Laborator Suplimentar

Mersul la întâmplare simplu

Obiectivul acestui laborator este de a rezolva câteva probleme ce țin de mersul la întâmplare simplu cu ajutorul limbajului R.

1 Ruina jucătorului

Un bărbat vrea să își cumpere un obiect (de exemplu o mașină sau o casă) care costă N unități monetare. Să presupunem că el are economisit un capital de $0 < k < N$ unități monetare și încearcă să câștige restul jucând un joc de noroc cu managerul unei bănci. Jocul este următorul: bărbatul aruncă o monedă echilibrată în mod repetatș dacă moneda pică cap (H) atunci managerul îi dă o unitate monetară, în caz contrar bărbatul plătește o unitate monetară bancii. Jocul continuă până când unul din două evenimente se realizează: sau câștigă suma necesară și își cumpără obiectul dorit sau pierde banii și ajunge la faliment. Ne întrebăm care este probabilitatea să ajungă la faliment?

Fie A evenimentul ca bărbatul să ajungă la ruină și B evenimentul ca la prima aruncare moneda a picat cap. Atunci din formula probabilității totale avem

$$\mathbb{P}_k(A) = \mathbb{P}_k(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_k(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

unde $\mathbb{P}_k$ este probabilitatea calculată în funcție de valoarea k a capitalului inițial al jucătorului. Să observăm că $\mathbb{P}_k(A|B)$ devine $\mathbb{P}_{k+1}(A)$ deoarece dacă la prima aruncare avem cap atunci capitalul inițial a crescut la $k+1$. În mod similar, dacă la prima aruncare am obținut coadă atunci $\mathbb{P}_k(A|B^c) = \mathbb{P}_{k-1}(A)$. Notând cu $p_k = \mathbb{P}_k(A|B)$ obținem următoarea ecuație

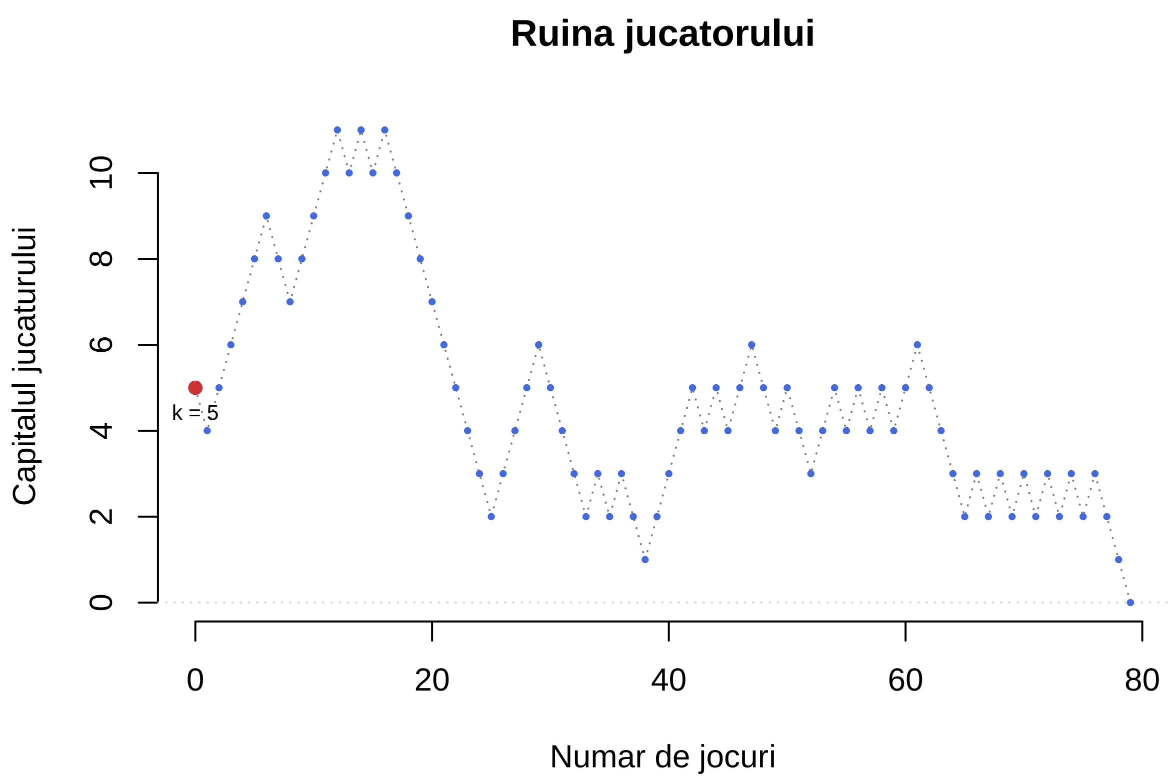
$$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1},$$

cu valorile inițiale $p_0 = 1$ (dacă jucătorul a pornit cu un capital inițial nul atunci el este în faliment) și respectiv $p_N = 0$ (dacă jucătorul are din start suma necesară pentru a achiziționa obiectul dorit atunci nu mai are loc jocul).

O simulare a jocului pentru $N = 50$ și $k = 5$ este prezentată de următoarea funcție:

```r
ruina = function(N, k){
  flag = TRUE

  joc = 0
  capital = k
  y = capital

  while(flag){
    x = 2*rbinom(1,1,0.5)-1

    capital = capital + x
    y = c(y, capital)
```

```
    joc = joc + 1

    if (capital == 0 || capital == N){
      flag = FALSE
    }
  }

  return(y) # daca am 0 este ruina altfel este succes
}
```



Dacă definim $b_k = p_k - p_{k-1}$ pentru $k \geq 1$ atunci $b_k = b_{k-1}$, $\forall k \geq 2$. Prin urmare $b_k = b_1$ și $p_k = b_1 + p_{k-1} = kb_1 + p_0$. Observând că $b_1 + \cdots + b_N = p_N - p_0 = -1$ deducem că $b_1 = -\frac{1}{N}$ iar $p_k = 1 - \frac{k}{N}$.

Dorim să repetăm experimentul de $M = 1000$ de ori (pentru valorile inițiale $N = 50$ și $k = 5$) și ne interesăm de câte ori jucătorul a ajuns la faliment.

```
N = 50
k = 5
M = 1000
# Obs. - rezultatul functiei ruina trebuie modificat
joc = replicate(M, ruina(N, k)) # repeta functia de M ori

proba_ruina = sum(joc == 0)/M
```

Am obținut că probabilitatea empirică de faliment este 0.9 iar cea teoretică este 0.9.

2 Aruncatul cu banul

O monedă are probabilitatea să pice cap p și să pice coadă q astfel ca $p+q=1$. Moneda este aruncată succesiv și independent până când evenimentul A, am obținut două capete unul după altul sau două cozi una după alta, s-a realizat. Determinați numărul mediu de aruncări necesare realizării evenimentului A.

Vom prezenta două soluții pentru acest exercițiu. În prima soluție vom începe prin a calcula funcția de masă pentru variabila care descrie experimentul și apoi vom calcula media. În cea de-a doua soluție vom calcula media cu ajutorul condiționării.

Fie X variabila aleatoare care reprezintă numărul de aruncări necesare pentru ca evenimentul A să se realizeze (numărul de aruncări necesare obținerii a 2 capete unul după altul sau a 2 cozi una după alta) și $X_i \in \{H, T\}$ variabila aleatoare care descrie rezultatul obținut la cea de-a i-a aruncare. Evenimentul $\{X = n\}$ poate fi exprimat ca reuniunea dintre A_n și B_n, unde A_n reprezintă evenimentul să obținem două capete consecutive pentru prima oară la cea de-a n-a aruncare iar B_n este evenimentul să obținem două cozi consecutive la a n-a aruncare.

Se poate observa cu ușurință că un eveniment elementar din A_n are forma $\omega = \underbrace{\cdots}_{n-2} HH$ și se poate determina în întregime datorită faptului că în primele $n-2$ aruncări nu putem avea două realizări consecutive. În plus dacă $n = 2k+1$ atunci

$$\mathbb{P}(A_{2k+1}) = \mathbb{P}(X_1 = T, X_2 = H, \cdots, X_{2k-1} = T, X_{2k} = H, X_{2k+1} = H) \overset{indep.}{=} (pq)^k p$$

iar dacă $n = 2k+2$ atunci

$$\mathbb{P}(A_{2k+2}) = \mathbb{P}(X_1 = H, X_2 = T, \cdots, X_{2k} = T, X_{2k+1} = H, X_{2k+2} = H) \overset{indep.}{=} (pq)^k p^2$$

În mod similar se poate calcula probabilitatea evenimentului B_n pentru $n = 2k+1$

$$\mathbb{P}(B_{2k+1}) = \mathbb{P}(X_1 = H, X_2 = T, \cdots, X_{2k-1} = H, X_{2k} = T, X_{2k+1} = T) \overset{indep.}{=} (pq)^k q$$

și respectiv $n = 2k+2$

$$\mathbb{P}(B_{2k+2}) = \mathbb{P}(X_1 = T, X_2 = H, \cdots, X_{2k} = H, X_{2k+1} = T, X_{2k+2} = T) \overset{indep.}{=} (pq)^k q^2$$

Cum $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n)$ deducem că

$$\mathbb{P}(X = n) = \begin{cases} (pq)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ impar} \\ (pq)^{\frac{n-2}{2}}(p^2+q^2), & n \text{ par} \end{cases}$$

Următoarea funcție simulează evenimentul din enunțul problemei:

```r
flip_coins = function(p){

  flip = sample(c("H", "T"), 1, prob = c(p, 1-p))

  nflips = 1
  flag = TRUE
```

```
  while(flag){
    x = sample(c("H", "T"), 1, prob = c(p, 1-p))

    nflips = nflips + 1

    if (flip == x){
      flag = FALSE
    }

    flip = x
  }

  return(nflips)
}

flip_coins(0.2)
[1] 3
```

Înainte de a calcula media ne propunem să repetăm de $N = 10000$ de ori experimentul (pentru $p = 0.3$) și să comparăm rezultatul empiric cu cel teoretic.

```
N = 10000
p = 0.3

rez_flips = replicate(N, flip_coins(p))
```

Rezultatele sunt incluse în tabelul de mai jos:

n	Empiric	Teoretic
2	0.5760	0.58000
3	0.2110	0.21000
4	0.1245	0.12180
5	0.0434	0.04410
6	0.0255	0.02558
7	0.0100	0.00926
8	0.0059	0.00537
9	0.0016	0.00194
10	0.0014	0.00113
11	0.0004	0.00041
12	0.0002	0.00024
13	0.0001	0.00009

Pentru a calcula media avem

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=2}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$

iar dacă seriile $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X = 2k+1)$ și $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\mathbb{P}(X = 2k+2)$ sunt convergente atunci putem scrie

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=2}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X = 2k+1) + \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\mathbb{P}(X = 2k+2).$$

Se poate arăta cu ușurință că

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X=2k+1) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(pq)^k - \sum_{k=1}^{\infty}(pq)^k = \frac{pq(3-pq)}{(1-pq)^2}$$

și

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\mathbb{P}(X=2k+2) = 2(p^2+q^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(pq)^k = \frac{2(p^2+q^2)}{(1-pq)^2}$$

de unde concluzionăm că $\mathbb{E}[X] = \frac{pq(3-pq)}{(1-pq)^2} + \frac{2(p^2+q^2)}{(1-pq)^2} = \frac{2+pq}{1-pq}$.

O a doua soluție pentru determinarea mediei este bazată pe condiționare. Fie H_k și respectiv T_k evenimentele prin care capul respectiv coada a apărut la cea de-a k-a aruncare și $\mathbb{P}(H_k) = p$ iar $\mathbb{P}(T_k) = q$. Din formula probabilității totale, avem că

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|H_1]\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{E}[X|T_1]\mathbb{P}(T_1) = p\mathbb{E}[X|H_1] + q\mathbb{E}[X|T_1].$$

Mai mult,

$$\mathbb{E}[X|H_1] = p\mathbb{E}[X|H_1\cap H_2] + q\mathbb{E}[X|H_1\cap T_2]$$

și cum $\mathbb{E}[X|H_1\cap H_2] = 2$ (evenimentul A s-a realizat la a doua aruncare) iar $\mathbb{E}[X|H_1\cap T_2] = 1 + \mathbb{E}[X|T_1]$ (dacă jocul nu este gata doar ultima aruncare este importantă) obținem că

$$\mathbb{E}[X|H_1] = 2p + q(1+\mathbb{E}[X|T_1]).$$

În mod similar găsim $\mathbb{E}[X|T_1] = 2q + p(1+\mathbb{E}[X|H_1])$. Rezolvând sistemul de două ecuații cu două necunoscute obținem soluțiile $\mathbb{E}[X|H_1] = \frac{2+q^2}{1-pq}$ și $\mathbb{E}[X|T_1] = \frac{2+p^2}{1-pq}$ de unde media este $\mathbb{E}[X] = \frac{2+pq}{1-pq}$.

Putem verifica numeric dacă formula pe care am gasit-o este corectă. Pentru aceasta vom repeta experimentul ($p = 0.3$) de $N = 10000$ de ori.

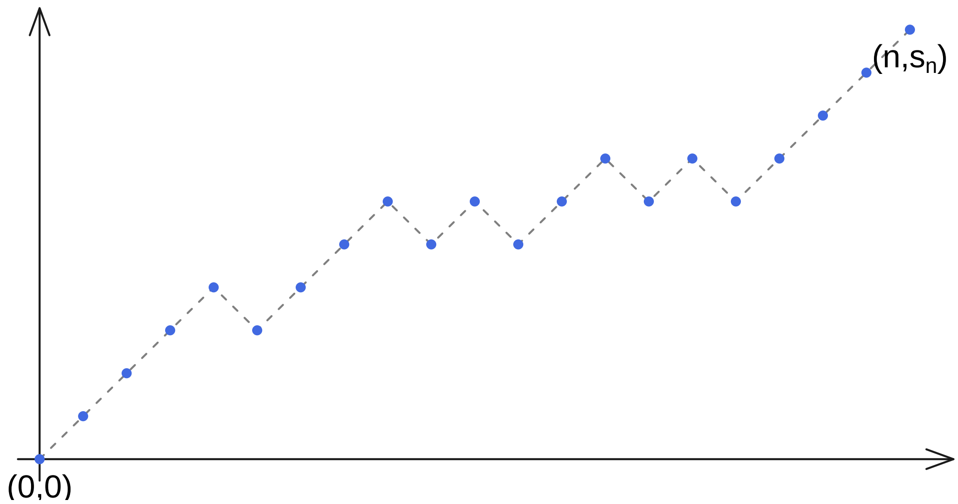
Obținem că media empirică este 2.807 iar cea teoretică este 2.797.

3 Principiul reflexiei și problema scrutinului

Să presupunem că avem n elemente $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, +1\}$ astfel încât p dintre ele iau valori de $+1$ și q dintre ele iau valori de -1 ($n = p + q$). Sumele parțiale $s_k = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_k$ reprezintă diferența dintre numărul de elemente de $+1$ și de elemente de -1 în primele k elemente. Observăm că

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k = \pm 1, \quad s_0 = 0, \quad s_n = p - q.$$

Din punct de vedere geometric, n-uplul $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ poate fi reprezentat cu ajutorul unei linii poligonale ce pleacă din origine și ajunge în punctul de coordonate (n, s_n), panta fiecărui segment de lungime 1 este dată de ϵ_k ($+1$ NE și -1 SE). Linia poligonală $(s_1, \ldots, s_n)$ are al k-lea punct de abscisă k și ordonată s_k.



Dacă n și x sunt numere naturale nenule astfel ca $n = p + q$ și $x = p - q$, $p, q \in \mathbb{N}$ atunci numărul de linii poligonale (în sensul de mai sus) din origine către punctul (n, x) este dat de

$$N_{n,x} = \binom{p+q}{p}.$$

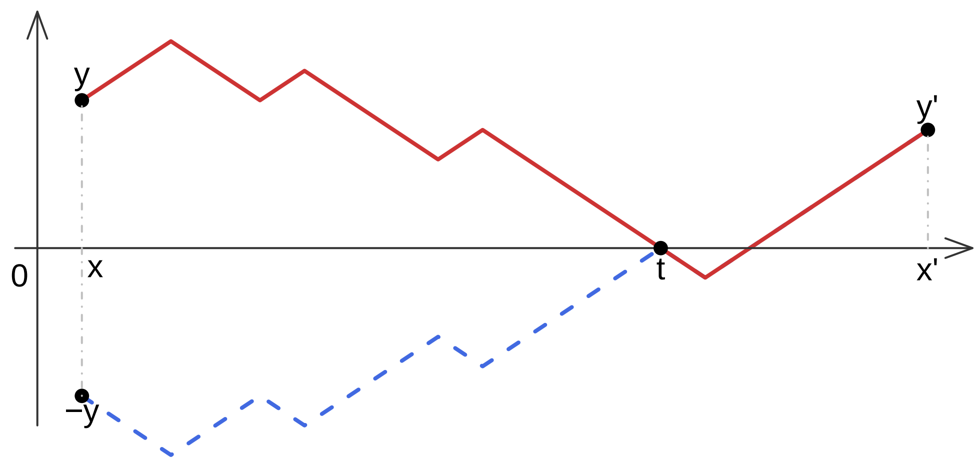
Să presupunem că în turul doi al alegerilor prezidențiale din 2019 participă doi candidați, P și Q. Dacă voturile sunt date de manieră independentă cu probabilitatea de $\frac{1}{2}$ pentru fiecare candidat și candidatul P primește p voturi iar candidatul Q primește q voturi astfel ca P să câștige ($p > q$), atunci să se calculeze probabilitatea ca pe tot parcursul numărării voturilor candidatul P să fi avut mai multe voturi decât candidatul Q.

Problema scrutinului (propusă și rezolvată de Whitworth în 1878[1]) poate fi interpretată geometric prin intermediul unei linii poligonale de lungime $p + q$ în care pantele fiecărui segment reprezintă opțiunea votului pentru unul din cei doi candidați: $\epsilon_k = +1$ dacă al k-lea vot a fost pentru candidatul P și $\epsilon_k = -1$ dacă al k-lea vot a fost pentru candidatul Q. În mod similar, dată fiind o linie poligonală care pleacă din origine și ajunge în punctul $(p + q, p - q)$, aceasta poate reprezenta parcursul unui scrutin în care cei doi candidați vor avea la final p și respectiv q voturi.

Conform notațiilor precedente, putem observa că s_k reprezintă numărul voturilor cu care candidatul P conduce (sau este în urmă) imediat după cel de-al k-lea vot. Astfel cerința problemei se poate traduce în modul următor: candidatul P conduce pe tot parcursul procesului de votare dacă și numai dacă $s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_n > 0$ (linia poligonală se află tot timpul deasupra axei absciselor).

[1]Soluția a fost publicată în cartea Choice and chance în 1886. În 1887 Joseph Bertrand a propus o formă mai generală a problemei care a fost rezolvată de către Désiré André cu ajutorul principiului reflexiei.

Soluția problemei se bazează pe următorul rezultat, numit *principiul reflexiei.* Acesta spune că numărul de traiectorii (linii poligonale în sensul descris mai sus) de la punctul de coordonate (x, y) la punctul de coordonate (x', y'), cu $x' > x \geq 0$, $y > 0$ și $y' > 0$, care intersectează axa absciselor este egal cu numărul de traiectorii de la punctul de coordonate $(x, -y)$ la punctul de coordonate (x', y').



Pentru a verifica această afirmație, fie $(s_x = y, s_{x+1}, \dots, s_{x'} = y')$ o linie poligonală ($s_k - s_{k-1} = \pm 1$, $k \in \{x, x+1, \dots, x'\}$) de la punctul (x, y) la punctul (x', y') care să intersecteze axa absciselor și fie t abscisa primului punct de intersecție (alegem t astfel încât $s_x > 0, \dots, s_{t-1} > 0$ și $s_t = 0$ - a se vedea figura). Prin urmare $(-s_x = -y, -s_{x+1}, \dots, -s_{t-1}, 0, s_{t+1}, \dots, s_{x'} = y')$ este o linie poligonală de la punctul $(x, -y)$ la punctul (x', y') care intersectează axa absciselor pentru prima oară în punctul $(t, 0)$. Cum secțiunea $(s_x, s_{x+1}, \dots, s_{t-1}, 0)$ este reflexia secțiunii $(-s_x, -s_{x+1}, \dots, -s_{t-1}, 0)$, deducem că putem construi o bijecție de la mulțimea liniilor poligonale dintre (x, y) și (x', y') la mulțimea liniilor poligonale dintre $(x, -y)$ și (x', y').

Vom arăta că numărul de linii poligonale care pleacă din origine și ajung în punctul de coordonate $(p+q, p-q)$ verificând $s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_n > 0$ este dat de formula:

$$N = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}.$$

Pentru a verifica această formulă să observăm că numărul de linii poligonale de la punctul $(0, 0)$ la punctul (n, x) ($n = p + q$ și $x = p - q$) care verifică $s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_n > 0$ coincide cu numărul de traiectorii de la $(1, 1)$ la (n, x). Acest număr reprezintă diferența dintre numărul de traiectorii din origine la punctul $(n-1, x-1)$ (translatăm toate punctele spre stânga și în jos cu o unitate), $N_{n-1,x-1}$, mai puțin acele traiectorii care intersectează axa absciselor. Folosind principiul reflexiei, numărul de traiectorii care pornesc din $(1, 1)$ și ajung în (n, x) intersectând axa absciselor este egal cu numărul de traiectorii care pleacă din $(1, -1)$ și ajung în (n, x), care este egal cu $N_{n-1,x+1}$ (translatăm spre stânga și în sus cu o unitate). Prin urmare avem

$$N = N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}.$$

Probabilitatea căutată devine astfel $\frac{N_{n-1,x-1}-N_{n-1,x+1}}{N_{n,x}} = \frac{p-q}{p+q}$.

Pentru a verifica numeric rezultatul obținut să considerăm următoarea funcție care simulează scrutin-ul pentru cei doi candidați:

```r
scrutin = function(sd){
  set.seed(sd)
  # generam voturile
  vectscrutin = sample(c(rep("P",p),rep("Q",q)))
  # transformam in +-1
  vectscrutin = 2*(vectscrutin == "P") - 1
  # calculam s_k
  s = cumsum(vectscrutin)
  # returnam daca avem sau nu indeplinita conditia
  sum(s>0) == p+q
}
```

Considerând $p = 50$ și $q = 35$ și repetând experimentul de $M = 100000$ de ori obținem că probabilitatea empirică este 0.1769 iar cea teoretică este 0.1765.

4 Legea arcsinus-ului

> Să presupunem că aruncăm cu banul de 100 de ori și că înregistrăm la fiecare aruncare numărul de capete și numărul de cozi. Definim *ultima egalitate* ca fiind ultima aruncare în care numărul de capete este egal cu numărul de cozi (deci ia valori de la 0 la 100). Ne propunem să scriem un program care să determine locația ultimei egalități în jocul de noroc descris.

Vom începe prin a transpune problema în limbaj matematic[2]. Fie $(X_n)_n$ un șir de variabile aleatoare independente ce iau valori în mulțimea $\{+1, -1\}$ cu probabilitatea $p = \frac{1}{2}$ (aruncăm cu banul și ne deplasăm la dreapta sau la stânga în funcție de rezultatul aruncării) și fie $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Putem interpreta șirul $S_1, S_2, \ldots, S_n$ geometric, ca și în cazul problemei scrutinului, cu ajutorul unei linii poligonale cu segmentele $(k-1, S_{k-1}) \to (k, S_k)$. Fie L_{2n} variabila aleatoare care ne dă timpul ultimei întoarceri în origine a unui mers la întâmplare de lungime $2n$ (de ce avem $2n$?), cu alte cuvinte

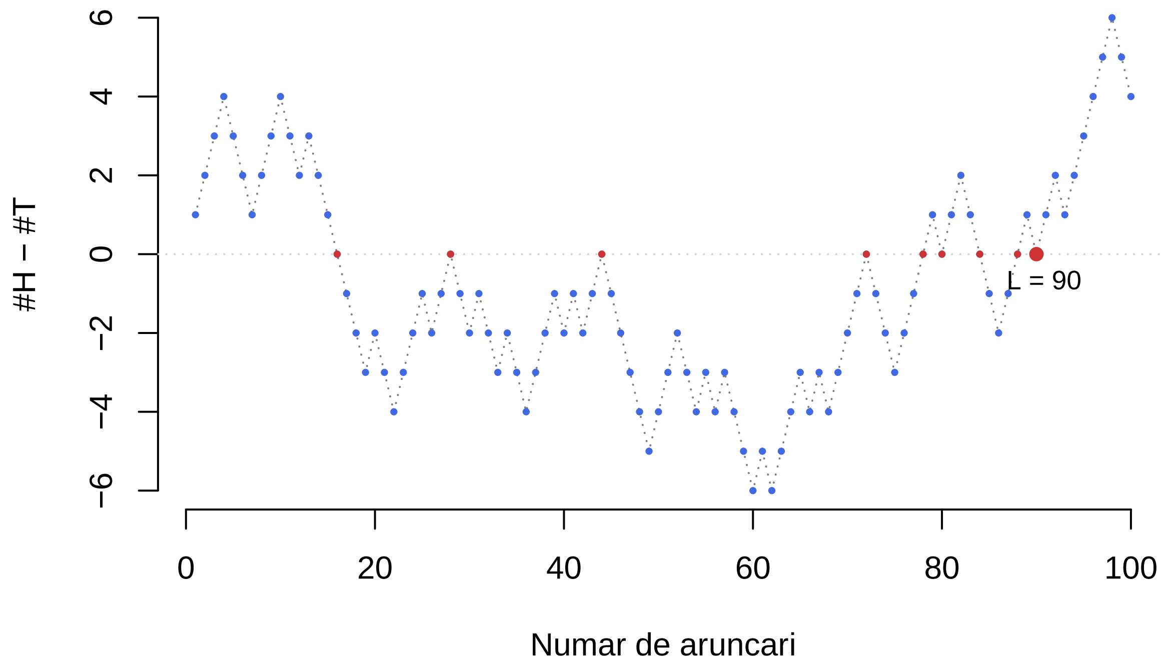
$$L_{2n} = \sup\{m \leq 2n \,|\, S_m = 0\}.$$

Variabila L_{2n} este variabila care descrie *ultima egalitate* din enunțul problemei și ne propunem să găsim repartiția acestei variabile aleatoare. Observăm că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)\\ &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0 | S_{2k} = 0).\end{aligned}$$

O realizare a variabilei L_{100}, în contextul problemei atunci când $n = 50$ este ilustrată în figura următoare.

[2] Această problemă este preluată din cartea lui W. Feller *Introduction to probability and its applications*, vol I, 1968, capitolul III.



Am văzut, în problema scrutinnului, că $\mathbb{P}(S_n = m)$ este $\frac{N_{n,m}}{2^n}$ (numărul de linii poligonale din origine până în punctul (n, m) supra numărul total de linii poligonale cu n puncte) de unde

$$\mathbb{P}(S_n = m) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} 2^{-n},$$

unde folosim convenția că $\binom{n}{\frac{n+m}{2}} = 0$ dacă $\frac{n+m}{2}$ nu este un întreg între 0 și n. Astfel deducem că $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.

Vom arăta că pentru un mers la întâmplare care începe din origine are loc relația

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

și cum X_i sunt independente (fiecare aruncare se face de manieră independentă) atunci probabilitatea condiționată $\mathbb{P}(S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 | S_{2k} = 0)$ este egală cu probabilitatea ca un mers la întâmplare de lungime $2n - 2k$, care pornește din origine, să nu mai viziteze niciodată originea în cei $2n - 2k$ pași sau

$$\mathbb{P}(S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 | S_{2k} = 0) = \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0).$$

Prin urmare avem relația $\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0)$. Pentru ca demonstrația să fie completă rămâne să verificăm că

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

Cum originea nu mai este vizitată în cei $2n$ pași atunci sau $S_j > 0$ sau $S_j < 0$ pentru toți $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Din simetrie, aceste alternative au aceeași probabilitate deci

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = 2\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0)$$

și aplicând problema scrutinului (linia poligonală se afla deasupra axei absciselor) avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0, S_{2n} = 2k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2n}} (N_{2n-1,2k-1} - N_{2n-1,2k+1}) \\
&= \frac{1}{2^{2n}} N_{2n-1,1} = 2^{-2n} \binom{2n-1}{n} = 2^{-2n-1} \binom{2n}{n} \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n} = 0),
\end{aligned}$$

de unde deducem concluzia.

Se poate verifica cu ușurință că $\mathbb{P}(S_{2m} = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$[3] pentru m suficient de mare, astfel

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}.$$

Observăm că pentru $\frac{k}{n} \to x$ avem $n\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) \to \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$. Dacă $0 < a < b < 1$ și considerăm $2na_n$ cel mai mic întreg par mai mare decât $2na$ și respectiv $2nb_n$ cel mai mare întreg par mai mic decât $2nb$ atunci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(a < \frac{L_{2n}}{2n} < b\right) &= \sum_{k=na_n} nb_n \mathbb{P}(L_{2n} = 2k) \\
&\approx \sum_{k=na_n} nb_n \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \approx \frac{1}{\pi} \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{x(n-x)}}\, dx \\
&\overset{y=nx}{=} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy.
\end{aligned}$$

În concluzie am obținut că

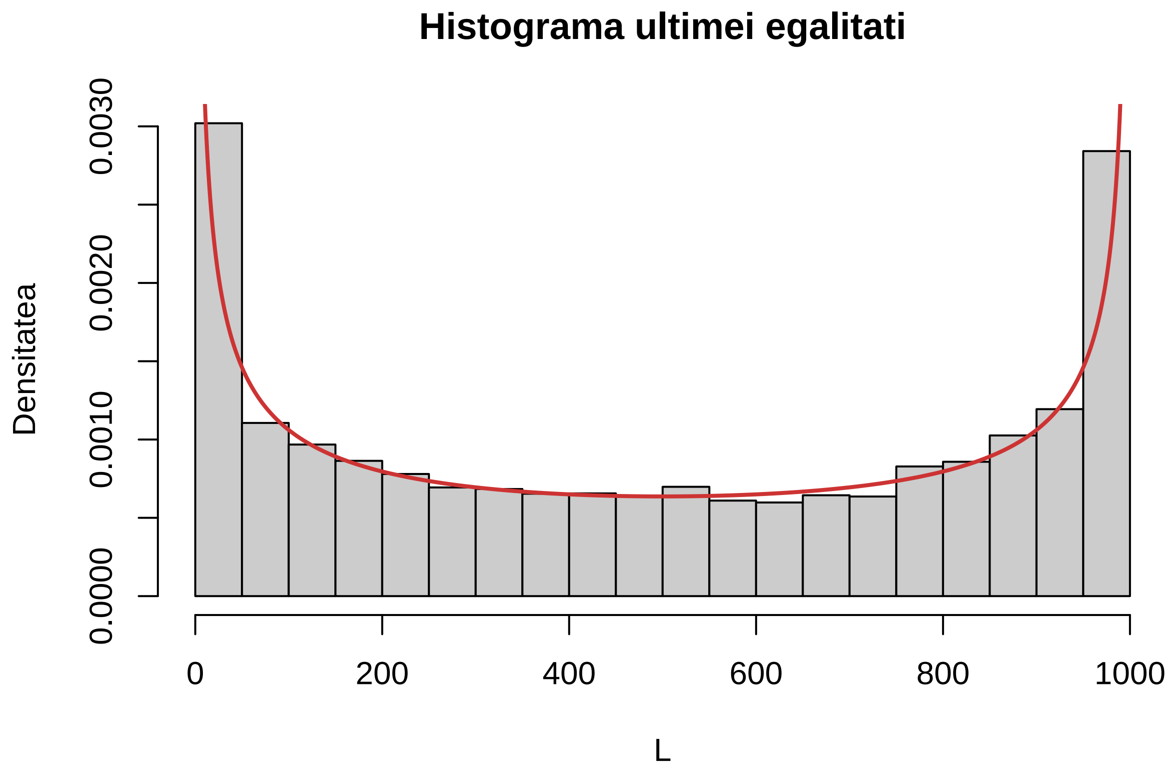
$$n\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) \to \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

și

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{L_{2n}}{2n} < b\right) \approx \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy = \frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{b} - \arcsin\sqrt{a}).$$

Următoarea histogramă, pentru care am considerat că experimentul constă din $n = 1000$ de aruncări cu banul și pe care l-am repetat de $M = 10000$ de ori, ilustrează grafic *legea arcsinusului* pentru problema noastră:

[3] Din formula lui Stirling avem că $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ prin urmare $\binom{2n}{n} 2^{-2n} \approx \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2} 2^{-2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$


Histograma ultimei egalitati
Densitatea
0.0000
0.0010
0.0020
0.0030
0
200
400
600
800
1000
L