

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення



ЗВІТ

Про виконання лабораторної роботи № 3
«РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ
КРАМЕРА ТА МЕТОДОМ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ»
з дисципліни «Чисельні методи»

Лектор:

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

Виконав:

студ. групи ПЗ-15

Бабіля О.О.

Прийняв:

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю.

«___» _____ 2022 р.

Σ = _____

Львів – 2022

$$A \cdot X = B, \quad (4.3)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

A -прямокутна матриця коефіцієнтів системи розмірності $m \times n$; X - вектор-стовпець невідомих розмірності n ; B - вектор-стовпець вільних членів розмірності m .

Розв'язком системи (4.1; 4.2; 4.3) називають n -компонентний вектор-стовпець \bar{X} , який перетворює співвідношення (4.1; 4.2; 4.3) у правильну числову тотожність.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь може мати один розв'язок, безліч або не мати жодного. Кількість невідомих n в системі називають порядком СЛАР.

Якщо система має хоча б один розв'язок, то її називають *сумісною*, і *несумісною*, якщо не має жодного.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків. СЛАР є *невиродженою*, якщо визначник системи $\det A \neq 0$. У випадку, коли визначник системи $\det A = 0$, СЛАР є *виродженою*.

Якщо всі вільні члени $b_i = 0 (i = \overline{1, m})$, то СЛАР називають *однорідною*. Однорідна система має завжди *тривіальний* розв'язок $x_i = 0 (i = \overline{1, n})$.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язують числовими методами лише у тому випадку, коли вона є сумісною, визначеною та невинродженою.

Метод Крамера:

Розглянемо СЛАР, яка містить n рівнянь та n невідомих, причому визначник її не дорівнює нулеві. Для знаходження невідомих x_i застосовують формули Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.4)$$

де $\det A$ - визначник матриці A , $\det A_i$ - визначник матриці A_i , яку отримують з матриці A шляхом заміни її i -го стовпця стовпцем вільних членів

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5)$$

Щоб розв'язати СЛАР з n невідомими потрібно обчислити $(n+1)$ визначників n -го порядку, що приводить до виконання $n!$ операцій. Через громіздкість обчислень визначників метод Крамера не застосовують на практиці для великої розмірності матриці коефіцієнтів СЛАР.

Метод оберненої матриці(матричний метод)

У лінійній алгебрі часто використовують матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Цей метод ґрунтується на обчисленні оберненої матриці A^{-1} , яка існує лише при умові, коли визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$.

Якщо обидві частини матричного рівняння (4.3) зліва домножити на матрицю A^{-1} , то отримаємо співвідношення

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \quad (4.6)$$

Враховуючи, що добуток оберненої матриці на саму матрицю дає одиничну матрицю

$$A^{-1}A = E, \quad (4.7)$$

а результатом добутку одиничної матриці E на матрицю-стовпець X є матриця-стовпець X , тобто $EX = X$, одержимо матричний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді

$$X = A^{-1}B. \quad (4.8)$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} необхідно застосувати алгоритм, який складається з таких пунктів:

1. Обчислення визначника $\det A$ матриці A коефіцієнтів системи. Якщо він не дорівнює нулеві, то продовжуємо розв'язувати СЛАР. Якщо $\det A = 0$, то матриця A є виродженою і для неї не існує оберненої.
2. Знаходження алгебраїчних доповнень для елементів матриці A . Вони дорівнюють мінорам для відповідних елементів a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), помноженим на $(-1)^{i+j}$, тобто

$$\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (4.9)$$

а мінор M_{ij} отримують із матриці A шляхом викреслювання i -го рядка та j -го стовпця.

3. Формування матриці \bar{A} , елементами якої є алгебраїчні доповнення матриці A .
4. Транспонування матриці \bar{A} і знаходження приєднаної матриці $\tilde{A} = \bar{A}^T$.
5. Визначення оберненої матриці за формулою

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}. \quad (4.10)$$

Зауваження. Обчислення для системи із трьох рівнянь не є громіздкими.

Індивідуальне завдання

Скласти програму розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці та методом Крамера.

$$1. \begin{cases} 0,65x_1 - 0,93x_2 + 0,45x_3 = -0,72 \\ 1,15x_1 + 0,43x_2 - 0,72x_3 = 1,24 \\ 0,56x_1 - 0,18x_2 + 1,03x_3 = 2,15 \end{cases}$$

Хід роботи:

Метод Крамера:

Запишемо матрицю А та В:

А=

$$\begin{vmatrix} 0.65 & -0.93 & 0.45 \\ 1.15 & 0.43 & -0.72 \\ 0.56 & -0.18 & 1.03 \end{vmatrix}$$

В=

$$\begin{vmatrix} -0.72 \\ 1.24 \\ 2.25 \end{vmatrix}$$

Знайдемо визначник матриці А:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.93 & 0.45 \\ 1.15 & 0.43 & -0.72 \\ 0.56 & -0.18 & 1.03 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot 0.43 \cdot 1.03 + (-0.93) \cdot (-0.72) \cdot 0.56 + 0.45 \cdot 1.15 \cdot (-0.18) - 0.45 \cdot 0.43 \cdot 0.56 - 0.65 \cdot (-0.72) \cdot (-0.18) - (-0.93) \cdot 1.15 \cdot 1.03 = 0.287885 + 0.374976 - 0.09315 - 0.10836 - 0.08424 + 1.101585 = \frac{184837}{125000}$$

Це приблизно дорівнює 1.478696

Знайдемо визначник матриці А1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0.72 & -0.93 & 0.45 \\ 1.24 & 0.43 & -0.72 \\ 2.25 & -0.18 & 1.03 \end{vmatrix} = (-0.72) \cdot 0.43 \cdot 1.03 + (-0.93) \cdot (-0.72) \cdot 2.25 + 0.45 \cdot 1.24 \cdot (-0.18) - 0.45 \cdot 0.43 \cdot 2.25 - (-0.72) \cdot (-0.72) \cdot (-0.18) - (-0.93) \cdot 1.24 \cdot 1.03 = -0.318888 + 1.5066 - 0.10044 - 0.435375 + 0.093312 + 1.187796 = \frac{386601}{200000}$$

Це приблизно дорівнює 1.933005

Знайдемо визначник матриці A2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.72 & 0.45 \\ 1.15 & 1.24 & -0.72 \\ 0.56 & 2.25 & 1.03 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot 1.24 \cdot 1.03 + (-0.72) \cdot (-0.72) \cdot 0.56 + 0.45 \cdot 1.15 \cdot 2.25 - 0.45 \cdot 1.24 \cdot 0.56 - 0.65 \cdot (-0.72) \cdot 2.25 - (-0.72) \cdot 1.15 \cdot 1.03 = 0.83018 + 0.290304 + 1.164375 - 0.31248 + 1.053 + 0.85284 = \frac{3878219}{1000000}$$

Це приблизно дорівнює 3.878219

Знайдемо визначник матриці A3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.93 & -0.72 \\ 1.15 & 0.43 & 1.24 \\ 0.56 & -0.18 & 2.25 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot 0.43 \cdot 2.25 + (-0.93) \cdot 1.24 \cdot 0.56 + (-0.72) \cdot 1.15 \cdot (-0.18) - (-0.72) \cdot 0.43 \cdot 0.56 - 0.65 \cdot 1.24 \cdot (-0.18) - (-0.93) \cdot 1.15 \cdot 2.25 = 0.628875 - 0.645792 + 0.14904 + 0.173376 + 0.14508 + 2.406375 = \frac{1428477}{500000}$$

Це приблизно дорівнює 2.856954

Після чого знайдемо розв'язки рівняння:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{386601/200000}{184837/125000} = \frac{1933005}{1478696}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3878219/1000000}{184837/125000} = \frac{3878219}{1478696}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1428477/500000}{184837/125000} = \frac{1428477}{739348}$$

Отже, $x_1 = 1.307236$, $x_2 = 2.622729$, $x_3 = 1.932077$.

Метод оберненої матриці(матричний метод):

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.93 & 0.45 \\ 1.15 & 0.43 & -0.72 \\ 0.56 & -0.18 & 1.03 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot 0.43 \cdot 1.03 + (-0.93) \cdot (-0.72) \cdot 0.56 + 0.45 \cdot 1.15 \cdot (-0.18) - 0.45 \cdot 0.43 \cdot 0.56 - 0.65 \cdot (-0.72) \cdot (-0.18) - (-0.93) \cdot 1.15 \cdot 1.03 = 0.287885 + 0.374976 - 0.09315 - 0.10836 - 0.08424 + 1.101585 = \frac{184837}{125000}$$

Визначник відмінний від нуля , отже обернена матриця існує

Знайдемо обернену матрицю , для цього знайдемо мінори:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0.43 & -0.72 \\ -0.18 & 1.03 \end{vmatrix} = 0.43 \cdot 1.03 - (-0.18) \cdot (-0.72) = 0.4429 - 0.1296 = 0.3133$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1.15 & -0.72 \\ 0.56 & 1.03 \end{vmatrix} = 1.15 \cdot 1.03 - 0.56 \cdot (-0.72) = 1.1845 + 0.4032 = 1.5877$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1.15 & 0.43 \\ 0.56 & -0.18 \end{vmatrix} = 1.15 \cdot (-0.18) - 0.56 \cdot 0.43 = -0.207 - 0.2408 = -0.4478$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -0.93 & 0.45 \\ -0.18 & 1.03 \end{vmatrix} = (-0.93) \cdot 1.03 - (-0.18) \cdot 0.45 = -0.9579 + 0.081 = -0.8769$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 0.56 & 1.03 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot 1.03 - 0.56 \cdot 0.45 = 0.6695 - 0.252 = 0.4175$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.93 \\ 0.56 & -0.18 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot (-0.18) - 0.56 \cdot (-0.93) = -0.117 + 0.5208 = 0.4038$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -0.93 & 0.45 \\ 0.43 & -0.72 \end{vmatrix} = (-0.93) \cdot (-0.72) - 0.43 \cdot 0.45 = 0.6696 - 0.1935 = 0.4761$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 1.15 & -0.72 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot (-0.72) - 1.15 \cdot 0.45 = -0.468 - 0.5175 = -0.9855$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.93 \\ 1.15 & 0.43 \end{vmatrix} = 0.65 \cdot 0.43 - 1.15 \cdot (-0.93) = 0.2795 + 1.0695 = 1.349$$

Транспонована матриця:

$$\mathbf{C}^{*T} = \begin{pmatrix} 0.3133 & 0.8769 & 0.4761 \\ -1.5877 & 0.4175 & 0.9855 \\ -0.4478 & -0.4038 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^{*T}}{\det \mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{78325}{369674} & \frac{219225}{369674} & \frac{119025}{369674} \\ -\frac{396925}{369674} & \frac{104375}{369674} & \frac{246375}{369674} \\ -\frac{55975}{184837} & -\frac{50475}{184837} & \frac{168625}{184837} \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язки:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{78325}{369674} & \frac{219225}{369674} & \frac{119025}{369674} \\ -\frac{396925}{369674} & \frac{104375}{369674} & \frac{246375}{369674} \\ -\frac{55975}{184837} & -\frac{50475}{184837} & \frac{168625}{184837} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.72 \\ 1.24 \\ 2.25 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{78325}{369674} \cdot (-0.72) + \frac{219225}{369674} \cdot 1.24 + \frac{119025}{369674} \cdot 2.25 \\ \left(-\frac{396925}{369674}\right) \cdot (-0.72) + \frac{104375}{369674} \cdot 1.24 + \frac{246375}{369674} \cdot 2.25 \\ \left(-\frac{55975}{184837}\right) \cdot (-0.72) + \left(-\frac{50475}{184837}\right) \cdot 1.24 + \frac{168625}{184837} \cdot 2.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28197}{184837} + \frac{271839}{369674} + \frac{1071225}{1478696} \\ \frac{142893}{184837} + \frac{129425}{369674} + \frac{2217375}{1478696} \\ \frac{40302}{184837} - \frac{62589}{184837} + \frac{1517625}{739348} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1933005}{1478696} \\ \frac{3878219}{1478696} \\ \frac{1428477}{739348} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Отже, $x_1 = 1.307236$, $x_2 = 2.622729$, $x_3 = 1.932077$.

Код програми:

Source.c

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <func.h>

int main()
{
    float array[3][4] = {
        { 0.65, -0.93, 0.45, -0.72 },
        { 1.15, 0.43, -0.72, 1.24 },
        { 0.56, -0.18, 1.03, 2.25 }
    };
    printf("System of equations(matrix A) \n");
    showMatrix(array,3,4);
    if (determinant33(array) == 0)
    {
        printf("Determinant = 0, the system does not have any answers\nEnter the new numbers:\n");
        while (determinant33(array) == 0)
        {
            scanf_s("%f %f %f %f", &array[0][0], &array[0][1], &array[0][2],
&array[0][3]);
            scanf_s("%f %f %f %f", &array[1][0], &array[1][1], &array[1][2],
&array[1][3]);
            scanf_s("%f %f %f %f", &array[2][0], &array[2][1], &array[2][2],
&array[2][3]);
        }
        methodKramer(array);
        printf("\n-----\n");
        methodInverse(array);
    }
}

```

Func.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

float determinant33(float a[3][3])
{
    return a[0][0] * a[1][1] * a[2][2] + a[2][0] * a[0][1] * a[1][2] + a[0][2] * a[1][0]
    * a[2][1] - a[2][0] * a[1][1] * a[0][2] - a[0][1] * a[1][0] * a[2][2] - a[0][0] * a[1][2] *
    a[2][1];
}

float determinant22(float a[2][2])
{
    return a[0][0] * a[1][1] - a[0][1] * a[1][0];
}

float minor(float A[3][3], int k, int l, float z)
{
    float B[2][2]; int m = 0, n = 0;
    printf("\nMinor %d %d:\n", k, l);
    for (int i = 0; i < 2; i++)
    {
        n = 0;
        if (m == k) i--;
        else
        {
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                if (n != l)
                {
                    B[i][j] = A[m][n];
                    printf("%+2.2f ", B[i][j]);
                }
                else
                {
                    j--;
                    n++;
                }
            }
            printf("\n");
        }
        m++;
    }
    return pow(-1, k + l + 2) * determinant22(B) / z;
}

void showMatrix(float A[][4], int i, int j)
{
    printf("\n");
    for (int m = 0; m < i; m++)
    {
        for (int n = 0; n < j; n++)
            printf("%2.3f ", A[m][n]);
        printf("\n");
    }
    printf("\n");
}

void multiply(float array[3][3], float a[3][1])
{
    float X[3][1] = {0};
    for (int i = 0; i < 3; i++)
        for (int j = 0; j < 1; j++)
            for (int k = 0; k < 3; k++)
                X[i][j] += array[i][k] * a[k][j];
    a[0][0] = X[0][0];
}
```

```

        a[1][0] = X[1][0];
        a[2][0] = X[2][0];
    }
    void inverse(float A[3][3])
    {
        float B[3][3];
        float k = determinant33(A);
        for (int i = 0; i < 3; i++)
            for (int j = 0; j < 3; j++)
                B[j][i] = minor(A, i, j, k);

        printf("\nInverse matrix:\n");
        for (int i = 0; i < 3; i++)
        {
            for (int j = 0; j < 3; j++)
            {
                A[i][j] = B[i][j];
                printf("%+2.2f ", B[i][j]);
            }
            printf("\n");
        }
    }
    void changeVercticalRow(float A[3][3], float array[3][4], int l)
    {
        for (int i = 0; i < 3; i++)
            for (int j = 0; j < 3; j++)
                A[i][j] = (j != l) ? array[i][j] : array[i][3];
    }
    void methodKramer(float array[3][4])
    {
        float A[3][3], A1[3][3], A2[3][3], A3[3][3];
        printf("Kramer method:\n\n");
        changeVercticalRow(A, array, 3);

        printf("Determinant of A=%f\n", determinant33(A));
        changeVercticalRow(A1, array, 0);

        printf("Determinant of A1=%f\n", determinant33(A1));
        changeVercticalRow(A2, array, 1);

        printf("Determinant of A2=%f\n", determinant33(A2));
        changeVercticalRow(A3, array, 2);

        printf("Determinant of A3=%f\n\n", determinant33(A3));

        printf("X1=A1/A=%+2.4f\n", determinant33(A1) / determinant33(A));
        printf("X2=A2/A=%+2.4f\n", determinant33(A2) / determinant33(A));
        printf("X3=A3/A=%+2.4f\n", determinant33(A3) / determinant33(A));
    }
    void methodInverse(float array[3][4])
    {
        printf("\nInverse method:\n");
        float A[3][3], X[3][1];
        changeVercticalRow(A, array, 3);
        inverse(A);
        for (int i = 0; i < 3; i++)
            X[i][0] = array[i][3];
        multiply(A, X);
        printf("\nX1=%f\n", X[0][0]);
        printf("X2=%f\n", X[1][0]);
        printf("X3=%f\n", X[2][0]);
    }

```

func.h

```
void showMatrix(float [][], int, int);  
float determinant33(float [][]);  
void methodKramer(float [][]);  
void methodInverse(float [3][4]);
```

Вигляд виконаної програми:

System of equations(matrix A)

```
0.650 -0.930 0.450 -0.720  
1.150 0.430 -0.720 1.240  
0.560 -0.180 1.030 2.250
```

Kramer method:

```
Determinant of A=1.478696  
Determinant of A1=1.933005  
Determinant of A2=3.878219  
Determinant of A3=2.856954
```

X1=A1/A=+1.3072

X2=A2/A=+2.6227

X3=A3/A=+1.9321

Inverse method:

```
Minor 0 0:  
+0.43 -0.72  
-0.18 +1.03
```

```
Minor 0 1:  
+1.15 -0.72  
+0.56 +1.03
```

```
Minor 0 2:  
+1.15 +0.43  
+0.56 -0.18
```

```
Minor 1 0:  
-0.93 +0.45  
-0.18 +1.03
```

```
Minor 1 1:  
+0.65 +0.45  
+0.56 +1.03
```

```
Minor 1 2:  
+0.65 -0.93
```

```

Minor 2 0:
-0.93 +0.45
+0.43 -0.72

Minor 2 1:
+0.65 +0.45
+1.15 -0.72

Minor 2 2:
+0.65 -0.93
+1.15 +0.43

Inverse matrix:
+0.21 +0.59 +0.32
-1.07 +0.28 +0.67
-0.30 -0.27 +0.91

X1=1.307236
X2=2.622729
X3=1.932077

C:\Users\home\source\repos\ЧМ03 C\Debug\ЧМ03 C.exe (процесс 16284) завершил работу с кодом 0.

```

Висновки:

На даній лабораторній роботі я ознайомився на практиці з методом Крамера та методом оберненої матриці розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язав СЛАР, згідно до індивідуального завдання:

$$1. \begin{cases} 0,65x_1 - 0,93x_2 + 0,45x_3 = -0,72 \\ 1,15x_1 + 0,43x_2 - 0,72x_3 = 1,24 \\ 0,56x_1 - 0,18x_2 + 1,03x_3 = 2,15 \end{cases}$$

Розв'язками стали $x_1 = 1.307236$, $x_2 = 2.622729$, $x_3 = 1.932077$.