Probabilità
Appunti

Giovanni Palma e Alex Basta

Contents

Chapter 1

Introduzione preliminare

1.1 richiami teoria degli insiemi

Dato un insieme Ω e due sottoinsiemi $A, B \subseteq \Omega$, si useranno tali notazioni per le diverse operazioni tra insiemi

$$\begin{aligned}
A \cup B &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}, \\
A \cap B &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}, \\
A^c &:= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}, \\
A \setminus B &:= A \cap B^c, \\
A \Delta B &:= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),
\end{aligned}$$

Andiamo inoltre a definire $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subset \Omega\}$ come l'insieme delle parte di Ω e sia $|A|$ la cardinalità di A, ovvero il suo numero di elementi

Example 1.1.1
Sia $\Omega = \{a, b, c\}$ allora $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Si noti poi questa interessante proposizione

Proposition 1.1.1
Sia Ω un insieme finito allora si ha:

$$|P(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

Dimostrazione: Fare 😃

Le nozioni di unione e intersezione si estendono in modo naturale a una famiglia arbitraria $(A_i)_{i \in I}$ di sottoinsiemi di Ω:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \exists i \in I \text{ tale che } \omega \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \forall i \in I \text{ si ha che } \omega \in A_i\}$$

Example 1.1.2 (Intersezione e unione in un insieme di riferimento numerabile $I = \mathbb{N}$)
Sia $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi

1. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$

   Si ha

$$\bigcup_{n=1} A_n = \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{n=1} A_n = \emptyset$$

Giustamente $\{1\} \neq \{2\} \neq \{3\} \neq \dots$ pertanto l'unione è vuota

2. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1} A_n = [0, 1]$$

L'intervallo $[0, 1]$ è quello che "contiene" tutti gli altri, pertanto, per come è definita l'unione, è ovvio che sia lui il risultato di tale operazione

$$\bigcap_{n=1} A_n = \{0\}$$

L'intersezione è un insieme con solo 0, l'unico numero contenuto in tutti gli insiemi di intervalli

1.1.1 Leggi di de morgan

Theorem 1.1.1 Leggi di De Morgan

Queste proposizioni sono vere:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

che valgono, più in generale, per famiglie arbitrarie di insiemi:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Dimostrazione: Devo dimostrare che $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \wedge A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ ovvero che $w \in (A \cap B)^c \iff w \in (A^c \cup B^c)$
ebbene:

$$\begin{aligned} \omega \in (A \cap B)^c &\iff \omega \notin A \cap B \\ &\iff \omega \notin A \text{ or } \omega \notin B \\ &\iff \omega \in A^c \text{ or } \omega \in B^c \\ &\iff \omega \in (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

È dato come esercizio per Bastiality la dimostrazione per le altre cose 😃

1.1.2 proprietà distributive di intersezione e unione

Theorem 1.1.2

è possibile dimostrare che valgono le seguenti leggi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

: Bonzo, la dimostri per esercizio 😃

Chapter 2

Spazi di probabilità discreti

2.1 Concetti introduttivi

Innanzi tutto andiamo a definire che cosa intendiamo per *esperimento aleatorio, esito, probabilità*
Con la dicitura esperimento *aleatorio indicheremo* qualunque fenomeno (fisico, economico, sociale, ...) il cui esito non sia determinabile con certezza a priori. Il nostro obiettivo è di fornire una descrizione matematica di un esperimento aleatorio, definendo un modello probabilistico, un *esito* invece è un ipotetico risultato di un'esperimento aleatorio sulla base di un cosiddetto *spazio campionario* un insieme che contiene tutti gli esiti possibili dell'esperimento

Example 2.1.1

- **Esperimento aleatorio:** Lancio di un dado.
- **Spazio campionario:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Esito:** 4.

Adesso forniamo vere e priorie definizioni

Definition 2.1.1: evento

Si definisce **evento** un'affermazione riguardante l'ipotetico esito univoco dell'esperimento, di cui si può affermare con certezza se è vero o falso una volta noto l'esito

Example 2.1.2

Esper. aleatorio: Lancio del dado
$A =$ "esce un numero pari"