

Analisi (M2)

Appunti

Alex Bastianini

Contents

Chapter 1	Introduzione agli appunti	Page 3
1.1	Le varie parti degli appunti	3
Chapter 2	Integrali	Page 4
2.1	Motivazioni	4
2.2	Area sottesa a una curva Costruzione integrale di Riemann — 4 • Proprieta' dell'integrale — 5 • Media Integrale — 6	4
2.3	Primitive di una funzione	8
2.4	Funzioni integrali Teoremi fondamentali del calcolo integrale — 9 • Integrazione per parti — 9 • Cambio di variabile — 10	8
2.5	Integrali generalizzati (impropri)	10
Chapter 3	Spazio euclideo \mathbb{R}^n	Page 12
3.1	Operazioni su \mathbb{R}^n Proprieta' del prodotto scalare (euclideo) — 12	12
3.2	Ortogonalita'	12
3.3	Norma euclidea Proprieta' della norma — 13	13
3.4	Vettore normalizzato	13
3.5	Coordinate polari Prodotto scalare in coordinate polari — 14	13
3.6	Distanza tra punti Punto di minima distanza da una retta — 15	14
3.7	Intorni	15
3.8	Successioni in \mathbb{R}^n	15
Chapter 4	Funzioni a piu' variabili	Page 16
4.1	Insiemi di livello	16
4.2	Continuita'	16
4.3	Derivata parziale Derivate parziali in \mathbb{R}^n — 18	17
4.4	Derivabilita' e continuita'	18
4.5	Differenziabilita' o piccolo in piu' variabili — 18	18
4.6	Continuita' di una funzione differenziabile	19

4.7	Condizioni sufficienti per la differenziabilita'	19
4.8	Derivate direzionali	20
	Direzione di massima crescita — 21	
4.9	Curve in \mathbb{R}^n	21
	Derivata di una curva — 21 • Altre definizioni — 23 • Curvatura — 23 • Derivata di una funzione scalare lungo una curva — 23 • Ortogonalita' gradiente-insiemi di livello — 25	
4.10	Punti di massimo e minimo in piu' dimensioni	26
	Condizioni del primo ordine — 27 • Condizioni di secondo ordine — 27 • Classificazione forme quadratiche (n=2) — 28	

Chapter 1

Introduzione agli appunti

Questo e' un **test** per vedere come viene fuori un paragrafo di testo normale. Il testo sembra troppo piccolo pero.

1.1 Le varie parti degli appunti

Diversi box colorati per indicare diverse parti degli appunti:

Definition 1.1.1: Definizione

Theorem 1.1.1 Teorema

Dimostrazione:



Corollary 1.1.1 Corollario

Note:

Una roba importante

Chapter 2

Integrali

2.1 Motivazioni

Motivazioni:

- Calcolo di aree di figure curvilinee
- Lunghezze di curve (non lo faremo)

Le nostre figure curvilinee sono sottografici di funzioni.

2.2 Area sottesa a una curva

Definition 2.2.1: Area sottesa

Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

2.2.1 Costruzione integrale di Riemann

Speziamo un intervallo $[a, b]$ in $n \in \mathbb{N}$ sottointervalli uguali. L'ampiezza di ciascun intervallo e' di $\frac{b-a}{n}$.

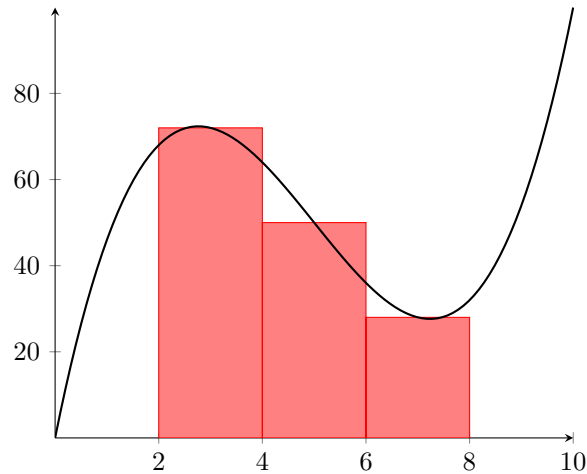
- $x_0 = a$
- $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$
- $x_n = b$

In ogni intervallo fisso un punto arbitrario ϵ_n

Definition 2.2.2: Somma di Riemann associata a una scomposizione

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, fatta la costruzione precedente (spezzettamento), $\forall n \in \mathbb{N}$ la somma di Riemann n-esima di f e' il numero seguente:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\epsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$



(2.1)

Esempio di somma di Riemann di una funzione $f : [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ con $n=3$:

Theorem 2.2.1 Integrabilità delle funzioni continue

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sia (S_n) la successione delle somme di Riemann, allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$$

E non dipende da quale ϵ_n scegliamo per ogni segmento.

Definition 2.2.3: Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

La x è una variabile **muta**.

Note:

- Se $\forall x \in [a, b]. f(x) \geq 0$, allora $\int_a^b f = \text{Area del sottografico}$.
- $\int_a^a f = 0$ (poiché $\forall n \in \mathbb{N}. S_n = 0$)
- $f(x) = k$ (funzione costante) $\implies \int_a^b f = (b - a)k$ (Area del rettangolo)

2.2.2 Proprietà dell'integrale

Linearità

Se abbiamo due funzioni f, g continue su $[a, b]$, $A, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (Af(x) + \mu g(x))dx = A \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Additività

Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, dato $c \in [a, b]$, vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Note:

Convenzione su integrali con estremi "rovesciati":

Dato $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

In questo modo possiamo generalizzare la proprietà addittiva togliendo dall' ipotesi la restrizione sul valore di c .

Monotonia

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\forall x \in [a, b]. f(x) \geq 0$, allora:

$$\int_a^b f \geq 0$$

2.2.3 Media Integrale**Premessa 1****Theorem 2.2.2 Valori intermedi**

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $x_1, x_2 \in [a, b]. f(x_1) \leq f(x_2)$, allora:

$$\forall y \in [f(x_1), f(x_2)]. \exists c \in [x_1, x_2]. f(c) = y$$

Premessa 2**Theorem 2.2.3 Weierstrass**

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b]. \forall x \in [a, b]. f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

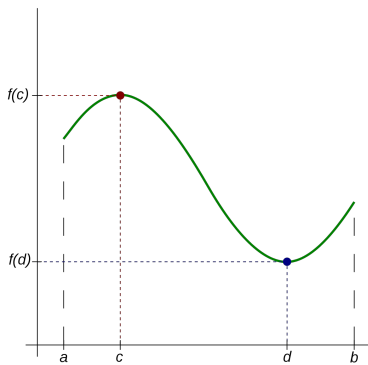
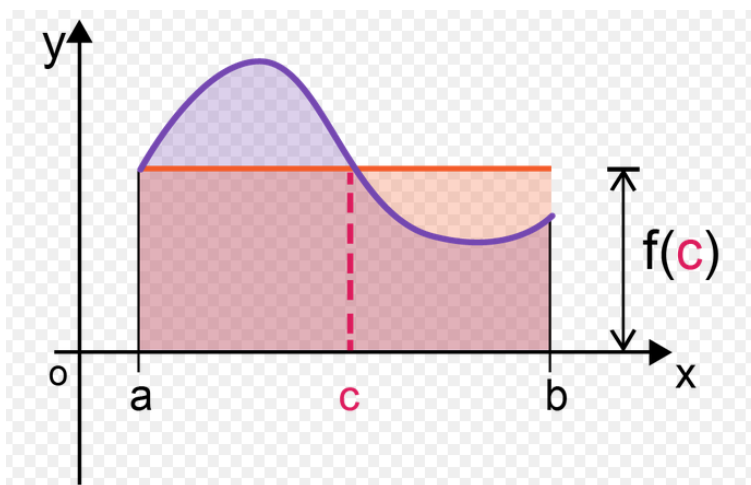


Figure 2.1: Esempio di Weierstrass

Theorem 2.2.4 Media integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists c \in [a, b]. \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$



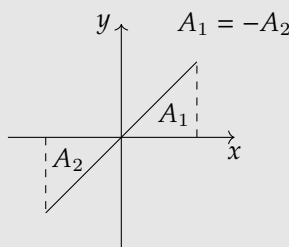
Quindi esiste un punto c in $[a, b]$ t.c. il rettangolo che ha come base $b-a$ e come altezza $f(c)$ ha la stessa area dell'integrale di f da a a b .

Dimostrazione della media integrale: Sia f continua su $[a, b]$. Per Weierstrass abbiamo che $\exists x_1, x_2 \in [a, b]. \forall x \in [a, b]. f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Per la proprietà di monotonia risulta $\int_a^b f(x_1)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_2)dx$, ovvero $f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)$. Quindi per il teorema dei valori intermedi $\exists c \in [a, b]. f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. ☺

Note:

La continuità di f è **necessaria**. Ex:

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \implies \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0 = f(0) (c = 0)$$



Se considerassi $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che g è integrabile, e che vale

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$$

Pero' non esiste $c \in [-1, 1]$ tale che $g(c) = 0$, quindi non soddisfa la media integrale.

2.3 Primitive di una funzione

Definition 2.3.1: Primitiva di f

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

Una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice primitiva di f su A se vale

$$\forall x \in A. F'(x) = f(x)$$

Example 2.3.1 (Primitiva)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x$ e' una primitiva di f su \mathbb{R} . Infatti $\forall x. \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

Note:

$\forall k \in \mathbb{R}$, la funzione $G(x) = \sin(x) + k$ e' anchessa primitiva di f . Quindi se F e' primitiva di f su A allora ci sono infinite primitive di f su A (una per ogni $k \in \mathbb{R}$).

Domanda: sono tutte le possibili primitive?

Proposition 2.3.1 Caratterizzazione delle primitive di una funzione su un intervallo

Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Siano $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $G :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ due primitive di f su $]a, b[$.

Allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall x \in]a, b[. G(x) = F(x) + k$$

Ovvero F e G "differiscono per una costante".

Dimostrazione: Considero $H :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, H(x) = G(x) - F(x)$. Sappiamo che $F'(x)=f(x)$ e $G'(x)=f(x)$ (def. primitiva). $\frac{d}{dx} H(x) = \frac{d}{dx} G(x) - \frac{d}{dx} F(x) = f(x) - f(x) = 0$. Dunque H ha derivata nulla su $]a, b[$, quindi (per coroll. Lagrange) H e' costante. ☺

2.4 Funzioni integrali

D'ora in poi $A =]a, b[$.

Definition 2.4.1: Funzione Integrale

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $c \in A$. Introduco $I_c : A \rightarrow \mathbb{R}$:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

Nota: I_c e' ben definita essendo f continua.

Note:

1. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, c \in A, I_c(x) = \int_c^x f \implies I_c(c) = \int_c^c f(t) dt = 0$.
2. Dati $c, c' \in A, f : A \rightarrow \mathbb{R} \implies I_c(x) - I_{c'}(x) = \text{costante}$. Infatti:

$$I_c(x) - I_{c'}(x) = \int_c^x f - \int_{c'}^x f = \int_c^x f + \int_x^{c'} f = \int_c^{c'} f(t) dt = k$$

2.4.1 Teoremi fondamentali del calcolo integrale

Theorem 2.4.1 Fondamentale del calcolo sulla derivata della funzione integrale

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $c \in A$. Sia I_c la funzione integrale, allora:

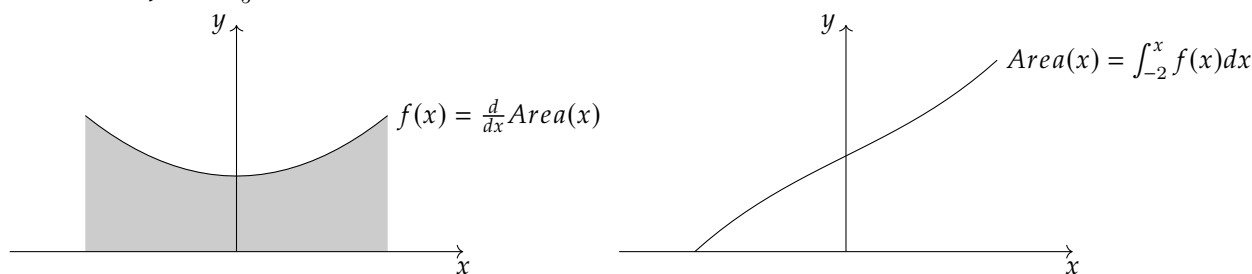
$$I_c \text{ e' derivabile in ogni punto } x \in A \text{ e } I'_c(x) = f(x)$$

Cioe' $\frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x), \forall x \in A$, quindi I_c e' **primitiva** di $f(x)$.

Una possibile interpretazione di questo teorema e' quello della derivata dell'area sottesa che e' uguale alla funzione stessa, ovvero:

$$\forall x. f(x) \geq 0 \implies \frac{d}{dx} \text{Area} = f(x)$$

$$A = [-2, 2], f(x) = \frac{x^2}{5} + 1:$$



Note:

Il teorema assicura che ogni funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua ammette primitive.

Dimostrazione: $f : A \rightarrow \mathbb{R}, c \in A, I_c : A \rightarrow \mathbb{R}$. Devo calcolare la derivata di I_c . Calcolo $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h}$, che equivale a $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$. Per teo. media integrale sappiamo che $\exists c \in [x, x+h]. f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$, quindi possiamo riscrivere la formula come $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(c_h)$. Dato che $h \rightarrow 0^+$ e $x \leq c \leq x+h$, per il teo. dei carabinieri $c \rightarrow x$, quindi $\frac{d}{dx} I_c(x) = f(x)$. \odot

Theorem 2.4.2 Fondamentale del calcolo per integrali definiti

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua su A . Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva di f su A . Dati $a, b \in A$, vale:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)] = [F(x)]_a^b$$

Dimostrazione: Sia $c \in A, I_c : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale ($I_c(x) = \int_c^x f$). Per il teo. fond. del calc. sulla derivata di I_c , I_c e' una primitiva di f su A . Per le proprieta' delle primitive, $\exists k \in \mathbb{R}. \forall x \in A. F(x) = I_c(x) + k$.

$$F(b) - F(a) = (I_c(b) + k) - (I_c(a) + k) = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

\odot

2.4.2 Integrazione per parti

Si parte dalla regola del prodotto delle derivate ($\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$) per trovare una regola di integrazione.

Theorem 2.4.3 Integrazione per parti

Dati $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, A intervallo aperto e sia F primitiva di f su A con F, f, g continue, g derivabile e g' continua:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Quindi usando il teorema fondamentale:

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

2.4.3 Cambio di variabile

Theorem 2.4.4 Formula del cambio di variabile

Date $h : I \rightarrow A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $I, A \subseteq \mathbb{R}$ e $\exists (f \circ h) : I \rightarrow \mathbb{R}$. $(f \circ h)(t) = f(h(t))$. f continua, h derivabile e h' continua. Presi $\alpha, \beta \in I$, vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t)dt$$

Questa e' la versione generalizzata del teo. fond. del calcolo

Dimostrazione: Date due funzioni $G, H : I \rightarrow \mathbb{R}$. $G(z) = \int_{\alpha}^z f(h(t))h'(t)dt$, $H(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx$, dobbiamo dimostrare che $G(z) = H(z)$. Ci riduciamo a dimostrare che:

1. $G(\alpha) = H(\alpha)$: ovvio perche' integrali su intervallo degenere ($G(\alpha) = H(\alpha) = 0$)
2. $\forall z \in I. G'(z) = H'(z)$:
 - $G'(z) = \frac{d}{dz} \int_{\alpha}^z f(h(t))h'(t)dt = f(h(z))h'(z)$
 - $H'(z) = \frac{d}{dz} \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx = f(h(z))h'(z)$ (generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo)

☺

Note:

1. t integrata in α, β , allora x sara' integrata in $h(\alpha), h(\beta)$.
2. dx si e' trasformato in $h'(t)dt$ ($\frac{d}{dt}h(t) = h'(t) \implies dh(t) = h'(t)dt$)

2.5 Integrali generalizzati (impropri)

Definition 2.5.1: Integrali generalizzati su intervalli illimitati

Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e' **convergente** se e' finito il limite $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f(x)dx := \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Altrimenti se il limite diverge o oscilla e' detto **divergente** (o oscillante).

La definizione e' analoga per $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

Definition 2.5.2: Integrali generalizzati su intervalli limitati

Sia $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ e' **convergente** se il limite $\lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x)dx$ e' finito. Altrimenti se il limite diverge o oscilla e' detto **divergente** (o oscillante). La definizione e' analoga per $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

Chapter 3

Spazio euclideo \mathbb{R}^n

(Spazio **euclideo** = c'è il prodotto scalare)

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. x_j \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \mathbb{R}$ (n volte).

- $n = 1$ retta reale
- $n = 2$ piano cartesiano
- $n = 3$ spazio ordinario

3.1 Operazioni su \mathbb{R}^n

- Somma di vettori: $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$. Definiamo $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- Prodotto di $x \in \mathbb{R}^n$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, definiamo $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Definition 3.1.1: Prodotto scalare

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo il prodotto scalare $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$.
Notazione alternativa: $\langle x, y \rangle = x \cdot y$.

Note:

Il prodotto scalare non dà un nuovo vettore, ma solo un valore scalare!

3.1.1 Proprietà del prodotto scalare (euclideo)

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n. \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (simmetria)
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ (linearità nel primo argomento)
Per simmetria vale $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$ (linearità nel secondo argomento)
- $\forall x \in \mathbb{R}^n. \langle x, x \rangle \geq 0$, inoltre $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = (0, 0, \dots, 0) = \underline{0}$ (vettore nullo).

3.2 Ortogonalità

Definition 3.2.1: Vettori ortogonali

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** se vale:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

3.3 Norma euclidea

Sinonimi: modulo, lunghezza

Definition 3.3.1

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$$

Rappresenta la "lunghezza" del vettore usando il teorema di Pitagora.

Notazione alternativa: $|x|$

3.3.1 Proprietà della norma

- $\forall x \in \mathbb{R}^n. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n. \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n. |x + y| \leq |x| + |y|$ (Disuguaglianza triangolare)

3.4 Vettore normalizzato

Definition 3.4.1: Normalizzato

Dato $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, cerco $r > 0$ t.c.

$$|rx| = 1$$

Visto che $r > 0$, $r|x| = 1$ quindi $r = \frac{1}{|x|}$.

Il vettore $\frac{x}{|x|}$ ha norma 1 e si dice **normalizzato** di $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\frac{x}{|x|}$ si dice **vettore unitario**.

Note:

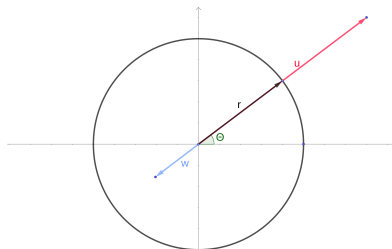
Possiamo scrivere $x = |x| \cdot \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$.

3.5 Coordinate polari

In \mathbb{R}^2 , ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ si scrive nella forma $|x, y| \cdot (\frac{x}{|x, y|}, \frac{y}{|x, y|})$. L'insieme di coordinate $\{(\frac{x}{|x, y|}, \frac{y}{|x, y|}) | x, y \in \mathbb{R}\}$ forma una **circonferenza unitaria** (dato che il loro modulo è sempre 1), quindi $\exists \theta \in [0, 2\pi[$ tale che $(\cos\theta, \sin\theta) = (\frac{x}{|x, y|}, \frac{y}{|x, y|})$ (θ si chiama "**argomento**" di (x, y)). Ponendo $r = |x, y| =$ modulo, scriviamo:

$$(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

dove $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ si chiamano **coordinate polari** di (x, y) .



- r = vettore unitario

3.5.1 Prodotto scalare in coordinate polari

Considero due vettori $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $(n, o) = (\rho \cos \gamma, \rho \sin \gamma)$. Il loro prodotto scalare $\langle (x, y), (n, o) \rangle$ diventa $r \rho \cos \theta \cos \gamma + r \rho \sin \theta \sin \gamma$, che può essere riscritto come $r \rho \cos(\gamma - \theta)$, ovvero:

$$|(x, y)| \cdot |(n, o)| \cdot \cos(\gamma - \theta)$$

Proposition 3.5.1 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

L'uguaglianza vale solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Note:

Vale in ogni $\mathbb{R}^n \forall n \in \mathbb{N}$

Proposition 3.5.2 Quadrato di binomio

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 \langle x, y \rangle$$

Generalizzazione di Pitagora (In due dimensioni diventa il teorema di Carneau).

Proposition 3.5.3 Disuguaglianza Triangolare

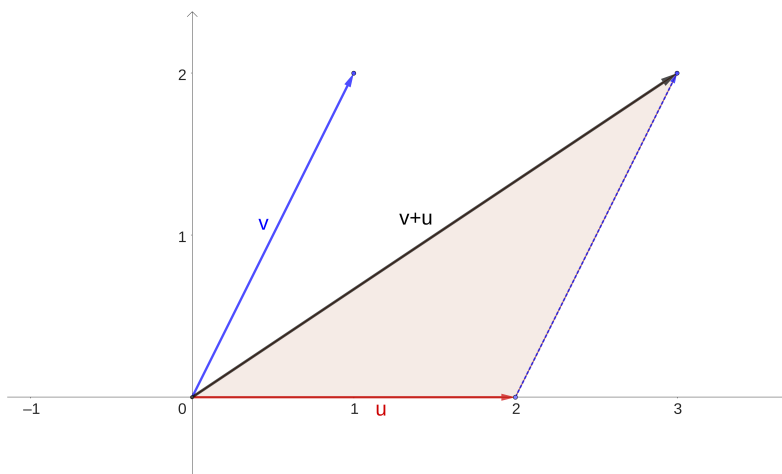
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha che:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

: Dimostriamo il quadrato della disuguaglianza per poter usare il quadrato di binomio:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 \\ \Rightarrow |x + y| &\leq (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

☺



3.6 Distanza tra punti

Definition 3.6.1: Distanza fra due punti

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distanza fra x e y è $|x - y|$

3.6.1 Punto di minima distanza da una retta

Problema $\mathbb{R}^n, v \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$. Considero le linee $l_v = \{tv | t \in \mathbb{R}\}$, cerco fra tutti i punti di l_v quello che ha minima distanza da x . Devo minimizzare la funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = |x - tv|$ = distanza fra x e tv

Proposition 3.6.1

Dati $v \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, il punto di minima distanza $\frac{\langle x, v \rangle}{|v|^2} v$ soddisfa:

$$\langle x - \frac{\langle x, v \rangle}{|v|^2} v, v \rangle = 0$$

Quindi il vettore che parte dal punto di minima distanza e arriva al punto x e' perpendicolare alla retta l_v .

3.7 Interni

Definition 3.7.1: Intorno sferico di un punto

Dato $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, poniamo

$$D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x - y| < r\}$$

$D(x, r)$ si dice disco di centro x e raggio r .

Definition 3.7.2: Insiemi aperti

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se:

$$\forall x \in A. \exists \epsilon > 0. D(x, \epsilon) \subseteq A$$

3.8 Successioni in \mathbb{R}^n

Una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' un vettore di k successioni: $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$ con $k \in \mathbb{N}$

Chapter 4

Funzioni a piu' variabili

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$, consideriamo funzioni $f : A \rightarrow B$ (A = dominio, B = codominio).
Casi modello:

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (funzioni scalari)
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ (cammini in \mathbb{R}^q)

4.1 Insiemi di livello

Definition 4.1.1

$A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. L'insieme di livello b di f e':

$$L_b = \{x \in A \mid f(x) = b\} = f^{-1}(b)$$

Se cammino lungo l'insieme di livello, la funzione corrispondente non cambia

4.2 Continuita'

Definition 4.2.1: Funzioni continue

$A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, k \in A$. Si dice che f e' continua in $k \in A$ se $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\begin{cases} x_n \in A & \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \longrightarrow k & k \longrightarrow +\infty \end{cases} \implies f(x_n) \longrightarrow f(k)$$

Proposition 4.2.1

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, k \in A$. Allora f e' continua in k se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0. \begin{cases} x \in A \\ |x - k| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(k)| < \epsilon$$

4.3 Derivata parziale

Definition 4.3.1: Derivata parziale

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$. Dati $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ si dice derivabile parzialmente rispetto a \bar{x} se:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$$

In modo analogo per $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$.

Definition 4.3.2: Gradiente

Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ammette derivate parziali $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, definiamo il **gradiente di f** come:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (funzione vettoriale)

Note:

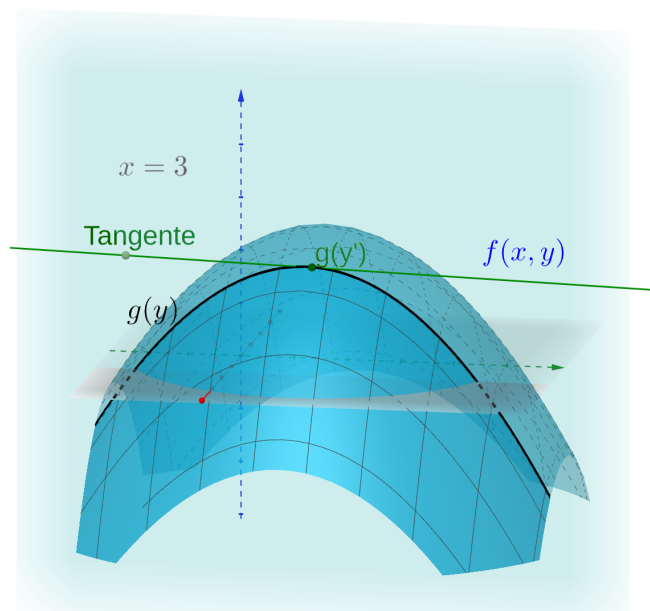
$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\bar{x}, \bar{y})$ fissato:

$$\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{x - \bar{x}}$$

Introduco una funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x, \bar{y})$, in modo che, facendo la normale derivata di g :

$$g'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$$

Abbiamo quindi trasformato una derivata parziale in una derivata "normale" fissando tutti i parametri tranne uno.



4.3.1 Derivate parziali in \mathbb{R}^n

In \mathbb{R}^n , data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo riscrivere la derivata parziale così:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}, \bar{y}) + t(1, 0)) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$$

Possiamo usare quindi le basi canoniche ($e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n(0, \dots, 1)$) per indicare per quale dei valori del vettore passato come parametro vogliamo derivare.

Definition 4.3.3

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Per $k = \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + te_k) - f(\bar{x})}{t}$$

4.4 Derivabilit  e continuit 

In \mathbb{R} , se una funzione era derivabile in un punto allora era anche continua, pero' se in piu' variabili non e' cos :(guardare es slide)

4.5 Differenziabilit 

In una dimensione, possiamo dire che:

$$\exists f'(\bar{x}) \in \mathbb{R} \iff f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h)$$

Quindi una funzione e' derivabile in un punto sse vale lo sviluppo di Taylor. Infatti, se sostituiamo x a $\bar{x} + h$, dove $x \rightarrow \bar{x}$ otteniamo il polinomio di Taylor di primo grado nel punto \bar{x} : $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$. Come vedremo, questa prposizione non vale quando aumentiamo le dimensioni. Infatti, solo in una dimensione differenziabilit  e derivabilit  coincidono.

4.5.1 o piccolo in piu' variabili

Definition 4.5.1: o piccolo

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $h \in A$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, assumendo che $0 \in A$, si dice che g e' **o piccolo** di $|h|^p$ (con $p \geq 0$) se:

1. $g(0) = 0$
2. $\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall h \neq 0. |h| < \delta. \frac{|g(h)|}{|h|^p} < \epsilon$

Example 4.5.1

Verifica le seguenti uguaglianze:

- $g(h, k) = h^2 + k^2 = o(|h + k|)$

$$h^2 + k^2 = |(h, k)|^2$$

Quindi:

$$\frac{|(h, k)|^2}{|(h, k)|} = |(h, k)|$$

Dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall 0 < |(h, k)| < \delta. |(h, k)| < \epsilon$, che possiamo fare mettendo $\delta = \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$.

Possiamo riscrivere questa definizione usando le successioni:

$$g(h) = o(|h|^p) \iff \forall (h_j)_{j \in \mathbb{N}}. \begin{cases} h_j \neq 0 \\ \lim_{j \rightarrow +\infty} (h_j) = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N} \implies \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{g(h_j)}{|h_j|^p} = 0$$

Definition 4.5.2: Differenziabilita' in due variabili

$(x, y), (h, k) \in \mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n$. Si dice che f e' differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) se:

1. $\exists \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}), \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})$
2. Vale lo sviluppo:

$$f((\bar{x}, \bar{y}) + (h, k)) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|) =$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h + \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k + o(|(h, k)|)$$

Per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

4.6 Continuita' di una funzione differenziabile

Sappiamo che l'esistenza delle derivate parziali non implica la continuita' della funzione. Mostriamo pero' che se sappiamo che una funzione e' differenziabile, allora sara' sicuramente continua.

Proposition 4.6.1 Differenziabilita' implica continuita'

Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se f e' differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, allora f e' continua in (\bar{x}, \bar{y}) .

:

⊗

4.7 Condizioni sufficienti per la differenziabilita'

Theorem 4.7.1

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assumo $\exists \partial_x f(\bar{x}, \bar{y}), \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})$ per ogni $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Suppongo che le derivate siano continue. Allora:

f e' differenziabile in ogni punto di \mathbb{R}^2

Note:

Questo teorema vale anche in \mathbb{R}^n . Inoltre le funzioni elementari soddisfano sempre le ipotesi nel loro dominio, quindi sono differenziabili.

Per dimostrare questo teorema, ci serve prima una proposizione che equivale al teorema di Lagrange, pero' in piu' dimensioni. Usando le derivate parziali, ci riduciamo a due casi (uno dove ci si muove lungo x , e uno lungo y) dove ci riduciamo ad una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sappiamo gia' dimostrare.

Proposition 4.7.1 Lagrange per derivate parziali

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivate parziali $\partial_x f, \partial_y f$ continue, $\forall (\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \in \mathbb{R}^2. \exists \delta, \bar{\delta} \in]0, 1[$ tali che:

$$\begin{cases} \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h} = \partial_x f(\bar{x} + \delta h, \bar{y}) \\ \frac{f(\bar{x}, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y})}{k} = \partial_y f(\bar{x}, \bar{y} + \bar{\delta} k) \end{cases}$$

Ora che abbiamo Lagrange per le derivate parziali, possiamo dimostrare il teorema:

Dimostrazione teo. differenziabilit : Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e siano le derivate parziali di f continue, dobbiamo dimostrare che:

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(|(h, k)|)$$

Riscriviamo la parte sinistra:

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = [f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y})]_1 + [f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})]_2$$

Ci riduciamo a dimostrare che:

$$\begin{aligned} \square_1 &= \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})k + o(|(h, k)|) \\ \square_2 &= \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})h + o(|(h, k)|) \end{aligned}$$

Analizziamo il caso \square_2 : usiamo Lagrange, che ci dice che $\exists \theta \in]0, 1[. \square_2 = \partial_x f(\bar{x} + \theta h, \bar{y})h$, quindi dimostriamo che questo equivale a $\partial f(\bar{x}, \bar{y})h + o(|(h, k)|)$:

$$\begin{aligned} [\partial f(\bar{x} + \theta h, \bar{y}) - \partial f(\bar{x}, \bar{y})]h &= o(|(h, k)|) \\ g(h, k) &= o(|(h, k)|) \end{aligned}$$

Sappiamo che $g(0, 0) = 0$, quindi data una successione $(h_n, k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ con $(h_n, k_n) \neq \underline{0} \forall n \in \mathbb{N}$ dimostriamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{[\partial f(\bar{x} + \theta h_n, \bar{y}) - \partial f(\bar{x}, \bar{y})]h_n}{|(h_n, k_n)|} \right| = 0$$

Grazie al valore assoluto sappiamo che la funzione sara' sempre ≥ 0 , e se la riscriviamo in questo modo:

$$|[\partial f(\bar{x} + \theta h_n, \bar{y}) - \partial f(\bar{x}, \bar{y})]| \frac{|h_n|}{|(h_n, k_n)|}$$

possiamo dire che sara' sempre $\leq |\partial f(\bar{x} + \theta h_n, \bar{y}) - \partial f(\bar{x}, \bar{y})|$, dato che $\frac{|h_n|}{|(h_n, k_n)|} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in]0, 1[$. Usiamo quindi il teorema dei carabinieri e ci riduciamo a dimostrare che questo upper-bound tenda a 0 per n che tende a infinito. Grazie alla continuit  della derivata parziale, possiamo dire che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \partial f(\bar{x} + \theta h_n, \bar{y}) = \partial f(\bar{x}, \bar{y})$$

Quindi la loro differenza e' 0. Si possono fare passaggi simili per dimostrare \square_1 . ⊕

4.8 Derivate direzionali

Fino ad ora abbiamo visto il valore di crescita della funzione solo lungo le assi principali x, y (le derivate parziali), vediamo ora cosa succede se ci allontaniamo da un punto cambiando entrambe le sue coordinate:

Definition 4.8.1: Derivata direzionale

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Dato un vettore unitario $v = (v_1, v_2)$ ($|v| = 1$), f si dice derivabile lungo la direzione v nel punto (\bar{x}, \bar{y}) se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}, \bar{y}) + hv) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$$

Theorem 4.8.1 Formula del gradiente

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in \bar{x} , allora:

$$\forall v = (v_1, \dots, v_n) \neq \underline{0}, |v| = 1 :$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$$

: Dobbiamo dimostrare che $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$. Essendo f differenziabile possiamo dire che $f(\bar{x}+tv) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), tv \rangle + o(|vt|)$. Dato che $|vt| = |v||t| = |t|$, possiamo riscrivere l'ordine-piccolo come $o(|t|)$. Sostituendo, rimane $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(\bar{x}), vt \rangle + o(|t|)}{t}$. Possiamo dividere il limite, ottenendo $\langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$ (abbiamo diviso per t) e $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(|t|)}{t}$ che per definizione è 0. L'uguaglianza quindi vale. \odot

Note:

Lineare in v_1, \dots, v_n con coefficienti le derivate parziali, quindi tutte le derivate direzionali $\partial_v f$ si possono scrivere conoscendo solo le derivate parziali.

4.8.1 Direzione di massima crescita

Problema: trovare la direzione di massima crescita di una funzione f in un assegnato punto.

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo trovare il vettore unitario v la cui derivata direzionale è massima, ovvero dobbiamo massimizzare la funzione $\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle = \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})v_1 + \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})v_2$. Riscrivendo il gradiente e v usando coordinate polari, otteniamo $\langle r(\cos\theta, \sin\theta), (r\cos\gamma, r\sin\gamma) \rangle = r(\cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma)$, che per la formula del coseno di una differenza diventa $r\cos(\theta - \gamma)$, che raggiunge il suo valore massimo r quando $\theta = \gamma$. Questo vuol dire che la direzione di massima crescita in un punto è quella dove giace il vettore gradiente, e il valore di questa crescita è dato dal modulo dello stesso vettore. Possiamo generalizzare questa scoperta in n dimensioni (usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 3.5.1):

Proposition 4.8.1

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $\nabla f(x) \neq \underline{0}$, allora:

- $v_{\max} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = |\nabla f(x)|$

4.9 Curve in \mathbb{R}^n

Una curva in \mathbb{R}^n è una "funzione" (non sempre) r (oppure s, γ):

$$r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Che prende quindi un numero reale e ci dà un punto in \mathbb{R}^n , ed è definita da un parametro $t \in (a, b)$, quindi si può scrivere come $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$. Esempio:

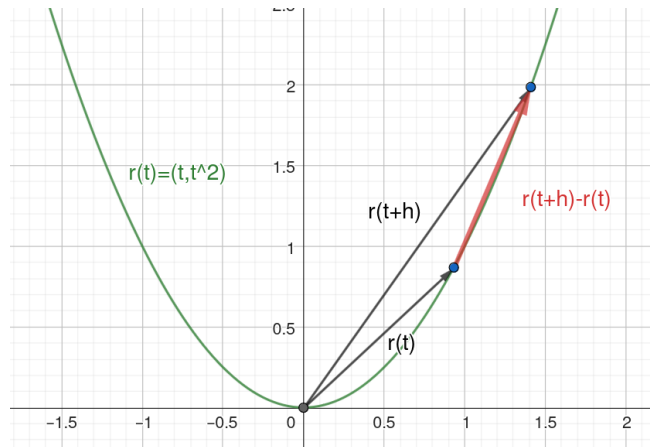
$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{equazione parametrica di retta in } \mathbb{R}^3$$

Oppure come intersezione di due piani:

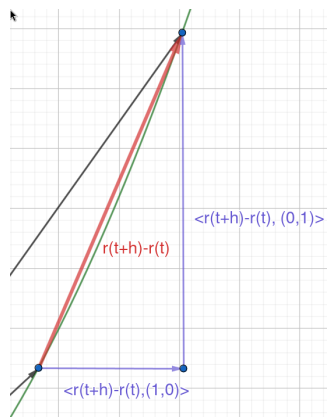
$$r = \pi + \sigma \implies \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 2x \end{cases} \implies \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

4.9.1 Derivata di una curva

Una curva è una "funzione" di classe $C^1((a, b))$, quindi esistono tutte le derivate prime e sono continue (in (a, b)). Il significato di derivata è sempre lo stesso: è il cambiamento del valore della funzione quando si incrementa l'input di un valore infinitesimo. Vediamo graficamente cosa succede (con $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ per semplicità):



Vediamo che la differenza fra i valori di r è rappresentata da un vettore $r(t+h) - r(t)$, che può essere scomposto come la somma del cambiamento rispetto alle direzioni della base ortonormale di riferimento, in questo caso le direzioni delle assi:



Quindi possiamo applicare la definizione di limite e calcolare il rapporto incrementale in questo modo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(t+h) - r_1(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(t+h) - r_2(t)}{h}$$

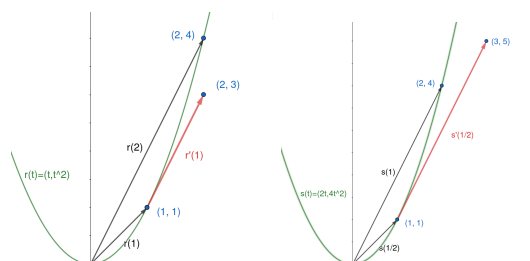
Ovvero, la derivata in un punto t di una curva $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è data dalla somma delle derivate delle n funzioni parametriche di r . Quindi diamo la definizione:

Definition 4.9.1: Velocità di una curva

La velocità (o derivata) di una curva è il vettore tangente alla curva data:

$$r'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$$

Quindi la direzione del vettore velocità è tangente alla curva nel punto dato, ma la sua lunghezza cosa indica? Prendiamo due curve $r(t) = (t, t^2)$, $r' = (2t, 4t^2)$ e consideriamo il parametro t come il tempo trascorso. Notiamo che le due curve tracciate sono identiche, ma che una ci mette la metà del tempo per percorrerla rispetto all'altra:



Inoltre, la lunghezza del vettore velocità nello stesso punto sulla curva è doppia nella funzione più "veloce". Quindi possiamo intuire che la norma della derivata ci indica quanto "velocemente" ci stiamo muovendo nel punto dato della curva, chiamata anche **velocità istantanea**:

Definition 4.9.2: Velocità scalare (istantanea)

Non è altro che la norma del vettore tangente, cioè:

$$\|v(t)\| = \|r'(t)\| = \sqrt{(r'_1(t))^2 + \dots + (r'_n(t))^2}$$

4.9.2 Altre definizioni

Definition 4.9.3: Curva regolare

Una curva è detta **regolare** in $t_0 \in (a, b)$ se:

$$r'(t_0) \neq \underline{0}$$

Note:

Una curva regolare $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è anche detta essere una **immersione** di (a, b) in \mathbb{R}^n .

Definition 4.9.4: Punto singolare

Se $t_0 \in (a, b)$ è tale per cui

$$r'(t_0) = \underline{0}$$

Allora t_0 è chiamato **punto singolare**

Definition 4.9.5: Curve semplici

Una curva è detta **semplice** se è iniettiva. (Cioè la curva non si interseca)

4.9.3 Curvatura

Nelle curve almeno C^2 , si definiscono:

Definition 4.9.6: Curvatura

Si definisce **curvatura** di $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ il modulo della accelerazione

$$k = \|a(t)\| = \|v'(t)\| = \|r''(t)\|$$

Definition 4.9.7: Raggio di curvatura

Si chiama **raggio di curvatura**

$$R = \frac{1}{k}$$

Bisogna considerarlo nella retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, dato che le rette hanno il raggio di curvatura e ha senso che questo sia ∞

4.9.4 Derivata di una funzione scalare lungo una curva

Prendiamo una funzione scalare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f(x, y) = x^2 y$. Ora al posto delle due variabili di input x e y mettiamo due funzioni $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$. Abbiamo ottenuto ora una funzione che dipende

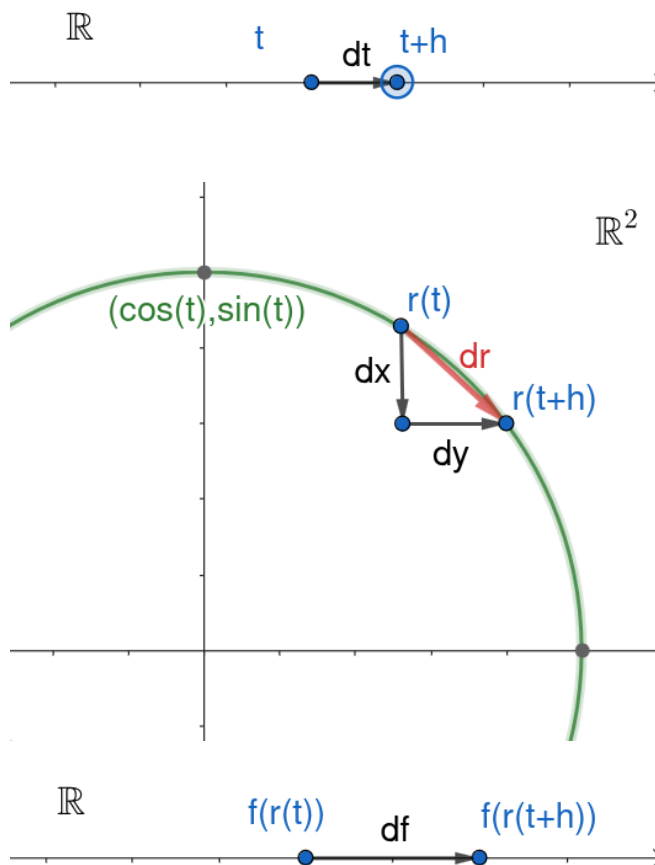
da un solo parametro (t), quindi e' possibile calcolare la sua derivata rispetto a questo parametro. Nel nostro esempio, possiamo espandere la nostra funzione in questo modo:

$$f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) \sin(t)$$

Quindi per calcolare la sua derivata basta applicare le classiche regole di derivazione:

$$\frac{d}{dt} f(\cos(t), \sin(t)) = -2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t)$$

Ma esiste un modo piu' generale per descrivere questo procedimento? Possiamo iniziare considerando una curva $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, che per seguire l'esempio sopra puo' essere definito come $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Quindi ora possiamo usare il vettore dato dalla curva r come input alla nostra funzione scalare f , creando quindi una composizione $f \circ r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di cui vogliamo studiare la derivata. Analizziamo la situazione:



Le tre figure ci mostrano, dall'alto verso il basso, come si propaga un aumento (infinitesimo) del parametro iniziale dt , prima nella curva r , poi dal valore spostato di r in f . Alla fine otteniamo lo spostamento totale, chiamato df che ora vediamo come calcolare:

- Prima di tutto, dobbiamo calcolare il valore del vettore $r(t+h) - r(t)$, ovvero dobbiamo trovare lo "spostamento" causato da un aumento infinitesimo del parametro di input di r . Se conosciamo la derivata della curva in quel punto, basta moltiplicarla per dt e otteniamo il vettore dr :

$$dr = r'(t)dt = \left(\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt \right)$$

- Ora che abbiamo il cambiamento in r , dobbiamo vedere come calcolare il cambiamento che questo causa in f . Puo' essere utile considerare le due componenti di dr , in modo da avere il delta del primo e del secondo

parametro di f separatamente. In modo analogo al primo passo moltiplichiamo le derivate parziali con gli spostamenti dei parametri corrispondenti, sommandoli per trovare df :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt$$

- Ci rimane soltanto dividere l'equazione per dt per trovare la derivata:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Che può essere riscritta come un prodotto scalare:

$$\frac{df}{dt} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

Theorem 4.9.1

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, allora data una curva $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (derivabile) si ha che:

$$f \circ r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

E' derivabile, e la sua derivata e' la **derivata lungo la curva** r , e si ha:

$$(f \circ r)'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

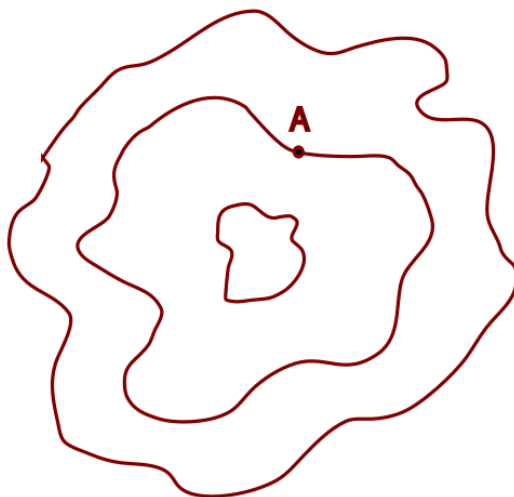
Dimostrazione formale: dimostra



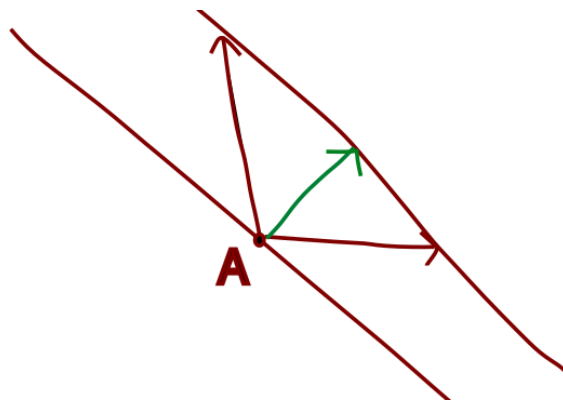
4.9.5 Ortogonalita' gradiente-insiemi di livello

Possiamo utilizzare questo nuovo teorema per dimostrare la relazione di ortogonalita' fra il gradiente di una funzione calcolata in un punto e la curva di livello che passa per quel punto.

Come esempio, prendiamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e tracciamone delle curve di livello:



Pensiamo ora di "zoomare" sul punto A e consideriamo la prossima curva di livello. Se ci avviciniamo abbastanza, possiamo considerare le due sezioni di curva come due linee parallele, quindi il segmento piu' corto che parte dal punto A e arriva alla prossima curva di livello e' quello perpendicolare alla curva di livello di A :



Dato che la direzione perpendicolare alla curva di livello in A coincide con la direzione che ci porta piu' velocemente alla prossima curva di livello (direzione di massima crescita), possiamo intuire che il vettore gradiente in A e' perpendicolare alla curva che passa per A :

Proposition 4.9.1

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, si ha che:

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n. \nabla f(\underline{x}) \perp L_{f(\underline{x})}$$

Dove $L_{f(\underline{x})}$ e' la curva di livello $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = f(\underline{x})\}$

Dimostrazione formale: dimostra



4.10 Punti di massimo e minimo in piu' dimensioni

La definizione di punti di massimo/minimo in piu' dimensioni e' molto simile a quella in \mathbb{R} :

Definition 4.10.1: Maxima e minima

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, $\underline{x} \in A$ si dice punto di massimo/minimo se:

$$\exists \delta > 0. \forall x \in D(\underline{x}, \delta) \cup A. f(x) \geq (\leq) f(\underline{x})$$

Come facciamo a trovare questi punti? Guardiamo i metodi usati in una dimensione per vedere se sono generalizzabili:

- Studio del segno della derivata prima: se $f'(\underline{x}) = 0$ e in un intorno di \underline{x} si ha che $f(x) > (<) 0$, allora \underline{x} e' un punto di massimo (minimo)
- Utilizziamo il segno della derivata seconda per trovare la concavita' del grafico nei punti di stazionamento:

$$\begin{cases} f'(\underline{x}) = 0 \\ f''(\underline{x}) > (<) 0 \end{cases} \iff \underline{x} \text{ e' punto di massimo (minimo)}$$

Quando $n \geq 2$, $f'(x)$ viene sostituito dal gradiente $\nabla f(x)$, che e' un vettore e non uno scalare. Dato che non ha senso chiedersi se un vettore e' ≥ 0 , il concetto di "crescente" e "decrescente" non puo' essere applicato in piu' dimensioni (perche' puo' essere diversa in direzioni diverse). Quindi dobbiamo utilizzare il secondo metodo, che ci da' due condizioni da rispettare (una sulla derivata di primo grado, una sulla seconda). Vediamo come generalizzare queste condizioni in piu' dimensioni:

4.10.1 Condizioni del primo ordine

Guardiamo la prima condizione relativa alla derivata di primo grado. Questa ci dice che e' condizione necessaria (ma non sufficiente) per un punto di massimo/minimo avere la derivata prima nulla, vediamo se cio' vale anche in piu' dimensioni:

Theorem 4.10.1 Fermat

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, si ha che se un punto $\underline{x} \in A$ e' massimo o minimo, allora:

$$\nabla f(\underline{x}) = 0$$

Dimostrazione: dimostra

☺

Pero' questa e' solo una condizione necessaria, non sufficiente per essere un punto di massimo/minimo. Vedremo infatti che esistono dei punti "di sella" che sono stazionari ma che non sono ne massimi ne minimi (sono una generalizzazione dei punti di flesso a tg orizzontale). Per distinguere i tipi di punti stazionari, dobbiamo guardare la derivata seconda:

4.10.2 Condizioni di secondo ordine

Introduciamo le derivate seconde in n dimensioni, ovvero il calcolo due volte di fila delle derivate (parziali). La differenza questa volta e' che ci sono diverse derivate parziali, che quindi possiamo applicare in sequenza in n^2 modi diversi. Introduciamo la notazione:

Definition 4.10.2: Derivate seconde in n dimensioni

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, assumiamo che $\forall k \in \{1, \dots, n\} \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}$ in ogni punto di \mathbb{R}^n . Consideriamo una nuova variabile x_j , con $j \in \{1, \dots, n\}$, si ha che:

- Se $j \neq k$ (ovvero se stiamo applicando due derivate parziali diverse) scriviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

- Nel caso $j = k$ (appliciamo due volte la stessa derivata parziale) scriviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

Seppure sembrano tante, in verita' si puo' dimostrare che l'ordine in cui applichiamo le derivate non cambia il valore finale:

Theorem 4.10.2 Schwarz

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_k}$ sono continue in $\mathbb{R}^n \forall k, j \in \{1, \dots, n\}$, allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

Come abbiamo visto sopra, con n derivate parziali diverse esistono n^2 combinazioni di derivate seconde. Queste derivate seconde le possiamo mettere in una matrice (detta "hessiana") quadrata $Hf(\bar{x}) \in M_n(\mathbb{R})$ definita cosi':

$$Hf(\bar{x})_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

Theorem 4.10.3 Taylor secondo Lagrange

(n=1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assumo f, f', f'' continue. Dati \bar{x} e $\bar{x} + h \in \mathbb{R}$, esiste $\theta \in (0, 1)$.

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x} + \theta h)h^2$$

Note:

$\bar{x} + \theta h$ appartiene all'intervallo di estremi \bar{x} e $\bar{x} + h$ (aperto)

Note:

Ricordiamo la formula nota: $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x})h^2 + o(h^2)$ per $h \rightarrow 0$. Questa perde significato se h non tende a 0, mentre quella di Lagrange vale per punti qualsiasi.

Note:

Osserviamo che dalla formula di Lagrange possiamo ricondurci a quella sopra, quindi possiamo dire che contiene piu' "informazioni". Infatti sottraendo la seconda dalla prima rimane $\frac{h^2}{2}(f''(\bar{x}) - f''(\bar{x} + \theta h)) = o(h^2)$. Per verificarlo dividiamo la parte sinistra per h^2 e facciamo il limite per $h \rightarrow 0$, e si nota che effettivamente il limite e' 0 (usando la continuita' di f'').

Nella parte quadratica della formula di Taylor in \mathbb{R}^n compare una "forma quadratica" che dobbiamo studiare per trovare massimi/minimi:

Definition 4.10.3: Forma quadratica

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica ($A = A^T$), definiamo la funzione $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$q_A(h) = \langle Ah, h \rangle \in \mathbb{R}$$

Note:

$$p(h) = 3h_1^2 + \frac{1}{3}h_1h_2 - 7h_2^2, \text{ quindi } p = q_A \text{ con } A = \begin{pmatrix} 3 & 1/6 \\ 1/6 & -7 \end{pmatrix}$$

Per generalizzare la condizione $f''(\bar{x}) > 0$ in \mathbb{R} dobbiamo dare una nozione di segno di una forma quadratica:

Definition 4.10.4

Sia $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$. Allora si dice che:

- A e' definita positiva se $\langle Ah, h \rangle > 0 \forall h \neq 0$
- A e' definita negativa se $\langle Ah, h \rangle < 0 \forall h \neq 0$
- A e' indefinita se $\exists h', h'' \in \mathbb{R}^n. \langle Ah', h' \rangle < 0 < \langle Ah'', h'' \rangle$

Note:

Tutte le disuguaglianze sono strette

4.10.3 Classificazione forme quadratiche (n=2)**Proposition 4.10.1**

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Allora:

- $A > 0 \iff \begin{cases} a > 0 \\ \det A > 0 \end{cases}$
- $A < 0 \iff \begin{cases} a < 0 \\ \det A > 0 \end{cases}$
- A e' indefinita $\iff \det A < 0$ (punto di sella)

Dimostrazione del primo punto: Si calcola la forma quadratica



Chapter 5

Integrali su piu' variabili