Tema 1

Exerciţiul 1

Se doreşte verificarea fiabilităţii unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliştilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilişti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceştia depăşesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depăşită precum şi probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depăşită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depăşit in realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un poliţist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Ştiind că proporţia de automobilişti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinaţi dacă poliţistul are dreptate.

Exerciţiul 2

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.
2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

Exerciţiul 3

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Exerciţiul 4

Fie X variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obţinută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu şase feţe. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. $Y = X(7 - X)$ apoi calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $\mathbb{V}[Y]$. Notăm cu $Y_1, \ldots, Y_n$ valorile observate după n lansări independente. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. M_n egală cu valoarea cea mai mare a acestora.

Exerciţiul 5

Fie Y o variabilă aleatoare (v.a.) şi m mediana ei, i.e. $\mathbb{P}(Y \leq m) \geq \frac{1}{2}$ şi $\mathbb{P}(Y \geq m) \geq \frac{1}{2}$. Arătaţi că pentru orice numere reale a şi b aşa incat $m \leq a \leq b$ sau $m \geq a \geq b$ avem

$$\mathbb{E}|Y - a| \leq \mathbb{E}|Y - b|.$$

Exerciţiul 6* [1]

Fie $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $n \geq 0$ un şir de părţi ale lui Ω şi $\mathcal{F}$ algebra generată de acestea (cea mai mică algebră in sensul incluziunii care conţine mulţimile $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$). Fie $(c_1, \dots, c_m)$ un şir de numere reale şi $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ un şir de elemente din $\mathcal{F}$ $(m \geq 0)$. Considerăm inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{P}(B_k) \geq 0 \tag{1}$$

unde $\mathbb{P}$ este o măsură de probabiilitate pe $\mathcal{F}$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:

a) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$

b) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$ care verifică $\mathbb{P}(A_i) = 0$ sau 1, pentru toţi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exerciţiul 7*

Fie $S_0^n = 1$, $S_k^n = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ şi notăm cu V_n^r (respectiv cu W_n^r) probabilitatea ca exact r (respectiv cel puţin r) dintre evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ se realizează. Arătaţi că:

a) $V_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^n$ (Identitatea lui Warning[2])

b) $W_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S_{r+k}^n$

[1] Exerciţiile cu * sunt suplimentare şi nu sunt obligatorii
[2] Mai este intalnită şi sub numele de de Moivre-Jordan