Domande orale Modulo 1:

① $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ se p é primo:

- Assumiamo $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ e dimostriamo il falso
- Dato che $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, $\exists\, m, n \in \mathbb{N} \,.\, \frac{m}{n} = \sqrt{p}$ (con m e n coprimi)
- $m^2 = p n^2$, quindi per Lemma 1 $m = p \cdot m_1$
- $p^2 \cdot m_1^2 = p n^2 \Rightarrow p m_1^2 = n^2$, quindi per Lemma 1 $n = p \cdot n_1$
- Ma per ipotesi $MCD(m,n) = 1$, quindi abbiamo dimostrato il falso

$\boxed{1.1}$ Lemma 1 $\rightarrow$ "m^2 ha gli stessi fattori primi di m"

② Infinitá numeri primi

- Assumiamo che esistano solo n numeri primi e dimostriamo il falso

$$(1) < p_1 < p_2 < \dots < p_n$$

- Per ipotesi abbiamo che $\nexists\, p > p_n \,.\, p$ é primo. Quindi dobbiamo dimostrare che $\exists\, p > p_n \,.\, p$ é primo.
- Costruiamo il numero $m := (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n) + 1$.
Dato che $p_1, \ldots p_n$ sono tutti > 1, m é sicuramente $> p_n$.

- Dobbiamo dimostrare che m è primo.

• Dividiamo per p_1: (non è divisibile)

$$\frac{m}{p_1} = (p_2 \cdot p_3 \cdots p_n) \text{ con resto } 1$$

• Dividiamo per p_i (con $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$)

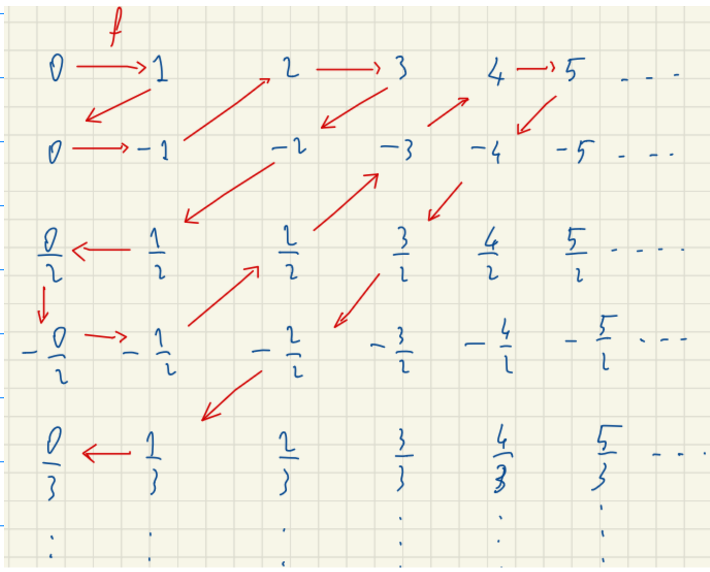
$$\frac{m}{p_i} = \underbrace{\boxed{\frac{(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n)}{p_i}}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{p_i}}}_{\notin \mathbb{N}} \to \text{resto } 1$$

- Qed.

③ Numerabilità di $\mathbb{Q}$

- Dobbiamo dimostrare che esiste una funzione suriettiva fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$



$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{Q}$

è su!

Qed.

(4) Non-numerabilità di $\mathbb{R}$

- Ci riduciamo a dimostrare che l'intervallo $[0,1[$ di $\mathbb{R}$ sia non-numerabile
- Supponiamo che $\exists f: \mathbb{N} \xrightarrow{su} [0,1[$ e dimostriamo il falso:

$$f(0) = 0, b_{00} b_{01} b_{02} \dots$$
$$f(1) = 0, b_{10} b_{11} b_{12}$$
$$f(2) = 0, b_{20} b_{21} b_{22}$$

$$\forall r \in [0,1[\,.\, \exists x \in \mathbb{N} \,.\, f(x) = r$$

- Dimostriamo che $\exists r \in [0,1[\,.\, \forall x \in \mathbb{N} \,.\, f(x) \neq r$

$$r = 0, r_1 r_2 r_3 \dots \qquad r_i = \begin{cases} 5 & \text{se } b_{ii} \neq 5 \\ 6 & \text{se } b_{ii} = 5 \end{cases}$$

- Quindi usando il metodo della diagonalizzazione abbiamo trovato un $r \in [0,1[$ t.c. $r \notin \mathrm{Im} f$ $\square$

5.1 Def. radice aritmetica

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $a \in \mathbb{R}_+$

$$\sqrt[n]{a} := b \in \mathbb{R}_+ \,.\, b^n = a$$

(5) La radice quadrata di un numero non negativo esiste sempre ed è unica.

- Dobbiamo dimostrare che $\forall a \in \mathbb{R}_+ \,.\, \exists! b \in \mathbb{R}_+ \,.$

$$b^2 = a$$

- Prendiamo l'insieme di punti $c \in \mathbb{R}_+$ il cui quadrato è minore o uguale ad a

$$A = \{c \in \mathbb{R} / 0 \leq c \text{ e } c^2 \leq a\}$$

$$c^2 \leq a \leq a+1 \leq (a+1)^2 \Rightarrow \underbrace{c^2 \leq (a+1)^2}$$

- per Lemma 2.A $\Rightarrow c \leq a+1 \rightarrow$ è un maggiorante di A

A è <u>superiormente limitato</u>

- Essendo superiormente limitato, sappiamo che $\underline{\exists b \in \mathbb{R}.\ \sup A = b}$. Ora basta dimostrare che $b^2 = a$
(prop. completezza $\mathbb{R}$)

- Assumiamo per assurdo che $b^2 \neq a$ e dimostriamo il falso
- Se $b^2 < a$, per Lemma 2.D $\Rightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 .\ (b+\epsilon)^2 < a \Rightarrow b+\epsilon \in A \Rightarrow b+\epsilon \leq b$$

$$\Downarrow$$

$$\epsilon \leq 0$$

ASSURDO!

- Se $b^2 > a$, per Lemma 2.E $\Rightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 .\ (b-\epsilon)^2 > a \Rightarrow \forall c \in A .\ c^2 \leq a < (b-\epsilon)^2$$

$$c^2 \leq (b-\epsilon)^2 \xRightarrow{\text{Lemma 2.A}} c \leq \underbrace{b-\epsilon}_{\text{maggiorante di } A}$$

Essendo b il sup A, ovvero il maggiorante minore,
$b \leq b - \epsilon \Rightarrow \epsilon \leq 0 \rightarrow$ ASSURDO!

$\square$

$\forall x, y \in \mathbb{R}.\ x, y \geq 0.$

$\boxed{5.2}$ (A) $x^2 \leq y^2 \iff x \leq y$

(D) $x^2 < y \implies \exists \epsilon > 0 \in \mathbb{R}.\ (x+\epsilon)^2 < y$

(E) $x^2 > y \implies \exists \epsilon > 0 \in \mathbb{R}.\ (x-\epsilon)^2 > y$
(con $x \neq 0$)

Dim:

(A) $x^2 - y^2 \leq 0 \implies \underbrace{(x+y)}_{\geq 0}(x-y) \leq 0 \implies x - y \leq 0 \implies x \leq y$

(D) $x^2 < y \implies \exists \epsilon > 0 \in \mathbb{R}.\ (x+\epsilon)^2 < y$

– supponiamo $\epsilon \in]0, 1[$, abbiamo che

$(x+\epsilon)^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \epsilon(2x+1) < y$

$$\epsilon < \underbrace{\frac{y - x^2 \to > 0}{2x+1 \to > 0}}_{> 0} \implies 0 < \epsilon < \frac{y-x^2}{2x+1}$$

OK

(E) $x^2 > y \implies \exists \epsilon > 0 \in \mathbb{R}.\ (x-\epsilon)^2 > y$
$(x \neq 0)$

$(x-\epsilon)^2 = x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - 2\epsilon x > y$

$-2\epsilon x > y - x^2 \qquad \epsilon < \frac{y-x^2}{-2x} = \frac{x^2 - y}{2x}$ $\begin{matrix} \to > 0 \\ \to > 0 \end{matrix}$

6 Valore Assoluto

Def. $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| := \max(-a, a) = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

Espansioni:

- $|a| < b \iff -b < a < b$
- $|a| > b \iff a < -b \vee a > b$

Proprietà

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $|ab| = |a||b|$
- $\left.\begin{array}{l} |a+b| \leq |a| + |b| \\ (\langle a, b \rangle \leq |a||b|) \end{array}\right\} =$ solo se lin. dip.

7 Esistenza del limite di una successione monotona

Def. Successione monotona (crescente/decrescente)

a_n è una successione monotona se $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \geq a_n$$
$$(\leq)$$

Thm

- Se a_n è monotona crescente allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

- Se a_n è monotona decrescente allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Dim

① - Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N} . a_{n+1} \geq a_n$. D.d. che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \underbrace{\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{L}$$

- Abbiamo due casi: $L = +\infty \lor L \in \mathbb{R}$

- $L = +\infty$:
  - D.d. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, ovvero che $\forall \varepsilon > 0 . \exists \bar{n} \in \mathbb{N} . \forall n \geq \bar{n} . a_n > \varepsilon$

  - Dato che il sup dell'insieme $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ è $+\infty$, A è superiormente illimitato, quindi non ammette maggioranti. $\longrightarrow (\nexists \varepsilon \in \mathbb{R} . \forall a \in A . \varepsilon \geq a)$

  - Quindi ε non può essere un maggiorante, ed esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} > \varepsilon$. Inoltre, per la monotonia crescente della successione, $\forall n \geq \bar{n} . a_n \geq a_{\bar{n}} > \varepsilon$.

    $\hookrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ □

- $L = \mathbb{R}$
  - D.d. $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, ovvero $\forall \varepsilon > 0 . \exists \bar{n} \in \mathbb{N} . \forall n \geq \bar{n} . |a_n - L| < \varepsilon$

  - Dato che $L = \sup \overbrace{\{a_n / n \in \mathbb{N}\}}^{A} = \mathbb{R}$, l'insieme A è superiormente limitato, quindi $\forall a \in A . a \leq L$

$\forall \varepsilon > 0 . \exists \bar{n} \in \mathbb{N} . \forall n \geq \bar{n} . \quad a_n > L - \varepsilon$

$> L \implies$ non è un maggiorante di A

Non è maggiorante di $A \Rightarrow \exists a \in A . a > L - \varepsilon$

- Quindi $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} . a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Per monotonia crescente abbiamo che $\forall n \geq \bar{n}$, $a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Abbiamo dimostrato che $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$

$\square$

(8) Numero di Nepero

<u>Def.</u> $$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Dimostriamo che $e \in \mathbb{R}$. Possiamo usare il teorema sopra e dimostrare che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è una successione monotona crescente superiormente limitata.

- Per dimostrare che è crescente, dobbiamo provare che $\forall n \in \mathbb{N}$. $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ o

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1$$

$$\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1} \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \overset{?}{\geq} 1$$

- Dimostro che $-\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1$ per poter usare Bernulli:

$$1 \leq n^2+2n+1 \qquad n^2+2n \geq 0$$ Vero $\forall n \in \mathbb{N}$

- Quindi possiamo continuare la disequazione:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)^n \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \; \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3}$$

- Dato che $n \in \mathbb{N}$, $1+\frac{1}{(n+1)^3} \geq 1$. Ora verifichiamo che sia superiormente limitata.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\cdot\frac{1}{k!}$$

BINOMIO DI NEWTON

$$= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k+1)}{n}}_{k \text{ fattori}}\cdot\frac{1}{k!} \qquad (\cdot)$$

sono tutti < 1 (tranne il primo che é 1)

Quindi anche il loro prodotto é minore di 1

$$(\cdot) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

- Notiamo che $\forall k \geq 2$

$$k! > k(k-1) \Rightarrow 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

- Espandiamo la sommatoria:

$$2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 2+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=$$

(notiamo che i termini di mezzo si annullano)

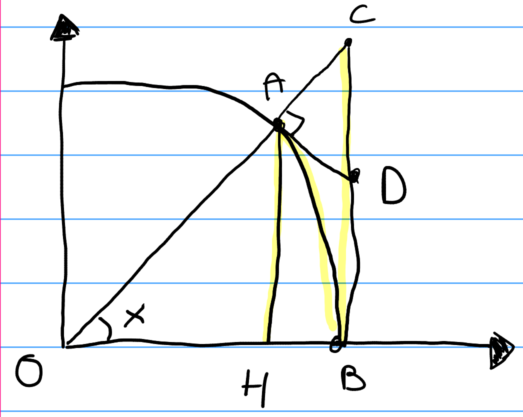
$$= 3-\frac{1}{n}$$

- Possiamo dire che $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.\ 3-\frac{1}{n} < 3$, quindi è superiormente limitata!

- Per il teorema sui limiti delle successioni monotone $e \in \mathbb{R}$ $\square$

9 Limite notevole $\frac{\sin x}{x}$

- Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



• dimostriamo prima che $\overline{AH} \leq \widehat{AB} \leq \overline{BC}$

1. $\overline{AH} \leq \widehat{AB}$

- $\overline{AH} \leq \overline{AB}$ dato che $\overline{AB}$ è ipotenusa del tr. rett. con $\overline{AH}$ come cateto

- $\overline{AB} \leq \widehat{AB}$ dato che in geom. euclid. il percorso più breve fra due punti è il segmento

2. $\widehat{AB} \leq \overline{BC}$

- $\widehat{AB} \leq \overline{BD} + \overline{DA}$
- $\overline{BD} + \overline{DA} \leq \overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ (tr. rett. ipotenusa - cateto)

- Quindi abbiamo:

$$\overline{AH} \leq \overset{\frown}{AB} \leq \overline{BC}$$

che per costruzione equivale a:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

(dato che siamo in $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x > 0$, $\cos x > 0$)

$$1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x$$

in realtà vale anche per $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

- Per $x \to 0$, $\cos x = 1$.

Quindi per teo. carambola $\frac{\sin x}{x} = 1$ per $x \to 0$

$\square$

(10) I limiti

punt. di accumulazione

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x \in D(f). \begin{cases} x > \delta \\ x < -\delta \\ 0 < x - x_0 < \delta \\ 0 < x_0 - x < \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \varepsilon \\ f(x) < -\varepsilon \\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

$0 < |x_0 - x| < \delta$

- Il limite di una funzione in un punto $x_0 \in D(f)$ esiste

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ \text{I due limiti sono uguali} \end{cases}$$

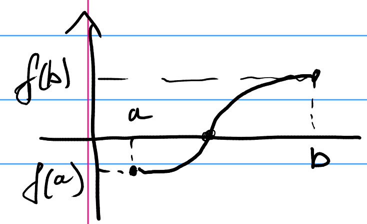
(11) Teorema degli zeri

<u>Thm</u> Data una funzione continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, t.c. $f(a)f(b)<0$:

$$\exists c\in\,]a,b[\,.\ f(c)=0$$

<u>Dim</u> (Questa è una dimostrazione "costruttiva")

- Abbiamo una funzione continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Assumiamo che $f(a)<0$ e $f(b)>0$.

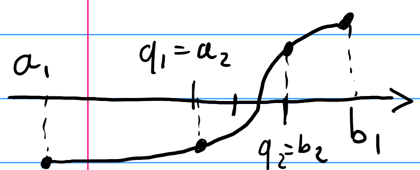


ALGORITMO PER TROVARE c:

- Prendiamo il puto di mezzo

$$q=\frac{b-a}{2}$$

- Se $q=0$ abbiamo trovato c



- Se $q<0$, allora $a=q$
- Se $q>0$, allora $b=q$

(è molto simile a una ricerca binaria)

- Se l'algoritmo termina, significa che $\exists c\in\,]a,b[\,.$ $f(c)=0$. Altrimenti, l'algoritmo va avanti all'infinito (che può succedere dato che $\mathbb{R}$ è un continuo).

- Nel caso in cui non termina, abbiamo creato due successioni a_n e b_n con le seguenti proprietà:

$\forall n \in \mathbb{N}.$

1. $a_{n+1} \geq a_n \quad (a_n \nearrow)$
2. $b_{n+1} \leq b_n \quad (b_n \searrow)$
3. $f(a_n) < 0$
4. $f(b_n) > 0$
5. $a_n \leq b_n$

- Inoltre, si può notare che ad ogni iterazione la distanza fra a e b viene dimezzata:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

- Se riusciamo a dimostrare che a_n e b_n convergono allo stesso valore (c) e che il valore di f in quel punto é 0, allora abbiamo dimostrato il teorema:

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n := c \\ f(c) = 0 \end{cases}$$

- Per dimostrare che esistano i limiti, Basta dimostrare che a_n é sup. lim. (essendo crescente) e che b_n é inf. lim. (essendo decrescente).

Per prop. 5, sappiamo che sicuramente:

- $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_n \leq b_1 \quad (a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1)$
- $\forall n \in \mathbb{N}.\ b_n \geq a_1 \quad (b_n \geq a_n \geq \dots \geq a_1)$

- Quindi sappiamo che $\exists \sup\{a_n / \forall n \in \mathbb{N}\}$ e $\exists \inf\{b_n / \forall n \in \mathbb{N}\}$. e li possiamo chiamare α e β.

- Ora dimostriamo che $\alpha = \beta$:

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n \to +\infty} b_n}_{\beta} - \underbrace{\lim_{n \to +\infty} a_n}_{\alpha} = 0 \Rightarrow \beta = \alpha := c$$

- Adesso ci basta dimostrare che $f(c) = 0$

• Prima di tutto, essendo f continua, possiamo dire che:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c)$$

• Poi, per prop. 3 e 4 sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$. Quindi per Lemma 1:

- $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq 0$
- $\lim_{n \to +\infty} f(b_n) \geq 0$

• Quindi questi due limiti possono essere uguali solo quando sono nulli, allora

$$f(c) = 0$$

$\square$

$\boxed{11.1}$ Lemma 1:

Data una successione a_n t.c. $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_n > (<) 0$, allora se $\underbrace{\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}}_{H1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \geq (\leq) 0$

- Per H1 e per definizione di limite, sappiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}. \forall n \geq \bar{n}. |a_n - \ell| < \varepsilon$$

ovvero

$$\ell - \varepsilon < a_n < \varepsilon + \ell$$

- Per assurdo ipotizziamo che $\ell < (>) 0$ e dimostriamo la contraddizione.

- Se scegliamo $\varepsilon = -(+)\frac{\ell}{2}$:

$$\underset{(<0)}{\frac{3}{2}\ell} < a_n < \underset{(<0)}{\frac{\ell}{2}} \qquad \left(\underset{(>0)}{\frac{\ell}{2}} < a_n < \underset{(>0)}{\frac{3}{2}\ell}\right)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$a_n < 0 \qquad\qquad\qquad\qquad a_n > 0$$

- Per ipotesi iniziale assurdo!

(12) Funzione derivabile

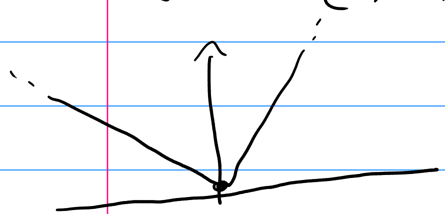
Def. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathring{I}$ se

$$\exists \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \exists \lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\ \exists \lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \\ \lim_{h\to0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \end{cases}$$

NOTA: data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ su un intervallo chiuso, i punti $x_0\in[a,b]$ ma $\notin]a,b[$ (in questo caso a e b) sono derivabili se esiste finito il limite destro o sinistro

ES.

$$f=|x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

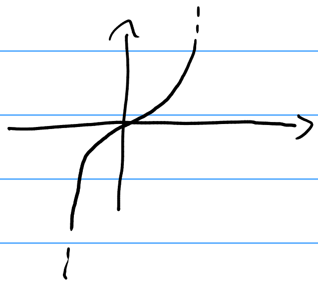


$x_0=0$ é derivabile?

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}-\frac{h}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1 \qquad \underbrace{1\neq -1}_{x_0 \text{ non é derivabile}}$$

$$f=x|x| = \begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$



$x_0=0$ é derivabile?

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}-\frac{h^2}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0^+}=0$$

Derivate di funzioni elementari

- $f(x)=x^n \qquad f'(x)=nx^{n-1}$

<u>Dim</u> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}x^{n-j-1}h^j=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j+1}x^{n-j-1}h^j}_{\to 0}=nx^{n-1}$$

Se vogliamo dimostrare per $n\in\mathbb{R}$,

$$x^n=e^{n\ln x} \qquad (e^{n\ln x})'=e^{n\ln x}\cdot nx^{-1}=x^n\cdot nx^{-1}=nx^{n-1}$$

$\square$

- $(\sin x)' = \cos x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x$$

$$= \frac{h}{2} \sin x + \cos x = \cos x$$

- $(\cos x)' = -\sin x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \sin x = -\sin x$$

- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)}{h\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{h \cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cos x \sin(x+h) - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cos x(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x(\cos x \cos h - \sin x \sin h)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\sin h(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos(x+h)\cos x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

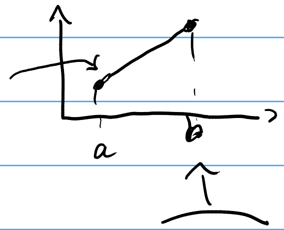
(13) Minimi e Massimi

<u>Def.</u> data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ è un punto di min/max relativo se:

$$\exists \delta > 0 . \forall x \in A \cap I(x_0, \delta) .$$

$$f(x) \geq (\leq) f(x_0)$$

$f'(x_0) \neq 0$!



(14) Fermat

- Data una funzione $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, se $x_0 \in]a, b[$ è un punto di min/max ed è derivabile, allora:

$$f'(x_0) = 0$$

— Prendiamo $x_0 \in]a, b[$ punto di min. rel., allora

$\exists \delta > 0 . \forall h \in \mathbb{R} . |h| < \delta . f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$

— Se $h \neq 0$ abbiamo che:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 & h > 0 \\ \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 & h < 0 \end{cases}$$

permanenza segni

— Per un lemma fatto in precedenza,

$$\begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'_+(x_0) \geq 0 \\ f'_-(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

— Essendo derivabile in x_0, $f'_+ = f'_- = 0$ Qed.

(15) Teorema di Rolle

- Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$ t.c. $f(a) = f(b)$, si ha che $\exists\, c \in]a,b[$.

$$f'(c) = 0$$

Dim

- Per Weierstrass, sappiamo che esistono un MAX e un MIN assoluti $\in [a,b]$.

- Se sia il MAX che il min coincidono con a e b, allora abbiamo una funzione costante t.c.
  $\forall x \in]a,b[\,.\, f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ (o viceversa) ma $f(a) = f(b)$
  quindi $f(x) = f(a) = f(b) \;\; \forall x \Rightarrow f'(x) = 0$

- Se almeno un MAX/MIN $\in]a,b[$, allora per il teo. di Fermat $f'(\text{MAX}/\text{MIN}) = 0$

(16) Teorema di Lagrange

- Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, allora

$$\exists\, c \in]a,b[\,.\, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Dim

- Dobbiamo dimostrare che

$$\exists c \in]a,b[\,.\, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- Costruiamo una funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = f(x) + Kx \qquad K \in \mathbb{R}$$

- Essendo somma di funzioni continue, $g(x)$ è continua su $[a,b]$. È anche derivabile su $]a,b[$

- Quindi se $g(a) = g(b)$ possiamo usare Rolle, vediamo come scegliere K per questo fine:

$$g(a) = g(b) \iff f(a) + Ka = f(b) + Kb$$

$$K = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$$

- Allora $\exists c \in]a,b[$ t.c. $g'(c) = 0$,
ma $g'(c) = f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$, quindi:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

16.1 Corollario:

Data una funzione $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, derivabile su $]a,b[$ t.c. $\forall x \in]a,b[\,.\, f'(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = K \qquad K \in \mathbb{R}$$

- Prendiamo due punti $x_1, x_2 \in]a,b[\,.\, x_1 < x_2$.
Sapendo che che $g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \,.\, g(x) = f(x)$ é continua su $[x_1, x_2]$ e derivabile su $]x_1, x_2[$ possiamo usare Lagrange e dire che:

$$\exists c \in]x_1, x_2[\,.\, f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Ma per ipotesi $f'(c) = 0$, quindi

$$\forall x_1, x_2 \in]a,b[\,.\, x_1 < x_2 : \ f(x_1) = f(x_2) = K$$

17 Cauchy

- Date $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ derivabili su $]a,b[$ e con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$.

$$\exists c \in]a,b[\,.\, \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dim (Molto simile a Lagrange)

- Costruisco una funzione $h: [a,b] \to \mathbb{R}$, che essendo somma di funzioni continue e derivabile é continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$

$$h(x) = f(x) + g(x) K$$

- Scegliamo un K in modo che $h(a) = h(b)$, che ci permetterebbe di usare Rolle:

$$h(a) = h(b) \Leftrightarrow f(a) + g(a)K = f(b) + g(b)K$$

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$$

$\rightarrow$ possiamo farlo dato che se fosse 0, allora per Rolle $\exists c \in]a,b[\,.\, g'(c) = 0$ che é in contraddizione con le ipotesi

- Per Rolle $\exists c \in]a,b[\,.\, h'(c) = 0$

$$h'(c) = f'(c) + K g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = -K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(18) Monotonia di una funzione data la sua derivata

- Data $f:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$, se $\forall x \in]a,b[$:

  - $f'(x) \geq (\leq) 0 \Longleftrightarrow f$ é crescente (decrescente)
  - $f'(x) > (<) 0 \Rightarrow f$ é STRETTAMENTE crescente (decrescente)

Dim $\Rightarrow$

- abbiamo $f:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con $f'(x) \geq 0$.

Scegliamo due punti $x_1, x_2 \in]a,b[\,.\, x_1 < x_2$. Sappiamo che f é continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, quindi posso usare Lagrange:

$$\exists c \in]x_1, x_2[\,.\, f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Per ipotesi, sappiamo che $x_2 - x_1 > 0$ e che $f'(c) \geq 0$.

Ciò implica che $f(x_2) \geq f(x_1)$. $\square$

$\Leftarrow$) Assumiamo di avere $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile con $f(x_2) \geq f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in]a,b[. x_2 > x_1$. Dobbiamo dimostrare che $\forall x \in]a,b[. f'(x) \geq 0$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

- Per derivabilità e permanenza del segno

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$$\underbrace{f'_+(x_1) = f'_-(x_1)}_{\text{derivabilità}} = f'(x_1) \geq 0 \quad \forall x_1 \in]a,b[$$

$\square$

(19) De L'Hopital
(limite al finito)

- Dati $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, t.c. dato $x_0 \in]a,b[$. $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f, g derivabili su $]a,b[\setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[\setminus \{x_0\}$:

- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(e $g(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$)

Dim

- Dobbiamo dimostrare che $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

ovvero che $\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \wedge \ldots$

(Ne dimostriamo uno poi l'altro é analogo)

- Riscrivendolo per successioni, dobbiamo dimostrare che $\forall a_n \, . \, \forall n \in \mathbb{N} \, . \, a \leq a_n < x_0 \, . \, a_n \xrightarrow[+\infty]{} x_0$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} \overset{?}{=} \ell$$

- Dato che sappiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, possiamo sottrarli sopra e sotto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{g(a_n) - g(x_0)} \overset{?}{=} \ell$$

- Restringendo il dominio ad $[a_n, x_0]$ possiamo applicare Cauchy e dire:

$$\exists c_n \in \,]a_n, x_0[\, . \, \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(a_n) - f(x_0)}{g(a_n) - g(x_0)}$$

- Dato che $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$, $a_n < c_n < x_0 \Rightarrow c_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{g(a_n) - g(x_0)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(forma $\frac{\infty}{\infty}$)

- Date $f, g : \,]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabili, con $x_0 \in \,]a, b[$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in \,]a, b[\setminus \{x_0\}$,

$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow$
- $g(x) \neq 0$ per $x \to x_0$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

- Limite al finito da sinistra e destra

Dati $f, g:]a, b[\to \mathbb{R}$, derivabili con

- $\lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} g(x) = \infty \vee 0$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
- $\exists \lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \ell$

allora:

$$\lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \qquad \left(\text{e } g(x) \neq 0 \text{ per } \begin{matrix} x \to a^+ \\ (x \to b^-) \end{matrix} \right)$$

- Limite al $\pm\infty$ $\quad (I)$
  $(]a, +\infty[)$

Dati $f, g:]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ derivabili t.c.:

- $\lim_{\substack{x \to -\infty \\ (+\infty)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ (+\infty)}} g(x) = \infty \vee 0$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
- $\exists \lim_{\substack{x \to -\infty \\ (+\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

allora

$$\exists \lim_{\substack{x \to -\infty \\ (+\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \qquad \left(\text{e } g(x) \neq 0 \text{ per } x \to \begin{matrix} -\infty \\ (+\infty) \end{matrix} \right)$$

20 Definizione o-piccolo

$g(x) \neq 0 \ \forall x \in A \setminus \{x_0\}$

punti di accumulo

Dati $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ con $x_0 \in D(A)$, allora $f(x)$ é o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

21 Taylor

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x} = 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \overset{(\text{per } x \to 0)}{o(x)}$$

II grado

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + ax^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - ax^2}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - 2ax}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2!} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - a = \frac{1}{2!} f''(0) - a = 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + o(x^2)$$

Teorema di Peano

Data $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ t.c. $a < 0 < b$, sia f derivabile in 0 n volte. L'approssimazione migliore della funzione di grado $\leq n$ é la seguente

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}} + o(x^n) \qquad (0! = 1)$$

$T_n(x) \to$ é l'unico polinomio di grado $\leq n$ con questa proprietà

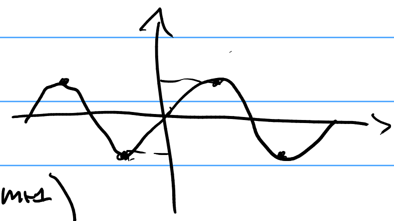
(Può essere generalizzato in questo modo)

$\bar{x} \in]a,b[$, derivabile n-volte in $\bar{x}$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{k}(\bar{x})\frac{(x-\bar{x})^k}{k!} \qquad \left(+o\left((x-\bar{x})^n\right)\right)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$\sin(-x) = -\sin x$



$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{(2k+1)} + \underbrace{o\left(x^{2m+1}\right)}_{o\left(x^{2m+2}\right)}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2m}\right) \qquad \left(o\left(x^{2m+1}\right)\right)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! \quad \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

$-(1+x)^{-2}$

$2(1+x)^{-3}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{} \frac{(k-1)!}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = -$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!\,k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$1, \alpha, \alpha(\alpha-1)$

$$\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!}$$

RIASSUNTINO

- Rad(p) non è razionale se p è un numero primo (con dimostrazione).

- Eliminazione not (suppongo $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ e dimostra contradd.)
- m^2 ha gli stessi fattori primi di m, e $m^2 = p n^2$
- m e n sono entrambe divisibili per p

- Infinità dei numeri primi (con dimostrazione).

- Per RAA suppongo $1 < p_1 < \dots < p_n$ primi
- $q = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ é primo e $> p_n$, ASSURDO

- Numerabilità di Q e Non numerabilità di R (con dimostrazione).

- Per Q fai quadrato di frattI con funzione SU
- per R dimostra che $[0,1]$ non é numerabile con diagonalizzazione di Cantor

- Definizione di radice aritmetica e prova della sua esistenza in R.

(d.d. $\forall a \in \mathbb{R}_+ . \exists b \in \mathbb{R}_+ . b^2 = a$)

- Creo l'insieme $A = \{c \in \mathbb{R} \mid c \geq 0 \wedge c^2 \leq a\}$
- Dimostro che é sup. lim. (usando $c^2 \leq (a+1)^2 \iff c \leq a+1$)
- Dato $b := \sup A$, dimostro che $b^2 = a$ con RAA:
  - $b^2 < a$
    - Uso lemma per dire che $\exists \epsilon > 0 . (b+\epsilon)^2 < a$, che é impossibile perché $b+\epsilon \in A$ solo se $\epsilon \leq 0$

- $b^2 > a$
  - Uso Lemma per dire che $\exists \epsilon > 0.\ (b-\epsilon)^2 > a$
  - Quindi $(b-\epsilon)^2 \geq c^2$, ovvero $\underline{b - \epsilon \geq c}$.
  - Ma essendo b il maggiorante minore $b-\epsilon \geq b$
    $\Rightarrow \epsilon \leq 0$

- Per dimostrare che é unica, bisogna prendere due numeri b_1, b_2 che sono entrambe radici di a ($b_1^2 = b_2^2 = a$) e usare il Lemma per cui $b_1^2 = b_2^2 \iff b_1 = b_2$

- Esistenza del limite di una successione numerica monotona

- Dimostriamo che il limite di una successione $a_n \nearrow = \underline{\sup(a_n)_n}$

  - Se $(a_n)_n$ é illimitato dimostro $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ usando def. limite di successione e il fatto che $(a_n)_n$ non ha maggioranti

  - Se $(a_n)_n$ é limitato, allora $\sup(a_n)_n = L$ e dimostro che $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} L$ usando def. limite di successioni e il fatto che L é maggiorante di $(a_n)_n$

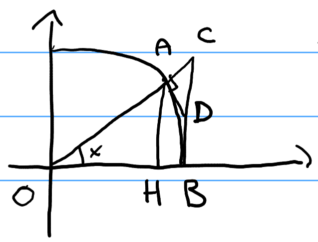
- Il numero e di Neper (Eulero) $\left(e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

- Dimostriamo che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ha un limite reale dimostrando che é crescente e che $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ é superiormente limitata:

- Dimostriamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ usando **Bernulli**

- Dimostriamo che è sup. limitato usando il **Binomio di Newton**

- Limiti notevoli: (sin x)/x per x -->0



$\overset{\frown}{AB} = x$ (radianti)

$\overline{AH} = \sin x$ $\quad \overline{CB} = tg\, x$

$\overline{AH} \leq \overset{\frown}{AB} \leq \overline{CB}$ (per varie prop. geometriche)

— Teo. carabinieri

- Caratterizzazione del limite in un punto tramite il limite destro e sinistro.

$$- \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall x \in D(f) . \begin{cases} x_0 < x < x_0 + \delta & (+) \\ x_0 - \delta < x < x_0 & (-) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} |f(x) - \ell| < \varepsilon & (\mathbb{R}) \\ f(x) > \varepsilon & (+\infty) \\ f(x) < -\varepsilon & (-\infty) \end{cases}$$

$$- \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) \\ \text{sono uguali} \end{cases}$$

- Teorema degli zeri di una funzione continua $\left(\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continua con } f(a)f(b)<0 \Rightarrow \\ \exists c\in]a,b[\,.\, f(c)=0 \end{array} \right.$

  - Definisco un algoritmo che dimezza la distanza ab, tenendo sempre $f(a)<0$ e $f(b)>0$

  - Se l'algoritmo non termina, dimostro che il limite delle successioni a_n e b_n convergono (monotone limitate) e sono uguali ($\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0 \Leftarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$)

  - Usando la continuità per successioni trovo che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) := f(c)$

  - Dimostro che $f(c)=0$ usando lemma:

$$\left.\begin{array}{l} f(a_n)<0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n)\le 0 \\ f(b_n)>0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(b_n)\ge 0 \end{array}\right\} \text{uguali solo quando } f(c)=0$$

- Definizione di funzione derivabile.

  - Un punto $\underbrace{x_0\in \mathrm{Dom}(f) \text{ t.c. } \exists r>0 \,.\, B(x_0,r)\subseteq \mathrm{Dom}(f)}_{x_0\in \mathring{I} \text{ (é interno)}}$ é derivabile se:

(simile al limite) $\left\{ \begin{array}{l} \exists f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \to \text{(diverso dal limite che esiste anche se infinito)} \\ \text{sono uguali} \end{array} \right.$

- Funzioni elementari derivabili: polinomi, sin x, cos x, tg x

  - $x^n = e^{n\ln x}$ (poi fai derivata)

  - $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ usa definizione limite e formule di addizione seno coseno e limiti notevoli $\left(\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x - 1}{x^2}\right)$

- Teorema di Fermat $\left(\begin{array}{c} x_0 \text{ min rel}, f \text{ derivabile in } x_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{array} \right)$

- Uso la def. di min. rel. per dimostrare che $\exists \delta > 0. \forall |h| < \delta, f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$

Per $h \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $\cdot \geq 0$ se $h > 0$; $\cdot \leq 0$ se $h < 0$

- Uso la permanenza del segno, la definizione di derivata sx/dx e la derivabilità in x_0 per dimostrare che le due derivate coincidono solo se $f'(x_0) = 0$

- Teorema di Rolle $\left(\begin{array}{l} f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua e derivabile (anche solo su }]a,b[) \\ \text{se } f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[. f'(c) = 0 \end{array} \right)$

- Si usa Weierstrass e Fermat

- Teorema di Lagrange $\left(\begin{array}{l} f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua e derivabile (anche solo su }]a,b[\\ \exists c \in]a,b[. f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array} \right)$

- Si crea una funzione $g(x) = f(x) + xK$ (che si dimostra essere continua e derivabile) e si sceglie K in modo da poter usare Rolle

- Corollario di Lagrange $\left(\begin{array}{c} f:]a,b[\text{ derivabile con } f'(x) = 0 \ \forall x \\ f(x) = K \end{array} \right)$

- Dimostro che per ogni due punti di $]a,b[$, usando Lagrange questi due punti sono uguali, quindi tutti i punti sono uguali (a K)

- Teorema di Cauchy $\left(\begin{array}{l} f,g: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua derivabile (anche solo su }]a,b[\text{)} \\ \text{se } g'(x) \neq 0 \ \forall x . \ \exists c \in]a,b[. \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \end{array} \right)$

– Si crea una funzione $h(x) = f(x) + x\,g(x)$ e si procede come Lagrange.

- Relazione fra monotonia di una funzione e il segno della sua derivata prima

($f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ crescente, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strett. crescente)

Prendo due punti casuali

$\Rightarrow$) Uso Lagrange (simile al corollario)

$\Leftarrow$) Uso permanenza del segno e derivabilità

- I teoremi di De L'Hopital

Basta che x_0 sia punto di accumulo della derivata

(1) $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $x_0 \in]a,b[$, derivabile su $]a,b[\setminus \{x_0\}$

$g'(x) \neq 0$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ (\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Dim

– Prendo solo il limite sinistro e lo trasformo in un limite di successione con $a \leq a_n < x_0$.

– Considero l'intervallo $[a_n, x_0]$ e applico Cauchy trovando l'esistenza di $a_n < c < x_0$ t.c. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x_0) - f(a_n)}{g(x_0) - g(a_n)}$

– Per teo. carabinieri, per $n \to +\infty$ $c \to x_0$, e per Hp $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Quindi posso scrivere

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$