SOL. EX.

$n=3$ (fatto)

Generale: se $w \in V$, $w \neq 0$, $\exists i, j$.

$w_i, w_j \neq 0$ quindi $w - (ij)w$

$\boxed{\text{Guarda foto}} \longrightarrow$ OK Gen...

Lunedì

somma formale ← possiamo anche scrivere g

Abbiamo definito, dato G, un gruppo finito, $K[G] = \{\sum_{g \in G} a_g e_g,\ a_g \in K\}$

è uno sp vett di dim $|G|$ su K e un anello rispetto al prod.

che estende per linearità il prod del gruppo

$$e_g \cdot e_h = e_{gh} \quad (\forall g, h \in G)$$

EX $G = S_3$ $v, u \in K[G]$ $v = 5e_{(12)}$ $u = (2e_{id} - 3e_{(23)})$

$$v \cdot u = 10e_{(12)} - 15e_{(123)}$$

Abbiamo osservato che dare una rappr. G su V è come dare a V una struttura di $K[G]$-modulo

↓

Se so come agiscono gli elementi di G, so ...

OSS (modulo?)

$K[G]$ è una rappr. di G perché G agisce sulla base di $K[G]$

↘ agisce linearmente su $K[G]$

Viene detta <u>rappresentazione regolare</u> di G

Sia G il gruppo ciclico di ordine n

Usando il TFOA, dimostrare che $K[G] \cong K[x]/(x^n-1)$

TCR, decomporre per $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$

Teoria Rapr = alg. lin. dove tratto come scalari anche gli elementi di G

In questo caso, la def. di rapr. è semplicemente sottosp. anche rispetto a questi "scalari"

$U \subseteq V \Rightarrow \forall$ ______

$\forall g \in G,\ gv \in U \qquad \forall x \in K[G].\ x \cdot v \in U$

$\hookrightarrow \rho(g)$

Chi sono le app. lin.?

- abbiamo più scalari $\rightarrow$ dobbiamo poter portarli fuori

I morfismi di $K[G]$-moduli sono quelli in cui posso portare fuori anche i nuovi scalari

Se $f: V_1 \longrightarrow V_2 \qquad f(gv) = g\, f(v) \quad \forall v \in V_1,\ g \in G$

(uguale a $g \in K[G]$)

In altre parole, se $\rho_1 : G \to GL(V_1)$
$\rho_2 : G \to GL(V_2)$

sono rapr., allora una app. lin. $f: V_1 \to V_2$ è un morfismo di rapr. se $\forall g \in G$. il diagramma

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\
V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

commuta (ovvero è la stessa cosa fare $\rho_1(g)$ poi f, e fare f poi $\rho_2(g)$)

Es 3

Dimostrare che se $f: V \to U$ è un morf. di rappr.
$\ker f$ è una sottorappr. di V e
$\mathrm{Imm}\, f$ è una sottorappr. di U
(stessa cosa di algebra lin ma con + scalari)

Questo ci permette di dare un'altra dimostrazione del lemma del complementare (vista Lunedì)

Sia U una sottorappr di V e sia $p: V \to U$ un proiettore, cioè un'app. lin. tc.

$$\mathrm{Imm}\, p = U$$

$$p|_U = I$$

Definiamo un nuovo proiettore $p^G: V \to U$ come

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \cdot p \circ \rho(g)^{-1}$$

p^G è anch'esso un proiettore, ed è anche un morfismo di rappresentazioni

devo dimostrare che

$$\rho(h)\, p\, g = p\, g\, \rho(h)$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho(h) p^G \rho(h)^{-1} = p^G$$

Poiché è un morfismo di rappr,
$\ker p^G$ è il compl cercato a $U = \mathrm{Imm}\, p^G$
(una sottorappr.)

Cor

Sia G un gr. finito, K un campo t.c. char $K=0$, ogni rapp. V di dim. finita è somma diretta di irriducibili

Dim Induzione sulla $n = \dim V$

- Se $n=0$, niente da dim
- se V irriduc. fine V
  altrimenti $\exists U \subsetneq V$ sottosp. e per il lemma $\exists W \subseteq V,\ V = U \oplus W$ con $\dim(U) < n$, $\dim(V) < n$ e scatta l'induzione

Sia G un gruppo finito e sia $K = \mathbb{C}$ (basta char $K=0$ e $\overline{K} \subset K$), algebricamente chiuso?

Siano (V_1, ρ_1) (V_2, ρ_2) rapp. irriducibili e sia $f: V_1 \to V_2$ morf. di rapp.

$\boxed{\text{Lemma (di Schur)}}$

- Se V_1 e V_2 non sono isomorfe, allora f è l'applicazione nulla ($f=0$)
- Se $V_1 \cong V_2$, allora $\exists \lambda \in \mathbb{C}$. ~~$f(x)$~~ $f = \lambda I$

  f è un' omotetia?

Dim Se $f \neq 0$, allora $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$ e $\operatorname{Ker} f \neq V_1$

$\operatorname{Ker} f \subsetneq V_1 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \to$ iniettiva

quindi $\operatorname{Im} f \subsetneq V_2$, ma V_2 è irriducibile,

quindi $\operatorname{Im} f = V_2 \to$ suriettiva

Quindi f è un isomorfismo

2) Se f è un endomorfismo $f: V \to V$, allora (poiché siamo in $\mathbb{C}$) $\exists$ un autovalore $\lambda \in K$ e dunque un autosp. $\subsetneq V_\lambda \subseteq V$, e poiché V_λ è una sott., $V_\lambda = V$

CARATTERI

Sia (V, ρ) una rapr di G ($K = \mathbb{C}$)
($\rho: G \to GL(V)$ omomorf. di gruppi)

allora il CARATTERE di ρ é l'applicazione da G in $\mathbb{C}$

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\chi(g) = Tr(\rho(g))$$

Tr ↳ traccia

Def. TRACCIA
In qualche base di V la mat di f é A,
la traccia é:

$$Tr(f) = \sum_i a_{ii}$$

Prop:
1) La traccia $Tr\, id_V = \dim V$ — é uno dei coeff del pol. caratt.
2) Non dipende dalla base di V ↳ perché $Tr(ABA^{-1}) = Tr(B)$ $\forall A$ inv.
3) $Tr(f)$ = somma degli autovalori, contati con la loro molteplicità
↳ ?

OSS
Se g, g' sono coniugati in G
$\exists h \in G.$ $g' = hgh^{-1}$, $\chi(g') = \chi(g)$
$(Tr(\rho(h) \ldots \ldots))$

Es $G = S_3$ azione naturale su $\mathbb{C}^3$ (base $e_1\ e_2\ e_3$)

$g = id$ $\quad \chi(g) = Tr\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 3$

$g = (1\,2)$ $\quad \chi(g) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\forall$ trasposizione τ $\quad \chi(\tau) = 1$ → ha tirato fuori una roba assurda dei gruppi simmetrici

$g = (1\,2\,3) \quad \chi(g) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

lo ~~stesso~~ per ogni 3-ciclo

· <u>Tavola dei caratteri</u> di V

id	3
$(\cdot\,\cdot)$	1
$(\cdot\,\cdot\,\cdot)$	0

$\longrightarrow$ sono interi dato che è un gruppo simmetrico (vedremo perché)