

Probabilità e Statistica Appunti

Alex Bastianini

Contents

Chapter 1

Introduzione

Page

- 1.1 La probabilita'
La matematica della probabilita' — • Teoria degli insiemi —
- 1.2 Modello probabilistico di un esperimento aleatorio

Chapter 1

Introduzione

L'esame e di 4 esercizi con argomenti che ci sono sempre e alcuni che ruotano. Rispetto ad altri esami si aggiungono le catene di Markov ?, quindi ci sara' meno focus su calcolo combinatorio. L'orale e' solo per chi vuole migliorare il voto.

1.1 La probabilita'

Che cose'? E' vietato dare una definizione di "probabilita"! E' un concetto primitivo, che tutti noi conosciamo, e' una domanda che riguarda la filosofia. E' come il punto, la retta e il piano nella geometria.

Domani a Bologna piove

Di questa affermazione, sappiamo dire solo quanto sia probabile che piova. Bisogna passare da una condizione di certezza (0 o 1) a un intervallo continuo $[0, 1]$. Stiamo generalizzando la logica del certo.

Quindi $P(A) \in [0, 1]$, dove $P(A) = 0$ significa che non accadrà mai e $P(A) = 1$ significa che accade con certezza. Come si assegna la probabilita'? Non e' una domanda che riguarda la matematica, ma la statistica. L'approccio classico e' quello frequentista, dove svolgiamo vari esperimenti aleatori e calcoliamo la probabilita come

$$P(A) \approx \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

Notare che questa non e' una definizione, ma un'approssimazione. Questo e' l'approccio frequentista che funziona bene in casi semplici.

L'approccio bayesiano e' un aggiornamento all'approccio precedente aggiungendo informazioni a priori che ci permette di creare una distribuzione probabilistica. Tutto questo riguarda la statistica, a noi interessa la matematica della probabilita'.

1.1.1 La matematica della probabilita'

Assumiamo di conoscere a priori la probabilita' che accada un certo evento. La matematica studia come cambia la probabilita' quando facciamo interagire diversi eventi.

1.1.2 Teoria degli insiemi

Insieme di riferimento Ω (omega grande) con $\omega \in \Omega$ elemento dell'insieme. I sottoinsiemi $A \subseteq \Omega$ (ma quando usa lo stretto intende comunque questo). $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subseteq \Omega\}$ e' l'insieme delle parti (insieme di tutti i sottoinsiemi). $|A|, \#A$ e' la cardinalita' (numero di elementi) di un insieme finito. $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$

Operazioni insiemistiche

Dati $A, B \subseteq \Omega$:

- $A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$
- $A \cap B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$

-

Leggi di De Morgan:

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

si dimostrano usando l'assioma dell'ex. , anche se in realta' e' spesso possibile dimostrare il \iff , ovvero l'uguaglianza fra due:

$$\omega \in (A \cap B)^c \iff \omega \notin A \cap B \dots \text{TODO}$$

Proprieta' distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Intersezione e unione numerabile:

- $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e' una successione di insiemi
- $\bigcup A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N}. \omega \in A_i\}$
- $\bigcap A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}. \omega \in A_i\}$

1.2 Modello probabilistico di un esperimento aleatorio

3 concetti primitivi (come nella geometria euclidea):

- esperimento aleatorio
- esito
- probabilita'

essendo oggetti primitivi, non ci sarebbe neanche bisogno di dare una definizione a parole, pero' facciamo per comprendere meglio:

- Un esperimento aleatorio e' un esperimento di cui non si conosce il risultato con certezza
- esito e' un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio

Un esempio aleatorio e' per esempio il lancio del dado, dove gli esiti sono $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (notare che l'etichetta che diamo non e' importante, a noi importa il conteggio).

Note:

In casi piu' complessi ci saranno vari sotto-esperimenti aleatori tra loro in relazione, come 10 lanci di un dato.

Definition 1.2.1: Evento

Un evento e' un'affermazione che riguarda l'ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio di cui posso dire con certezza se e' vero o falso **solo una volta noto l'esito**.

Esempio: Un esp. aleatorio e' il lancio del dado

A = "esce un numero pari" e' un evento

Definition 1.2.2: Spazio campionario

Si chiama spazio campionario un qualunque insieme che contiene tutti gli esiti dell'esperimento aleatorio.

Notare che non dice "tutti e solo tutti", quindi non ce n'e' solo uno. Tutti gli esiti sono rappresentati con un opportuno codice.

Esempio: lancio moneta

$\Omega = \{t, c\}$, ma anche $\Omega = \{t, c, f, g, h, \dots\}$ o $\Omega = \mathbb{R}$ sono tutti spazi campionari validi.