Tema 3

Soluții

Exercițiul 1

a) Fie X nivelul de zgomot produs de o maşină de spălat luată la intamplare şi $\bar{X}_{10}$ media unui eşantion de talie 10. Presupunem că aproximarea gaussiană are loc pentru $n = 10$. Avem

$$\bar{X}_{10} \sim \mathcal{N}\left(44, \frac{5^2}{10}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{10} > 48) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{48-44}{5/\sqrt{10}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Observăm că această proabilitate este foarte mică.

b) Fie X greutatea unei persoane luate la intamplare şi $\bar{X}_{100}$ greutatea media a unui eşantion de 100 de persoane. Aplicand approximarea gaussiană (Teorema Limită Centrală) avem

$$\bar{X}_{100} \simeq \mathcal{N}\left(66.3, \frac{15.6^2}{100}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} > \frac{7000}{100}) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{70-66.3}{15.6/\sqrt{100}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.37) = 0.0089$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercițiul 2

Am văzut la curs că

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right]^2.$$

Dacă notăm cu $Z_i = X_i - \mu$ atunci observăm că v.a. Z_i sunt i.i.d. iar $\mathbb{E}[Z_i] = 0$, $\mathbb{E}[Z_i^2] = \sigma^2$ şi $\mathbb{E}[Z_i^4] = \mu_4$. Avem că

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^{n}(Z_i)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(Z_i)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 + 2\sum\sum_{i<j} Z_i Z_j\right)^2 \\ &= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i)^2 - \frac{2}{n}\sum\sum_{i<j} Z_i Z_j\end{aligned}$$

de unde obţinem

$$
\begin{aligned}
(n-1)^2\mathbb{E}[(S^2)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i)^2 - \frac{2}{n}\sum\sum_{i<j} Z_iZ_j\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^4 + 2\sum\sum_{i<j} Z_i^2Z_j^2\right] - \frac{4(n-1)}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k^2\right)\left(\sum\sum_{i<j} Z_iZ_j\right)\right] \\
&+ \frac{4}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum\sum_{i<j} Z_iZ_j\right)^2\right] \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

Pentru primul termen din suma de mai sus avem

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^4 + 2\sum\sum_{i<j} Z_i^2Z_j^2\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(n\mu_4 + n(n-1)\sigma^4\right).$$

Termenul al doilea din ecuaţia ($\star$) este 0 deoarece conţine sau termeni de forma $\mathbb{E}[Z_iZ_jZ_k^2]$, cu $i \neq j \neq k$, sau termeni de forma $\mathbb{E}[Z_jZ_k^3]$ cu $j \neq k$.

Pentru ultimul termen avem din ecuaţia ($\star$) avem

$$\frac{4}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum\sum_{i<j} Z_iZ_j\right)^2\right] = \frac{4}{n^2}\mathbb{E}\left[\sum\sum_{i<j} Z_i^2Z_j^2\right] = \frac{2(n-1)}{n}\sigma^4,$$

restul termenilor fiind zero deoarece sunt de forma $\mathbb{E}[Z_i^2Z_jZ_k]$ sau $\mathbb{E}[Z_iZ_jZ_kZ_l]$ cu $i \neq j \neq k \neq l$.

Combinand rezultatele obţinem că

$$
\begin{aligned}
(n-1)^2\mathbb{V}[S^2] &= \frac{(n-1)^2}{n}\mu_4 + \frac{(n-1)^3}{n}\sigma^4 + 2\frac{n-1}{n}\sigma^4 - (n-1)^2\mathbb{E}[S^2]^2 \\
&= \frac{(n-1)^2}{n}\mu_4 + \frac{(n-1)(3-n)}{n}\sigma^4
\end{aligned}
$$

prin urmare $\mathbb{V}[S^2] = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$.

In cazul normal avem că $\mu_4 = 3\sigma^4$ (de ce ?) deci $\mathbb{V}[S^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ (vedeţi leagea χ^2).

Exerciţiul 3

Dacă notăm cu $Z_i = X_i - \mu$, atunci $\bar{X} - \mu = \bar{Z}$ şi $\mathbb{E}[\bar{Z}] = 0$. Mai mult,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\bar{Z}^2$$

prin urmare

$$Cov(\bar{X}, S^2) = Cov(\bar{X} - \mu, S^2) = Cov\left(\bar{Z}, \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\bar{Z}^2\right]\right)$$
$$= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\bar{Z}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\bar{Z}^2\right)\right] = \frac{1}{n-1}\left[\mathbb{E}\left[\bar{Z}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)\right] - n\mathbb{E}[\bar{Z}^3]\right]$$

Cum

$$\mathbb{E}\left[\bar{Z}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right)\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^3\right] = \mu_3$$

şi

$$\mathbb{E}[\bar{Z}^3] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)\right] = \frac{1}{n^3}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^3\right] = \frac{\mu_3}{n^2}$$

rezultă că $Cov(\bar{X}, S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\mu_3 - \frac{\mu_3}{n}\right) = \frac{\mu_3}{n}$.

Exercițiul 4

a) Observăm că funcția de repartiție pentru $X \sim \mathcal{U}(0,\theta)$ este $F_\theta(x) = \frac{x}{\theta}$ dacă $x \in (0,\theta)$ și $F_\theta(x) = 0$ altfel. Cum $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt i.i.d. $\mathcal{U}(0,\theta)$, funcția de repartiție pentru $\hat{\theta}_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ este

$$F_{\hat{\theta}_n}(x) = \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}_\theta(X_1 \leq x, \cdots, X_n \leq x) = (\mathbb{P}_\theta(X_1 \leq x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, \quad x \in (0,\theta).$$

b) Pentru a arăta că $\hat{\theta}_n$ este consistent pentru θ trebuie verificat că $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$. Putem remarca că $\theta \geq \hat{\theta}_n$ deoarece fiecare X_i este strict mai mic decât θ. Pentru $\varepsilon > 0$, avem

$$\mathbb{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}_\theta(\theta - \theta_n > \varepsilon) = \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n \leq \theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

Dacă $\varepsilon < \theta$ atunci membrul drept converge la 0 pentru $n \to \infty$ de unde obținem concluzia. În caz că $\varepsilon > \theta$ atunci membrul drept este egal cu 0 de unde și limita.

c) Pentru a verifica dacă estimatorul $\hat{\theta}_n$ este deplasat trebuie să calculăm $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n]$. Cum funcția de repartiție a lui $\hat{\theta}_n$ este $F_{\hat{\theta}_n}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ putem găsi cu ușurință că densitatea este $f_{\hat{\theta}_n}(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}$ pentru $x \in (0,\theta)$ și 0 altfel. Prin urmare

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \int_0^\theta x f_{\hat{\theta}_n}(x)\,dx = n\int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^n dx \overset{y=x/\theta}{=} n\theta\int_0^1 y^n\,dy = \frac{n\theta}{n+1}.$$

Cum $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] \neq \theta$ concluzionăm că estimatorul este deplasat. Dacă definim $\tilde{\theta}_n = \frac{n}{n+1}\theta$, atunci se observă că $\tilde{\theta}_n$ este nedeplasat și cum $\hat{\theta}_n$ era consistent iar $\frac{n}{n+1}$ converge la 1 deducem că $\tilde{\theta}_n$ este un estimator consistent.

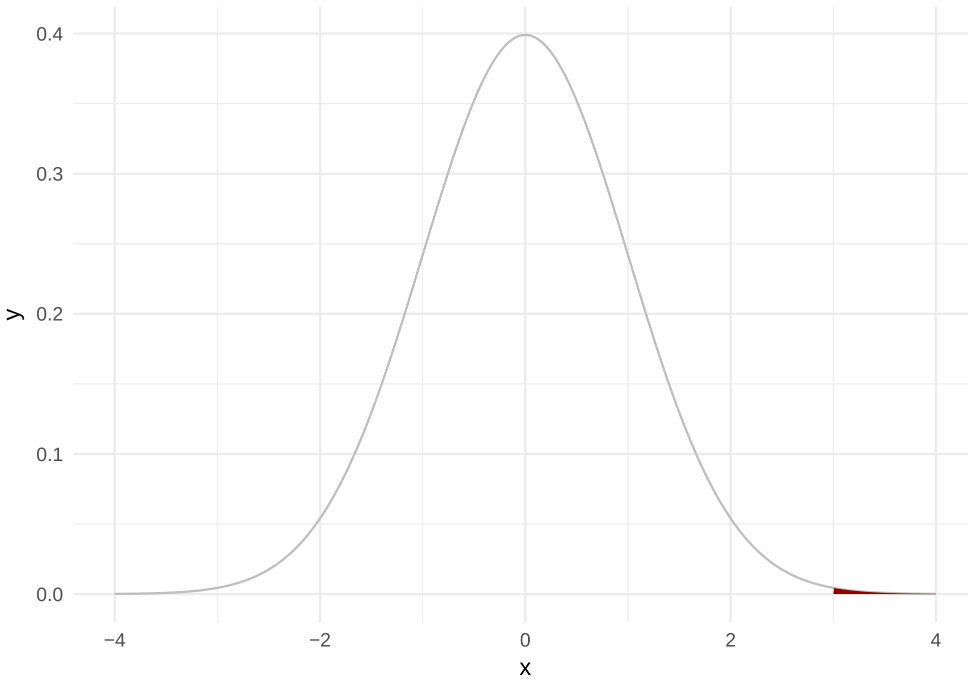
Exercițiul 5

a) Se observă cu uşurinţă că

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \cdots, X_n \leq x) \overset{indep.}{=} F(x)^n \\
h_n(x) &= \frac{d}{dx}H_n(x) = nf(x)F(x)^{n-1} \\
H_1(x) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \cdots, X_n > x) \overset{indep.}{=} 1 - (1 - F(x))^n \\
h_1(x) &= \frac{d}{dx}H_1(x) = nf(x)\left(1 - F(x)\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

b) Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Problema cere să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(X > \mu + 3\sigma)$. Avem (vezi porţiunea roşie din figură)

$$\mathbb{P}(X > \mu + 3\sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > 3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3\right) = 0.00135$$



c) Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un e santion de talie $n = 100$ dintr-o populaţie normală $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ şi fie $Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i > \mu + 3\sigma\}}$ variabilele Bernoulli care iau valoarea 1 atunci cand $X_i > \mu + 3\sigma$ şi 0 in rest. Problema revine la a determina probabilitatea

$$\mathbb{P}(Z_1 + \cdots Z_n = 1) \overset{i.i.d.}{=} \binom{n}{1}\mathbb{P}(Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_1 = 0)^{n-1} = n\mathbb{P}(X_1 > \mu + 3\sigma)\mathbb{P}(X_1 < \mu + 3\sigma)^{n-1} \simeq 0.11809$$

d) Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un e santion de talie $n = 100$ dintr-o populaţie normală $\mathcal{N}(0, 1)$. Problema ne cere să găsim valoarea lui x pentru care probabilitatea $\mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, \cdots, X_n < x) = 0.99$. Prin urmare vrem să găsim pe x aşa incat $H_n(x) = 0.99$. Din punctul a) avem $H_n(x) = F(x)^n$ deci $x = F^{-1}(\sqrt[n]{0.99}) = 3.7177$.

e) Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un e santion de talie $n = 50$ dintr-o populaţie normală $\mathcal{N}(10, 1)$ ($n = 50$ reprezintă numărul de laboratoare iar X_i este concentraţia de crom din laboratorul i). Din datele problemei avem că laboratorul 1 a inregistrat cea mai mică valoare (6 mg/l) iar laboratorul 2 a inregistrat cea mai mare valoare (13 mg/l). Problema ne cere să evaluăm probabilitatea

$\mathbb{P}(Y_1 \leq 6, Y_n \geq 13) = 1 - \mathbb{P}(\{Y_1 > 6\} \cup \{Y_n < 13\}) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > 6) - \mathbb{P}(Y_n < 13) + \mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13)$.

Avem că $\mathbb{P}(Y_1 > 6) = \mathbb{P}(X_1 > 6, \cdots, X_n > 6) = (1 - F(6))^n$ iar $F(6) = \mathbb{P}(X_1 \leq 6) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 10}{1} \leq -4\right) \simeq 0.00003$ deci $\mathbb{P}(Y_1 > 6) \simeq 0.99871$.

De asemenea $\mathbb{P}(Y_n < 13) = F(13)^n$ iar cum $F(13) = \mathbb{P}(X_1 \leq 13) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 10}{1} \leq 3\right) \simeq 0.9986$ rezultă că $\mathbb{P}(Y_n < 13) \simeq 0.9346$.

In mod similar, $\mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13) = \mathbb{P}(6 < X_1 < 13, \cdots, 6 < X_n < 13) = \mathbb{P}(6 < X_1 < 13)^n$ şi cum $\mathbb{P}(6 < X_1 < 13) = \mathbb{P}(X_1 < 13) - \mathbb{P}(X_1 \leq 6) \simeq 0.9986$ obţinem că $\mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13) \simeq 0.9332$.

In concluzie avem că $\mathbb{P}(Y_1 \leq 6, Y_n \geq 13) \simeq 0.0001$.

Exercițiul 6

a) Cum $\mathbb{E}_\theta[X] = 10\theta$ obținem că $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_1] = \theta$ și $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_2] = \frac{10\theta + 1}{12}$.

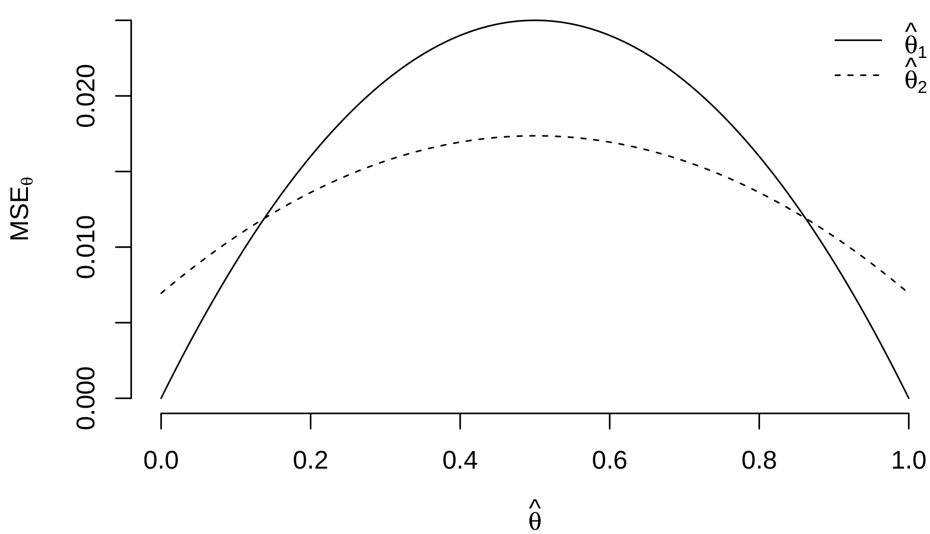
b) Pentru calculul erorii medii pătratice vom folosi următoarea formulă $MSE_\theta(\hat{\theta}) = Var_\theta(\hat{\theta}) + B_\theta(\hat{\theta})^2$. Cum $\hat{\theta}_1$ este un estimator nedeplast rezultă că $B_\theta(\hat{\theta}_1) = 0$ și

$$MSE_\theta(\hat{\theta}_1) = Var_\theta(\hat{\theta}_1) = 10^{-2} Var_\theta(X) = \frac{\theta(1-\theta)}{10}.$$

Pentru $\hat{\theta}_2$ avem $B_\theta(\hat{\theta}_2) = \frac{10\theta + 1}{12} - \theta$ de unde

$$MSE_\theta(\hat{\theta}_2) = \frac{Var_\theta(X)}{12^2} + \left(\frac{10\theta + 1}{12} - \theta\right)^2 = \frac{6\theta - 6\theta^2 + 1}{144}.$$

c) Avem următoarea figură:



Chiar dacă $\hat{\theta}_1$ este nedeplasat și $\hat{\theta}_2$ este deplasat, niciunul dintre cei doi estimatori nu are eroarea medie pătratică uniform mai mică. Cu toate acestea, eroarea medie pătratică pentru estimatorul $\hat{\theta}_2$ este mai mică decât cea pentru estimatorul $\hat{\theta}_1$ pe aproape toată plaja de valori a lui θ (mai exact pe intervalul $\theta \in \left[\frac{1-\sqrt{\frac{11}{12}}}{2}, \frac{1+\sqrt{\frac{11}{12}}}{2}\right]$). Cum eroarea medie pătratică este mai importantă decât nedeplasarea, recomand folosirea estimatorului $\hat{\theta}_2$.