Tema 1

Exerciţiul 1

Se doreşte verificarea fiabilităţii unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliştilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilişti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceştia depăşesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depăşită precum şi probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depăşită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depăşit in realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un poliţist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Ştiind că proporţia de automobilişti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinaţi dacă poliţistul are dreptate.

Exerciţiul 2

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.
2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

Exerciţiul 3

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Exerciţiul 4

Fie X variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obţinută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu şase feţe. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. $Y = X(7-X)$ apoi calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $\mathbb{V}[Y]$. Notăm cu $Y_1, \dots, Y_n$ valorile observate după n lansări independente. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. M_n egală cu valoarea cea mai mare a acestora.

Exerciţiul 5

Arătaţi că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

Exercițiul 6

a) Fie X o variabilă repartizată exponenţial (de parametru α). Arătaţi că are loc următoarea relatţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relaţia (1). Arătaţi că X este repartizată exponenţial.

Exercițiul 7

O urnă conţine r bile roşii şi b bile albastre. O bilă este extrasă la intamplare din urnă, i se notează culoarea şi este intoarsă in urnă impreună cu alte d bile de aceeaşi culoare. Repetăm acest proces la nesfarşit. Calculaţi:

a) Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.

b) Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră ştiind că a doua bilă este albastră.

c) Fie B_n evenimentul ca a n-a bilă extrasă să fie albastră. Arătaţi că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall\, n \geq 1$.

d) Probabilitatea ca prima bilă este albastră ştiind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiţi valoarea limită a acestei probabilităţi.

Exercițiul 8

Ştim că intr-un lot de 5 tranzistori avem 2 care sunt defecţi. Tranzistorii sunt testaţi, unul cate unul, pană cand cei doi tranzistori au fost identificaţi. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect şi N_2 numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Scrieţi un tablou in care să descrieţi legea cuplului (N_1, N_2). Calculaţi $\mathbb{E}[N_1]$ şi $\mathbb{E}[N_2]$.

Exercițiul 9

Fie (X_1, X_2) vectorul aleator distribuit uniform pe discul $D(R)$ centrat in origine şi de rază R. Densitatea vectorului (X_1, X_2) este dată de

$$f(x_1, x_2) = c\mathbf{1}_{D(R)}(x_1, x_2)$$

unde c este o constantă pozitivă.

1. Determinaţi constanta c.
2. Determinaţi legile marginale ale lui X_1 şi X_2.
3. Fie L distanţa de la punctul (X_1, X_2) la origine. Găsiţi funcţia de repartiţie a lui L, legea lui L şi media sa.

Exercițiul 10

Un proces Bernoulli de parametru p este un şir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n\geq 1}$ cu $X_n \in \{0,1\}$ şi $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$.

a) Arătaţi că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n,p)$ şi calculaţi media şi varianţa acesteia.

b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ şi M cel mai mare număr natural aşa incat $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$. Găsiţi distribuţiile v.a. L şi M.

c) Arătaţi că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M]$, $\mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ şi calculaţi $Cov[L,M]$.

d) Calculaţi $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k)$.