Tema 2

Soluții

Exerciţiul 1

Observăm că pentru $\omega \in \{|X| \geq a\}$ avem $\omega \in \{g(|X| \geq g(a)\}$ deoarece funcţia g este crescătoare, prin urmare folosind monotonia măsurii de probabilitate $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{P}(g(|X| \geq g(a))$. Dacă considerăm $A = \{g(|X| \geq g(a)\}$, atunci $g(|X|) \geq g(a)\mathbf{1}_A$ ceea ce implică $\mathbb{E}[g(|X|)] \geq g(a)\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = g(a)\mathbb{P}(A)$. Ultima relaţie arată că $\mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)}$, deoarece pentru $a > 0$ avem $g(a) > 0$ (g este strict crescătoare şi pozitivă). In final obţinem

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{P}(g(|X| \geq g(a)) = \mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)}.$$

Exerciţiul 2

a) Dacă i) este adevărată atunci $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ de unde obţinem imediat ii). Reciproc, presupunem ii) adevărată şi avem că $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_2}{p_1}\cdots\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}$ de unde $p_n = p_0\frac{\lambda^n}{n!}$. Cum $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ obţinem că $p_0 = e^{-\lambda}$ şi putem să concluzionăm.

b) i) Ştim că $\mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ şi vrem să evaluăm raportul $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)}$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = j)}{\mathbb{P}(X = j-1)} = \frac{\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Putem observa că

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = j) &\geq \mathbb{P}(X = j-1), \quad \text{dacă } \lambda \geq j \\ \mathbb{P}(X = j) &< \mathbb{P}(X = j-1), \quad \text{dacă } \lambda < j. \end{aligned}$$

ceea ce arată că $j = [\lambda]$ este punctul maxim şi $\mathbb{P}(X = [\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}e^{-\lambda}$ este valoarea maximă.

ii) După cum am văzut la punctul precedent avem $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$. Dacă $j > 0$ este fixat atunci putem observa că maximum este atins pentru $\lambda = j$.

c) Dacă $X \sim Geom(p)$ atunci $X = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}\varepsilon_k$, unde ε_k este măsura Dirac in k. Avem

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X-1}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 t^{X-1}\,dt\right] = \int_0^1 \mathbb{E}[t^{X-1}]\,dt$$

iar

$$\mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=1}^{\infty} t^k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k(1-p)^k\frac{p}{1-p} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

ceea ce ne conduce la

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^1 \frac{1}{t}\frac{pt}{1-(1-p)t}\,dt = -\frac{p}{1-p}\ln(p).$$

Dacă alegem să definim variabila geometrică prin $X = \sum_{k\geq 0} p(1-p)^k\varepsilon_k$ atunci $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = +\infty$.

Exerciţiul 3

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+2) + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

şi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) &= (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \dots) + (\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \dots)\\ &+ (\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots) + \dots\\ &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + \dots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X>i\}}$ şi să inversăm $\sum$ cu $\mathbb{E}$ (de ce putem ?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]\, dx \overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X\geq x\}}\, dx\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X} dx\right] = \mathbb{E}[X].$$

Exerciţiul 4

a) Dacă $X \sim Exp(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ şi are funcţia de repartiţie $F(x) = (1 - e^{-\alpha x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X > t + s|X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha st}} = e^{-\alpha t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Interpretare: Să presupunem că X reprezintă durata de viaţă a unei componente electrice. Ştiind că X a funcţionat deja un timp s ($X > s$), probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t suplimentar ($X > t + s$) este egală cu probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t. Faptul că a funcţionat deja un timp s nu influenţează probabilitatea să funcţioneze un timp t in plus.

b) Din relaţia

$$\mathbb{P}(X > s + t|X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obţinem $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notand cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s+t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0,\ t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. X este distribuită exponenţial trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională Cauchy. Observăm pentru inceput că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ şi prin inducţie avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luand $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ şi pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeaşi argumentare). Combinand rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un şir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ aşa incat $q_n \downarrow r$ şi folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. In final am găsit că $h(t) = e^{-t\log\frac{1}{h(1)}}$.

Exerciţiul 5

a) Este definiţia binomialei. Avem $\mathbb{E}[S_n] = np$ şi $\mathbb{V}[S_n] = np(1-p)$.

b) Avem că $\{L = n\} = \{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = 0\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = 1\}$ de unde $\mathbb{P}(L = n) = p^n q + pq^n$, $n \geq 1$, $q = 1-p$. Rezultă că

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(L = n) = \sum_{n\geq 1} n(p^n q + pq^n) = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq}$$
$$\mathbb{V}[L] = \sum_{n\geq 1} n^2\mathbb{P}(L = n) - \mathbb{E}[L]^2 = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2}$$

Pentru a găsi legea lui M să ne uităm la cuplul (L, M) şi să observăm că evenimentul $\{L = n, M = m\}$ este dat de $\{X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1\} \cup \{X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0\}$ de unde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L = n, M = m) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1)+\\ \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 0, X_{n+1} = \cdots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0) = p^n q^m p + p^m q^n q\end{aligned}$$

şi prin urmare legea lui M este

$$\mathbb{P}(M = m) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(L = n, M = m) = q^{m-1}p^2 + p^{m-1}q^2.$$

Obţinem asfel că $\mathbb{E}[M] = 2$ (independent de p) şi că

$$\mathbb{V}[M] = 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq}.$$

c) Este evident că $\mathbb{E}[L] = 2 + \frac{(p-q)^2}{pq} \geq 2 = \mathbb{E}[M]$ şi că $\mathbb{V}[L] = 2 + \frac{(1+pq)(p-q)^2}{p^2q^2} \geq 2 + \frac{2(p-q)^2}{pq} = \mathbb{V}[M] \geq 2$. Se poate calcula uşor că

$$\mathbb{E}[LM] = \sum_{n,m\geq 1} nm\mathbb{P}(L = n, M = m) = \frac{1}{pq}$$

de unde rezultă că $Cov[L, M] = -\frac{(p-q)^2}{pq}$.

d) Observăm că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{P}(L = k, M = n)}{\mathbb{P}(L = k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}q^n + q^{k+1}p^n}{p^k q + q^k p}$$

şi studiind comportamentul raportului $\frac{p}{q}$ (dacă este > 1 sau nu după cum e p) deducem că

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k) = \begin{cases} p^{n-1}q, & \text{dacă } p < \frac{1}{2} \\ q^{n-1}p, & \text{dacă } p > \frac{1}{2} \\ 2^{-n}, & \text{dacă } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$