$K[G]$

- SP VETT SU K:
  - $(K[G], +)$ é un gruppo abeliano
  - Prodotto scalare $K \times K[G] \longrightarrow K[G]$
- ANELLO $(K[G], +, \cdot)$:
  - $(K[G], +)$ é un gruppo abeliano
  - $(K[G], \cdot)$ é un monoide

Dobbiamo quindi definire:

- Somme: $\displaystyle\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, g$

  SOMMA $(K,+)$ gruppo abeliano

- Prod. scalare: $\displaystyle k \sum_{g\in G} a_g g = \sum_{g\in G} (k a_g)\, g$

  PRODOTTO $(K, \cdot)$ gruppo abeliano

- Prod. interno:
  - $(a_g g) \cdot (b_h h) = (a_g b_h)(g h)$

    PRODOTTO $(G, \cdot)$ gruppo

$$\sum_{g\in G} a_g g \cdot \sum_{h\in G} b_h h = \sum_{z\in G} c_z z$$

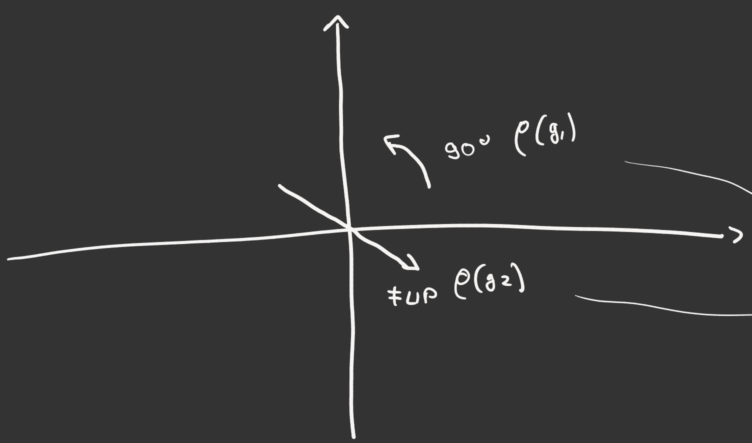
Convoluzione

$$c_z = \sum_{\{g,h\in G \mid gh = z\}} a_g b_h = \sum_{g\in G} a_g b_{g^{-1}z}$$

SP VETT V SU K

G GRUPPO

ρ



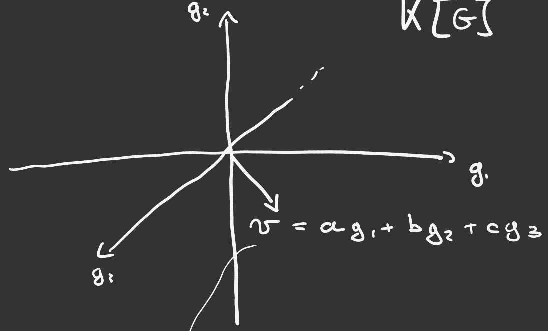
APP. LIN.

$\Downarrow$

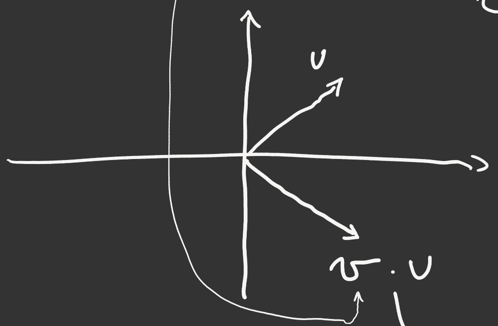
Possono essere descritte solo dalla loro azione sulla base di V

$\rho(g_1)(e_1) \wedge \rho(g_1)(e_2)$

$K[G]$



$K[G]$- modulo sx



↳ rispetta regole linearità

Ma quindi $\forall u \in K[G]$- modulo sappiamo, ad esempio

$\longrightarrow \quad g_1 \cdot U, \quad g_2 \cdot U, \quad g_3 \cdot U$

$g \cdot U = w$

$g^{-1} \cdot w = U$

$\forall g \in G, \forall v \in K[G]$-modulo. $\exists g^{-1}$:

$g^{-1} \cdot (g \cdot v) = v$

Pf: $g^{-1} \cdot (g \cdot v) = (g^{-1} g) \cdot v =$

Unità $K[G]$ $\longleftarrow$ elem. neutro di G $\longleftarrow$ $= e \cdot U = U$

Ma moltiplicare per g è un'app. lin. ?

$- \; T_g(v + w) = T_g(v) + T_g(w)$

$g \cdot (v + w) = gv + gw$

$- \; T_g(\nu \cdot v) = \nu \cdot T_g(v)$

$g \cdot (\nu \cdot v) = (g \nu) \cdot v$

- Esempio in $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2]$ $\quad (\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}.\ a^2 = e)$

$\alpha \in \mathbb{R}[\mathbb{Z}_2] = x_\alpha e + y_\alpha a \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

$\alpha + \beta = (x_\alpha + x_\beta) e + (y_\alpha + y_\beta) a$

$\alpha \cdot \beta = (xz + yw) e + (xw + yz) a$