Probabilità
Appunti

Giovanni Palma e Alex Basta

Contents

Chapter 1

Introduzione preliminare

1.1 Cos'e' la probabilita'?

E' vietato dare una definizione di "probabilita"! E' un concetto primitivo, che tutti noi conosciamo, e' una domanda che riguarda la filosofia. E' come il punto, la retta e il pinao nella geometria euclidea.

$$A = \text{"Domani a Bologna piove"}$$

Di questa affermazione, sappiamo dire solo quanto sia probabile che succeda, non siamo sicuri se si avveri o meno. Bisogna passare da una condizione di certezza (0 o 1) a un intervallo continuo $[0, 1]$. Stiamo generalizzando la logica del certo.
Indichiamo la probabilita' che A succeda con $\mathcal{P}(A)$. Quindi $P(A) \in [0, 1]$, dove $P(A) = 0$ significa che non accadra' mai e $P(A) = 1$ significa che accade con certezza.
Come si assegna la probabilita'? Non e' una domanda che riguarda la matematica, ma la statistica. L'approccio classico e' quello frequentista, dove svolgiamo vari esperimenti aleatori e calcoliamo la probabilita come

$$\mathcal{P}(A) \approx \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

Notare che questa non e' una definizione, ma un'approssimazione. Questo e' l'approccio frequentista che funziona bene in casi semplici.
L'approccio bayesiano e' un aggiornamento all'approccio precedente aggiungendo informazioni a priori che ci permette di creare una distribuzione probabilistica. Tutto questo riguarda la statistica, a noi interessa la matematica della probabilita'.

1.2 Richiami teoria degli insiemi

Dato un insieme Ω e due sottoinsiemi $A, B \subseteq \Omega$, si useranno tali notazioni per le diverse operazioni tra insiemi

$$\begin{aligned}
A \cup B &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}, \\
A \cap B &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}, \\
A^c &:= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}, \\
A \setminus B &:= A \cap B^c, \\
A \Delta B &:= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),
\end{aligned}$$

Andiamo inoltre a definire $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subset \Omega\}$ come l'insieme delle parte di Ω e sia $|A|$ la cardinalità di A, ovvero il suo numero di elementi

Example 1.2.1
Sia $\Omega = \{a, b, c\}$ allora $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Si noti poi questa interessante proposizione

Proposition 1.2.1
Sia Ω un insieme finito allora si ha:
$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

Dimostrazione: Si puo' dimostrare per induzione su Ω:

- Caso $\Omega = \emptyset$:
$$|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^{|\emptyset|}$$
$$|\{\{\}\}| = 2^0$$
$$1 = 1$$

- Caso Ω:
Per ipotesi induttiva $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$, dove $\Omega = X \cup p$ (con $p \notin X$). Quindi $|X| = |\Omega| - 1$. Dato che stiamo aggiungendo un nuovo elemento p a X, per ogni elemento di $\mathcal{P}(X)$ possiamo decidere se unirlo o meno a p, quindi il numero di elementi si duplica: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^{|X|} = 2 \cdot 2^{|\Omega|-1} = 2^{|\Omega|}$.

😄

Le nozioni di unione e intersezione si estendono in modo naturale a una famiglia arbitraria $(A_i)_{i \in I}$ di sottoinsiemi di Ω:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \exists i \in I \text{ tale che } \omega \in A_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \forall i \in I \text{ si ha che } \omega \in A_i\}$$

Example 1.2.2 (Intersezione e unione in un insieme di riferimento numerabile $I = \mathbb{N}$)
Sia $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi

1. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$
Si ha
$$\bigcup_{n=1} A_n = \mathbb{N}$$
$$\bigcap_{n=1} A_n = \emptyset$$
Giustamente $\{1\} \neq \{2\} \neq \{3\} \neq \dots$ pertanto l'unione è vuota
2. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}$
$$\bigcup_{n=1} A_n = [0, 1]$$
L'intervallo $[0, 1]$ è quello che "contiene" tutti gli altri, pertanto, per come è definita l'unione, è ovvio che sia lui il risultato di tale operazione
$$\bigcap_{n=1} A_n = \{0\}$$
L'intersezione è un insieme con solo 0, l'unico numero contenuto in tutti gli insiemi di intervalli

1.2.1 Leggi di de morgan

Theorem 1.2.1 Leggi di De Morgan

Queste proposizioni sono vere:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

che valgono, più in generale, per famiglie arbitrarie di insiemi:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Dimostrazione: Devo dimostrare che $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \wedge A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ ovvero che $w \in (A \cap B)^c \iff w \in (A^c \cup B^c)$
ebbene:

$$\begin{aligned} \omega \in (A \cap B)^c &\iff \omega \notin A \cap B \\ &\iff \omega \notin A \text{ or } \omega \notin B \\ &\iff \omega \in A^c \text{ or } \omega \in B^c \\ &\iff \omega \in (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

È dato come esercizio per Bastiality la dimostrazione per le altre cose 😃

1.2.2 Proprietà distributive di intersezione e unione

Theorem 1.2.2

è possibile dimostrare che valgono le seguenti leggi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

: Bonzo, la dimostri per esercizio 😃

Chapter 2

Spazi di probabilità discreti

2.1 Concetti introduttivi

Innanzi tutto andiamo a definire che cosa intendiamo per *esperimento aleatorio, esito, probabilità*
Con la dicitura esperimento *aleatorio indicheremo* qualunque fenomeno (fisico, economico, sociale, ...) il cui esito non sia determinabile con certezza a priori. Il nostro obiettivo è di fornire una descrizione matematica di un esperimento aleatorio, definendo un modello probabilistico, un *esito* invece è un ipotetico risultato di un'esperimento aleatorio sulla base di un cosiddetto *spazio campionario* un insieme che contiene tutti gli esiti possibili dell'esperimento

Example 2.1.1

- **Esperimento aleatorio:** Lancio di un dado.
- **Spazio campionario:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Esito:** 4.

Note:
In casi piu' complessi ci saranno vari sotto-esperimenti aleatori, come 10 lanci di un dato.

Adesso forniamo vere e priorie definizioni

Definition 2.1.1: evento

Si definisce **evento** un'affermazione riguardante l'ipotetico esito univoco dell'esperimento, di cui si può affermare con certezza se è vero o falso una volta noto l'esito

Example 2.1.2
Esper. aleatorio: Lancio del dado
A = "esce un numero pari"

Definition 2.1.2: Spazio camipionario

Si chiama spazio campionario un qualunque insieme che contiene tutti gli esiti dell'esperimento aleatorio.

Notare che non dice "tutti e solo tutti", quindi non ce n'e' solo uno. Tutti gli esiti sono rappresentati con un opportuno codice.
Esempio: lancio moneta
$\Omega = \{t, c\}$, ma anche $\Omega = \{t, c, f, g, h, ...\}$ o $\Omega = \mathbb{R}$ sono tutti spazi campionari validi.

Definition 2.1.3: Esiti favorevoli

Esiti per cui un evento e' vero sono detti esiti favorevoli.

Definition 2.1.4: Evento in termine di insiemi

Un evento si puo' definire anche come il sottoinsieme degli esiti favorevoli id Ω.

Example 2.1.3

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \implies A =$ "esce un numero pari" $= \{2,4,6\} =$ evento