Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

ЗВІТ

Про виконання лабораторної роботи № 5

«НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ»

з дисципліни «Чисельні методи»

Лектор:

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

Виконав:

студ. групи ПЗ-15

Бабіля О.О.

Прийняв:

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю.

«___» ______ 2022 р.

∑ = ____ ___________

Львів – 2022

Мета: ознайомлення на практиці з методами Якобі та Зейделя розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Теоретичні відомості:

Метод Якобі

Опис методу

Для квадратної системи з *n* лінійних рівнянь:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

де:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Матрицю *A* можна розкласти на два доданки: діагональну матрицю *D*, та все інше *R*:

$$A = D + R, \qquad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Систему лінійних рівнянь можна переписати в вигляді:

$$D\mathbf{x} = \mathbf{b} - R\mathbf{x}$$

Ітераційний метод Якобі виражається формулою:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - R\mathbf{x}^{(k)}).$$

чи

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Збіжність

Метод є збіжним, коли матриця *A* має домінантну головну діагональ:

$$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|.$$

другою умовою збіжності є, те щоб спектральний радіус матриці не перевищував одиницю:

$$\rho(D^{-1}R) < 1.$$

Метод Зейделя

Візьмемо систему: $A\vec{x}=\vec{b}$, де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Або $\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$

І покажемо, як її можна розв'язати за допомогою методу Гауса - Зайделя.

Метод

Щоб пояснити зміст методу, перепишемо задачу у вигляді:

$$\left\{\begin{array}{lcr} a_{11}x_1 & = & -a_{12}x_2-a_{13}x_3-\ldots-a_{1n}x_n+b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 & = & -a_{23}x_3-\ldots-a_{2n}x_n+b_2 \\ \ldots & & \\ a_{(n-1)1}x_1+a_{(n-1)2}x_2+\ldots+a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & = & -a_{(n-1)n}x_n+b_{n-1} \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{n(n-1)}x_{n-1}+a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Тут в j-му рівнянні ми перенесли в праву частину всі члени, що містять x_i , для $i>j$. Отримана система може бути представлена:

$$(\mathrm{L}+\mathrm{D})\vec{x}=-\mathrm{U}\,\vec{x}+\vec{b},$$

де в прийнятих позначеннях D означає матрицю, у якої на головній діагоналі стоять відповідні елементи матриці A, а всі інші - нулі; тоді як матриці U та L містять верхню і нижню трикутні частини A, на головній діагоналі яких нулі.

Метод Гауса-Зайделя можна розглядати як модифікацію методу Якобі. Основна ідея модифікації

полягає в тому, що нові значення використовуються тут одразу ж у міру отримання, в той час як у методі Якобі вони не використовуються до наступної ітерації:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} {x_1}^{(k+1)} & = & c_{12}x_2^{(k)} & + & c_{13}x_3^{(k)} & + & \ldots & + & c_{1n}{x_n}^{(k)} & + & d_1 \\ {x_2}^{(k+1)} & = & c_{21}x_1^{(k+1)} & + & c_{23}x_3^{(k)} & + & \ldots & + & c_{2n}{x_n}^{(k)} & + & d_2 \\ \ldots & & & & & & & & & & \\ {x_n}^{(k+1)} & = & c_{n1}x_1^{(k+1)} & + & c_{n2}x_2^{(k+1)} & + & \ldots & + & c_{n(n-1)}{x_{n-1}}^{(k+1)} & + & d_n \end{array}\right.,$$

де $c_{ij}=-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}},\quad d_i=\dfrac{b_i}{a_{ii}},\quad i=1,\ldots,n$

Таким чином і-тий компонент $(k+1)$-го наближення обчислюється за формулою:

$$x_i^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{i-1}c_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n}c_{ij}x_j^{(k)}+d_i,\quad i=1,\ldots,n$$

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя та методом Якобі з точністю $\varepsilon=0{,}001$. Порівняти кількість ітерацій для обох методів.

$$1)\begin{cases} 0{,}23x_1-0{,}04x_2+0{,}21x_3-0{,}18x_4=-1{,}24 \\ 0{,}45x_1-0{,}23x_2+0{,}06x_3=0{,}88 \\ 0{,}26x_1+0{,}34x_3-0{,}11x_4=-0{,}62 \\ 0{,}05x_1-0{,}26x_2+0{,}34x_3-1{,}12x_4=1{,}17 \end{cases}$$

Хід роботи:

$$A = \begin{pmatrix} 0,23 & -0,04 & 0,21 & -0,18 \\ 0,45 & -0,23 & 0,06 & 0 \\ 0,26 & 0 & 0,34 & -0,11 \\ 0,05 & -0,26 & 0,34 & -1,12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1,24 \\ 0,88 \\ -0,62 \\ 1,17 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0,23 & -0,04 & 0,21 & -0,18 \\ 0,45 & -0,23 & 0,06 & 0 \\ 0,26 & \cancel{0,34}\ 0 & 0,34 & 0,11 \\ 0,05 & -0,26 & 0,34 & -1,12 \end{vmatrix} = 0,23 \cdot \left(-\frac{349}{2300}\right) \cdot \left(-\frac{329}{8725}\right) \cdot \frac{524873}{131600} > 0,$$

−0,73

отже існує корінь

Виразимо x_i:

$$x_1^{i+1} = \frac{-1,24 + 0,04x_2^i - 0,21x_3^i + 0,18x_4^i}{0,23};$$

$$x_2^{i+1} = \frac{-0,88 + 0,45x_1^i + 0,06x_3^i + 0 \cdot x_4^i}{0,23};$$

$$x_3^{i+1} = \frac{-0,62 - 0,26x_1^i + 0 \cdot x_2^i + 0,11x_4^i}{0,34};$$

$$x_4^{i+1} = \frac{-1,17 + 0,05x_1^i - 0,26x_2^i + 0,34x_3^i}{1,12};$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{0,04}{0,23} & -\frac{0,21}{0,23} & \frac{0,18}{0,23} \\ \frac{0,45}{0,23} & 0 & \frac{0,06}{0,23} & 0 \\ -\frac{0,26}{0,34} & 0 & 0 & \frac{0,11}{0,34} \\ \frac{0,05}{1,12} & -\frac{0,26}{1,12} & \frac{0,34}{1,12} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} -\frac{1,24}{0,23} \\ -\frac{0,88}{0,23} \\ -\frac{0,62}{0,34} \\ -\frac{1,12}{1,12} \end{pmatrix}$$

Перевіримо СЛАР на збіжність:

$$\frac{0,05}{1,12} + \frac{0,26}{1,12} + \frac{0,34}{1,12} + 0 = \frac{0,65}{1,12}$$

$$\frac{0,65}{1,12} < \frac{1,12}{1,12}$$, отже СЛАР збіжна

Код програми(Метод Якобі):

Source.c

```c
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>

void main()
{
	float a[20][20], x[20], e, big, temp, relerror, sum;
	int n, i, j, maxit, itr;
	char ch;
	printf("\n\nENTER THE SIZE OF THE EQUATION :: ");
	scanf_s("%d", &n);
	for (i = 1; i <= n; i++)

	{
		printf("\n\nEnter the coefficints of  equation %d and RHS \n", i);
		for (j = 1; j <= n + 1; j++)
		    scanf_s("%f", &a[i][j]);
	}

	printf("\n\nEnter relative error and number of iteration ::  \n");
	scanf_s("%f%d", &e, &maxit);
	for (i = 1; i <= n; i++)
	    x[i] = 0;

	for (itr = 1; itr <= maxit; itr++)
	{
		big = 0;
		for (i = 1; i <= n; i++)
		{
			sum = 0;
			for (j = 1; j <= n; j++)
			     if (i != j) sum = sum + a[i][j] * x[j];

			temp = (a[i][n + 1] - sum) / a[i][i];
			relerror = fabs((x[i] - temp) / temp);
			if (relerror > big)
			    big = relerror;
			x[i] = temp;
			printf("%.4f \t|%.4f \t|%.4f \t|%.4f \t\n", x[1], x[2], x[3], x[4]);
		}

		if (big <= e)
		{
			printf("Converges to a solution in %d iterations\n", itr);
			for (i = 1; i <= n; i++)
			    printf("\nx[%d] = %.4f\t",i, x[i]);
			exit(1);
		}
	}
	printf("does not converge in %d iteration \n", maxit);
}
```

Код програми(Метод Зейделя):

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 4


int check(double X[N][1], double x[N][1], double e)
{
    int check = 1;
    double sum = 0;
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        sum += pow(X[i][0] - x[i][0], 2);
    }
    if (sqrt(sum) < e)
    {
        check = 0;
    }
    return check;
}
void beta(double B[N][1], double A[N][N + 1])
{
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        B[i][0] = A[i][N] / A[i][i];
    }
}
void alpha(double alpha[N][N], double A[N][N + 1])
{
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
            if (i != j)
                alpha[i][j] = -A[i][j] / A[i][i];
            else
                alpha[i][j] = 0;
        }
    }
}

void MethodZeidel(double A[N][N + 1], double e)
{
    double B[N][1];
    double Ap[N][N];
    double X1[N][1];
    double X0[N][1];
    int count = 0;
    beta(B, A);
    alpha(Ap, A);
    for (int i = 0; i < N; i++)
        X1[i][0] = B[i][0];
    for (int i = 0; i < N; i++)
        X0[i][0] = 0;
    printf("Method Zeidel:\n|");
    for (int i = 0; i < N; i++)
```

```
        printf("    X%i    |", i + 1);
    printf("\n");
    while (1)
    {
        for (int i = 0; i < N; i++)
        {
            for (int i = 0; i < N; i++) X0[i][0] = X1[i][0];
            X1[i][0] = B[i][0];
            for (int j = 0; j <= i - 1; j++) X1[i][0] = X1[i][0] + Ap[i][j] * X0[j][0];
            for (int j = i + 1; j < N; j++)  X1[i][0] = X1[i][0] + Ap[i][j] * X0[j][0];
        }
        for (int i = 0; i < N; i++)
        {
            printf("|%+lf", X1[i][0]);
            count++;
        }
        printf("|\n");
        if (!check(X1, X0, e))
        {
            printf("Answer:\n");
            printf("|");
            for (int i = 0; i < N; i++)
                printf("    X%i    |", i + 1);
            printf("\n");
            for (int i = 0; i < N; i++)
                printf("|%+lf", X1[i][0]);
            printf("|\n\n");
            printf("Total iteration %d", &count);
            break;
        }
    }
}
int main()
{
    double A[N][N + 1] = { {0.23, -0.04, 0.21, -0.18, -1.24}, {0.45, -0.23, 0.06, 0,0.88},
{0.26, 0, 0.34, -0.11, -0.62}, {0.05,-0.26,0.34,-1.12,1.17} };
    double e = 0.0001;
    MethodZeidel(A, e);
    return 0;
}
```

Вигляд виконаної програми(Метод Якобі):

```
ENTER THE SIZE OF THE EQUATION :: 4


Enter the coefficints of  equation 1 and RHS
0.23 -0.04 0.21 -0.18 -1.24


Enter the coefficints of  equation 2 and RHS
0.45 -0.23 0.06 0 0.88


Enter the coefficints of  equation 3 and RHS
0.26  0  0.34 -0.11 -0.62


Enter the coefficints of  equation 4 and RHS
0.05 -0.26 0.34 -1.12 1.17


Enter relative error and number of iteration ::
0.001
1000
```

```
-12.1896          |-25.4447         |9.6275           |7.2406
-12.9402          |-25.4447         |9.6275           |7.2406
-12.9402          |-26.6324         |9.6275           |7.2406
-12.9402          |-26.6324         |10.4145          |7.2406
-12.9402          |-26.6324         |10.4145          |7.7217
-13.4888          |-26.6324         |10.4145          |7.7217
-13.4888          |-27.5004         |10.4145          |7.7217
-13.4888          |-27.5004         |10.9897          |7.7217
-13.4888          |-27.5004         |10.9897          |8.0734
-13.8898          |-27.5004         |10.9897          |8.0734
-13.8898          |-28.1348         |10.9897          |8.0734
-13.8898          |-28.1348         |11.4100          |8.0734
-13.8898          |-28.1348         |11.4100          |8.3303
-14.1828          |-28.1348         |11.4100          |8.3303
-14.1828          |-28.5984         |11.4100          |8.3303
-14.1828          |-28.5984         |11.7172          |8.3303
-14.1828          |-28.5984         |11.7172          |8.5181
-14.3969          |-28.5984         |11.7172          |8.5181
-14.3969          |-28.9373         |11.7172          |8.5181
-14.3969          |-28.9373         |11.9417          |8.5181
-14.3969          |-28.9373         |11.9417          |8.6554
-14.5534          |-28.9373         |11.9417          |8.6554
-14.5534          |-29.1849         |11.9417          |8.6554
-14.5534          |-29.1849         |12.1058          |8.6554
-14.5534          |-29.1849         |12.1058          |8.7557
-14.6678          |-29.1849         |12.1058          |8.7557
-14.6678          |-29.3659         |12.1058          |8.7557
-14.6678          |-29.3659         |12.2258          |8.7557
-14.6678          |-29.3659         |12.2258          |8.8290
-14.7514          |-29.3659         |12.2258          |8.8290
-14.7514          |-29.4982         |12.2258          |8.8290
-14.7514          |-29.4982         |12.3134          |8.8290
-14.7514          |-29.4982         |12.3134          |8.8826
-14.8125          |-29.4982         |12.3134          |8.8826
-14.8125          |-29.5948         |12.3134          |8.8826
-14.8125          |-29.5948         |12.3774          |8.8826
-14.8125          |-29.5948         |12.3774          |8.9218
-14.8571          |-29.5948         |12.3774          |8.9218
-14.8571          |-29.6655         |12.3774          |8.9218
-14.8571          |-29.6655         |12.4243          |8.9218
-14.8571          |-29.6655         |12.4243          |8.9504
-14.8898          |-29.6655         |12.4243          |8.9504
-14.8898          |-29.7171         |12.4243          |8.9504
-14.8898          |-29.7171         |12.4585          |8.9504
-14.8898          |-29.7171         |12.4585          |8.9713
-14.9136          |-29.7171         |12.4585          |8.9713
-14.9136          |-29.7549         |12.4585          |8.9713
-14.9136          |-29.7549         |12.4835          |8.9713
-14.9136          |-29.7549         |12.4835          |8.9866
-14.9310          |-29.7549         |12.4835          |8.9866
-14.9310          |-29.7824         |12.4835          |8.9866
-14.9310          |-29.7824         |12.5018          |8.9866
-14.9310          |-29.7824         |12.5018          |8.9977
-14.9438          |-29.7824         |12.5018          |8.9977
-14.9438          |-29.8026         |12.5018          |8.9977
-14.9438          |-29.8026         |12.5151          |8.9977
-14.9438          |-29.8026         |12.5151          |9.0059
-14.9531          |-29.8026         |12.5151          |9.0059
-14.9531          |-29.8173         |12.5151          |9.0059
-14.9531          |-29.8173         |12.5249          |9.0059
-14.9531          |-29.8173         |12.5249          |9.0119
Converges to a solution in 20 iterations

x[1] = -14.9531
x[2] = -29.8173
x[3] = 12.5249
x[4] = 9.0119
```

Вигляд виконаної програми(Метод Зейделя):

```
Method Zeidel:
|    X1    |    X2    |    X3    |    X4    |
|-5.209296|-14.493891|+1.822077|+2.640583|
|-7.509073|-18.042428|+4.773009|+4.257501|
|-9.555126|-21.275766|+6.860758|+5.550536|
|-11.011710|-23.580974|+8.392952|+6.485778|
|-12.079647|-25.270713|+9.512188|+7.170131|
|-12.859845|-26.505213|+10.330218|+7.670212|
|-13.430070|-27.407472|+10.928063|+8.035697|
|-13.846812|-28.066876|+11.364993|+8.302808|
|-14.151384|-28.548796|+11.684319|+8.498023|
|-14.373977|-28.901002|+11.917696|+8.640695|
|-14.536657|-29.158408|+12.088257|+8.744965|
|-14.655550|-29.346531|+12.212909|+8.821170|
|-14.742442|-29.484019|+12.304011|+8.876863|
|-14.805946|-29.584501|+12.370591|+8.917566|
|-14.852358|-29.657937|+12.419251|+8.947313|
|-14.886277|-29.711607|+12.454813|+8.969054|
|-14.911067|-29.750832|+12.480804|+8.984943|
|-14.929184|-29.779498|+12.499799|+8.996555|
|-14.942425|-29.800449|+12.513681|+9.005042|
|-14.952102|-29.815761|+12.523827|+9.011244|
|-14.959174|-29.826951|+12.531242|+9.015777|
|-14.964343|-29.835129|+12.536661|+9.019090|
|-14.968120|-29.841107|+12.540621|+9.021512|
|-14.970881|-29.845475|+12.543516|+9.023281|
|-14.972899|-29.848667|+12.545631|+9.024574|
|-14.974373|-29.851001|+12.547177|+9.025519|
|-14.975451|-29.852706|+12.548307|+9.026210|
|-14.976239|-29.853952|+12.549133|+9.026715|
|-14.976814|-29.854863|+12.549736|+9.027084|
|-14.977235|-29.855528|+12.550177|+9.027354|
|-14.977542|-29.856015|+12.550500|+9.027551|
|-14.977767|-29.856371|+12.550735|+9.027695|
|-14.977931|-29.856630|+12.550908|+9.027800|
|-14.978051|-29.856820|+12.551033|+9.027877|
Answer:
|    X1    |    X2    |    X3    |    X4    |
|-14.978051|-29.856820|+12.551033|+9.027877|


Total iteration 14
```

Висновки:

На даній лабораторній роботі я ознайомився на практиці з методом Якобі та методом Зайделя для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язав СЛАР, згідно до індивідуального завдання:

$$1)\begin{cases} 0{,}23x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}18x_4 = -1{,}24 \\ 0{,}45x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}88 \\ 0{,}26x_1 + 0{,}34x_3 - 0{,}11x_4 = -0{,}62 \\ 0{,}05x_1 - 0{,}26x_2 + 0{,}34x_3 - 1{,}12x_4 = 1{,}17 \end{cases}$$

Розв'язками стали x_1= -14.978051, x_2= -29.856820, x_3= 12.551033, x_4= 9.027877
Кількість ітерацій в методі Якобі=20,а в методі Зейделя=14.