Tema 2

Exercițiul 1[1]

Fie U_1, U_2 două variabile aleatoare independente repartizate uniform $\mathcal{U}([0,1])$. Arătaţi că variabilele

$$X_1 = \cos(2\pi U_1)\sqrt{-2\log(U_2)}, \quad X_2 = \sin(2\pi U_1)\sqrt{-2\log(U_2)}$$

sunt variabile aleatoare independente repartizate normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercițiul 2

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabile aleatoare i.i.d. repartizate $\mathcal{U}([0,1])$.

a) Determinaţi funcţia de repartiţie şi densitatea variabilelor m_n şi M_n, unde $m_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ iar $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

b) Fie $Z_n = n(1 - M_n)$. Arătaţi că $Z_n \xrightarrow{d} Z$, unde Z este o variabilă aleatoare a cărei funcţie de repartiţie este $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$.

Exercițiul 3

Fie $U_{i1}, U_{i2}, V_i,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$, variabile aleatoare independente repartizate unifom $\mathcal{U}([0,1])$. Definim variabilele aleatoare

$$X_i = \begin{cases} 1, & U_{i1}^2 + U_{i2}^2 < 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{şi} \quad Y_i = \sqrt{1 - V_i^2},\ \ i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Considerăm variabilele aleatoare $\hat{\pi}_1 = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ şi $\hat{\pi}_2 = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculați media și varianța acestor variabile și stabiliți care este mai eficientă[2] în estimarea lui π.

Exercițiul 4

Fie $U_1, U_2, \dots, U_n$ variabile aleatoare independente și repartizate $\mathcal{U}([0,1])$ și $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$. Dacă variabila aleatoare N este definită prin

$$N = \min\{k \,|\, S_k > 1\}$$

atunci:

a) Arătați că dacă $0 \leq t \leq 1$ atunci $\mathbb{P}(S_k \leq t) = \frac{t^k}{k!}$.

b) Determinați $\mathbb{E}[N]$ și $Var[N]$.

[1] Metoda de simulare prezentată în acest exercițiu se numește metoda Box-Muller
[2] Spunem că un estimator nedeplasat este mai eficient decat un altul dacă varianţa lui este mai mică

Exercițiul 5

Fie $(E_n)_{n\geq 1}$ un șir de variabile aleatoare independente, repartizate $Exp(\lambda)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$ pentru $n \geq 1$ și fie variabila aleatoare

$$N = \max\{n \geq 1 \,|\, S_n \leq 1\}.$$

a) Determinați repartiția lui S_n, $n \geq 1$.

b) Arătați că variabila aleatoare N este repartizată $Pois(\lambda)$.

Exercițiul 6

Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un şir de variabile aleatoare pozitive şi independente cu $\mathbb{E}[X_n] = c \in (0,1)$ pentru orice n. Dacă $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ atunci ară taţi că $Y_n \xrightarrow{P} 0$.