

# Ottimizzazione Combinatoria

## Appunti

Giovanni "Qua' Qua' dancer" Palma e Alex Basta

# Contents

# Chapter 1

## Introduzione

Prova scritta e orale. Si studiano metodi algoritmici per ottimizzare problemi di flusso su reti e di programmazione lineare. In poche parole, impariamo come prendere decisioni. Appunti presi in base alle lezioni del prof Ugo Dal Lago, si consiglia una lettura con accento veneto

Questa introduzione è totalmente inutile, serve solo ad occupare byte. Ringraziate pure il bastianini per questo ☹

# Chapter 2

## Problemi e Modelli

### 2.1 Problemi di ottimizzazione

#### Definition 2.1.1: Ricerca operativa

La **ricerca operativa** è un ramo della matematica applicata che si occupa dello studio, della modellizzazione e della risoluzione dei cosiddetti *problemi decisionali* complessi mediante strumenti matematici, algoritmici e computazionali, con l'obiettivo di ottimizzare processi e risorse

Per evitare qualsivoglia fraintendimento fornirò anche la definizione di **ottimizzazione Combinatoria**

#### Definition 2.1.2: Ottimizzazione Combinatoria

Si definisce **Ottimizzazione Combinatoria** una branca della Ricerca Operativa che nel modellare matematicamente e risolvere problemi complessi di natura discreta unisce tecniche di calcolo combinatorio alla teoria degli algoritmi e ai risultati teorici e metodologici della programmazione lineare

Pertanto ricerca operativa e ottimizzazione combinatoria sono due cose diverse, MA cito testualmente

”Per tutti i nostri scopi ricerca operativa e ottimizzazione, sono sinonimi  
tuttavia non vedremo solo alcune tecniche di ottimizzazione combinatoria, ma anche altre tecniche che stanno nella ricerca operativa ma che trattano di valori non discreti”

– Ugo

Adesso, sotterrato questo problema di carattere unicamente terminologico con cui io non posso fare a meno di strizzarmi il cervello perché c'ho l'autismo, possiamo tornare a parlare di ricerca operativa/ottimizzazione combinatoria (tanto so' sinonimi per noi)

I problemi di cui si occupa la ricerca operativa, quindi, riguardano situazioni in cui occorra massimizzare i ricavi o minimizzare i costi, in presenza di risorse limitate. Detto in termini più matematici, data una funzione **vincolata** l'obiettivo è trovare una soluzione ottimale che massimizzi o minimizzi tale funzione.

È pertanto vero, quindi, che questa disciplina ha forte contenuto economico

La ricerca operativa si inserisce all'interno del processo decisionale, il quale può essere suddiviso in diverse fasi

- **Individuazione problema**
- **Raccolta dati**
- **Costruzione modello**, ovvero la Traduzione del problema in un modello matematico che descriva il sistema e i vincoli in modo formale
- **Determinazione di piu' soluzioni**: applicazione di algoritmi e tecniche di ottimizzazione per individuare la soluzione migliore
- **Analisi dei risultati**

La ricerca operativa, quindi, si occupa delle fasi 3 e 4 del processo, dato che sono le fasi che richiedono l'impiego di modelli matematici, algoritmi di ottimizzazione e strumenti computazionali. Adesso andiamo a definire per benino che cosa intendiamo per "modello"

**Definition 2.1.3: modello**

un **modello** è una descrizione astratta e scritta in linguaggio matematico, della parte di realtà utile al processo decisionale

I modelli ci permettono di inquadrare i problemi in una determinata "cornice" che ci permette di determinare quale tipo di algoritmo risolutivo usare.

Esistono tre tipi di modelli:

- **Teoria dei giochi:** ricerca di un equilibrio fra le componenti coinvolte in un'interazione reciproca, spesso con obbiettivi contrastanti. (non ce ne occupiamo)
- **Simulazione:** il problema viene studiato simulando la situazione senza studiarne la natura in modo analitico tramite generazione di istanze casuali. (anche questi modelli non ci interessano)
- **Analitici:** dal problema si costruisce un modello matematico rigoroso (senza perdere informazione sul problema reale) e risolto mediante tecniche analitiche, senza ricorrere a simulazioni. La natura stessa dello spazio matematico in cui è inserito il problema è in grado di garantire la soluzione ottima. Questo tipo approccio è particolarmente vantaggioso in quanto assicura l'esattezza della soluzione supponendo che il modello sia formulato correttamente.

È tuttavia richiesto un discreto livello di creatività

Definiamo, adesso, i problemi che andiamo a trattare

**Definition 2.1.4: Problema**

Definiamo **problema** una domanda, espressa in termini generali, la cui risposta dipende da *parametri* e *variabili*, soprattutto nei problemi analitici

Un problema  $\mathcal{P}$  è descritto tramite:

- I suoi parametri e variabili
- Le caratteristiche che una soluzione deve avere

Quando fissiamo un'istanza di un problema, vengono fissati i parametri ma non le variabili, che sono le incognite che devono essere definite. Distinguiamo un problema dalla sua istanza per generalizzarlo. Si presti attenzione alla differenza tra parametri e variabili che molti si confondono

**Example 2.1.1** (Problema con parametri e variabili)

Sia  $\mathcal{P}$  il seguente problema

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dove  $a, b$  e  $c$  sono i suoi parametri e  $x$  rappresenta le variabili, una possibile istanza di tale problema è:

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

Un modo comune per descrivere un problema è dare l'insieme di soluzioni ammissibili  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}} \subseteq G$ , dove  $G$  è un sovrainsieme generico noto, di solito contenente la collezione di tutte le possibili configurazioni o decisioni che si possono prendere, dando dei vincoli che un generico  $g \in G$  deve soddisfare per far parte di  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ , avremo così che  $G - \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  è l'insieme delle soluzioni non ammissibili

**Example 2.1.2**

Sia l'istanza di  $\mathcal{P}$  definita precedentemente

$$5x^s - 6x + 1 = 0$$

si ha che

$$\begin{aligned} G &= \mathbb{R} \\ F_P &= \{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 6x + 1 = 0\} \end{aligned}$$

### 2.1.1 Problemi di ottimizzazione

Iniziamo con una definizione preliminare.

#### Definition 2.1.5: Problema di ottimizzazione

In matematica e in informatica, un problema di ottimizzazione è il problema di trovare la migliore soluzione fra tutte le soluzioni fattibili.

Un problema di ottimizzazione  $\mathcal{P}$  viene descritto:

- Dando l'insieme  $F_P$  delle soluzioni ammissibili
- Specificando una funzione obiettivo  $c_P : F_P \rightarrow \mathbb{R}$  che assegna ad ogni  $g \in F_P$  un valore reale  $c_P(g)$ , che rappresenta il costo o il beneficio.

Un problema (di ottimizzazione) di massimo  $\mathcal{P}$  consiste nel determinare il valore

$$Z_P = \max\{c_P(g) \mid g \in F_P\},$$

mentre un problema (di ottimizzazione) di minimo  $\mathcal{P}$  consiste nel determinare il valore

$$Z_P = \min\{c_P(g) \mid g \in F_P\}.$$

Ci si può trastullare con la definizione, infatti ad ogni problema di massimo  $\mathcal{P}$  corrisponde un problema di minimo  $\mathcal{P}'$  tale che  $c_{P'}(g) = -c_P(g)$ , ovvero:

$$Z_P = -\min\{c_{P'}(g) \mid g \in F_P = F_{P'}\}.$$

#### Definition 2.1.6: Valore ottimo e soluzione ottima

Dato un problema di ottimizzazione  $\mathcal{P}$ , il valore  $Z_P$  definito in precedenza è detto valore ottimo, mentre il  $g^* \in F_P$  tale che  $Z_P = c_P(g^*)$  è detto soluzione ottima.

Si può quindi constatare che la differenza reale tra i due è che il valore ottimo è inserito nel codominio della funzione obiettivo (cioè il mero valore reale “ottimizzato”), mentre la soluzione ottima appartiene al dominio (ovvero è l'elemento in  $F_P$  che ottimizza la funzione).

#### Example 2.1.3 (Esempio di problema di ottimizzazione)

Dati

$$G = \mathbb{R}, \quad F_P = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 6x + 1 = 0\}, \quad c_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } c_P(g) = g^2,$$

e si ponga

$$Z_P = \max\{x^2 \mid x \in F_P\}.$$

Innanzitutto, calcolo l'insieme delle soluzioni ammissibili (hold my soluzione parabolica):

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10}.$$

Quindi, le soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{6+4}{10} = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}.$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni ammissibili è:

$$F_P = \{1, \frac{1}{5}\}.$$

Si procede poi nel calcolare la funzione obiettivo per ogni elemento:

$$c_{\mathcal{P}}(1) = 1^2 = 1, \quad c_{\mathcal{P}}\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

Il massimo tra questi valori è:

$$Z_{\mathcal{P}} = \max\{1, \frac{1}{25}\} = 1.$$

fin casi dei problemi di decisione

Si hanno quattro casi principali in cui sono inseriti i problemi di decisione:

- **Problema vuoto:** non esistono soluzioni ammissibili, ovvero  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \emptyset$ , per cui l'ottimizzazione è impossibile e si assume che  $Z_{\mathcal{P}} = \infty$ .
- **Problema illimitato:** si ha quando non esiste un limite inferiore/superiore per i valori della funzione obiettivo tra le soluzioni ammissibili, ovvero quando  $Z_{\mathcal{P}} = \pm\infty$ . Ad esempio, nel caso del massimo, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  esiste un  $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  con  $c_{\mathcal{P}}(g) \geq x$ , e quindi  $Z_{\mathcal{P}} = +\infty$ .
- **Valore ottimo finito ma non soluzione ottima finita:** un problema di ottimizzazione può presentare un valore ottimo finito, pur non ammettendo alcuna soluzione  $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  tale che  $c_{\mathcal{P}}(g)$  sia esattamente uguale a  $Z_{\mathcal{P}}$ . (Es.: nell'insieme  $\{x \mid x > 0\}$ , dove l'estremo inferiore è 0, ma non esiste una soluzione che raggiunga tale valore.)
- **Valore ottimo finito e soluzione ottima finita:** esiste almeno un  $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  tale che  $c_{\mathcal{P}}(g) = Z_{\mathcal{P}}$ , ed esso è ottimo. Notare che possono esistere più soluzioni ottime, ma un solo valore ottimo.

### 2.1.2 Problemi di ottimizzazione e di decisione

Verranno fornite due definizioni importanti:

#### Definition 2.1.7: Problema di decisione

Un problema di decisione consiste nel determinare una qualunque soluzione ammissibile  $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ .

#### Definition 2.1.8: Problema di certificato

Il problema di certificato consiste nel verificare se, per un dato  $g \in G$ , risulti che  $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ .

I problemi di decisione sono generalmente più semplici dei problemi di ottimizzazione, in quanto non richiedono la definizione di una funzione obiettivo  $c_{\mathcal{P}}()$ . Tuttavia, è possibile trasformarli in problemi di ottimizzazione fissando una funzione obiettivo triviale (ad esempio, costante), per cui tutte le soluzioni ammissibili risultano ottime.

In alternativa, possiamo considerare un problema decisionale  $R$  definito da

$$F_R = \{g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \mid c_{\mathcal{P}}(g) = Z_{\mathcal{P}}\},$$

oppure, per un dato  $k \in \mathbb{R}$ , il problema decisionale  $R_k$  con

$$F_{R_k} = \{g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \mid c_{\mathcal{P}}(g) \leq k\},$$

nel caso in cui  $\mathcal{P}$  sia un problema di minimo.

### 2.1.3 Aspetto algoritmico

- **Algoritmi esatti:** e' un algoritmo che preso un'istanza di  $P$  ( $P$  e' un modello di un problema), fornisce in output una soluzione ottima  $g^*$  di  $P$  (se esiste). Spesso pero' i problemi sono troppo complessi ed e' impossibile costruire algoritmi efficienti.
- **Algoritmi euristici:** non ci danno garanzia sulla soluzione trovata (e' sicuramente ammissibile), ma un'approssimazione.

Come possiamo valutare la correttezza di una soluzione euristica? Possiamo misurare l'errore (assoluto o relativo) fra il valore ottimo euristico e quello esatto.

Gli algoritmi euristici vengono detti anche greedy.

## 2.2 Modelli

Al posto di dare un'algoritmo per ogni specifico problema, possiamo definire classi di problemi che possono essere risolti con lo stesso algoritmo.

### 2.2.1 Programmazione Lineare

Fornisco Innanzitutto la def. di problema di Programmazione Lineare

#### Definition 2.2.1: Problema di Programmazione Lineare

Si definiscono **Problemi di programmazione lineare (PL)** tutti quei problemi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo  $c_P$  è lineare e i vincoli sono *tutti espressi da disequazioni lineari* ed anche, eventualmente, equazioni lineari (quest'ultime possono mancare le prime no).

In particolare in un problema  $\mathcal{P}$  di programmazione lineare si ha:

- $\mathbf{G} = \mathbb{R}$ , definendo poi un numero finito  $n \in \mathbb{N}$  di variabili reali, che nella realtà rappresentano delle quantità

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

- Una funzione obiettivo  $c_P$  definita  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nella forma:

$$f(x) = cx$$

Dove  $c$  è un vettore riga e  $x$  è un vettore colonna. Si noti che  $c$  non è una variabile, bensì un parametro (definizione della funzione obiettivo)

- Un insieme di  $m$  vincoli lineari, tutti in una delle forme seguenti:

$$ax = b \quad ax \leq b \quad ax \geq b$$

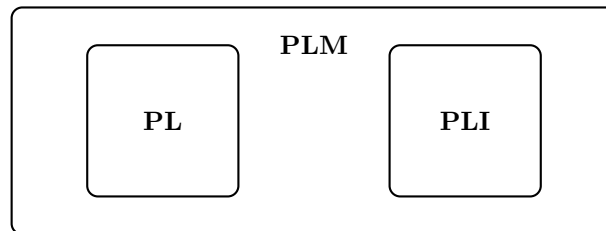
Dove  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}$

$f$  è lineare.  $c_P$  è l'insieme di vettori di numeri reali.  $\mathbf{G} = \mathbb{R}^n$ . (definizione di  $G$ )

È talvolta utile assumere che  $x \in \mathbb{Z}^n$ , ovvero che le soluzioni ammissibili siano vettori di numeri interi. In questo caso si parla di *programmazione lineare intera*. Facendo così, stiamo restringendo il campo di ricerca (ed il dominio delle soluzioni possibili), ma si perdono alcune proprietà (geometriche) che in realtà possono rendere più difficile la ricerca della soluzione.

Esiste inoltre la *programmazione lineare mista* (PLM), dove si hanno variabili di natura mista (alcune variabili in  $\mathbb{R}$  ed alcune in  $\mathbb{Z}$ )

Si noti questo diagramma riassuntivo:



Un problema PL può sempre essere espresso nella seguente forma matriciale:

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\}$$

dove  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Grazie ad alcuni accorgimenti è possibile, inoltre, scrivere tutti i vincoli possibili di un problema di PL  $\mathcal{P}$  in un'unico sistema di disequazioni lineari. Infatti:

- Se  $\mathcal{P}$  è un problema di minimo, occorre considerare semplicemente la funzione  $f(x) = (-c)x$



- Ogni vincolo  $ax = b$  diventa la coppia di vincoli  $ax \leq b$  e  $ax \geq b$
- Ogni vincolo  $ax \geq b$  è equivalente a  $(-a)x \leq (-b)$ .

### 2.2.2 Programmazione lineare intera

Se nella PL le variabili rappresentano quantità nella PLI le variabili possono essere

- **Quantitative:** ovvero rappresentare quantità.
- **Logiche:** rappresentare valori booleani, ovvero scelte basate sulla possibilità di scegliere o meno una determinata opzione

Qui la definizione di variabile logica

#### Definition 2.2.2: variabile logica

Una **variabile**  $x$  si definisce **logica** se:

$$x \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}) \quad 0 \leq x \leq 1$$

Un esempio tipico è rappresentato dalle variabili che associano una determinata risorsa a un compito specifico, oppure che determinano l'utilizzo di un particolare processo.

Questo è il bello dei problemi lineari

– Il Basta

Un giga esempietto bellino è il problema dello zaino:

#### Example 2.2.1 (Problema dello zaino)

Il problema dello zaino è un esempio classico di problema di ottimizzazione combinatoria piuttosto complesso.

TODO: inserire il testo del problema

##### Parametri:

$$\begin{aligned} E &= \{1, \dots, n\} \\ a_i &= \text{peso dell'oggetto } i \\ c_i &= \text{costo dell'oggetto } i \\ b &= \text{peso massimo dello zaino} \end{aligned}$$

##### Variabili:

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ è nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ x_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

##### Vincoli:

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i \leq b$$

##### Funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i c_i$$

## Relazioni logiche

Avendo introdotto le variabili logiche, è opportuno chiedersi se sia possibile esprimere, mediante programmazione lineare (PL), le regole di inferenza logica per le relazioni che intercorrono tra di esse. Grazie all'uso di opportuni vincoli lineari, la risposta è affermativa:

- **Negazione** ( $y = \neg x$ ):

$$x = 1 - y$$

- **Congiunzione** ( $z = x \wedge y$ ):

$$z \leq x$$

$$z \leq y$$

$$z \geq x + y - 1$$

- **Disgiunzione** ( $z = x \vee y$ ):

$$z \geq x$$

$$z \geq y$$

$$z \leq x + y$$

- **Implicazione** ( $z = x \implies y$ ):

$$x + z \geq 1$$

$$z \geq y$$

$$x + z \leq 1 + y$$

È possibile, tuttavia, dimostrare che il problema di ottimizzazione lineare è, in generale, *NP-hard*, dato che il problema di soddisfacibilità di una formula logica rientra nella classe NP-hard

## 2.3 Template per risolvere problemi

### 2.3.1 Vincoli di assegnamento

Un tipo di vincolo che la programmazione lineare intera (PLI) gestisce in modo molto efficace è rappresentato dai cosiddetti *vincoli di assegnamento*. Questi vincoli sono utilizzati per modellare problemi che riguardano l'assegnazione di "oggetti a luoghi".

Si considerano:

- Un insieme  $N = \{1, \dots, n\}$  di **oggetti** (che possono rappresentare automezzi, persone, ecc.)
- Un insieme  $V = \{1, \dots, m\}$  di **luoghi**

Per rappresentare le diverse condizioni di assegnazione degli oggetti ai luoghi, si introduce la variabile  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  (dove  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ ). Questa variabile indica se l' $i$ -esimo oggetto è stato assegnato al  $j$ -esimo luogo ( $x_{ij} = 1$ ) o meno ( $x_{ij} = 0$ ), si può così procedere alla formale

### Definition 2.3.1: Vincoli di assegnamento

Sia  $N = \{1, \dots, n\}$  un insieme di oggetti e  $V = \{1, \dots, m\}$  di luoghi, si definiscono **vincoli di assegnamento** quei vincoli che impongono che *ogni oggetto sia assegnato a un solo luogo e ad ogni luogo è assegnato esattamente un oggetto*. Questi sono espressi mediante queste sommatorie:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Dove:

- $x_{ij}$  è una variabile binaria che vale 1 se l'oggetto  $i$  è assegnato al luogo  $j$ , e 0 altrimenti.
- La prima equazione assicura che ogni oggetto  $i$  sia assegnato esattamente a un luogo.
- La seconda equazione assicura che ogni luogo  $j$  riceva esattamente un oggetto.

il luogo può anche essere visto come uno slot temporale, quindi imponiamo un certo pipeline

### Vincoli di semi-assegnamento

I vincoli di semi-assegnamento sono una variante dei vincoli di assegnamento in cui non è necessario che ogni luogo riceva esattamente un oggetto, in particolare si noti la seguente definizione

### Definition 2.3.2: Vincoli di semi-assegnamento

Sia  $N = \{1, \dots, n\}$  un insieme di oggetti e  $V = \{1, \dots, m\}$  un insieme di luoghi. Si definiscono **vincoli di semi-assegnamento** quei vincoli che impongono che *ogni oggetto sia assegnato ad al massimo un luogo*. Questi vincoli sono espressi mediante la seguente sommatoria:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Dove  $x_{ij}$  è una variabile binaria che vale 1 se l'oggetto  $i$  è assegnato al luogo  $j$ , e 0 altrimenti.

Insiemi ammissibili:

Vincoli di Assegnamento: ogni oggetto e' assegnato ad un luogo e ogni luogo ha un oggetto

### 2.3.2 Selezione di Sottoinsiemi

Sia  $N = \{1, \dots, n\}$  un insieme finito di elementi e sia  $F = \{F_1, \dots, F_n\}$  una famiglia di sottoinsiemi (non necessariamente disgiunti) dove  $F_i \subseteq N$  e sia  $c_j$  un costo che associamo ad ogni  $F_j$ . Si vuole determinare qual'è la scelta migliore di  $D \subseteq F$  di costo minimo fra tutti gli  $F_j \in F$ . Per formulare formalmente il problema, si può rappresentare l'appartenenza degli elementi di  $N$  in un sottoinsieme  $F_j$  come una matrice che ha un numero di  $n$  righe (numero di elementi) e un numero  $m$  di colonne (il numero di sottoinsieme). In dettaglio, sia  $A = (a_{ij} \in \{0, 1\}^{n \times m})$ , dove

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in F_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il vettore delle variabili  $x$  assumerà la forma  $x = (x_1, \dots, x_m)$  dove

$$x_j = \begin{cases} 1 & F_j \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definendo  $D$  come  $D = \{F_j \mid x_j = 1\}$

La funzione obbiettivo e' sempre:

$$\sum_{j=1}^m x_j c_j$$

I vincoli, invece, dipendono dal problema:

- **Problema di copertura:** ognuno degli elementi di  $N$  sta in almeno uno degli elementi di  $D$ :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \geq 1 \quad \forall i \in [1, n]$$

Ad esempio, i sottoinsiemi  $F$  di  $N$  possono essere dei curriculum dove c'è scritto quale dei linguaggi di programmazione  $l \in N$  conosce un candidato. Ogni candidato ha anche uno stipendio. Dobbiamo scegliere quali candidati assumere per coprire tutti i linguaggi in  $N$  minimizzando il costo

- **Partizione:** Ognuno degli elementi di  $N$  sta in *esattamente* uno degli elementi di  $D$ , ovvero  $D$  deve essere una partizione di  $N$ . Quindi:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = 1 \quad \forall i \in [1, n]$$

Ad esempio,  $N$  possono essere dei task da svolgere e gli insiemi di  $F$  sono offerte da fornitori rispetto alla risoluzione di alcuni dei task. Quindi gli insiemi di  $D$  devono essere disgiunti perché non vogliamo che due società risolvano lo stesso task. Tutto deve essere coperto una sola volta.

- **Riempimento:** si usa solo quando si vuole massimizzare il costo  $c_j$ .  $N$  non sono più incombenze o task, ma risorse da usare una volta per costruire un prodotto (elemento di  $F$ ). Al più perché possiamo scartare qualche componente. Possiamo usare ogni elemento di  $N$  al massimo una volta. Quindi:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq 1 \quad \forall i \in [1, n]$$

### 2.3.3 Variabili a valori discreti

Spesso, tuttavia, le variabili in gioco sono vincolate ad assumere un valore da un insieme che non è  $\{0, 1\}$  o un intervallo continuo (come  $\mathbb{N}$ ). Ad esempio si può essere interessati a vincolare  $x$  in un insieme finito di valori  $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$  dove i vari  $z_i$  sono valori reali distinti

In questi casi, si possono utilizzare  $n$  variabili ausiliarie  $y_1, \dots, y_k$  che rappresentano l'appartenenza di  $z$  a  $Z$ . In particolare, si definiscono le variabili  $y_i$  come segue:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } z = z_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

E sono vincolate come segue:

$$\sum_{i=1}^k y_i = 1 \quad x = \sum_{i=1}^k z_i y_i$$

#### Example 2.3.1 (Problema delle Commesse)

Un'agenzia deve decidere come impiegare i suoi  $n$  dipendenti.

L'azienda, nell'intervallo di tempo considerato, deve evadere  $m$  commesse.

Ciascuna commessa  $j$  deve essere svolta dal sottoinsieme  $F_j \subseteq \{1, \dots, n\}$  dei dipendenti dell'azienda.

Ogni commessa, se evase, darebbe luogo ad un ricavo pari a  $r_j$ .

Ogni dipendente può lavorare ad una singola commessa nell'unità di tempo.

SVOLGIMENTO:

e' un problema di selezione di sottoinsiemi:

$$N = \{1, \dots, n\} \text{ elementi/dipendenti}$$

$$F = \{F_1, \dots, F_m\} \text{ commesse}$$

VARIABILI:

$$x_j = \begin{cases} 1 & F_j \in D_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VINCOLI:  $0 \leq x_j \leq 1 \forall j$

$$\sum_{j=1}^m x_j a_{ij} \leq 1 \forall i$$

FO:

$$\sum_{j=1}^m x_j r_j$$

Ha fatto poi un esempio di quando c'è una penalità quando non fai una commessa (mi sa)

### 2.3.4 Minima quantità positiva

Quando una variabile  $x$  rappresenta un certo livello di produzione, possibile che il valore della variabile sia

$$x \in \{0\} \cup [l, u]$$

Dove:

- $l$  è il livello minimo di produzione
- $u$  è il livello massimo di produzione
- $0$  è l'assenza di produzione

Per modellare correttamente tale situazione si introduce una variabile ausiliaria logica  $y \in \{0, 1\}$  che indica la presenza o l'assenza di produzione, cosicché i vincoli siano:

$$x \geq ly \quad x \leq uy$$

Infatti se  $y = 0$  allora  $x = 0$  e se  $y = 1$  allora  $x \in [l, u]$

### 2.3.5 Funzione a carico fisso

#### Definition 2.3.3: Funzione a carico fisso

Una funzione  $f(x)$  è detta a carico fisso se:

$$f(x) = \begin{cases} b + cx & \text{se } 0 < x \leq u \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Dove  $b > 0$  e  $u$  è un opportuno reale positivo

Si noti il seguente grafico rappresentativo: TODO: inserire il grafico

Questo tipo di funzione è molto utile per modellare situazioni in cui si ha un costo di investimento fisso  $b$  per l'attivazione di un servizio, e un costo variabile  $c$  (coefficiente angolare) per l'unità di prodotto, mentre il costo è nullo se il servizio non è attivato ( $x = 0 \implies f(x) = 0$ )

Per rappresentare, analiticamente, questa funzione si introduce, al solito, una variabile ausiliaria logica  $y \in \{0, 1\}$  che indica l'attivazione del servizio, cosicché i vincoli siano:

$$0 \leq x \leq uy$$

Adesso è possibile sostituire la funzione a carico fisso tramite una nuova funzione  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue:

$$g(x, y) = b(y) + cx$$

Si ha infatti che

$$g(0, 0) = 0 \quad g(x, 1) = b + cx$$

**Note:**

Si noti che se  $y = 0$  allora, per i vincoli introdotti poc'hanzi, si ha che  $x = 0$  (anche se non vale viceversa). In altre parole i vincoli introdotti non escludono la possibilità che sia contemporaneamente  $y = 1$  e  $x = 0$ , in questo caso avremo  $g(0, 1) \neq f(0)$  (nasty). Di conseguenza la funzione  $g$  non rappresenta perfettamente ed in modo univoco la funzione  $f(x)$ , ma dato che l'obiettivo è *minimizzare* la funzione  $f(x)$ , la soluzione  $(x, y) = (0, 1)$  viene esclusa essendo  $g(0, 1) = b > g(0, 0) = 0 = f(0)$

**Example 2.3.2 (Ordinamento di valori su macchine)**

TODO: aggiungere questo bellissimo esempip

**2.3.6 Rappresentazioni del valore assoluto****Vincoli di valore assoluto**

Si può avere a che fare con un **vincolo** a "valore assoluto" del tipo:

$$|g(x)| \leq b$$

Dove  $g(x)$  è una funzione dell'insieme di variabili  $x$  e  $b$  è un valore reale positivo, in questo caso tale vincolo è espresso come la congiunzione di due vincoli:

$$g(x) \leq b \quad -g(x) \leq b$$

Dato che se  $g(x) \leq b$  il vincolo  $-g(x) \geq -b$  e viceversa. Inoltre, se  $g(x)$  è una funzione lineare, allora tale vincolo può essere espresso come un vincolo lineare.

**Funzioni obiettivo a valore assoluto**

Vediamo ora come trattare una funzione obiettivo espressa mediante un valore assoluto. Si consideri una funzione obiettivo  $|f(x)|$  da dover *massimizzare* con  $x \in X$ . È sufficiente risolvere i due diversi problemi:

$$\max\{f(x) \mid x \in X\} \quad \max\{-f(x) \mid x \in X\}$$

E scegliere come soluzione quella che fornisce il valore più alto della funzione obiettivo

*Analolgamente*, per i problemi di minimizzazione

**2.3.7 Funzioni definite a tratti**

Una funzione che è possibile riscontrare nella vita reale è il caso delle funzioni lineare a tratti

Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} b_1 + c_1x & x \in [a_1, a_2] \\ b_2 + c_2x & x \in (a_2, a_3] \end{cases} \quad (2.2)$$

Dove assumiamo

$$b_2 + c_2a_2 \geq b_1 + c_1a_2$$

Si noti il seguente grafico:

TODO: INSERIRE GRAFICO

Come per il carico fisso vengono introdotte due variabili logiche ausiliarie  $y_1, y_2$  con seguente significato:

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a_1, a_2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a_2, a_3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.3)$$

Dovendo  $x$  appartenere ad uno ed uno solo degli intervalli, si ha il seguente vincolo

$$y_1 + y_2 = 1$$

Inoltre introduciamo variabili quantitative ausiliarie che ci dicono lo spostamento rispetto a un estremo dell'intervallo a cui appartiene  $x$ :

$$z_1 = \begin{cases} x - a_1 & \text{se } x \in [a_1, a_2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad z_2 = \begin{cases} x - a_2 & \text{se } x \in (a_2, a_3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.4)$$

Infatti se  $x \in [a_1, a_2]$ , il valore  $z_1 (= x - a_1)$  non è che la proiezione di valore di  $x$  che "supera"  $a_1$ , pertanto il suo valore è limitato dalle disuguaglianze  $0 \leq z_1 \leq a_2 - a_1$ , si ha quindi che un'altro vincolo:

$$0 \leq (z_1 \leq a_2 - a_1)y_1$$

Con  $y_1$  variabile definita prima utile a controllare se effettivamente  $x \in [a_1, a_2]$ . Analogamente è il caso di  $z_2$ , che ci conduce al seguente vincolo:

$$0 \leq z_2 \leq (a_3 - a_2)y_2$$

Riassumendo tutti i vincoli ottenuti, si ha:

$$\begin{aligned} y_1, y_2 &\in \{0, 1\} \\ y_1 + y_2 &= 1 \\ 0 &\leq z_1 \leq (a_2 - a_1)y_1 \\ 0 &\leq z_2 \leq (a_3 - a_2)y_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Note:**

Si noti che i vincoli ?? impongono che solo una delle due variabili  $z_1$  e  $z_2$  possa avere valore non nullo

## Rappresentazione di $f$ con funzione multivariabile

Poi il basta mi spiegherà la seguente quote

Non c'è niente che ci da la funzione da ottimizzare, abbiamo solo delle definizioni che sono dei semplici commenti, i vincoli lineari sono solo gli ultimi, ma non bastano – ☹

Vabbuò, adesso è possibile sostituire alla funzione  $f(x)$  la seguente funzione  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2, y_1, y_2) &= b_1 y_1 + c_1(a_1 y_1 + z_1) + b_2 y_2 + c_2(a_2 y_2 + z_2) \\ &= y_1(b_1 + c_1 a_1) + c_1 z_1 + y_2(b_2 + c_2 a_2) + c_2 z_2 \end{aligned}$$

Con le variabili soggette ai vincoli ?? In questo modo è stato possibile rappresentare la funzione  $f(x)$  (non lineare) come una funzione lineare a variabili continue definita su un opportuno insieme.

Si ha che il valore di  $f$  è rappresentato univocamente dalla quadrupla  $(z_1, z_2, y_1, y_2)$ , eccetto nel punto di discontinuità  $a_2$  che può essere espresso con le due seguenti quadruple:

$$(a_2 - a_1, 0, 1, 0) \quad (0, 0, 0, 1)$$

Dei quali solo **primo** è accettabile per i vincoli dati. Se, però, supponiamo il problema sia un problema di *minimo*, possiamo considerare il problema come benigno, dato che:

$$g(0, 0, 0, 1) = b_2 + c_2 a_2 \geq b_1 + c_1 a_2 = g(a_2 - a_1, 0, 1, 0)$$

# Chapter 3

## Esercitazioni

### 3.1 Problemi e modelli

#### 3.1.1 Problema dei data center

##### Testo

Abbiamo  $n$  server  $1, \dots, n$ , ogni server può lavorare in  $m_i \in \mathbb{N}$  modalità operative diverse. Nella modalità  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ , il server  $i$  riesce ad eseguire un numero di istruzioni  $s_{ij}$ .

##### Svolgimento

*Variabili:*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il server } i \text{ è utilizzato in modalità } j \in \{1, \dots, m_i\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$x_{ij} \in \mathbb{N}, \quad \forall i \forall j$$

*Vincoli:*  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m_i\}$  con  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  si ha:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} = 1$$
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} s_{ij} \geq k$$

*funzione obiettivo*

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} w_{ij}$$

#### 3.1.2 Problema del docente di informatica

##### Testo

Si hanno dei progetti  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , si hanno  $m$  PC, dove ogni pc può compilare qualunque progetto in modalità sequenziale. Le prestazioni del PC sono identiche

Vogliamo assegnare i progetti ai pc in modo da minimizzare il tempo complessivo parallelo di compilazione



## Svolgimento

Variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il progetto } i \text{ è compilato al pc } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$x_{ij} \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Vincoli:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad (\text{normale vincolo di semi-assegnamento!!})$$
$$\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad y \geq \sum_{i=1}^n x_{ij} t_i$$

Funzione obiettivo:

$$\min \left( \max_j \sum_{i=1}^n \underbrace{x_{ij} t_i}_{\text{tempo di compilazione del progetto } i \text{ al pc } j} \right)$$

nonostante questa espressione matematica ha perfettamente senso, non è lineare!

Funzione obiettivo sbagliata! Pertanto prenderemo  $y$  per "simulare" il massimo, di modo da rendere la funzione obiettivo lineare:

$$\min y$$

### 3.1.3 Problema delle commesse

#### Testo

Un'azienda deve decidere come impiegare i suoi  $n$  dipendenti  $1, \dots, n$ .

L'azienda, nell'intervallo di tempo desiderato deve evadere  $m$  commesse  $1, \dots, m$

Ciascuna commessa  $j$  deve essere svolta dal sottoinsieme  $D_j \subseteq \{1, \dots, n\}$  dei dipendenti dall'azienda.

Ogni commessa, se evasa darebbe luogo ad un ricavo pari a  $r_j$  euro.

Ogni dipendente può lavorare ad una singola commessa nell'unità di tempo

#### Svolgimento

Si consideri che questo è un Problema di selezione di sottoinsiemi, infatti:  $N = \{1, \dots, n\}$  elementi/dipendenti  
 $F = \{F_1, \dots, F_m\}$  dove  $F_j$  è la  $j$ -esima commessa

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in F_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se la commessa } j \text{ è evasa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$x_j \in \mathbb{N} \quad y_j \in \mathbb{N}$$

Vincoli:

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad 0 \leq y_j \leq 1$$
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq 1 \quad y_j = 1 - x_j$$

Funzione obiettivo:

$$\max \sum_{j=1}^m r_j x_j - \sum_{j=1}^m y_j p_j$$

### 3.1.4 Problema della minimizzazione del massimo

#### Testo

Una ditta di costruzioni edilizie ha deciso di subappaltare  $n$  diverse opere ad  $n$  diversi artigiani. Ad ogni artigiano  $i = 1, \dots, n$  chiede di fornire il costo preventivo  $c_{ij}$  che richiede per effettuare l'opera  $j$ , per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Si vuole assegnare un'opera a ciascun artigiano in modo che tutte le opere siano effettuate e il costo massimo dei subappalti assegnati sia minimizzato. Formulare il problema

#### Svolgimento

*Variabili:*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'opera } j \text{ è assegnata all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Vincoli:*

$$\forall j \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

Inoltre:

$$\forall i, j \quad c_{ij} x_{ij} \leq M$$

*Funzione obiettivo:*

$$\min M$$

### 3.1.5 Problema della massimizzazione del minimo

#### Testo

Si provi ora a massimizzare il costo minimo dei subappalti assegnati

#### Svolgimento

*Variabili:*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'opera } j \text{ è assegnata all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Vincoli:*

$$\forall j \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

Inoltre:

$$\forall i, j \quad c_{ij} x_{ij} \geq m$$

*Funzione obiettivo:*

$$\max m$$

### 3.1.6 Esercizio valore assoluto

#### 3.1.7 testo

Formulare il problema  $\min\{|3 - 4x| : |x| \leq 2\}$

#### 3.1.8 Svolgimento

*Vincoli*

$$x \leq 2 \quad -x \leq 2$$

*Funzione obiettivo*

$$\min\{3 - 4x\} \quad \min\{3 - 4x\}$$