Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

ЗВІТ

Про виконання лабораторної роботи № 2

«Розв’язування нелінійних рівнянь методом дотичних та методом послідовних наближень»
з дисципліни «Чисельні методи»

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
Бабіля О. О.

Прийняв:
асист. Гарматій Г.Ю.
«___» ______ 2022 р.
∑ = ____ ___________

Львів – 2022

Мета роботи: ознайомлення на практиці з методом дотичних та методом послідовних наближень для розв’язування нелінійних рівнянь.

3.1. Метод Ньютона (метод дотичних)

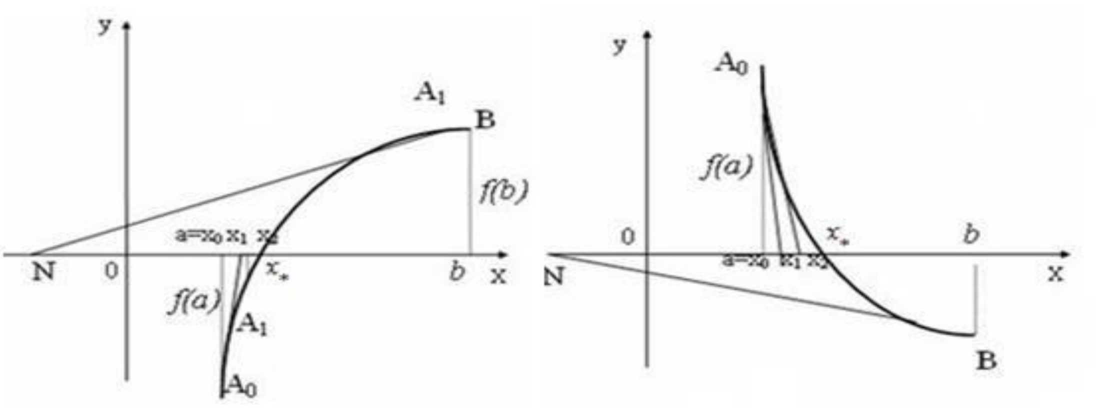
Формулювання задачі. Розглянемо рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ є неперервною монотонною нелінійною функцією, яка на кінцях відрізку $[a,b]$ приймає значення різних знаків, причому її похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ є неперервними та монотонними. Потрібно знайти значення кореня x_* з заданою похибкою ε.

Геометричний зміст (рис. 3.1) методу Ньютона полягає в тому, що дугу криво $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ замінюють дотичною до цієї кривої, а ї

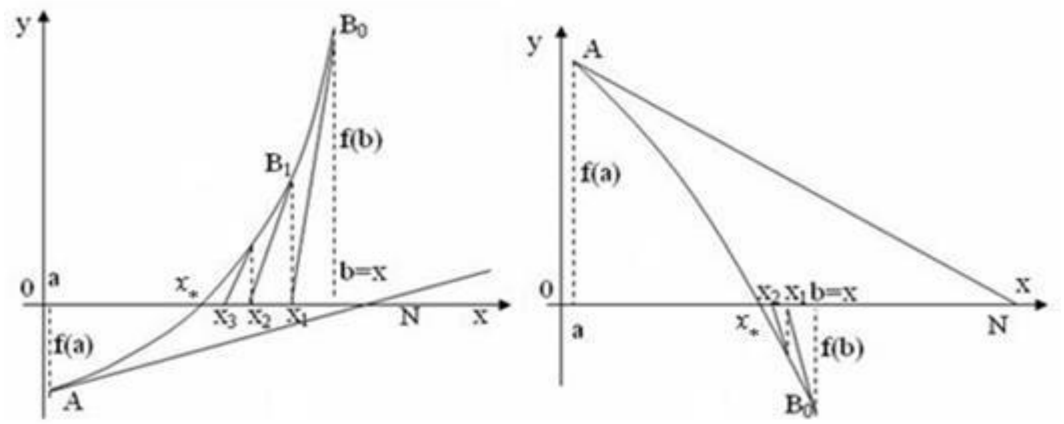
наближене значення кореня визначають як абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox, проведеної через один із кінців відрізка.

Запишемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_i;\, f(x_i))$

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i). \qquad (3.1)$$



а) б)



в) *г)*

Рис. 3.1. Геометричний зміст методу Ньютона:

а) графік функції $y = f(x)$ *є вгнутим (f'(x)>0, f''(x)>0);*

б) графік $y = f(x)$ *є опуклим (f'(x)<0, f''(x)<0);*

функції в) графік $y = f(x)$ *є опуклим (f'(x)>0, f''(x)<0);*

функції г) графік $y = f(x)$ *є вгнутим (f'(x)<0, f''(x)>0).*

функції

Покладемо у співвідношенні (3.1) $y = 0$ і визначимо x. У результаті отримаємо

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \qquad (3.2)$$

Тоді ітераційні формули запишемо у вигляді

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0,1,2,\ldots. \qquad (3.3)$$

Для вибору початкового наближення кореня рівняння $f(x) = 0$ необхідно керуватися таким правилом: за початкову точку слід вибирати той кінець відрізка $[a, b]$, в якому знак функції $y = f(x)$ співпадає зі знаком її другої похідної $f'(x)$.

У першому випадку (рис. 3.1*а*,*б*) $f(b)\,f'(b) > 0$ і за початкову точку вибираємо $x_0 = b$, а в другому(рис. 3.1*в*,*г*) - $f(a)\,f'(a) > 0$ і тому $x_0 = a$.

Процес побудови дотичної продовжуємо до тих пір, поки не виконається нерівність $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, де $\varepsilon -$ задана точність шуканого розв'язку; x_i, $x_{i+1} -$ наближені значення кореня рівняння $f(x) = 0$ на i -му та ($i+1$)-му кроках.

3.2. Метод простої ітерації (метод послідовних наближень)

Одним із найпоширеніших методів чисельного розв'язування нелінійних рівнянь є метод простої ітерації. Іноді його називають методом послідовних наближень.

Формулювання задачі. Розглянемо нелінійне рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ є неперервною функцією. Потрібно знайти хоча б один дійсний корінь цього рівняння. Рівняння $f(x) = 0$ запишемо у канонічній формі

$$x = \varphi(x). \tag{3.4}$$

Довільним способом визначимо наближене значення x_0 кореня рівняння і підставимо його в праву частину співвідношення (3.4). У результаті отримаємо

$$x_1 = \varphi(x_0). \tag{3.5}$$

Підставивши тепер в праву частину рівняння (3.5) замість x_0 значення x_1, отримаємо $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторюючи цей процес, отримаємо ітераційні формули

$$x_i = \varphi(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3.... \tag{3.6}$$

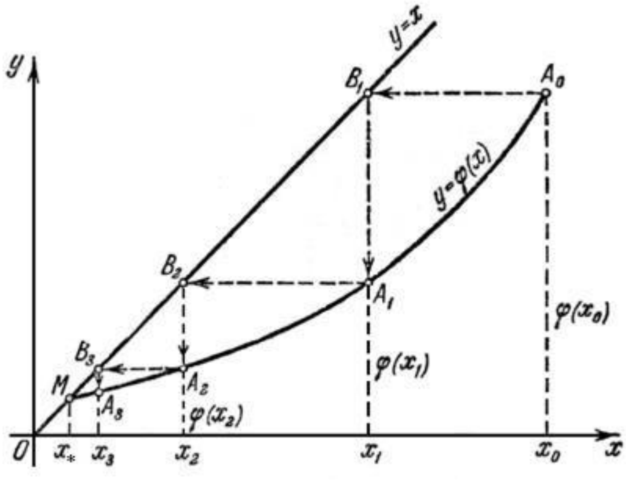


Рис. 3.2. Графічна інтерпретація методу ітерацій

Доведено, що ітераційний процес, визначений формулами (3.6), збігається до єдиного кореня рівняння $f(x) = 0$, якщо на відрізку $[a;b]$, що містить цей корінь, виконується умова:

$$|\varphi'(x)| \le q = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1. \qquad (3.7)$$

Збіжність процесу ітерації буде тим швидшою, чим меншим є число q, яке задовольняє нерівність (3.7). Якщо умова (3.7) не виконується, то необхідно перетворити рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $x = \varphi(x)$ так, щоб досягти її виконання. Наприклад, можна визначати функцію $\varphi(x)$ зі співвідношення

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \qquad (3.8)$$

де значення k вибирають так, щоб виконувалась умова $|k| \ge \frac{Q}{2}$. Тут $Q = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ та знак k співпадає зі знаком $f'(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Ітераційний процес продовжують до тих пір, поки не виконуватиметься умова

Індивідуальне завдання

Скласти програму розв'язування нелінійного рівняння методом дотичних та методом простої ітерацій

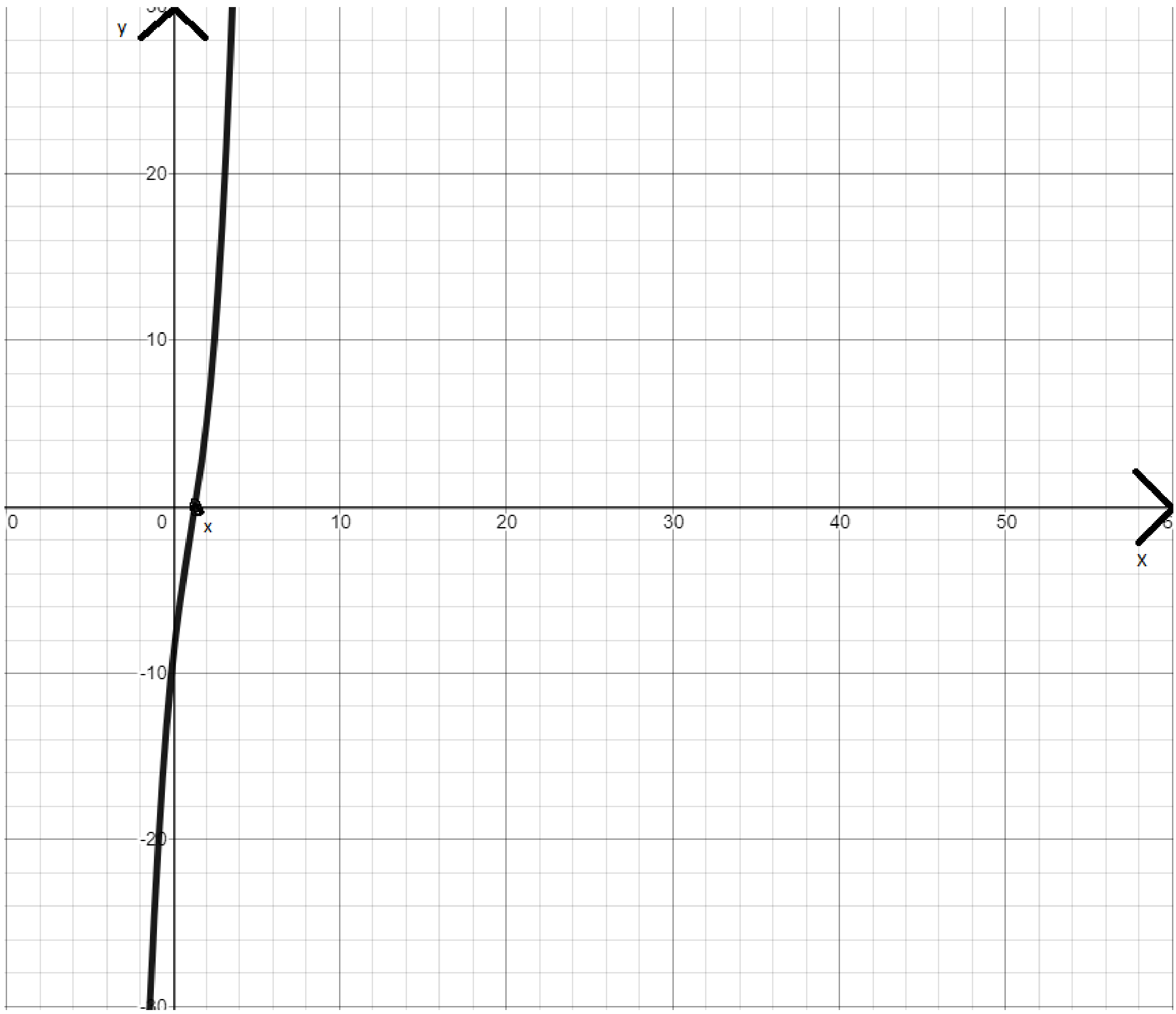
$$1)\ x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$$

Хід роботи

1. Графік заданого рівняння:

Відповідно, корінь рівняння знаходяться в приблизних проміжку (0;2)

Рис.1Графік рівняння



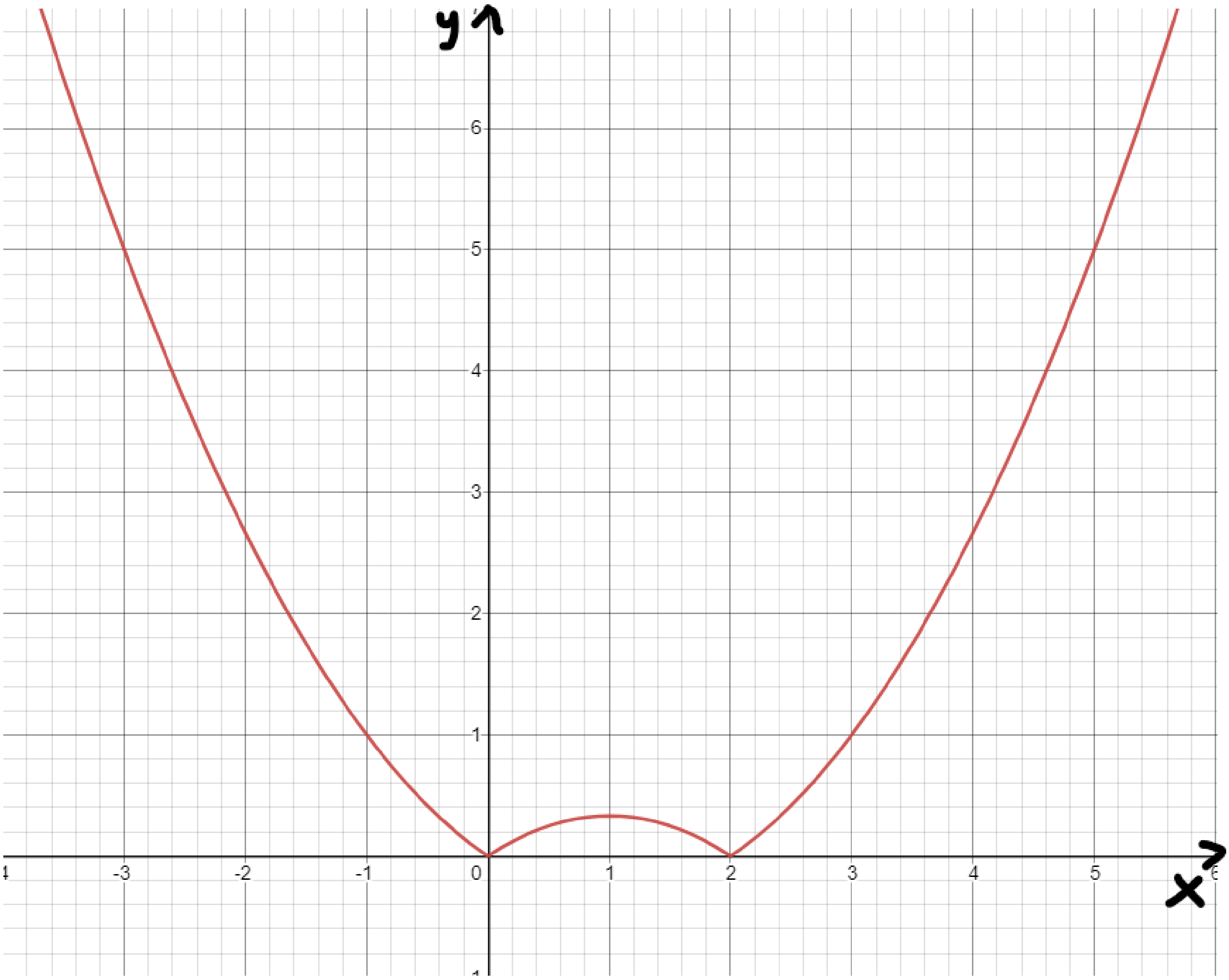
Вибір функції $\varphi(x)$

Виразимо x з рівняння $x^3+3x^2+9x=0$, отримаємо:

1) $\varphi(x)_1=\frac{-x^3+3x^2+8}{9}$, знайдемо похідну $\varphi'(x)_1=\frac{-1}{3}x^2\frac{-2x}{3}$.

Графічно перевіримо чи $|\varphi'(x)_1|<1$.Побудуємо графік:

Рис.2 (графік $y=|\varphi'(x)_1|$)



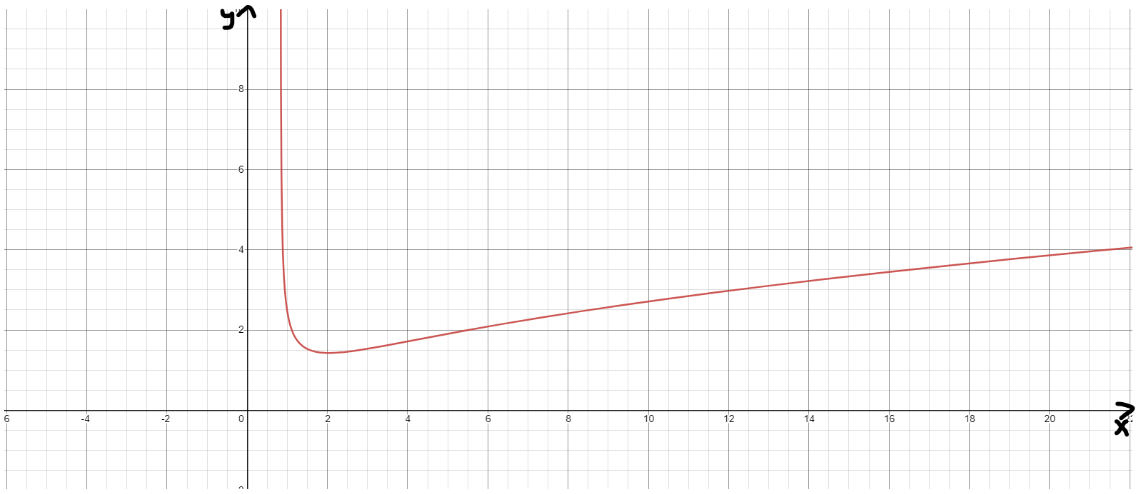
З цього графіку випливає , що $|\varphi'(x)_1|$ не менше одиниці , тому $\varphi(x)_1$, нам не підходить.

2)Знайдемо $\varphi(x)_2$

$\varphi(x)_2=\sqrt{\frac{-8+9x+x^2}{3}}$, знайдемо похідну $\varphi'(x)_2=\frac{\sqrt{3}(x^2+3)}{2(\sqrt{x^3+9x-8})}$.

Графічно перевіримо чи $|\varphi'(x)_2|<1$.Побудуємо графік:

Рис.3(графік $y=|\varphi'(x)_2|$)



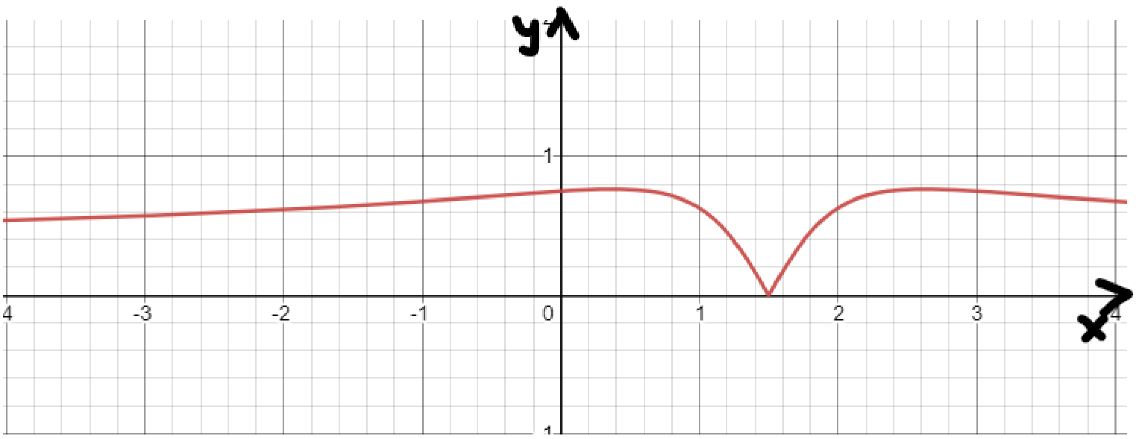
З цього графіку випливає, що $|\varphi'(x)_2|$ не менше одиниці, тому $\varphi(x)_2$ нам не підходить.

3)Знайдемо $\varphi(x)_3$

$\varphi(x)_3=(8-9x+3x^2)^{1/3}$, знайдемо похідну $\varphi'(x)_3=\dfrac{2x-3}{(3x^2-9x+8)^{2/3}}$

Графічно перевіримо чи $|\varphi'(x)_3|<1$.Побудуємо графік:

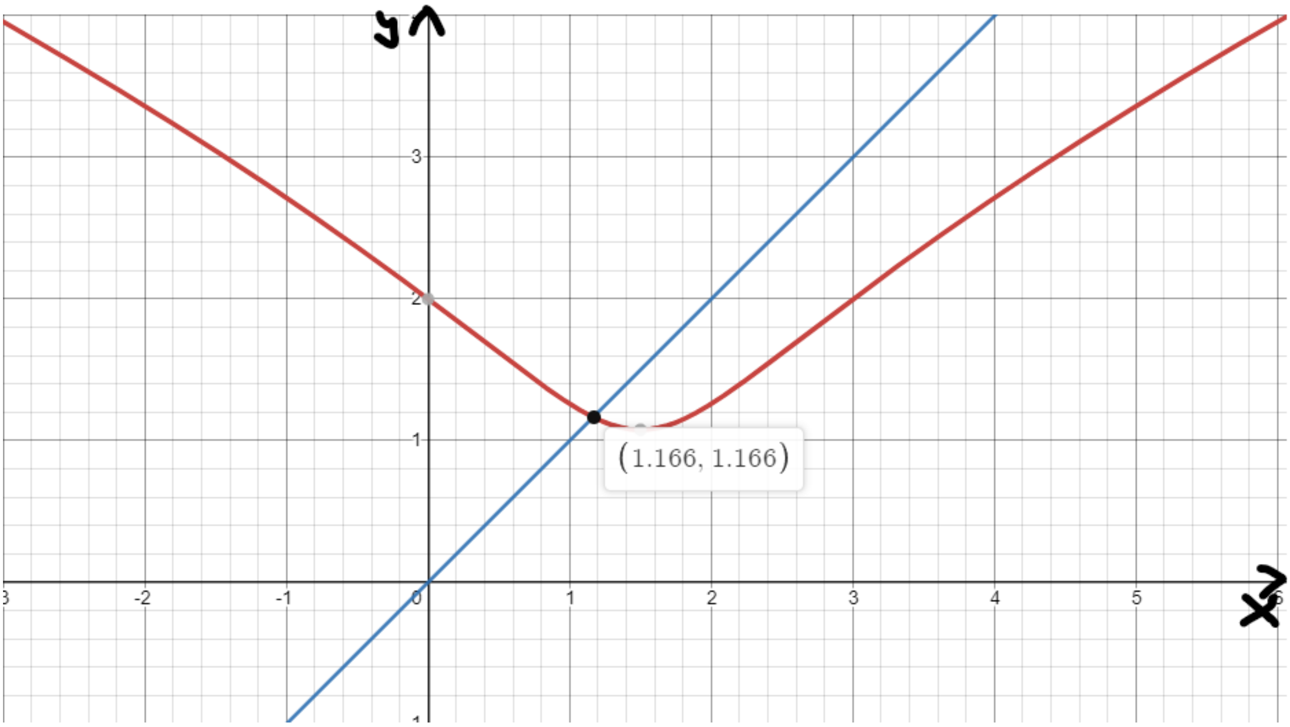
Рис.4 (графік $y=|\varphi'(x)_3|$)



З цього графіку випливає, що $|\varphi'(x)_3| < 1$, тому $\varphi(x)_3$ нам підходить і в подальший обчисленнях ми будемо використовувати формулу, при якій $\varphi(x)=(8-9x+3x^2)^{1/3}$

Побудуємо графіки y=x та y=φ(x) на одній координатній прямій

Рис.5 (графіки y=x та y=φ(x) на одній координатній прямій)



Відповідно, корінь рівняння знаходяться в приблизних проміжку (0;2)

2.Код програми:

Source1.cpp

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include "func.h"

using namespace std;

int main()
{
	double a = 1, b = 2, eps = 0.00001;
	cout << "This program is created to slove nonlinear equations using Newton and 
Iterations methods " << endl << endl
		<< "For exaple we will be using such equations as x^3-3x^2+9x-8" << endl
		<< "Accuracy is 0.00001 and limits [1;2]" << endl << endl;
	cout << "Root by Newton = " << newton(a, b, eps) << endl << endl;
	cout << "Root by Iterations = " << iterations(a, b, eps) << endl << endl
		<< "Enter your limits and accuracy( f(a)*(f(b) must be negative and | a- b |
must be > Accuracy ) : " << endl << endl
		<< "a: "; cin >> a;
	cout << "b: "; cin >> b;
	cout << "Accuracy: "; cin >> eps;
	cout << "Root by Newton = " << newton(a, b, eps) << endl << endl;
	cout << "Root by Iterations = " << iterations(a, b, eps) << endl << endl;
	return 0;
```

```
}
```

func.cpp

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
#include "func.h"

using namespace std;

double f(double x)
{

	return pow(x, 3.0) - 3 * pow(x, 2.0) + 9 * x - 8;
}

double f_(double x)
{
	return 3 * pow(x, 2.0) - 6 * x + 9;
}

double f__(double x)
{
	return 6 * x - 6;
}

double ff(double x)
{
	return pow(3 * pow(x, 2.0) - 9 * x + 8, 1.0/3);
}




double newton(double a, double b, double eps)
{
	unsigned short count = 0;
	double x = 0;
	if ((f(a) * f(b)) > 0)
	{
		cout << "Error";
		exit(-1);
	}

	if ((f(a) * f__(a)) < 0) swap(a, b);

	do
	{
		x = a - f(a)/f_(a);
		++count;
		cout << "Iteration number " << count << " Root= " << x << endl;
		if (abs(x - a) < eps) break;
		a = x;
	} while (true);
	cout << endl;
	return a;
}

double iterations(double a, double b, double eps)
{
	if ((f(a) * f(b)) > 0)
	{
		cout << "Error";
```

```
		exit(-1);
	}
	double x0 = a, x1 = b;
	unsigned short count = 0;
	do
	{
		x1 = ff(x0);
		++count;
		cout << "Iteration number " << count << "Root= " << x1<<endl;
		if (fabs(x1 - x0) < eps) break;
		x0 = x1;
	}while (true);
	cout << endl;
	return x1;
}
```

func.h

```
double newton(double, double, double);
double iterations(double, double, double);
```

3.Вигляд виконаної програми:

```
This program is created to slove nonlinear equations using Newton  and Iterations methods

For exaple we will be using such equations as x^3-3x^2+9x-8
Accuracy is 0.00001 and limits [1;2]

Iteration number 1 Root= 1.16667
Iteration number 2 Root= 1.16591
Iteration number 3 Root= 1.16591

Root by Newton = 1.16591

Iteration number 1Root= 1.25992
Iteration number 2Root= 1.12476
Iteration number 3Root= 1.18699
Iteration number 4Root= 1.15578
Iteration number 5Root= 1.17094
Iteration number 6Root= 1.16345
Iteration number 7Root= 1.16712
Iteration number 8Root= 1.16531
Iteration number 9Root= 1.1662
Iteration number 10Root= 1.16576
Iteration number 11Root= 1.16598
Iteration number 12Root= 1.16587
Iteration number 13Root= 1.16592
Iteration number 14Root= 1.1659
Iteration number 15Root= 1.16591
Iteration number 16Root= 1.1659

Root by Iterations = 1.1659

Enter your limits and accuracy( f(a)*(f(b) must be negative and | a- b | must be > Accuracy ) :

a: 1
b: 3
Accuracy: 0.001
Iteration number 1 Root= 1.16667
Iteration number 2 Root= 1.16591

Root by Newton = 1.16667

Iteration number 1Root= 1.25992
Iteration number 2Root= 1.12476
Iteration number 3Root= 1.18699
Iteration number 4Root= 1.15578
Iteration number 5Root= 1.17094
Iteration number 6Root= 1.16345
Iteration number 7Root= 1.16712
Iteration number 8Root= 1.16531
Iteration number 9Root= 1.1662

Root by Iterations = 1.1662


C:\Users\user\source\repos\ЧМ01\Debug\ЧМ01.exe (процесс 3996) завершил работу с кодом 0.
```

Висновки

На даній лабораторній роботі я ознайомився на практиці з методами відокремлення дійсних ізольованих коренів нелінійних рівнянь, вивчив та реалізував в програмі методи Ньютона та ітерацій для уточнення коренів.

Розглянув даний метод на рівнянні $x^3+3x^2+9x=0$

Знайшов корінь рівняння x =1.16591 , на проміжку [1,2] з точністю e=0.00001

Кількість ітерацій для методу Ньютона = 3 , методом ітерацій = 16.