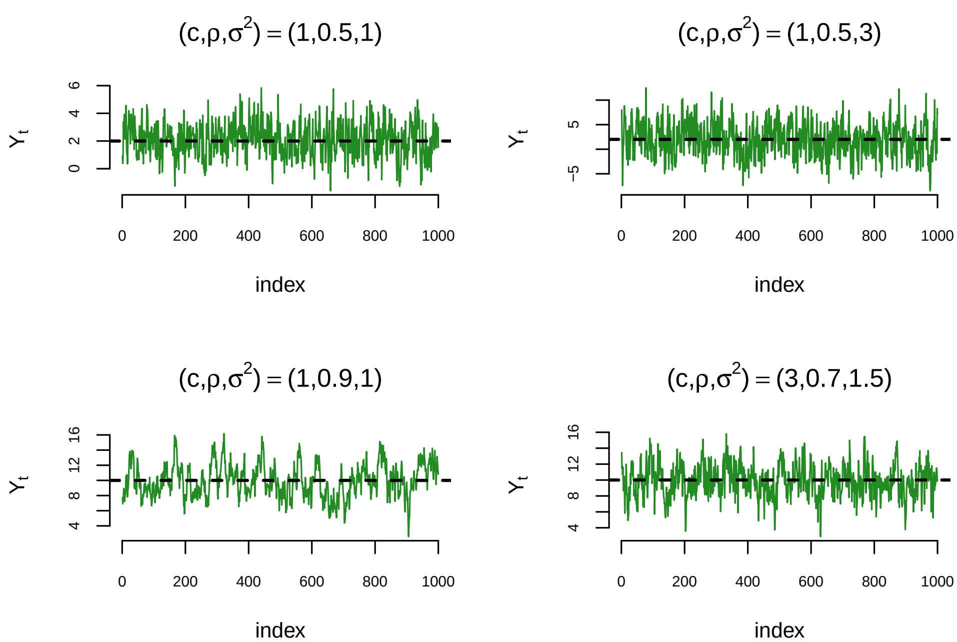
$$\begin{aligned} l(\theta; y_1, y_2, \ldots, y_T) &= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\left(y_1-\frac{c}{1-\rho}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}} \\ &\quad + \sum_{t=2}^{T}\left(-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\frac{(y_t-c-\rho y_{t-1})^2}{\sigma^2}\right) \\ &= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) + \frac{1}{2}\log(1-\rho^2) + \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma^2}\left[(1-\rho^2)\left(y_1 - \frac{c}{1-\rho}\right)^2 + \sum_{t=2}^{T}(y_t-c-\rho y_{t-1})^2\right] \end{aligned}$$

Funcția de verosimilitate este o funcție neliniară în parametrii θ, prin urmare estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta} = (\hat{c}, \hat{\rho}, \hat{\sigma}^2)^\intercal$ va fi determinat prin metode numerice. Scrieți o funcție în R care să permită generarea unui eșantion dintr-un proces $AR(1)$. Pentru $c = 1$, $\rho = 0.5$ și $\sigma^2 = 1$ generați un eșantion de talie $T = 1000$ și calculați estimatorul de verosimilitate maximă.

Avem următoarea funcție care generează procesul autoregresiv $AR(1)$:

```
genAR1 = function(n, c, rho, sigma){
  # n - marimea esantionului
  # c - termenul constant
  # rho - parametrul autoregresiv
  # sigma - abaterea standard a erorii

  # generam Y_1 repartizat normal
  y1 = rnorm(1, mean = c/(1-rho), sd = sqrt(sigma^2/(1-rho^2)))

  # nitializam
  y = rep(1, n)*y1

  # vectorul de erori
  epsilon = rnorm(n-1, 0, sigma)

  for (i in 2:n){
    y[i] = c + rho*y[i-1] + epsilon[i-1]
  }

  return(y)
}
```

Ilustrăm grafic traiectorile procesului $AR(1)$ pentru diverse seturi de parametrii (c, ρ, σ^2):



Considerăm setul de parametrii $(c, \rho, \sigma^2) = (1, 0.5, 1)$ și calculăm estimatorul de verosimilitate maximă plecând de la logaritmul funcției de verosimilitate (utilizăm funcția `optim()`):

```
y = genAR1(1000, 1, 0.5, 1)

loglik_AR1 = function(param){
  # pentru a folosi functia optim trebuie sa avem un singur argument
```

```
  # parametrii
  c = param[1]
  rho = param[2]
  sigma = param[3]

  # esantionul
  ly = length(y) # talia esantionului

  # prima observatie
  l1 = log(dnorm(y[1], mean = c/(1-rho), sd = sqrt(sigma^2/(1-rho^2))))

  # celelalte observatii
  dif = y[2:ly] - c - rho*y[1:(ly-1)]
  l2 = log(dnorm(dif, 0, sigma))

  # logaritmul verosimilitatii
  l = l1 + sum(l2)

  # intoarcem -l pentru ca vrem maximul
  return(-l)
}

# determinam MLE
param = c(0.6, 0.6, 0.6)
MLE = optim(param, loglik_AR1)$par
```

Obținem următoarele rezultate

	Theta	MLE
c	1.0	0.9261046
rho	0.5	0.5211693
sigma	1.0	1.0104216

care sunt apropiate de valorile reale.

Acum considerăm că prima observație y_1 este dată (deterministă) și avem $f_{Y_1}(y_1;\theta)$. Scrieți logaritmul funcției de verosimilitate a modelului $AR(1)$ pentru eșantionul $y_1, y_2, \dots, y_T$.

Funcția de verosimilitate condiționată este definită prin

$$L(\theta; y_2, \dots, y_T|y_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1},Y_1=y_1}(y_t|y_{t-1}, y_1;\theta) \times \underbrace{f_{Y_1}(y_1;\theta)}_{=1} = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1};\theta)$$

iar logaritmul funcției de verosimilitate condiționtă devine

$$l(\theta; y_2, \dots, y_T|y_1) = \sum_{t=2}^{T} l_t(\theta; y_t|y_{t-1})$$

cu $l_t(\theta; y_t|y_{t-1}) = \log(f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1};\theta))$. Găsim că

$$l(\theta; y_2, \dots, y_T|y_1) = -\frac{T-1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - c - \rho y_{t-1})^2.$$

2 Testarea ipotezelor statistice

2.1 Teste parametrice și Lema Neyman-Pearson

Să presupunem că ne aflăm în contextul următoarei probleme:

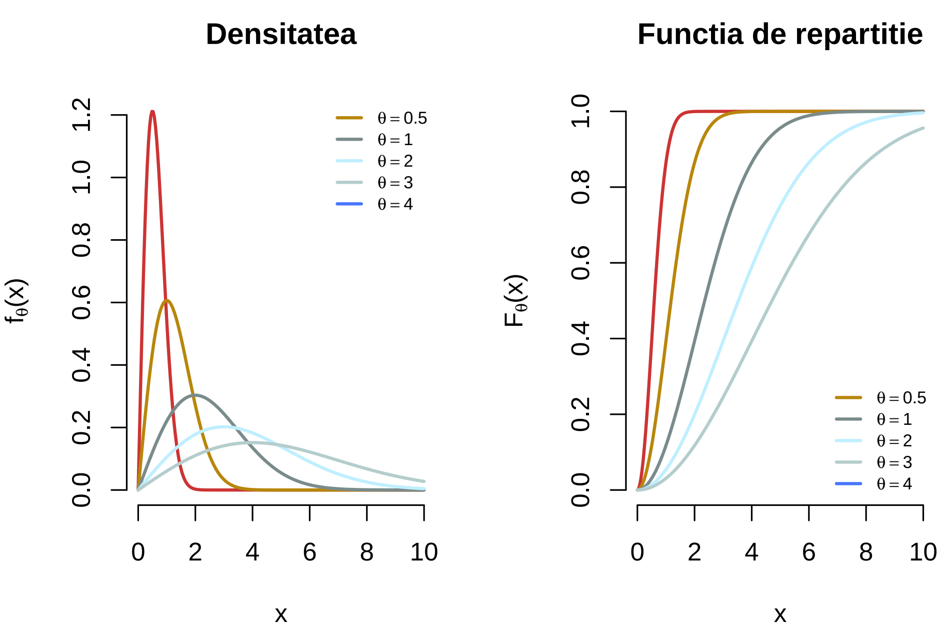
Fie U și V două variablie aleatoare independente și repartizate $\mathcal{N}(0,\theta)$. Variabila aleatoare X definită prin

$$X = \sqrt{U^2 + V^2}$$

este repartizată *Rayleigh* de parametru θ, $X \sim \text{Rayleigh}(\theta)$, și are densitatea

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, \quad \forall x \in [0, \infty]$$

Pentru mai multe detalii privind repartiția Rayleigh se poate consulta pagina https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_distribution sau monografia (Merran Evans 2000). Densitatea de repartiție și funcția de repartiție a repartiției Rayleigh sunt ilustrate mai jos (pentru a folosi în R funcțiile: `rrayleigh`, `drayleigh`, `prayleigh` și respectiv `qrayleigh` trebuie instalat pachetul `VGAM`):



În cele ce urmează, ne propunem să răspundem la o serie de întrebări:

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Rayleigh de parametru θ. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ.

Logaritmul funcției de verosimilitate este dat de

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - n\log(\theta) + \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

iar estimatorul de verosimilitate verifică

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta>0} l(\theta|\mathbf{x}) = \arg\max_{\theta>0} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - n\log(\theta) + \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Rezolvând ecuația de verosimilitatea (condiția de ordin 1)

$$\left.\frac{\partial l(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta}\right|_{\hat{\theta}_n} = -\frac{n}{\hat{\theta}_n} + \frac{1}{2\hat{\theta}_n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

găsim că

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Pentru a vedea că într-adevăr $\hat{\theta}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă trebuie să verificăm condiția de ordin 2

$$\left.\frac{\partial^2 l(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta^2}\right|_{\hat{\theta}_n} = \frac{n}{\hat{\theta}_n^2} - \frac{1}{\hat{\theta}_n^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{n}{\hat{\theta}_n^2} - \frac{2n\hat{\theta}_n}{\hat{\theta}_n^3} = -\frac{n}{\hat{\theta}_n^2} < 0$$

unde am folosit faptul că $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2n\hat{\theta}_n$. Prin urmare $\hat{\theta}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă.

Determinați repartiția asimptotică a EVM $\hat{\theta}_n$ a lui θ.

Știm că dacă $\hat{\theta}_n$ este estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ și $f_\theta(x)$ verifică o serie de condiții de regularitatea atunci are loc

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, I_1^{-1}(\theta_0))$$

unde θ_0 este valoarea adevărată a parametrului iar $I_1^{-1}(\theta_0)$ este informația lui Fisher pentru o observație. În cazul problemei noastre, informația lui Fisher este

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[-\frac{\partial^2 \log f_\theta(\mathbf{X})}{\partial \theta^2}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[-\frac{n}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_\theta\left[\frac{X_i^2}{\theta}\right]$$

Cum $\frac{X^2}{\theta} = \frac{U^2}{\theta} + \frac{V^2}{\theta}$ iar $\frac{U}{\sqrt{\theta}}$ și $\frac{V}{\sqrt{\theta}}$ sunt variabile aleatoare independente repartizate $\mathcal{N}(0,1)$ deducem că $\frac{X^2}{\theta}$ este repartizată $\chi^2(2)$ prin urmare

$$\mathbb{E}_\theta\left[\frac{X_i^2}{\theta}\right] = 2.$$

Astfel $I_n(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$ de unde $I_1(\theta) = \frac{n1}{\theta^2}$. Avem

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, I_1^{-1}(\theta))$$

sau echivalent

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

Considerăm testul pentru ipotezele

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

unde $\theta_1 > \theta_0$. Determinați regiunea critică pentru UMP test de mărime α pentru ipotezele H_0 și H_1.

Din lema Neyman-Pearson avem că regiunea critică a testului UMP este dată de

$$C = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \frac{L_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)} < k\right\}$$

unde constatnta k se determină din mărimea testului α

$$\mathbb{P}_{H_0}((x_1, x_2, \dots, x_n) \in C) = \alpha.$$

Prin logaritmare avem

$$\begin{aligned}
&l(\theta_0|\mathbf{x}) - l(\theta_1|\mathbf{x}) < \log(k)\\
\iff &n\left(\log(\theta_1) - \log(\theta_0)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \log(k)\\
\iff &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < k_1 = \log(k) - n\left(\log(\theta_1) - \log(\theta_0)\right)
\end{aligned}$$

sau echivalent, ținând cont de faptul că $\theta_1 > \theta_0$, avem

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > c$$

unde $c = \frac{k_1\theta_0\theta_1}{n(\theta_0-\theta_1)}$.

Regiunea critică pentru testul UMP de mărime α cu ipotezele

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

unde $\theta_1 > \theta_0$ este

$$C = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, \hat{\theta}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > c\right\}.$$

Constanta c se determină din condiția

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(C) = \mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta}_n > c).$$

Sub ipoteza nulă, dacă n este suficient de mare, am văzut că

$$\hat{\theta}_n \underset{H_0}{\approx} \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{\theta_0^2}{n}\right)$$

prin urmare

$$1 - \alpha = \mathbb{P}_{H_0}\left(\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\theta_0} < \sqrt{n}\frac{c - \theta_0}{\theta_0}\right)$$

de unde $c = \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ cu $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$.

Regiunea critică a testului UMP cu ipotezele H_0 *vs* H_1 devine

$$C = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\}.$$

Considerăm testul pentru ipotezele

$$H_0 : \theta = 2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > 2$$

Știind că pentru un eșantion de talie $n = 100$ avem $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 470$ care este concluzia testului pentru un prag de semnificație de 10%?

Considerăm testul cu ipotezele

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

unde $\theta_1 > \theta_0$. Am văzut că regiunea critică a testului UMP de mărime α este

$$C = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\}.$$

Cum regiunea critică nu depinde de θ_1 (în plus raportul de verosimilitate verifică proprietatea de monotonie), ea corespunde și la testul unilateral UMP de mărime α:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Pentru $\theta_0 = 2$, $n = 100$ și $\alpha = 0.1$ obținem

$$C = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > 2 + \frac{2}{10} z_{0.9}\right\} = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > 2.2563\right\}$$

Cum, din ipoteză avem că $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 470$, pentru $n = 100$ deducem că

$$\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{470}{200} = 2.35$$

ceea ce arată că pentru pragul de semnificație de $\alpha = 10\%$ respingem ipoteza nulă $H_0 : \theta = 2$.

Determinați puterea testului unilateral UMP de mărime α pentru ipotezele

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Ilustrați grafic în R pentru $n = 100$, $\theta_0 = 2$ și $\alpha = 0.1$.

Am văzut că regiunea critică este dată de

$$C = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\}$$

iar din definiția funcției putere avem că

$$pow(\theta) = \mathbb{P}_{H_1}(\mathbf{x} \in C) = \mathbb{P}_{H_1}(\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > a)$$

cu $a = \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$.
Sub ipoteza alternativă avem că

$$\hat{\theta}_n \underset{H_1}{\approx} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right), \quad \theta > \theta_0$$

prin urmare puterea este

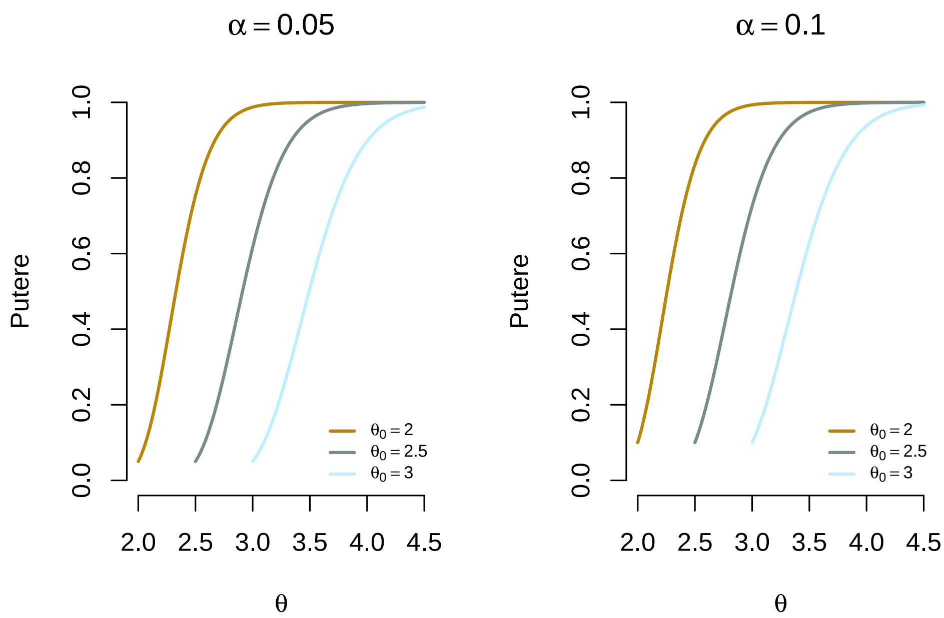
$$pow(\theta) = 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\theta} < \sqrt{n}\frac{a - \theta}{\theta}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{a - \theta}{\theta}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\theta} + \frac{\theta_0}{\theta} z_{1-\alpha}\right), \theta > \theta_0.$$

Particularizând, pentru $\theta_0 = 2$, $n = 100$ și $\alpha = 0.1$ obținem

$$pow(\theta) = 1 - \Phi\left(10\frac{2 - \theta}{\theta} + \frac{2.5631}{\theta}\right), \theta > 2.$$

Ilustrăm în R funcția putere a testului pentru ipotezele $H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$:

```
pow_graf = function(theta, theta0, alpha, n){
  z = qnorm(1-alpha)
  pow = 1 - pnorm(sqrt(n)*(theta0 - theta)/theta + theta0/theta*z)

  return(pow)
}
```



Considerăm testul bilateral pentru ipotezele

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Care este regiunea critică a testului de mărime α?

Considerăm testele unilaterale

$$\begin{array}{llll} \text{Testul A} & H_0 : \theta = \theta_0 & \text{vs} & H_1 : \theta < \theta_0 \\ \text{Testul B} & H_0 : \theta = \theta_0 & \text{vs} & H_1 : \theta > \theta_0 \end{array}$$

Regiunile critice ale celor două teste unilaterale UMP de mărime $\frac{\alpha}{2}$ sunt, după cum am văzut la întrebările precedente, date de

$$C_A = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) < \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$
$$C_B = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

iar regiunea critică a testului bilateral este dată de reuniunea acestora

$$C = C_A \cup C_B = \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) < \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \bigcup \left\{\mathbf{x} \,|\, \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) > \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Știind că $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ această regiune critică se poate scrie sub forma

$$C = \left\{\mathbf{x} \,|\, \left|\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) - \theta_0\right| > \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Determinați puterea testului bilateral de mărime α pentru ipotezele

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Ilustrați grafic în R pentru $n = 100$, $\theta_0 = 2$ și $\alpha = 0.1$.

Pentru a determina puterea testului avem, conform definiției, că

$$pow(\theta) = \mathbb{P}_{H_1}(\mathbf{x} \in C) = 1 - \mathbb{P}_{H_1}(\mathbf{x} \in C^c).$$

Regiunea de acceptare C^c este dată de

$$C^c = \left\{\mathbf{x} \,|\, \theta_0 - \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \hat{\theta}_n(\mathbf{x}) < \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

de unde funcția putere devine

$$pow(\theta) = 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) < \theta_0 + \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \mathbb{P}_{H_1}\left(\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) < \theta_0 - \frac{\theta_0}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Sub ipoteza alternativă, H_1, am văzut că estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$ este repartizat asimptotic

$$\hat{\theta}_n \underset{H_1}{\approx} \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right), \quad \theta \neq \theta_0$$

prin urmare funcția putere se scrie

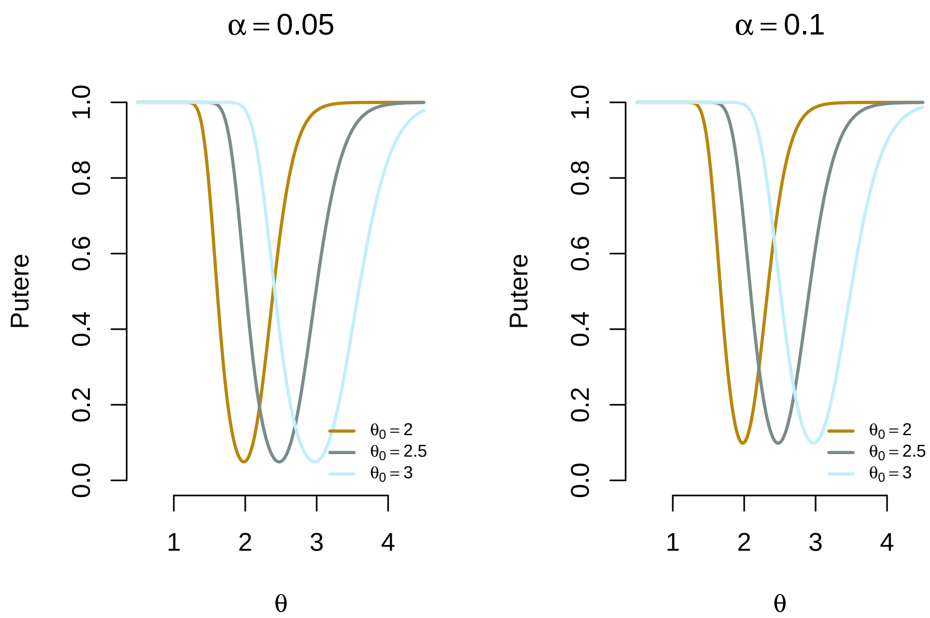
$$pow(\theta) \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\theta} + \frac{\theta_0}{\theta} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\theta} - \frac{\theta_0}{\theta} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right), \theta \neq \theta_0$$

Particularizând, pentru $\theta_0 = 2$, $n = 100$ și $\alpha = 0.1$ obținem

$$pow(\theta) = 1 - \Phi\left(10\frac{2 - \theta}{\theta} + \frac{2.5631}{\theta}\right) + \Phi\left(10\frac{2 - \theta}{\theta} - \frac{2.5631}{\theta}\right), \theta \neq 2.$$

Ilustrăm în R funcția putere a testului bilateral pentru ipotezele $H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$:

```
pow_graf_bilateral = function(theta, theta0, alpha, n){
  z = qnorm(1-alpha/2)
  pow = 1 - pnorm(sqrt(n)*(theta0 - theta)/theta + theta0/theta*z) +
    pnorm(sqrt(n)*(theta0 - theta)/theta - theta0/theta*z)

  return(pow)
}
```



Arătați că testul bilateral este nedeplasat și consistent.

Am văzut că puterea testului bilateral este dată de

$$pow(\theta) \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\theta} + \frac{\theta_0}{\theta} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\theta} - \frac{\theta_0}{\theta} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right), \theta \neq \theta_0$$

Pentru $\theta < \theta_0$ obținem

$$\lim_{n\to\infty} pow(\theta) = 1 - \Phi(\infty) + \Phi(\infty) = 1 - 1 + 1 = 1$$

iar pentru $\theta > \theta_0$

$$\lim_{n\to\infty} pow(\theta) = 1 - \Phi(-\infty) + \Phi(-\infty) = 1 - 0 + 0 = 1$$

deci testul este consistent.

Pentru a vedea dacă testul este nedeplasat trebuie să calculăm minimul funcției putere. Se poate observa că acest minim se atinge pentru $\theta \to \theta_0$, și cum

$$\lim_{\theta\to\theta_0} pow(\theta) = 1 - \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

deducem că testul este nedeplasat.

2.2 Teste bazate pe raportul de verosimilități

Va urma !

Referințe

Merran Evans, Brian Peacock, Nicholas Hastings. 2000. *Statistical Distributions*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience. http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=EED460A11523229329F6DA85E3FF7936.