Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

ЗВІТ

Про виконання лабораторної роботи № 9

«НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ»

з дисципліни «Чисельні методи»

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студ. групи ПЗ-15
Бабіля О.О.

Прийняв:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю.

«___» ______ 2022 р.

∑ = ____ ___________

Львів – 2022

Мета: ознайомлення на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

Теоретичні відомості:

На практиці часто виникає необхідність описати у вигляді функціональної залежності зв'язок між величинами, заданими таблично або у вигляді набору точок з координатами (x_i, y_i), $(i = \overline{0,n})$, де n – загальна к-ть точок. Як правило, ці табличні дані отримані експериментально і мають похибки.

У результаті апроксимації бажано отримати досить просту функціональну залежність, яка дасть змогу «згладити» експериментальні похибки та обчислити значення функції в проміжних точках, що не містяться у вихідній таблиці.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблицею своїх значень $y_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$. Потрібно знайти поліном фіксованого m-го степеня $(m = \overline{0,n})$

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

для якого похибкою апроксимації є середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2}\,.$$

Оскільки поліном містить невизначені коефіцієнти a_i $(i = \overline{0,m})$, то необхідно їх підібрати таким чином, щоб мінімізувати функцію

$$\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i\right)^2.$$

У цьому і полягає суть використання методу найменших квадратів для апроксимації функцій.

Використовуючи необхідну умову екстремуму $\frac{\partial\Phi}{\partial a_k} = 0$ $(k = \overline{0,m})$ функції від багатьох змінних $\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, отримуємо так звану нормальну систему методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів a_i $(i = \overline{0,m})$ апроксимаційного полінома.

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right)a_j\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k\,, k = \overline{0,m}.$$

Отримана система - це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Можна показати, що визначник цієї системи відмінний від нуля, тобто її розв'язок існує і єдиний. Однак для високих степенів m система є погано обумовленою. Тому метод найменших квадратів застосовують для знаходження поліномів невисоких степенів $m \le 5$. Розв'язок нормальної системи шукають, використовуючи прямі або наближені методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Індивідуальне завдання

Методом найменших квадратів побудувати лінійний, квадратичний і кубічний апроксимаційні поліноми для таблично заданої функції.

Варіант 1	x	0,59	0,7	0,81	0,9	0,95	1
	y	2,94	3,2	3,38	3,53	3,75	4,06

Хід роботи:

x	0,59	0,7	0,81	0,9	0,95	1
y	2,54	3,2	3,38	3,53	3,75	4,06

Загальна формула:

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right)a_j = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^{k}$$

Розпишемо формулу для лінійного полінома

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

Виконаємо проміжні обчислення:

$n+1=6$; $\sum_{i=0}^{5} x_i^2 = 4,2067$; $\sum_{i=0}^{5} y_i = 20,86$;

$\sum_{i=0}^{5} x_i = 4,95$; $\sum_{i=0}^{5} y_i x_i = 17,5119$,

Підставимо значення у формулу

$$\begin{cases} 6a_0 + 4,95a_1 = 20,86 \\ 4,95a_0 + 4,2067a_1 = 17,5119 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1,4475 \\ a_1 = 2,4595 \end{cases},$$

отже лінійний поліном буде мати вигляд

$y = 2,4595x + 1,4475$

Розпишемо формулу для квадратичного полінома

$$\begin{cases}(n+1)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2=\sum_{i=0}^{n} y_i\\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2=\sum_{i=0}^{n} y_i x_i\\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2=\sum_{i=0}^{n} y_i x_i\end{cases}$$

Виконовши обчислення отримаємо:

$$\begin{cases}a_0=3{,}85411\\ a_1=-3{,}8002\\ a_2=3{,}9334\end{cases}$$, отже квадратичний поліном:

$y=3{,}9334x^2+3{,}8002x+3{,}85411$

Розпишемо формулу для кубічного полінома:

$$\begin{cases}(n+1)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)\cdot a_3=\sum_{i=0}^{n} y_i\\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\cdot a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)\cdot a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)\cdot a_2+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_3=\sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2\\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^5\right)a_3=\sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2\\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_1+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^5\right)a_2+\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^6\right)a_3=\sum_{i=0}^{n} y_i x_i^3\end{cases}$$

Виконовши обчислення отримаємо:

$$\begin{cases}a_0=-12{,}5436\\ a_1=60{,}4365\\ a_2=-78{,}2943\\ a_3=34{,}4558\end{cases}$$, отже кубічний поліном:

$y=34{,}4358x^3-78{,}2943x^2+60{,}4365x-12{,}5436$

Код програми:

```
#include <math.h>
#include <iostream>
void subtractionRow(double** array, int n, int m, int l, int k, double coefficient)
{
	for (int i = 0; i < m; i++) {
		if (k != l)
			array[l][i] = array[l][i] - array[k][i] * coefficient;
	}
}
float sumOfRowS(double** array, int m, int k)
{
	int p = 0;
	float res = 0;
	for (int i = 0; i < m; i++)
	{
		if (i > 1 + k && i < m)
			p++;
		if ((i != k) && (i != m - 1))
			res += array[k][i];
	}
	return res;
}
void swapRow(double** array, int m, int k, int l)
{
	float* temp = new float[m];
	if (k != l) {
		for (int i = 0; i < m; i++)
		{
			temp[i] = array[k][i];
		}
		for (int i = 0; i < m; i++)
		{
			array[k][i] = array[l][i];
		}
		for (int i = 0; i < m; i++)
		{
			array[l][i] = temp[i];
		}
	}
	delete[] temp;
}
double sum(double x[6], int stepin)
{
	double sum = 0;
	for (int i = 0; i < 6; i++)
		sum += pow(x[i], stepin);
	return sum;
}
double sum(double x[6], double y[6], int stepin)
{
	double sum = 0;
	for (int i = 0; i < 6; i++)
		sum += y[i] * pow(x[i], stepin);
	return sum;
}
double* methodGauss(double** array, int n, int m)
{
	double** system = new double* [n];
	for (int i = 0; i < n; i++)
```

```
		{
			system[i] = new double[m];
			for (int j = 0; j < m; j++)
			{
				system[i][j] = array[i][j];
			}
		}
		for (int i = 0; i < n - 1; i++)
		{
			for (int j = i; j < n; j++)
			{
				subtractionRow(system, n, m, j, i, system[j][i] / system[i][i]);
			}
		}
		double* X = new double[n];
		for (int i = 1; i <= n; i++)
		{
			float b = system[n - i][m - 1];
			X[n - i] = (b - sumOfRowS(system, m, n - i)) / system[n - i][n - i];
			for (int j = 0; j < n - i; j++)
				system[j][n - i] *= X[n - i];
		}
		delete (system);
		return X;
	}
	void method(double x[6], double y[6])
	{
		double** one = new double* [2]; double* oneRes;
		one[0] = new double[3];
		one[1] = new double[3];
		one[0][0] = 6;
		one[0][1] = sum(x, 1);
		one[0][2] = sum(x, y, 0);
		one[1][0] = sum(x, 1);
		one[1][1] = sum(x, 2);
		one[1][2] = sum(x, y, 1);
		oneRes = methodGauss(one, 2, 3);
		printf("----------------------------------------------------------\n");
		printf("System of lineal polynomial:\n\n");
		std::cout << one[0][0] << "a0 + " << one[0][1] << "a1 = " << one[0][2] << std::endl
	<< std::endl;
		std::cout << one[1][0] << "a1 + " << one[1][1] << "a2 = " << one[1][2] << std::endl
	<< std::endl;

		printf("Lineal polynomial:\n\n");
		std::cout << oneRes[0] << "+" << "(" << oneRes[1] << ")" << "x" << std::endl;
		printf("----------------------------------------------------------");
		double** two = new double* [3]; double* twoRes;
		for (int i = 0; i < 3; i++)
			two[i] = new double[4];
		two[0][0] = 6;
		two[0][1] = sum(x, 1);
		two[0][2] = sum(x, 2);
		two[0][3] = sum(x, y, 0);
		two[1][0] = sum(x, 1);
		two[1][1] = sum(x, 2);
		two[1][2] = sum(x, 3);
		two[1][3] = sum(x, y, 1);
		two[2][0] = sum(x, 2);
		two[2][1] = sum(x, 3);
		two[2][2] = sum(x, 4);
```

```
	two[2][3] = sum(x, y, 2);
	twoRes = methodGauss(two, 3, 4);
	printf("\nSystem of quadratic polynomial:\n\n");
	std::cout << two[0][0] << "a0 + " << two[0][1] << "a1 +  " << two[0][2]<<"a2 = 
"<<two[0][3] << std::endl << std::endl;
	std::cout << two[1][0] << "a1 + " << two[1][1] << "a2 +  " << two[1][2] << "a3 = " << 
two[1][3] << std::endl << std::endl;
	std::cout << two[2][0] << "a2 + " << two[2][1] << "a3 +  " << two[2][2] << "a4 = " << 
two[2][3] << std::endl << std::endl;
	printf("Quadratic polynomial:\n\n");
	std::cout << twoRes[0] << "+" << "(" << twoRes[1] << ")" << "x" << "+" << "(" << 
twoRes[2] << ")" << "x^2" << std::endl;
	printf("---------------------------------------------------------");
	double** three = new double* [4]; double* threeRes;
	for (int i = 0; i < 4; i++)
		three[i] = new double[5];
	three[0][0] = 6;
	three[0][1] = sum(x, 1);
	three[0][2] = sum(x, 2);
	three[0][3] = sum(x, 3);
	three[0][4] = sum(x, y, 0);
	three[1][0] = sum(x, 1);
	three[1][1] = sum(x, 2);
	three[1][2] = sum(x, 3);
	three[1][3] = sum(x, 4);
	three[1][4] = sum(x, y, 1);
	three[2][0] = sum(x, 2);
	three[2][1] = sum(x, 3);
	three[2][2] = sum(x, 4);
	three[2][3] = sum(x, 5);
	three[2][4] = sum(x, y, 2);
	three[3][0] = sum(x, 3);
	three[3][1] = sum(x, 4);
	three[3][2] = sum(x, 5);
	three[3][3] = sum(x, 6);
	three[3][4] = sum(x, y, 3);
	threeRes = methodGauss(three, 4, 5);
	printf("\nSystem of cubic polynomial:\n\n");
	std::cout << three[0][0] << "a0 + " << three[0][1] << "a1 +  " << three[0][2] << "a2
+ " << three[0][3] <<"a3 = " << three [0][4]<< std::endl << std::endl;
	std::cout << three[1][0] << "a1 + " << three[1][1] << "a2 +  " << three[1][2] << "a3
+ " << three[1][3] << "a4 = " << three[1][4] << std::endl << std::endl;
	std::cout << three[2][0] << "a2 + " << three[2][1] << "a3 +  " << three[2][2] << "a4
+ " << three[2][3] << "a5 = " << three[2][4] << std::endl << std::endl;
	std::cout << three[3][0] << "a3 + " << three[3][1] << "a4 +  " << three[3][2] << "a5
+ " << three[3][3] << "a6 = " << three[3][4] << std::endl << std::endl;
	printf("Cubic polynomial:\n\n");
	std::cout << threeRes[0] << "+" << "(" << threeRes[1] << ")" << "x" << "+" << "(" << 
threeRes[2] << ")" << "x^2" << "+" << "(" << threeRes[3] << ")" << "x^3" << std::endl;
	printf("---------------------------------------------------------");
}
int main()
{
	double x[6] = { 0.59, 0.7, 0.81, 0.9, 0.95 , 1 };
	double y[6] = {  2.94, 3.2, 3.38, 3.53, 3.75,4.06 };
	std::cout << "  x = 0.59, 0.7, 0.81, 0.9, 0.95 , 1" << std::endl;
	std::cout << "  y = 2.94, 3.2, 3.38, 3.53, 3.75, 4.06" << std::endl<< std::endl;
	method(x, y);
	return 0;
}
```

Вигляд виконаної програми

```
  x = 0.59, 0.7, 0.81, 0.9, 0.95 , 1
  y = 2.94, 3.2, 3.38, 3.53, 3.75, 4.06

---------------------------------------------------------
System of lineal polynomial:

6a0 + 4.95a1 = 20.86

4.95a1 + 4.2067a2 = 17.5119

Lineal polynomial:

1.44755+(2.45954)x
---------------------------------------------------------
System of quadratic polynomial:

6a0 + 4.95a1 +  4.2067a2 = 20.86

4.95a1 + 4.2067a2 +  3.6662a3 = 17.5119

4.2067a2 + 3.6662a3 +  3.26235a4 = 15.1127

Quadratic polynomial:

3.85409+(-3.80025)x+(3.93341)x^2
---------------------------------------------------------
System of cubic polynomial:

6a0 + 4.95a1 +  4.2067a2 + 3.6662a3 = 20.86

4.95a1 + 4.2067a2 +  3.6662a3 + 3.26235a4 = 17.5119

4.2067a2 + 3.6662a3 +  3.26235a4 + 2.95251a5 = 15.1127

3.6662a3 + 3.26235a4 +  2.95251a5 + 2.70879a6 = 13.3462

Cubic polynomial:

-12.5436+(60.4365)x+(-78.2943)x^2+(34.4558)x^3
---------------------------------------------------------
```

Висновки:

На даній лабораторній роботі ознайомився на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.Виконав завдання згідно до індивідуального варіанту:

Варіант 1	x	0,59	0,7	0,81	0,9	0,95	1
	y	2,94	3,2	3,38	3,53	3,75	4,06

Отримав три поліноми:
1)Лінійний: $y=2.45954x+1.44755$
2)Квадратичний: $y=3.93341x^2-3.80025x+3.85509$
3)Кубічний $y=34.4558x^3-78.2943x^2+60.4365x-12.5436$

Графіки цих поліномів:

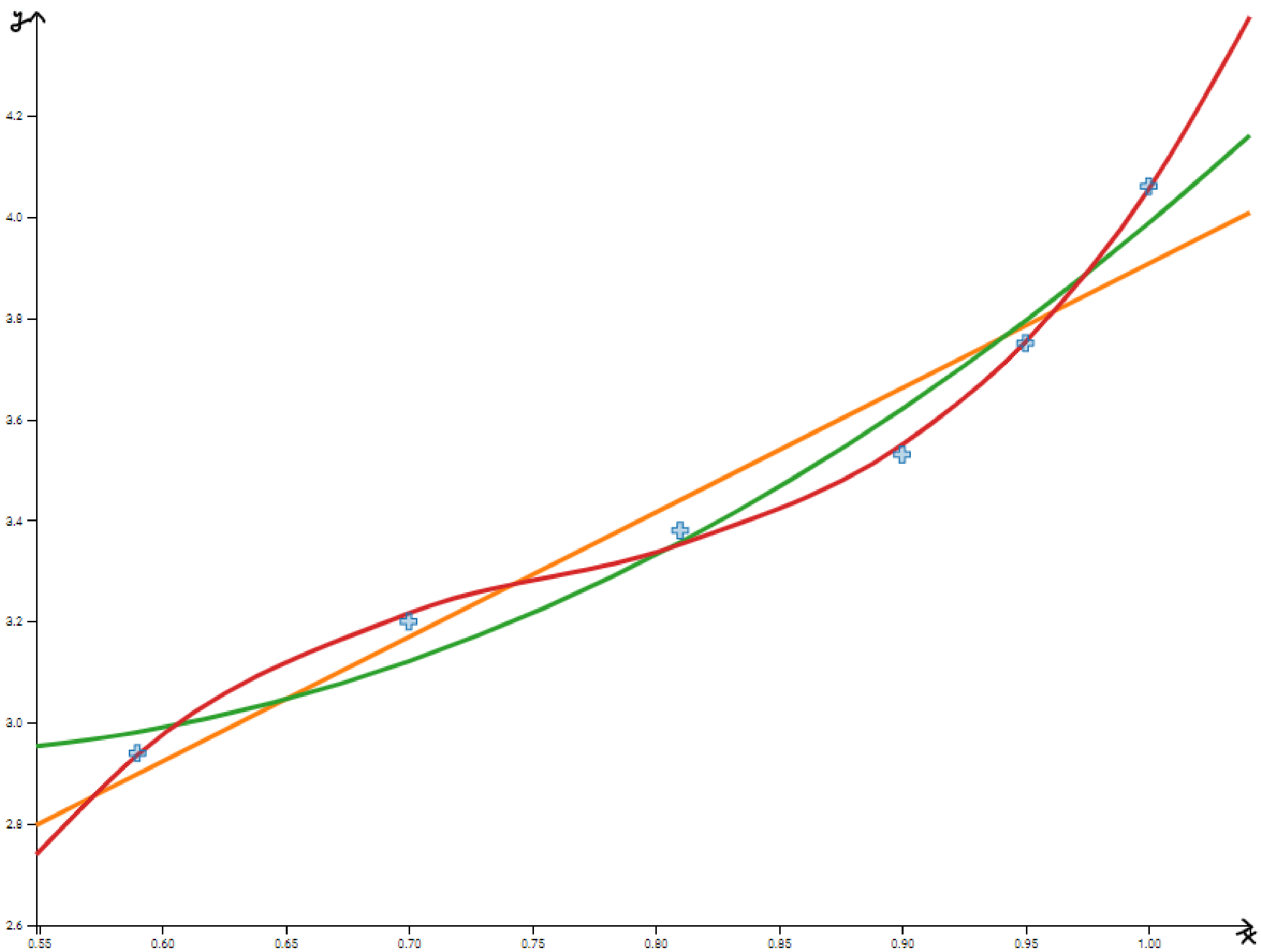

Рис.1(графік поліномів)

Оранжевий колір-лінійний поліном
Зелений колів-квадратичний поліном
Червоний колір-кубічний поліном