Ottimizzazione Combinatoria
Appunti

Alex Bastianini

Contents

Chapter 1

Introduzione

Prova scritta e orale. Si studiano metodi algoritmici per ottimizzare problemi di flusso su reti e di programmazione lineare. In poche parole, impariamo come prendere decisioni.

Chapter 2

Problemi e Modelli

2.1 Problemi di ottimizzazione

Definition 2.1.1: Ricerca operativa

La **ricerca operativa** è un ramo della matematica applicata che si occupa dello studio, della modellizzazione e della risoluzione dei cosiddetti *problemi decisionali* complessi mediante strumenti matematici, algoritmici e computazionali, con l'obiettivo di ottimizzare processi e risorse

Per evitare qualsivoglia fraintendimento fornirò anche la definizione di **ottimizzazione Combinatoria**

Definition 2.1.2: Ottimizzazione Combinatoria

Si definisce **Ottimizzazione Combinatoria** una branca della Ricerca Operativa che nel modellare matematicamente e risolvere problemi complessi di natura discreta unisce tecniche di calcolo combinatorio alla teoria degli algoritmi e ai risultati teorici e metodologici della programmazione lineare

Pertanto ricerca operativa e ottimizzazione combinatoria sono due cose diverse, MA cito testualmente

> "Per tutti i nostri scopi ricerca operativa e ottimizzazione, sono sinonimi
>
> tuttavia non vedremo solo alcune tecniche di ottimizzazione combinatoria, ma anche altre tecniche che stanno nella ricerca operativa ma che trattano di valori non discreti"
>
> – Ugo

Adesso, sotterrato questo problema di carattere unicamente terminologico con cui io non posso fare a meno di strizzarmi il cervello perché c'ho l'autismo, possiamo tornare a parlare di ricerca operativa/ottimizzazione combinatoria (tanto so' sinonimi per noi)
I problemi di cui si occupa la ricerca operativa, quindi, riguardano situazioni in cui occorra massimizzare i ricavi o minimizzare i costi, in presenza di risorse limitate. Detto in termini più matematici, data una funzione **vincolata** l'obiettivo è trovare una soluzione ottimale che massimizzi o minimizzi tale funzione.
È pertanto vero, quindi, che questa disciplina ha forte contenuto economico
La ricerca operativa si inserisce all'interno del processo decisionale, il quale può essere suddiviso in diverse fasi

- **Individuazione problema**
- **Raccolta dati**
- **Costruzione modello**, ovvero la Traduzione del problema in un modello matematico che descriva il sistema e i vincoli in modo formale
- **Determinazione di piu' soluzioni**: applicazione di algoritmi e tecniche di ottimizzazione per individuare la soluzione migliore
- **Analisi dei risultati**

La ricerca operativa, quindi, si occupa delle fasi 3 e 4 del processo, dato che sono le fasi che richiedono l'impiego di modelli matematici, algoritmi di ottimizzazione e strumenti computazionali. Adesso andiamo a definire per benino che cosa intendiamo per "modello"

Definition 2.1.3: modello

un **modello** è una descrizione astratta e scritta in linguaggio matematico, della parte di realtà utile al processo decisionale

I modelli ci permettono di inquadrare i problemi in una determinata "cornice" che ci permette di determinare quale tipo di algoritmo risolutivo usare.
Esistono tre tipi di modelli:

- **Teoria dei giochi**: ricerca di un equilibrio fra le componenti coinvolte in un'interazione reciproca, spesso con obbiettivi contrastanti. (non ce ne occupiamo)
- **Simulazione**: il problema viene studiato simulando la situazione senza studiarne la natura in modo analitico tramite generazione di istanze casuali. (anche questi modelli non ci interessano)
- **Analitici**: dal problema si costruisce un modello matematico rigoroso (senza perdere informazione sul problema reale) e risolto mediante tecniche analitiche, senza ricorrere a simulazioni. La natura stessa dello spazio matematico in cui è inserito il problema è in grado di garantire la soluzione ottima. Questo tipo approccio è particolarmente vantaggioso in quanto assicura l'esattezza della soluzione supponendo che il modello sia formulato correttamente.

  È tuttavia richiesto un discreto livello di creatività

Definiamo, adesso, i problemi che andiamo a trattare

Definition 2.1.4: Problema

Definiamo **problema** una domanda, espressa in termini generali, la cui risposta dipende da *parametri* e *variabili*, sopratutto nei problemi analitici

Un problema $\mathcal{P}$ è descritto tramite:

- I suoi parametri e variabili
- Le caratteristiche che una soluzione deve avere

Quando fissiamo un'istanza di un problema, vengono fissati i parametri ma non le variabili, che sono le incognite che devono essere definite. Distinguiamo un problema dalla sua istanza per generalizzarlo. Si presti attenzione alla differenza tra parametri e variabili che molti si confondono

Example 2.1.1 (Problema con paramteri e variabili)
Sia $\mathcal{P}$ il seguente problema

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dove a, b e c sono i suoi parametri e x rappresenta le variabili, una possibile istanza di tale problema è:

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

Un modo comune per descrivere un problema è dare l'insieme di soluzioni ammissibili $\mathbb{F}_\mathcal{P} \subseteq G$, dove G è un sovrainsieme generico noto, di solito contenente la collezione di tutte le possibili configurazioni o decisioni che si possono prendere, dando dei vincoli che un generico $g \in G$ deve soddisfare per far parte di $\mathbb{F}_\mathcal{P}$, avremo così che $G - \mathbb{F}_\mathcal{P}$ è l'insieme delle soluzioni non ammissibili

Example 2.1.2
Sia l'instanza di $\mathcal{P}$ definita precedentemente

$$5x^s - 6x + 1 = 0$$

si ha che

$$\mathbb{G} = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R} | 5x^2 - 6x + 1 = 0\}$$

2.1.1 Problemi di ottimizzazione

Iniziamo con una definizione preliminare

Definition 2.1.5: Problema di ottimizzazione

In matematica e in informatica, un problema di ottimizzazione è il problema di trovare la migliore soluzione fra tutte le soluzioni fattibili

Un problema di ottimizzazione $\mathcal{P}$ viene descritto:

- Dando l'insieme $\mathbf{F}_p$ delle soluzioni ammissibili
- Specificando una funzione obbiettivo
$$c_{\mathcal{P}} : \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}$$
Che assegna ad ogni $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ un valore reale $c_{\mathcal{P}}(g)$ che ne rappresenta il costo o il beneficio

Un problema (di ottimizzazione) di massimo $\mathcal{P}$ consiste nel deteminare il valore

$$Z_{\mathcal{P}} = \max \{c_{\mathcal{P}}(g) \mid g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}\}$$

Un problema (di ottimizzazione) di minimo $\mathcal{P}$ consiste nel deteminare il valore

$$Z_{\mathcal{P}} = \min \{c_{\mathcal{P}}(g) \mid g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}\}$$

Ci si può trastullare per benino con la definizione, infatti ad ogni problema di massimo $\mathcal{P}$ corrisponde un problema di minimo $\mathcal{P}'$ t.c. $c_{\mathcal{P}'}(g) = -c_{\mathcal{P}}(g)$. Infatti:

$$Z_{\mathcal{P}} = -\min \{c_{\mathcal{P}'}(g) \mid g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}_{\mathcal{P}'}\}$$

Definition 2.1.6: Valore ottimo e soluzione otttima

Dato un problema di ottimizzazione $\mathcal{P}$, una funzione di vincolo $c_{\mathcal{P}}$ il valore $Z_{\mathcal{P}}$ definito in precedenza è detto **valore ottimo**, invece il $g* \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ tale che $Z_{\mathcal{P}} = c_{\mathcal{P}}(g*)$ è detto **soluzione ottima**

Si può quindi constatare che la reale differenza tra i due è che il primo è inserto nel codominio della funzione obbiettivo (è quindi il mero valore reale "ottimizato"), il secondo nel dominio (ovvero è il valore in $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ che ottimizza la funzione)

Example 2.1.3

Dati $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, $\mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 6x + 1 = 0\}$, $c_{\mathcal{P}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $c_{\mathcal{P}}(g) = g^2$ e sia $Z_{\mathcal{P}} = \max\{x^2 \mid 5x^2 - 6x + 1 = 0\}$
Innanzi tutto calcolo l'insieme delle soluzioni ammissibili (hold my soluzione parabolica):

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10}$$

Quindi, le soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{6+4}{10} = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni ammissibili è:

$$\mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$$

Poi si occorre calcolare il $Z_{\mathcal{P}}$:

$$Z_{\mathcal{P}} = \max\{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}\}$$

si procede poi nel calcolare la funzione obbiettivo per ogni elemento dell'insieme delle soluzioni ammissibili:

$$c_{\mathcal{P}}(1) = 1^2 = 1$$

$$c_{\mathcal{P}}\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

Il massimo tra questi valori è:

$$Z_{\mathcal{P}} = \max\left\{1, \frac{1}{25}\right\} = 1$$

fin

casi dei problemi di decisione

Si hanno quattro casi principali in cui sono inseriti i problemi di decisione

- **Problema vuoto**: non esistono soluzioni ammissibili, ovvero $\mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \emptyset$, per forza di cose ottimizzare qui è impossibile e si assume che $Z_{\mathcal{P}} = \infty$

  Non è detto che sia semplice determinare che un insieme $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ sia vuoto, alle volte il problema è esposto con una rappresentazione implicita (es. equzioni)

- **Problema illimitato**: Si ha quando non esiste un limite inferiore/inferiore per i valori nella funzione obbiettivo tra le soluzioni ammissibili, ovvero quando $Z_{\mathcal{P}} = \pm\infty$

  Ad esempio nel caso del massimo $\forall x \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ con $c_{\mathcal{P}}(g) \geqslant x$, in tal caso si ha $Z_{\mathcal{P}} = +\infty$

- **Valore ottimo finito ma non soluzione ottima finita**: Un problema di ottimizzazione può presentare un *valore ottimo finito*, ma non una *soluzione ottima finita*. Questo scenario si verifica quando il valore ottimo $Z_{\mathcal{P}}$ esiste ed è finito, ma non esiste alcuna soluzione ammissibile $g \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ tale che la funzione obiettivo $c_{\mathcal{P}}(g)$ sia uguale a $Z_{\mathcal{P}}$

  Es $inf\{x|x > 0\}$ (estremo inferiore = 0), ma non esiste una soluzione ottima che soddisfi il valore ottimo (insiemi aperti)

- **Valore Ottimo Finito e Soluzione Ottima Finita**: $\exists g \in F_p.c_p(g)$ e' ottimo. Notare che possono esistere diverse soluzione ottime ma solo un valore ottimo. (Caso preferito)

2.1.2 Problemi di ottimizzazione e di decisione

Il problema di decisione consiste nel determinare una qualunque soluzione ammissibile $g \in F_p$.
Il problema di certificato consiste nel dire se per una $g \in G$ si ha che $g \in F_p$.
Trasformare un problema di ottimizzazione in un problema di decisione basta rendere c_p costante (quindi tutte le soluzioni ammissibili diventano ottime e le consideriamo tutte)
Al contrario, possiamo considerare un problema decisionale R tale che

$$F_R = \{g \in F_p | c_p(g) \ = Z_p\}$$

oppure dato $k \in \mathbb{R}$ si puo anche considerare R_k decisionale con

$$F_{R_k} = \{g \in F_p | c_p(g) \leqslant k\}$$

(nel caso in cui P e' di minimo)

2.1.3 Aspetto algoritmico

- Algoritmi esatti: e' un algoritmo ch epreso un'istanza di P (P e' un modello di un problema), fornisce in output una soluzione ottima g^* di P (se esiste). Spesso pero' i problemi sono troppo complessi ed e' impossibile costruire algoritmi efficenti.

- Algoritmi euristici: non ci danno garanzia sulla soluzione trovata (e' sicuramente ammissibile), ma un'approssimazione.

Come possiamo valutare la correttezza di una soluzione euristica? Possiamo misurare l'errore (assoluto o relativo) fra il valore ottimo euristico e quello esatto.
Gli algoritmi euristici vengono detti anche greedy.

2.2 Modelli

Al posto di dare un'algoritmo per ogni specifico problema, possiamo definire classi di problemi che possono essere risolti con lo stesso algoritmo.

2.2.1 Programmazione Lineare

f e' lineare. c_p e' l'insieme di vettori di numeri reali. $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$. (definizione di G)

- La funzione obiettivo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$f(x) = cx$$
dove c e' un vettore riga e x vettore colonna. Attenzione, c non e' una variabile ma un **parametro**. (definizione della funzione obiettivo)

- Ci sono un insieme di vincoli lineari nella forma: $ax = b$, $ax \leqslant b$, $ax \geqslant b$. Dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ ()

E' talvolta utile assumere che $x \in \mathbb{Z}^n$, ovvero che le soluzioni ammissibili siamo vettori di numeri interi. In questo caso si parla di programmazione lineare intera. Facendo cosi' stiamo restringendo il campo di ricerca, ma si perdono alcune proprieta' (geometriche) che in realta' possono rendere piu' difficile la ricerca della soluzione.
In PLM possiamo avere variabili di natura mista (alcune variabili in $\mathbb{R}$ alcune in $\mathbb{Z}$)
Un problema PL spuo' sempre essere espresso in forma matriciale:

$$max\{cx | Ax \leqslant b\}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, quindi scriviamo tutti i vincoli in un unica disequazione. Sistema di disequazioni lineari. Usiamo max dato che sappiamo passare da max a min. Se abbiamo un vincolo $ax = b$, questo diventa $ax \leqslant b$ e $ax \geqslant b$, e $ax \geqslant b$ diventa $(-a)x \leqslant (-b)$