

Probabilità Appunti

Giovanni Palma e Alex Basta

Contents

Chapter 1

Introduzione preliminare _____ Page _____

- 1.1 Cos'è la probabilità?
- 1.2 Richiami teoria degli insiemi
Leggi di de morgan — • Proprietà distributive di intersezione e unione —

Chapter 2

Spazi di probabilità discreti _____ Page _____

- 2.1 Concetti introduttivi
- 2.2 Regole del calcolo probabilistico
Assiomi della probabilità — • Conseguenze degli assiomi —

Chapter 1

Introduzione preliminare

1.1 Cos'è la probabilità?

E' vietato dare una definizione di "probabilità"! E' un concetto primitivo, che tutti noi conosciamo, e' una domanda che riguarda la filosofia. E' come il punto, la retta e il piano nella geometria euclidea.

$$A = \text{"Domani a Bologna piove"}$$

Di questa affermazione, sappiamo dire solo quanto sia probabile che succeda, non siamo sicuri se si avveri o meno. Bisogna passare da una condizione di certezza (0 o 1) a un intervallo continuo $[0, 1]$. Stiamo generalizzando la logica del certo.

Indichiamo la probabilità che A succeda con $\mathcal{P}(A)$. Quindi $P(A) \in [0, 1]$, dove $P(A) = 0$ significa che non accadrà mai e $P(A) = 1$ significa che accade con certezza.

Come si assegna la probabilità? Non e' una domanda che riguarda la matematica, ma la statistica. L'approccio classico e' quello frequentista, dove svolgiamo vari esperimenti aleatori e calcoliamo la probabilità come

$$\mathcal{P}(A) \approx \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

Notare che questa non e' una definizione, ma un'approssimazione. Questo e' l'approccio frequentista che funziona bene in casi semplici.

L'approccio bayesiano e' un aggiornamento all'approccio precedente aggiungendo informazioni a priori che ci permette di creare una distribuzione probabilistica. Tutto questo riguarda la statistica, a noi interessa la matematica della probabilità.

1.2 Richiami teoria degli insiemi

Dato un insieme Ω e due sottoinsiemi $A, B \subseteq \Omega$, si useranno tali notazioni per le diverse operazioni tra insiemi

$$A \cup B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\},$$

$$A \cap B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\},$$

$$A^c := \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\},$$

$$A \setminus B := A \cap B^c,$$

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

Andiamo inoltre a definire $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subset \Omega\}$ come l'insieme delle parti di Ω e sia $|A|$ la cardinalità di A , ovvero il suo numero di elementi

Example 1.2.1

Sia $\Omega = \{a, b, c\}$ allora $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Si noti poi questa interessante proposizione

Proposition 1.2.1

Sia Ω un insieme finito allora si ha:

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

Dimostrazione: Si può dimostrare per induzione su Ω :

- Caso $\Omega = \emptyset$:

$$|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^{|\emptyset|}$$

$$|\{\{\}\}| = 2^0$$

$$1 = 1$$

- Caso Ω :

Per ipotesi induttiva $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$, dove $\Omega = X \cup p$ (con $p \notin X$). Quindi $|X| = |\Omega| - 1$. Dato che stiamo aggiungendo un nuovo elemento p a X , per ogni elemento di $\mathcal{P}(X)$ possiamo decidere se unirlo o meno a p , quindi il numero di elementi si duplica: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^{|X|} = 2 \cdot 2^{|\Omega|-1} = 2^{|\Omega|}$.

☺

Le nozioni di unione e intersezione si estendono in modo naturale a una famiglia arbitraria $(A_i)_{i \in I}$ di sottoinsiemi di Ω :

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \exists i \in I \text{ tale che } \omega \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \forall i \in I \text{ si ha che } \omega \in A_i\}$$

Example 1.2.2 (Intersezione e unione in un insieme di riferimento numerabile $I = \mathbb{N}$)

Sia $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi

1. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$

Si ha

$$\bigcup_{n=1} A_n = \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{n=1} A_n = \emptyset$$

Giustamente $\{1\} \neq \{2\} \neq \{3\} \neq \dots$ pertanto l'unione è vuota

2. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = [0, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1} A_n = [0, 1]$$

L'intervallo $[0, 1]$ è quello che "contiene" tutti gli altri, pertanto, per come è definita l'unione, è ovvio che sia lui il risultato di tale operazione

$$\bigcap_{n=1} A_n = \{0\}$$

L'intersezione è un insieme con solo 0, l'unico numero contenuto in tutti gli insiemi di intervalli

1.2.1 Leggi di de morgan

Theorem 1.2.1 Leggi di De Morgan

Queste proposizioni sono vere:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

che valgono, più in generale, per famiglie arbitrarie di insiemi:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Dimostrazione: Devo dimostrare che $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \wedge A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ ovvero che $w \in (A \cap B)^c \iff w \in (A^c \cup B^c)$
ebbene:

$$\begin{aligned} \omega \in (A \cap B)^c &\iff \omega \notin A \cap B \\ &\iff \omega \notin A \text{ or } \omega \notin B \\ &\iff \omega \in A^c \text{ or } \omega \in B^c \\ &\iff \omega \in (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

È dato come esercizio per Bastiality la dimostrazione per le altre cose

☺

1.2.2 Proprietà distributive di intersezione e unione

Theorem 1.2.2

è possibile dimostrare che valgono le seguenti leggi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

: Bonzo, la dimostri per esercizio

☺

Chapter 2

Spazi di probabilità discreti

2.1 Concetti introduttivi

Innanzitutto andiamo a definire che cosa intendiamo per *esperimento aleatorio*, *esito*, *probabilità*

Con la dicitura *esperimento aleatorio* indicheremo qualunque fenomeno (fisico, economico, sociale, ...) il cui esito non sia determinabile con certezza a priori. Il nostro obiettivo è di fornire una descrizione matematica di un esperimento aleatorio, definendo un modello probabilistico, un *esito* invece è un ipotetico risultato di un'esperimento aleatorio sulla base di un cosiddetto *spazio campionario* un insieme che contiene tutti gli esiti possibili dell'esperimento

Example 2.1.1

- **Esperimento aleatorio:** Lancio di un dado.
- **Spazio campionario:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Esito:** 4.

Note:

In casi più complessi ci saranno vari sotto-esperimenti aleatori, come 10 lanci di un dado.

Adesso forniamo vere e proprie definizioni

Definition 2.1.1: evento

Si definisce **evento** un'affermazione riguardante l'ipotetico esito univoco dell'esperimento, di cui si può affermare con certezza se è vero o falso una volta noto l'esito

Example 2.1.2

Esper. aleatorio: Lancio del dado
 $A = \text{"esce un numero pari"}$

Definition 2.1.2: Spazio campionario

Lo **spazio campionario** è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento casuale e viene denotato con Ω

Notare che non si afferma "tutti e solo tutti", quindi **qualsiasi** insieme che contiene gli esiti possibili può essere considerato uno spazio campionario

Example 2.1.3 (Lancio dado)

Possiamo porre come spazio campionario:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ma anche

$$\Omega = \mathbb{R}$$

Definition 2.1.3: Esiti favorevoli

Esiti per cui un evento è vero sono detti esiti favorevoli.

Definition 2.1.4: Evento in termine di insiemi

Un evento si può definire anche come il sottoinsieme dello spazio campionario Ω formato da tutti gli esiti favorevoli dell'evento.

Example 2.1.4

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies A = \text{"esce un numero pari"} \implies \{2, 4, 6\}$ sono gli esiti favorevoli dell'evento A .

Note:

La definizione insiemistica di un evento dipende dallo spazio campionario Ω definito, poiché l'evento è un sottoinsieme di Ω . Tuttavia, l'insieme degli esiti favorevoli di un evento è fisso, e rappresenta l'insieme evento di cardinalità massima possibile, ovvero l'insieme degli esiti favorevoli $A \subseteq \Omega$.

Definition 2.1.5

- Ω è l'evento *certo*
- \emptyset è l'evento *impossibile*
- $\omega \in \Omega$ è un evento *elementare* ($A = \{\omega\}$)

Example 2.1.5

Lancio un dado.

$A = \text{"esce un numero tra 1 e 6"}$

$B = \text{"esce un numero maggiore di 6"}$

$C = \text{"esce il numero 3"}$

- Se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, allora:
 - $A = \Omega$ (evento certo),
 - $B = \emptyset$ (evento impossibile),
 - $C = \{3\}$ (evento con un solo esito favorevole).
- Se $\Omega = \mathbb{R}$, allora:
 - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \Omega$ (evento quasi certo),
 - $B = (6, +\infty)$ (evento quasi impossibile),
 - $C = \{3\}$ (evento con un solo esito favorevole).

2.2 Regole del calcolo probabilistico

Ad ogni relazione logica possiamo associare un'operazione insiemistica:

Connettivi Logici	Connettivi Insiemistici
$A \vee B$	$A \cup B$
$A \wedge B$	$A \cap B$
$\neg A$	A^c
$A \implies B$	$A \subseteq B$
$A \iff B$	$A = B$

Note:

Nella prima colonna, A e B sono eventi come affermazioni, mentre nella colonna di destra sono degli insiemi.

2.2.1 Assiomi della probabilit 

Poniamo tre assiomi fondamentali da cui possiamo partire per derivare tutte le operazioni e propriet  che ci servono:

Note:

Per noi tutti i sottoinsiemi di Ω sono eventi (anche se non sara' sempre cos )

Definition 2.2.1: Assiomi fondamentali della probabilit 

Assioma 1. A ciascun sottoinsieme (o evento) A di Ω   assegnato un numero $\mathbb{P}(A)$ che verifica:

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

Tale numero $\mathbb{P}(A)$ si chiama **probabilit ** dell'evento A .

Assioma 2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Assioma 3. Vale la propriet  di **additivit  numerabile**^a: sia $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una successione di sottoinsiemi di Ω tra loro disgiunti^b e sia

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Allora

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

^aAnche detta **σ -additivit **.

^bIn formule: $A_i \cap A_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$. In altri termini, non hanno elementi in comune.

Note:

Quindi, per il primo assioma, esiste una funzione probabilit  $\mathbb{P}(A) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$.

Definition 2.2.2: Probabilit  discreta

Chiamo probabilit  discreta una funzione probabilit  \mathbb{P} a valori discreti, ovvero che pu  assumere un numero finito o al pi  numerabile di valori fra 0 e 1.

Vediamo una tale probabilit :

Definition 2.2.3: Delta di Dirac

Sia $\Omega = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora si chiama delta di Dirac centrato in x_0 la funzione:

$$\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

Notare che per definizione, la funzione di Dirac è una probabilità discreta, dato che soddisfa tutti gli assiomi (ma non molto utile dato che assume solo due valori). Però, tramite le delta di Dirac siamo in grado di costruire qualunque altra probabilità discreta:

Sia $\Omega = \mathbb{R}$. Prendiamo un numero contabile n di eventi singoletto $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a cui corrispondono $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall i = 1, \dots, n. p_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Definiamo la funzione:

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto \sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i}(A)$$

\mathbb{P} è una combinazione lineare di delta di Dirac. Essendo una combinazione convessa, $\mathbb{P} \in [0, 1]$ e si può dimostrare che soddisfa gli altri due assiomi (2 e 3), quindi è una probabilità discreta! Variando le x e le p è possibile generare qualsiasi funzione \mathbb{P} discreta.

Example 2.2.1

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\forall i = 1, \dots, 6. x_i = i, p_i = \frac{1}{6}$, la funzione \mathbb{P} associata è:

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \delta_{x_i}(A)$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies P(A) = 1$$

$$B = (6, +\infty) \implies P(B) = 0$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \implies P(C) = 1$$

Definition 2.2.4

Si chiama evento quasi certo un evento A tale che $\mathbb{P}(A) = 1$.

Definition 2.2.5

Si chiama evento quasi impossibile un evento A tale che $\mathbb{P}(A) = 0$.

Posso allargare Ω quanto voglio perché tanto fuori dall'insieme minimo che comprende tutti gli eventi possibili le probabilità che aggiungo sono quasi impossibili e quindi hanno probabilità 0 e non cambiano il valore totale della somma.

2.2.2 Conseguenze degli assiomi

Theorem 2.2.1

Sia Ω spazio campionario e \mathbb{P} probabilità su Ω ((Ω, \mathbb{P}) è uno spazio di probabilità con $\mathbb{P} : \mathcal{P}(A) \rightarrow [0, 1]$). Dagli assiomi 1, 2, 3 deduciamo le cose seguenti:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. **Additività finita:** $(A_i)_{i=1, \dots, n}. \forall i \neq j. A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. **Monotonia:** $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Dimostrazione: 1. Devo mostrare che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Per semplicità definiamo $p := \mathbb{P}(\emptyset)$. Uso l'assioma 3 con la successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dove $\forall i \in \mathbb{N}. A_i = \emptyset$, che sono tutti eventi disgiunti. Quindi:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p.$$

Inoltre:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies p = \sum_{i=1}^{\infty} p.$$

L'equazione è soddisfatta solo per $p = 0$.

2. Supponiamo di avere una sequenza finita disgiunta A_1, \dots, A_n . Definisco $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $B_i = A_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $B_i = \emptyset$ per $i > n$. Usando l'assioma 3:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

3. Per definizione di complemento, $A^c \cup A = \Omega$ e $A^c \cap A = \emptyset$. Per additività:

$$\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad (\text{per l'assioma 2}).$$

4. Se $A \subseteq B$, allora $B = A \cup (B \setminus A)$, con A e $B \setminus A$ disgiunti. Per additività:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$$

☺

Theorem 2.2.2 Probabilità unione non disgiunta

Siano A e B eventi:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (2.1)$$

Dimostrazione: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per additività:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B).$$

Osservando che:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B),$$

si ottiene la formula.

☺

Note:

La formula si complica con un numero di eventi maggiore di 2. Per $n = 3$:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$