

Analisi delle singolarità per il robot RRR planare

Lo jacobiano analitico del robot planare RRR è

```
syms q1 q2 q3
J = [-sin(q1)-sin(q1+q2)-sin(q1+q2+q3), -sin(q1+q2)-sin(q1+q2+q3), -sin(q1+q2+q3);
      cos(q1)+cos(q1+q2)+cos(q1+q2+q3), cos(q1+q2)+cos(q1+q2+q3), cos(q1+q2+q3)]
```

J =

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1 + q_2 + q_3) - \sin(q_1 + q_2) - \sin(q_1) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) - \sin(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{pmatrix}$$

Al fine di individuare le singolarità si analizzano le soluzioni dell'equazione $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$.

```
JJT = J*(J.')
```

JJT =

$$\begin{pmatrix} \sigma_2^2 + \sigma_4^2 + (\sigma_4 + \sin(q_1 + q_2))^2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_3^2 + \sigma_5^2 + (\sigma_5 + \cos(q_1 + q_2))^2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_5 \sigma_4 - (\sigma_5 + \cos(q_1 + q_2)) (\sigma_4 + \sin(q_1 + q_2))$$

$$\sigma_2 = \sigma_4 + \sin(q_1 + q_2) + \sin(q_1)$$

$$\sigma_3 = \sigma_5 + \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1)$$

$$\sigma_4 = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$\sigma_5 = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

```
simplify(det(JJT))
```

ans =

$$\cos(q_2) - \cos(2q_2 + q_3) - \frac{\cos(2q_2)}{2} - \cos(2q_3) - \cos(2q_2 + 2q_3) - \cos(q_2 + 2q_3) + \cos(q_3) + \frac{5}{2}$$

Secondo WolframAlpha tale equazione si annulla in:

$$q_2 = \pi n_1 \quad q_3 = 2\pi n_2 \quad n_1 \in \mathbb{Z} \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$q_2 = 2\pi n_1 + \pi \quad q_3 = 2\pi n_2 + \pi \quad n_1 \in \mathbb{Z} \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

$$q_2 = 2\pi n_2 \quad q_3 = 2\pi n_1 + \pi \quad n_1 \in \mathbb{Z} \quad n_2 \in \mathbb{Z}$$

Vedi: https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=det%5C%2840%29%7B%7B-sin%5C%2840%29q1%5C%2841%29-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2C-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2C-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%7D%2C%7Bcos%5C%2840%29q1%5C%2841%29%2Bcos%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29%2Bcos%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2Ccos%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29%2Bcos%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2Ccos%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%7D%7D*%7B%7B-sin%5C%2840%29q1%5C%2841%29-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2Ccos%5C%2840%29q1%5C%2841%29%2Bcos%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2Bcos%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%7D%2C%7B-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2Ccos%5C%2840%29q1%2Bq2%5C%2841%29%2Bco%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%7D%2C%7B-sin%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%2Ccos%5C%2840%29q1%2Bq2%2Bq3%5C%2841%29%7D%7D%5C%2841%29%3D0

Si ha quindi singolarità in

$$q_2 = 0 \wedge q_3 = 0$$

$$q_2 = \pi \wedge q_3 = 0$$

$$q_2 = \pi \wedge q_3 = \pi$$

$$q_2 = 0 \wedge q_3 = \pi$$

Rango di J

Al fine di individuare le singolarità è anche possibile determinare le configurazioni per cui la matrice **J** perde di rango. Si considerano quindi le sue sottomatrice 2x2.

J12

$$J_{12} = J(1:2, 1:2)$$

$$J_{12} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1 + q_2 + q_3) - \sin(q_1 + q_2) - \sin(q_1) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) - \sin(q_1 + q_2) \\ \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$\det J_{12} = \text{simplify}(\det(J_{12}))$$

$$\det J_{12} = \sin(q_2 + q_3) + \sin(q_2)$$

Quindi il blocco **J**₁₂ (prime due colonne di **J**) perde di rango nel caso in cui $q_3 = -2q_2$.

$$J_{121} = \text{simplify}(\text{subs}(J, q_3, -2*q_2))$$

$$J_{121} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1) (2 \cos(q_2) + 1) & -2 \cos(q_2) \sin(q_1) & -\sin(q_1 - q_2) \\ \cos(q_1) (2 \cos(q_2) + 1) & 2 \cos(q_1) \cos(q_2) & \cos(q_1 - q_2) \end{pmatrix}$$

```
det(J121(:,[1 2]))
```

```
ans = 0
```

```
simplify(det(J121(:,[1 3])))
```

```
ans = -sin(2 q2) - sin(q2)
```

Tale determinante si annulla solo per

$$q_2 = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$q_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$q_2 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

```
simplify(det(J121(:,[2 3])))
```

```
ans = -sin(2 q2)
```

Tale determinante si annulla per $q_2 = 0, \pi$.

Quindi la matrice **J** perde di rango per

$$q_2 = 0 \wedge q_3 = 0$$

$$q_2 = \pi \wedge q_3 = 0$$

J23

```
J23 = J(1:2,2:3)
```

```
J23 =
```

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1 + q_2 + q_3) - \sin(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{pmatrix}$$

```
detJ23 = simplify(det(J23))
```

```
detJ23 = sin(q3)
```

Il blocco 2x2 J_{23} costituito dalle ultime due colonne di **J** perde di rango nel caso in cui $q_3 = 0 \vee q_3 = \pi$.

```
J231 = subs(J,[q3],[0])
```

```
J231 =
```

$$\begin{pmatrix} -2 \sin(q_1 + q_2) - \sin(q_1) & -2 \sin(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) \\ 2 \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1) & 2 \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

```
simplify(det(J231(:,[1 3])))
```

$$\text{ans} = \sin(q_2)$$

Nel caso $q_3 = 0$ la matrice **J** perde di rango se $q_2 = 0 \vee q_2 = \pi$.

```
J231 = subs(J,[q3],[pi])
```

J231 =

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1) & 0 & \sin(q_1 + q_2) \\ \cos(q_1) & 0 & -\cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

```
simplify(det(J231(:,[1 3])))
```

$$\text{ans} = -\sin(q_2)$$

Nel caso $q_3 = \pi$ la matrice **J** perde di rango se $q_2 = 0 \vee q_2 = \pi$.

Quindi la matrice **J** perde di rango per

$$q_2 = 0 \wedge q_3 = 0$$

$$q_2 = \pi \wedge q_3 = 0$$

$$q_2 = 0 \wedge q_3 = \pi$$

$$q_2 = \pi \wedge q_3 = \pi$$

J13

```
J13 = J(1:2,[1 3])
```

J13 =

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1 + q_2 + q_3) - \sin(q_1 + q_2) - \sin(q_1) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ \cos(q_1 + q_2 + q_3) + \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{pmatrix}$$

```
detJ13 = simplify(det(J13))
```

$$\text{detJ13} = \sin(q_2 + q_3) + \sin(q_3)$$

Quindi il blocco J_{13} (prima e ultima colonna di **J**) perde di rango nel caso in cui $q_2 = -2q_3$.

```
J131 = simplify(subs(J,q2,-2*q3))
```

J131 =

$$\begin{pmatrix} -\sin(q_1 - q_3) - \sin(q_1 - 2q_3) - \sin(q_1) & -\sin(q_1 - q_3) - \sin(q_1 - 2q_3) & -\sin(q_1 - q_3) \\ \cos(q_1 - q_3) + \cos(q_1 - 2q_3) + \cos(q_1) & \cos(q_1 - q_3) + \cos(q_1 - 2q_3) & \cos(q_1 - q_3) \end{pmatrix}$$

```
simplify(det(J131(:,1:2)))
```

$$\text{ans} = -\sin(2q_3) - \sin(q_3)$$

Tale determinante si annulla solo per

$$q_3 = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$q_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$q_3 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

```
simplify(det(J131(:,2:3)))
```

$$\text{ans} = \sin(q_3)$$

Tale determinante si annulla per $q_3 = 0, \pi$.

Quindi la matrice **J** perde di rango per

$$q_2 = 0 \wedge q_3 = 0$$

$$q_2 = \pi \wedge q_3 = 0$$

Considerazioni finali

Sia le soluzioni di $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$ calcolate con WolframAlpha che l'analisi delle sottomatrici di **J** forniscono le seguenti singolarità:

1) $q_2 = 0 \wedge q_3 = 0$

2) $q_2 = \pi \wedge q_3 = 0$

3) $q_2 = \pi \wedge q_3 = \pi$

4) $q_2 = 0 \wedge q_3 = \pi$

Test grafico

Si vogliono verificare graficamente i 4 casi di singolarità precedentemente calcolati. Dato che nessuno dei 4 casi di singolarità dipende da q_1 si pone $q_1 = 0$.

```
q_1 = 0;
```

Caso 1

```
q_2 = 0;
```

```
q_3 = 0;
```

In questo caso le direzioni consentite sono date da

```
Jq = subs(J, [q1, q2, q3], [q_1, q_2, q_3])
```

```
Jq =  

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
null(Jq.')
```

```
ans =
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```

```
colspace(Jq)
```

```
ans =
```

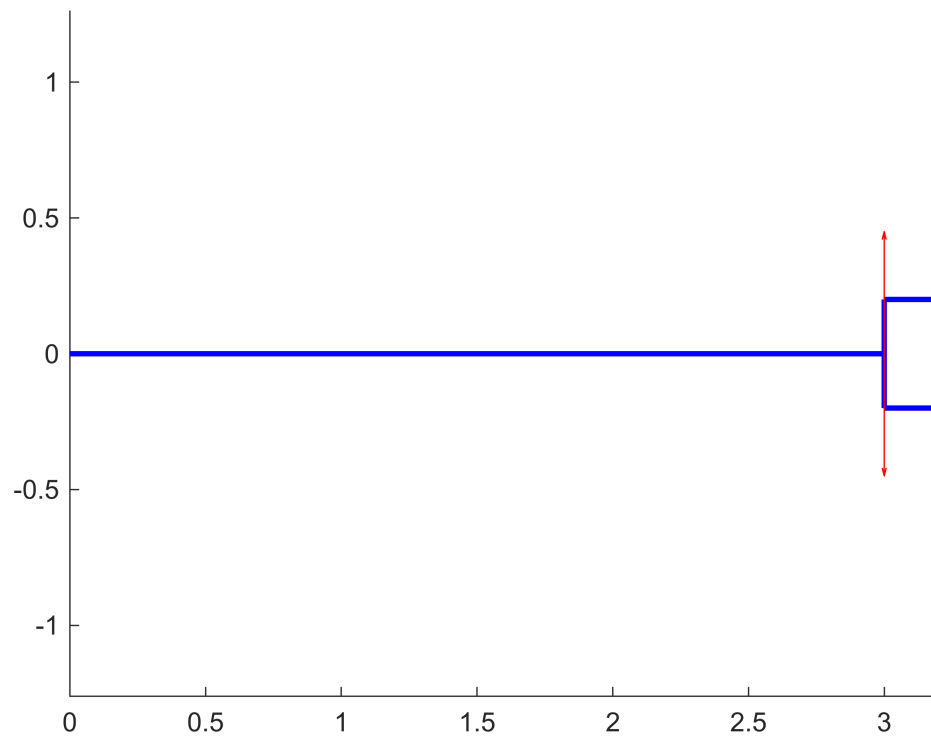
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```

Risulta quindi evidente che le uniche direzioni consentite sono quelle del tipo $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tutti i giunti sono in grado di realizzare tali direzioni in maniera indipendente.

```
figure  
drawPlanarRobot([1,1,1], [q_1, q_2, q_3])  
axis equal  
v1 = 0.5*[0 1];  
v2 = 0.5*[0 -1];  
ox = cos(q_1)+cos(q_1+q_2)+cos(q_1+q_2+q_3);  
oy = sin(q_1)+sin(q_1+q_2)+sin(q_1+q_2+q_3);  
quiver(ox, oy, v1(1), v1(2), 'r');  
quiver(ox, oy, v2(1), v2(2), 'r');
```



Caso 2

```
q_2 = pi;  
q_3 = 0;
```

In questo caso le direzioni consentite sono date da

```
Jq = subs(J, [q1, q2, q3], [q_1, q_2, q_3])
```

Jq =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
null(Jq.')
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

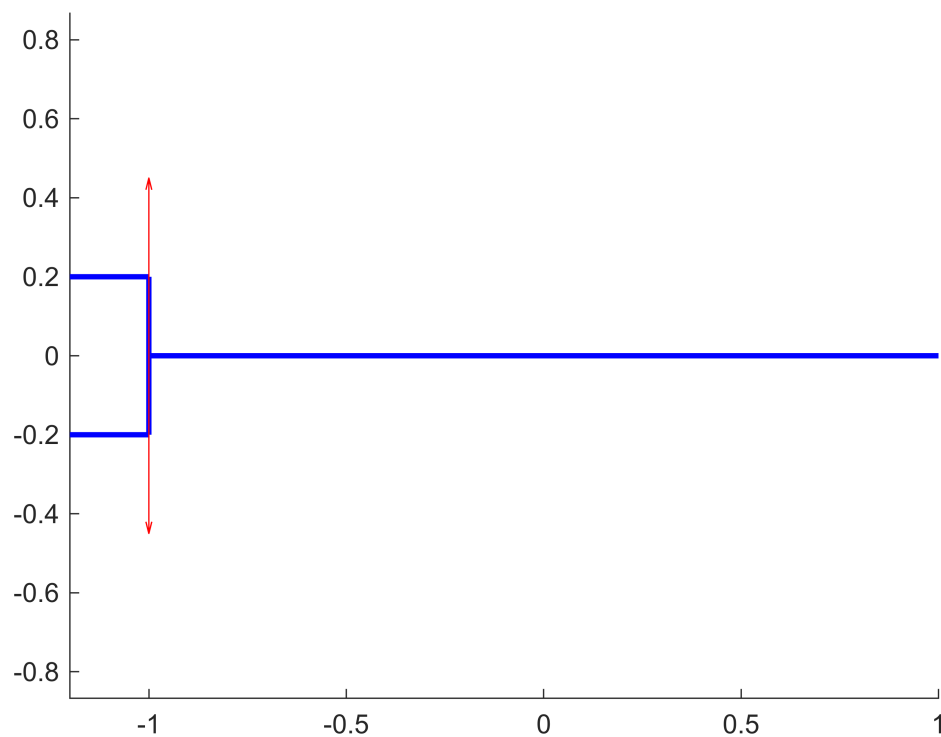
```
colspace(Jq)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi evidente che le uniche direzioni consentite sono quelle del tipo $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tutti i giunti sono in grado di realizzare tali direzioni in maniera indipendente.

```
figure
drawPlanarRobot([1,1,1], [q_1, q_2, q_3])
axis equal
v1 = 0.5*[0 1];
v2 = 0.5*[0 -1];
ox = cos(q_1)+cos(q_1+q_2)+cos(q_1+q_2+q_3);
oy = sin(q_1)+sin(q_1+q_2)+sin(q_1+q_2+q_3);
quiver(ox, oy, v1(1), v1(2), 'r');
quiver(ox, oy, v2(1), v2(2), 'r');
```



Caso 3

```
q_2 = pi;
q_3 = pi;
```

In questo caso le direzioni consentite sono date da

```
Jq = subs(J, [q1, q2, q3], [q_1, q_2, q_3])
```

Jq =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
null(Jq.')
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

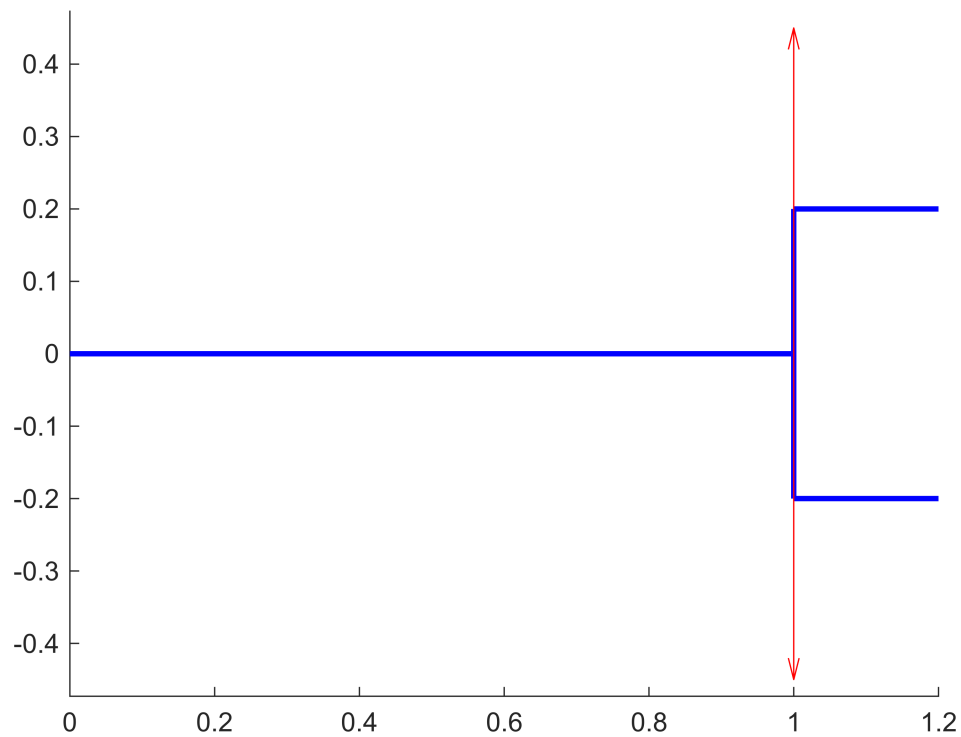
```
colspace(Jq)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi evidente che le uniche direzioni consentite sono quelle del tipo $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il secondo giunto non contribuisce.

```
figure
drawPlanarRobot([1,1,1], [q_1, q_2, q_3])
axis equal
v1 = 0.5*[0 1];
v2 = 0.5*[0 -1];
ox = cos(q_1)+cos(q_1+q_2)+cos(q_1+q_2+q_3);
oy = sin(q_1)+sin(q_1+q_2)+sin(q_1+q_2+q_3);
quiver(ox, oy, v1(1), v1(2), 'r');
quiver(ox, oy, v2(1), v2(2), 'r');
```



Caso 4

```
q_2 = 0;
q_3 = pi;
```

In questo caso le direzioni consentite sono date da

```
Jq = subs(J, [q1, q2, q3], [q_1, q_2, q_3])
```

Jq =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
null(Jq.')
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

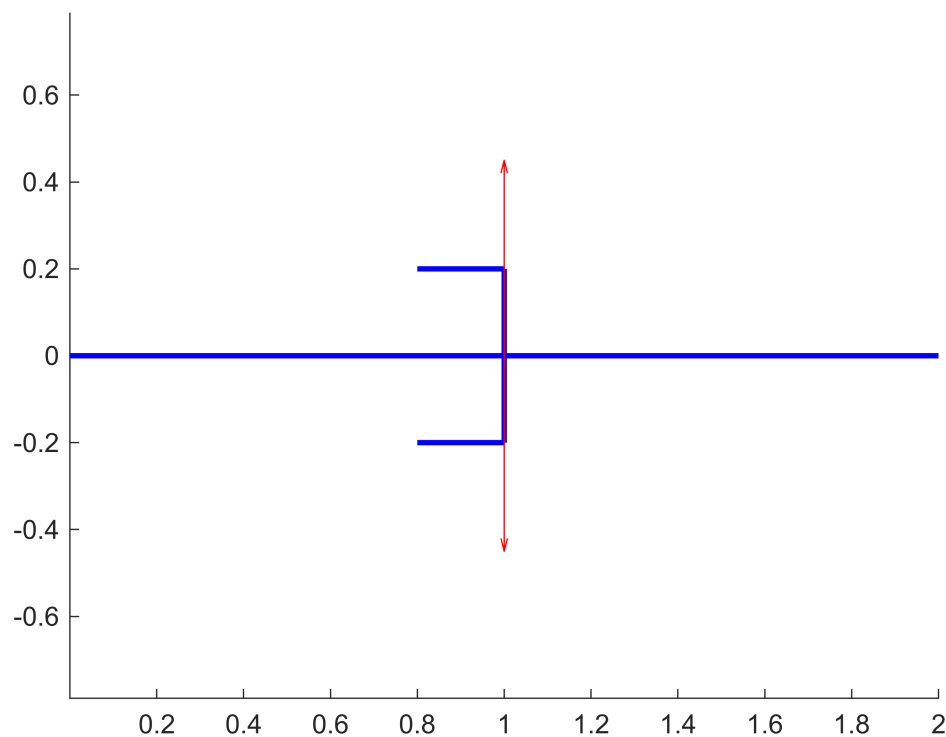
```
colspace(Jq)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi evidente che le uniche direzioni consentite sono quelle del tipo $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il secondo giunto non contribuisce.

```
figure
drawPlanarRobot([1,1,1], [q_1, q_2, q_3])
axis equal
v1 = 0.5*[0 1];
v2 = 0.5*[0 -1];
ox = cos(q_1)+cos(q_1+q_2)+cos(q_1+q_2+q_3);
oy = sin(q_1)+sin(q_1+q_2)+sin(q_1+q_2+q_3);
quiver(ox, oy, v1(1), v1(2), 'r');
quiver(ox, oy, v2(1), v2(2), 'r');
```



Caso q_1 diverso da 0

Si vuole ora analizzare un caso in cui $q_1 \neq 0$.

```
q_1 = pi/6;
q_2 = 0;
q_3 = pi;
```

In questo caso le direzioni consentite sono date da

```
Jq = subs(J, [q1, q2, q3], [q_1, q_2, q_3])
```

Jq =

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

```
null(Jq.')
```

ans =

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
colspace(Jq)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Risulta quindi evidente che le uniche direzioni consentite sono quelle del tipo $\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Il secondo giunto non contribuisce.

```
figure
drawPlanarRobot([1,1,1], [q_1, q_2, q_3])
axis equal
v1 = 0.5*[-1 sqrt(3)]/norm([-1 sqrt(3)]);
v2 = 0.5*[1 -sqrt(3)]/norm([1 -sqrt(3)]);
ox = cos(q_1)+cos(q_1+q_2)+cos(q_1+q_2+q_3);
oy = sin(q_1)+sin(q_1+q_2)+sin(q_1+q_2+q_3);
quiver(ox, oy, v1(1), v1(2), 'r');
quiver(ox, oy, v2(1), v2(2), 'r');
```

