

Examen

Timp de lucru 1h30*

Exercițiul 1

Să presupunem că observațiile (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ sunt făcute după modelul $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, unde x_1, \dots, x_n sunt constante iar $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ sunt independente. Modelul este apoi reparametrizat astfel

$$Y_i = \alpha' + \beta'(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i.$$

Fie $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$ estimatorii de verosimilitate maximă a lui α și β , iar $\hat{\alpha}'$ și $\hat{\beta}'$ estimatorii de verosimilitate maximă a lui α' și β' .

- Arătați că $\hat{\beta}' = \hat{\beta}$.
- Arătați că $\hat{\alpha}' \neq \hat{\alpha}$ și găsiți repartiția lui $\hat{\alpha}'$.
- Arătați că $\hat{\alpha}'$ și $\hat{\beta}'$ sunt necorelați, prin urmare sub ipoteza de normalitate sunt independenți.

Exercițiul 2

Căutăm să exprimăm înălțimea unui arbore Y în funcție de diametrul său X calculat la 1.3 m de sol. Pentru aceasta am măsurat 20 de cupluri *diametru-înălțime* dintr-o populație normală bivariată cu parametrii $(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$ și am obținut valorile următoare:

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]	[,11]	[,12]	[,13]
X	38.1	36.1	34.0	37.1	36.8	36.5	36.2	30.4	35.8	36.5	30.8	33.7	35.8
Y	18.6	18.5	18.5	18.5	18.5	18.6	18.5	18.3	18.4	18.5	18.4	18.4	18.5
	[,14]	[,15]	[,16]	[,17]	[,18]	[,19]	[,20]						
X	36.9	33.5	33.0	38.2	34.1	31.9	35.9						
Y	18.6	18.4	18.4	18.6	18.5	18.3	18.6						

- Determinați ecuația dreptei de regresie (pentru modelul condiționat) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$.
- Verificați că ipoteza $H_0 : \beta_1 = 0$ este adevărată dacă și numai dacă ipoteza $H_0 : \rho = 0$ este adevărată.
- Arătați că

$$\frac{\hat{\beta}_1}{S/\sqrt{S_{xx}}} = \sqrt{n-2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

unde r este coeficientul de corelație empiric (EVM pentru ρ).

- Determinați tabelul ANOVA pentru regresie și testați ipotezele $H_0 : \beta_j = 0$ versus $H_1 : \beta_j \neq 0$, $j \in \{0, 1\}$. Ce credeți despre rezultat ?
- Dați un test pentru ipoteza $H_0 : \rho = 0$ care să depindă doar de r^2 și de n .
- Să presupunem că am observat un arbore de diametru $x_0 = 36$. Determinați un interval de predicție pentru înălțimea arborelui.

*Toate documentele și calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Computerele personale, telefoanele mobile/smartwatch-urile sunt **strict interzise**.