Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada

NOCIÓN DE DERIVADA

Definición de Derivada

La derivada de *f* en *x* viene dada por la expresión

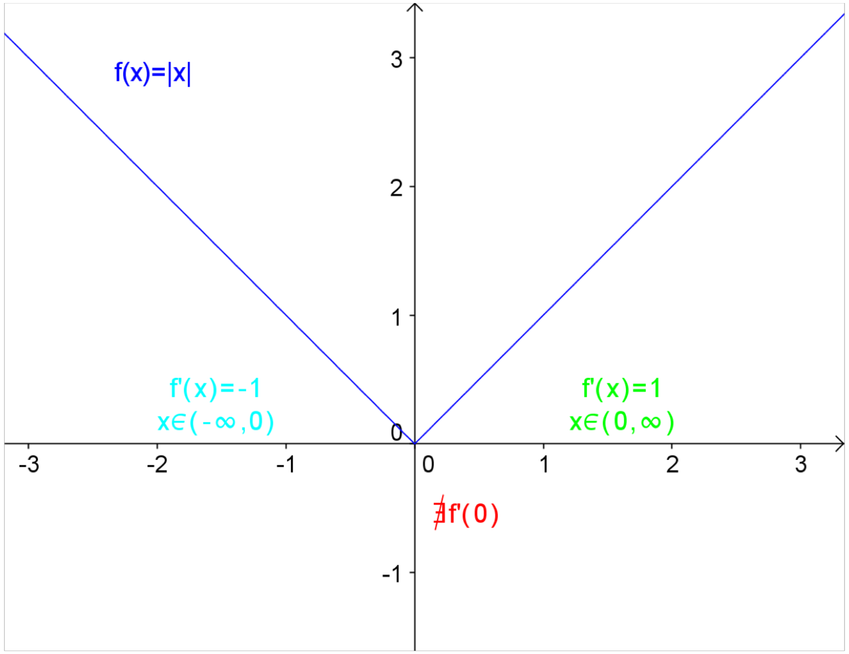
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Para todos los *x* para los que exista este límite *f'* es una función de *x*

Notaciones $\quad f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad y' \quad \frac{d}{dx}[f(x)] \quad D_x[y]$

Derivada y continuidad

Si *f* es derivable en *x*, entonces es continua en *x*. Lo contrario no es cierto



CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Reglas generales de derivación			
Producto por un número	$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$		
Suma	$\frac{d}{dx}[f+g] = f'+g'$	Diferencia	$\frac{d}{dx}[f-g] = f'-g'$
Producto	$\frac{d}{dx}[fg] = f'g+fg'$	Cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
Derivadas de funciones algebraicas			
Regla de la constante	$\frac{d}{dx}[c] = 0$	Regla simple de la potencia	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1},\ \frac{d}{dx}[x] = 1$
Derivadas de funciones trigonométricas			
Seno	$\frac{d}{dx}[sen\ x] = cos\ x$	Coseno	$\frac{d}{dx}[cos\ x] = -sen\ x$
Tangente	$\frac{d}{dx}[tan\ x] = sec^2\ x$	Cotangente	$\frac{d}{dx}[cot\ x] = -csc^2\ x$
Secante	$\frac{d}{dx}[sec\ x] = sec\ x\ tan\ x$	Cosecante	$\frac{d}{dx}[csc\ x] = -csc\ x\ cot\ x$
Regla de la cadena			
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\ u'$	Regla general de la potencia	$\frac{d}{dx}[u^n] = n\ u^{n-1}\ u'$

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 1)

Derivar ambos lados de la ecuación respecto de *x*

$$\frac{d}{dx}[y^3+y^2-5y-x^2]=\frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3]+\frac{d}{dx}[y^2]-\frac{d}{dx}[5y]-\frac{d}{dx}[x^2]=\frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 2)

Agrupar todos los términos en los que aparezca *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}=2x$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo

Obtener la derivada de *y* respecto a *x* de $y^3+y^2-5y-x^2=-4$

Paso 3)

Sacar factor común *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+2y-5)=2x$$

Paso 4)

Despejar la derivada de *y* respecto a *x*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

Ejercicio

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto (3,3).

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Llamamos derivada de segundo orden de una función a la derivada de la función derivada

$$f(x) \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2 f}{dx}(x) = f''(x)$$

La derivada tercera es la derivada de la función derivada segunda

$$f(x) \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx}(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2 f}{dx}(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^3 f}{dx}(x)$$

Y así sucesivamente se da origen a las derivadas de orden superior

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Ejemplo

Obtener todas las derivadas de orden superior de *f(x)=x*^{5}

$$f(x) = x^5$$

$$\frac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$$

$$\frac{d^2(x^5)}{dx^2} = \frac{d(5x^4)}{dx} = 20x^3$$

$$\frac{d^3(x^5)}{dx^3} = \frac{d^2(5x^4)}{d^2x} = \frac{d(20x^3)}{dx} = 60x^2$$

$$\frac{d^4(x^5)}{dx^4} = \frac{d^3(5x^4)}{d^3x} = \frac{d^2(20x^3)}{d^2x} = \frac{d(60x^2)}{dx} = 120x$$

$$\frac{d^5(x^5)}{dx^5} = \frac{d^4(5x^4)}{d^4x} = \frac{d^3(20x^3)}{d^3x} = \frac{d^2(60x^2)}{d^2x} = \frac{d(120x)}{dx} = 120$$

$$\frac{d^6(x^5)}{dx^6} = \frac{d^5(5x^4)}{d^5x} = \frac{d^4(20x^3)}{d^4x} = \frac{d^3(60x^2)}{d^3x} = \frac{d^2(120x)}{d^2x} = \frac{d(120)}{dx} = 0$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Ejercicio

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine $f^{(n)}(x)$.

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento

Máximos y mínimos relativos

Sea *f* una función definida sobre un intervalo abierto (a,b) que contiene a *c*

- Si *f(c)* es un máximo de *f* en *(a,b)* entonces *f(c)* es un máximo relativo
- Si *f(c)* es un mínimo de *f* en *(a,b)* entonces *f(c)* es un mínimo relativo

Puntos críticos

Sea f definida en c. Si $f'(c)=0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un punto crítico de f

Los extremos relativos ocurren sólo en los puntos críticos

Criterio de crecimiento y decrecimiento

Teorema

Sea *f* una función que es continua en el intervalo cerrado *[a,b]* y derivable en el intervalo abierto *(a,b)*, entonces

1. Si $f'(x)>0$ para todo x en (a,b), f es creciente en $[a,b]$
2. Si $f'(x)<0$ para todo x en (a,b), f es decreciente en $[a,b]$
3. Si $f'(x)=0$ para todo x en (a,b), f es constante en $[a,b]$

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea *c* un punto crítico de una función f continua en *(a,b)*, y derivable al menos los $x \neq c$, entonces

1. Si *f'(x)* cambia de negativa a positiva en *c*, *f* tiene un mínimo relativo en *f(c)*

2. Si *f'(x)* cambia de positiva a negativa en *c*, *f* tiene un máximo relativo en *f(c)*

3. Si *f'(x)* es positiva en ambos lados de *c* o negativa en ambos lados de *c*, *f(c)* no es ni mínimo ni máximo relativo

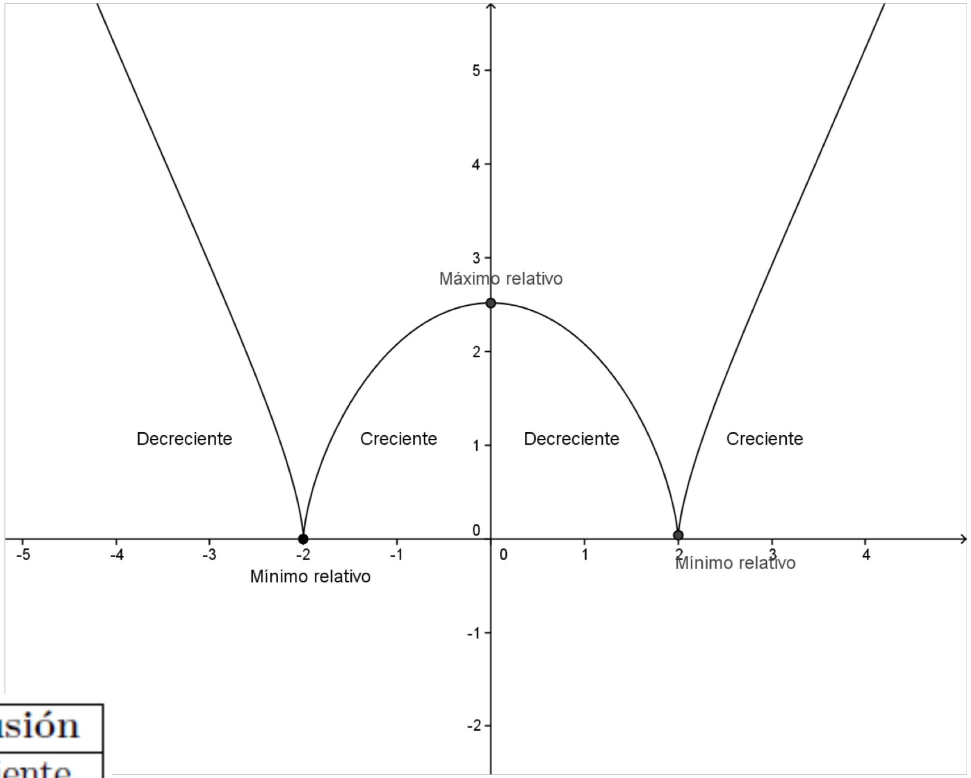
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Ejemplo

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$$



Intervalo	Valor	Signo	Conclusión
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$f'(-3) < 0$	Decreciente
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$f'(-1) > 0$	Creciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$f'(1) < 0$	Decreciente
$2 < x < \infty$	$x = 3$	$f'(3) > 0$	Creciente

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Ejercicio

La cotización de las sesiones de una determinada compañía, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$\mathrm{C} = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$$

a) Determina las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos al primero y último (Sol: día 3 Max. Y día 27 min).

b) Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron (Sol: Suben (1,3) U (27,30) y bajan (3,27).

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento
- Concavidad (Segunda derivada)

CONCAVIDAD

Sea *f* derivable en un intervalo *(a,b)*

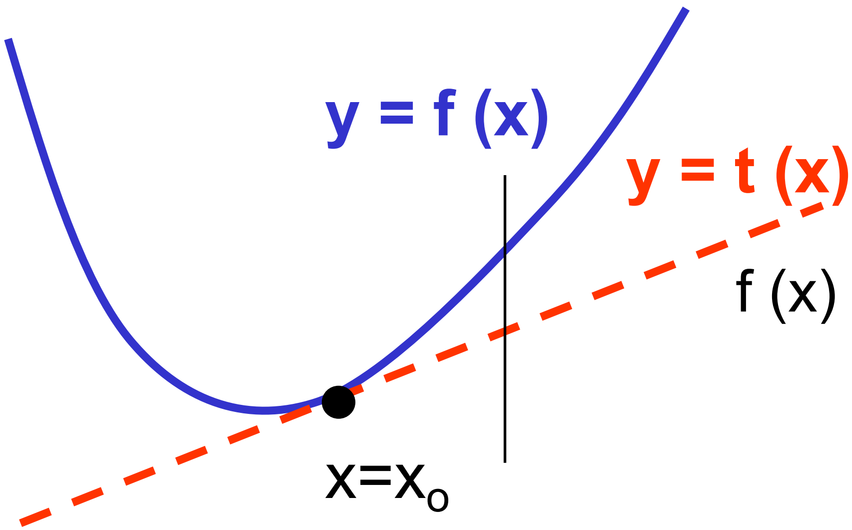
Su gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo si *f'* es creciente en *(a,b)* y cóncava hacia abajo si *f'* es decreciente en ese intervalo

Es decir

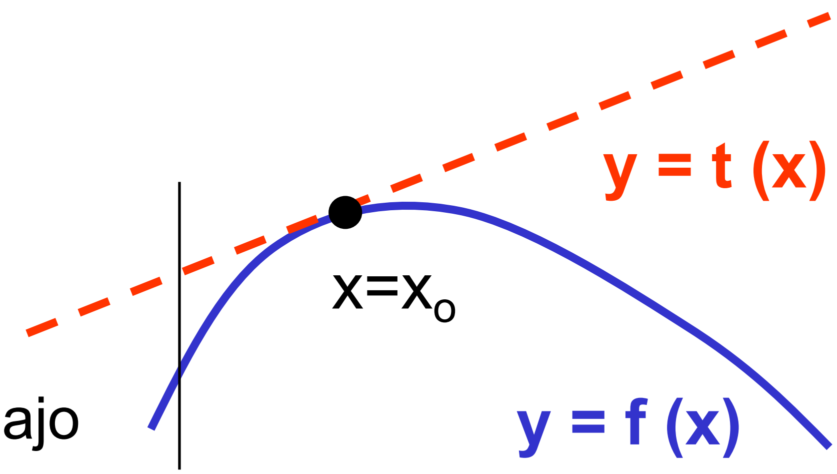
Cóncava hacia arriba (convexa) si la gráfica está por encima de todas sus tangentes

Cóncava hacia abajo (sólo cóncava) si la gráfica está por debajo de todas sus tangentes

CONCAVIDAD



f (x) > t (x) → Cóncava hacia arriba



f (x) < t (x) → Cóncava hacia abajo

Criterio de concavidad

Teorema

Sea *f* una función cuya segunda derivada existe en el intervalo abierto *(a,b)*, entonces

1. Si $f''(x)>0$ para todo x en (a,b), f es cóncava hacia arriba en (a,b)

2. Si $f''(x)<0$ para todo x en (a,b), f es cóncava hacia abajo en (a,b)

Punto de inflexión

Sea *f* una función que es continua en un intervalo *(a,b)* y sea *c* un punto en ese intervalo

Si la gráfica de *f* tiene una recta tangente en este punto *(c, f(c))*, entonces este punto es un punto de inflexión de la gráfica de *f* si la concavidad de *f* cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en ese punto

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea f una función tal que $f'(c)=0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo (a,b) que contiene a c, entonces

1. Si $f''(c)>0$, $f(c)$ es un mínimo relativo

2. Si $f''(c)<0$, $f(c)$ es un máximo relativo

3. Si $f''(c)=0$, $f(c)$ puede o no ser un valor extremo. Se dice entonces que el criterio de la segunda derivada falla y sólo es aplicable el de la primera derivada

Ejercicio

Sea $f(x) = -(x-2)^3 - 1$, estudiar su curvatura

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento
- Concavidad (Segunda derivada)
- Teoremas de Rolle y Valor medio

TEOREMA DE ROLLE, VALOR MEDIO Y CAUCHY

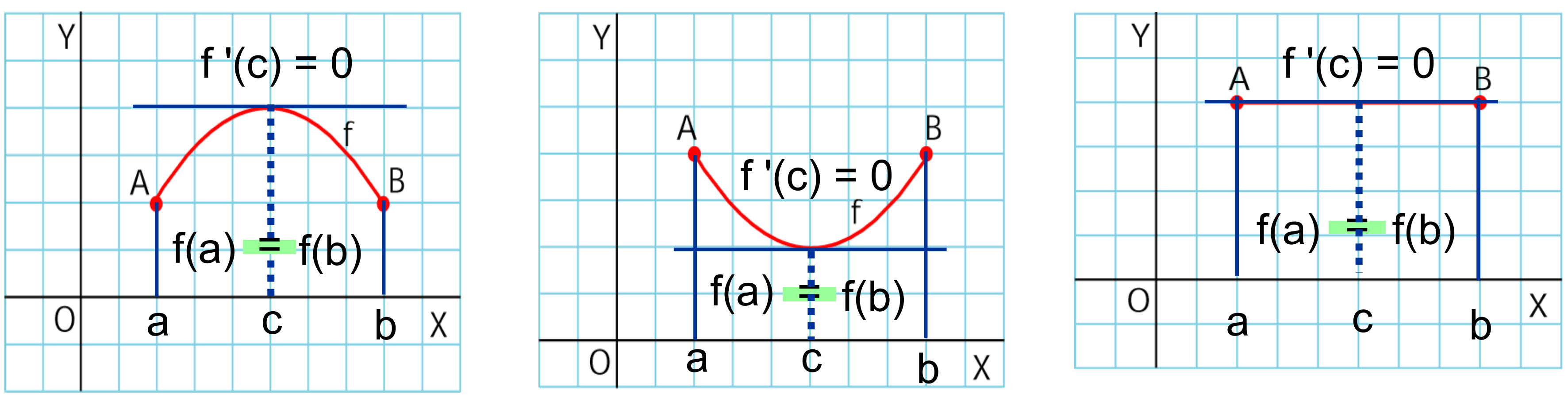
Teorema de Rolle. Interpretación geométrica

Si una función y = f(x) cumple que

- Es continua en el intervalo cerrado [a, b]
- Es derivable en su interior (a, b)
- f(a) = f(b)

Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Geométricamente este teorema expresa que una función que cumpla las hipótesis anteriores va a tener, al menos, un punto (c, f(c)) en el que la tangente es horizontal



TEOREMA DE ROLLE, VALOR MEDIO Y CAUCHY

EJEMPLO 1

Estudiar si se verifica el **teorema de Rolle** en el intervalo *[0, 3]* de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & si\ 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

En primer lugar comprobamos que la función es continua en x = 1

$$f(1) = 2 \qquad \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} (-x+3) = 2$$

En segundo lugar comprobamos si la función es derivable en x = 1

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < x \leq 1 \\ -1 & si\ 1 < x < 3 \end{cases} \qquad f'(1^-) \neq f'(3^+)$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en el intervalo *(0, 3)* y por tanto no se cumple el teorema de Rolle

TEOREMA DE ROLLE, VALOR MEDIO Y CAUCHY

Teorema del valor medio o de Lagrange

Si una función y = f(x) cumple que

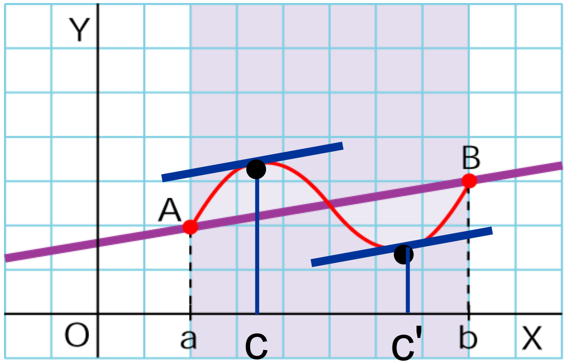
- Es continua *[a, b]*
- Es derivable *(a, b)*

Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$ Es decir $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- **Geométricamente**: si una función que cumple las hipótesis anteriores va a ha tener al menos un punto *(c, f(c))* en el que **la tangente es paralela a la secante que pasa por los puntos *(a, f(a))* y *(b, f(b))***

- **Analíticamente**: si una función cumple las hipótesis anteriores, en algún punto $c \in (a,b)$ la razón incremental o tasa de variación media *(f(b) – f(a)) / (b – a)*, es igual a la derivada en dicho punto



Pendiente de AB: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$f'(c) = f'(c') = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c y *c*' son los puntos que verifican el teorema

TEOREMA DE ROLLE, VALOR MEDIO Y CAUCHY

EJEMPLO 1

¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = x^3$ en $[-1, 2]$?

$f(x)$ es continua en $[-1, 2]$ y derivable en $(-1, 2)$ por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \qquad f'(c) = 3 \qquad 3c^2 = 3$$

$$c = 1 \in (-1, 2) \qquad c = -1 \notin (-1, 2)$$

Y la solución válida es $c=1$

Ejercicio

¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = \ln(5 - x^2)$ en el intervalo [-2, 2]?

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento
- Concavidad (Segunda derivada)
- Teoremas de Rolle y Valor medio
- Regla de L'Hôpital

REGLA DE L'HÔPITAL

Sean *f(x)* y *g(x)≠0* derivables en *u* con *g'(u) ≠0,* para *u* igual a *a*, *0*, +∞ ó -∞, *si f(u)=g(u)=0* entonces

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \lim_{x \to u} \frac{\dfrac{f(x)-f(u)}{x-u}}{\dfrac{g(x)-g(u)}{x-u}} = \frac{\lim\limits_{x \to u} \dfrac{f(x)-f(u)}{x-u}}{\lim\limits_{x \to u} \dfrac{g(x)-g(u)}{x-u}}$$

Si *u* ϵ *(-∞,+∞)*: $\dfrac{f'(u)}{g'(u)}$

Si *u* = ±∞: $\lim\limits_{x \to u} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

REGLA DE L'HÔPITAL

Indeterminaciones *0/0*

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Indeterminaciones ∞/∞

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to u}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{1}=\frac{1}{\infty}\cdot\frac{\infty}{1}=0\cdot\frac{1}{0}=\frac{0}{0}$$

REGLA DE L'HÔPITAL

Indeterminaciones *0·∞ ó ∞·0*

$$\lim_{x\to u} f(x)g(x) = \lim_{x\to u} \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to u} \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

Ya que

$$\lim_{x\to u} f(x)g(x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to u} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to u} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to u} f(x)g(x) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to u} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to u} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{0}{0}$$

REGLA DE L'HÔPITAL

Indeterminaciones 1^{∞}, ∞^{0} ó 0^{0}

$$A = \lim_{x \to u} \left[f(x)^{g(x)} \right]$$

$$\ln A = \ln \left(\lim_{x \to u} \left[f(x)^{g(x)} \right] \right)$$

$$\ln A = \lim_{x \to u} \left(\ln \left[f(x)^{g(x)} \right] \right) = \lim_{x \to u} \left(g(x) \ln \left[f(x) \right] \right) = 0 \cdot \infty = M$$

$$\ln A = M \qquad\qquad A = e^{M}$$

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento
- Concavidad (Segunda derivada)
- Teoremas de Rolle y Valor medio
- Regla de L'Hôpital
- Polinomios de Taylor

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Polinomios de Taylor

A veces, para estudiar el comportamiento de una función en las proximidades de un punto a, se sustituye la función dada por otra mas sencilla.

Si la función objeto de estudio tiene las propiedades adecuadas, se la podrá aproximar, para un x cercano a a, mediante polinomios expresados como potencias de x-a, que se llaman polinomios de Taylor, de forma que al aumentar el grado del polinomio mejora la aproximación.

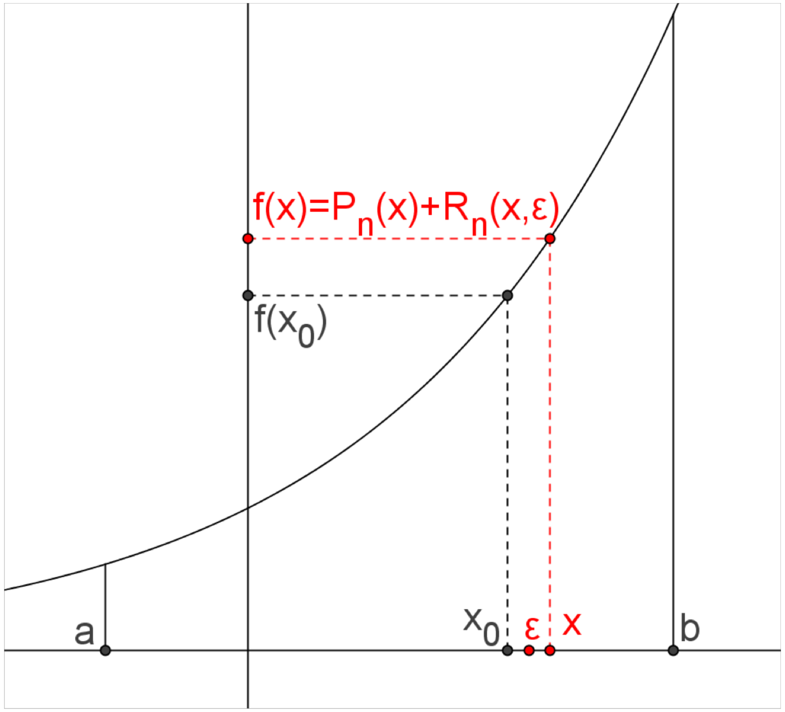
Polinomios de Taylor

Sea f y sus $f^{(n+1)}$ derivadas continuas en $[a,b]$. Si $x_0 \in [a,b]$ entonces para todo $x \in [a,b]$ existe un ε entre x_0 y x tal que

$$\boldsymbol{f(x)=P_n(x)+R_n(x,\varepsilon)}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$R_n(x,\varepsilon) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$



Polinomios de Taylor

El polinomio ***$P_n(x)$*** se llama **polinomio de Taylor** de orden *n*

$$P_n(x) = \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

A ***$R_n(x,\varepsilon)$*** se le llama **resto de Taylor** o **error de truncamiento** y tiende a *0* para valores de *x* próximos a x_0 conforme *n* tiende a infinito

Polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor son entonces aproximaciones al valor de la función *f* en un punto *x* cercano a otro x_0 y se crean con valores de las sucesivas derivadas de *f* en x_0

$$f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Delta f(x) = R_1(x, \varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \qquad \Delta f(x) = R_2(x, \varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \qquad \Delta f(x) = R_3(x, \varepsilon)$$

$$f(x) \approx P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \Delta f(x) = R_n(x, \varepsilon)$$

Polinomios de Taylor

n es el grado u orden del polinomio y cuanto mayor es *n* mejor es la aproximación, disminuyendo el error *Δf(x)*

$$R_1(x,\varepsilon) \geq R_2(x,\varepsilon) \geq R_3(x,\varepsilon) \geq \ldots \geq R_n(x,\varepsilon)$$

$$\left|f(x)-P_1(x)\right| \geq \left|f(x)-P_2(x)\right| \geq \ldots \geq \left|f(x)-P_n(x)\right|$$

El valor de la función en *x* coincide con la serie infinita llamada **Serie de Taylor**:

$$f(x) = \sum_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Polinomios de Taylor

Si x_0=0 entonces $P_n(x)$ se llama **polinomio de Maclaurin**

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Y da lugar a la **Serie de Maclaurin** $\quad f(x) = \sum_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f^{I}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{III}(x) = \operatorname{sen}(x)$$
$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f^{I}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$

$$f^{III}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

$$P_2(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2$$

$$P_4(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_2(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$P_4(x) = f(0) + f^{I}(0)x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{III}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f^{I}(x) = -\mathrm{sen}(x)$$

$$f^{II}(x) = -\cos(x)$$

$$f^{III}(x) = \mathrm{sen}(x)$$

$$f^{IV}(x) = \cos(x)$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Ejemplo

Aproxima *cos(1)* con polinomios de Maclaurin de orden *2* y *4*

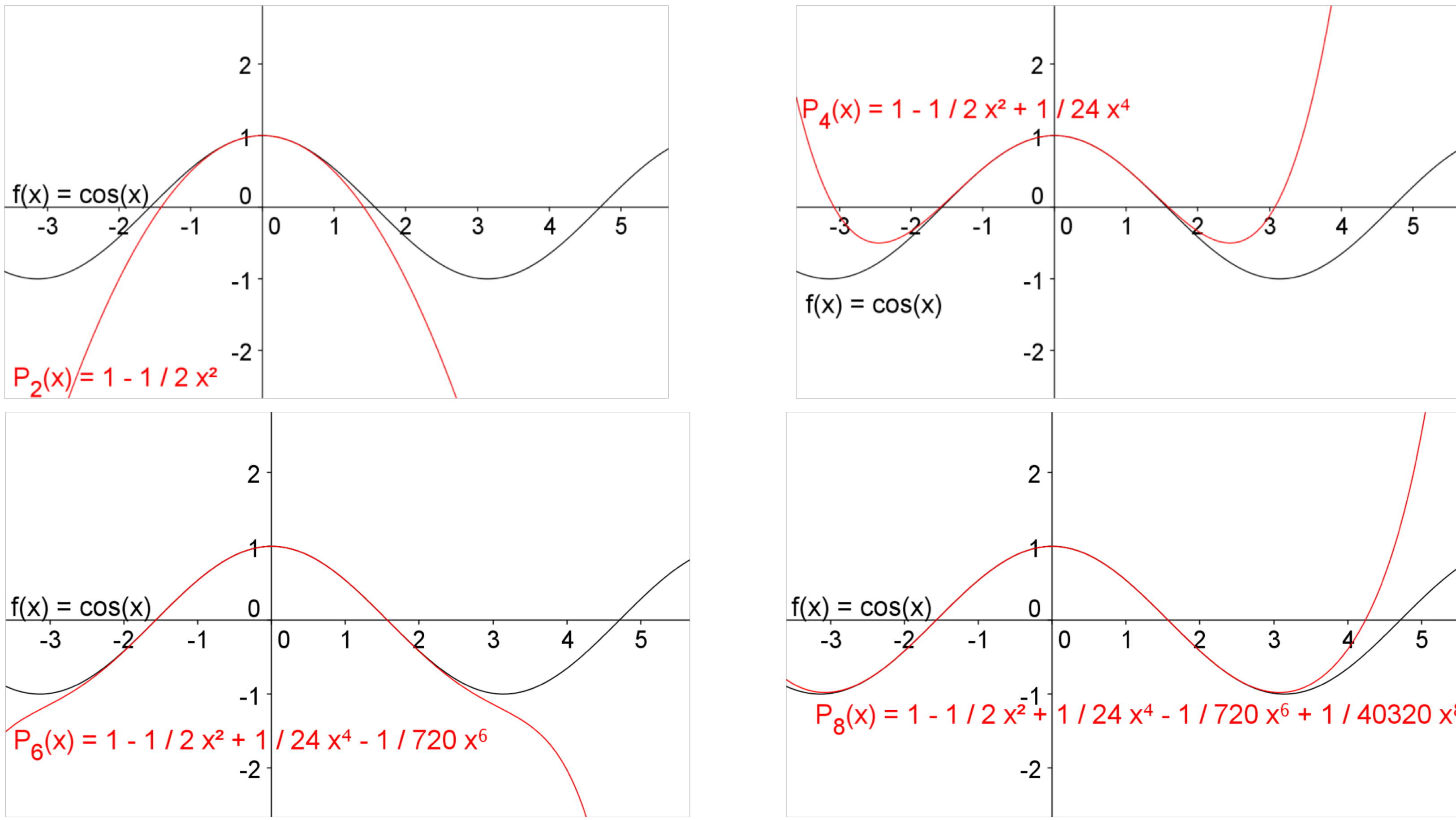
$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos(1) \approx P_2(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\cos(1) \approx P_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{24 - 12 + 1}{24} = \frac{13}{24}$$

Ejemplo

Polinomios de Maclaurin de orden *2*, *4*, *6 y 8* para *cos(x)*:



Ejercicio

Polinomios de Maclaurin de orden *n* para la función e^x

Ejercicio

Utilizando l desarrollo de Maclaurin del ejercicio anterior calcular el valor de $e^{\frac{1}{3}}$ con una aproximación menor que 10^{-3}

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento
- Concavidad (Segunda derivada)
- Teoremas de Rolle y Valor medio
- Regla de L'Hôpital
- Polinomios de Taylor
- Optimización

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

La resolución y cálculo del problema implica la determinación de los valores Máximo y Mínimo.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

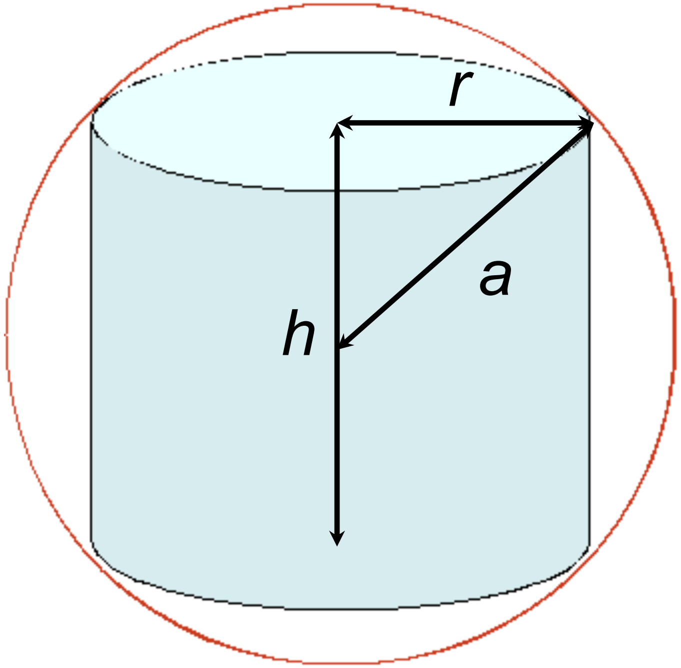
Estrategia para resolución

1. Identificar todas las cantidades dadas (datos) y las que se van a determinar (variables). Elaborar dibujo.
2. Escribir la ecuación a optimizar.
3. Reducir la ecuación en una variable independiente.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación (intervalos de valores que tienen sentido).
5. Determinar el valor máximo o mínimo (aplicar las técnicas de cálculo vistas).
6. Interpretar los resultados y rechazar los absurdos.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ejemplo

Determinar la altura *h* y radio *r* del cilindro con mayor volumen posible circunscrito en una esfera de radio *a*:

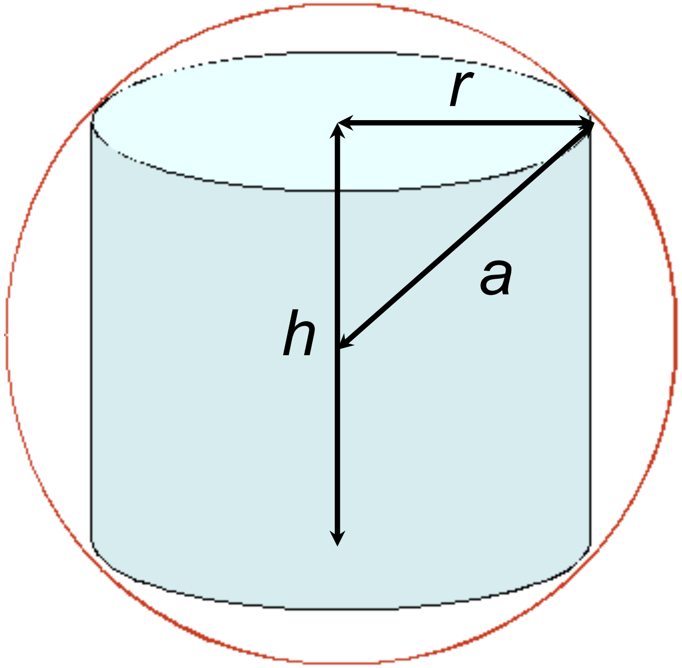


PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ejemplo

Relación entre la altura *h*, radio *r* de la base del cilindro y el radio *a* de la esfera al estar circunscrito el cilindro a la esfera

$$r^2 = a^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$



Volumen del cilindro

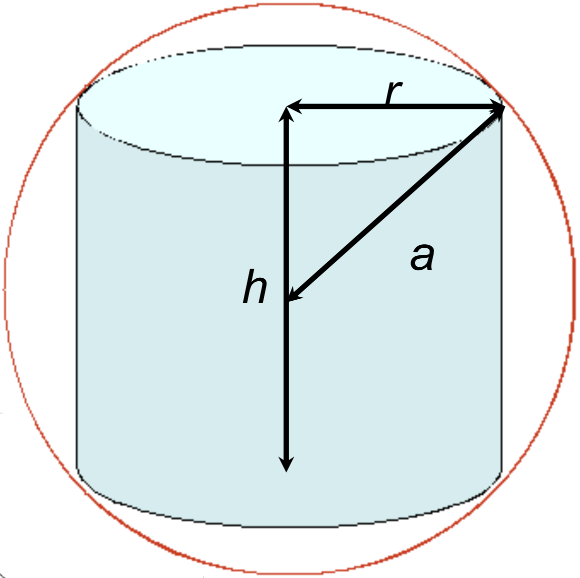
$$V = \pi \cdot r^2 h$$

$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Ejemplo

La función *V(h)* tiene sentido solo de *0* a *2a*

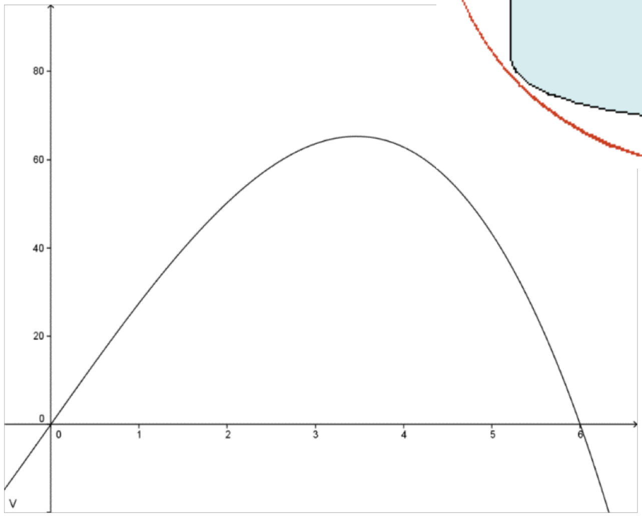
$$V(h) = \pi \cdot \left(a^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \qquad h \in [0, 2a]$$



Ejemplo con *a=3*

$$V(h) = \pi \cdot \left(9 - \frac{h^2}{4} \right) h$$

$$h \in [0,6]$$



Ejemplo

Localización de los puntos críticos

$$V(h)=\pi\cdot\left(a^2-\frac{h^2}{4}\right)h \qquad h\in[0,2a]$$

$$V'(h)=\pi\left(a^2-\frac{3}{4}h^2\right) \qquad \left(a^2-\frac{3}{4}h^2\right)=0 \Rightarrow h=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

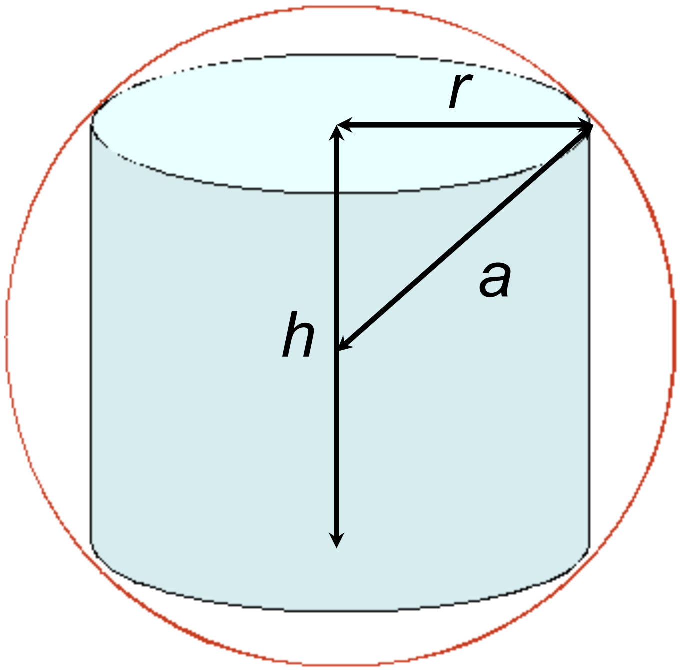
$$h=0 \qquad h=\frac{2a}{\sqrt{3}} \qquad h=2a$$

$$V(h)=0 \qquad V(h)=\frac{4}{3\sqrt{3}}a\pi \qquad V(h)=0$$

Ejemplo

Sustituimos el *h* que proporciona el *V(h)* máximo para obtener *r*

$$r^2 = a^2 - \frac{h^2}{4} = a^2 - \frac{4a^2}{4\cdot 3} = \frac{3a^2 - a^2}{3}$$



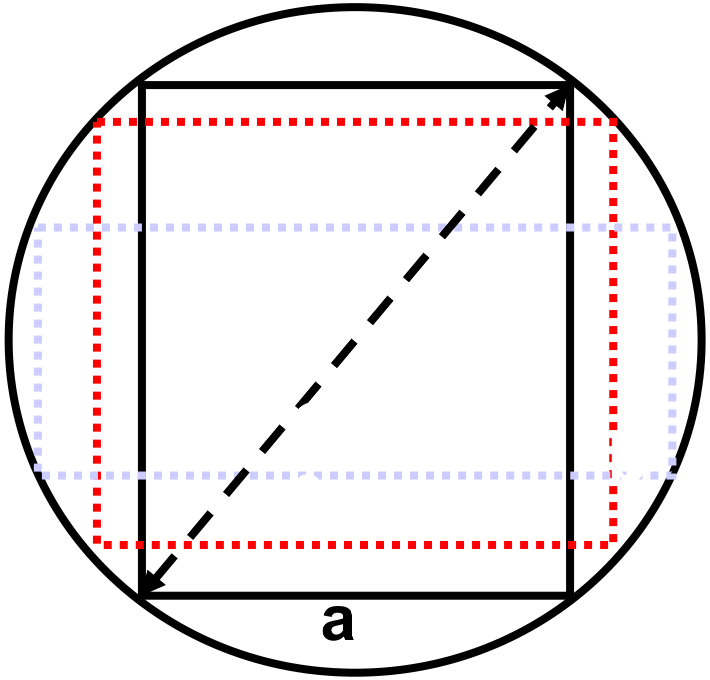
El radio es $r = \sqrt{\frac{2}{3}}a$

Su altura es $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Y su volumen $V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$

Ejercicio

Hallar las dimensiones que debe tener un rectángulo inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio para que el área del mismo sea la mayor posible.



Ejercicios del tema

1) Un fondo de inversión genera una rentabilidad R(x) que depende de la cantidad de dinero invertida (x) según la función $R(x)=-0.002x^2+0.8x-5$. Si tenemos 500€ calcula
   a) Cuando aumenta y cuando disminuye la rentabilidad (Sol: (0,200) aumenta y (200,500) disminuye).
   b) Cuanto dinero debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad y cual será el valor de dicha rentabilidad. (Sol: 200€ con rentabilidad 75€)

2) Calcula el desarrollo de Maclaurin de la función f(x)=sen(x)

3) Determine los extremos locales y globales de la gráfica de $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$.

4) Halle los valores máximos y mínimos locales de la función $g(x) = x + 2 \text{ sen } x \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

5) Determina la derivada segunda de la función $x^4 + y^4 = 16$

6) Calcula los límites

1.– $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} =$ **2.–** $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ r>0}} \left[\dfrac{r}{4x} - \dfrac{r}{2x(e^{rx}+1)}\right] =$

7) Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20x10cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado L debe medir entre 2 y 3 cm (Sol: 2.11cm)

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES (I)

8) Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones de 10cm de ancho para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de 128€ por metro cuadrado y el de los listones es de 87€ por metro lineal. Calcular:

1. Las dimensiones de una puerta de $2m^2$ de superficie de hoja para que el coste sea mínimo. ¿Cuál será su precio? (Sol: 2 x1, precio=621.4)
2. Si la puerta es de 2.5 metros de ancho y 0.8 metros de alto, ¿cuál es su precio? (2.5 con precio 630.1)