Laborator 6

Elemente de estimare punctuală

Obiectivul acestui laborator este de a ilustra noțiunea de consistență a unui estimator precum și de a compara mai mulți estimatori.

1 Proprietăți ale estimatorilor

1.1 Exemplu de comparare a trei estimatori

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație normală de medie μ și varianță σ^2. Atunci

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\mu}_2 = M_n \,(\text{mediana}\,), \quad \hat{\mu}_3 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

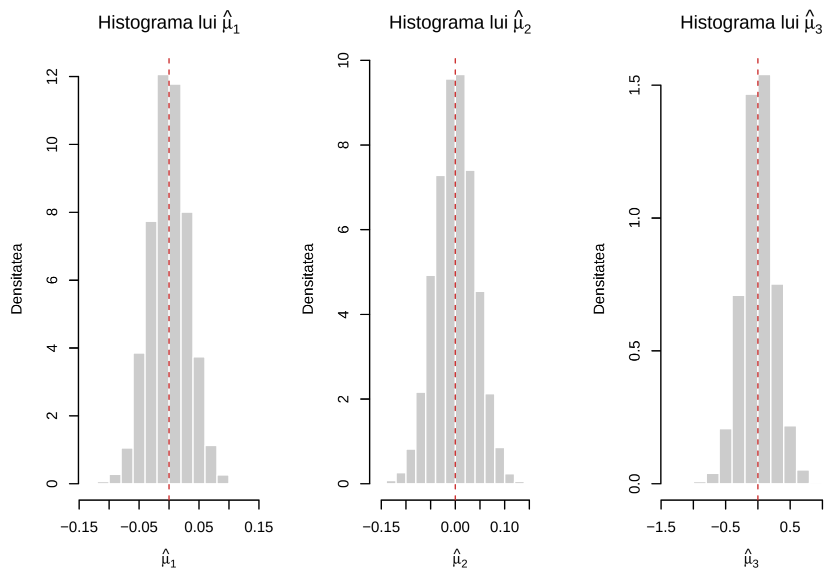
sunt trei estimatori punctuali pentru μ. Creați o funcție care să ilustreze cum sunt repartizați cei trei estimatori. Începeți cu $n = 10$, $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ și trasați histogramele pentru a-i compara. Ce se întâmplă dacă schimbați n, μ sau σ^2 ?

Vom crea o funcție numită `norm_estimators` care va construi repartițiile celor trei estimatori:

```
norm_estimators = function(n, mu, sigma, S){
  # Initializam
  mu1 = numeric(S)
  mu2 = numeric(S)
  mu3 = numeric(S)

  # repetam experimentul de S ori
  for (i in 1:S){
    x = rnorm(n, mean = mu, sd = sigma)

    # calculam estimatorii
    mu1[i] = mean(x)
    mu2[i] = median(x)
    mu3[i] = (min(x)+max(x))/2
  }

  # afisam variantele estimatorilor
  print(cbind(var_mu1 = var(mu1), var_mu2 = var(mu2), var_mu3 = var(mu3)))

 return(cbind(mu1 = mu1, mu2 = mu2, mu3 = mu3))

}
```

Pentru a ilustra grafic histogramele celor trei estimatori, considerăm $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ și avem:

```
         var_mu1     var_mu2    var_mu3
[1,] 0.001004297 0.001616957 0.06173788
```



1.2 Ilustrarea consistenței unui estimator

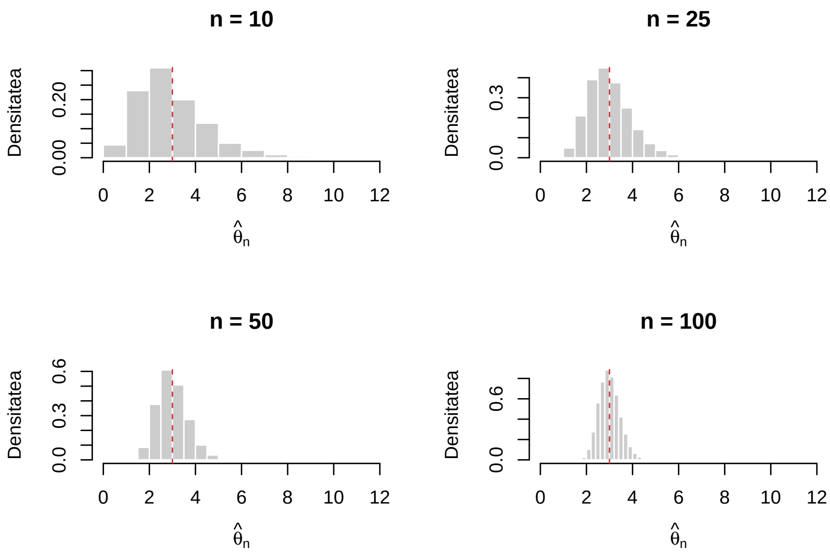
Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație $Pois(\theta)$. Ilustrați grafic consistența estimatorului $\hat{\theta}_n = S_n^2$ trasând histograma repartiției lui $\hat{\theta}_n$ pentru $n \in \{10, 25, 50, 100\}$. Ce observați?

Considerăm funcția `pois_est` care pentru θ fixat simulează repartiția estimatorului $\hat{\theta}_n$:

```
pois_est1 = function(n, theta, S){
  # initializare
  sigma1 = numeric(S)

  for (i in 1:S){
    x = rpois(n, theta)
    sigma1[i] = var(x)
  }
  # afisam varianta estimatorului
  print(paste0("Pentru n = ", n," varianta estimatorului este ", var(sigma1)))
  return(sigma1)
}
```

Considerând $\theta = 3$ și $n \in \{10, 25, 50, 100\}$ avem:

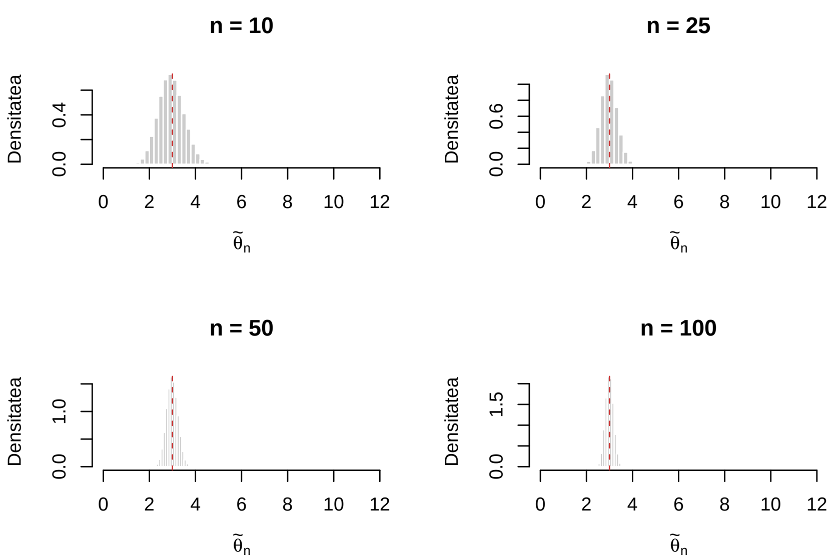
```
[1] "Pentru n = 10 varianta estimatorului este 2.36640535383542"
[1] "Pentru n = 25 varianta estimatorului este 0.867491312476916"
[1] "Pentru n = 50 varianta estimatorului este 0.423889651410313"
[1] "Pentru n = 100 varianta estimatorului este 0.209445339803901"
```



Ce se întâmplă dacă în loc de $\hat{\theta}_n$ considerăm estimatorul $\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n$ sau estimatorul $\dot{\theta}_n = \sqrt{\bar{X}_n S_n^2}$?

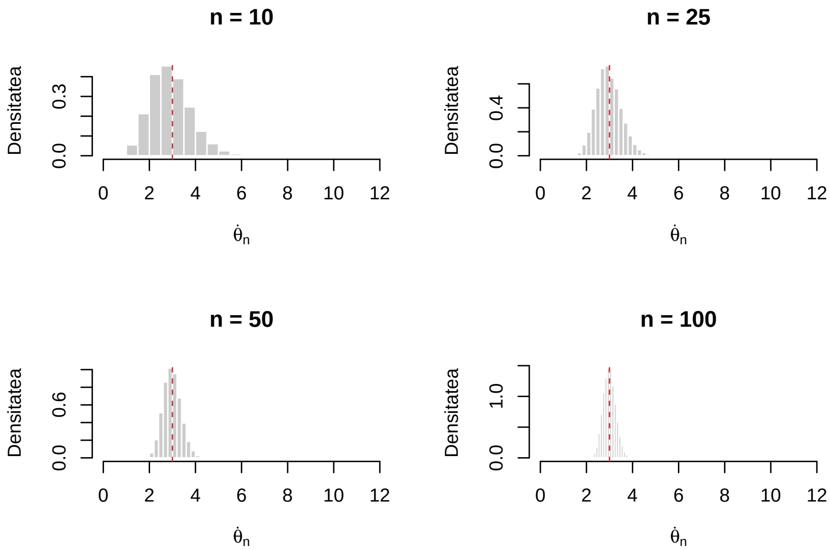
Pentru $\tilde{\theta}_n$ avem

```
[1] "Pentru n = 10 varianta estimatorului este 0.298847741178824"
[1] "Pentru n = 25 varianta estimatorului este 0.120073798790536"
[1] "Pentru n = 50 varianta estimatorului este 0.059625419400548"
[1] "Pentru n = 100 varianta estimatorului este 0.030382726300286"
```



iar pentru $\dot{\theta}_n$ avem

```
[1] "Pentru n = 10 varianta estimatorului este 0.768686527564423"
[1] "Pentru n = 25 varianta estimatorului este 0.298405855235567"
[1] "Pentru n = 50 varianta estimatorului este 0.148305598496592"
[1] "Pentru n = 100 varianta estimatorului este 0.0749605083080048"
```



2 Estimare prin metoda verosimilității maxime

2.1 Exemplu: EVM nu este întotdeauna media eșantionului chiar dacă $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \theta$

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație Laplace $L(\theta, c)$ a cărei densitate este dată de formula

$$f_{\theta,c}(x) = \frac{1}{2c} e^{-\frac{|x-\theta|}{c}}, \quad -\infty < x < \infty$$

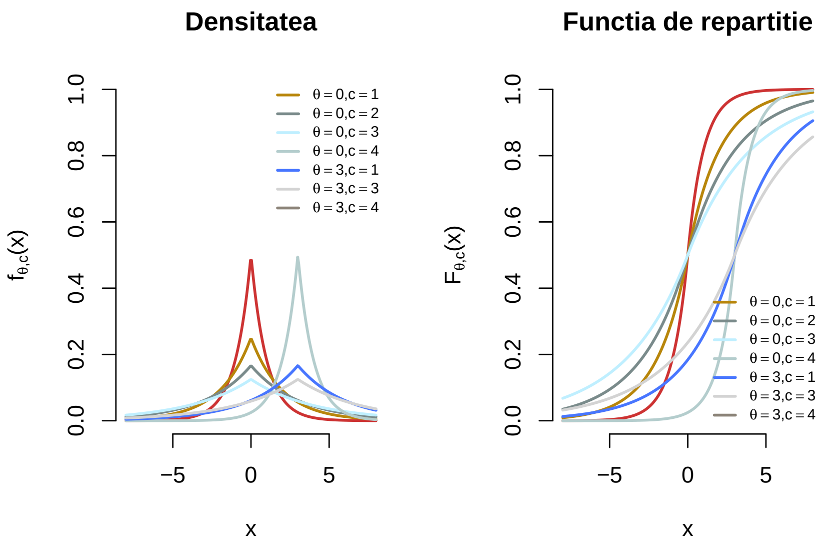
a) Ilustrați grafic densitatea și funcția de repartiție a repartiției Laplace pentru diferite valori ale parametrilor θ (de locație) și c (de scală), e.g. $\theta \in \{0, 3\}$ și $c \in \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ pentru θ.

a) Se poate arăta cu ușurință că funcția de repartiție a repartiției Laplace $L(\theta, c)$ este

$$F_{\theta,c}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-\theta)\left(1 - e^{-\frac{|x-\theta|}{c}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{|x-\theta|}{c}}, & x < \theta \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{|x-\theta|}{c}}, & x \geq \theta \end{cases}$$

Ilustrarea grafică a densității și a funcției de repartiție pentru repartiția Laplace:



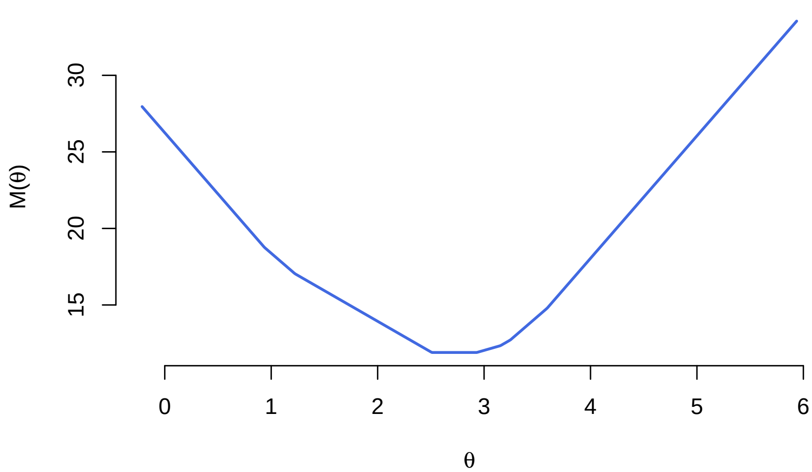
b) Pentru a determina estimatorul de verosimilitate maximă să observăm că funcția de verosimilitate este

$$L(\theta|\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2c}e^{-\frac{|X_i-\theta|}{c}}\right) = \frac{1}{(2c)^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{|X_i-\theta|}{c}}$$

și acesta ia valoarea maximă pentru toate valorile lui θ care minimizează funcția de la exponent

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{n}|X_i-\theta| = \sum_{i=1}^{n}|X_{(i)}-\theta|,$$

unde $x_{(i)}$ este statistica de ordine de rang i. Se poate vedea că funcția $M(\theta)$ este continuă și afină pe porțiuni din figura de mai jos (pentru un eșantion de talie 10 dintr-o populație $L(3,1)$ - creați o funcție care vă permite să generați observații repartizate Laplace).



Observăm că dacă θ se află între statistica de ordine de rang m și cea de rang $m+1$, i.e. $X_{(m)} \leq \theta \leq X_{(m+1)}$, atunci am avea că $X_{(i)} \leq X_{(m)} \leq \theta$ dacă $i \leq m$ și $\theta \leq X_{(m+1)} \leq X_{(i)}$ dacă $m+1 \leq i \leq n$, prin urmare

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^{n} |X_{(i)} - \theta| = \sum_{i=1}^{m} (\theta - X_{(i)}) + \sum_{i=m+1}^{n} (X_{(i)} - \theta)$$

deci dacă $X_{(m)} < \theta < X_{(m+1)}$ atunci

$$\frac{d}{d\theta} M(\theta) = m - (n-m) = 2m - n.$$

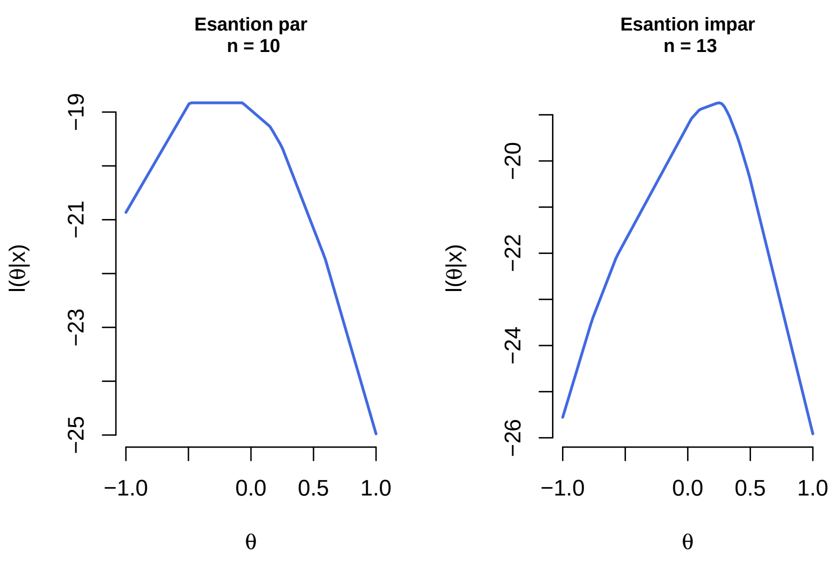
Astfel, $M'(\theta) < 0$ (și $M(\theta)$ este descrescătoare) dacă $m < \frac{n}{2}$ și $M'(\theta) > 0$ (și $M(\theta)$ este crescătoare) dacă $m > \frac{n}{2}$. Dacă $n = 2k+1$ este impar, atunci $\frac{n}{2} = k + \frac{1}{2}$ iar $M(\theta)$ este strict descrescătoare dacă $\theta < X_{(k+1)}$ și strict crescătoare dacă $\theta > X_{(k+1)}$ de unde deducem că minimul se atinge pentru $\theta = X_{(k+1)}$.

Dacă $n = 2k$ este par atunci, raționând asemănător, deducem că $M(\theta)$ este minimizată pentru orice punct din intervalul $(X_{(k)}, X_{(k+1)})$, deci orice punct din acest interval va maximiza și funcția de verosimilitate. Prin convenție alegem estimatorul de verosimilitate maximă să fie mijlocul acestui interval, i.e. $\theta = \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}$.

Prin urmare am găsit că estimatorul de verosimilitate maximă este mediana eșantionului

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n \text{ impar} \\ \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & n \text{ par} \end{cases}$$

Mai jos avem ilustrat logaritmul funcției de verosimilitate pentru un eșantion de volum par (stânga) și unul de volum impar (dreapta):



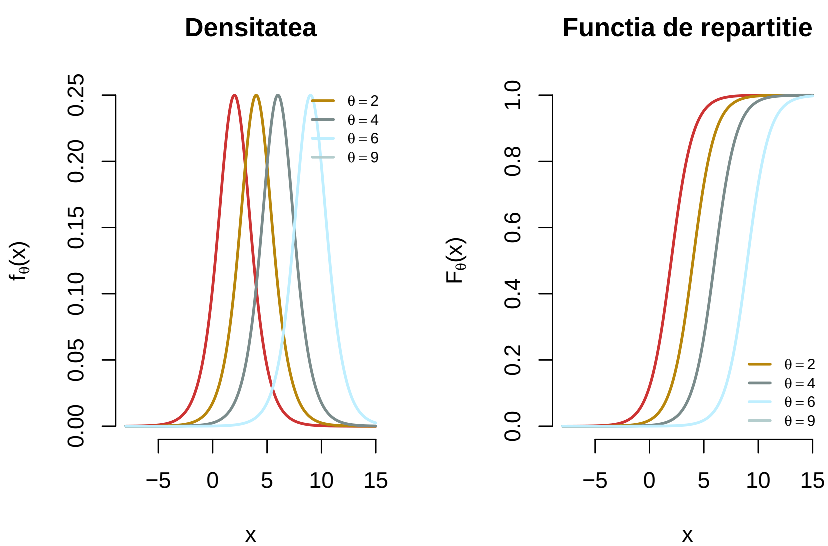
2.2 Exemplu de EVM determinat prin soluții numerice

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație logistică a cărei densitate este dată de formula

$$f_\theta(x) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\left(1+e^{-(x-\theta)}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$$

Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n$ pentru θ.

Densitatea de repartiție și funcția de repartiție a repartiției logistice sunt ilustrate mai jos (în R se folosesc funcțiile: `rlogis`, `dlogis`, `plogis` și respectiv `qlogis`):



Observăm că funcția de verosimilitate este dată de

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{\left(1+e^{-(x_i-\theta)}\right)^2}$$

iar logaritmul funcției de verosimilitate este

$$l(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(x_i) = n\theta - n\bar{x}_n - 2\sum_{i=1}^{n} \log\left(1+e^{-(x_i-\theta)}\right).$$

Pentru a găsi valoarea lui θ care maximizează logaritmul funcției de verosimilitate și prin urmare a funcției de verosimilitate trebuie să rezolvăm ecuația $l'(\theta|\mathbf{x}) = 0$, unde derivata lui $l(\theta|\mathbf{x})$ este

$$l'(\theta|\mathbf{x}) = n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{1+e^{-(x_i-\theta)}}$$

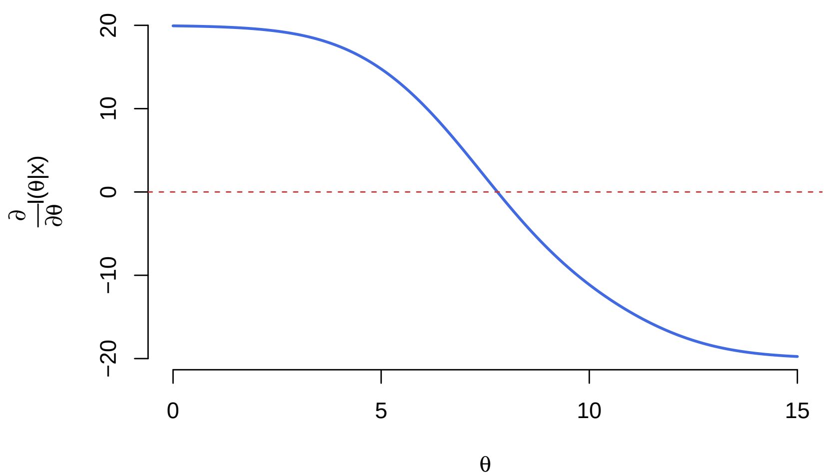
ceea ce conduce la ecuația

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{1+e^{-(x_i-\theta)}} = \frac{n}{2} \qquad (\star)$$

Chiar dacă această ecuație nu se simplifică, se poate arăta că această ecuația admite soluție unică. Observăm că derivata parțiala a membrului drept în $(\star)$ devine

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{1+e^{-(x_i-\theta)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\theta)}}{\left(1+e^{-(x_i-\theta)}\right)^2} > 0$$

ceea ce arată că membrul stâng este o funcție strict crescătoare în θ. Cum membrul stâng în $(\star)$ tinde spre 0 atunci când $\theta \to -\infty$ și spre n pentru $\theta \to \infty$ deducem că ecuația $(\star)$ admite soluție unică (vezi graficul de mai jos).



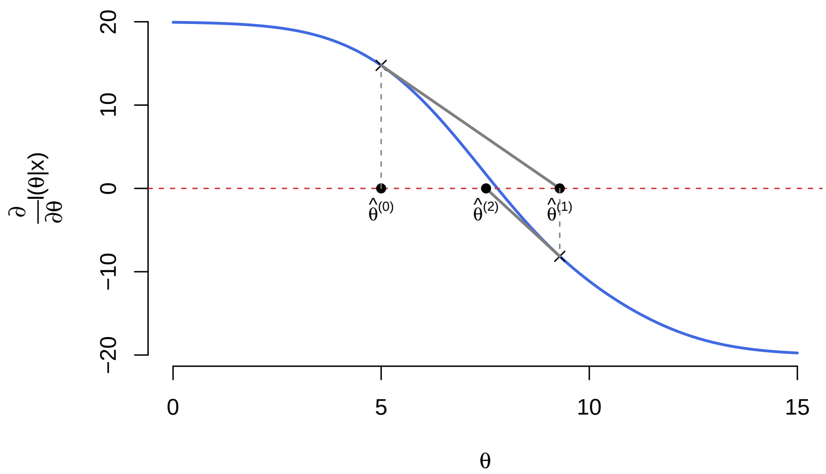
Cum nu putem găsi o soluție a ecuației $l'(\theta|\curvearrowleft) = 0$ sub formă compactă, este necesar să apelăm la metode numerice. O astfel de metodă numerică este binecunoscuta metodă a lui Newton-Raphson. Metoda presupune să începem cu o valoare (soluție) inițială $\hat{\theta}^{(0)}$ și să alegem, plecând de la aceasta, o nouă valoare $\hat{\theta}^{(1)}$ definită prin

$$\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\theta}^{(0)} - \frac{l'\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)}{l''\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)},$$

adică $\hat{\theta}^{(1)}$ este intersecția cu axa absciselor a tangentei în punctul $\left(\hat{\theta}^{(0)}, l'\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)\right)$ la graficul funcției $l'(\theta)$. Ideea este de a itera procesul până când soluția converge, cu alte cuvinte pornind de la o valoare *rezonabilă* de start $\hat{\theta}^{(0)}$ la pasul $k+1$ avem

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \frac{l'\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)}{l''\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)}$$

și oprim procesul atunco când k este suficient de mare și/sau $\left|\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}\right|$ este suficient de mic. Următorul grafic ilustrează grafic algoritmul lui Newton:



Obs: Singurul lucru care se schimbă atunci când trecem de la scalar la vector, este funcția $l(\theta)$ care acum este o funcție de $p > 1$ variabile, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^\intercal \in \mathbb{R}^p$. În acest context $l'(\theta)$ este un vector de derivate parțiale iar $l''(\theta)$ este o matrice de derivate parțiale de ordin doi. Prin urmare itarațiile din metoda lui Newton sunt

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \left[l''\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)\right]^{-1} l'\left(\hat{\theta}^{(k)}\right)$$

unde $[\cdot]^{-1}$ este pseudoinversa unei matrici.

Funcția de mai jos implementează metoada lui Newton pentru cazul multidimensional:

```
# Metoda lui Newton

newton <- function(f, df, x0, eps=1e-08, maxiter=1000, ...) {
  # in caz ca nu e incarcat pachetul sa putem accesa pseudoinversa
  if(!exists("ginv")) library(MASS)

  x <- x0
  k <- 0

  repeat {
    k <- k + 1

    x.new <- x - as.numeric(ginv(df(x, ...)) %*% f(x, ...))

    if(mean(abs(x.new - x)) < eps | k >= maxiter) {
      if(k >= maxiter) warning("S-a atins numarul maxim de iteratii!")
      break
    }
    x <- x.new
  }
  out <- list(solution = x.new, value = f(x.new, ...), iter = k)

  return(out)
}
```

Să presupunem că am observat următorul eșantion de talie 20 din repartiția logistică:

```
 [1]  6.996304  9.970107 12.304991 11.259549  6.326912  5.378941  4.299639
 [8]  8.484635  5.601117  7.094335  6.324731  6.868456  9.753360  8.042095
[15]  8.227830 10.977982  7.743096  7.722159  8.562884  6.968356
```

și aplicând metoda lui Newton găsim estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_n = 7.7933$ după numai 3 iterații (datele au fost simulate folosin $\theta = 7.5$).