Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

ЗВІТ

Про виконання лабораторної роботи № 7

«ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ»

з дисципліни «Чисельні методи»

Лектор:

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

Виконав:

студ. групи ПЗ-15

Бабіля О.О.

Прийняв:

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю.

«___» ______ 2022 р.

∑ = ____ ___________

Львів – 2022

Мета: ознайомлення на практиці з методом ітерацій та методом Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь

Теоретичні відомості:

1. Метод простої ітерації

Розглянемо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0. \end{cases} \qquad (\quad 1)$$

Розв'язком цієї системи є пара чисел (x_*, y_*), яка перетворює систему рівнянь (8.1) в тотожність (рівність).

Припустимо, що (x_0, y_0) - наближений розв'язок системи (8.1), яку перетворимо до такого вигляду

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y), \\ y=\varphi_2(x,y), \end{cases} \qquad (\quad 2)$$

де φ_1, φ_2 - неперервно-диференційовані функції за змінними x та y.

Розглянемо ітераційний процес

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n), \end{cases} \qquad n=1, 2, \ldots \qquad (\quad 3)$$

який породжує числові послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Якщо ітераційний процес (3) збігається, тобто існують границі

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y_* = \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad (4)$$

то, використовуючи вирази (4), систему рівнянь (3) перепишемо у такому вигляді

$$\begin{cases} x_* = \varphi_1(x_*, y_*), \\ y_* = \varphi_2(x_*, y_*), \end{cases} \qquad (5)$$

тобто x_*, y_* є розв'язком системи (2), а також еквівалентної їй системи (1).

Теорема. Нехай у деякій замкнутій області $D\ \{a \le x \le A, b \le y \le B\}$ існує єдина пара коренів $x = x_*$, $y = y_*$ системи (1), причому

1) функції $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ визначені та неперервно-диференційовані в області D;
2) початкове наближення (x_0, y_0) і всі наступні наближення (x_n, y_n) $(n = 1, 2, ...)$ належать області D;
3) в області D виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1\ , \qquad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1. \qquad (6)$$

Тоді процес послідовних наближень (3) збігається до точних розв'язків системи рівнянь (2).

Зауваження. Умови (6) можна замінити аналогічними

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1^* < 1, \qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2^* < 1. \qquad (7)$$

Оцінку похибки n-го наближення розв'язку визначають з нерівності:

$$|x_* - x_n| + |y_* - y_n| \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right),$$

де M є більшим з чисел q_1, q_2 або q_1^*, q_2^* у співвідношеннях (6) або (7). Збіжність вважають доброю, якщо $M < 1/2$.

$$\Delta_y = -\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & f_1(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Наступне наближення розв'язку системи отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta_x, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta_y, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, ... \qquad (13)$$

Зауваження. Метод простої ітерації, який застосовують для знаходження розв'язку одного нелінійного рівняння або системи двох нелінійних рівнянь, має перший порядок збіжності (лінійну збіжність), а метод Ньютона – другий порядок збіжності (квадратичну збіжність).

2. Метод Ньютона

Це найрозповсюдженіший метод розв'язування систем нелінійних рівнянь. Він забезпечує кращу збіжність, ніж метод простої ітерації.

Нехай (x_0, y_0) - наближений розв'язок системи (1), а Δ_x, Δ_y - деякі поправки до точного розв'язку.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0, \\ f_2(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0. \end{cases} \qquad (\ 8)$$

Розкладемо функції f_1 і f_2 в ряд Тейлора, обмежившись лінійними членами розкладу відносно Δ_x, Δ_y

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0)+\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\Delta_x+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\Delta_y=0, \\ f_2(x_0, y_0)+\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\Delta_x+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\Delta_y=0. \end{cases} \qquad (\ 9)$$

Запишемо якобіан або визначник матриці Якобі, складеної з частинних похідних функцій f_1 і f_2 в деякій точці

$$\Delta(x_0, y_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (\ 10)$$

а поправки Δ_x і Δ_y визначимо за правилом Крамера із системи (9)

$$\Delta_x=-\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)}\begin{vmatrix} f_1(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ f_2(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad (\ 11)$$

$$\Delta_y=-\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & f_1(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \qquad (\ 12)$$

Наступне наближення розв'язку системи отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\Delta_x, \\ y_{n+1}=y_n+\Delta_y, \end{cases} \qquad n=0, 1, 2, \ldots \qquad (\ 13)$$

Зауваження. Метод простої ітерації, який застосовують для знаходження розв'язку одного нелінійного рівняння або системи двох нелінійних рівнянь, має перший порядок збіжності (лінійну збіжність), а метод Ньютона – другий порядок збіжності (квадратичну збіжність).

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю $\varepsilon=10^{-3}$методом ітерацій та методом Ньютона.

1. $$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$$

Хід роботи:

Побудуємо два графіки та наближено визначимо x_0 та y_0:

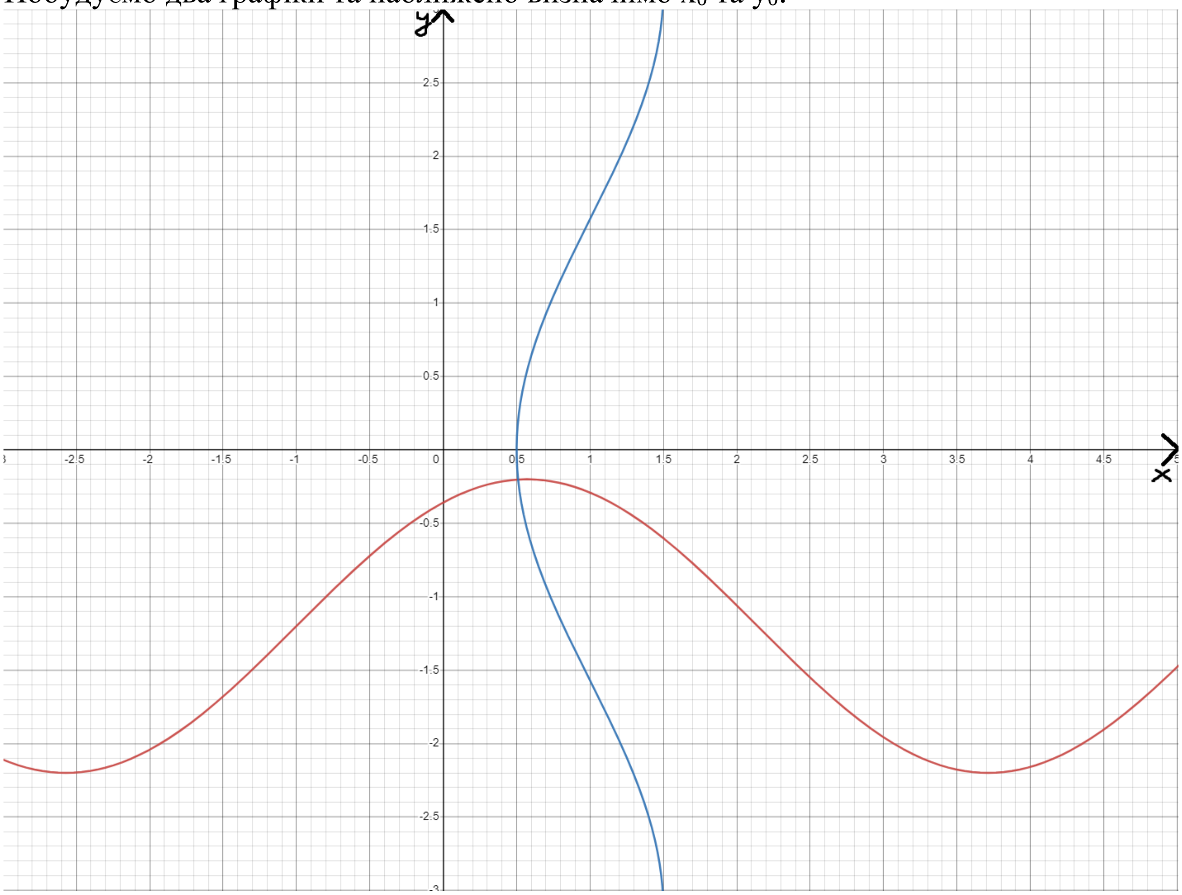

Рисунок 1(графіки для наближеного визначення x_0 та y_0)

Де:

Синій колір – графік x=1-cosy/2

Червоний колір – графік y=sin(x+1)-1.2

З графіку можна побачити , що точка перетину приблизно знаходиться в координатах (0.5;-0.2) , отже x_0=0.5 та y_0=-0.2.

Метод простої ітерації

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x,y) = 1 - \dfrac{\cos y}{2} \\ y = \varphi_2(x,y) = \sin(x+1) - 1,2 \end{cases}$$

З графіка наближено визначимо координати точки (x_0, y_0) перетину кривих
$x_0 = 0,5$; $y_0 = -0,2$.

Перевірка умови збіжності:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\sin y}{2};$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \cos(x+1); \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| = 0 + 0,07 < 1 \checkmark$$

D_i – довж. і-го рядка

Π_{n+1} – довж. стовп.

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| = 0,099 + 0 < 1 \checkmark,$$

отже система збіжна.

Ітераційний процес:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \dfrac{\cos y_n}{2}, \\ y_{n+1} = \sin(x_{n+1}) - 1,2; \end{cases}$$

Метод Ньютона

$$\begin{cases} 2x + \cos y = 2 \\ \sin(x+1) - y = 1{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \cos y - 2 = 0 \\ \sin(x+1) - y - 1{,}2 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо Якобіан в точці (x_0, y_0), де $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = -0{,}2$

$$W = \Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2 & -\sin y_0 \\ \cos(x_0+1) & -1 \end{vmatrix} = -2 - (-0{,}2 \cdot 0{,}8) \neq 0$$

$$\Delta x = -0{,}54 \cdot \begin{vmatrix} 2x_0 + \cos y_0 - 2 & -\sin y_0 \\ \sin(x_0+1) - y_0 - 1{,}2 & -1 \end{vmatrix} = 0{,}05$$

$$\Delta y = -0{,}54 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2x_0 + \cos y_0 - 2 \\ \cos(x_0+1) & \sin(x_0+1) - y_0 - 1{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}81$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta x \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y \end{cases}$$

Код програми:

```
#include <iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
double fi1(double x)
{
    return sin(x + 1)-1.2;
}
double fi2(double y)
{
    return (2-cos(y)) / 2;
}
double Det(double a[2][2])
```

```cpp
{
    return a[0][0] * a[1][1] - (a[0][1] * a[1][0]);
}
double Jcobi(double x, double y)
{
    double mas[2][2];
    mas[0][0] = 2;
    mas[0][1] = -sin(y);
    mas[1][0] = cos(y);
    mas[1][1] = -1;

    return Det(mas);
}
double deltaX(double x, double y)
{
    double mas[2][2];
    mas[0][0] = 2*x+cos(y)-2;
    mas[0][1] = -sin(y);
    mas[1][0] = sin(x+1)-y-1.2;
    mas[1][1] = -1;;

    return Det(mas);
}
double deltaY(double x, double y)
{
    double mas[2][2];
    mas[0][0] = 2;
    mas[0][1] = 2 * x + cos(y) - 2;
    mas[1][0] = cos(y);
    mas[1][1] = sin(x + 1) - y - 1.2;

    return Det(mas);
}
void NewtonMethod(double ep)
{
    double x0 = 0.5;
    double y0 = -0.2;
    if (Jcobi(x0, y0) == 0)
    {
        cout << "Error" << endl;
        return;
    }
    else {
        cout << "                                   Nython Method" << endl << endl;
        double x1 = x0 - (deltaX(x0, y0) / Jcobi(x0, y0));
        double y1 = y0 - (deltaY(x0, y0) / Jcobi(x0, y0));
        int k = 0;
        cout << "| " << k << " | \tx = " << x0 << "\t| \ty = " << y0 << "\t| \teps = " << ep
<< endl;

        do
        {
            x0 = x1;
            y0 = y1;
            x1 = x0 - (deltaX(x0, y0) / Jcobi(x0, y0));
            y1 = y0 - (deltaY(x0, y0) / Jcobi(x0, y0));
            k++;
            cout << "| " << k << " | \tx = " << x1 << "\t| \ty = " << y1 << "\t| \teps = "
<< ep << endl;
        } while ((fabs(x1 - x0) + fabs(y1 - y0)) > ep);
    }
```

```
}
bool check(double x, double y)
{
    return fabs(sin(x + 1)-1.2) < 1 && fabs((2-cos(y)) / 2) < 1;
}
void IterationMethod(double eps)
{
    double xprev = 0.5;
    double yprev = -0.2;
    cout << "                              Iteration Method " << endl << endl;
    if (!check(xprev, yprev))
    {
        cout << "Error" << endl;
        return;
    }
    else {
        double x = xprev, y = yprev;
        int k = 0;
        cout << "| " << k << " | \tx = " << x << "\t| \ty = " << y << "\t| \teps = " << eps
<< endl;
        do
        {
            xprev = x;
            yprev = y;
            x = fi2(yprev);
            y = fi1(xprev);
            k++;
            cout << "| " << k << " | \tx = " << x << "\t| \ty = " << y << "\t| \teps = " <<
eps << endl;
        } while ((fabs(x - xprev) + fabs(y - yprev)) > eps);
    }
    cout << endl;
}
int main()
{
    double eps = 0.001;
    IterationMethod(eps);
    NewtonMethod(eps);
    return 0;
}
```

Вигляд виконаної програми

Консоль отладки Microsoft Visual Studio

```
                            Iteration Method

| 0 |   x = 0.5 |       y = -0.2        |       eps = 0.001
| 1 |   x = 0.509       |       y = -0.202      |       eps = 0.001
| 2 |   x = 0.510       |       y = -0.201      |       eps = 0.001

                            Nython Method

| 0 |   x = 0.5 |       y = -0.2        |       eps = 0.001
| 1 |   x = 0.510       |       y = -0.201      |       eps = 0.001


C:\Users\home\source\repos\CM 07\Debug\CM 07.exe (процесс 15124) завершил работу с кодом 0.
```

Висновки:

На даній лабораторній роботі я ознайомився на практиці з методом ітерацій та методом Ньютона розв’язування систем нелінійних рівнянь. Розв’язав систему, згідно до індивідуального завдання:

1. $$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$$

Розв’язками стали
X=0.510,
У=-0.201,
Кількість ітерацій в методі простих ітерацій =2, в методі Ньютона =1.