

# Tema 1

## Exercițiul 1

Se dorește verificarea fiabilității unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobilistilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilisti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceștia depășesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depășită precum și probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depășită sunt egale cu  $p = 0.99$ .

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depășit in realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului  $p$  pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un polițist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Știind că proporția de automobilisti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinați dacă polițistul are dreptate.

## Exercițiul 2

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate și suntem interesați in găsirea probabilității evenimentului ca suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculați pentru inceput probabilitatea evenimentului  $E_n$ : *in primele  $n - 1$  aruncări nu a apărut nici suma 5 și nici suma 7 iar in a  $n$ -a aruncare a apărut suma 5*. Concluzionați.
2. Aceeași intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

## Exercițiul 3

Un administrator de reprezentanță de mașini comandă uzinei Dacia  $N$  mașini, numărul aleator  $X$  de mașini pe care il poate vinde reprezentanța sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 și  $n \geq N$ , toate avand aceeași probabilitate. Mașinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de  $a$  unități monetare pe mașină iar mașinile nevandute ii aduc o pierdere de  $b$  unități. Calculați valoarea medie a caștigului  $G$  reprezentanței de mașini și deduceți care este comanda optimă.

## Exercițiul 4

Fie  $X$  variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obținută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu șase fețe. Determinați legea de probabilitate a v.a.  $Y = X(7 - X)$  apoi calculați  $\mathbb{E}[Y]$  și  $\mathbb{V}[Y]$ . Notăm cu  $Y_1, \dots, Y_n$  valorile observate după  $n$  lansări independente. Determinați legea de probabilitate a v.a.  $M_n$  egală cu valoarea cea mai mare a acestora.

## Exercițiul 5

Fie  $Y$  o variabilă aleatoare (v.a.) și  $m$  mediana ei, i.e.  $\mathbb{P}(Y \leq m) \geq \frac{1}{2}$  și  $\mathbb{P}(Y \geq m) \geq \frac{1}{2}$ . Arătați că pentru orice numere reale  $a$  și  $b$  așa incat  $m \leq a \leq b$  sau  $m \geq a \geq b$  avem

$$\mathbb{E}|Y - a| \leq \mathbb{E}|Y - b|.$$

### Exercițiul 6\* <sup>1</sup>

Fie  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $n \geq 0$  un șir de părți ale lui  $\Omega$  și  $\mathcal{F}$  algebra generată de acesta (cea mai mică algebră în sensul incluziunii care conține mulțimile  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ). Fie  $(c_1, \dots, c_m)$  un șir de numere reale și  $(B_1, B_2, \dots, B_m)$  un șir de elemente din  $\mathcal{F}$  ( $m \geq 0$ ). Considerăm inegalitatea

$$\sum_{k=1}^m c_k \mathbb{P}(B_k) \geq 0 \quad (1)$$

unde  $\mathbb{P}$  este o măsură de probabilitate pe  $\mathcal{F}$ . Următoarele proprietăți sunt echivalente:

- a) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate  $\mathbb{P}$  pe  $\mathcal{F}$
- b) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate  $\mathbb{P}$  pe  $\mathcal{F}$  care verifică  $\mathbb{P}(A_i) = 0$  sau 1, pentru toți  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Exercițiul 7\*

Fie  $S_0^n = 1$ ,  $S_k^n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$  și notăm cu  $V_n^r$  (respectiv cu  $W_n^r$ ) probabilitatea ca exact  $r$  (respectiv cel puțin  $r$ ) dintre evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se realizează. Arătați că:

- a)  $V_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^n$
- b)  $W_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S_{r+k}^n$

---

<sup>1</sup>Exercițiile cu \* sunt suplimentare și nu sunt obligatorii