Analisi 1
Definizioni Modulo 1

Alex Bastianini

Contents

Chapter 1

1.1 Successioni

Definition 1.1.1: Successione di numeri

Una successione di numeri reali e' una funzione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$n \longrightarrow f(n) =: a_n.$$

Note:

$(a_n)_n$ non e' da confondere con l'insieme $Im(f) = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ dato che conta l'ordine degli elementi.

Definition 1.1.2: Successione limitata

Data $(a_n)_n$ e $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$:

- $(a_n)_n$ e' **superiormente limitata** se:

  A e' superiormente limitato

- $(a_n)_n$ e' **inferiormente limitata** se:

  A e' inferiormente limitato.

- $(a_n)_n$ e' **limitata** se:

  A e' limitato.

Definition 1.1.3: Limite finito di una successione

Dati $(a_n)_n$ e $L \in \mathbb{R}$, si dice che:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Se:

$$\forall \epsilon > 0. \exists \delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+ : \forall n > \delta :$$

$$|a_n - L| < \epsilon$$

In questo caso $(a_n)_n$ si dice **convergente**

Definition 1.1.4: Limite infinito di una successione

Data $(a_n)_n$:

- Si dice:
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$
Se:
$$\forall k \in \mathbb{R}.\exists \delta = \delta(k) \in \mathbb{R}_+ : \forall n > \delta : .$$
$$a_n \geqslant k.$$
- Si dice:
$$\lim_{n \to -\infty} a_n = -\infty.$$
Se:
$$\forall k \in \mathbb{R}.\exists \delta = \delta(k) \in \mathbb{R}_+ : \forall n > \delta : .$$
$$a_n \leqslant k.$$

Definition 1.1.5: Successione monotona

Una successione $(a_n)_n$ si dice **monotona** quando:

- $(a_n)_n$ e' **crescente** [$(a_n)_n \nearrow$]:
$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant a_{n+1}.$$
- $(a_n)_n$ e' **decrescente** [$(a_n)_n \searrow$]:
$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant a_{n+1}.$$

1.2 Intorni e punti di accumolo

Definition 1.2.1: Intorno sferico di un punto

Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, e un raggio $r \in \mathbb{R} : r > 0$,
Si dice **intorno sferico** di centro x_0 e raggio r:
$$I_r(x_o) := \{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < r\}.$$

Definition 1.2.2: Punto di accumolazione

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto di accumolazione** di un insieme A se:
$$\forall \epsilon > 0 : .$$
$$(I_\epsilon(x_0) \backslash \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$
$\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathbb{R} |$x e' un punto di accumolazione di A$\}$

1.3 Limiti di funzioni

Definition 1.3.1: Limite di una funzione (tutti i casi)

Si dice:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Se:

$$\forall \epsilon > 0 . \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) :$$

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$:
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$
- $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = \infty$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon.$$

Nei casi x_0^- e x_0^+ la condizione diventa:
1. $x_0 - \delta < x < x_0$
2. $x_0 < x < x_0 + \delta$

Mentre se $x_0 = \infty$:
1. $x > \delta$
2. $x < -\delta$

1.4 Continuita

Definition 1.4.1: Punto isolato

Un punto $x_0 \in A$ si dice **punto isolato** se:

$$x_0 \notin \mathcal{D}(A).$$

Ovvero quando x_0 non fa parte dei punti di accumolazione di A, pur facendo parte dell'insieme A. Quindi si tratta di un punto i cui punti subito a destra e sinistra non appartengono ad A (ecco perche' "isolato").

Definition 1.4.2: Funzione continua in un punto

Una funzione $f(x)$ si dice **continua** in un punto $x_0 \in D(f)$ se:
- $x_0 \notin \mathcal{D}$ (punto isolato)
- $x_0 \in \mathcal{D}$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition 1.4.3: Funzione continua

Data una funzione f con dominio A, se $\forall x \in A$: f e' continua in x_0:

$$f \in C^0(A) = \{f : A \to \mathbb{R} | \text{f e' continua in A}, \forall x \in A\}.$$

1.4.1 Teoremi sulle funzioni continue

Theorem 1.4.1 Teorema degli zeri

Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su [a, b]:

$$f(a) * f(b) < 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = 0.$$

Definition 1.4.4: Punti di massimo e minimo assoluti

Data una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in A$:

- x_0 e' punto di **massimo assoluto** se:

$$\forall x \in A : f(x_0) \geqslant f(x).$$

- x_0 e' punto di **minimo assoluto** se:

$$\forall x \in a : f(x_0) \leqslant f(x).$$

Theorem 1.4.2 Weierstrass

Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su [a,b]:

- $\exists x_1 \in [a, b] : x_1$ e' **massimo assoluto**
- $\exists x_2 \in [a, b] : x_2$ e' **minimo assoluto**

Usando il teorema degli zeri si puo provare che:

$$f([a, b]) = [x_1, x_2].$$

1.5 Derivate

Definition 1.5.1: Punto interno

Un punto $x_0 \in I$ si dice **punto interno** a I se:

$$\exists I_r(x_0) : I_r(x_0) \subseteq I.$$

L' insieme di punti interni di I si scrive $\mathring{\mathrm{I}}$.

Note:

Questa definizione differisce da quella di punto di accumolazione in quando x_0 deve appartenere all' insieme e deve avere elementi appartenenti all' inseme sia a destra che a sinistra (quindi di sicuro sono esclusi gli estremi).

Definition 1.5.2: Derivata in un punto

Data $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su I e un punto $x_0 \in \mathring{I}$, f si dice **derivabile** nel punto x_0 se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Se esiste, tale limite (chiamato $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$) si chiama **derivata di f** in x_0.

Essendo dei limiti, le derivate possono essere anche "da destra" o "da sinistra" ($f'_+(x_0)$ o $f'_-(x_0)$). Ugualmente al caso dei limiti, $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f e' derivabile sia a destra che a sinistra di } x_0 \\ f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$

Definition 1.5.3: Derivata

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile (su I) se:

$$\forall x \in I : \exists f'(x) \in \mathbb{R}.$$

In tal caso possiamo associare a f una nuova funzione, la sua **derivata**.

Note:

Per poter usare questa definizione di funzione derivata, diciamo che f e' dervabile nei punti estremi del suo dominio se esiste la sua derivata a destra o a sinistra (per estremo sinistro e destro).

Definition 1.5.4: Classe C^k

$$f \in C^k(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ e' derivabile k-volte su I} \\ f^k \text{ e' continua su I} \end{cases}$$

Definition 1.5.5: Massimo e minimo relativi

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

- $x_0 \in A$ si dice **punto di massimo relativo**se:

$$\exists r > 0 : \ \forall x \in I_r(x_0) \cap A : \ f(x_0) \geqslant f(x).$$

- $x_0 \in A$ si dice **punto di minimo relativo** se:

$$\exists r > 0 : \ \forall x \in I_r(x_0) \cap A : \ f(x_0) \leqslant f(x).$$

1.5.1 Teoremi di funzioni derivabili

Theorem 1.5.1 Fermat

- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su [a,b] e derivabile su]a, b[
- $x_0 \in]a, b[$ punto di massimo o minimo

$$f'(x_0) = 0.$$

Ogni punto di massimo o minimo sono punti di stazionamento.

Theorem 1.5.2 Rolle

- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su [a,b] e derivabile su]a,b[
- $f(a) = f(b)$

$$\exists c \in]a, b[: \ f^{'}(c) = 0.$$

Theorem 1.5.3 Lagrange

- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su [a,b] e derivabile su]a, b[

$$\exists c \in]a, b[: \ f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corollary 1.5.1

- $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile su]a,b[
- $\forall x \in]a, b[. f'(x) = 0$

$$\forall x \in]a, b[. f(x) = k \text{ (la funzione e' costante)}$$

Theorem 1.5.4 Cauchy

- $g, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue su [a,b] e derivabili su]a,b[
- $\forall x \in]a, b[. g^{'}(x) \neq 0$

$$\exists c \in]a, b[: \ \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Theorem 1.5.5 Hopital

- $f, g : \ I \longrightarrow \mathbb{R}, \ \overline{x} \in \mathring{I}$
- $f(\overline{x}) = g(\overline{x}) = 0$ or $\pm\infty$
- f, g sono derivabili in $I \backslash \{\overline{x}\}$ e $\forall x \in I \backslash \{\overline{x}\} : g(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

$$\exists \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.6 Approssimazione di funzioni

Theorem 1.6.1 Peano

- $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$
- f derivabile n-volte in $\overline{x} \in]a, b[$

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\overline{x})(x - \overline{x})^j}{j!}.$$

$T_n(x)$ detto anche **polinomio di Taylor** e' l'unico polinomio tale che:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - \overline{x})^n) \text{ (per } x \longrightarrow \overline{x}).$$