Temă

Specială*

Exercițiul 1

Numerele $1, 2, 3, \ldots, n$ se așază la întâmplare.

a) Care este probabilitatea ca numerele 1 și 2 să fie așezate în ordine crescătoare și consecutive ?

b) Care este probabilitatea ca numerele k, $k+1$ și $k+2$, $1 \leq k \leq n-2$, să fie așezate în ordine crescătoare și consecutive ?

Exercițiul 2

Să se determine probabilitatea ca suma a două numere luate la întâmplare din intervalul $[0, 1]$ să nu depășească 1, iar produsul lor să nu depășească $\frac{2}{9}$.

Exercițiul 3

Într-o fabrică lucrează trei mașini care realizează respectiv 30%, 25% și 45% din producție. Din producția primei mașini 1% sunt piese defecte, din producția celei de-a doua mașini 2% sunt piese defecte iar din producția ultimei mașini sunt 4% defecte. Se extrage la întâmplare o piesă. Care este probabilitatea ca piesa extrasă să fie defectă ?

Exercițiul 4

O urnă conține 10 bile albe și negre în proporție necunoscută. Se extrag 4 bile, punând de fiecare dată bila înapoi. Toate cele 4 bile extrase au fost albe. Care este probabilitatea ca urna să nu conțină decât bile albe ?

Exercițiul 5

Se consideră ecuația $ax + by + c = 0$ unde coeficienții a, b, c se determină prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca dreapta astfel obținută să treacă prin punctul de coordonate $(1, -1)$?

Exercițiul 6

a) Fie X o v.a. a cărei densitate este

$$f(x) = \begin{cases} c \ln\left(\frac{a}{x}\right), & 0 < x < a, a > 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Să se determine constanta c astfel încât f să fie densitate de probabilitate.

b) Să se determine constanta c din intervalul $(0, 1)$ astfel încât funcția

*Această temă este destinată în special studenților care nu au predat nicio temă până în acest moment și poate valora până la **2.5 puncte**. Cu toate acestea îi încurajez și pe ceilalți studenți să o facă, aceștia din urmă pot cumula cu temele trimise anterior până la un maxim de **3.5 puncte** (proporțional).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c, 1+c] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

să fie densitate de probabilitate.

Exerciţiul 7

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

a) Să se determine constanta α.

b) Să se afle funcția de repartiție.

c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

Exerciţiul 8

Fie X o v.a. cu densitate

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Există $\mathbb{E}[X]$?

Exerciţiul 9

Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0.5, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1-\theta}{2}, & 2 < x < 3 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

unde θ este o constantă fixată astfel încât $\theta \in [0, 1]$.

Determinați funcția de repartiție, media și momentul de ordinul doi pentru v.a. X cu densitatea de probabilitate f.

Exerciţiul 10

Există v.a. X pentru care $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$ și $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.6$?

Exerciţiul 11

a) Dintr-o populație oarecare s-a extras un eșantion (selecție) de volum $n = 50$ care a condus la rezultatele:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

unde n_i reprezintă frecvența apariției valorii x_i în eșantion. Să se calculeze media eșantionului (sau media de selecție) și varianța eșantionului (dispersia de selecție).

b) Se face o selecție de 12 piese a căror caracteristică este diametrul și s-au obținut următoarele valori

Piesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diam	31.5	31.6	31.6	31.7	32.2	32.4	32.5	32.5	32.6	32.7	32.5	32.6

Să se calculeze media și varianța esantionului.

Exerciţiul 12

1) Dacă se presupune că producția la ha pentru o anumită cultură este repartizată normal cu $\sigma = 2$, care trebuie să fie numărul de loturi pe care să se efectueze cercetări statistice astfel încât cu probabilitatea de 0.99 producția medie obținută din eșantion să difere de producția medie în valoare absolută cu mai puțin de o unitate ?

2) Dintr-o populație normală de medie 80 și varianță 40 se extrage un eșantion de talie 400, iar din altă populație normală, independentă de prima, de medie 76 și varianță 180 se extrage un eșantion de talie 200. Să se afle probabilitatea ca:

   a) media primului eșantion să fie mai mare decât media celui de-al doilea eșantion cu 5 unități

   b) diferența mediilor celor două selecții (eșantioane) în valoare absolută să fie mai mică decât 6.

Exerciţiul 13

Greutatea în grame a unei cutii cu biscuiți este o v.a. normală cu media $\mu = 1500$gr și abaterea medie pătratică $\sigma = 40$gr. O cutie este considerată necorespunzătoare dacă greutatea ei este sau mai mare decât 1540gr sau mai mică decât 1440gr.

a) Să se afle probabilitatea de a produce o cutie necorespunzătoare.

b) Se consideră un eșantion de talie 200 de cutii. Câte cutii necorespunzătoare vor fi în medie ?

c) Câte cutii vor fi extrase, în medie, înainte de a găsi una necorespunzătoare ?

Exerciţiul 14

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n de lege

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}$$

unde θ este un parametru pozitiv. Determinați estimatorii obținuți prin metoda momentelor și prin metoda verosimilității maxime și studiați proprietățile acestora.

Exerciţiul 15

Să se estimeze, prin metoda verosimilității maxime și prin metoda momentelor, parametrul p al unei repartiții Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ plecând de la eșantionul de talie 6: $0, 1, 1, 0, 1, 1$.

Exerciţiul 16

Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă a parametrului p al unei repartiții binomiale $\mathcal{B}(m, p)$, m fiind cunoscut. Să se afle calitățile estimatorului astfel obșinut.

Exerciţiul 17

Fie X o v.a. de lege Pareto de densitate:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x^{\alpha}}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

unde $\alpha > 2$ este un parametru necunoscut. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă plecând de la un eșantion de talie n și arătați că acesta este consistent.

Exerciţiul 18

Numărul de probe necesar pentru a obține pentru prima dată un *succes* urmează legea de probabilitate geometrică de parametru $\theta \in (0, 1)$ necunoscut:

$$\mathbb{P}(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1},\ k \geq 1.$$

Un eșantion de talie 4 din această populație este $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$ și $x_4 = 10$.

a) Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă al lui θ.

b) Dorind să estimăm $g(\theta) = \frac{3}{\theta}$, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate și să se stabilească dacă este consistent.

Exerciţiul 19

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion de talie n dintr-o populație uniformă pe $[0, \theta]$, $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ.

b) Este acest estimator nedeplasat ? În caz negativ construiți unul plecând de la acesta.

c) Calculați varianța estimatorului determinat.