Tema 5

Exercițiul 1

Considerăm T_1 și T_2, doi estimatori nedeplasați ai parametrului θ de variante V_1 și respectiv V_2. Fie T_3 estimatorul

$$T_3 = \alpha T_1 + (1-\alpha)T_2.$$

a) Arătați că estimatorul T_3 este nedeplasat.

b) Determinați constanta α pentru care estimatorul T_3 are varianța minimă.

c) Presupunând că ipotezele teoremei Rao-Cramer sunt verificate, este posibil ca ambii estimatori T_1 și T_2 să fie eficienți?

Exercițiul 2

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație $f_\theta(x)$ dată de:

a) $f_\theta(x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2\dots$, $\theta > 0$

b) $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$

c) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$, $\theta > 0$ iar $\alpha > 0$ cunoscut

Pentru fiecare caz în parte determinați un estimator pentru θ și studiați calitățile acestuia (deplasare, consistență, eficiență).

Exercițiul 3

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație $\mathcal{U}([0,\theta])$ și vrem să estimăm parametrul $\theta > 0$.

1. Determinați prin metoda momentelor un estimator $\hat{\theta}_1$ al lui θ.

Considerăm următorii estimatori:

$$\hat{\theta}_2 = 2\hat{F}_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{și} \quad \hat{\theta}_3 = \max_{1\leq i\leq n} X_i$$

unde $\hat{F}_n^{-1}$ este funcția cuantilă (inversa generalizată) asociată funcției de repartiție empirică.

2. Explicați ideile care au condus la propunerea estimatorilor $\hat{\theta}_2$ și $\hat{\theta}_3$.
3. Determinați legile limită a estimatorilor $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ și $\hat{\theta}_3$. Ce puteți spune despre proprietățile acestor estimatori?
4. Comparați performanțele celor trei estimatori.
5. Dați un interval de încredere (ne asimptotic) de nivel de încredere $1-\alpha$ pentru θ.

Exercițiul 4

Dintr-un total de 100 de persoane chestionate, 51 au declarat că vor vota cu candidatul Bugs Bunny la următoarele alegeri parlamentare. Dați un interval de încredere de nivel 95% pentru proporția p, de intenții de vot pentru acest candidat în populație. Aceeași întrebare dacă sondajul ar fi avut loc pentru un eșantion de 1000 de persoane. Câți electori ar trebui întrebați pentru a avea o precizie de cel puțin 2%?

Exercițiul 5

Un producător de becuri anunță că durata medie a becurilor pe care le produce este de 170 de ore. Pentru a verifica această afirmație, un corp de control al protecției consumatorilor extrage aleator un eșantion de 100 de becuri dintr-un lot de fabricație și, după experimentare, constată că eșantionul are o durată medie de viață de 158 de ore cu o abatere standard de 30 de ore. Dacă presupunem că durata de viață a becurilor urmează o lege normală, putem deduce din această investigație că afirmația producătorului este falsă?

Exercițiul 6

Pentru a estima precizia unui termometru, s-au realizat $n = 100$ de măsurători independente a temperaturii dintr-un lichid menținut la temperatura constantă de 20 de grade Celsius. Observațiile $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ au condus la valoarea $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40011$. Construiți un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru precizia termometrului, măsurată prin varianța σ^2 a măsurătorilor.

Exercițiul 7

Numărul de blocaje de trafic mai mari de un minut de pe linia tramvaiului 41, pe parcursul unei zile, se presupune că urmează o repartiție Poisson de medie necunoscută și ne propunem să estimăm acest parametru plecând de la un eșantion de talie 200 (s-au urmărit blocajele pe parcursul a 200 de zile). Momentele empirice calculate pe acest eșantion au condus la $\bar{x}_{200} = 3$ și $s_{200}^2 = 3.2$. Determinați un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru media numărului de blocaje.