Tema 4

Solutii

Exerciţiul 1

a) Legile marginale ale lui X şi Y se obţin făcand suma pe linii respectiv pe coloane, astfel

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.35 & 0.45 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.48 & 0.33 & 0.19 \end{pmatrix}.$$

b) Din legile marginale ale lui X şi Y se obţine imediat că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x] &= 1 \times 0.35 + 2 \times 0.45 + 3 \times 0.2 = 1.85,\\
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \left(1^2 \times 0.35 + 2^2 \times 0.45 + 3^2 \times 0.2\right) - 1.85^2 = 0.5375,\\
\mathbb{E}[Y] &= 1 \times 0.48 + 2 \times 0.33 + 3 \times 0.19 = 1.71,\\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \left(1^2 \times 0.48 + 2^2 \times 0.33 + 3^2 \times 0.19\right) - 1.71^2 = 0.5859.
\end{aligned}$$

c) Pentru a calcula coeficientul de corelaţie dintre X şi Y trebuie mai intai să calculăm covarianţa dintre cele două variabile. Avem că $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ iar

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x_i, y_j} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1 \times 1 \times 0.22 + 1 \times 2 \times 0.11 + \cdots + 3 \times 3 \times 0.07 = 3.33$$

de unde rezultă $Cov(X,Y) = 0.1665$. Astfel coeficientul de corelaţie este

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}} = \frac{0.1665}{\sqrt{0.5275 \times 0.5859}} = 0.2995.$$

d) Pentru legea lui X condiţionată la $Y = 2$ avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1|Y = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \frac{0.11}{0.33} = \frac{11}{33}\\
\mathbb{P}(X = 2|Y = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \frac{0.15}{0.33} = \frac{15}{33}\\
\mathbb{P}(X = 3|Y = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X = 3, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \frac{0.07}{0.33} = \frac{7}{33}
\end{aligned}$$

de unde rezultă că $(X|Y = 2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{11}{33} & \frac{15}{33} & \frac{7}{33} \end{pmatrix}$.

In mod similar, pentru legea lui $Y|X = 2$ avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 1|X = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 1)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{0.2}{0.45} = \frac{4}{9}\\
\mathbb{P}(Y = 2|X = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{3}{9}\\
\mathbb{P}(Y = 3|X = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 3)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{0.1}{0.45} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

de unde $(Y|X=2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

e) Avem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y=2] &= 1 \times \mathbb{P}(X=1|Y=2) + 2 \times \mathbb{P}(X=2|Y=2) + 3 \times \mathbb{P}(X=3|Y=2) = \frac{62}{33},\\
\mathbb{E}[X^2|Y=2] &= 1 \times \mathbb{P}(X=1|Y=2) + 2^2 \times \mathbb{P}(X=2|Y=2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X=3|Y=2) = \frac{134}{33},\\
\mathbb{E}[Y|X=2] &= 1 \times \mathbb{P}(Y=1|X=2) + 2 \times \mathbb{P}(Y=2|X=2) + 3 \times \mathbb{P}(Y=3|X=2) = \frac{16}{9},\\
\mathbb{E}[Y^2|X=2] &= 1 \times \mathbb{P}(Y=1|X=2) + 2^2 \times \mathbb{P}(Y=2|X=2) + 3^2 \times \mathbb{P}(Y=3|X=2) = \frac{34}{9},
\end{aligned}$$

deci $\mathbb{V}[X|Y=2] = 0.5307$ şi $\mathbb{V}[Y|X=2] = 0.6172$.

Exerciţiul 2

Pentru legea condiţionată a lui X la $X+Y=n$ avem:

$$\mathbb{P}(X=k|X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \overset{indep.}{=} \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

dacă $k \in \{0,1,\dots,n\}$ şi $\mathbb{P}(X=k|X+Y=n) = 0$ in caz contrar.

Observăm că pentru a calcula legea condiţionată trebuie să găsim legea sumei $X+Y$. Pentru aceasta avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \mathbb{P}(X \in \Omega, X+Y=n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{X=k\}, X+Y=n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k)\\
&\overset{indep.}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!},
\end{aligned}$$

prin urmare $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Astfel găsim că

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}\\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

deci $(X|X+Y=n) \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Exerciţiul 3

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i, T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_1, T_2)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_1, T_3)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \mathbb{P}((T_1, T_4) \cup (T_1, T_5)) = \frac{2}{10}, \ (N_1 = 1 \text{ şi } 2,\ 3,\ 4^e \text{ OK deci 5 e defect})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_2, T_3)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_2, T_4) \cup (T_2, T_5)) = \frac{2}{10}, \ (N_1 = 2 \text{ şi } N_2 = 2 \text{ sau 4 sau 5 defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_3, T_4) \cup (T_3, T_5)) = \frac{2}{10}, \ (N_1 = 3 \text{ şi } N_2 = 1 \text{ sau 4 sau 5 defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 0) = \mathbb{P}((T_4, T_5)) = \frac{1}{10}, \ (N_1 = 3 \text{ şi primele 3 OK atunci 4 şi 5 defecte})
\end{aligned}$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$.

Exerciţiul 4

Fie N numărul de clienţi care intră in magazin şi fie X_k v.a. care reprezintă suma cheltuită de clientul k. Din ipoteză ştim că $\mathbb{E}[N] = 50$, $\mathbb{E}[X_i] = 30$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ şi $X_i \perp\!\!\!\perp N$ ($\perp\!\!\!\perp$ - semnul pentru independenţă). Putem observa că cifra de afaceri a magazinului este dată de v.a. $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Avem

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{cifrei de afaceri}] = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n\right]\mathbb{P}(N=n)\\
&= \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n\right]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i | N = n\right]\right)\mathbb{P}(N=n)\\
&\overset{indep.}{=} \sum_{n\geq 1} n\mathbb{E}[X_1]\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X_1]\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]\\
&= 30 \times 50 = 1500,
\end{aligned}
$$

prin urmare cifra de afaceri pe care o inregistrează magazinul in ziua respectivă este de 1500 RON.

Exerciţiul 5

a) Observăm că legea lui X este (făcand suma pe linii) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ şi legea lui Y este (făcand suma pe coloane) $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$ prin urmare

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 2\times 0.35 + 4\times 0.4 + 6\times 0.25 = 3.8,\\
Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \left(2^2\times 0.35 + 4^2\times 0.4 + 6^2\times 0.25\right) - 3.8^2 = 2.36.
\end{aligned}
$$

b) Pentru legea v.a. condiţionate $\mathbb{E}[Y|X]$ avem

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y|X=0] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=0) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=0) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=0) = 2\times\frac{0.1}{0.4} + 4\times\frac{0.2}{0.4} + 6\times\frac{0.1}{0.4} = 4,\\
\mathbb{E}[Y|X=1] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=1) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=1) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=1) = 2\times\frac{0.1}{0.3} + 4\times\frac{0.1}{0.3} + 6\times\frac{0.1}{0.3} = 4,\\
\mathbb{E}[Y|X=2] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=2) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=2) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=2) = 2\times\frac{0.1}{0.2} + 4\times\frac{0.1}{0.2} + 6\times\frac{0}{0.2} = 3,\\
\mathbb{E}[Y|X=3] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=3) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=3) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=3) = 2\times\frac{0.05}{0.1} + 4\times\frac{0}{0.1} + 6\times\frac{0.05}{0.1} = 4,
\end{aligned}
$$

deci $\mathbb{E}[Y|X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ deoarece $\mathbb{E}[Y|X]$ ia valoarea 3 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X\neq 2)$.

Pentru legea v.a. $Var(Y|X)$ observăm că

$$
\begin{aligned}
Var[Y|X=0] &= \mathbb{E}[Y^2|X=0] - \mathbb{E}[Y|X=0]^2 = \left(2^2\times\frac{0.1}{0.4} + 4^2\times\frac{0.2}{0.4} + 6^2\times\frac{0.1}{0.4}\right) - 16 = 2,\\
Var[Y|X=1] &= \mathbb{E}[Y^2|X=1] - \mathbb{E}[Y|X=1]^2 = \left(2^2\times\frac{0.1}{0.3} + 4^2\times\frac{0.1}{0.3} + 6^2\times\frac{0.1}{0.3}\right) - 16 = 2.66,\\
Var[Y|X=2] &= \mathbb{E}[Y^2|X=2] - \mathbb{E}[Y|X=2]^2 = \left(2^2\times\frac{0.1}{0.2} + 4^2\times\frac{0.1}{0.2} + 6^2\times\frac{0}{0.2}\right) - 9 = 1,\\
Var[Y|X=3] &= \mathbb{E}[Y^2|X=3] - \mathbb{E}[Y|X=3]^2 = \left(2^2\times\frac{0.05}{0.1} + 4^2\times\frac{0}{0.1} + 6^2\times\frac{0.05}{0.1}\right) - 16 = 4,
\end{aligned}
$$

astfel $Var(Y|X) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$ deoarece v.a. $Var(Y|X)$ ia valoarea 1 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$, valoarea 2 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=0)$, valoarea 2.66 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=1)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=3)$.

c) Cunoscand legile variabilelor aleatoare $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Var[Y|X]] &= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 2.66 \times 0.3 + 4 \times 0.1 \approx 2.2,\\
Var[\mathbb{E}[Y|X]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 = \left(3^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.8\right) - \mathbb{E}[Y]^2 = 0.16,\\
Var[Y] &= 2.36,
\end{aligned}$$

deci $Var[Y] = 2.2 + 0.16 = 2.26$ de unde $Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$.