

## Tema 5

### Exercițiul 1

Considerăm  $T_1$  și  $T_2$ , doi estimatori nedeplasați ai parametrului  $\theta$  de varianțe  $V_1$  și respectiv  $V_2$ . Fie  $T_3$  estimatorul

$$T_3 = \alpha T_1 + (1 - \alpha) T_2.$$

- Arătați că estimatorul  $T_3$  este nedeplasat.
- Determinați constanta  $\alpha$  pentru care estimatorul  $T_3$  are varianța minimă.
- Presupunând că ipotezele teoremei Rao-Cramer sunt verificate, este posibil ca ambii estimatori  $T_1$  și  $T_2$  să fie eficienți?

### Exercițiul 2

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un eșantion de talie  $n$  dintr-o populație  $f_\theta(x)$  dată de:

- $f_\theta(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\theta > 0$
- $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta > 0$
- $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$ ,  $x > 0$ ,  $\theta > 0$  iar  $\alpha > 0$  cunoscut

Pentru fiecare caz în parte determinați un estimator pentru  $\theta$  și studiați calitățile acestuia (deplasare, consistență, eficiență).

### Exercițiul 3

Dintr-un total de 100 de persoane chestionate, 51 au declarat că vor vota cu candidatul Bugs Bunny la următoarele alegeri parlamentare. Dați un interval de încredere de nivel 95% pentru proporția  $p$ , de intenții de vot pentru acest candidat în populație. Aceeași întrebare dacă sondajul ar fi avut loc pentru un eșantion de 1000 de persoane. Câți electori ar trebui întrebați pentru a avea o precizie de cel puțin 2%?

### Exercițiul 4

Un producător de becuri anunță că durata medie a becurilor pe care le produce este de 170 de ore. Pentru a verifica această afirmație, un corp de control al protecției consumatorilor extrage aleator un eșantion de 100 de becuri dintr-un lot de fabricație și, după experimentare, constată că eșantionul are o durată medie de viață de 158 de ore cu o abatere standard de 30 de ore. Dacă presupunem că durata de viață a becurilor urmează o lege normală, putem deduce din această investigație că afirmația producătorului este falsă?

### Exercițiul 5

Pentru a estima precizia unui termometru, s-au realizat  $n = 100$  de măsurători independente a temperaturii dintr-un lichid menținut la temperatura constantă de 20 de grade Celsius. Observațiile  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  au condus la valoarea  $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40011$ . Construiți un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru precizia termometrului, măsurată prin varianța  $\sigma^2$  a măsurătorilor.

## Exercițiul 6

Numărul de blocaje de trafic mai mari de un minut de pe linia tramvaiului 41, pe parcursul unei zile, se presupune că urmează o repartiție Poisson de medie necunoscută și ne propunem să estimăm acest parametru plecând de la un eșantion de talie 200 (s-au urmărit blocajele pe parcursul a 200 de zile). Momentele empirice calculate pe acest eșantion au condus la  $\bar{x}_{200} = 3$  și  $s_{200}^2 = 3.2$ . Determinați un interval de încredere de nivel de încredere de 95% pentru media numărului de blocaje.