Cálculo de determinantes de matrizes 4x4

Alex Lima e Mariana Kobayashi

Maio de 2023

1 Introdução

O determinante de uma matriz A 4x4 pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_4} \left(\prod_{i=1}^{4} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} \cdot a_{i\sigma(i)} \right) \tag{1}$$

onde S_4 é o grupo simétrico de permutações de quatro elementos, $a_{\sigma(i),i}$ é o elemento da matriz A correspondente à linha i e coluna $\sigma(i)$ e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ.

O conjunto S_4 e todas suas permutações:

$$\begin{aligned} S_4 = \{&'1234', '1243', '1324', '1432', '1342', '1423', '2134', '2143', \\ &'2314', '2431', '2413', '2341', '3214', '3124', '3241', '3412', \\ &'3142', '3421', '4231', '4132', '4213', '4321', '4123', '4312'\} \end{aligned}$$

2 Soma das produtórias

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(1234')} \cdot a_{1234'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(1324')} \cdot a_{1324'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(1243')} \cdot a_{1243'}(i) + \tag{2}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(1342')} \cdot a_{1342'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(1423')} \cdot a_{1423'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(1432')} \cdot a_{1432'}(i) + \tag{3}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(2134')} \cdot a_{2134}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(2431')} \cdot a_{2431'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(2143)} \cdot a_{2143'}(i) + \tag{4}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(2314')} \cdot a_{2314}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(2431')} \cdot a_{2431'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(2413)} \cdot a_{2413'}(i) + \tag{5}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(3214')} \cdot a_{3214}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(3241')} \cdot a_{3241'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(3124)} \cdot a_{3124'}(i) + \tag{6}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(3142')} \cdot a_{3142}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(3421')} \cdot a_{3421'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(3412)} \cdot a_{3412'}(i) + \tag{7}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(4231')} \cdot a_{4231}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(4213')} \cdot a_{4213'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(4132)} \cdot a_{4132'}(i) + \tag{8}$$

$$\prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(4321')} \cdot a_{4321}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(4123')} \cdot a_{4123'}(i) + \prod_{i=1}^{4}(-1)^{\mathrm{sgn}(4312)} \cdot a_{4312'}(i) + \tag{9}$$

Todas as trocas de posições nas permutações

$1234 = 0$	$2134 = 1$	$3214 = 1$	$4231 = 1$
$1243 = 1$	$2143 = 2$	$3124 = 2$	$4132 = 2$
$1324 = 1$	$2314 = 2$	$3241 = 2$	$4213 = 2$
$1432 = 1$	$2431 = 2$	$3412 = 2$	$4321 = 2$
$1342 = 2$	$2413 = 3$	$3142 = 3$	$4123 = 3$
$1423 = 2$	$2341 = 3$	$3421 = 3$	$4312 = 3$

3 Matrizes utilizadas na fórmula

$$MatrizA = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 \\ 02 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 \end{pmatrix}$$

det A = 0, pois qualquer fila nula resulta em determinante 0

$$MatrizB = \begin{pmatrix} 01 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 01 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 01 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 01 \end{pmatrix}$$

det B = 1, pois a determinante de uma matriz identidade sempre é 1.

4 Código para achar determinantes

```
import itertools

def det_4x4(matrix):
    if len(matrix) != 4 or len(matrix[0]) != 4:
        raise ValueError("A matriz não é 4x4")
    indices = [0, 1, 2, 3]
    permuta = itertools.permutations(indices)
    det = 0
    for perm in permuta:
        sinal = 1
        for i in range(4):
            for j in range(i + 1, 4):
                if perm[i] > perm[j]:
                    sinal *= -1
        produto = 1
        for i in range(4):
            produto *= matrix[i][perm[i]]
        det += sinal * produto
    return det

 >>solicita ao usuário para digitar os elementos da matriz 4x4)
matrix = []
for i in range(4):
    row = input(f"Digite os elementos da {i+1}ª linha separados por espaço: ")
    matrix.append([int(x) for x in row.split()])

 >>calcula a determinante usando a fórmula de Leibniz
det = det_4x4(matrix)

 >>printa o resultado
print(f"A determinante da matriz é {det}.")
```

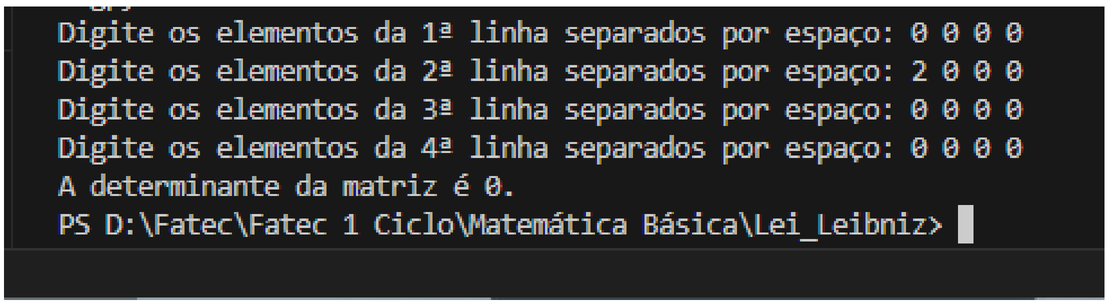

Figure 1: Resultado do Console com matriz de determinante 0.

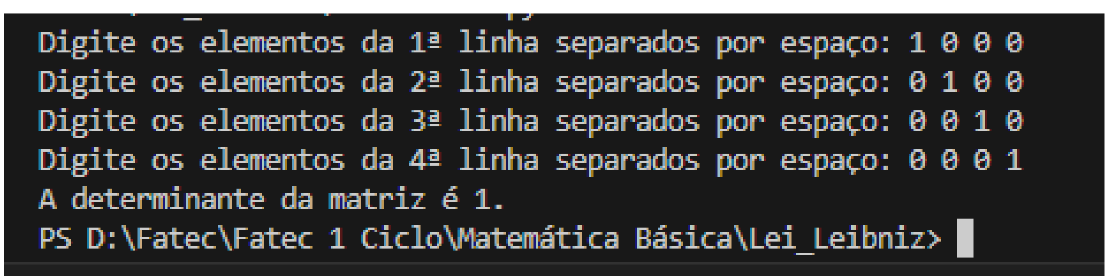

Figure 2: Resultado do Console com matriz de determinante 1.