Tema 1

Exercițiul 1

Zece cartonașe pe care sunt scrise cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ și 9 sunt puse într-un bol. Cinci cartonașe sunt extrase la întâmplare și sunt așezate în rând în ordinea extragerii. Care este probabilitatea ca numărul de cinci cifre extras să fie divizibil cu 495 ?

Exercițiul 2

Se dorește verificarea fiabilității unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliștilor. În urma studiilor statistice pe un număr mare de automobiliști, s-a observat că în general 0.5% dintre aceștia depășesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci când doza de alcool autorizată este depășită precum și probabilitatea ca testul să fie negativ atunci când doza autorizată nu este depășită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depășit în realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un polițist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Știind că proporția de automobiliști care au băut prea mult în acest context este de 30%, determinatți dacă polițistul are dreptate.

Exercițiul 3

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate și suntem interesați în găsirea probabilității evenimentului ca suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculați pentru început probabilitatea evenimentului E_n: *în primele* $n - 1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *și nici suma* 7 *iar în a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionați.
2. Aceeași întrebare, dar înlocuind 5 cu 2.

Exercițiul 4

a) Fie X o variabilă repartizată exponențial (de parametru α). Arătași că are loc următoarea relație (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relația (). Arătați că X este repartizată exponențial.

Exercițiul 5

Arătați că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X \geq x)\,dx.$$

Exercițiul 6

Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.

Exercițiul 7

Un proces Bernoulli de parametru p este un șir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n\geq 1}$ cu $X_n \in \{0, 1\}$ și $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$.

a) Arătațic că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n, p)$ și calculați media și varianța acesteia.

b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ și M cel mai mare număr natural așa încât $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$. Găsiți distribuțiile v.a. L și M.

c) Arătați că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M]$, $\mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ și calculați $Cov[L, M]$.

d) Calculați $\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(M = n \,|\, L = k)$.

Exercițiul 8

a) Fie X o variabilă aleatoare de medie 0 și varianță $\sigma^2 < \infty$. Arătați că penru orice $a > 0$ are loc inegalitatea

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

b) Un grup de 200 de persoane, din care jumătate sunt bărbați, este divizat într-o 100 de perechi de câte 2 persoane. Dați o margine superioară pentru probabilitatea ca cel mult 30 dintre acestea să fie perechi mixte.

Exercițiul 9* [1]

Fie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $n \geq 0$ un șir de părți ale lui Ω și $\mathcal{F}$ algebra generată de acestea (cea mai mică algebră în sensul incluziunii care conține mulțimile $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$). Fie $(c_1, \ldots, c_m)$ un șir de numere reale și $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ un șir de elemente din $\mathcal{F}$ $(m \geq 0)$. Considerăm inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\mathbb{P}(B_k) \geq 0 \tag{1}$$

unde $\mathbb{P}$ este o măsură de probabilitate pe $\mathcal{F}$. Următoarele proprietăți sunt echivalente:

[1] Exercițiile cu * sunt suplimentare și nu sunt obligatorii

a) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$

b) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{F}$ care verifică $\mathbb{P}(A_i) = 0$ sau 1, pentru toți $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exercițiul 10*

Fie $S_0^n = 1$, $S_k^n = \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ și notăm cu V_n^r (respectiv cu W_n^r) probabilitatea ca exact r (respectiv cel puțin r) dintre evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ se realizează. Arătați că:

a) $V_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^n$ (Identitatea lui Waring[2])

b) $W_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S_{r+k}^n$

c) Construiți un program `R` care să calculeze probabilitatea celor două evenimente în contextul problemei secretarei (văzută la laborator) și comparați rezultatele empirice cu cele teoretice.

[2]Mai este intalnită și sub numele de de Moivre-Jordan