Tema 3

Solutii

Exerciţiul 1[1]

a) Dacă $X \sim Geom(p)$ atunci $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$. Observăm că funcţia de repartiţie este dată de

$$\mathbb{P}(X \leq i) = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(X = k) = p\sum_{k=1}^{i}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{i-1}(1-p)^{k} = 1-(1-p)^{i}.$$

Prin urmare

$$\mathbb{P}(X > i+j | X > i) = \frac{\mathbb{P}(X > i+j, X > i)}{\mathbb{P}(X > i)} = \frac{\mathbb{P}(X > i+j)}{\mathbb{P}(X > i)} = \frac{(1-p)^{i+j}}{(1-p)^{i}} = (1-p)^{j},$$

iar cum $\mathbb{P}(X > j) = (1-p)^{j}$ obţinem concluzia.

b) Dacă $X \sim Geom(p)$ atunci $X = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}\varepsilon_k$, unde ε_k este măsura Dirac in k. Avem

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X-1}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 t^{X-1}\,dt\right] = \int_0^1 \mathbb{E}[t^{X-1}]\,dt$$

iar

$$\mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k(1-p)^k\frac{p}{1-p} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

ceea ce ne conduce la

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^1 \frac{1}{t}\frac{pt}{1-(1-p)t}\,dt = -\frac{p}{1-p}\ln(p).$$

c) Avem

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)p(1-p)^{k-1}$$

de unde notand cu $q = 1-p$ obţinem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-1} = pq^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}\\
&= pq^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)^{(r)} = pq^{r-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)^{(r)} = pq^{r-1}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)^{(r)}\\
&= pq^{r-1}\frac{r!}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r!(1-p)^{r-1}}{p^r}
\end{aligned}$$

unde in penultima egalitate am folosit faptul că $\left(\frac{1}{1-q}-1\right)^{(r)} = \frac{r!}{(1-q)^{r+1}}$, $r \geq 1$ (care se poate verifica prin inducţie).

[1] **Deoarece punctule b) este mai dificil, acesta nu este obligatoriu. Punctajul temei nu va depinde de rezolvarea acestui punct.**

Exerciţiul 2

a) Dacă i) este adevărată atunci $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ de unde obţinem imediat ii). Reciproc, presupunem ii) adevărată şi avem că $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_2}{p_1}\cdots\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}$ de unde $p_n = p_0\frac{\lambda^n}{n!}$. Cum $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ obţinem că $p_0 = e^{-\lambda}$ şi putem să concluzionăm.

b) i) Ştim că $\mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ şi vrem să evaluăm raportul $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)}$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = j)}{\mathbb{P}(X = j-1)} = \frac{\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Putem observa că

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X = j) \geq \mathbb{P}(X = j-1), \quad \text{dacă } \lambda \geq j\\ &\mathbb{P}(X = j) < \mathbb{P}(X = j-1), \quad \text{dacă } \lambda < j. \end{aligned}$$

ceea ce arată că $j = [\lambda]$ este punctul maxim şi $\mathbb{P}(X = [\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}e^{-\lambda}$ este valoarea maximă.

ii) După cum am văzut la punctul precedent avem $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$. Dacă $j > 0$ este fixat atunci putem observa că maximum este atins pentru $\lambda = j$.

Exerciţiul 3

Dacă numărul de maşini vandute intr-un an de reprezentanţă este mai mare decat N, $X \geq N$, atunci caştigul administratorului este $G = aN$. Dacă $X < N$, atunci administratorul vinde X maşini şi ii rãman $N - X$, deci caştigul devine $G = aX - b(N - X)$. Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N\\ aX - b(N-X) & \text{dacă } X < N \end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1}[ax - b(N-x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză ştim că toţi intregii $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ sunt de aceeaşi probabilitate, mai exact ştim că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde acelasi număr de maşini cu aceeaşi probabilitate - in realitate nu este cazul !). Obţinem că:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G] &= aN\sum_{x=N}^{n}\frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N}\frac{(a+b)x - bN}{n+1}\\ &= \frac{aN(n-N+1)}{n+1} + (a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1}\\ &= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de maşini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuaţia $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

Exerciţiul 4

Avem că legea lui X este uniformă pe mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ iar din definiţia lui $Y = X(7-X)$ observăm că $Y \in \{6,10,12\}$ cu $\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(Y=10) = \mathbb{P}(Y=12) = \frac{1}{3}$. Obţinem că

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6+10+12) = \frac{28}{3}\\ \mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36+100+144) = \frac{280}{3}\\ \mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.\end{aligned}$$

Variabila aleatoare M_n ia valori in aceeaşi mulţime ca şi Y, $M_n \in \{6,10,12\}$. Pentru a găsi legea lui M_n trebuie să calculăm $\mathbb{P}(M_n = x)$ cu $x \in \{6,10,12\}$.

Pentru evenimentul $\{M_n = 6\}$ este necesar ca toate variabilele $Y_i = 6$ deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă $\{M_n = 12\}$ atunci cel puţin unul din evenimentele $\{Y_i = 12\}$ se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula $\mathbb{P}(M_n = 10)$ (fără a face diferenţa $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$) observăm că realizarea evenimentului $\{M_n = 10\}$ implică realizarea tuturor evenimentelor $\{Y_i \leq 10\}$ dar excludem evenimentul in care toţi $\{Y_i = 6\}$. Astfel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Exerciţiul 5

a) Este definiţia binomialei. Avem $\mathbb{E}[S_n] = np$ şi $\mathbb{V}[S_n] = np(1-p)$.

b) Avem că $\{L = n\} = \{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = 0\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = 1\}$ de unde $\mathbb{P}(L = n) = p^n q + pq^n$, $n \geq 1$, $q = 1-p$. Rezultă că

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L] &= \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(L=n) = \sum_{n\geq 1} n(p^n q + pq^n) = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq}\\ \mathbb{V}[L] &= \sum_{n\geq 1} n^2\mathbb{P}(L=n) - \mathbb{E}[L]^2 = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2}\end{aligned}$$

Pentru a găsi legea lui M să ne uităm la cuplul (L, M) şi să observăm că evenimentul $\{L = n, M = m\}$ este dat de $\{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0\}$ de unde

$$\mathbb{P}(L = n, M = m) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1) + \\ \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0) = p^n q^m p + p^m q^n q$$

şi prin urmare legea lui M este

$$\mathbb{P}(M = m) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(L = n, M = m) = q^{m-1}p^2 + p^{m-1}q^2.$$

Obţinem asfel că $\mathbb{E}[M] = 2$ (independent de p) şi că

$$\mathbb{V}[M] = 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq}.$$

c) Este evident că $\mathbb{E}[L] = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq} \geq 2 = \mathbb{E}[M]$ şi că $\mathbb{V}[L] = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2} \geq 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq} = \mathbb{V}[M] \geq 2$. Se poate calcula uşor că

$$\mathbb{E}[LM] = \sum_{n,m\geq 1} nm\mathbb{P}(L = n, M = m) = \frac{1}{pq}$$

de unde rezultă că $Cov[L, M] = -\frac{(p-q)^2}{pq}$.

d) Observăm că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{P}(L = k, M = n)}{\mathbb{P}(L = k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}q^n + q^{k+1}p^n}{p^k q + q^k p}$$

şi studiind comportamentul raportului $\frac{p}{q}$ (dacă este > 1 sau nu după cum e p) deducem că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \begin{cases} p^{n-1}q, & \text{dacă } p < \frac{1}{2} \\ q^{n-1}p, & \text{dacă } p > \frac{1}{2} \\ 2^{-n}, & \text{dacă } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$