ALG → Gruppi, Campi ... } → Rendere + compr oggetti dell'algebra
COMB → contare

Repr. Gruppi Finiti

Funzioni simmetriche e grafi

MARTA → $\boxed{\text{PROCEDE}}$

ESAME → saper risolvere es semplici alla lavagna

• Cos'è una Rappresentazione?

"Struttura Alg Astratta" → "tirata fuori" (decontestualizzata)

↓ contrario

"concreto, messo dentro"

"rappresentata"

↓

Insieme con 1 o + op:
- gruppo
- anello
- campo
- SV

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

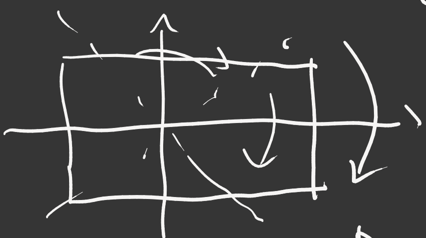
→ Gruppo di Klein (c elem. neutro)

operaz di un rettangolo

Non è il modo migliore di rappresentare il gruppo

$c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$c \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



↳ Rapp di $G=\{a,b,c,d\}$ su $V=\mathbb{R}^2$

$V=\langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle$ → decomp in SV stabile [x va in $-x$, y va in $-y$]

"Sottorappres"

$V=\langle (1,1)\rangle \oplus \langle (1,-1)\rangle$ → Questa non è stabile in quanto le basi non sono mandate in sé stesse dalle azioni del gruppo

Formalizziamo:

Sia G un gruppo, K campo, V SV su K.
(setting largo, solitamente sarà più definito)

Una rappresentazione di G su V è un
omomorfismo $\rho: G \to GL(V)$ → è un gruppo rispetto alla comp.
{Isomorfismi di V in se stesso}

In altre parole, è un'azione di G su V con immagine $GL(V)$
$G \to Sym(V)$ non solo biunivoche
(tramite isomorfismi) ma anche lineari

La rapp è fedele se ρ è iniettivo: G è un sottogruppo di $GL(V)$

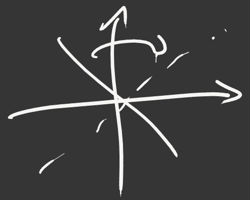
Def
Sia (V, ρ) una rapp di G. Diciamo che un sottospazio vettoriale $U \subseteq V$ è una sottorapp. se $\rho(g).u \in U$
$\forall u \in U, g \in G$

(ecco perché e_1 / e_2 erano sottorapp)
In altre parole $(U, \rho|_U)$ è una rappresentazione
$$\downarrow$$
$$G \to GL(U)$$

Ex.
$G = \langle z \mid z^4 = 1 \rangle$ → Isomorfo alle rotazioni
↳ ciclico di ordine 4 (EH?) → di $V = \mathbb{R}^2$

$\rho(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ → rot $\pi/2$
↓
omomorfismo → so gli altri $\rho(x)$

Ha sottorapp. proprie? → Dim = 1 (retta per l'origine)
$\boxed{\text{Irriducibile}}$ ← NO ← ($\nexists$ rette ℓ t.c. $\rho(z) = \ell$)



Però, cerchiamo gli autovalori di

$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$: $\det\begin{pmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+1 \quad \begin{cases}\lambda_1 = i\\ \lambda_2 = -i\end{cases}$

su $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$

$V_{\mathbb{C}}$: qui non è irriducibile

$= V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ Lascio dimostrazione a Giovanni

autospazi, e quindi sottospazi di $V_{\mathbb{C}}$ (è riducibile)

La rapp $\rho: G \to GL(\mathbb{K}^2)$

$\rho(z) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ è:
- irriducibile quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- riducibile quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Def RIDUCIBILITÀ

Una rapp (V,ρ) è riducibile se ammette un sottospazio propria ($\neq V$, $\neq \{0\}$). Altrimenti è irriducibile

Ex.

$G = S_3$, $V = \mathbb{K}^3$ (Campo $= \mathbb{C}^3$)

rapp. naturale $\longrightarrow$ permutare indici delle coordinate

$\sigma \in S_n$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{K}^3$ $\quad \sigma.(x_1,x_2,x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(2)})$

↳ scritta come azione

$(123).(7,-4,5/2) = (-4, 5/2, 7)$

$\sigma(1) \to 2$
$\sigma(2) \to 3$
$\sigma(3) \to 1$

Ex.

rapp. parametrica

Consideriamo due s.s.V $U=\{(t,t,t), t\in K\}$

rapp. cartesiana

$W=\{(x_1,x_2,x_3)\in V \mid x_1+x_2+x_3=0\}$

dim $U = 1$
dim $W = 2$

Mostrare che U, W sono sottorapp. e sono irriducibili.
(Lo stesso per S_n in K^n).

$V=U\oplus W$ è una decomposizione in sottorapp. irriducibili
↑ non possiamo ulteriormente decomporre il piano in sottorap. stabili

Vogliamo trovare componenti ultime

Perché? Vogliamo rendere i gruppi astratti + concreti.

Viene prima il gruppo rappresentato che astratto

Def Una rapp. è indecomponibile se, ogniqualvolta che $V=U\oplus W$ sottorapp., abbiamo $U=V$ e $W=\{0\}$ o viceversa.

↓ non è uguale a irriducibile? ⇓ indecomponibile

↓ potrebbe non esserci un complementare

Ex.
$V=\mathbb{C}^2$ $G=(\mathbb{Z},+)$ $\rho:\mathbb{Z}\to GL(V)$
$n\mapsto \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

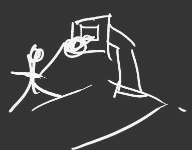
ρ è un omomorfismo perché $\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+m\\0&1\end{pmatrix}$

obs: trovare una sottorapp. è abbastanza facile

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ EZ

✓ blocco di Jordan

↘ sottorapp. → Quindi V non è irriducibile



Ma $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+ny\\ y\end{pmatrix}$ $\forall y \neq 0$ è indipendente da $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

quindi $\nexists \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ t.c. è sottorapp. di V

$\nexists W \subset V$ t.c. $V = U \oplus W$

Vedremo che con G finito e ~~char(K)~~ $K = \mathbb{C}$ non succede mai sta roba. Quindi irriducibili $\equiv$ indecomp.

Sia V SV su $\mathbb{C}$ e consideriamo un prodotto hermitiano $(\cdot,\cdot)$ qualsiasi su V.

Sia $\rho : G \to V$ una rapr. di un gruppo G finito
(why no GL?)

Definiamo un nuovo prodotto hermitiano "simmetrizzato" rispetto a G $\langle \cdot,\cdot \rangle$:

$$\forall v, u \in V.\ \langle v, u\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\rho(g)v, \rho(g)u\right)$$

G è finito e char(K) = 0 (?)

$\downarrow$

prodotto scalare ottenuto con i vettori $\rho(g)$ e $\rho(u)$ e fare poi la media

Osserviamo che $\langle , \rangle$ è un prodotto hermitiano (somma di tanti prod. hermitiani)

Inoltre è G-invariante, ovvero

$\forall h \in G.\ \langle \rho(h)v, \rho(h)u\rangle = \langle v, u\rangle$ perché $g \mapsto hg$ è una biezione $G \to G$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\underbrace{\rho(h)\rho(g)}_{\rho(hg)} v, \underbrace{\rho(h)\rho(g)}_{\rho(hg)} v\right)$$

$\forall h \in G.\ \rho(h)$ è un operatore unitario per $\langle , \rangle$

Perché ci interessa un prod. scalare?
Per trovare il complementare di una sottorapp. usando l'ortogonalità!

$\boxed{\text{Lemma}}$
Sia G un gruppo finito e V una sua rapp. (su $\mathbb{C}$).
Allora ogni sottorapp. $U \subseteq V$ ammette un complementare cioè una sottorapp. $W \subseteq V$ t.c. $V = U \oplus W$.

Ovvero indecomp. $\Leftrightarrow$ irriducibile

$\boxed{\text{Dim}}$
Data sottorapp. $U \subseteq V$, consideriamo

$$U^{\perp} = \{ v \in V \mid \underbrace{\langle v, u \rangle}_{} = 0 \quad \forall u \in U \}$$

↳ prodotto hermitiano costruito prima (G-invariante)

chiaramente $V = U \oplus U^{\perp}$ e $U^{\perp}$ é una sottorapp.
perché $\forall v \in U^{\perp}$. $\langle \rho(g)v, u \rangle = \langle \rho(g^{-1})\rho(g)v, \rho(g)^{-1} u \rangle$

$$= \langle v, \underbrace{\rho(g)^{-1} u}_{\text{elemento di } U} \rangle = 0$$

Un punto di vista diverso: voglio vedere gli elementi di G come "scalari in più" di V.

Def. A anello con 1_A, $(V, +)$ gr. abeliano é un $\underline{A\text{-modulo}}$ sinistro se $A \times V \to V$ t.c. $a(v+u) = av + au$, $(a+b)v = av + bv$
$(ab)v = a(bv)$ $1_A v = v$ → come la def. di SV

Def. $\mathbb{K}[G] = \{$combinazioni lineari formali di elem di $g\}$

$$= \{ \sum_{g \in G} a_g l_g \, , \, a_g \in \mathbb{K} \}$$

↳ elemento della base di $\mathbb{K}$

con prod $a_{g_1} e_{g_1} \cdot a_{g_2} e_{g_2} = \underbrace{a_{g_1} a_{g_2}}_{\text{prod in } K} \underbrace{e_{g_1 g_2}}_{\text{prod in } G}$

Su $K[G]$ ho un prodotto che estende per linearità quello di G, che rende $K[G]$ un anello.

Def. ALGEBRA GRUPPO di G

Sia uno SV che un gruppo ($K[G]$)

OSS. È la stessa cosa dire che

1. V è una rappr. di G
2. V è un $K[G]$-modulo (sin)

Infatti

- $2 \Rightarrow 1$

  restringo a $G \subseteq K[G]$

- $1 \Rightarrow 2$

  Estendo per linearità

Posso moltiplicare anche per elementi del gruppo