Analisi (M2)
Appunti

Alex Bastianini

Contents

Chapter 1

Introduzione agli appunti

Questo e' un **test** per vedere come viene fuori un paragrafo di testo normale. Il testo sembra troppo piccolo pero.

1.1 Le varie parti degli appunti

Diversi box colorati per indicare diverse parti degli appunti:

Definition 1.1.1: Definizione

Theorem 1.1.1 Teorema

Dimostrazione: 😄

Corollary 1.1.1 Corollario

Note:
Una roba importante

Chapter 2

Integrali

2.1 Motivazioni

Motivazioni:

- Calcolo di aree di figure curvilinee
- Lunghezze di curve (non lo faremo)

Le nostre figure curvilinee sono sottografici di funzioni.

2.2 Area sottesa a una curva

Definition 2.2.1: Area sottesa

Data $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b]. 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

2.2.1 Costruzione integrale di Riemann

Speziamo un intervallo [a,b] in $n \in \mathbb{N}$ sottointervalli uguali. L'ampiezza di ciuascun intervallo e' di $\frac{b-a}{n}$.

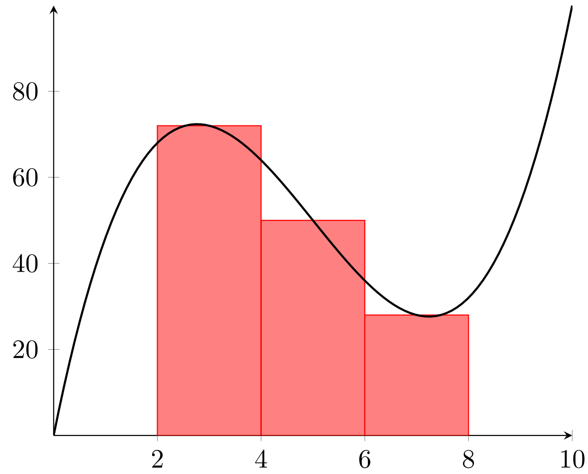
- $x_0 = a$
- $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$
- $x_n = b$

In ogni intervallo fisso un punto arbirario ϵ_n

Definition 2.2.2: Somma di Riemann associata a una scomposizione

Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, fatta la costruzione precedente (spezzettamento), $\forall n \in \mathbb{N}$ la somma di Riemann n-esima di f e' il numero seguente:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\epsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$



(2.1)

Esempio di somma di Riemann di una funzione $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ con n=3:

Theorem 2.2.1 Integrabilita' delle funzioni continue

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia (S_n) la successione delle somme di Riemann, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$$

E non dipende da quale ϵ_n scegliamo per ogni segmento.

Definition 2.2.3: Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

La x e' una variabile **muta**.

Note:

- Se $\forall x \in [a, b]. f(x) \geqslant 0$, allora $\int_a^b f$ = Area del sottografico.
- $\int_a^a f = 0$ (poiche $\forall n \in \mathbb{N}. S_n = 0$)
- $f(x) = k$(funzione costante) $\implies \int_a^b f = (b - a)k$(Area del rettangolo)

2.2.2 Proprieta' dell'integrale

Linearita'

Se abbiamo due funzioni f, g continue su [a,b], $A, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (Af(x) + \mu g(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx$$

Additivita

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, dato $c \in [a, b]$, vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Note:

Convenzione su integrali con estremi "rovesciati":
Dato $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

In questo modo possiamo generalizzare la proprieta' addittiva togliendo dall' ipotesi la restrizione sul valore di c.

Monotonia

Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\forall x \in [a,b].f(x) \geqslant 0$, allora:

$$\int_a^b f \geqslant 0$$

2.2.3 Media Integrale

Premessa 1

Theorem 2.2.2 Valori intermedi
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $x_1, x_2, \in [a,b].f(x_1) \leqslant f(x_2)$, allora:

$$\forall y \in [f(x_1), f(x_2)].\exists c \in [x1, x2].f(c) = y$$

Premessa 2

Theorem 2.2.3 Weierstrass
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua:

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b].\forall x \in [a,b].f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

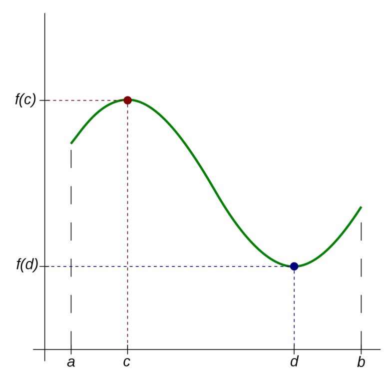
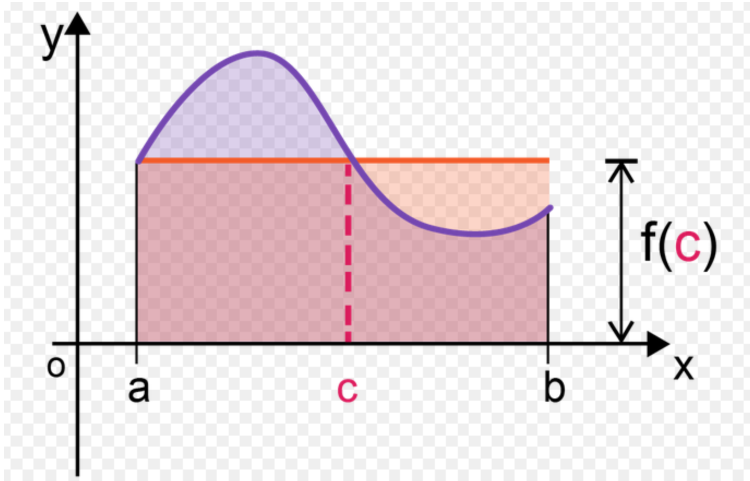


Figure 2.1: Esempio di Weierstrass

Theorem 2.2.4 Media integrale
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\exists c \in [a,b].\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$



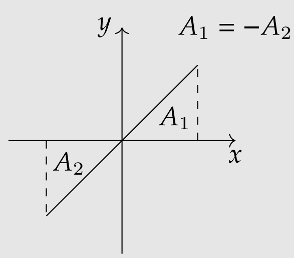
Quindi esiste un punto c in [a,b] t.c. il rettangolo che ha come base b-a e come altezza f(c) ha la stessa area dell'integrale di f da a a b.

Dimostrazione della media integrale: Sia f continua su [a,b]. Per Weierstrass abbiamo che $\exists x_1, x_2 \in [a,b]. \forall x \in [a,b]. f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Per la proprieta' di monotonia risulta $\int_a^b f(x_1)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x_2)dx$, ovvero $f(x_1) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant f(x_2)$. Quindi per il teorema dei valori intermedi $\exists c \in [a,b]. f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. ☺

Note:

La continuita' di f e' **necessaria**. Ex:

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x \implies \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = 0 = f(0)(c = 0)$$



Se considerassi $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che g e' intagarbile, e che vale

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$$

Pero' non esiste $c \in [-1,1]$ tale che g(c) = 0, quindi non soddisfa la media integrale.

2.3 Primitive di una funzione

Definition 2.3.1: Primitiva di f

Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$
Una funcione $F : A \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f su A se vale

$$\forall x \in A . F'(x) = f(x)$$

Example 2.3.1 (Primitiva)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x \implies F(x) = sinx$ e' una primitiva di f su $\mathbb{R}$. Infatti $\forall x . \frac{d}{dx} sinx = cosx$

Note:
$\forall k \in \mathbb{R}$, la funzione $G(x) = sin(x) + k$ e' anchessa primitiva di f. Quindi se F e' primitiva di f su A allora ci sono infinite primitive di f su A (una per ogni $k \in \mathbb{R}$).

Domanda: sono tutte le possibili primitive?

Proposition 2.3.1 Caratterizzazione delle primitive di una funzione su un intervallo
Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Siano $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $G :]a, b[\to \mathbb{R}$ due primitive di f su $]a, b[$.
Allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall x \in]a, b[. G(x) = F(x) + k$$

Ovvero F e G "differiscono per una costante".

Dimostrazione: Considero $H :]a, b[\to \mathbb{R}, H(x) = G(x) - F(x)$. Sappiamo che F'(x)=f(x) e G'(x)=f(x) (def. primitiva). $\frac{d}{dx} H(x) = \frac{d}{dx} G(x) - \frac{d}{dx} F(x) = f(x) - f(x) = 0$. Dunque H ha derivata nulla su $]a, b[$, quindi (per coroll. Lagrange) H e' costante. 😃

2.4 Funzioni integrali

D'ora in poi $A =]a, b[$.

Definition 2.4.1: Funzione Integrale

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua.
Sia $c \in A$. Introduco $I_c : A \to \mathbb{R}$:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

Nota: I_c e' ben definita essendo f continua.

Note:

1. $f : A \to \mathbb{R}, c \in A, I_c(x) = \int_c^x f \implies I_c(c) = \int_c^c f(t) dt = 0.$
2. Dati $c, c' \in A, f : A \to \mathbb{R} \implies I_c(x) - I_{c'}(x) =$ costante. Infatti:

$$I_c(x) - I_{c'}(x) = \int_c^x f - \int_{c'}^x f = \int_c^x f + \int_x^{c'} f = \int_c^{c'} f(t) dt = k$$

2.4.1 Teoremi fondamentali del calcolo integrale

Theorem 2.4.1 Fondamentale del calcolo sulla derivata della funzione integrale

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, $c \in A$. Sia I_c la funzione integrale, allora:

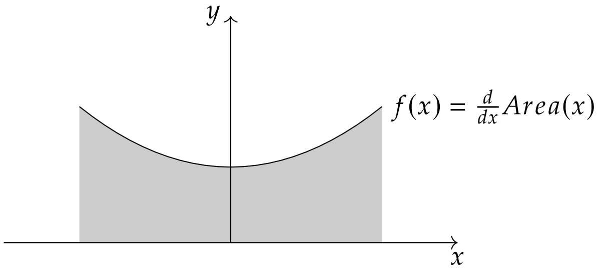
$$I_c \text{ e' derivabile in ogni punto } x \in A \text{ e } I_c'(x) = f(x)$$

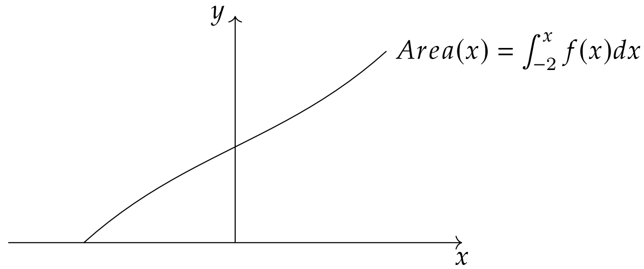
Cioe' $\frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x), \forall x \in A$, quindi I_c e' **primitiva** di $f(x)$.

Una possibile interpretazione di questo teorema e' quello della derivata dell'area sottesa che e' uguale alla funzione stessa, ovvero:

$$\forall x . f(x) \geqslant 0 \implies \frac{d}{dx}\text{Area} = f(x)$$

$A = [-2, 2], f(x) = \frac{x^2}{5} + 1$:





Note:
Il teorema assicura che ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ continua ammette primitive.

Dimostrazione: $f : A \to \mathbb{R}, c \in A, I_c : A \to \mathbb{R}$. Devo calcolare la derivata di I_c. Calcolo $\lim_{h \to 0^+} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h}$, che equivale a $\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$. Per teo. media integrale sappiamo che $\exists c \in [x, x+h]. f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$, quindi possiamo riscrivere la formula come $\lim_{h \to 0^+} f(c_h)$. Dato che $h \to 0^+$ e $x \leqslant c \leqslant x + h$, per il teo. dei carabinieri $c = x$, quindi $\frac{d}{dx} I_c(x) = f(x)$. 😃

Theorem 2.4.2 Fondamentale del calcolo per integrali definiti

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua su A. Sia $F : A \to \mathbb{R}$ primitiva di f su A. Dati $a, b \in A$, vale:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)] = [F(x)]_a^b$$

Dimostrazione: Sia $c \in A$, $I_c : A \to \mathbb{R}$ la funzione integrale ($I_c(x) = \int_c^x f$). Per il teo. fond. del calc. sulla derivata di I_c, I_c e' una primitiva di f su A. Per le proprieta' delle primitive, $\exists k \in \mathbb{R}. \forall x \in A. F(x) = I_c(x) + k$.

$$F(b) - F(a) = (I_c(b) + k) - (I_c(a) + k) = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

😃

2.4.2 Integrazione per parti

Si parte dalla regola del prodotto delle derivate ($\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$) per trovare una regola di integrazione.

Theorem 2.4.3 Integrazione per parti

Dati $f, g : A \to \mathbb{R}$, A intervallo aperto e sia F primitiva di f su A con F,f,g continue, g derivabile e g' continua:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Quindi usando il teorema fondamentale:

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

2.4.3 Cambio di variabile

Theorem 2.4.4 Formula del cambio di variabile

Date $h : I \to A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $I, A \subseteq \mathbb{R}$ e $\exists (f \circ h) : I \to \mathbb{R}.(f \circ h)(t) = f(h(t))$. f continua, h derivabile e h' continua. Presi $\alpha, \beta \in I$, vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Questa e' la versione generalizzata del teo. fond. del calcolo

Dimostrazione: Date due funzioni $G, H : I \to \mathbb{R}.G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt, H(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx$, dobbiamo dimostrare che $G(z) = H(z)$. Ci riduciamo a dimostrare che:

1. $G(\alpha) = H(\alpha)$: ovvio perche' integrali su intervallo degenere ($G(\alpha) = H(\alpha) = 0$)
2. $\forall z \in I.G'(z) = H'(z)$:
   - $G'(z) = \frac{d}{dz}\int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt = f(h(z))h'(z)$
   - $H'(z) = \frac{d}{dz}\int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx = f(h(z))h'(z)$ (generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo)

😃

Note:

1. t integrata in α, β, allora x sara' integrata in $h(\alpha), h(\beta)$.
2. dx si e' trasformato in $h'(t)dt$ ($\frac{d}{dt}h(t) = h'(t) \implies dh(t) = h'(t)dt$)

2.5 Integrali generalizzati (impropri)

Definition 2.5.1: Integrali generalizzati su intervalli illimitati

Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si dice che l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e' **convergente** se e' finito il limite $\lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)dx := \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Altrimenti se il limite diverge o oscilla e' detto **divergente** (o oscillante).
La definizione e' analoga per $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

Definition 2.5.2: Integrali generalizzati su intervalli limitati

Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ e' **convergente** se il limite $\lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)dx$ e' finito.
Altrimenti se il limite diverge o oscilla e' detto **divergente** (o oscillante).
La definizione e' analoga per $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

Chapter 3

Spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

(Spazio **euclideo** = c'e' il prodotto scalare)
$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | \forall j \in \{1, 2, ..., n\}. x_j \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \mathbb{R}$ (n volte).

- $n = 1$ retta reale
- $n = 2$ piano cartesiano
- $n = 3$ spazio ordinario

3.1 Operazioni su $\mathbb{R}^n$

- Somma di vettori: $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$. Definiamo $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- Prodotto di $x \in \mathbb{R}^n$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Dato $x = (x_1, ..., x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, definiamo $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Definition 3.1.1: Prodotto scalare

Dati $x, y \in \mathbb{R}_n$, definiamo il prodotto scalare $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \in \mathbb{R}^n$.
Notazione alternativa: $< x, y >= x \cdot y$.

Note:
Il prodotto scalare non da' un nuovo vettore, ma solo un valore scalare!

3.1.1 Proprieta' del prodotto scalare (euclideo)

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n. < x, y >=< y, x >$ (simmetria)
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. < \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > + \mu < y, z >$ (linearita' nel primo argomento)
  Per simmetria vale $< z, \lambda x + \mu y >= \lambda < z, x > + \mu < z, y >$ (linearita' nel secondo argomento)
- $\forall x \in \mathbb{R}^n. < x, x >\geqslant 0$, inoltre $< x, x >= 0 \iff x = (0, 0, ..., 0) = \underline{0}$ (vettore nullo).

3.2 Ortogonalita'

Definition 3.2.1: Vettori ortogonali

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** se vale:

$$< x, y >= 0$$

3.3 Norma euclidea

Sinonimi: modulo, lunghezza

Definition 3.3.1

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} \geqslant 0$$

Rappresenta la "lunghezza" del vettore usando il teorema di Pittagora.
Notazione alternativa: $|x|$

3.3.1 Proprieta' della norma

- $\forall x \in \mathbb{R}^n . \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n . \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n . |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Disuguaglianza triangolare)

3.4 Vettore normalizzato

Definition 3.4.1: Normalizzato

Dato $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, cerco $r > 0$ t.c.

$$|rx| = 1$$

Visto che $r > 0$, $r|x| = 1$ quindi $r = \frac{1}{|x|}$.
Il vettore $\frac{x}{|x|}$ ha norma 1 e si dice **normalizzato** di $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.
$\frac{x}{|x|}$ si dice **vettore unitario**.

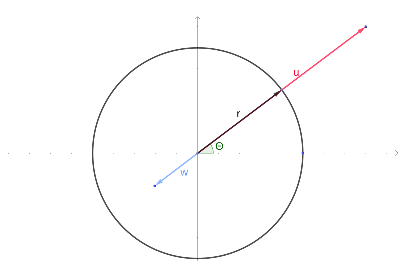
Note:
Possiamo scrivere $x = |x| \cdot \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$.

3.5 Coordinate polari

In $\mathbb{R}^2$, ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ si scrive nella forma $|(x, y)| \cdot (\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|})$. L'insieme di coordinate $\{(\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|}) | x, y \in \mathbb{R}\}$ forma una **circonferenza unitaria** (dato che il loro modulo e' sempre 1), quindi $\exists \theta \in [0, 2\pi[$ tale che $(cos\theta, sin\theta) = (\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|})$ (θ si chiama **"argomento"** di (x, y)). Ponendo $r = |(x, y)|$ = modulo, scriviamo:

$$(x, y) = r(cos\theta, sin\theta)$$

dove $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ si chiamano **coordinate polari** di (x,y).



- r = vettore unitario

3.5.1 Prodotto scalare in coordinate polari

Considero due vettori $(x, y) = (rcos\theta, rsin\theta)$ e $(n, o) = (\rho cos\gamma, \rho sin\gamma)$. Il loro prodotto scalare $< (x, y), (n, o) >$ diventa $r\rho cos\theta cos\gamma + r\rho sin\theta sin\gamma$, che puo' essere riscritto come $r\rho cos(\gamma - \theta)$, ovvero:

$$|(x, y)| \cdot |(n, o)| \cdot cos(\gamma - \theta)$$

Proposition 3.5.1 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$| < x, y > | \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

L'uguaglianza vale solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Note:
Vale in ogni $\mathbb{R}^n \forall n \in \mathbb{N}$

Proposition 3.5.2 Quadrato di binomio

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 < x, y >$$

Generalizzazione di Pitagora (In due dimensioni diventa il teorema di Carneau).

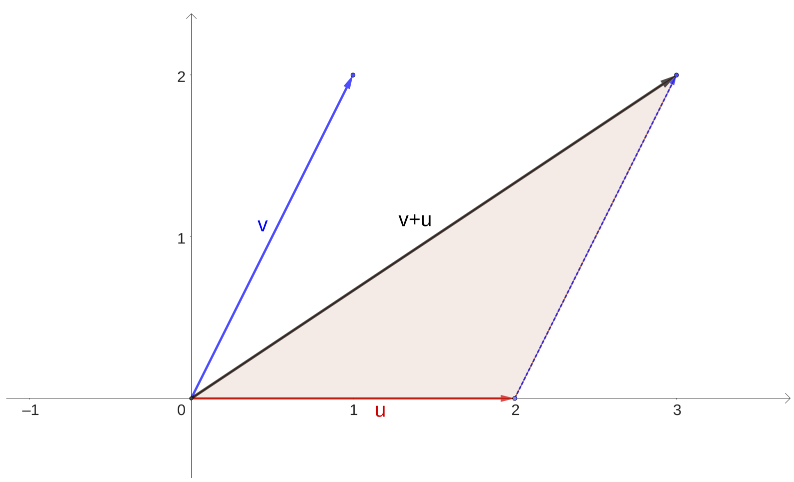
Proposition 3.5.3 Disuguaglianza Triangolare
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha che:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

: Dimostriamo il quadrato della disuguaglianza per poter usare il quadrato di binomio:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 < x, y > \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2| < x, y > | \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$
$$\implies |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$$

😊



3.6 Distanza tra punti

Definition 3.6.1: Distanza fra due punti

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distanza fra x e y e' $|x - y|$

3.6.1 Punto di minima distanza da una retta

Problema $\mathbb{R}^n, v \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$. Considero le linee $l_v = \{tv | t \in \mathbb{R}\}$, cerco fra tutti i punti di l_v quello che ha minima distanza da x. Devo minimizzare la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = |x - tv|$ = distanza fra x e tv

Proposition 3.6.1

Dati $v \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, il punto di minima distanza $\frac{<x,v>}{|v|^2}v$ soddisfa:

$$< x - \frac{< x, v >}{|v|^2} v, v >= 0$$

Quindi il vettore che parte dal punto di minima distanza e arriva al punto x e' perpendicolare alla retta l_v.

3.7 Intorni

Definition 3.7.1: Intorno sferico di un punto

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, poniamo

$$D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x - y| < r\}$$

$D(x, r)$ si dice disco di centro x e raggio r.

Definition 3.7.2: Insiemi aperti

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se:

$$\forall x \in A. \exists \epsilon > 0. D(x, \epsilon) \subseteq A$$

3.8 Successioni in $\mathbb{R}^n$

Una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e' un vettore di k successioni: $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n)$ con $k \in \mathbb{N}$

Chapter 4

Funzioni a piu' variabili

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$, consideriamo funzioni $f : A \longrightarrow B$ (A = dominio, B = codominio).
Casi modello:

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (funzioni scalari)
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ (cammini in $\mathbb{R}^q$)

4.1 Insiemi di livello

Definition 4.1.1

$A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. L'insieme di livello b di f e':

$$L_b = \{x \in A | f(x) = b\} = f^{-1}(b)$$

Se cammino lungo l'insieme di livello, la funzione corrispondente non cambia

4.2 Continuita'

Definition 4.2.1: Funzioni continue

$A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, k \in A$. Si dice che f e' continua in $k \in A$ se $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\begin{cases} x_n \in A & \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \longrightarrow k & k \longrightarrow +\infty \end{cases} \implies f(x_n) \longrightarrow f(k)$$

Proposition 4.2.1

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}, k \in A$. Allora f e' continua in k se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0. \begin{cases} x \in A \\ |x - k| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(k)| < \epsilon$$

4.3 Derivata parziale

Definition 4.3.1: Derivata parziale

Data $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$. Dati $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ f si dice derivabile parzialmente rispetto a $\overline{x}$ se:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$$

In modo analogo per $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$.

Definition 4.3.2: Gradiente

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette derivate parziali $\forall (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, definiamo il **gradiente di f** come:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (funzione vettoriale)

Note:

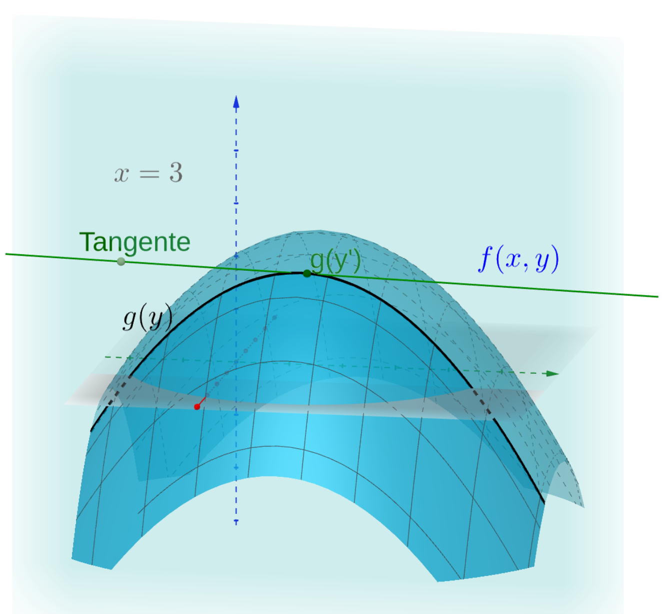
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y})$ fissato:

$$\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{x - \overline{x}}$$

Introduco una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, \overline{y})$, in modo che, facendo la normale derivata di g:

$$g'(\overline{x}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{g(x) - g(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} f(\overline{x}, \overline{y})$$

Abbiamo quindi trasformato una derivata parziale in una derivata "normale" fissando tutti i parametri tranne uno.



4.3.1 Derivate parziali in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$, data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ possiamo riscrivere la derivata parziale cosi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f((\overline{x}, \overline{y}) + t(1, 0)) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t}$$

Possiamo usare quindi le basi canoniche $(e_1 = (1, ..., 0), ..., e_n(0, ..., 1))$ per indicare per quale dei valori del vettore passato come parametro vogliamo derivare.

Definition 4.3.3

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, ..., x_n), \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Per $k = \{1, ..., n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + te_k) - f(\overline{x})}{t}$$

4.4 Derivabilita' e continuita'

In $\mathbb{R}$, se una funzione era derivabile in un punto allora era anche continua, pero' se in piu' variabili non e' cosi:(guardare es slide)

4.5 Differenziabilita'

In una dimensione, possiamo dire che:

$$\exists f'(\overline{x}) \in \mathbb{R} \iff f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + o(h)$$

Quindi una funzione e' derivabile in un punto sse vale lo sviluppo di Taylor. Infatti, se sostituiamo x a $\overline{x} + h$, dove $x \to \overline{x}$ otteniamo il polinomio di Taylor di primo grado nel punto $\overline{x}$: $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$. Come vedremo, questa prposizione non vale quando aumentiamo le dimensioni. Infatti, solo in una dimensione differenziabilita' e derivabilita' coincidono.

4.5.1 o piccolo in piu' variabili

Definition 4.5.1: o piccolo

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n, h \in A, g : A \to \mathbb{R}$, assumendo che $0 \in A$, si dice che g e' **o piccolo** di $|h|^p$ (con $p \geqslant 0$) se:

1. $g(0) = 0$
2. $\forall \epsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall h \neq 0 . |h| < \delta . \frac{|g(h)|}{||h||^p} < \epsilon$

Example 4.5.1

Verifica le seguenti uguaglianze:

- $g(h, k) = h^2 + k^2 = o(|h + k|)$

  $$h^2 + k^2 = |(h, k)|^2$$

  Quindi:

  $$\frac{|(h, k)|^2}{|(h, k)|} = |(h, k)|$$

  Dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0 . \exists \delta > 0 . \forall 0 < |(h, k)| < \delta . |(h, k)| < \epsilon$, che possiamo fare mettendo $\delta = \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$.

Possiamo riscrivere questa definizione usando le successioni:

$$g(h) = o(|h|^p) \iff \forall (h_j)_{j\in\mathbb{N}}. \begin{cases} h_j \neq 0 & \forall j \in \mathbb{N} \\ \lim_{j\to+\infty}(h_j) = 0 \end{cases} \implies \lim_{j\to+\infty} \frac{g(h_j)}{||h_j||^p} = 0$$

Definition 4.5.2: Differenziabilita' in due variabili

$(x, y), (h, x) \in \mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n$. Si dice che f e' differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ se:

1. $\exists \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})$
2. Vale lo sviluppo:

$$f((\overline{x}, \overline{y}) + (h, k)) = f(\overline{x}, \overline{y}) + < \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) > +o(|(h, k)|) =$$

$$f(\overline{x}, \overline{y}) + \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + o(|(h, k)|)$$

Per $(h, k) \to (0, 0)$

4.6 Continuita' di una funzione differenziabile

Sappiamo che l'esistenza delle derivate parziali non implica la continuita' della funzione. Mostreremo pero' che se sappiamo che una funzione e' differenziabile, allora sara' sicuramente continua.

Proposition 4.6.1 Differenziabilita' implica continuita'

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se f e' differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, allora f e' continua in $(\overline{x}, \overline{y})$.

: 😃

4.7 Condizioni sufficenti per la differenziabilita'

Theorem 4.7.1

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Assumo $\exists \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})$ per ogni $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$. Suppongo che le derivate siano continue. Allora:

$$f \text{ e' differenziabile in ogni punto di } \mathbb{R}^2$$

Note:

Questo teorema vale anche in $\mathbb{R}^n$. Inoltre le funzioni elementari soddisfano sempre le ipotesi nel loro dominio, quindi sono differenziabili.

Per dimostrare questo teorema, ci serve prima una proposizione che equivale al teorema di Lagrange, pero' in piu' dimensioni. Usando le derivate parziali, ci riduciamo a due casi (uno dove ci si muove lungo x, e uno lungo y) dove ci riduciamo ad una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sappiamo gia' dimostrare.

Proposition 4.7.1 Lagrange per derivate parziali

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con derivate parziali $\partial_x f, \partial_y f$ continue, $\forall (\overline{x}, \overline{y}), (h, k) \in \mathbb{R}^2 . \exists \delta, \overline{\delta} \in]0, 1[$ tali che:

$$\begin{cases} \frac{f(\overline{x}+h,\overline{y})-f(\overline{x},\overline{y})}{h} = \partial_x f(\overline{x} + \delta h, \overline{y}) \\ \frac{f(\overline{x},\overline{y}+k)-f(\overline{x},\overline{y})}{k} = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y} + \overline{\delta} k) \end{cases}$$

Ora che abbiamo Lagrange per le derivate parziali, possiamo dimostrare il teorema:

Dimostrazione teo. differenziabilita': Sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ e siano le derivate parziali di f continue, dobbiamo dimostrare che:

$$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) =< \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h, k) > +o(|(h, k)|)$$

Riscriviamo la parte sinistra:

$$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = [f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, \overline{y})]_1 + [f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})]_2$$

Ci riduciamo a dimostrare che:

$$[]_1 = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + o(|(h, k)|)$$
$$[]_2 = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + o(|(h, k)|)$$

Analizziamo il caso $[]_2$: usiamo Lagrange, che ci dice che $\exists \theta \in]1, 0[.[]_2 = \partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y})h$, quindi dimostriamo che questo equivale a $\partial f(\overline{x}, \overline{y})h + o(|(h, k)|)$:

$$[\partial f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial f(\overline{x}, \overline{y})]h = o(|(h, k)|)$$
$$g(h, k) = o(|(h, k)|)$$

Sappiamo che $g(0, 0) = 0$, quindi data una successione $(h_n, k_n) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} (0, 0)$ con $(h_n, k_n) \neq \underline{0} \forall n \in \mathbb{N}$ dimostriamo che:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{[\partial f(\overline{x}+\theta h_n, \overline{y}) - \partial f(\overline{x}, \overline{y})]h_n}{|(h_n, k_n)|} \right| = 0$$

Grazie al valore assoluto sappiamo che la funzione sara' sempre $\geqslant 0$, e se la riscriviamo in questo modo:

$$|[\partial f(\overline{x}+\theta h_n, \overline{y}) - \partial f(\overline{x}, \overline{y})]| \frac{|h_n|}{|(h_n, k_n)|}$$

possiamo dire che sara' sempre $\leqslant |\partial f(\overline{x}+\theta h_n, \overline{y}) - \partial f(\overline{x}, \overline{y})|$, dato che $\frac{|h_n|}{|(h_n, k_n)|} \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \theta \in]0, 1[$. Usiamo quindi il teorema dei carabinieri e ci riduciamo a dimostrare che questo upper-bound tenda a 0 per n che tende a infinito. Grazie alla continuita' della derivata parziale, possiamo dire che:

$$\lim_{n \to +\infty} \partial f(\overline{x}+\theta h_n, \overline{y}) = \partial f(\overline{x}, \overline{y})$$

Quindi la loro differenza e' 0. Si possono fare passaggi simili per dimostrare $[]_1$. ☺

4.8 Derivate direzionali

Fino ad ora abbiamo visto il valore di crescita della funzione solo lungo le assi principali x, y (le derivate parziali), vediamo ora cosa succede se ci allontaniamo da un punto cambiando entrambe le sue coordinate:

Definition 4.8.1: Derivata direzionale

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$. Dato un vettore unitario $v = (v_1, v_2)$ ($|v| = 1$), f si dice derivabile lungo la direzione v nel punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f((\overline{x}, \overline{y}) + hv) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h}$$

Theorem 4.8.1 Formula del gradiente

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\overline{x}$, allora:

$$\forall v = (v_1, ..., v_n) \neq \underline{0}. |v| = 1 :$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}) =< \nabla f(\overline{x}), v >$$

: Dobbiamo dimostrare che $\lim_{t\to0}\frac{f(\overline{x}+tv)}{t} =< \nabla f(\overline{x}), v >$. Essendo f differenziabile possiamo dire che $f(\overline{x}+tv) = f(\overline{x})+ < \nabla f(\overline{x}), tv > +o(|vt|)$. Dato che $|vt| = |v||t| = 1|t| = |t|$, possiamo riscrivere l'o-piccolo come $o(|t|)$. Sostituendo, rimane $\lim_{t\to0}\frac{<\nabla f(\overline{x}),vt>+o(|t|)}{t}$. Possiamo dividere il limite, ottenendo $< \nabla f(\overline{x}), v >$ (abbiamo diviso per t) e $\lim_{t\to0}\frac{o(|t|)}{t}$ che per definizione e' 0. L'uguaglianza quindi vale. 😆

Note:

Lineare in $v_1, ..., v_n$ con coefficenti le derivate parziali, quindi tutte le derivate direzionali $\partial_v f$ si possono scrivere conoscendo solo le derivate parziali.

4.8.1 Direzione di massima crescita

Problema: trovare la direzione di massima crescita di una funzione f in un assegnato punto.
Per rispondere a questa domanda, dobbiamo trovare il vettore unitario v la cui derivata direzionale e' massima, ovvero dobbiamo massimizzare la funzione $< \nabla f(\overline{x},\overline{y}),(v_1,v_2) >= \partial_x f(\overline{x},\overline{y})v_1 + \partial_y f(\overline{x},\overline{y})v_2$. Riscrivendo il gradiente e v usando coordinate polari, otteniamo $< r(cos\theta, sin\theta),(cos\gamma, sin\gamma) >= r(cos\theta cos\gamma + sin\theta sin\gamma)$, che per la formula del coseno di una differenza diventa $rcos(\theta - \gamma)$, che raggiunge il suo valore massimo r quando $\theta = \gamma$. Questo vuol dire che la direzione di massima crescita in un punto e' quella dove giace il vettore gradiente, e il valore di questa crescita e' dato dal modulo dello stesso vettore. Possiamo generalizzare questa scoperta in n dimensioni (usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz 3.5.1):

Proposition 4.8.1

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $\nabla f(x) \neq \underline{0}$, allora:

- $v_{\max} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = |\nabla f(x)|$

4.9 Curve in $\mathbb{R}^n$

Una curva in $\mathbb{R}^n$ e' una "funzione" (non sempre) r (oppure s, γ):

$$r : (a, b) \to \mathbb{R}^n$$

Che prende quindi un numero reale e ci da un punto in $\mathbb{R}^n$, ed e' definita da un parametro $t \in (a, b)$, quindi si puo' scrivere come $r(t) = (r_1(t), ..., r_n(t))$. Esempio:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{equazione parametrica di retta in } \mathbb{R}^3$$

Oppure come intersezione di due piani:

$$r = \pi + \sigma \implies \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 2x \end{cases} \implies \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Una curva e' una "funzione" di classe $C^1((a, b))$, quindi esistono tutte le derivate prime e sono continue (in (a, b)).

Definition 4.9.1: Velocita di una curva

La velocita' di una curva e' il vettore tangente alla curva data:

$$r'(t) = (r_1'(t), ..., r_n'(t))$$

Definition 4.9.2: Velocita' scalare (instantanea)

Non e' altro che la norma del vettore tangente, cioe':

$$||v(t)|| = ||r'(t)|| = \sqrt{(r_1'(t))^2 + ... + (r_n'(t))^2}$$

Definition 4.9.3: Curva regolare

Una curva e' detta **regolare** in $t_0 \in (a, b)$ se:

$$r'(t_0) \neq \underline{0}$$

Note:
Una curva regolare $r : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e' anche detta essere una **immersione** di (a, b) in $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.9.4: Punto singolare

Se $t_0 \in (a, b)$ e' tale per cui

$$r'(t_0) = \underline{0}$$

Allora t_0 e' chiamato **punto singolare**

Definition 4.9.5: Curve semplici

Una curva e' detta **semplice** se e' iniettiva. (Cioe' la curva non si interseca)

Nelle curve almeno C^2, si definiscono:

Definition 4.9.6: Curvatura

Si definisce **curvatura** di $r : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ il modulo della accelerazione

$$k = ||a(t)|| = ||v'(t)|| = |||r''(t)|$$

Definition 4.9.7: Raggio di curvatura

Si chiama **raggio di curvatura**

$$R = \frac{1}{k}$$

Bisogna considerarlo nella retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, dato che le rette hanno il raggio di curvatura e ha senso che questo sia ∞

Chapter 5

Integrali su piu' variabili