

Tema 2

Exercițiul 1

Fie $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție strict crescătoare. Arătați că

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)}, \text{ pentru } a > 0.$$

Exercițiul 2

Fie X o variabilă aleatoare cu valori în \mathbb{N} , așa încât $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toți $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
- ii) Pentru toți $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinați

- i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.
- ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

c) Dacă $X \sim \text{Geom}(p)$, $0 < p < 1$ calculați $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

Exercițiul 3

Arătați că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în \mathbb{N} atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

Exercițiul 4

a) Fie X o variabilă repartizată exponențial (de parametru α). Arătați că are loc următoarea relație (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad (1)$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relația (1). Arătați că X este repartizată exponențial.

Exercițiul 5

Un proces Bernoulli de parametru p este un șir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n \geq 1}$ cu $X_n \in \{0, 1\}$ și $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$.

- a) Arătați că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n, p)$ și calculați media și varianța acesteia.
- b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \dots = X_L$ și M cel mai mare număr natural așa încât $X_{L+1} = X_{L+2} = \dots = X_{L+M}$. Găsiți distribuțiile v.a. L și M .
- c) Arătați că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M]$, $\mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ și calculați $Cov[L, M]$.
- d) Calculați $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M = n \mid L = k)$.

Exercițiul 6* ¹

¹Exercițiile cu * sunt suplimentare și nu sunt obligatorii