# Analisi (M2)
# Appunti

Alex Bastianini

# Contents

# Chapter 1

# Introduzione agli appunti

Questo e' un **test** per vedere come viene fuori un paragrafo di testo normale. Il testo sembra troppo piccolo pero.

## 1.1 Le varie parti degli appunti

Diversi box colorati per indicare diverse parti degli appunti:

**Definition 1.1.1: Definizione**

**Theorem 1.1.1** Teorema

***Dimostrazione:*** 😄

**Corollary 1.1.1** Corollario

**Note:**

Una roba importante

# Chapter 2

# Integrali

## 2.1 Motivazioni

Motivazioni:

- Calcolo di aree di figure curvilinee
- Lunghezze di curve (non lo faremo)

Le nostre figure curvilinee sono sottografici di funzioni.

## 2.2 Area sottesa a una curva

**Definition 2.2.1: Area sottesa**

Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b]. 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

### 2.2.1 Costruzione integrale di Riemann

Speziamo un intervallo [a,b] in $n \in \mathbb{N}$ sottointervalli uguali. L'ampiezza di ciuascun intervallo e' di $\frac{b-a}{n}$.

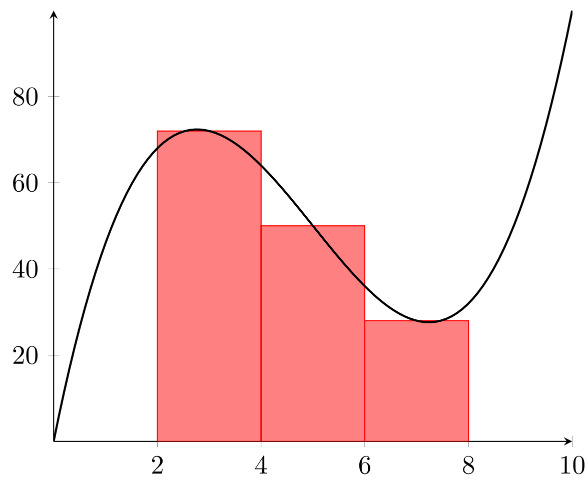
- $x_0 = a$
- $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$
- $x_n = b$

In ogni intervallo fisso un punto arbirario $\epsilon_n$

**Definition 2.2.2: Somma di Riemann associata a una scomposizione**

Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, fatta la costruzione precedente (spezzettamento), $\forall n \in \mathbb{N}$ la somma di Riemann n-esima di f e' il numero seguente:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\epsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$




(2.1)

Esempio di somma di Riemann di una funzione $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ con n=3:

**Theorem 2.2.1** Integrabilita' delle funzioni continue

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $(S_n)$ la successione delle somme di Riemann, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$$

E non dipende da quale $\epsilon_n$ scegliamo per ogni segmento.

**Definition 2.2.3: Integrale**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

La x e' una variabile **muta**.

**Note:**

- Se $\forall x \in [a, b]. f(x) \geqslant 0$, allora $\int_a^b f =$ Area del sottografico.
- $\int_a^a f = 0$ (poiche $\forall n \in \mathbb{N}. S_n = 0$)
- $f(x) = k$(funzione costante) $\implies \int_a^b f = (b-a)k$(Area del rettangolo)

### 2.2.2 Proprieta' dell'integrale

**Linearita'**

Se abbiamo due funzioni f, g continue su [a,b], $A, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (Af(x) + \mu g(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx$$

**Additivita**

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, dato $c \in [a, b]$, vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**Note:**

Convenzione su integrali con estremi ”rovesciati”:
Dato $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

In questo modo possiamo generalizzare la proprieta' addittiva togliendo dall' ipotesi la restrizione sul valore di c.

**Monotonia**

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\forall x \in [a, b].f(x) \geqslant 0$, allora:

$$\int_a^b f \geqslant 0$$

### 2.2.3 Media Integrale

**Premessa 1**

**Theorem 2.2.2** Valori intermedi
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $x_1, x_2, \in [a, b].f(x_1) \leqslant f(x_2)$, allora:

$$\forall y \in [f(x_1), f(x_2)].\exists c \in [x1, x2].f(c) = y$$

**Premessa 2**

**Theorem 2.2.3** Weierstrass
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b].\forall x \in [a, b].f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

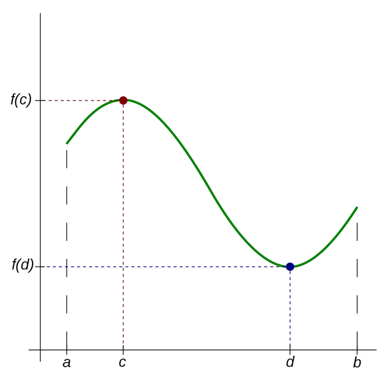
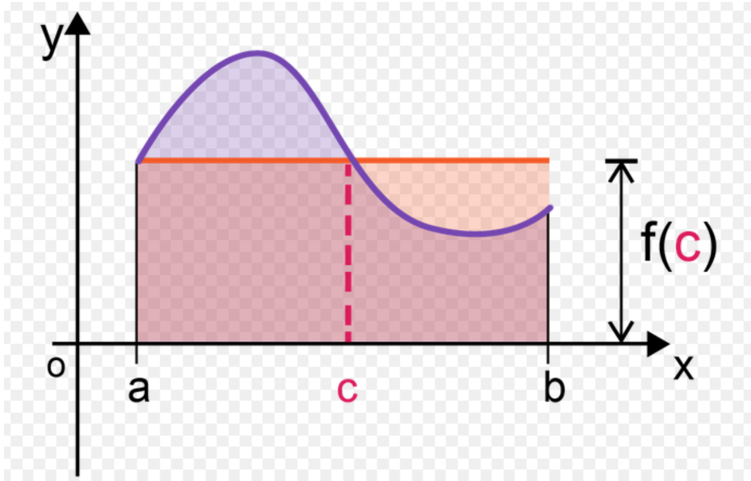



Figure 2.1: Esempio di Weierstrass

**Theorem 2.2.4** Media integrale
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists c \in [a, b].\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$



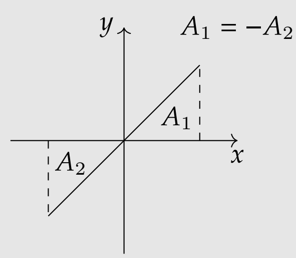

Quindi esiste un punto c in [a,b] t.c. il rettangolo che ha come base b-a e come altezza f(c) ha la stessa area dell'integrale di f da a a b.

***Dimostrazione della media integrale:*** Sia f continua su [a,b]. Per Weierstrass abbiamo che $\exists x_1, x_2 \in [a,b].\forall x \in [a,b].f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Per la proprieta' di monotonia risulta $\int_a^b f(x_1)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x_2)dx$, ovvero $f(x_1) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant f(x_2)$. Quindi per il teorema dei valori intermedi $\exists c \in [a,b].f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. 😄

**Note:**

La continuita' di f e' **necessaria**. Ex:

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x \implies \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = 0 = f(0)(c = 0)$$




Se considerassi $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che g e' intagarbile, e che vale

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$$

Pero' non esiste $c \in [-1,1]$ tale che g(c) = 0, quindi non soddisfa la media integrale.

## 2.3 Primitive di una funzione

**Definition 2.3.1: Primitiva di f**

Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$
Una funcione $F : A \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f su A se vale

$$\forall x \in A. F'(x) = f(x)$$

**Example 2.3.1** (Primitiva)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x \implies F(x) = sinx$ e' una primitiva di f su $\mathbb{R}$. Infatti $\forall x. \frac{d}{dx} sinx = cosx$

**Note:**
$\forall k \in \mathbb{R}$, la funzione $G(x) = sin(x) + k$ e' anchessa primitiva di $f$. Quindi se $F$ e' primitiva di $f$ su A allora ci sono infinite primitive di $f$ su A (una per ogni $k \in \mathbb{R}$).

Domanda: sono tutte le possibili primitive?

**Proposition 2.3.1** Caratterizzazione delle primitive di una funzione su un intervallo
Sia $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$. Siano $F : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ e $G : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ due primitive di $f$ su $]a, b[$.
Allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall x \in ]a, b[. G(x) = F(x) + k$$

Ovvero $F$ e $G$ "differiscono per una costante".

***Dimostrazione:*** Considero $H : ]a, b[ \to \mathbb{R}, H(x) = G(x) - F(x)$. Sappiamo che F'(x)=f(x) e G'(x)=f(x) (def. primitiva). $\frac{d}{dx} H(x) = \frac{d}{dx} G(x) - \frac{d}{dx} F(x) = f(x) - f(x) = 0$. Dunque $H$ ha derivata nulla su $]a, b[$, quindi (per coroll. Lagrange) $H$ e' costante. 😄

## 2.4 Funzioni integrali

D'ora in poi $A = ]a, b[$.

**Definition 2.4.1: Funzione Integrale**

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua.
Sia $c \in A$. Introduco $I_c : A \to \mathbb{R}$:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

Nota: $I_c$ e' ben definita essendo f continua.

**Note:**

1. $f : A \to \mathbb{R}, c \in A, I_c(x) = \int_c^x f \implies I_c(c) = \int_c^c f(t)dt = 0$.
2. Dati $c, c' \in A, f : A \to \mathbb{R} \implies I_c(x) - I_{c'}(x) =$ costante. Infatti:

$$I_c(x) - I_{c'}(x) = \int_c^x f - \int_{c'}^x f = \int_c^x f + \int_x^{c'} f = \int_c^{c'} f(t)dt = k$$

### 2.4.1 Teoremi fondamentali del calcolo integrale

**Theorem 2.4.1** Fondamentale del calcolo sulla derivata della funzione integrale

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, $c \in A$. Sia $I_c$ la funzione integrale, allora:

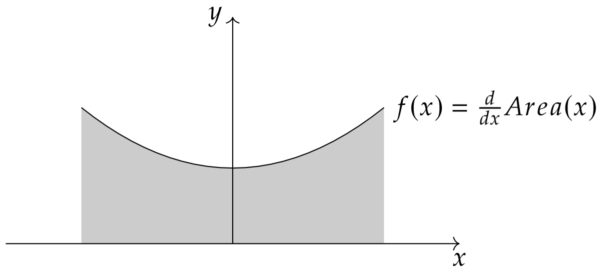
$$I_c \text{ e' derivabile in ogni punto } x \in A \text{ e } I_c'(x) = f(x)$$

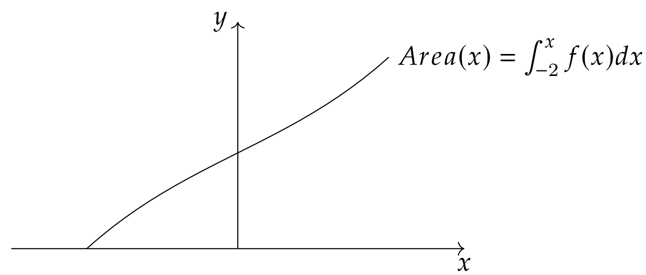
Cioe' $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x), \forall x \in A$, quindi $I_c$ e' **primitiva** di $f(x)$.

Una possibile interpretazione di questo teorema e' quello della derivata dell'area sottesa che e' uguale alla funzione stessa, ovvero:

$$\forall x. f(x) \geqslant 0 \implies \frac{d}{dx}\text{Area} = f(x)$$

$A = [-2, 2], f(x) = \frac{x^2}{5} + 1$:




**Note:**
Il teorema assicura che ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ continua ammette primitive.

***Dimostrazione:*** $f : A \to \mathbb{R}, c \in A, I_c : A \to \mathbb{R}$. Devo calcolare la derivata di $I_c$. Calcolo $\lim_{h\to 0^+} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h}$, che equivale a $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$. Per teo. media integrale sappiamo che $\exists c \in [x, x+h]. f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$, quindi possiamo riscrivere la formula come $\lim_{h\to 0^+} f(c_h)$. Dato che $h \to 0^+$ e $x \leqslant c \leqslant x + h$, per il teo. dei carabinieri $c = x$, quindi $\frac{d}{dx}I_c(x) = f(x)$. ☺

**Theorem 2.4.2** Fondamentale del calcolo per integrali definiti

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua su A. Sia $F : A \to \mathbb{R}$ primitiva di f su A. Dati $a, b \in A$, vale:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)] = [F(x)]_a^b$$

***Dimostrazione:*** Sia $c \in A$, $I_c : A \to \mathbb{R}$ la funzione integrale ($I_c(x) = \int_c^x f$). Per il teo. fond. del calc. sulla derivata di $I_c$, $I_c$ e' una primitiva di f su A. Per le proprieta' delle primitive, $\exists k \in \mathbb{R}. \forall x \in A. F(x) = I_c(x) + k$.

$$F(b) - F(a) = (I_c(b) + k) - (I_c(a) + k) = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

☺

### 2.4.2 Integrazione per parti

Si parte dalla regola del prodotto delle derivate ($\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$) per trovare una regola di integrazione.

**Theorem 2.4.3** Integrazione per parti

Dati $f, g : A \to \mathbb{R}$, A intervallo aperto e sia $F$ primitiva di $f$ su $A$ con F,f,g continue, g derivabile e g' continua:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Quindi usando il teorema fondamentale:

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

### 2.4.3 Cambio di variabile

**Theorem 2.4.4** Formula del cambio di variabile

Date $h : I \to A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $I, A \subseteq \mathbb{R}$ e $\exists (f \circ h) : I \to \mathbb{R}. (f \circ h)(t) = f(h(t))$. $f$ continua, $h$ derivabile e $h'$ continua. Presi $\alpha, \beta \in I$, vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Questa e' la versione generalizzata del teo. fond. del calcolo

***Dimostrazione:*** Date due funzioni $G, H : I \to \mathbb{R}. G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt, H(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx$, dobbiamo dimostrare che $G(z) = H(z)$. Ci riduciamo a dimostrare che:

1. $G(\alpha) = H(\alpha)$: ovvio perche' integrali su intervallo degenere ($G(\alpha) = H(\alpha) = 0$)
2. $\forall z \in I. G'(z) = H'(z)$:
   - $G'(z) = \frac{d}{dz} \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt = f(h(z))h'(z)$
   - $H'(z) = \frac{d}{dz} \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx = f(h(z))h'(z)$ (generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo)

😃

**Note:**

1. t integrata in $\alpha, \beta$, allora x sara' integrata in $h(\alpha), h(\beta)$.
2. $dx$ si e' trasformato in $h'(t)dt$ ($\frac{d}{dt}h(t) = h'(t) \implies dh(t) = h'(t)dt$)

## 2.5 Integrali generalizzati (impropri)

**Definition 2.5.1: Integrali generalizzati su intervalli illimitati**

Sia $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$. Si dice che l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e' **convergente** se e' finito il limite $\lim_{r \to +\infty} \int_a^r f(x)dx := \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Altrimenti se il limite diverge o oscilla e' detto **divergente** (o oscillante).
La definizione e' analoga per $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

**Definition 2.5.2: Integrali generalizzati su intervalli limitati**

Sia $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ e' **convergente** se il limite $\lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)dx$ e' finito.
Altrimenti se il limite diverge o oscilla e' detto **divergente** (o oscillante).
La definizione e' analoga per $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$.

# Chapter 3

# Spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

(Spazio **euclideo** = c'e' il prodotto scalare)
$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | \forall j \in \{1, 2, ..., n\}.x_j \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ...\mathbb{R}$ (n volte).

- $n = 1$ retta reale
- $n = 2$ piano cartesiano
- $n = 3$ spazio ordinario

## 3.1 Operazioni su $\mathbb{R}^n$

- Somma di vettori: $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$. Definiamo $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- Prodotto di $x \in \mathbb{R}^n$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Dato $x = (x_1, ..., x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, definiamo $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

**Definition 3.1.1: Prodotto scalare**

Dati $x, y \in \mathbb{R}_n$, definiamo il prodotto scalare $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \in \mathbb{R}^n$.
Notazione alternativa: $< x, y >= x \cdot y$.

**Note:**
Il prodotto scalare non da' un nuovo vettore, ma solo un valore scalare!

### 3.1.1 Proprieta' del prodotto scalare (euclideo)

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n. < x, y >=< y, x >$ (simmetria)
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. < \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > +\mu < y, z >$ (linearita' nel primo argomento)
  Per simmetria vale $< z, \lambda x + \mu y >= \lambda < z, x > +\mu < z, y >$ (linearita' nel secondo argomento)
- $\forall x \in \mathbb{R}^n. < x, x >\geqslant 0$, inoltre $< x, x >= 0 \iff x = (0, 0, ..., 0) = \underline{0}$ (vettore nullo).

## 3.2 Ortogonalita'

**Definition 3.2.1: Vettori ortogonali**

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** se vale:

$$< x, y >= 0$$

## 3.3 Norma euclidea

Sinonimi: modulo, lunghezza

**Definition 3.3.1**

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} \geqslant 0$$

Rappresenta la "lunghezza" del vettore usando il teorema di Pittagora.
Notazione alternativa: $|x|$

### 3.3.1 Proprieta' della norma

- $\forall x \in \mathbb{R}^n . \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n . \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n . |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Disuguaglianza triangolare)

## 3.4 Vettore normalizzato

**Definition 3.4.1: Normalizzato**

Dato $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, cerco $r > 0$ t.c.

$$|rx| = 1$$

Visto che $r > 0$, $r|x| = 1$ quindi $r = \frac{1}{|x|}$.
Il vettore $\frac{x}{|x|}$ ha norma 1 e si dice **normalizzato** di $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.
$\frac{x}{|x|}$ si dice **vettore unitario**.

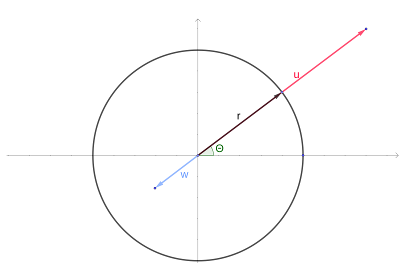
**Note:**
Possiamo scrivere $x = |x| \cdot \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$.

## 3.5 Coordinate polari

In $\mathbb{R}^2$, ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ si scrive nella forma $|(x, y)| \cdot (\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|})$. L'insieme di coordinate $\{(\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|}) | x, y \in \mathbb{R}\}$ forma una **circonferenza unitaria** (dato che il loro modulo e' sempre 1), quindi $\exists \theta \in [0, 2\pi[$ tale che $(cos\theta, sin\theta) = (\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|})$ ($\theta$ si chiama **"argomento"** di $(x, y)$). Ponendo $r = |(x, y)|$ = modulo, scriviamo:

$$(x, y) = r(cos\theta, sin\theta)$$

dove $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ si chiamano **coordinate polari** di (x,y).




- $r$ = vettore unitario

### 3.5.1 Prodotto scalare in coordinate polari

Considero due vettori $(x, y) = (rcos\theta, rsin\theta)$ e $(n, o) = (\rho cos\gamma, \rho sin\gamma)$. Il loro prodotto scalare $< (x, y), (n, o) >$ diventa $r\rho cos\theta cos\gamma + r\rho sin\theta sin\gamma$, che puo' essere riscritto come $r\rho cos(\gamma - \theta)$, ovvero:

$$|(x, y)| \cdot |(n, o)| \cdot cos(\gamma - \theta)$$

**Proposition 3.5.1** Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$| < x, y > | \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

L'uguaglianza vale solo se $x$ e $y$ sono linearmente indipendenti.

**Note:**

Vale in ogni $\mathbb{R}^n \forall n \in \mathbb{N}$

**Proposition 3.5.2** Quadrato di binomio

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 < x, y >$$

Generalizzazione di Pitagora (In due dimensioni diventa il teorema di Carneau).

**Proposition 3.5.3** Disuguaglianza Triangolare

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha che:

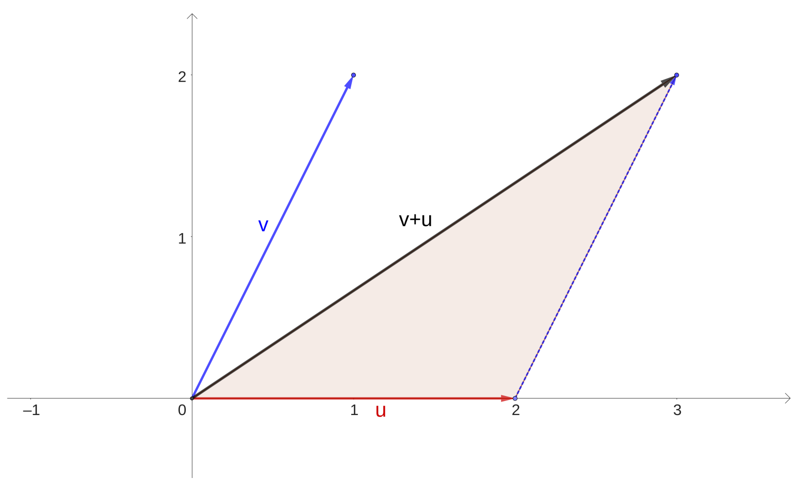
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

*:* Dimostriamo il quadrato della disuguaglianza per poter usare il quadrato di binomio:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 < x, y > \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2| < x, y > | \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

$$\implies |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$$

😄




## 3.6 Distanza tra punti

**Definition 3.6.1: Distanza fra due punti**

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distanza fra $x$ e $y$ e' $|x - y|$

### 3.6.1 Punto di minima distanza da una retta

Problema $\mathbb{R}^n, v \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$. Considero le linee $l_v = \{tv | t \in \mathbb{R}\}$, cerco fra tutti i punti di $l_v$ quello che ha minima distanza da $x$. Devo minimizzare la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = |x - tv| =$ distanza fra x e tv

**Proposition 3.6.1**

Dati $v \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, il punto di minima distanza $\frac{<x,v>}{|v|^2}v$ soddisfa:

$$< x - \frac{< x, v >}{|v|^2}v, v >= 0$$

Quindi il vettore che parte dal punto di minima distanza e arriva al punto x e' perpendicolare alla retta $l_v$.

## 3.7 Intorni

**Definition 3.7.1: Intorno sferico di un punto**

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, poniamo

$$D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x - y| < r\}$$

$D(x, r)$ si dice disco di centro $x$ e raggio $r$.

**Definition 3.7.2: Insiemi aperti**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se:

$$\forall x \in A. \exists \epsilon > 0. D(x, \epsilon) \subseteq A$$

## 3.8 Successioni in $\mathbb{R}^n$

Una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' un vettore di $k$ successioni: $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n)$ con $k \in \mathbb{N}$

# Chapter 4

# Funzioni a piu' variabili

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$, consideriamo funzioni $f : A \longrightarrow B$ (A = dominio, B = codominio).
Casi modello:

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (funzioni scalari)
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ (cammini in $\mathbb{R}^q$)

## 4.1 Insiemi di livello

**Definition 4.1.1**

$A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. L'insieme di livello $b$ di $f$ e':

$$L_b = \{x \in A | f(x) = b\} = f^{-1}(b)$$

Se cammino lungo l'insieme di livello, la funzione corrispondente non cambia

## 4.2 Continuita'

**Definition 4.2.1: Funzioni continue**

$A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, k \in A$. Si dice che $f$ e' continua in $k \in A$ se $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\begin{cases} x_n \in A & \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \longrightarrow k & k \longrightarrow +\infty \end{cases} \implies f(x_n) \longrightarrow f(k)$$

**Proposition 4.2.1**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, k \in A$. Allora $f$ e' continua in $k$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0. \begin{cases} x \in A \\ |x - k| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(k)| < \epsilon$$

## 4.3 Derivata parziale

**Definition 4.3.1: Derivata parziale**

Data $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$. Dati $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ $f$ si dice derivabile parzialmente rispetto a $\overline{x}$ se:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$$

In modo analogo per $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$.

**Definition 4.3.2: Gradiente**

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette derivate parziali $\forall(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, definiamo il **gradiente di f** come:

$$\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (funzione vettoriale)

**Note:**

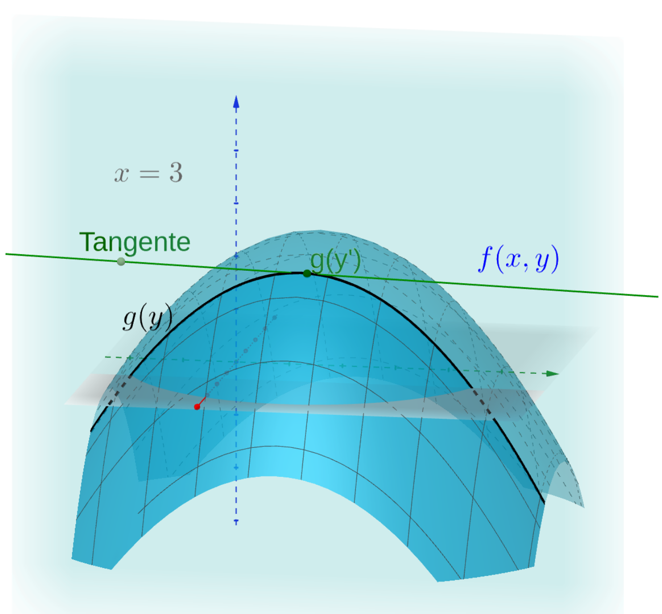
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y})$ fissato:

$$\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{x - \overline{x}}$$

Introduco una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, \overline{y})$, in modo che, facendo la normale derivata di $g$:

$$g'(\overline{x}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{g(x) - g(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} f(\overline{x}, \overline{y})$$

Abbiamo quindi trasformato una derivata parziale in una derivata "normale" fissando tutti i parametri tranne uno.



### 4.3.1 Derivate parziali in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$, data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ possiamo riscrivere la derivata parziale cosi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f((\overline{x}, \overline{y}) + t(1,0)) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t}$$

Possiamo usare quindi le basi canoniche $(e_1 = (1, ..., 0), ..., e_n(0, ..., 1))$ per indicare per quale dei valori del vettore passato come parametro vogliamo derivare.

**Definition 4.3.3**

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, ..., x_n), \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Per $k = \{1, ..., n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + te_k) - f(\overline{x})}{t}$$

## 4.4 Derivabilita' e continuita'

In $\mathbb{R}$, se una funzione era derivabile in un punto allora era anche continua, pero' se in piu' variabili non e' cosi:(guardare es slide)

## 4.5 Differenziabilita'

In una dimensione, possiamo dire che:

$$\exists f'(\overline{x}) \in \mathbb{R} \iff f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + o(h)$$

Quindi una funzione e' derivabile in un punto sse vale lo sviluppo di Taylor. Infatti, se sostituiamo $x$ a $\overline{x} + h$, dove $x \to \overline{x}$ otteniamo il polinomio di Taylor di primo grado nel punto $\overline{x}$: $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$. Come vedremo, questa prposizione non vale quando aumentiamo le dimensioni. Infatti, solo in una dimensione differenziabilita' e derivabilita' coincidono.

### 4.5.1 o piccolo in piu' variabili

**Definition 4.5.1: o piccolo**

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n, h \in A, g : A \to \mathbb{R}$, assumendo che $0 \in A$, si dice che $g$ e' **o piccolo** di $|h|^p$ (con $p \geqslant 0$) se:

1. $g(0) = 0$
2. $\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall h \neq 0. |h| < \delta. \frac{|g(h)|}{||h||^p} < \epsilon$

**Example 4.5.1**

Verifica le seguenti uguaglianze:

- $g(h, k) = h^2 + k^2 = o(|h + k|)$

  $$h^2 + k^2 = |(h, k)|^2$$

  Quindi:

  $$\frac{|(h, k)|^2}{|(h, k)|} = |(h, k)|$$

  Dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall 0 < |(h, k)| < \delta. |(h, k)| < \epsilon$, che possiamo fare mettendo $\delta = \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$.

Possiamo riscrivere questa definizione usando le successioni:

$$g(h) = o(|h|^p) \iff \forall (h_j)_{j\in\mathbb{N}}. \begin{cases} h_j \neq 0 & \forall j \in \mathbb{N} \\ \lim_{j\to+\infty}(h_j) = 0 \end{cases} \implies \lim_{j\to+\infty} \frac{g(h_j)}{||h_j||^p} = 0$$

**Definition 4.5.2: Differenziabilita' in due variabili**

$(x, y), (h, x) \in \mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n$. Si dice che $f$ e' differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ se:

1. $\exists \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})$
2. Vale lo sviluppo:

$$f((\overline{x}, \overline{y}) + (h, k)) = f(\overline{x}, \overline{y}) + < \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) > +o(|(h, k)|) =$$

$$f(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + o(|(h, k)|)$$

Per $(h, k) \to (0, 0)$

## 4.6 Continuita' di una funzione differenziabile

Sappiamo che l'esistenza delle derivate parziali non implica la continuita' della funzione. Mostreremo pero' che se sappiamo che una funzione e' differenziabile, allora sara' sicuramente continua.

**Proposition 4.6.1** Differenziabilita' implica continuita'

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se $f$ e' differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, allora $f$ e' continua in $(\overline{x}, \overline{y})$.

*:* 😆

## 4.7 Condizioni sufficenti per la derivabilita'

**Theorem 4.7.1**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Assumo $\exists \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})$ per ogni $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$. Suppongo che le derivate siano continue. Allora:

$$f \text{ e' differenziabile in ogni punto di } \mathbb{R}^2$$

**Note:**

Questo teorema vale anche in $\mathbb{R}^n$. Inoltre le funzioni elementari soddisfano sempre le ipotesi nel loro dominio, quindi sono differenziabili.

**Proposition 4.7.1** Lagrange per derivate parziali

## 4.8 Derivate direzionali

**Theorem 4.8.1** Formula del gradiente

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$, allora:

$$\forall v = (v_1, v_2) \neq (0, 0). |v| = 1 :$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) =< gradf(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) >$$

**Note:**

Lineare $v_1, v_2$ ,tutte le $\partial_v f$ si scrivono conoscendo solo $\partial_x f$ e $\partial_y f$.

# Chapter 5

# Integrali su piu' variabili