

Probabilità Appunti

Giovanni "Qua' Qua' dancer" Palma e Alex Basta

Contents

Chapter 1

Introduzione

Chapter 2

Introduzione

Appunti di Probabilità presi in base alle lezioni di Elly Shlein, qui si è piddini

Chapter 3

Spazi di probabilità

3.1 Concetti introduttivi

Innanzitutto andiamo a definire che cosa intendiamo per *esperimento aleatorio*, *esito*, *probabilità*

Con la dicitura *esperimento aleatorio* indicheremo qualunque fenomeno (fisico, economico, sociale, ...) il cui esito non sia determinabile con certezza a priori. Il nostro obiettivo è di fornire una descrizione matematica di un esperimento aleatorio, definendo un modello probabilistico, un *esito* invece è un ipotetico risultato di un'esperimento aleatorio sulla base di un cosiddetto *spazio campionario* un insieme che contiene tutti gli esiti possibili dell'esperimento

Example 3.1.1

- **Esperimento aleatorio:** Lancio di un dado.
- **Spazio campionario:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Esito:** 4.

Note:

In casi più complessi ci saranno vari sotto-esperimenti aleatori, come 10 lanci di un dado.

Adesso forniamo vere e proprie definizioni

Definition 3.1.1: evento

Si definisce **evento** un'affermazione riguardante l'ipotetico esito univoco dell'esperimento, di cui si può affermare con certezza se è vero o falso una volta noto l'esito

Example 3.1.2

Esper. aleatorio: Lancio del dado
 $A = \text{"esce un numero pari"}$

Definition 3.1.2: Spazio campionario

Lo **spazio campionario** è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento casuale e viene denotato con Ω

Notare che non si afferma "tutti e solo tutti", quindi **qualsiasi** insieme che contiene gli esiti possibili può essere considerato uno spazio campionario

Example 3.1.3 (Lancio dado)

Possiamo porre come spazio campionario:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ma anche

$$\Omega = \mathbb{R}$$

Definition 3.1.3: Esiti favorevoli

Esiti per cui un evento è vero sono detti esiti favorevoli.

Definition 3.1.4: Evento in termine di insiemi

Un evento si può definire anche come il sottoinsieme dello spazio campionario Ω formato da tutti gli esiti favorevoli dell'evento.

Example 3.1.4

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies A = \text{"esce un numero pari"} \implies \{2, 4, 6\}$ sono gli esiti favorevoli dell'evento A .

Note:

La definizione insiemistica di un evento dipende dallo spazio campionario Ω definito, poiché l'evento è un sottoinsieme di Ω . Tuttavia, l'insieme degli esiti favorevoli di un evento è fisso, e rappresenta l'insieme evento di cardinalità massima possibile, ovvero l'insieme degli esiti favorevoli $A \subseteq \Omega$.

Definition 3.1.5

- Ω è l'evento *certo*
- \emptyset è l'evento *impossibile*
- $\omega \in \Omega$ è un evento *elementare* ($A = \{\omega\}$)

Example 3.1.5

Lancio un dado.

$A = \text{"esce un numero tra 1 e 6"}$

$B = \text{"esce un numero maggiore di 6"}$

$C = \text{"esce il numero 3"}$

- Se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, allora:
 - $A = \Omega$ (evento certo),
 - $B = \emptyset$ (evento impossibile),
 - $C = \{3\}$ (evento con un solo esito favorevole).
- Se $\Omega = \mathbb{R}$, allora:
 - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \Omega$ (evento quasi certo),
 - $B = (6, +\infty)$ (evento quasi impossibile),
 - $C = \{3\}$ (evento con un solo esito favorevole).

3.2 Regole del calcolo probabilistico

Ad ogni relazione logica possiamo associare un'operazione insiemistica:

Connettivi Logici	Connettivi Insiemistici
$A \vee B$	$A \cup B$
$A \wedge B$	$A \cap B$
$\neg A$	A^c
$A \implies B$	$A \subseteq B$
$A \iff B$	$A = B$

Note:

Nella prima colonna, A e B sono eventi come affermazioni, mentre nella colonna di destra sono degli insiemi.

3.2.1 Assiomi della probabilit 

Poniamo tre assiomi fondamentali da cui possiamo partire per derivare tutte le operazioni e propriet  che ci servono:

Note:

Per noi tutti i sottoinsiemi di Ω sono eventi (anche se non sar  sempre cos )

Definition 3.2.1: Assiomi fondamentali della probabilit 

Assioma 1. A ciascun sottoinsieme (o evento) A di Ω   assegnato un numero $\mathbb{P}(A)$ che verifica:

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

Tale numero $\mathbb{P}(A)$ si chiama **probabilit ** dell'evento A .

Assioma 2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Assioma 3. Vale la propriet  di **additivit  numerabile**^a: sia $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una successione di sottoinsiemi di Ω tra loro disgiunti^b e sia

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Allora

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

^aAnche detta **σ -additivit **.

^bIn formule: $A_i \cap A_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$. In altri termini, non hanno elementi in comune.

Note:

Quindi, per il primo assioma, esiste una funzione probabilit  $\mathbb{P}(A) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$.

Definition 3.2.2: Spazio di probabilit 

La coppia (Ω, \mathbb{P}) si dice **spazio di probabilit ** o modello matematico dell'esperimento aleatorio

3.2.2 Conseguenze degli assiomi

Theorem 3.2.1

Sia Ω spazio campionario e \mathbb{P} probabilit  su Ω ((Ω, \mathbb{P})   uno spazio di probabilit  con $\mathbb{P} : \mathcal{P}(A) \rightarrow [0, 1]$). Dagli assiomi ??, ??, ?? deduciamo le cose seguenti:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2. **Additività finita:** $(A_i)_{i=1,\dots,n}. \forall i \neq j. A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. **Monotonia:** $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Dimostrazione: 1. Devo mostrare che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Per semplicità definiamo $p := \mathbb{P}(\emptyset)$. Uso l'assioma ?? con la successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dove $\forall i \in \mathbb{N}. A_i = \emptyset$, che sono tutti eventi disgiunti. Quindi:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p.$$

Inoltre:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies p = \sum_{i=1}^{\infty} p.$$

L'equazione è soddisfatta solo per $p = 0$.

2. Supponiamo di avere una sequenza finita disgiunta A_1, \dots, A_n . Definisco $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $B_i = A_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $B_i = \emptyset$ per $i > n$. Usando l'assioma ??:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

3. Per definizione di complemento, $A^c \cup A = \Omega$ e $A^c \cap A = \emptyset$. Per additività:

$$\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad (\text{per l'assioma ??}).$$

4. Se $A \subseteq B$, allora $B = A \cup (B \setminus A)$, con A e $B \setminus A$ disgiunti. Per additività:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$$



Theorem 3.2.2 Probabilità unione non disgiunta

Siano A e B eventi:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (3.1)$$

Dimostrazione: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per additività:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B).$$

Osservando che:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B),$$

si ottiene la formula.



Note:

La formula si complica con un numero di eventi maggiore di 2. Per $n = 3$:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

3.3 Probabilità discreta

Finora sappiamo solo le "regole" che deve seguire una funzione per essere una probabilità. Passiamo ora a vedere come calcolare il valore di un certo tipo di probabilità, la *probabilità discreta*:

Definition 3.3.1: Probabilità discreta

Chiamo probabilità discreta una funzione probabilità \mathbb{P} su Ω , tale che:

$$\exists \bar{\Omega} \subseteq \Omega, \bar{\Omega} \text{ e' finito o numerabile. } \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = 1$$

Ovvero, una probabilità è discreta se il suo spazio campionario minimo è finito o numerabile. Questa condizione è necessaria per poter poi definire un modo per effettivamente calcolare il valore della probabilità (discreta) di un qualunque evento.

Diamo prima una definizione di una tale probabilità:

Definition 3.3.2: Delta di Dirac

Sia $\Omega = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora si chiama delta di Dirac centrato in x_0 la funzione:

$$\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$
$$A \mapsto \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

Notare che per definizione, la funzione di Dirac è una probabilità discreta, dato che soddisfa tutti gli assiomi per essere una probabilità e il suo spazio campionario minimo è formato da un solo elemento di Ω , quindi è discreta (ma non molto utile dato che può assumere solo due valori). Però, tramite le delta di Dirac, siamo in grado di costruire qualunque altra probabilità discreta:

Sia $\Omega = \mathbb{R}$. Prendiamo un numero contabile n di eventi singoletto $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a cui corrispondono $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall i = 1, \dots, n. p_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Definiamo la funzione:

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$
$$A \mapsto \sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i}(A)$$

\mathbb{P} è una combinazione lineare di delta di Dirac. Essendo una combinazione convessa, $\mathbb{P} \in [0, 1]$ e si può dimostrare che soddisfa gli altri due assiomi (?? e ??), quindi è una probabilità discreta! Variando le x e le p è possibile generare qualsiasi funzione \mathbb{P} discreta.

Example 3.3.1

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\forall i = 1, \dots, 6. x_i = i, p_i = \frac{1}{6}$, la funzione \mathbb{P} associata è:

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \delta_{x_i}(A)$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies P(A) = 1$$

$$B = (6, +\infty) \implies P(B) = 0$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \implies P(C) = 1$$

Definition 3.3.3

Si chiama evento quasi certo un evento A tale che $\mathbb{P}(A) = 1$.

Definition 3.3.4

Si chiama evento quasi impossibile un evento A tale che $\mathbb{P}(A) = 0$.

Posso allargare Ω quanto voglio perché tanto fuori dall'insieme minimo che comprende tutti gli eventi possibili le probabilità che aggiungo sono quasi impossibili e quindi hanno probabilità 0 e non cambiano il valore totale della somma.

3.3.1 Probabilità uniforme

Theorem 3.3.1 Principio di probabilità uniforme

Si consideri un esperimento aleatorio con spazio campionario $\Omega = \{w_1, \dots, w_N\}$ finito e discreto, con esiti sono equiprobabili $\mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{w_N\})$.

Si dice allora che \mathbb{P} è la **probabilità uniforme** su Ω e valgono le seguenti proprietà:

1. Dato un qualunque evento elementare $A = \{w_i\}$, si ha:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{N}$$

2. Dato un qualunque evento $A \subseteq \Omega$, vale la *formula di Laplace*:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N} = \frac{\text{numero di esiti favorevoli}}{\text{numero di esiti possibili}}$$

Dimostrazione: 1. Dimostro il punto 1:

Per ipotesi sappiamo che $\mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{w_N\})$ e per il *principio di additività* si può costruire il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\{w_1\}) + \mathbb{P}(\{w_2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{w_N\}) = 1 \\ \mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_2\}) \\ \mathbb{P}(\{w_2\}) = \mathbb{P}(\{w_3\}) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(\{w_{N-1}\}) = \mathbb{P}(\{w_N\}) \end{cases}$$

Da cui si ricava che:

$$\forall i \in [1, \dots, N] \quad \mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{N}$$

2. Dimostro il punto 2: Sia $A = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}\}$, con $k \leq N$. Per definizione di probabilità:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}\}) = \mathbb{P}(\{w_{i_1}\}) + \dots + \mathbb{P}(\{w_{i_k}\}) = \frac{k}{N}$$



Chapter 4

Probabilità Condizionata

4.1 Definizione e motivazioni

Supponiamo di sapere che un evento di un'esperimento aleatorio si è avverato. Finora abbiamo visto solo casi in cui gli eventi non si influenzavano (*indipendenti*), ma succede spesso nella realtà che se si sa che un certo evento è avvenuto, allora questo ci dà informazioni aggiuntive che possono cambiare la probabilità di altri eventi di cui ancora non sappiamo gli esiti.

Chiamiamo B l'evento che è avvenuto e A un altro evento di cui vogliamo sapere la probabilità. Prima di avere informazioni su B , la probabilità di A era semplicemente $\mathbb{P}(A)$, ma ora ci poniamo la domanda: "se so che si è verificato B , come cambia $\mathbb{P}(A)$?". Denotiamo questa nuova probabilità con:

$$P(A|B)$$

chiamata la *probabilità condizionata di A dato B* .

Definition 4.1.1: Probabilità Condizionata

Prendo due eventi A, B su uno spazio di probabilità (Ω, \mathbb{P}) . Definisco *probabilità condizionata a B di A* la funzione:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\end{aligned}$$

È possibile dimostrare che una certa funzione è anch'essa una probabilità (sempre discreta), verifichiamo gli assiomi (fissiamo $B \subseteq \Omega$ con $\mathbb{P}(B) > 0$):

1. $\mathbb{P}(A|B) \in [0, 1], \forall A \subseteq \Omega$
2. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$
3. σ - addittività: $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ disgiunti:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i | B)$$

Lasciate al lettore in quanto davvero molto facili, quasi banali. Se non riesci a farle fai schifo. Vediamo ora, con un esempio, come mai è proprio questa la definizione utilizzata:

Example 4.1.1

- Lancio del dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, \mathbb{P} probabilità uniforme:

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}, \forall \omega \in \Omega$, ovvero:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{casi favorevoli in } A}{\text{casi possibili}}$$

$A = \text{"esce un numero maggiore di 3"} = \{3, 4, 5, 6\}$ e $B = \text{"esce un numero pari"} = \{2, 4, 6\}$, domanda: quanto vale $\mathbb{P}(A|B)$?

$P(A) = \frac{4}{6}$ come abbiamo già visto.

Ora abbiamo un'informazione in più: sappiamo che B si è avverato. Questo significa che si restringe l'insieme di valori che possono essere usciti al lancio del dado. ATTENZIONE! ciò non vuol dire che cambia lo spazio campionario perché l'esperimento è lo stesso, ma cambiano i *veri* casi favorevoli e i *veri* casi possibili:

$$P(A|B) = \frac{\text{"veri casi favorevoli di A"}}{\text{veri casi possibili}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{3}$$

- Vediamo anche cosa accade quando la probabilità non è uniforme, come con un dado a 4 facce truccato:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \mathbb{P}(4) = \frac{1}{15}, \mathbb{P}(3) = \frac{2}{15}, \mathbb{P}(2) = \frac{4}{15}, \mathbb{P}(1) = \frac{8}{15}$$

$$A = \{3, 4\}, B = \{2, 4\}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\text{"probabilità dei veri casi favorevoli di A"}}{\text{probabilità dei veri casi possibili}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Note:

Se \mathbb{P} è la probabilità uniforme allora:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Note:

B è fissato nella definizione di probabilità condizionata, ovvero:

$$\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$$

Quindi il ruolo di A e B è completamente diverso

Note:

Se $B = \Omega$, allora $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ dato che la conoscenza del fatto che si è avverato Ω è ovvio e non ci cambia.
Se $A = \Omega$, allora $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$ (per proprietà, dato che è sempre una probabilità)

4.2 Regola della catena

La probabilità condizionata in genere è nota e si usa per calcolare la probabilità dell'intersezione:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Questa formula è detta *regola della catena* e vale in generale con n eventi:

Proposition 4.2.1 Regola della catena (generalizzata)

$(A_i)_{i=1, \dots, n}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, allora:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2|A_1) \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Note:

La condizione funziona grazie alla monotonia, dato che $0 < \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_j), 1 \leq j \leq n-1$ quindi siamo certi che l'intersezione degli eventi che sono avvenuti e' maggiore di 0.

$$: P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \dots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$



TODO: migliora un po

Example 4.2.1

Un'urna contiene tre palline bianche, due palline nere e una pallina rossa. Si eseguono tre estrazioni senza reimmissione. Qual 'e la probabilit'a di estrarre nell'ordine una bianca, una rossa e una nera?
Sono interessato solo ad alcuni eventi, quindi non c'e' bisogno di descrivere l'intero esperimento aleatorio. Per prima cosa definisco l'evento:

A = "estrarre in ordine una bianca, una rossa e una nera"

Voglio trovare $P(A)$. Notiamo che dobbiamo determinare tre sottoesperimenti in relazione (dato che non c'e' reimmissione). Quindi dopo ogni sottoesperimento cambia la composizione dell'urna, e sappiamo come calcolare la probabilita' condizionata:

B_i = "estraggo una pallina bianca all' i-esimo turno"

R_i = "estraggo una pallina rossa all' i-esimo turno"

N_i = "estraggo una pallina nera all' i-esimo turno"

Esistono tre famiglie di eventi: $(B_i)_{i=1,\dots,k}, (R_i)_{i=1,\dots,k}, (N_i)_{i=1,\dots,k}$ dove i indica il turno al quale viene estratta la pallina. Quindi possiamo scrivere A come relazione fra sottoeventi:

$$A = B_1 \cap R_2 \cap N_3$$

Quindi:

$$P(A) = P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(B_1)P(R_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap R_2)$$

Solo ora possiamo passare ai valori numerici. Dato che gli esiti sono equiprobabili e lo spazio campionario e' finito, la probabilita' e' uniforme:

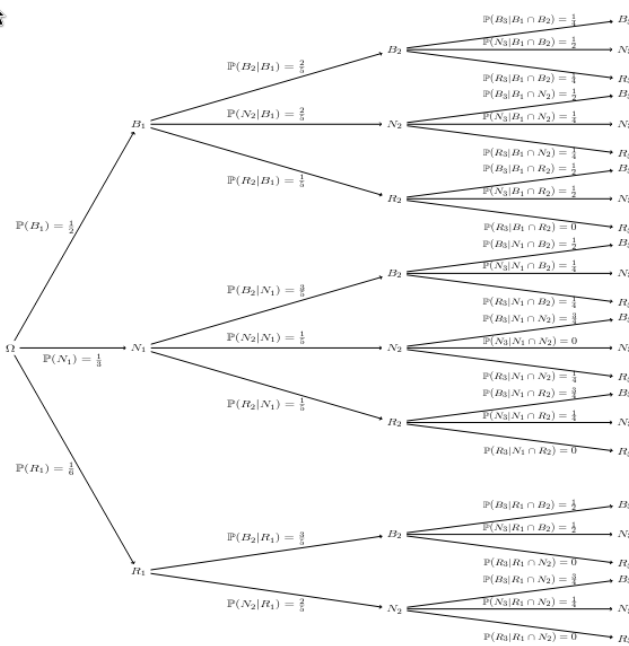
$$P(B_1) = \frac{1}{2}, P(R_2) = \frac{1}{5}, P(N_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{1}{20}$$

Per esperimenti formati da sottoesperimenti di cui conosco le probabilita' condizionate, e' possibile rappresentare ogni evento come un nodo:

Ω = primo nodo

e ogni probabilita' come un ramo che partiziona il nodo (tanti rami quanti gli insiemi della partizione) che rappresenta poi un altro evento (condizionato dalla seconda in poi).



La regola della catena la leggo sul diagramma ad albero:

percorso: $\Omega \rightarrow B_1 \rightarrow R_2 \rightarrow N_3$ ha probabilita' $P(B_1 \cap R_2 \cap N_3)$ che si calcola facendo il prodotto delle probabilita' dei relativi rami che si usano nel percorso.

E' uno strumento utile per convincerci che stiamo usando le formule giuste, ma non le sostituisce e puo' diventare laborioso per problemi complessi.

Example 4.2.2

Ci sono due urne: la prima contiene due palline rosse e una bianca; la seconda contiene tre palline rosse e due bianche. Si lancia una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla prima urna, se esce croce si estrae una pallina dalla seconda urna. Qual e' la probabilita' che l'esito del lancio della moneta sia testa e la pallina estratta sia bianca?

2 sottoesperimenti:

- lancio della moneta
- estrazione da un'urna

Nota che i sottoesperimenti sono indipendenti dall'esito di altri esperimenti. Sono gli esiti, ovvero i risultati, che possono dipendere dagli esiti di altri esperimenti.

A = "esce testa ed estraggo una pallina bianca"

Devo esprimere A con eventi che

T = "esce testa"

U = estraggo una pallina bianca

Disegna lo zio pera di diagramma che non mi metto a fare, se @GiovanniPalma vuole puo' farlo

$$A = T \cap U, \quad P(A) = P(T)P(U|T)$$

4.3 Indipendenza di eventi

E' possibile che sapere che un evento B e' avvenuto non altera la probabilita' di un altro evento A . Possiamo esprimere questa relazione in modo matematico cosi':

$$P(A|B) = P(A)$$

Utilizzando la definizione di probabilit  condizionale, possiamo usare un'identit  equivalente che useremo come definizione:

Definition 4.3.1: Eventi indipendenti

Due eventi A, B si dicono indipendenti se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \quad (4.1)$$

E viene denotato $A \perp B$

Usiamo questa definizione dato che   esplicitamente simmetrica, ovvero se A   indipendente a B allora vale anche il contrario:

$$A \perp B \iff B \perp A$$

ed   definita (e banalmente vera) anche quando $\mathbb{P}(A) = 0$ o $\mathbb{P}(B) = 0$. In particolare si noti il seguente teorema:

Theorem 4.3.1 Teorema della simmetria tra eventi indipendenti

Sia $\mathbb{P}(B) > 0$ allora:

$$A \perp B \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Dall'altro lato, sia $\mathbb{P}(A) > 0$ allora:

$$A \perp B \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Dimostrazione: Verr  fornita solo la dimostrazione del primo punto, la seconda parte   analoga. Assumo $\mathbb{P}(B) > 0$, si ha:

- $A \perp B \implies \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \implies A \perp B$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$



Note:

Si noti che se $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$ allora, le tre uguaglianze seguenti sono equivalenti:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Note:

- L'indipendenza   diversa dalla disgiunzione:

$$A \perp B \neq A \cap B = \emptyset$$

infatti sono relazioni ortogonali:

$$A \perp B \wedge A \cap B = \emptyset \iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0 \vee \mathbb{P}(B) = 0$$

- L'indipendenza   diverso dall'essere sottoinsieme non-vuoto:

$$A \perp B \neq A \subseteq B \vee B \subseteq A$$

infatti:

$$A \perp B \wedge A \subseteq B \iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B) = 1$$

Quindi in generale due eventi sono indipendenti quando la loro intersezione ha "le giuste proporzioni".

Adesso fornirò un altro teorema piuttosto importante:

Proposition 4.3.1 Sull'indipendenza di eventi complementari

Siano A, B due eventi indipendenti, allora:

$$A \perp B \iff A^c \perp B, A \perp B^c, A^c \perp B^c$$

Dimostrazione: Dimostro solo la prima parte, le altre sono analoghe.
Assumo A, B due eventi indipendenti, debbo dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Dato che

$$B = \Omega \cap B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

E dato che $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ sono disgiunti, per ?? (*additività finita*) si ha:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

E dato che $A \perp B$ si ha:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

Quindi:

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) \cdot (1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B)$$



4.3.1 Generalizzazione su n eventi

Come nel caso con solo due eventi, $n > 2$ eventi si dicono indipendenti quando, sapendo che qualsiasi numero degli altri eventi si è avverato, la probabilità dell'evento non cambia. Questo deve valere per tutti gli n eventi, ovvero:

$$\mathbb{P}\left(A_i \left| \bigcup_{j=1, j \neq i}^n A_j\right.\right) = P(A_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Si può dimostrare, usando la definizione di probabilità condizionata, che questa identità equivale a dire:

Definition 4.3.2: Eventi indipendenti (per n eventi)

Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di eventi in uno spazio di probabilità. Si dice che questi eventi sono indipendenti quando **per ogni sottoinsieme** finito $J \subseteq I$, $|J| > 2$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

4.3.2 Esercizi

Example 4.3.1 (Calcolo di eventi indipendenti con probabilità condizionata)

TESTO:

Si lancia un dado a 6 facce

A = "Esce un numero > 4 "

B = "Esce un numero pari"

Determinare $P(A)$ e $P(A|B)$

DETTAGLIO SVOLGIMENTO:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{5, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Dato che $P(A) = P(A|B)$, per il teorema ?? si ha che $A \perp B$

Ecco un altro esercizio:

Example 4.3.2

TESTO

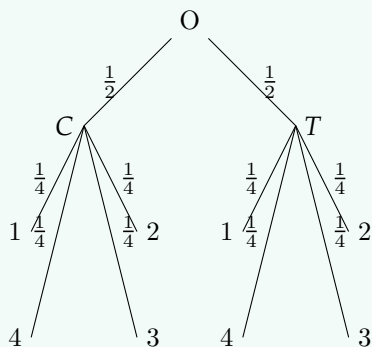
Lanciamo una moneta e un dado a 4 facce.

Determinare uno spazio di prob. che descriva l'esperimento aleatorio

SOLUZIONE

$$\Omega = \{(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4)\}$$

$$P(T, 1) = \frac{1}{8} = P(C, 4) = \frac{1}{8}$$



T = "esito del lancio moneta e testa"

C = "esito del lancio moneta è croce"

D_i = "è uscito il numero i "

$$P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(T) = \frac{1}{2}$$

$$P(D_i|C) = \frac{1}{4}$$

$$P(D_i|T) = \frac{1}{4}$$

A = "è uscito testa e il numero i "

$$P(A) = P(T) \cdot P(D_i|T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Analogamente per $C \cap D_i$

4.4 Bayes

Ci sono delle situazioni nelle quali può esserci richiesto di calcolare la probabilità condizionata "inversa" conoscendo quella diretta. Possiamo fare ciò usando la definizione di probabilità condizionate

Theorem 4.4.1

Siano A, B due eventi t.c. $P(A), P(B) > 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Example 4.4.1 (4.1)

Ci sono due urne: la prima urna contiene una pallina bianca e due palline rosse, mentre la seconda contiene due palline bianche e cinque palline rosse. Si lancia una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla prima urna, se esce croce si estrae una pallina dalla seconda. Sapendo che 'e stata estratta una pallina bianca, calcolare la probabilit'a che l'esito del lancio della moneta sia stato testa.

EVENTI

T = esce testa

B = estrazione pallina bianca

$\Omega = \{t, c\} \times \{b, r\}$

$$\mathbb{P}(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/3 \cdot 1/2 + 2/7 \cdot 1/2} \text{ probabilita' totali e bayes}$$

Example 4.4.2

Esempio 5.1. In un'urna ci sono due palline che possono essere rosse (R) o bianche (B). La composizione esatta non 'e nota, quindi le composizioni possibili sono: RR, RB, BB. (H_0, H_1, H_2) Supponiamo che, in base alle informazioni a disposizione, sia ragionevole assegnare uguale probabilit'a pari a $1/3$ alle tre composizioni (ipotesi) possibili, che denotiamo H_0, H_1 e H_2 . 1) Se si estrae una pallina dall'urna, qual 'e la probabilit'a che sia bianca? 2) Si effettuano tre estrazioni con reimmissione: sapendo che le prime due palline estratte sono bianche, qual 'e la probabilit'a che anche la terza pallina estratta sia bianca?

Il paradosso viene dal fatto che dobbiamo tenere traccia dell'asimmetria iniziale e denotare le diverse composizioni come ipotesi possibili.

EVENTI

B_i = estraggo una pallina bianca all'i-esima estrazione

1) $P(B_1) = P(B_1|H_0)P(H_0) + P(B_1|H_1)P(H_1) + P(B_1|H_2)P(H_2) = 1/2$ probabilita' totali e prob. uniforme delle H

Ce l'aspettiamo dato che c'e' completa simmetria fra i rami delle H con la distribuzione di palline

2) $P(B_3|B_1 \cap B_2) = P(B_3 \cap B_2 \cap B_1)/P(B_1 \cap B_2) =$ usare ancora il partizionamento per H per applicare probabilita' totali

4.4.1 Formula di Bayes

Quando si deve calcolare una probabilita' condizionata di eventi "nell'ordine temporale sbagliato", ad esempio se si calcolare $P(A|B)$ ma si conosce solo $P(B|A)$, si puo' utilizzare uno strumento utilissimo facilmente derivabile dalla matematica della probabilita' condizionata, ovvero la formula di Bayes:

Theorem 4.4.2 Formula di Bayes

Siano A e B due eventi tali che $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$, allora:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Dimostrazione: Per definizione di $\mathbb{P}(A|B)$ si ha:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Utilizzando la regola della catena possiamo rimuovere il numeratore come segue:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

Quindi:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$



Example 4.4.3

Ci sono due urne: la prima urna contiene una pallina bianca e due palline rosse, mentre la seconda contiene due palline bianche e cinque palline rosse. Si lancia una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla prima urna, se esce croce si estrae una pallina dalla seconda. Sapendo che è stata estratta una pallina bianca, calcolare la probabilità che l'esito del lancio della moneta sia stato testa.

Svolgimento:

T = "esce testa"

Chapter 5

Calcolo Combinatorio

Quando abbiamo numero finito di elementi con probabilita' uniforme, e' possibile utilizzare l'addittivita' delle probabilita' per ridurre il problema di probabilita' a un problema di conteggio (la probabilita' di un evento e' data dal numero di casi favorevoli) \implies dobbiamo imparare a contare.

Dato un certo insieme, dobbiamo calcolarne la cardinalita' utilizzando i giusti strumenti matematici:

Theorem 5.0.1 Calcolo probabilita' uniforme (Laplace)

Se Ω e' finito, $\Omega = \{w_1, \dots, w_N\}$ e $\forall i = 1, \dots, N. \mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{N}$ (probabilita' uniforme), allora $\forall A \subseteq \Omega$ (evento):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N}$$

Dobbiamo introdurre:

- **Fattoriali:**

- $0! := 1$
- $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$

- **Coefficienti Binomiali:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. n \geq k$$

In generale:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dal triangolo di Tartaglia, possiamo visualizzare altre proprieta' (oltre alla simmetria)

Vedremo che $\binom{n}{k}$ sono il numero di modi diversi che abbiamo per selezionare k sottoinsiemi diversi da un insieme di cardinalita' n .

Theorem 5.0.2 Formula di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Quindi anche il coefficiente deriva da un problema di conteggio.

5.1 Metodo (Principio) delle Scelte Successive

E' un algoritmo per determinare la cardinalita' di un insieme. Vediamo un esempio:

Example 5.1.1

Alfabeto di 36 caratteri dove ognuno dei numeri corrisponde a un carattere alfanumerico.

Domanda: "Quante possibili password distinte di 8 caratteri esistono in questo alfabeto?"

Ω = Alfanumerici $\times \dots \times$ Alfanumerici 8 volte.

- Scelte:

1. un carattere dei 36 totali

⋮

2. (e' cosi 8 volte)

Quindi $|\Omega| = 36 \times \dots \times 36 = 36^8$

E se vogliamo evitare di ripetere i caratteri? Vediamo le scelte:

1. un carattere dei 36 totali

2. un carattere dei **35 possibili**

⋮

3.

4. un carattere dei 29 possibili

Quindi $|\Omega| = 36 \times 35 \times \dots \times 29 = \frac{36!}{28!}$

Definiamo il principio generale:

Theorem 5.1.1 Non proprio un teorema

Ciascun elemetno di un insieme A puo' essere determinato tramite sola sequenza di k scelte, dove per ogni scelta ci sono n_1, \dots, n_k possibilità, allora:

$$|A| = n_1 \times \dots \times n_k$$

Note:

Puo' essere riscritto come teorema formale ma **E' TROPPO DIFFICILE PER NOI INFORMATICI** quindi non lo facciamo!!!!

Example 5.1.2

52 carte (13 tipi 4 semi)

1. A = iniseme dei full (un tris e una coppia), $|A| = ?$

4 scelte:

- tipo di carta nel tris (13)
- tipo di carta nella coppia (12)
- semi nel tris (4)
- semi nella coppia (6)

$|A| = 131246 =$ casi favorevoli

2. A = doppie coppie (due coppie di tipo diverso e una carta libera), $|A| = ?$

Scelte:

- tipo nella prima coppia (13)

- tipo nella seconda coppia (12)
- semi nella prima coppia (6)
- semi seconda (6)
- tipo singolo (11)
- seme singolo (4)

$|A| = 131266114$ **SBAGLIATO!!**

Perche' non ci interessa dell'ordine delle due coppie (bisogna dedurlo dalla definizione di A), quindi NON c'e' una prima e seconda coppia (anche sopra era sbagliato vederlo cosi') dato che non c'e' l'ordine.

Combinazioni dei tipi che compongono 2 coppie ($13 \times 12/2$)

5.2 Disposizioni

Definition 5.2.1: Disposizioni con ripetizione

Dato un insieme E con n elementi, indichiamo con $DR_{n,k}$ le sequenze ordinate di k elementi di E .

Sostanzialmente, $DR_{n,k} = E \times E \dots \times E$ k volte, ovvero:

$$DR_{n,k} = E^k$$

Quindi usando il principio delle scelte successive:

$$|DR_{n,k}| = n^k$$

dato che per ogni E abbiamo una scelta fra n elementi.

Note:

Indicando tale insieme con $DR_{n,k}$, l'insieme E sparisce, dato che ci interessa solo la **cardinalita'** di tale insieme e non ce ne frega un cavolo dei suoi elementi.

Example 5.2.1 (Iniziamo a calcolare le probabilita'!)

Presa un'urna con n palline numerate ($E = \{1, \dots, n\}$) e si estraggono k palline con *reinbussolamento*.

$$\Omega = E \times \dots \times E = DR_{n,k}$$

Quindi $|\Omega| = n^k$, e la probabilita' uniforme e' data da:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = n^{-k}$$

Example 5.2.2

Determinare spazi campionari per i seguenti esperimenti:

- Scelta casuale di una parola di 8 lettere
- Scelta di colonne del totocalcio (risultato di 13 partite)

Quindi lo usiamo nei casi di estrazione con reinbussolamento quando ci interessa l'ordine.

Definition 5.2.2: Disposizioni

Dato un insieme E di n elementi, l'insieme delle disposizioni (senza ripetizione) di k elementi dell'insieme E e' l'insieme delle sequenze ordinate di k elementi *distinti*, ovvero:

$$D_{n,k} := \{(x_1, \dots, x_k) | x_1, \dots, x_k \in E \wedge x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$$

Note:

$D_{n,k}$ e' un sottoinsieme **stretto** di $DR_{n,k}$.

Usando le scelte successive:

$$|D_{n,k}| = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

L'esperimento aleatorio di riferimento e' l'estrazione **senze** reimmisione.

Definition 5.2.3: Permutazioni

$P_n = D_{n,n}$, quindi: $|P_n| = n!$

5.3 Combinazioni

Definition 5.3.1: Combinazioni

Dato un insieme E di n elementi, indichiamo con $C_{n,k}$ la classe dei sottoinsiemi di E contenenti k elementi, ovvero:

$$C_{n,k} = \{A \subseteq E \mid |A| = k\}$$

Siamo passati da sequenze a sottoinsiemi, ovvero non ci interessa piu' dell'ordine:

sottoinsieme = sequenza non ordinata

Proposition 5.3.1 sulla combinazione come coefficiente binomiale

Sia la combinazione $C_{n,k}$, allora vale:

$$|C_{n,k}| = \binom{n}{k} \quad (5.1)$$

Dimostrazione: Mi riduco a dimostrare che:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = |C_{n,k}| k!$$

Ovvero

$$|D_{n,k}| = |C_{n,k}| \cdot |P_k|$$

Ma $|D_{n,k}| = |C_{n,k}| \cdot |P_k|$ vale per il principio delle scelte successive, infatti:

- scelta per i k elementi selezionati: $|C_{n,k}|$
- scelta dell'ordinamento $|P_k|$



Si noti questo esempio

Example 5.3.1

Consideriamo un'urna con n palline distinte delle quali ne vengono estratte k . Determinare lo spazio di probabilità

Si ha che: $\Omega = C_{n,k}$

Mentre per il principio di probabilità uniforme si ha:

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

Interpretazione combinatoria della formula di Stifel

Note:

Si consideri la formula di Stifel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (5.2)$$

Si può interpretare questa formula in termini di combinazioni come segue:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{n° di combinazioni di } k \text{ elementi di } E} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{n° di combinazioni di } k \text{ elementi di } E \text{ in cui è presente l'elemento } \bar{e}} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{n° di combinazioni di } k \text{ elementi di } E \text{ senza l'elemento } \bar{e}}$$

dove \bar{e} è un elemento fissato

Interpretazione combinatoria del binomio di Newton

Note:

Si consideri la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

Il prodotto $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ di n fattori si sviluppa in una somma di monomi di grado n del tipo $a^{n-k}b^k$ dove k varia da 0 a n . Dobbiamo quindi determinare il coefficiente di ogni monomio $a^{n-k}b^k$, ossia calcolare quante volte compare facendo il prodotto $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ ossia calcolare quante volte compare facendo il prodotto $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$. Questo monomio però si ottiene scegliendo il valore b da k degli n fattori e a dai rimanenti $n-k$, ovvero in $\binom{n}{k}$ modi

5.4 Tipologie di esperimenti

Riassumendo, si possono verificare 3 casi notevoli durante un esperimento aleatorio inseriti in questa tabella

ORDINE	Senza ripetizione	Con ripetizione
Si tiene conto dell'ordine	Estrazione senza reimmissione $\Omega = D_{n,k}$ $ \Omega = \frac{n!}{(n-k)!}$	Estrazione con reimmissione $\Omega = DR_{n,k}$ $ \Omega = n^k$
Non si tiene conto dell'ordine	Estrazione simultanea $\Omega = C_{n,k}$ $ \Omega = \frac{ D_{n,k} }{k!} = \binom{n}{k}$	—

Table 5.1: Gli spazi campionari e le loro cardinalità.

Chapter 6

Variabili Aleatorie

6.1 Introduzione

Finora, abbiamo trattato solo di eventi, per i quali ci chiediamo, fatto l'esperimento aleatorio, se sono avvenuti o meno. Possiamo pensare di domandarci non se un'affermazione si realizza o meno, ma generalizzare l'idea e chiederci quale sarà la quantità numerica aleatoria, associata quindi ad un esperimento. Vogliamo quindi formalizzare l'idea di una quantità che dipende dall'esito di un esperimento aleatorio:

Definition 6.1.1: Variabile Aleatoria

Diamo due affermazioni (come per gli eventi):

- **Affermazione:**

Una variabile aleatoria è un'affermazione che riguarda il risultato dell'esperimento aleatorio. Tale affermazione identifica uno e un solo numero, una volta noto l'esito. Stiamo quindi rispondendo alla domanda "Quanto vale ... ?"

- **Funzione:**

Dato uno spazio di probabilità (Ω, \mathbb{P}) ed un insieme $E \neq \emptyset$, si dice *variabile aleatoria* ogni funzione X del tipo:

$$X : \Omega \rightarrow E$$

Se $E = \mathbb{R}$, allora X è una variabile aleatoria *reale*. Può anche essere che $E = \mathbb{R}^n$ con $n > 1$, e in questo caso si parla di variabili aleatorie *vettoriali*.

Example 6.1.1 (Lancio di due dadi)

Dato lo spazio di probabilità, definiamo una variabile aleatoria X :

$$X = \text{La somma dei due lanci}$$

Dobbiamo, quindi, prendere l'esito dell'esperimento e sommare il valore dei due dadi. Questa operazione può essere vista come una funzione a cui viene passata l'esito dell'esperimento e che restituisce un numero reale:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Questa è la definizione di variabile aleatoria come funzione.

In questo caso, $\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} = DR_{6,2}$, quindi:

$$X((\omega_1, \omega_2)) : \omega_1 + \omega_2$$

Note:

Qualunque funzione da Ω a \mathbb{R} è una variabile aleatoria. Se Ω è più che numerabile sorgono dei problemi a causa dell'unione numerabile, quindi viene usata la σ -algebra, un insieme delle parti ristretto per evitare tali problemi.

6.2 Variabili Aleatorie Costanti

Vediamo dei casi "banali" di variabili aleatorie per capire il loro funzionamento e come vengono definite. Iniziamo con le funzioni costanti:

Definition 6.2.1: Variabile Aleatoria Costante

Una VA (variabile aleatoria) X si dice *costante* se:

$$\forall \omega \in \Omega. X(\omega) = a$$

Dove $a \in E$ è un elemento fissato. È definita $\forall \Omega$, dato che è deterministica (non dipende dall'esito dell'esperimento).

Come per gli eventi, anche le variabili aleatorie possono essere *quasi* costanti:

Definition 6.2.2: Variabili Aleatorie Quasi Costanti

Una VA X si dice *quasi costante* se:

$$\forall \omega \in \Omega. \mathbb{P}(X = a) = 1$$

Note:

La scrittura $(X = a)$ è una notazione che rappresenta l'evento $A =$ "Il valore di X sarà a ", ovvero il sottoinsieme di Ω per cui tutti gli elementi, passati a X , danno lo stesso valore a , quindi:

$$\mathbb{P}(X = a) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\})$$

Example 6.2.1 (Lancio di un dado)

$\Omega = \mathbb{R}$, \mathbb{P} probabilità uniforme su $\{1, \dots, 6\}$ e nulla sul resto degli elementi.

Con $E = \mathbb{R}$, fisso $a \in E$ e voglio costruire $X : \Omega \rightarrow E$ tale che X è quasi costante:

$$X(\omega) = \begin{cases} a & \omega \in \{1, \dots, 6\} \\ \omega & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa è effettivamente una VA quasi costante, dato che $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Infatti abbiamo assegnato un valore costante a a tutti gli ω la cui probabilità non era nulla. Ricordiamoci che la notazione $\mathbb{P}(X = a)$ può essere riscritta meglio come $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\})$, che in questo caso corrisponde con $\mathbb{P}(\{1, \dots, 6\})$ che ovviamente è uguale a 1.

Notare che per tutti gli ω con probabilità nulla, il valore di X associato può essere qualunque cosa (non costante) e la X rimane comunque quasi costante.

6.3 Variabili Aleatorie Indicatrici (o di Bernulli)

Definition 6.3.1: Variabile Aleatoria Indicatrice

Dato un evento $A \subseteq \Omega$, definisco la variabile aleatoria indicatrice di A come:

$$X(\omega) : \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Quindi, dato un evento, la VA indicatrice X ci *indica* se l'esito ω appartenga o meno all'evento. Notiamo che tutta l'informazione dell'evento A e' contenuta nella VA:

$$A \rightsquigarrow \mathbb{1}_A$$

Allora le VA sono *generalizzazioni* del concetto di evento.

Example 6.3.1 (Prove ripetute e indipendenti)

Consideriamo uno schema di n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo p , ossia uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) in cui sono definiti n eventi C_1, \dots, C_n indipendenti e con la stessa probabilità $p = P(C_i)$ (si ricordi il Paragrafo 1.3.4). Nel Paragrafo 1.3.4.3 abbiamo studiato gli eventi

$A_k :=$ "esattamente k prove hanno successo",

$B_\ell :=$ "il primo successo si verifica nella ℓ -esima prova",

per $0 \leq k \leq n$ e $1 \leq \ell \leq n$. Introduciamo ora due variabili aleatorie

$S :=$ "numero di successi nelle n prove",

$T :=$ "prova in cui si ha il primo successo",

definite su Ω a valori rispettivamente in $\{0, 1, \dots, n\}$ e in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, mediante

$$S(\omega) := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{C_i}(\omega), \quad T(\omega) := \min\{i \in \{1, \dots, n\} : \omega \in C_i\}, \quad (6.1)$$

con la convenzione $\min \emptyset := +\infty$. Possiamo allora esprimere gli eventi A_k e B_ℓ nel modo seguente:

$$A_k = \{\omega \in \Omega : S(\omega) = k\}, \quad B_\ell = \{\omega \in \Omega : T(\omega) = \ell\}. \quad (6.2)$$

Questo mostra che gli eventi A_k e B_ℓ possono essere definiti in modo naturale in termini delle variabili aleatorie S e T , specificandone un sottoinsieme di valori.

6.4 Eventi associati alle variabili aleatorie

Ma se io ho X variabile aleatoria, sono capace di risalire all'evento (o eventi) associati? Le variabili aleatorie sono generalizzazioni del concetto di evento, quindi data una variabile aleatoria ci sono una moltitudine di eventi associati (o generati)

Definition 6.4.1: Evento generato da una VA

Sia $X : \Omega \rightarrow E$ una VA. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ indichiamo con $\{X \in A\}$ la controimmagine di A tramite X :

$$\{X \in A\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$$

Quindi $\{X \in A\} \subseteq \Omega$ e' un evento, ed e' costituito da tutti e soli gli esiti ω per cui $X(\omega) \in A$.
Gli eventi di questo tipo si dicono *generati da X*.

Note:

La scrittura $\{X = a\}$ che abbiamo usato prima e' equivalente a scrivere $\{X \in \{a\}\}$. Allo stesso modo, possiamo considerare un intervallo di valori usando le disequazioni: $\{X > a\} \equiv \{X \in (a, +\infty)\}$.

Segue quindi:

Definition 6.4.2: Insieme di eventi generati da una VA

Data una VA X , l'insieme degli eventi da essa generati si indica con:

$$\sigma(X) := \{\{X \in A\} | A \subseteq \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

Note:

$\forall X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. possiamo scrivere:

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}\}$$

$$\emptyset = \{X \in \emptyset\}$$

Calcoliamo l'insieme degli eventi generati dalle VA particolari che abbiamo visto:

- **X costante:**

Fisso $a \in \mathbb{R}$, tale che $\forall \omega \in \Omega. X(\omega) = a$.

$\sigma(X) = ?$

Fissato $B \subseteq \mathbb{R}$, notiamo che ci sono solo due casi:

$$\{X \in B\} = \begin{cases} \Omega & a \in B \\ \emptyset & a \notin B \end{cases}$$

Infatti, se a appartiene a B allora $\forall \omega \in \Omega. X(\omega) \in B$ e quindi $\{X \in B\} = \Omega$. Mentre se a non appartiene a B , si ha che $\forall \omega \in \Omega. X(\omega) \notin B$ e quindi $\{X \in B\} = \emptyset$.

- **X indicativa:**

Fisso $A \subseteq \Omega$ tale che $\forall \omega \in \Omega. X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$.

$\sigma(X) = ?$

Fissato $B \subseteq \mathbb{R}$, vediamo i casi:

$$\{X \in B\} = \begin{cases} \Omega & 0 \in B \wedge 1 \in B \\ \emptyset & 0 \notin B \wedge 1 \notin B \\ A & 0 \notin B \wedge 1 \in B \\ A^c & 0 \in B \wedge 1 \notin B \end{cases}$$

Proposition 6.4.1

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ VA su (Ω, \mathcal{P}) , allora $\forall x \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbb{P}(\{X \geq a\}) = \mathbb{P}(\{X = a\}) + \mathbb{P}(\{X > a\})$
2. $\mathbb{P}(\{X \geq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X < a\})$

- : 1. $\{X \geq a\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) > a \vee X(\omega) = a\} = \{X > a\} \cup \{X = a\}$ dato che se $X(\omega) > a$ allora $X(\omega) \neq a$ e viceversa. Quindi l'equazione e' dimostrata per addittivita' finita.
2. Dimostriamo che $\{X \geq a\}$ e $\{X < a\}$ sono complementari. Se $X(\omega) \not\geq a$, allora $X(\omega) < a$ e viceversa, fatto. \square

Possiamo confrontare intervalli su \mathbb{R} per calcolare probailita'

6.5 Distribuzione (o legge) di una Variabile Aleatoria

Definition 6.5.1: Distribuzione di una VA

Dati (Ω, \mathbb{P}) e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ VA, chiamiamo legge di X la funzione (che dimostreremo essere una probabilita'):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}(X \in B) \end{aligned}$$

Si scrive $X \sim \mathbb{P}_X$ e si legge "X ha legge \mathbb{P}_X ".

La legge di una VA ne calcola quindi, dato un insieme di valori reali, la probabilita' che $X(\omega)$ appartenga a tale intervallo.

Note:

Conoscere $\mathbb{P}_X \forall B \subseteq \mathbb{R}$ equivale a conoscere $\mathbb{P}_X \forall I$ intervallo di \mathbb{R} . (dato che ogni intervallo e' un sottoinsieme).

Dimostreremo che la legge $\mathbb{P}_X(\cdot)$ e' caratterizzata dalla funzione

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ n &\mapsto \mathbb{P}_X((-\infty, n]) = \mathbb{P}(\{X \leq n\}) \end{aligned}$$

Chapter 7

Esercitazione

7.1 Probabilità Condizionata

7.1.1 Esercizio 4 (Foglio 2)

Testo

Un'urna contiene r palline rosse e b palline bianche. Si eseguono due estrazioni senza reimmissione.

- (a) Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.
- (b) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa.
- (c) Calcolare la probabilità che la prima pallina sia rossa e la seconda bianca.
- (d) Calcolare la probabilità che le due palline abbiano colori diversi.
- (e) Calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta sia rossa.

Soluzione

Siano:

R_i = "ho estratto una pallina rossa all' i -esima iterazione" B_i = "ho estratto una pallina bianca all' i -esima iterazione"

Definiamo lo spazio degli esiti. Poiché le estrazioni avvengono senza reimmissione, ogni esito è una coppia ordinata di palline diverse. Denotiamo:

$$\Omega = \{(p_1, p_2) : p_1, p_2 \text{ sono palline dell'urna e } p_1 \neq p_2\}$$

La cardinalità totale è:

$$|\Omega| = (r + b)(r + b - 1)$$

Infatti appena estraiamo una pallina l'urna conterrà $(r + b - 1)$ palline, la totalità di palline -1. Sfruttiamo il principio di probabilità uniforme, secondo cui ogni esito ha probabilità $1/|\Omega|$

(a) Spazio di probabilità:

Lo spazio di probabilità è (Ω, P) con

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{(r + b)(r + b - 1)} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

(b) Probabilità che la prima pallina sia rossa:

Poiché ci sono r palline rosse su un totale di $r + b$, si ha:

$$P(R_1) = \frac{r}{r + b}.$$

(c) **Probabilità che la prima pallina sia rossa e la seconda bianca:**

Dato che la prima è rossa, nell'urna rimangono $r + b - 1$ palline, di cui b sono bianche:

$$P(R_1 \cap B_2) = P(B_2 | R_1)P(R_1) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1}.$$

(d) **Probabilità che le due palline abbiano colori diversi:**

Questa condizione si verifica in due modi: rossa poi bianca oppure bianca poi rossa. Quindi:

$$\begin{aligned} P((R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)) &= P(B_2 | R_1)P(R_1) + P(R_2 | B_1)P(B_1) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b-1} \\ &= \frac{2rb}{(r+b)(r+b-1)}. \end{aligned}$$

(e) **Probabilità che la seconda pallina sia rossa:**

Usiamo la formula della probabilità totale, considerando le possibili estrazioni del primo turno:

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(B_2 | R_1) \cdot P(R_1) + P(B_2 | B_1) \cdot P(B_1) \\ &= \frac{r-1}{r+b-1} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b-1} \cdot \frac{b}{r+b} \end{aligned}$$

Semplificando:

$$P(R_2) = \frac{r(r-1) + rb}{(r+b)(r+b-1)} = \frac{r^2 - r + rb}{(r+b)(r+b-1)} = \frac{r(r+b-1)}{(r+b)(r+b-1)} = \frac{r}{r+b}$$

Esercizio 6

Testo

Supponiamo che un'urna contenga 1 pallina rossa e 1 pallina bianca. Una pallina viene estratta e se ne osserva il colore. La pallina estratta viene poi rimessa nell'urna insieme a un'altra pallina dello stesso colore (estrazione con rinforzo). Siano

R_i = evento che all' i -esima estrazione venga estratta una pallina rossa,

B_i = evento che all' i -esima estrazione venga estratta una pallina bianca.

Si calcolino:

- (1) $P(R_2)$
- (2) Sapendo che la seconda pallina estratta è rossa, quale è l'evento più probabile per la prima estrazione: che la pallina estratta sia stata rossa oppure bianca?

Soluzione

(1) **Calcolo di $P(R_2)$:**

Caso 1: Se alla prima estrazione esce una pallina rossa (evento R_1):

- La probabilità di estrarre una rossa al primo turno è $P(R_1) = \frac{1}{2}$.
- Dopo l'estrazione, la pallina rossa viene rimessa insieme a un'altra rossa, dunque l'urna contiene 2 rosse e 1 bianca. Quindi:

$$P(R_2 | R_1) = \frac{2}{3}.$$

Caso 2: Se alla prima estrazione esce una pallina bianca (evento B_1):

- $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

- Dopo il rinforzo, l'urna contiene 1 rossa e 2 bianche, dunque:

$$P(R_2 | B_1) = \frac{1}{3}.$$

Applicando la formula della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_2 | R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2 | B_1) \cdot P(B_1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) **Confronto tra $P(R_1 | R_2)$ e $P(B_1 | R_2)$:**

Innanzitutto si tenga conto il teorema di Bayes:

Siano A, B due eventi, t.c. $P(A), P(B) > 0$, allora $P(A | B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Dimostrazione: Abbiamo $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, quindi $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Usiamo il teorema di Bayes per calcolare $P(R_1 | R_2)$:

$$P(R_1 | R_2) = \frac{P(R_2 | R_1) P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Poiché $P(B_1 | R_2) = 1 - P(B_1^c | R_2) = 1 - P(R_1 | R_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, risulta che,

$$P(R_1 | R_2) > P(B_1 | R_2).$$

Quindi, sapendo che la seconda pallina è rossa, è più probabile che la prima pallina estratta fosse rossa.

7.1.2 Esercizio 7

Testo

Si consideri una popolazione in cui una persona su 100 abbia una certa malattia. Un test è disponibile per diagnosticare tale malattia. Si supponga che il test non sia perfetto, in quanto esso risulta positivo (ovvero indica la presenza della malattia) nel 5% dei casi quando è effettuato su persone sane, mentre risulta negativo (indicando l'assenza della malattia) nel 2% dei casi quando è effettuato su persone malate. Si calcolino le probabilità che:

- il test risulti positivo quando effettuato su una persona malata,
- il test risulti positivo,
- una persona sia malata se il test risulta positivo.

Soluzione

I dati del problema sono:

- $P(M) = 0.01$: probabilità che una persona sia malata.
- $P(S) = 0.99$: probabilità che una persona sia sana.
- $P(T^+ | M) = 0.98$: probabilità che il test risulti positivo se la persona è malata.
- $P(T^- | M) = 0.02$: probabilità che il test risulti negativo se la persona è malata.
- $P(T^+ | S) = 0.05$: probabilità che il test risulti positivo se la persona è sana.
- $P(T^- | S) = 0.95$: probabilità che il test risulti negativo se la persona è sana.

Costruiamo un diagramma di verità:

	Malato	Sano
Positivo	0.98	0.05
Negativo	0.02	0.95

1. **Probabilità che il test risulti positivo su una persona malata:** Questa probabilità è data direttamente dai dati:

$$P(T^+ | M) = 0.98.$$

2. **Probabilità che il test risulti positivo:** Utilizziamo la formula della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+ | M) P(M) + P(T^+ | S) P(S) \\ &= 0.98 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 \\ &= 0.0098 + 0.0495 \\ &\approx 0.0593. \end{aligned}$$

3. **Probabilità che una persona sia malata, dato un test positivo:**

Applichiamo il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(M | T^+) &= \frac{P(T^+ | M) P(M)}{P(T^+)} \\ &= \frac{0.98 \cdot 0.01}{0.0593} \\ &\approx \frac{0.0098}{0.0593} \\ &\approx 0.165. \end{aligned}$$

Quindi, circa il 16,5% delle persone con test positivo sono effettivamente malate.

7.1.3 Esercizio 5

Testo

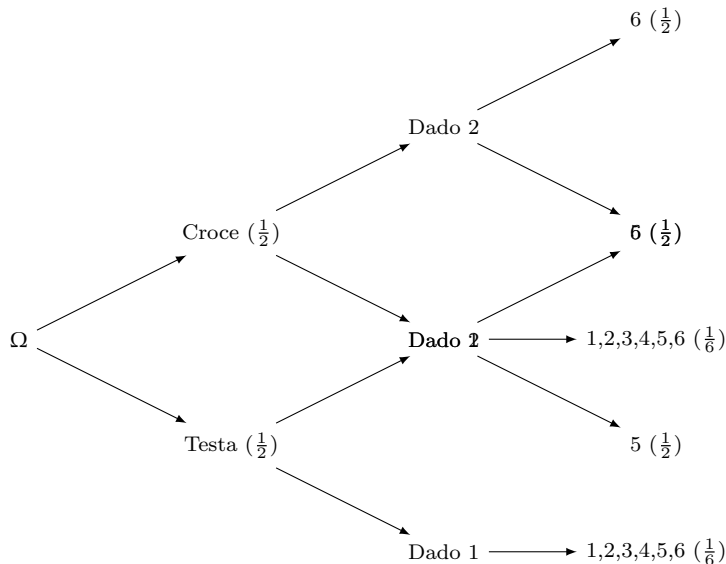
Si consideri il seguente esperimento:

ci sono quattro dadi: due non truccati e due truccati. I dadi truccati hanno tre facce con il numero 6 e tre facce con il numero 5. Si lancia una moneta (non truccata). Se viene *testa* si lanciano i due dadi non truccati, mentre se viene *croce* si lanciano i due dadi truccati.

Si richiede di calcolare:

- (a) La probabilità che la somma dei due dadi sia 11.
- (b) Sapendo di aver ottenuto 11 dalla somma dei due dadi, calcolare la probabilità che il lancio della moneta sia stato *croce*.

Soluzione



Sia:

$$T = \{\text{moneta: testa}\}, \quad C = \{\text{moneta: croce}\},$$

con $P(T) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Caso 1: Dadi non truccati (se esce testa)

I dadi non truccati hanno facce 1, 2, 3, 4, 5, 6 con probabilità uniforme. La somma 11 si ottiene con le coppie (5, 6) e (6, 5). Quindi:

$$P(11 | T) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Caso 2: Dadi truccati (se esce croce)

I dadi truccati assumono solo i valori 5 e 6 con probabilità $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ciascuno. La somma 11 si ottiene con le coppie (5, 6) e (6, 5), dunque:

$$P(11 | C) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Calcolo della probabilità totale di ottenere 11:

$$\begin{aligned} P(11) &= P(11 | T) P(T) + P(11 | C) P(C) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + \frac{9}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Calcolo della probabilità condizionata $P(C | 11)$: Utilizzando il teorema di Bayes:

$$P(C | 11) = \frac{P(11 | C) P(C)}{P(11)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{18}{5} = \frac{9}{10}.$$

Quindi, se la somma è 11, la probabilità che la moneta abbia dato *croce* è $\frac{9}{10}$.

7.1.4 Esercizio 2

Testo

Si consideri l'esperimento di lanciare due volte un dado.

- Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.
- Si considerino i seguenti eventi:

- $A =$ “numero dispari sul primo dado”
- $B =$ “numero dispari sul secondo dado”
- $C =$ “la somma dei due risultati ‘e dispari”

Gli eventi A , B e C sono indipendenti?

(c) Si considerino ora gli eventi:

- $E =$ “il risultato del secondo lancio ‘e 1, 2 o 5”
- $F =$ “il risultato del secondo lancio ‘e 4, 5 o 6”
- $G =$ “la somma dei due risultati ‘e 9”

Gli eventi E , F e G sono indipendenti?

Soluzione

(a) $(\Omega, \mathbb{P}) = ?$:

- $\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$
- I due sottoesperimenti sono indipendenti e hanno probabilita’ uniforme, quindi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((x_1, x_2)) &= \mathbb{P}(x_1)\mathbb{P}(x_2) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{|\Omega|}\end{aligned}$$

Quindi anche l’esperimento principale ha probabilita’ uniforme.

(b) Dimostriamo per controprova che A, B e C non sono indipendenti:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \\ &= 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \text{ (dato che e' sicuramente } > 0)\end{aligned}$$

(c) Dimostriamo per controprova che D, E e F non sono indipendenti;

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E|F) &= \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} \\ &= \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}(E) (= \frac{1}{2})\end{aligned}$$

7.1.5 Esercizio 3

Testo

I componenti prodotti da una ditta possono avere due tipi di difetti con percentuali del 3% e del 7% rispettivamente e in modo indipendente l’uno dall’altro. Qual ‘e la probabilita’ che un componente scelto a caso

- presenti entrambi i difetti?
- sia difettoso?
- presenti il primo difetto, sapendo che ‘e difettoso?
- presenti uno solo dei difetti, sapendo che ‘e difettoso?

Soluzione

D_1 = "prodotto presenta il difetto 1"

D_2 = "prodotto presenta il difetto 2"

- (a) $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = ?$ dato che non ci viene detto niente, possiamo ipotizzare che gli eventi sono indipendenti, quindi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) &= \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2) \\ &= \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2) \\ &= 0.03 \cdot 0.07\end{aligned}$$

- (b) $\mathbb{P}(D_1 \cup D_2) = ?$ proviamo a usare DeMorgan, tenendo in mente che i complementari di eventi indipendenti sono anch'essi indipendenti:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 \cup D_2) &= 1 - \mathbb{P}(D_1^c \cap D_2^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(D_1^c)\mathbb{P}(D_2^c) \\ &= 1 - 0.97 \cdot 0.93\end{aligned}$$

- (c) $\mathbb{P}(D_1 | D_1 \cup D_2) = ?$ possiamo usare Bayes e il risultato trovato nel punto prima:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1 | D_1 \cup D_2) &= \frac{\mathbb{P}(D_1 \cup D_2 | D_1)\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(D_1 \cup D_2)} \\ &= \frac{1 \cdot 0.03}{1 - 0.97 \cdot 0.93}\end{aligned}$$

- (d) $\mathbb{P}((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2) | D_1 \cup D_2) = ?$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2) | D_1 \cup D_2) &= \frac{\mathbb{P}(D_1 \cup D_2 | ((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2))\mathbb{P}((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2))}{\mathbb{P}(D_1 \cup D_2)} \\ &= \frac{1 \cdot \mathbb{P}((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2))}{\mathbb{P}(D_1 \cup D_2)}\end{aligned}$$

Ci rimane quindi da calcolare la probabilità al numeratore. Notare che:

$$\begin{aligned}(D_1 \cap D_2^c) \cap (D_1^c \cap D_2) &= D_1 \cap D_2^c \cap D_1^c \cap D_2 \\ &= D_1 \cap D_1^c \cap D_2 \cap D_2^c \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

Quindi, essendo eventi disgiunti possiamo applicare l'addittività finita:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2)) &= \mathbb{P}(D_1 \cap D_2^c) + \mathbb{P}(D_1^c \cap D_2) \\ &= \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2^c) + \mathbb{P}(D_1^c)\mathbb{P}(D_2)\end{aligned}$$

7.1.6 Esercizio Porco Rosso

Testo

L'aereo dei pirati del cielo, appena riparato, è stato dato alle fiamme. Porco Rosso vuole scoprire chi è stato. Durante le indagini si è scoperto che la settimana prima del delitto i pirati del cielo hanno detto al meccanico della ditta Piccolo che non gli avrebbero pagato la riparazione dell'idrovolante. Interrogato da Porco Rosso, Piccolo cerca di scagionarsi dicendo che a seguito di insolvenza solo 1 meccanico su 1000 si vendica. Porco Rosso però si accorge che questa stima non è più significativa: bisogna valutare la probabilità di vendetta sapendo che l'aereo è stato effettivamente dato alle fiamme. Porco Rosso allora considera questi eventi:

- A : dei clienti risultano insolventi contro il proprio meccanico,
- B : l'aereo di un cliente viene distrutto dal meccanico,

- C: l'aereo di un cliente viene distrutto ma non dal proprio meccanico.

A questo punto è necessario il vostro aiuto!

- Esprimere in funzione di A , B e C la probabilità fornita da Piccolo e calcolarla.
- Quali eventi tra A , B e C possono essere ritenuti disgiunti?
- Quali eventi tra A , B e C possono essere ritenuti indipendenti?
- Esprimere in funzione di A , B e C l'evento D : l'aereo di un cliente viene distrutto.
- Esprimere la probabilità condizionata $P(B|A \cap D)$ in funzione solo di $P(B|A)$ e $P(C)$. Porco Rosso non riesce a trovare $P(C)$, tuttavia trova che 1 aereo ogni 10000 viene distrutto.
- Limitare (dal basso o dall'alto) il valore di $P(B|A \cap D)$.
- È il caso che Porco Rosso continui ad indagare su Piccolo?

Soluzione

- $P(B|A) = \frac{1}{1000} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$,
- $B \cap C = \emptyset$
- Quali tra A,B,C sono indipendenti? $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $D = \text{"Aereo distrutto"} = B \cup C$
- $P(B|A \cap D)$ sono in funzione di $P(B|A)$ e $P(C)$, quindi $= \frac{B \cap A \cap D}{P(A \cap D)} = \frac{B \cap A \cap (B \cup C)}{P(A \cap (B \cup C))} = \frac{((B \cap A))}{P(A \cap (B \cup C))}$

7.1.7 Esercizio 2.3

Testo

Nel gioco del lotto si estraggono senza reimmissione cinque numeri da un'urna che contiene 90 palline da 1 a 9

- Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio
- Come cambia la risposta al punto precedente se le estrazioni avvengono con reimmissione?

Svolgimento

- $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{1, \dots, 90\}, i = 1, \dots, 5, x_i \text{ distinti}\}$
 - . Definisco:
 $\forall i \in \{1, \dots, 5\} \forall j \in \{1, \dots, 90\}, E_{ij} : \text{"straggo il numero } j \text{ all'i-esima estrazione"}$
 $\mathbb{P}(E_{1,x_1} \cap E_{2,x_2} \cap E_{3,x_3} \cap E_{4,x_4} \cap E_{5,x_5}) = \mathbb{P}(E_{1,x_1})\mathbb{P}(E_{2,x_2}|E_{1,x_1}) \dots \mathbb{P}(E_{5,x_5}|E_{1,x_1} \cap E_{2,x_2} \cap E_{3,x_3} \cap E_{4,x_4} \cap E_{5,x_5})$
 assunto che vi è probabilità uniforme $= \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{|\Omega|}$
- $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{1, \dots, 90\}, i = 1, \dots, 5\}$
 sotto-esperimento: estrazione dall'urna, dato che avviene la reimmissione si ha che ogni sotto-esperimento è indipendente, quindi si ha:

$$\mathbb{P}(\cdot) \text{ uniforme per } \Omega : \mathbb{P}(\omega)$$

7.1.8

Testo

Un'urna contiene 10 palline di cui 6 bianche e 4 rosse. Si estraggono due palline senza reimmissione. Calcolare la probabilità dell'evento

$$B_2 = \text{la seconda è bianca}$$

Svolgimento

Sia B_i = "estraggo una pallina bianca all'i-esima estrazione"

$P(B_2)$?

TODO: giaga alberello

Formula delle prob totali:

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap B_1^c) = P(B_2|B_1)P(B_1)P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10}$$

7.2 Esercitazione combinatoria

7.2.1 Esercizio 3

Testo

Tre amici si danno appuntamento nel bar della piazza centrale della città senza sapere che ci sono quattro bar. Qual è la probabilità che scelgano lo stesso bar? Tre bar differenti?

Svolgimento

Ognuno di loro è come se estraesse un bar da un'urna. Quindi i casi totali sono, ovviamente, 4^3 . Il primo brodo che sceglie il bar è fortunello, infatti può scegliere qualunque bar, quindi i casi favorevoli saranno 4, mentre gli altri potranno scegliere solo e soltanto il bar che ha scelto il brodezz iniziale. Quindi

$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{4^3} = \frac{1}{16}$$

Nel caso dei bar differenti? Il primo può prendere un bar a caso, l'altro potrà scegliere solo sugli altri tre bar ed infine l'ultimo solo 2, matematicamente:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3}$$

7.2.2 Esercizio 4

Testo

Si calcoli la probabilità di ottenere 2 palline rosse estraendone 4 da un'urna che contiene 3 palline rosse e 7 bianche. Si confrontino i casi di estrazioni con reimmissione, senza reimmissione e simultanea.

Svolgimento

- Estrazione con reimmissione:

$$\frac{\binom{2}{4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7}{10^3}$$

Quando estraggo la prima pallina, ho 10 possibilità, ed è così per tutte le estrazioni. Dobbiamo considerare anche l'ordine (dato che siamo nel caso con reimmissione), quindi devo vedere in quanti modi posso scegliere le "posizioni" rosse in 4 estrazioni (es. rrb, rrb, ...). Una volta scelte le posizioni (usando il binomiale $\binom{4}{2}$), possiamo ora semplicemente moltiplicarlo per il numero di casi favorevoli per un ordine (es. rrb = $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$)

- Estrazione senza reimmissione:

$$\frac{\binom{2}{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8}$$

Stessa roba di prima, ma la probabilità considerando un solo ordine cambia (es. rrb = $3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$) e cambiano anche i casi possibili

- Estrazione simultanea:

Non c'è più l'ordine, quindi usiamo i binomi per rappresentare questa cosa

$$\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}$$

7.2.3 Esercizio 6

Testo

Giocate 6 numeri al Superenalotto. Verranno estratti 6 numeri senza ripetizione dai primi 90 naturali, seguiti dall'estrazione di un 7 numero jolly, diverso quindi dai precedenti. Qual è la probabilità di fare 5+1 (indovinare 5 dei primi 6 numeri estratti e in più il numero jolly)?

Svolgimento

Intanto vengono estratti i primi 6 numeri senza emissione e si ha, ovviamente, come casi possibili:

$$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84$$

Dato che devo indovinare solo 5 numeri, debbo sbagliare un numero, pertanto, per indicare che ho 6 modi per sbagliare il numerino (infatti che numero sbaglio tra i miei 6? il primo? secondo? terzo? devo tenere conto di tutte le possibilità) utilizzo il coefficiente binomiale $\binom{6}{1}$ moltiplicato per 84 (ovvero la probabilità di "sbagliare" tra i novanta numeri), infine moltiplico per 1 (una possibilità su tutti casi possibili) tante volte quanto devo indovinare i numeri. Pertanto si ha:

$$\frac{\binom{6}{1} \cdot 84 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84} = \frac{6}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}$$

Esercizio 7

Testo

Supponiamo di giocare a poker con un mazzo da 52 carte, identificate dal seme (cuori, quadri, fiori, picche) e dal tipo (un numero da 2 a 10 oppure J, Q, K, A). Si calcolino:

- (a) la probabilità di avere una scala reale massima, ovvero le 5 carte 10, J, Q, K, A dello stesso seme;
- (b) la probabilità di avere una scala reale, ovvero una qualsiasi scala di 5 carte dello stesso seme (ricordiamo che con l'asso possiamo fare la scala A, 2, 3, 4, 5 ma anche 10, J, Q, K, A);
- (c) la probabilità di avere una scala, ovvero una qualsiasi scala di 5 carte non necessariamente dello stesso seme;
- (d) la probabilità di avere colore, ovvero un sottoinsieme di 5 carte dello stesso seme;
- (e) la probabilità di avere poker, ovvero un sottoinsieme di 5 carte in cui ci sono 4 carte dello stesso tipo;
- (f) la probabilità di avere un tris, ovvero un sottoinsieme di 5 carte in cui ci sono 3 carte dello stesso tipo e le altre due di tipo diverso tra loro e dalle prime tre;
- (g) la probabilità di avere una coppia, ovvero un sottoinsieme di 5 carte in cui ci sono 2 carte dello stesso tipo e le altre tre di tipo diverso tra loro e dalle prime due.

Svolgimento

- (a) L'ordine non importa \implies estrazione simultanea. Ci sono $\binom{52}{5}$ modi per estrarre una mano (casi possibili), i casi favorevoli sono 4 per il seme, poi le carte in mano sono fissate (abbiamo una sola possibilità una volta scelto il seme)

$$\frac{4 \cdot 1}{\binom{52}{5}}$$

- (b) I casi favorevoli sono ora 10 per ogni seme (10 pioli più bassi diversi da cui iniziare la scala), quindi i casi favorevoli sono di più:

$$\frac{4 \cdot 10}{\binom{52}{5}}$$

- (c) Ora per ogni carta della scala abbiamo 4 possibilita' per il seme, quindi una volta scelto il piolo piu' basso moltiplico per 4^5 :

$$\frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$$

- (d) Una volta scelto il seme (4) ci sono $\binom{13}{5}$ insiemi distinti di tipi di carte che possiamo avere:

$$\frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\frac{52}{5}}$$

- (e) In un mazzo e' impossibile avere 5 carte dello stesso tipo, il max e' proprio 4. Scegliamo quindi il tipo con cui vogliamo fare poker (13) e l'insieme dei semi (1 dato che sono tutti i semi per forza). Poi scegliamone una a caso fra tutte le carte rimaste (48):

$$\frac{13 \cdot 1 \cdot 48}{()}$$

E se volessimo trovare solo tre dello stesso tipo? Scegliamo sempre il tipo (13), poi per ogni tipo possiamo avere $\binom{4}{3}$ insiemi per scegliere i semi. Poi fra le restanti carte non possiamo scegliere l'ultima carta con lo stesso tipo, quindi $\binom{48}{2}$ (fra le 48 carte che possiamo prendere ne scelgo 2)

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$$

- (f) Il ragionamento e' simile a prima, ma per le ultime 2 carte scegliamo prima il tipo (che deve essere diverso) poi abbiamo 4 semi per ogni tipo che va bene:

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2}{\binom{52}{5}}$$

- (g) Caso di prima ma per una coppia, stesso ragionamento:

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}}$$

7.2.4 Esercizio 8

Testo

Un mazzo di carte da scopone scientifico è costituito da 40 carte, identificate dal seme (spade, coppe, bastoni, denari) e dal tipo (asso, 2, 3, 4, 5, 6, 7, fante, cavallo, re). Supponendo di pescare 10 carte dal mazzo, calcolare la probabilità di estrarre:

- (a) l'asso di bastoni,
 (b) l'asso di spade e l'asso di coppe.

Svolgimento

- (a) : Si ha che , dato che l'ordine di pescaggio non è importante, appartiene ad un genere di problemi dove l'estrazione è simultanea. Pertanto si ha che i casi possibili sono $\binom{40}{10}$. Dopodiche per avere un asso di bastoni ho una possibilità su tutti casi possibili, inoltre le altre carte possono essere qualsiasi, quindi ho nove modi per pescare le 39 carte rimanenti, ovvero $\binom{39}{9}$

$$\frac{1 \cdot \binom{39}{9}}{\binom{40}{10}}$$

- (b) : Ugualmente, qui occorre tenere presente il numero di possibilità che si ha per pescare 8 carte in un insieme di 38 carte, per la possibilità di beccare l'asso di spade e l'asso di coppe, ovviamente ne ho 1 su tutti i casi possibili, quindi:

$$\frac{1 \cdot \binom{38}{8}}{\binom{40}{10}}$$

7.3 Probabilità condizionata e indipendenza

7.3.1 Es. 1

testo

Una roulette semplificata è formata da 12 numeri che sono “rosso” (R) e “nero” (N) in base allo schema seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R	R	N	N	R	N	N	R	N	N	R	R

(a) Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.

Siano

- A = “esce un numero pari”,
- B = “esce un numero rosso”,
- C = “esce un numero ≤ 3 ”,
- D = “esce un numero ≤ 6 ”,
- E = “esce un numero ≤ 8 ”,
- F = “esce un numero dispari ≤ 3 ”.

Calcolare le seguenti probabilità condizionate: (b) $P(A|C), P(C|A), P(B|C), P(A|F), P(D|F), P(A|B), P(B|A)$.

Stabilire quindi se: (c) gli eventi A, B e D sono a 2 a 2 indipendenti; (d) A, B, D costituiscono una famiglia di eventi indipendenti; (e) A, B, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti; (f) A, C, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti; (g) F è indipendente da A ; F è indipendente da D .

Svolgimento

(a) : $\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$

(b) :

- $\mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} =$
- $P(C|A) = \frac{1}{6}$
- $P(B|C) = \frac{2}{3}$
- $P(A|F) = 0$
- $P(D|F) = \frac{2}{2} = 1 = \frac{P(F \cap D)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)}$
- $P(A|B) = \frac{3}{6}$
- $\frac{3}{6}$

(c) : A, B, D sono indipendenti? Bisogna calcolare se $P(\text{cap4})$