Tema 1

Soluții

Exercițiul 1

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depăşit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1-\mathbb{P}(A^c|B^c)]\,(1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01\times 0.995} \approx 0.332.\end{aligned}$$

2. Căutăm p aşa incat $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde

$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995\times 0.95}{0.995\times 0.95 + 0.05\times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99\times 0.3 + 0.01\times 0.7 \approx 0.304$ şi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil in această situaţie.

Exercițiul 2

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 5$\}$
   - $B_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 7$\}$

   Evenimentul E_n se scrie

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

   Aplicand independenţa avem că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

Observăm că spaţiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j)|1 \leq i,j \leq 6\}$ şi probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obţinem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 şi nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situaţiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

In concluzie, probabilitatea evenimentului

$$A = \{\text{suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 2 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 2 şi C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

şi probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) şi $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}\frac{1}{36}\\ &= \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36}\frac{1}{1-\frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Exercițiul 3

Dacă numărul de maşini vandute intr-un an de reprezentanţă este mai mare decat N, $X \geq N$, atunci caştigul administratorului este $G = aN$. Dacă $X < N$, atunci administratorul vinde X maşini şi ii rǎman $N - X$, deci caştigul devine $G = aX - b(N - X)$. Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N \\ aX - b(N-X) & \text{dacă } X < N \end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1}[ax - b(N-x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză ştim că toţi intregii $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ sunt de aceeaşi probabilitate, mai exact ştim că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde acelasi număr de maşini cu aceeaşi probabilitate - in realitate nu este cazul !). Obţinem că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= aN\sum_{x=N}^{n}\frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N}\frac{(a+b)x - bN}{n+1}\\
&= \frac{aN(n-N+1)}{n+1} + (a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1}\\
&= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de maşini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuaţia $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

Exercițiul 4

Avem că legea lui X este uniformă pe mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ iar din definiţia lui $Y = X(7 - X)$ observăm că $Y \in \{6, 10, 12\}$ cu $\mathbb{P}(Y = 6) = \mathbb{P}(Y = 10) = \mathbb{P}(Y = 12) = \frac{1}{3}$. Obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6 + 10 + 12) = \frac{28}{3}\\
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36 + 100 + 144) = \frac{280}{3}\\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.
\end{aligned}$$

Variabila aleatoare M_n ia valori in aceeaşi mulţime ca şi Y, $M_n \in \{6, 10, 12\}$. Pentru a găsi legea lui M_n trebuie să calculăm $\mathbb{P}(M_n = x)$ cu $x \in \{6, 10, 12\}$.

Pentru evenimentul $\{M_n = 6\}$ este necesar ca toate variabilele $Y_i = 6$ deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă $\{M_n = 12\}$ atunci cel puţin unul din evenimentele $\{Y_i = 12\}$ se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula $\mathbb{P}(M_n = 10)$ (fără a face diferenţa $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$) observăm că realizarea evenimentului $\{M_n = 10\}$ implică realizarea tuturor evenimentelor $\{Y_i \leq 10\}$ dar excludem evenimentul in care toţi $\{Y_i = 6\}$. Astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Exercițiul 5

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+2) + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

şi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) &= (\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \dots) + (\mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \dots)\\
&\quad + (\mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \dots) + \dots\\
&= 1\cdot\mathbb{P}(X=1) + 2\cdot\mathbb{P}(X=2) + 3\cdot\mathbb{P}(X=3) + \dots\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X>i\}}$ şi să inversăm $\sum$ cu $\mathbb{E}$ (de ce putem ?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\,dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]\,dx \overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X\geq x\}}\,dx\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X} dx\right] = \mathbb{E}[X].$$

Exercițiul 6

a) Dacă $X \sim Exp(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ şi are funcţia de repartiţie $F(x) = (1 - e^{-\alpha x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X > t+s | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha st}} = e^{-\alpha t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Interpretare: Să presupunem că X reprezintă durata de viaţă a unei componente electrice. Ştiind că X a funcţionat deja un timp s ($X > s$), probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t suplimentar ($X > t + s$) este egală cu probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t. Faptul că a funcţionat deja un timp s nu influenţează probabilitatea să funcţioneze un timp t in plus.

b) Din relaţia

$$\mathbb{P}(X > s+t|X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obţinem $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notand cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s+t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0,\ t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. X este distribuită exponenţial trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională Cauchy. Observăm pentru inceput că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ şi prin inducţie avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luand $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ şi pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeaşi argumentare). Combinand rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un şir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ aşa incat $q_n \downarrow r$ şi folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. In final am găsit că $h(t) = e^{-t\log\frac{1}{h(1)}}$.

Exerciţiul 7

a) In acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ inseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilităţii totale avem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2b) &= \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b)\\ &= \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}\\ &= \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1b|2b) &= \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)}\\ &= \frac{\frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.\end{aligned}$$

c) Folosim inducţie. Pentru $n = 2$ am văzut că propoziţia este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ şi vrem să arătăm că relaţia rămane adevărată şi pentru $k = n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducţie ($\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducţie avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d]$. Inlucuind această relaţie in expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obţinem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\
&= \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\
&= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).
\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilităţii totale că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\
&= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\
&= \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\
&= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\
&+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\
&= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\
&+ \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\cdots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\
&= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.
\end{aligned}$$

Observăm că

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}\\
&= \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}\\
&= \frac{b+nd}{b+r+nd} \to 1.
\end{aligned}$$

Exercițiul 8

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i,T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1=1,N_2=1)=\mathbb{P}((T_1,T_2))=\frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1=1,N_2=2)=\mathbb{P}((T_1,T_3))=\frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1=1,N_2=3)=\mathbb{P}((T_1,T_4)\cup(T_1,T_5))=\frac{2}{10},\ (N_1=1 \text{ şi } 2,\,3,\,4^e \text{ OK deci 5 e defect})\\
&\mathbb{P}(N_1=2,N_2=1)=\mathbb{P}((T_2,T_3))=\frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1=2,N_2=2)=\mathbb{P}((T_2,T_4)\cup(T_2,T_5))=\frac{2}{10},\ (N_1=2 \text{ şi } N_2=2 \text{ sau 4 sau 5 defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1=3,N_2=1)=\mathbb{P}((T_3,T_4)\cup(T_3,T_5))=\frac{2}{10},\ (N_1=3 \text{ şi } N_2=1 \text{ sau 4 sau 5 defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1=3,N_2=0)=\mathbb{P}((T_4,T_5))=\frac{1}{10},\ (N_1=3 \text{ şi primele 3 OK atunci 4 şi } 5^e \text{ defecte})
\end{aligned}$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{3}{10}=\frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2]=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times 0=\frac{16}{10}$.

Exercițiul 9

1. Cum f este densitate ea verifică relaţia $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = 1$ deci $\iint_{\mathbb{R}^2} c\mathbf{1}_{D(R)}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = 1$ de unde $c\times(\pi R^2)=1$ şi $c=\frac{1}{\pi R^2}$.
2. Legile marginale ale lui X_1 şi X_2 sunt determinate de următoarele formule: $f_{X_1}(x_1)=\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\,dx_2$ şi $f_{X_2}(x_2)=\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\,dx_1$. Avem

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\,dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi R^2}\mathbf{1}_{D(R)}(x_1,x_2)\,dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{R^2-x_1^2},\sqrt{R^2-x_1^2}]}(x_2)\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1)\,dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1)\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_2 = \frac{2\sqrt{R^2-x_1^2}}{\pi R^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_1)
\end{aligned}$$

şi in mod similar găsim

$$\begin{aligned}
f_{X_2}(x_2) &= \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\,dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi R^2}\mathbf{1}_{D(R)}(x_1,x_2)\,dx_1\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{R^2-x_2^2},\sqrt{R^2-x_2^2}]}(x_1)\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2)\,dx_1\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2)\int_{-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{\sqrt{R^2-x_2^2}} dx_1 = \frac{2\sqrt{R^2-x_2^2}}{\pi R^2}\mathbf{1}_{[-R,R]}(x_2).
\end{aligned}$$

3. Observăm că distanţa de la punctul (X_1,X_2) la $(0,0)$ este $L=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$. Pentru a găsi probabilitatea $\mathbb{P}(L\leq a)$putem folosi atat o metodă geometrică cat şi una probabilistă.

   Consideraţii geometrice: cum (X_1,X_2) este uniform distribuită pe discul $D(R)$ atunci

$$\mathbb{P}(L\leq a)=\mathbb{P}((X_1,X_2)\in D(a))=\frac{\mathcal{A}(D(a))}{\mathcal{A}(D(R))}=\frac{\pi a^2}{\pi R^2}=\frac{a^2}{R^2}.$$

   Consideraţii probabiliste:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L\leq a) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{L\leq a\}}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_1^2+X_2^2\leq a^2\}}\right]=\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{D(R)}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq R^2\}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}\cap\{x_1^2+x_2^2\leq R^2\}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq a^2\}}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=\frac{\pi a^2}{\pi R^2}\\
&= \frac{a^2}{R^2}.
\end{aligned}$$

   Am văzut că $F_L(a)=\mathbb{P}(L\leq a)=\frac{a^2}{R^2}$, $\forall a\in[0,R]$ de unde găsim că densitatea este $f_L(a)=\frac{d}{da}F_L(a)=\frac{2a}{R^2}\mathbf{1}_{[0,R]}(a)$. Media se calculează acum uşor

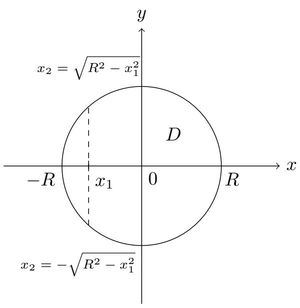
$$\mathbb{E}[L]=\int_{\mathbb{R}} af_L(a)\,da=2\int_{\mathbb{R}}\frac{a^2}{R^2}\mathbf{1}_{[0,R]}(a)\,da=\frac{2}{R^2}\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^R=\frac{2R}{3}.$$

Exercițiul 10

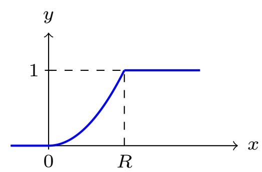
a) Este definiţia binomialei. Avem $\mathbb{E}[S_n]=np$ şi $\mathbb{V}[S_n]=np(1-p)$.

b) Avem că $\{L=n\}=\{X_1=\cdots=X_n=1,X_{n+1}=0\}\cup\{X_1=\cdots=X_n=0,X_{n+1}=1\}$ de unde $\mathbb{P}(L=n)=p^nq+pq^n$, $n\geq 1$, $q=1-p$. Rezultă că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L] &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(L=n)=\sum_{n\geq 1} n(p^nq+pq^n)=2+\frac{(p-q)^2}{pq}\\
\mathbb{V}[L] &= \sum_{n\geq 1} n^2\mathbb{P}(L=n)-\mathbb{E}[L]^2=2+\frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2}
\end{aligned}$$



(a)



(b)

Figure 1: Reprezentarea grafică a lui D şi funcţia de repartiţie F_L

Pentru a găsi legea lui M să ne uităm la cuplul (L, M) şi să observăm că evenimentul $\{L = n, M = m\}$ este dat de $\{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0\}$ de unde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L = n, M = m) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1)+\\ \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0) = p^n q^m p + p^m q^n q\end{aligned}$$

şi prin urmare legea lui M este

$$\mathbb{P}(M = m) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(L = n, M = m) = q^{m-1}p^2 + p^{m-1}q^2.$$

Obţinem asfel că $\mathbb{E}[M] = 2$ (independent de p) şi că

$$\mathbb{V}[M] = 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq}.$$

c) Este evident că $\mathbb{E}[L] = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq} \geq 2 = \mathbb{E}[M]$ şi că $\mathbb{V}[L] = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2} \geq 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq} = \mathbb{V}[M] \geq 2$. Se poate calcula uşor că

$$\mathbb{E}[LM] = \sum_{n,m \geq 1} nm\mathbb{P}(L = n, M = m) = \frac{1}{pq}$$

de unde rezultă că $Cov[L, M] = -\frac{(p-q)^2}{pq}$.

d) Observăm că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{P}(L = k, M = n)}{\mathbb{P}(L = k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}q^n + q^{k+1}p^n}{p^k q + q^k p}$$

şi studiind comportamentul raportului $\frac{p}{q}$ (dacă este > 1 sau nu după cum e p) deducem că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \begin{cases} p^{n-1}q, & \text{dacă } p < \frac{1}{2} \\ q^{n-1}p, & \text{dacă } p > \frac{1}{2} \\ 2^{-n}, & \text{dacă } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$