Tema 2

Solutii

Exerciţiul 1

a) In acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ inseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilităţii totale avem:

$$\mathbb{P}(2b) = \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b) = \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b} = \frac{b}{b+r}.$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\mathbb{P}(1b|2b) = \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)} = \frac{\frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.$$

c) Folosim inducţie. Pentru $n=2$ am văzut că propoziţia este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ şi vrem să arătăm că relaţia rămane adevărată şi pentru $k = n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducţie ($\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducţie avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d]$. Inlucuind această relaţie in expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obţinem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\ldots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\ldots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\ldots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilităţii totale că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1,\ldots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\ldots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\ldots,B_{n-1})\ldots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\ldots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\ldots(b+r+nd)}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\
&= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\
&+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\
&= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\
&+\frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\cdots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\
&= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.
\end{aligned}$$

Observăm că

$$\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})} = \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}} = \frac{b+nd}{b+r+nd}\to 1.$$

Exerciţiul 2

a) Vom folosi următoarele notaţii: d-şoferul are nevoie de poliţă de asigurare; $d1$, $d2$- şoferul are nevoie de poliţă de asigurare in primul respectiv cel de-al doilea an; F, M- şoferul este o femeie ŗespectiv un bărbat. Probabilitatea pe care o căutăm este:

$$\mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(d|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(d|M)\mathbb{P}(M) = \beta\cdot\frac{1}{2} + \alpha\cdot\frac{1}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

b) In această situaţie probabilitatea este:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d1,d2) &= \mathbb{P}(d1,d2|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(d1,d2|M)\mathbb{P}(M)\\
&= \mathbb{P}(d1|F)\mathbb{P}(d2|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(d1|M)\mathbb{P}(d2|M)\mathbb{P}(M)\\
&= \frac{\beta^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}.
\end{aligned}$$

c) Avem $\mathbb{P}(A_2|A_1) - \mathbb{P}(A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1,A_2)-\mathbb{P}^2(A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}$ şi din punctele precedente ştim că $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ şi că $\mathbb{P}(A_1,A_2) = \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}$. Astfel ob c tinem $\mathbb{P}(A_2|A_1) - \mathbb{P}(A_1) = \frac{(\alpha-\beta)^2}{2(\alpha+\beta)} \geq 0$.

d) Probabilitatea pe care o căutăm este:

$$\mathbb{P}(F|d) = \frac{\mathbb{P}(d|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(d|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(d|M)\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{\beta}{2}}{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$