Tema 1

Câmp de probabilitate, operații cu evenimente, probabilitate conditionată și formula lui Bayes

Exerciţiul 1

Fie A, B şi C trei evenimente. Exprimaţi în funcţie de A, B, C şi de operaţiile cu mulţimi următoarele evenimente:

a) A singur se realizează
b) A şi C se realizează dar nu şi B
c) cele trei evenimente se produc
d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce
e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc
f) cel mult un eveniment se produce
g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce
h) exact două evenimente din cele trei se produc
i) nu mai mult de două evenimente nu se realizează

Exerciţiul 2

Fie Ω mulţimea tuturor cuplurilor căsătorite dintr-un oraş dat. Considerăm evenimentele următoare:

A: “bărbatul are mai mult de 40 de ani”

B: “femeia este mai tânără decât bărbatul”

C: “femeia are mai mult de 40 de ani”

Se cere:

a) Interpretaţi in funcţie de A, B şi C evenimentul “soţul are mai mult de 40 de ani dar nu şi soţia sa”.
b) Descrieţi in limbaj natural evenimentele: $A \cap B \cap C^c$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap B^c \cap C$, $A \cup B$
c) Verificaţi că $A \cap C^c \subset B$

Exerciţiul 3

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate. Diferenţa simetrică dintre două evenimente $A, B \in \mathcal{F}$ este definită prin $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Arătaţi că:

a) funcţia $d(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B)$ este o distanţă pe $\mathcal{F}$
b) $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$

Exerciţiul 4

Fie n, $r > 1$ numere naturale şi considerăm ecuaţia cu r necunoscute:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n.$$

O soluţie a acestei ecuaţii este un r-tuplu $(x_1, \dots, x_r)$ a cărui sumă a componentelor este n.

a) Câte soluţii are ecuaţia de mai sus, cu componente naturale strict pozitive ?

b) Câte soluţii are ecuaţia de mai sus, cu componente naturale pozitive ?

Exerciţiul 5

Un administrator de spital codifică pacienţii cu răni prin împuşcare în funcţie de asigurarea (D dacă pacientul are asigurare şi N dacă nu are) şi de starea acestora (b pentru bună, m pentru medie şi s pentru serioasă). Considerăm experienţa aleatoare care consistă in codificarea pacienţilor.

1. a) Determinaţi Ω mulţimea spaţiului stărilor acestui experiment
   b) Fie A evenimentul *starea de sănătate a pacientului este serioasă.* Descrieţi evenimentele elementare care il compun pe A. Aceeaşi intrebare pentru evenimentul B *pacientul nu este asigurat* şi pentru evenimentul $B^c \cup A$.

2. Considerăm echiprobabilitatea pe Ω. Calculaţi probabilităţile: $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ şi $\mathbb{P}(B^c \cup A)$

3. Aceeaşi intrebare pentru probabilitatea $\mathbb{P}'$ definită prin

	b	m	s
O	$0,2$	$0,2$	$0,1$
N	$0,1$	$0,3$	$0,1$

Exerciţiul 6 (Jocul de Poker)

Considerăm experimentul in care extragem o mană de 5 cărţi dintr-un pachet de cărţi de 52 de cărţi. Să se calculeze probabilitatea ca:

a) Să avem careu (patru cărţi de acelaşi tip) ?

b) Să avem full-house (trei cărţi de un tip şi două de altul) ?

c) Să avem trei cărţi de acelaşi tip ?

d) Să avem două perechi ?

e) Să avem o pereche ?

Exerciţiul 7

Se doreşte verificarea fiabilităţii unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliştilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilişti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceştia depăşesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depăşită precum şi probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depăşită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depăşit in realitate nivelul de alcool autorizat ?

2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?

3. Un poliţist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Ştiind că proporţia de automobilişti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinaţi dacă poliţistul are dreptate.

Exerciţiul 8

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.
2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

Exerciţiul 9* [1]

Fie $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $n \geq 0$ un şir de părţi ale lui Ω şi $\mathcal{F}$ algebra generată de acesta (cea mai mică algebră in sensul incluziunii care conţine ɱulţimile $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$). Fie $(c_1, \dots, c_m)$ un şir de numere reale şi $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ un şir de elemente din $\mathcal{F}$ ($m \geq 0$). Considerăm inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{P}(B_k) \geq 0 \tag{1}$$

unde $\mathbb{P}$ este o măsură de probabiilitate pe $\mathcal{F}$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:

a) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$

b) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$ care verifică $\mathbb{P}(A_i) = 0$ sau 1, pentru toţi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exerciţiul 10*

Fie $S_0^n = 1$, $S_k^n = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ şi notăm cu V_n^r (respectiv cu W_n^r) probabilitatea ca exact r (respectiv cel puţin r) dintre evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ se realizează. Arătaţi că:

a) $V_n^r = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^n$

b) $W_n^r = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S_{r+k}^n$

[1] Exerciţiile cu * sunt suplimentare şi nu sunt obligatorii