Informatica Teorica
Appunti

Giovanni "Qua' Qua' dancer" Palma
e
Alex "Morbidelli WhatsApp" Basta

Contents

Chapter 1

Introduzione a problemi e indecidibilita

Studieremo due arie:

- Calcolabilita: ci chiediamo se per quel problema esistera mai un algoritmo in grado di risolverlo (decidibilita' del problema). Non li incontriamo spesso irl dato che siamo piu' spinti a fare robe che sappiamo gestire. Bisogna studiare la struttura del problema per decidere se esiste o meno un algoritmo che lo risolve.
- Complessita: vogliamo determinare se un problema decidibile e' "facile" o "difficile", ovvero qual'e' la sua complessita' (diverso dalla complessita' degli algoritmi)

Quando diciamo "facile" intendiamo risolvibile in tempo polinomiale.

Definition 1.0.1: Problema

Relazione fra stringhe

Example 1.0.1 (Somma)

Dati x e y calcola $x + y \to z$. E' una relazione binaria fra stringhe:

- $< (2, 3), 5 >$
- $< (4, 3), 7 >$ $\vdots$

Dove la prima stringa e' l'input e la seconda e' l'output. Dato che elencare tutte le tuple e' impossibile, le descriviamo a parole ma stando attenti ad essere precisi. Ci servono tre elementi:

- What is input?
- What is output?
- Che relazione c'e' fra out e in?

1.1 Halting Problem

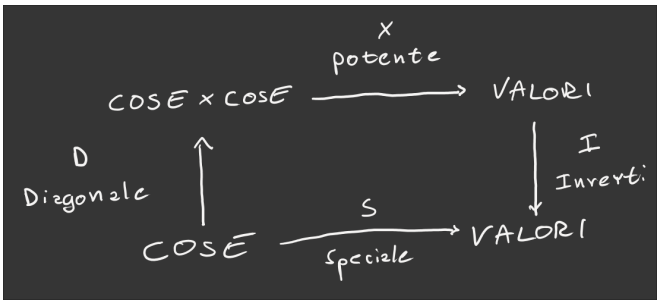
Definiamo prima per bene il problema:

- Input: Una stringa P che rapresenta il codice sorgente di un programma
- Output: Un booleano
- Relazione: Se P termina ritorna T, altrimenti F

Sembra un problema semplice, ma vedremo che in realta' e' indecidibile. Per confermare cio' dobbiamo formulare una dimostrazione formale, usando quel che viene chiamato "metodo diagonale".
Il prof non va cosi' in dettaglio per il metodo usato nella dimostrazione (dato che e' solo un esempio introduttivo), ma secondo me e' interessante e fornisce un bell'esempio per l'utilita' della Teoria delle Categorie.

1.1.1 Il Metodo Diagonale

Il *metodo diagonale* e' uno schema utile per la dimostrazione di certi teoremi. E' stato ideato per la prima volta da Cantor per dimostrare, per esempio, che $\mathbb{R}$ non e' numerabile, dove viene usata la *diagonale* di una tabella per dimostrare un assurdo. Questo metodo e' stato successivamente usato per dimostrare altre proposizioni molto importanti, come il teorema di Cantor (quello sugli insiemi potenza), il paradosso di Russel e i teoremi dell'incompletezza di Godel.
La struttura della dimostrazione generale e' la seguente:



Lo schema e' molto astratto, e' formato solo da *punti* (i vertici) e *frecce* che possono essere composte per formare altre frecce. I primi possono essere insiemi e le frecce funzioni, come vedremo. Le quattro frecce hanno delle funzioni particolari:

- La funzione "potente" X: nella Teoria delle Categorie viene definita *morfismo punto-suriettivo*(?). E' la freccia che assumiamo esista per poi dimostrare l'assurdo.
- La funzione diagonale D: dato un elemento x ritorna la coppia (x, x). Raccoglie l'essenza del metodo diagonale in quanto e' la componente che causa l'*auto-referenzialita'* che sta al cuore della dimostrazione.
- La funzione che inverte I: dato l'output di X lo *inverte* in modo da causare l'assurdita'.
- La funzione "speciale" S: composizione delle tre frecce sopra, insieme all'assunzione iniziale permette di dimostrare l'assurdo.

Note:

Lowkey non l'ho spiegato benissimo dato che non ho studiato abbastanza le sue applicazioni e so solo le basi della Teoria delle Categorie quindi non e' rigoroso per niente. Forse nel futuro ci ritornero', boh.

Finita la costruzione, i prossimi passi sono:

1. Codifica S con una *COSA*, k.
2. Cosa succede se passo k a S?

Note:

In verita' non sono sicurissimo se questi passi fanno parte del metodo generale o solo dell'halting

1.1.2 Dimostrazione Halting Problem

Andiamo ora a vedere come puo' essere dimostrato che l'halting problem e' indecidibile.
Per prima cosa dobbiamo definire la controparte concreta delle frecce e punti dello schema:

- I punti *COSE* sono insiemi di tutti i programmi o dati possibili. Sfruttando la **Numerazione di Godel** possiamo attribuire a ognuno di questi un numero naturale. Quindi *COSE* diventa $\mathbb{N}$.
- I punti *VALORI* sono tutti i possibili output di un programma, quindi dei dati. Quindi *VALORI* diventa $\mathbb{N}$.

- La freccia X diventa il programma $HALT$, ovvero la funzione totale che prende un *Programma* P e un *Dato* D (entrambe $\in \mathbb{N}$) tale che:

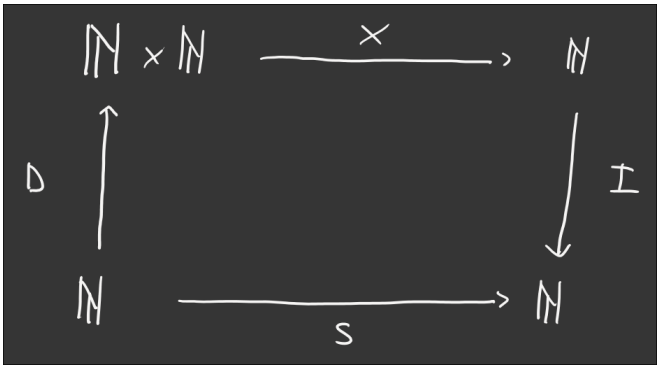
$$X(P, D) = \begin{cases} \text{"termina"} & P \text{ termina su } D \\ \text{"diverge"} & P \text{ non termina su } D \end{cases}$$

  Per ora assumiamo l'esistenza di questo programma.

- La freccia D e' il programma che implementa la funzione totale $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$D(x) = (x, x)$$

  che e' facile da costruire e quindi esiste.



Non e' chiaro come dobbiamo definire I in modo da dimostrare l'assurdo, quindi lavoriamo top-down.
Dato che una composizione di programmi e' un programma, anche S e' sicuramente un programma, quindi una funzione parziale che puo' terminare o divergere dato un input.
Essendo S un programma, e' possibile rappresentarlo con un numero $k \in \mathbb{N}$. Analizziamo $S(k)$:

- $S(k)$ termina: in questo caso $X(k, k) =$ "termina", quindi $S(k) = I(\text{"termina"})$. Per rimanere coerente I deve terminare sull'input "termina".
- $S(k)$ non termina: in questo caso $X(k, k) =$ "diverge", quindi $S(k) = I(\text{"}diverge\text{"})$. Per rimanere coerente I deve divergere sull'input "diverge".

Ma noi non vogliamo la coerenza, vogliamo costruire S in modo da dimostrare l'assurdo. Quindi definiamo I come la funzione parziale che:

- Diverge sull'input "termina"
- Termina sull'input "diverge"

Abbiamo quindi che:

- Se $X(k, k) =$ "termina", allora $S(k)$ diverge
- Se $X(k, k) =$ "$diverge$", allora $S(k)$ termina

Queste due implicazioni sono in opposizione alla definizione del programma $HALT$, che quindi non puo' esistere.

Chapter 2

Macchine di Turing e Linguaggi

Chapter 3

Riduzioni

Chapter 4

Teorema di Rice

Chapter 5

Complessita Strutturale

Chapter 6

Complessita Spaziale

Chapter 7

Oracoli e Classi Funzionali