

Tema 1

Exercițiul 1

Fie A , B și C trei evenimente. Exprimați în funcție de A , B , C și de operațiile cu mulțimi următoarele evenimente:

- A singur se realizează
- A și C se realizează dar nu și B
- cele trei evenimente se produc
- cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce
- cel puțin două evenimente din cele trei se produc
- cel mult un eveniment se produce
- niciunul din cele trei evenimente nu se produce
- exact două evenimente din cele trei se produc

Exercițiul 2

Într-o urnă se află bile albe și negre într-o proporție oarecare. Se efectuează la întâmplare 5 extrageri cu întoarcere și considerăm A_i evenimentul, din câmpul de evenimente atașat experimentului, ce constă în obținerea unei bile albe la extragerea i , $1 \leq i \leq 5$. Să se exprime următoarele evenimente:

- A - numai o bilă este albă;
- B - cel puțin o bilă este neagră;
- C - obținerea a cel mult două bile albe;
- D - obținerea a cel puțin trei bile albe;
- E - numai două bile sunt negre.

Exercițiul 3

Un administrator de spital codifică pacienții cu răni prin împușcare în funcție de asigurarea (D dacă pacientul are asigurare și N dacă nu are) și de starea acestora (b pentru bună, m pentru medie și s pentru serioasă). Considerăm experiența aleatoare care consistă în codificarea pacienților.

- Determinați Ω mulțimea spațiului stărilor acestui experiment
 - Fie A evenimentul *starea de sănătate a pacientului este serioasă*. Descrieți evenimentele elementare care îl compun pe A . Aceeași întrebare pentru evenimentul B *pacientul nu este asigurat* și pentru evenimentul $B^c \cup A$.
- Considerăm echiprobabilitatea pe Ω . Calculați probabilitățile: $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ și $\mathbb{P}(B^c \cup A)$
- Aceeași întrebare pentru probabilitatea \mathbb{P}' definită prin

	b	m	s
O	0,2	0,2	0,1
N	0,1	0,3	0,1

Exercițiul 4

Considerăm experimentul în care extragem o mană de 5 cărți dintr-un pachet de cărți de 52 de cărți. Să se calculeze probabilitatea ca:

- a) Să avem careu (patru cărți de același tip) ?
- b) Să avem full-house (trei cărți de un tip și două de altul) ?
- c) Să avem trei cărți de același tip ?
- d) Să avem două perechi ?
- e) Să avem o pereche ?

Exercițiul 5

Coefficienții a , b și c ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sunt determinați prin aruncarea unui zar de trei ori. Calculați probabilitatea ca:

- a) rădăcinile ecuației să fie reale;
- b) rădăcinile ecuației să fie complexe.

Exercițiul 6

Maria este anul II și urmează cursul de probabilități. Știm că la sfârșitul fiecărei săptămâni ea poate fi sau la zi cu materia sau să rămână în urmă. Dacă este la zi cu materia într-o săptămână dată atunci probabilitatea ca ea să fie la zi cu materia (sau să rămână în urmă) în săptămâna ce urmează este de 0.8 (respectiv 0.2). Dacă este rămasă în urmă cu materia într-o săptămână dată atunci șansa ca ea să ajungă cu materia la zi este 0.4 iar ca să rămână în urmă este de 0.6. Știind că atunci când a început cursul era cu materia la zi care este probabilitatea ca ea să fie cu materia la zi și după trei săptămâni? Dar la sfârșitul cursului (cursul are 14 săptămâni)?¹

Exercițiul 7

Se dorește verificarea fiabilității unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliștilor. În urma studiilor statistice pe un număr mare de automobiliști, s-a observat că în general 0.5% dintre aceștia depășesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci când doza de alcool autorizată este depășită precum și probabilitatea ca testul să fie negativ atunci când doza autorizată nu este depășită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depășit în realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un polițist afirmă că testul este mai fiabil sâmbăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Știind că proporția de automobiliști care au băut prea mult în acest context este de 30%, determinați dacă polițistul are dreptate.

¹Puteți face ultima parte în R.

Exercițiul 8

O urnă conține r bile roșii și b bile albastre. O bilă este extrasă la intamplare din urnă, i se notează culoarea și este întoarsă în urnă împreună cu alte d bile de aceeași culoare. Repetăm acest proces la nesfârșit. Calculați:

- Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.
- Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră știind că a doua bilă este albastră.
- Fie B_n evenimentul ca a n -a bilă extrasă să fie albastră. Arătați că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall n \geq 1$.
- Probabilitatea ca prima bilă este albastră știind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiți valoarea limită a acestei probabilități.

Exercițiul 9*

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate și suntem interesați în găsirea probabilității evenimentului ca suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară înaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

- Calculați pentru început probabilitatea evenimentului E_n : *în primele $n - 1$ aruncări nu a apărut nici suma 5 și nici suma 7 iar în a n -a aruncare a apărut suma 5*. Concluzionați.
- Aceeași întrebare, dar înlocuind 5 cu 2.