Ripasso

GEL

① => ② e ① => ③ ovvio

- Vogliamo usare il teo. del completamento, quindi prima ② => ① dove ② sono i vett. lin. ind.

- Poi dimostro ③ => ② per assurdo!

UNICITÁ APP. LIN.

- Prima per costruzione (usando le coordinate) definisco L e verifico e' immagine rispetto alla base e la linearità

- Poi dimostro che é unica usando $G(v)$ $(=L(v))$

TEO. DIM

- NON si usano i metodi di calcolo del Ker e dell' Im!

- Poniamo prima di tutto una base di r vettori del nucleo, poi usiamo il teo. compl. per aggiungere $n-r$ vettori e formare una base di V.

- Ora che abbiamo una base di V possiamo trovare dei generatori di Im, ma dato che i primi r vettori della base hanno come immagine $\underline{0}$, posso toglierli dai generatori dato che sono combinazioni lineari. Quindi rimangono gli $n-r$ vettori aggiunti.

- Quindi $\dim \mathrm{Im} \leq n-r$, ma se d.d. $r + \dim \mathrm{Im} = n$, allora d.d. che $\dim \mathrm{Im} = n-r$, che succede solo se i suoi $n-r$ generatori sono lin. ind.
Per def. lin. ind. assumo che $\lambda_{r+1} L(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n L(v_n) = \underline{0}$ e dimostro che $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

- Per linearità $L(\lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) = \underline{0}$, quindi $v = \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \mathrm{Ker}\, L$.
Allora possiamo scrivere $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$,
sottraiamo le due eq. e viene:
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r - \lambda_{r+1} v_{r+1} - \dots - \lambda_n v_n = \underline{0}$$

Dato che $v_1 \dots v_n$ sono lin. ind., $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$

- Quindi $\dim \mathrm{Im} = n-r$ ∎

$\boxed{\text{VETTORI ORTOGONALI SONO IND.}}$

- $v_1, \dots, v_n \neq \underline{0}$ ortogonali, per def. lin. ind. assumiamo $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0}$ e dimostriamo $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

- Usiamo l'ipotesi appena trovata e le prop. del prod. scalare per dimostrare che
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}.\ \langle \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{0}, v_i \rangle = 0$$

- Usiamo la Bilinearità del prod. scalare per espandere l'equazione. Dato che i vettori sono ortogonali rimane

$$\|v_i\|^2 \lambda_i = 0$$

- Dato che $\|v_i\| \neq 0$, abbiamo che $\forall i .\ \lambda_i = 0$