Tema 2

Exercițiul 1

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare i.i.d. repartizate $\mathcal{U}([0,1])$.

a) Determinați funcția de repartiție și densitatea variabilelor m_n și M_n, unde $m_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ iar $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

b) Fie $Z_n = n(1 - M_n)$. Arătați că $Z_n \xrightarrow{d} Z$, unde Z este o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție este $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$.

Exercițiul 2 (Box-Muller)

Fie U_1, U_2 două variabile aleatoare independente repartizate uniform $\mathcal{U}([0,1])$.

a) Arătați că variabilele

$$X_1 = \cos(2\pi U_1)\sqrt{-2\log(U_2)}, \quad X_2 = \sin(2\pi U_1)\sqrt{-2\log(U_2)}$$

sunt variabile aleatoare independente repartizate normal $\mathcal{N}(0,1)$.

b) Deduceți că reprezentarea în coordonate polare (R, Θ) a lui (X_1, X_2) verifică

$$R^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{și} \quad \Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$$

Exercițiul 3

Fie $U_{i1}, U_{i2}, V_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, variabile aleatoare independente repartizate unifom $\mathcal{U}([0,1])$. Definim variabilele aleatoare

$$X_i = \begin{cases} 1, & U_{i1}^2 + U_{i2}^2 < 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{şi} \quad Y_i = \sqrt{1 - V_i^2},\ \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Considerăm variabilele aleatoare $\hat{\pi}_1 = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ și $\hat{\pi}_2 = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculați media și varianța acestor variabile și stabiliți care este mai eficientă[1] în estimarea lui π.

Exercițiul 4

Fie $U_1, U_2, \ldots, U_n$ variabile aleatoare independente și repartizate $\mathcal{U}([0,1])$ și $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$. Dacă variabila aleatoare N este definită prin

$$N = \min\{k \mid S_k > 1\}$$

atunci:

a) Arătați că dacă $0 \leq t \leq 1$ atunci $\mathbb{P}(S_k \leq t) = \frac{t^k}{k!}$.

b) Determinați $\mathbb{E}[N]$ și $Var[N]$.

[1]Spunem că un estimator nedeplasat este mai eficient decât un altul dacă varianța lui este mai mică

Exercițiul 5

Fie $(E_n)_{n\geq 1}$ un șir de variabile aleatoare independente și repartizate $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Pentru $n \geq 1$ definim

$$f_n(x) = e^{-\lambda x}\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că f_n este o densitate de repartiție pentru orice $n \geq 1$. Repartiția a cărei densitate este f_n se numește repartiția Gamma de parametrii $n \geq 1$ și λ și se notează cu $\Gamma(n, \lambda)$.

b) Fie $S_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$ pentru $n \geq 1$. Arătați că S_n este repartizată $\Gamma(n, \lambda)$.

c) Considerăm variabila aleatoare

$$N = \max\{n \geq 1 \,|\, S_n \leq 1\}$$

cu convenția $N = 0$ dacă $X_1 > 1$. Arătați că variabila aleatoare N este repartizată $Pois(\lambda)$.

Exercițiul 6

Folosind metoda respingerii, propuneți o metodă de simulare pentru observații independente din densitatea de repartiție $f : x \mapsto (1 - |x|)^+$.

Exercițiul 7

1. Ne propunem să simulăm observații dintr-o populație $\mathcal{N}(0, 1)$ folosindu-ne de observații repartizate Laplace de parametru $\lambda > 0$, i.e.
$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}.$$

a) Determinați valoarea lui λ care permite minimizarea probabilității de respingere. Verificați că această valoare este aproximativ 0.24.

b) Scrieți un cod 'R' care să permită simularea unei variabile aleatoare X repartizată $\mathcal{N}(0, 1)$ plecând de la repartiția Laplace de parametru λ.

2. Fie X o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție F bijectivă.

a) Cum putem genera cu ajutorul metodei respingerii observații din repartiția lui X condiționată la $X > a$? Ce se întâmplă atunci când a este mare ?

b) Fie $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ și T definită prin

$$T = F^{-1}\left(F(a) + (1 - F(a))U\right).$$

Determinați funcția de repartiție a lui T și găsiți o metodă de simulare a repartiției lui X condiționată la $X > a$. Care dintre cele două metode este de preferat ?

c) Scrieți un cod 'R' care să permită simularea unei observații din repartiția lui X condiționată la $X > a$, unde variabila aleatoare X este repartizată $\mathcal{E}(1)$ iar $a > 0$.