

# Combinatoria Algebrica

## Appunti

Innamorato Italiano e Innamorata Giapponese

# Contents

## Chapter 1

### Fondamenti di Algebra Astratta per Informatici \_\_\_\_\_ Page \_\_\_\_\_

- 1.1 Gruppi  
Centro di un Gruppo — • Sottogruppi Normali — • Gruppi Simmetrici e Gruppi Lineari Generali — •  
Gruppi Ciclici — • Azioni —
- 1.2 Campo  
Proprieta' Fondamentali —
- 1.3 Anelli  
Proprieta' fondamentali —
- 1.4 Spazio Vettoriale
- 1.5 Omomorfismi, Isomorfismi e Automorfismi

## Chapter 2

### Fondamenti della Teoria delle Rappresentazioni \_\_\_\_\_ Page \_\_\_\_\_

- 2.1 Struttura algebrica

# Chapter 1

## Fondamenti di Algebra Astratta per Informatici

Vediamo le strutture algebriche principali e i morfismi utilizzati nel corso. Notiamo come sta roba non ce la sta a spiegare nessuno se non il sommo Gem, dato che appunto siamo informatici.

### 1.1 Gruppi

#### Definition 1.1.1: Gruppo

E' una coppia  $(G, \cdot)$  dove:

- $G$  e' un insieme non vuoto
- $\cdot$  e' un'operazione  $G \times G \rightarrow G$  (chiusa su  $G$ )

Che soddsfa gli assiomi:

- Associativita'
- Esistenza dell'elemento *neutro*  $e$
- Esistenza dell'*inverso*  $a^{-1}$  per ogni  $a \in G$

Alcune delle proprieta' piu' importanti dei gruppi sono:

- **Unicita'** dell'elemento inverso e neutro
- **Inverso del prodotto:**  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$
- **Legge della cancellazione:**  $a \cdot b = a \cdot c$  moltiplicando a sx per  $a^{-1}$  si ottiene  $b = c$

#### Note:

Se vale anche la proprieta' *commutativa*, allora il gruppo si dice *abeliano*.

Vediamo ora cosa sono i sottogruppi:

#### Definition 1.1.2: Sottogruppo

Dato un gruppo  $(G, \cdot)$ , si dice che  $B$  e' un suo sottogruppo se:

- $B \subset G$
- $(B, \cdot)$  e' un gruppo

Un importante teorema per i sottogruppi: TODO finisci

### Theorem 1.1.1 Lagrange

Se  $G$  è un gruppo finito e  $H$  un suo sottogruppo, allora la cardinalità degli elementi di  $G$  divide esattamente

## 1.1.1 Centro di un Gruppo

### Definition 1.1.3: Centro di un Gruppo

Sia  $G$  un gruppo. Il **centro** di  $G$ , tipicamente denotato con  $Z(G)$ , è l'insieme di tutti gli elementi di  $G$  che commutano con ogni elemento del gruppo stesso. In simboli:

$$Z(G) = \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G\}$$

#### Note:

#### Proprietà fondamentali ed Esempi:

- **È un sottogruppo:** L'elemento neutro  $e$  commuta con tutto, quindi  $e \in Z(G)$ . Essendo chiuso rispetto al prodotto e all'inverso, costituisce un sottogruppo a tutti gli effetti ( $Z(G) \leq G$ ).
- **È un sottogruppo normale:** Poiché ogni elemento  $z \in Z(G)$  commuta con tutti i  $g \in G$ , la coniugazione lo lascia invariato:  $gzg^{-1} = zgg^{-1} = z \in Z(G)$ . Di conseguenza,  $Z(G) \trianglelefteq G$ .
- **Casi limite:** Se  $G$  è abeliano, il centro coincide con tutto il gruppo ( $Z(G) = G$ ). Se invece  $Z(G) = \{e\}$ , si dice che il gruppo ha centro banale (es. il gruppo simmetrico  $S_n$  per  $n \geq 3$ ).
- **Applicazione in Combinatoria Algebrica:** Il centro del gruppo generale lineare  $GL(V)$  è costituito esattamente dalle matrici scalari non nulle ( $Z = \{\lambda I \mid \lambda \in K^\times\}$ ). Questo fatto è il motore logico della dimostrazione del **Lemma di Schur**.

## 1.1.2 Sottogruppi Normali

Dobbiamo prima definire un'operazione che ci servira'

### Definition 1.1.4: Operazione di Coniugio

Sia  $G$  un gruppo e siano  $x, g \in G$ . Si definisce **coniugio** di  $x$  tramite  $g$  l'operazione che associa ad  $x$  l'elemento:

$$x^g = gxg^{-1}$$

Due elementi  $x, y \in G$  si dicono **coniugati** se esiste un elemento  $g \in G$  tale che  $y = gxg^{-1}$ . Questa è una relazione di equivalenza che partiziona il gruppo in **classi di coniugio**.

#### Note:

#### Osservazioni e Proprietà:

- **Automorfismo Interno:** Per ogni  $g \in G$ , la mappa  $\gamma_g : G \rightarrow G$  definita da  $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$  è un automorfismo del gruppo (chiamato automorfismo interno). Questo significa che il coniugio preserva tutte le proprietà algebriche dell'elemento (ad esempio,  $x$  e  $gxg^{-1}$  hanno sempre lo stesso ordine).
- **Nei Gruppi Abeliani:** Se  $G$  è commutativo, il coniugio è banale:  $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$ . In questo caso, ogni elemento forma una classe di coniugio a sé stante.
- **Invarianza dei Caratteri:** Questa è la proprietà più importante per il Modulo 2. I caratteri di una rappresentazione sono **funzioni di classe**, ovvero assumono lo stesso valore su tutti gli elementi di una stessa classe di coniugio:  $\chi(x) = \chi(gxg^{-1})$ .
- **Legame con la Normalità:** Un sottogruppo  $N$  è normale ( $N \trianglelefteq G$ ) se e solo se è un'unione di classi di coniugio, ovvero se è "chiuso" rispetto all'operazione di coniugio.

Possiamo ora definire cosa sono i sottogruppi normali

#### Definition 1.1.5: Sottogruppo Normale

Sia  $G$  un gruppo e  $N$  un suo sottogruppo ( $N \leq G$ ). Diciamo che  $N$  è un **sottogruppo normale** di  $G$ , e si denota con il simbolo  $N \trianglelefteq G$ , se è invariante rispetto all'operazione di coniugio per qualsiasi elemento del gruppo. In formule, deve valere:

$$gng^{-1} \in N \quad \forall n \in N, \forall g \in G$$

#### Note:

**Condizioni Equivalenti** Nella pratica algebrica, dire che  $N \trianglelefteq G$  equivale a verificare una di queste due proprietà:

- **Invarianza globale per coniugio:**  $gNg^{-1} = N$  per ogni  $g \in G$ .
- **Coincidenza dei laterali:** I laterali sinistri coincidono sempre con i laterali destri. Ovvero,  $gN = Ng$  per ogni  $g \in G$ . (Attenzione: questo non significa che gli elementi commutino individualmente, cioè  $gn = ng$ , ma che gli *insiemi* risultanti siano identici).

#### Esempi e Proprietà Fondamentali

- **Gruppi Abelian:** Se il gruppo  $G$  è commutativo (come i gruppi ciclici o il Gruppo di Klein  $V_4$ ), allora *ogni* suo sottogruppo è banalmente normale, poiché  $gng^{-1} = ngg^{-1} = n$ .
- **Nucleo di un Omomorfismo:** Il nucleo di un qualsiasi omomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  è sempre un sottogruppo normale di  $G$  ( $\ker(\phi) \trianglelefteq G$ ).
- **Il Centro del Gruppo:** Il centro  $Z(G)$ , contenendo gli elementi che commutano con tutto, è sempre un sottogruppo normale di  $G$ .

**Il Fine Ultimo: Il Gruppo Quoziente** La normalità è la condizione necessaria e sufficiente per poter definire un'operazione coerente sull'insieme dei laterali  $\{gN \mid g \in G\}$ . Solo se  $N \trianglelefteq G$ , il prodotto  $(aN) \cdot (bN) = (ab)N$  è ben definito. Questo ci permette di creare il **Gruppo Quoziente**  $G/N$ , una struttura fondamentale che "semplifica" il gruppo di partenza collassando tutto il sottogruppo  $N$  nell'elemento neutro.

### 1.1.3 Gruppi Simmetrici e Gruppi Lineari Generali

#### Definition 1.1.6: Il Gruppo Simmetrico

Sia  $X$  un insieme. Il **Gruppo Simmetrico** di  $X$ , denotato con  $Sym(X)$  o  $Perm(X)$ , è l'insieme di tutte le funzioni biunivoche (permutazioni)  $f : X \rightarrow X$ . Sotto l'operazione di composizione di funzioni,  $Sym(X)$  forma un gruppo.

#### Note:

Si può dimostrare che gruppi simmetrici di insiemi aventi la stessa cardinalità  $n$  sono isomorfi, quindi si tende a considerare il gruppo simmetrico costituito dalle permutazioni degli interi  $1, 2, \dots, n$  denotato  $S_n$ .

### Definition 1.1.7: Il Gruppo Lineare Generale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ . Il **Gruppo Lineare Generale** di  $V$ , denotato con  $GL(V)$  o  $\text{Aut}(V)$ , è l'insieme di tutti gli **automorfismi lineari** dello spazio  $V$  (ovvero, tutte le applicazioni lineari biunivoche  $f : V \rightarrow V$ ).

La struttura  $(GL(V), \circ)$  forma un gruppo dove l'operazione interna è la **composizione di funzioni**:

- **Chiusura:** La composizione di due automorfismi lineari è ancora un automorfismo lineare.
- **Elemento neutro:** L'applicazione identica  $\text{id}_V$  (tale che  $\text{id}_V(v) = v, \forall v \in V$ ).
- **Inverso:** L'applicazione lineare inversa  $f^{-1}$ , che esiste sempre ed è unica poiché  $f$  è una biiezione.

#### Note:

**Distinzione tra  $\text{Sym}(V)$  e  $GL(V)$ :**

- **Natura delle trasformazioni:** Mentre  $\text{Sym}(V)$  contiene *qualsiasi* funzione biettiva (anche quelle che "rimiscolano" i vettori in modo selvaggio e non lineare), il gruppo  $GL(V)$  è il sottogruppo di  $\text{Sym}(V)$  costituito solo dalle trasformazioni che sono anche **lineari**.
- **Inclusione:**  $GL(V) \leq \text{Sym}(V)$ . In termini di Teoria delle Rappresentazioni, diciamo che una rappresentazione è un'azione di  $G$  su  $V$  tale che l'immagine dell'omomorfismo non sia semplicemente in  $\text{Sym}(V)$ , ma sia contenuta interamente in  $GL(V)$ .
- **Esempio concettuale:** Se  $V = \mathbb{R}^2$ , una funzione che sposta il vettore  $(1, 1)$  in  $(2, 2)$  e il vettore  $(2, 2)$  in  $(5, 0)$  può appartenere a  $\text{Sym}(V)$  (se è biettiva), ma non potrà mai appartenere a  $GL(V)$  perché non rispetta la proporzionalità (linearità).
- **Il "filtro" della Rappresentazione:** Quando scriviamo  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , stiamo imponendo che ogni simmetria del gruppo  $G$  agisca sullo spazio  $V$  rispettando la sua struttura vettoriale (somma e prodotto per scalare), non solo come un semplice rimescolamento di punti.

### Rappresentazione Matriciale $GL(n, K)$

Se lo spazio vettoriale  $V$  ha dimensione finita  $n$ , fissata una base di  $V$ , ogni isomorfismo lineare può essere rappresentato univocamente da una matrice quadrata di ordine  $n$ . Di conseguenza,  $GL(V)$  è isomorfo al gruppo delle matrici invertibili a coefficienti in  $K$ :

$$GL(n, K) = \{A \in M_n(K) \mid \det(A) \neq 0\}$$

In questa veste, l'operazione del gruppo diventa la **moltiplicazione riga per colonna** tra matrici e l'elemento neutro è la matrice identità  $I_n$ .

### Proprietà Fondamentali

1. **Non Abelianità:** Se la dimensione  $n \geq 2$ , il gruppo  $GL(V)$  è tipicamente **non commutativo** (poiché il prodotto di matrici non commuta in generale).
2. **Il Centro del Gruppo:** Il centro  $Z(GL(V))$  (ovvero l'insieme degli elementi che commutano con ogni altro elemento del gruppo) è costituito esattamente dalle **matrici scalari** non nulle:  $Z = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K^\times\}$ . Questo fatto è il motore logico del **Lemma di Schur**.
3. **Sottogruppo Speciale Lineare:** Il nucleo dell'omomorfismo determinante ( $\det : GL(n, K) \rightarrow K^\times$ ) forma un importante sottogruppo normale di  $GL(n, K)$ , chiamato *Gruppo Speciale Lineare*  $SL(n, K)$ , composto da tutte e sole le matrici con determinante uguale a 1.

## Il Ruolo Centrale nel Modulo 2

Questa definizione è il perno del corso di Combinatoria Algebrica. Definire una rappresentazione di un gruppo finito astratto  $G$  su uno spazio vettoriale  $V$  significa esattamente stabilire un omomorfismo:

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

Stiamo, di fatto, "traducendo" la struttura moltiplicativa del gruppo astratto  $G$  in operazioni tra matrici invertibili, permettendoci così di sfruttare tutta la potenza dell'Algebra Lineare (autovalori, traccia, diagonalizzazione) per studiare le simmetrie del gruppo.

### 1.1.4 Gruppi Ciclici

#### Definition 1.1.8: Gruppo Ciclico

Un gruppo  $(G, \cdot)$  si dice **ciclico** se esiste un elemento  $g \in G$ , detto **generatore**, tale che ogni elemento di  $G$  possa essere espresso come potenza intera di  $g$ :

$$G = \langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

#### Definition 1.1.9: Classi di Coniugio di Gruppi Simmetrici

Dato un gruppo simmetrico  $S_n$ , due permutazioni  $\sigma, \tau \in S_n$  appartengono alla stessa **classe di coniugio** se e solo se hanno la stessa **struttura ciclica**, ovvero se presentano lo stesso numero di cicli della stessa lunghezza nella loro scomposizione in cicli disgiunti.

#### Note:

##### Proprietà e Relazione con le Partizioni:

- **Corrispondenza biunivoca:** Le classi di coniugio di  $S_n$  sono in corrispondenza biunivoca con le **partizioni** dell'intero  $n$ . Una partizione  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  tale che  $\sum \lambda_i = n$  definisce univocamente una classe di coniugio.
- **Numero di Rappresentazioni:** In virtù della teoria generale, il numero di rappresentazioni irriducibili distinte di  $S_n$  su  $\mathbb{C}$  è esattamente uguale al numero di partizioni  $p(n)$ .
- **Esempio  $S_3$  ( $n = 3$ ):** Le partizioni di 3 sono:
  - $(1, 1, 1) \rightarrow$  Identità (cicli di lunghezza 1).
  - $(2, 1) \rightarrow$  Trasposizioni  $\{(12), (13), (23)\}$ .
  - $(3) \rightarrow$  3-cicli  $\{(123), (132)\}$ .
- **Rappresentazioni Notevoli:** Ogni  $S_n$  possiede sempre almeno due rappresentazioni di grado 1: la *banale* ( $\chi(g) = 1$  per ogni  $g$ ) e la *segnatura* ( $\chi(g) = \text{sgn}(g)$ ).
- **Diagrammi di Young:** Le rappresentazioni irriducibili di  $S_n$  vengono classificate e costruite tramite i **Diagrammi di Young**, che sono la rappresentazione grafica delle partizioni di  $n$ .

## Classificazione e Struttura

I gruppi ciclici sono classificati in base al loro ordine  $|G|$ :

- Se  $|G| = \infty$ , allora  $G \cong (\mathbb{Z}, +)$ .
- Se  $|G| = n < \infty$ , allora  $G \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ , ovvero il gruppo delle classi di resto modulo  $n$ .

## Proprietà Fondamentali

1. **Abelianità:** Ogni gruppo ciclico è abeliano. Infatti,  $g^a \cdot g^b = g^{a+b} = g^{b+a} = g^b \cdot g^a$ .
2. **Sottogruppi:** Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è a sua volta ciclico.
3. **Teorema dei Divisori:** Se  $G$  è un gruppo ciclico di ordine  $n$ , allora per ogni divisore  $d$  di  $n$  esiste un unico sottogruppo  $H \leq G$  tale che  $|H| = d$ .
4. **Generatori:** Un elemento  $g^k$  di un gruppo ciclico d'ordine  $n$  è un generatore di  $G$  se e solo se  $\gcd(k, n) = 1$ . Il numero di tali generatori è dato dalla funzione  $\varphi(n)$  di Eulero.

### 1.1.5 Azioni

#### Definition 1.1.10: Azione di un Gruppo

Sia  $G$  un gruppo e  $X$  un insieme non vuoto. Un' **azione** (a sinistra) di  $G$  su  $X$  è una funzione  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  che associa a ogni coppia  $(g, x)$  un elemento  $g \cdot x \in X$ , tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1. **Identità:**  $e \cdot x = x$  per ogni  $x \in X$  (dove  $e$  è l'elemento neutro di  $G$ ).
2. **Compatibilità:**  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$  per ogni  $g, h \in G$  e  $x \in X$ .

#### Note:

##### Concetti Chiave e Proprietà:

- **Omomorfismo di Permutazione:** Un'azione di  $G$  su  $X$  è equivalente a un omomorfismo di gruppi  $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(X)$ . In questo senso, ogni elemento del gruppo viene visto come una permutazione degli elementi di  $X$ .
- **Orbita:** L'orbita di un elemento  $x \in X$  è l'insieme  $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ . Le orbite formano una partizione dell'insieme  $X$ .
- **Stabilizzatore:** Lo stabilizzatore di  $x \in X$  è il sottogruppo  $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ . Contiene tutti gli elementi del gruppo che "lasciano fermo"  $x$ .
- **Teorema Orbita-Stabilizzatore:** Se  $G$  è finito, la cardinalità dell'orbita di  $x$  è data dal numero di laterali dello stabilizzatore:  $|G \cdot x| = |G|/|G_x|$ .
- **Dall'Azione alla Rappresentazione:** Se l'insieme  $X$  è uno spazio vettoriale  $V$  e l'azione è lineare (cioè  $g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w$  e  $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$ ), allora l'azione è esattamente una **rappresentazione lineare** di  $G$ .

## 1.2 Campo

#### Definition 1.2.1: Campo

Un **campo**  $K$  è una struttura algebrica dotata di due operazioni:

- **Somma:** t.c.  $(K, +)$  è un *gruppo abeliano* (con elem neutro 0)
- **Prodotto:** t.c.  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  è un *gruppo abeliano* (con elem neutro 1)
- Vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

Come conseguenza diretta, si ha che l'elemento neutro della somma diventa **elemento assorbente** ( $\forall a \in K. a \cdot 0 = 0$ ). Infatti, se un prodotto è 0 allora è sicuro che almeno uno degli operandi è 0.



### 1.2.1 Proprieta' Fondamentali

**Caratteristica del Campo** ( $\text{char}(K)$ ): E' il piu' piccolo intero positivo  $p$  tale che sommando l'elemento identita' 1 a se' stesso  $p$  volte si ottiene 0 (l'elemento neutro) (cioe'  $1 + \dots + 1 = 0$ ). Se non esiste un valore  $p$  (non si ritorna mai all'elemento neutro) allora  $\text{char}(K) = 0$ .

**Chiusura Algebrica:** Un campo  $K$  si dice algebricamente chiuso se ogni polinomio non costante a coefficienti in  $K$  ha almeno una radice in  $K$ . Il campo  $\mathbb{C}$  e' algebricamente chiuso, mentre  $\mathbb{R}$  non lo e' (ad esempio,  $x^2 + 1 = 0$ ).

## 1.3 Anelli

### Definition 1.3.1: Anello

Un anello e' una terna  $(R, +, \cdot)$ , dove  $R$  e' un insieme dotato di due operazioni binarie interne (somma e prodotto), tale che:

- $(R, +)$  e' un *gruppo abeliano*
- $(R, \cdot)$  e' un *monoide*:
  - Associativita':  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$
  - Unita':  $\exists 1 \in R \mid a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in R$
- Proprieta' distributiva (sx e dx)

Come conseguenza diretta, si ha che l'elemento neutro della somma diventa **elemento assorbente** ( $\forall a \in R. a \cdot 0 = 0$ ). Infatti, se un prodotto e' 0 allora e' sicuro che almeno uno degli operandi e' 0.

#### Note:

A differenza dei campi, in un anello generale non si richiede che il prodotto sia commutativo ( $a \cdot b$  può essere diverso da  $b \cdot a$ ), e non si richiede che ogni elemento non nullo abbia un inverso moltiplicativo (cioè non si può sempre "dividere").

### 1.3.1 Proprieta' fondamentali

Per manipolare gli anelli, definiamo alcune categorie di elementi e strutture interne fondamentali:

- **Divisori dello zero:** Un elemento  $a \neq 0$  si dice divisore dello zero se esiste un elemento  $b \neq 0$  tale che  $a \cdot b = 0$ . Si osservi che nei campi questa eventualità non si verifica mai per definizione.
- **Elementi Invertibili (Unità):** Gli elementi di  $R$  che possiedono un inverso moltiplicativo formano un gruppo rispetto all'operazione di prodotto, indicato con il simbolo  $R^\times$  (o  $U(R)$ ).
- **Ideali:** Un sottoinsieme  $I \subseteq R$  è un **ideale sinistro** se è un sottogruppo additivo e "assorbe" il prodotto da sinistra: ovvero, per ogni  $r \in R$  e ogni  $x \in I$ , si ha che  $r \cdot x \in I$ . Gli ideali rappresentano per gli anelli ciò che i sottogruppi normali rappresentano per i gruppi, permettendo la costruzione degli **anelli quoziente**  $R/I$ .

## 1.4 Spazio Vettoriale

### Definition 1.4.1: Spazio Vettoriale

Sia  $K$  un campo (i cui elementi sono detti *scalari*). Un insieme  $V$  (i cui elementi sono detti *vettori*) è un **spazio vettoriale su  $K$**  (o  $K$ -spazio vettoriale) se è dotato di due operazioni:

1. **Somma interna:** un'operazione  $+: V \times V \rightarrow V$  che rende  $(V, +)$  un gruppo abeliano (commutativa, associativa, con elemento neutro  $0_V$  e opposto per ogni vettore).
2. **Prodotto per uno scalare:** un'operazione esterna  $\cdot: K \times V \rightarrow V$  tale che, per ogni scalare  $\alpha, \beta \in K$  e per ogni vettore  $u, v \in V$ , valgono i seguenti quattro assiomi:
  - **Distributività rispetto alla somma vettoriale:**  $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$
  - **Distributività rispetto alla somma scalare:**  $(\alpha + \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v)$
  - **Compatibilità del prodotto:**  $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
  - **Azione dell'identità scalare:**  $1_K \cdot v = v$  (dove  $1_K$  è l'elemento neutro moltiplicativo del campo  $K$ ).

## L'Importanza del Campo $K$ in Teoria delle Rappresentazioni

Nel contesto dello studio delle rappresentazioni  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ , le proprietà algebriche del campo  $K$  determinano la validità dei teoremi fondamentali:

- **Chiusura Algebrica (Esistenza degli autovalori):** Se lavoriamo su  $K = \mathbb{C}$  (che è un campo algebricamente chiuso), il Teorema Fondamentale dell'Algebra ci garantisce che ogni endomorfismo lineare abbia sempre almeno un autovalore. Questa proprietà è il motore logico che fa funzionare il **Lemma di Schur** e ci permette di diagonalizzare l'azione del gruppo.
- **Caratteristica del Campo (Divisione per  $|G|$ ):** Affinché sia valido il **Teorema di Maschke** (e le rappresentazioni siano completamente riducibili), è necessario che la caratteristica del campo,  $\text{char}(K)$ , non divida l'ordine del gruppo finito  $|G|$ . Solo sotto questa condizione l'elemento  $|G| \cdot 1_K$  è invertibile in  $K$ , rendendo possibile l'operazione di "media sul gruppo" per costruire i proiettori equivarianti.
- **Dimensione Relativa:** La dimensione di uno spazio vettoriale dipende strettamente da  $K$ . Ad esempio, l'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  ha dimensione 1 se inteso come  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale, ma possiede dimensione 2 se lo strutturiamo come  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale (con base  $\{1, i\}$ ).

## 1.5 Omomorfismi, Isomorfismi e Automorfismi

### 1. Omomorfismo di Gruppi

Siano  $(G, \cdot)$  e  $(H, *)$  due gruppi. Una funzione  $\phi: G \rightarrow H$  si dice **omomorfismo** se preserva l'operazione di gruppo, ovvero se:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y) \quad \forall x, y \in G$$

Da questa definizione derivano due proprietà strutturali fondamentali:

- $\phi(e_G) = e_H$  (l'elemento neutro viene mappato nell'elemento neutro).
- $\phi(x^{-1}) = [\phi(x)]^{-1}$  (l'inverso viene mappato nell'inverso).

**Strutture associate a un omomorfismo:**

- **Nucleo (Kernel):**  $\ker(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = e_H\}$ . Il nucleo misura quanto l'omomorfismo "collassa" il gruppo di partenza ed è sempre un *sottogruppo normale* di  $G$  ( $\ker(\phi) \trianglelefteq G$ ).
- **Immagine:**  $\text{Im}(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ . L'immagine rappresenta la porzione del codominio effettivamente raggiunta ed è sempre un sottogruppo di  $H$  ( $\text{Im}(\phi) \leq H$ ).

## 2. Isomorfismo

Un omomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  si dice **isomorfismo** se la funzione  $\phi$  è biunivoca (cioè iniettiva e suriettiva).

- **Criterio di iniettività:** Un omomorfismo  $\phi$  è iniettivo se e solo se  $\ker(\phi) = \{e_G\}$ .
- Se esiste un isomorfismo tra  $G$  e  $H$ , i due gruppi si dicono isomorfi e si scrive  $G \cong H$ . Strutturalmente, sono indistinguibili dal punto di vista algebrico.

## 3. Automorfismo

Un **automorfismo** è un isomorfismo di un gruppo in sé stesso, ovvero una mappa biunivoca  $\phi : G \rightarrow G$  che preserva le operazioni.

- L'insieme di tutti gli automorfismi di un gruppo  $G$ , dotato dell'operazione di composizione di funzioni, forma un gruppo a sua volta, denotato con  $\text{Aut}(G)$ .
- **Automorfismi interni:** Fissato un elemento  $g \in G$ , la mappa di coniugio  $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$  è sempre un automorfismo di  $G$ . L'insieme di questi automorfismi forma un sottogruppo denotato con  $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ .

## L'Omomorfismo Determinante

### Definizione

Sia  $K$  un campo e  $K^\times = K \setminus \{0\}$  il suo gruppo moltiplicativo (formato da tutti gli elementi non nulli di  $K$  con l'operazione di prodotto). L'applicazione **determinante** è una mappa:

$$\det : GL(n, K) \rightarrow K^\times$$

che associa a ogni matrice invertibile  $A$  il suo determinante  $\det(A)$  (che è uno scalare in  $K$ ). Poiché la matrice è invertibile,  $\det(A) \neq 0$ , quindi il codominio  $K^\times$  è corretto.

### La Proprietà di Omomorfismo

Questa mappa è un omomorfismo di gruppi grazie al celebre **Teorema di Binet**, il quale garantisce che il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei loro determinanti:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \forall A, B \in GL(n, K)$$

In altre parole, la mappa  $\det$  preserva (e trasporta) l'operazione di moltiplicazione dal "complicato" gruppo delle matrici al "semplice" gruppo degli scalari.

### Nucleo (Kernel) e Immagine

Applicando le definizioni strutturali degli omomorfismi a questa mappa specifica, otteniamo due informazioni preziose:

- **Immagine:** La mappa è **suriettiva**. Per ogni scalare  $\lambda \in K^\times$ , esiste sempre almeno una matrice in  $GL(n, K)$  che ha  $\lambda$  come determinante (basta prendere la matrice identità e sostituire il primo 1 in alto a sinistra con  $\lambda$ ). Quindi,  $\text{Im}(\det) = K^\times$ .
- **Nucleo:** Il nucleo è formato da tutte le matrici mappate nell'elemento neutro del codominio (che per la moltiplicazione in  $K^\times$  è 1).

$$\ker(\det) = \{A \in GL(n, K) \mid \det(A) = 1\}$$

Questo insieme definisce il **Gruppo Speciale Lineare**, denotato con  $SL(n, K)$ . Poiché è il nucleo di un omomorfismo,  $SL(n, K)$  è automaticamente un **sottogruppo normale** di  $GL(n, K)$  ( $SL(n, K) \trianglelefteq GL(n, K)$ ).

## Conseguenza: Il Primo Teorema di Omomorfismo

Per il Primo Teorema di Omomorfismo, il quoziente del dominio rispetto al nucleo è isomorfo all'immagine. Questo ci dà una bellissima identità strutturale:

$$\frac{GL(n, K)}{SL(n, K)} \cong K^\times$$

## Applicazione nel Modulo 2 (Caratteri e Rappresentazioni)

Se possediamo una rappresentazione di un gruppo  $G$ , ovvero un omomorfismo  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ , possiamo comporla con l'omomorfismo determinante per creare una nuova mappa:

$$\det \circ \rho : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

Poiché la composizione di due omomorfismi è ancora un omomorfismo, questa nuova mappa è a tutti gli effetti una **rappresentazione di grado 1** del gruppo  $G$ !

## Collegamento con la Teoria delle Rappresentazioni

Nel contesto del nostro corso, una **rappresentazione lineare** di un gruppo finito  $G$  su uno spazio vettoriale  $V$  (su un campo  $K$ ) non è altro che un omomorfismo di gruppi:

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

dove  $GL(V)$  è il gruppo degli automorfismi lineari (matrici quadrate invertibili) dello spazio  $V$ . Se  $\ker(\rho) = \{e_G\}$ , la rappresentazione non "perde" informazioni sul gruppo e si dice **fedele**.

## Chapter 2

# Fondamenti della Teoria delle Rappresentazioni

### 2.1 Struttura algebrica

Cosa vuol dire combinatoria algebrica?

Vuol dire studiare strutture algebriche (gruppi, anelli, campi, etc.) attraverso la combinatoria.

#### Definition 2.1.1: Struttura algebrica

Si definisce struttura algebrica una coppia  $(G, *)$  dove  $G$  è un insieme e  $*$  è una operazione binaria su  $G$

#### Example 2.1.1 (Strutture algebriche)

- **Gruppo:**  $(G, *)$  con  $*$  binaria e associativa,  $G$  con elemento neutro e ogni elemento ha un inverso
- **Anello:**  $(G, +, \cdot)$  con  $+$  e  $\cdot$  binarie e associative,  $G$  con elemento neutro per  $+$  e ogni elemento ha un inverso per  $+$
- **Campo:**  $(G, +, \cdot)$  con  $+$  e  $\cdot$  binarie e associative,  $G$  con elemento neutro per  $+$  e ogni elemento ha un inverso per  $+$

Per "astratta", dal latino, "tirata fuori", si intende estrapolata dal suo contesto originale. La combinatoria quindi, vuole studiare le strutture algebriche e darne una rappresentazione più concreta.

#### Definition 2.1.2: Rappresentazione di un gruppo

Sia  $G$  un gruppo,  $K$  un campo e  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ . si definisce una rappresentazione di  $G$  su  $V$  è un omomorfismo  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  tale che  $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$  per ogni  $g, h \in G$ .

#### Note:

In altre parole è un'azione (omomorfismo è un  $G \rightarrow$ ) di  $G$  su  $V$  con immagine  $GL(V)$  tramite isomorfismi

#### Definition 2.1.3

Diciamo che la rappresentazione è fedele se  $\rho$  è iniettivo, ovvero se  $\rho(g) = \rho(h) \implies g = h$

#### Note:

Ovvero il nucleo di  $\rho$  contiene solo l'elemento neutro ( $\ker(\rho) = \{e\}$ )

**Definition 2.1.4**

Sia  $(V, \rho)$  una rappresentazione di  $G$  su  $V$ , diciamo che un sottospazio vettoriale  $U \subseteq V$  è una sottorappresentazione di  $\rho$  se  $\rho(g)U \subseteq U$  per ogni  $g \in G$

**Note:**

In altre parole  $(U, \rho|_U)$  è una rappresentazione di  $G$  su  $U$ , dove  $\rho|_U : G \rightarrow GL(U)$  è l'omomorfismo che mappa  $g \rightarrow \rho(g)|_U$

**Example 2.1.2**

$$G = \langle r | r^4 = i \rangle$$

Può essere rappresentato tramite rotazione di  $V = \mathbb{R}^2$ . Ovvero  $\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$  ha sottorappresentazioni proprie?

**Definition 2.1.5: R**

Una rappresentazione è riducibile se ammette una sottorappresentazione propria (ovvero  $U \neq \{0\}$  e  $U \neq V$ )

**Example 2.1.3**

Sia  $G$  il gruppo simmetrico  $G = S_3, V = K^3$  rappresentazione matriciale.  $\sigma \in S_3, (x_1, x_2, x_3) \in K^3$

$$\rho(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

Ad esempio

$$\rho((123))(7, -4, 5/2) = (-4, 5/2, 7)$$

**Example 2.1.4 (Esercizio)**

Consideriamo i sottospazi  $U = \{(t, t, t), t \in K\}$  e  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in V | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ , mostrare che  $U$  e  $W$  sono sottorappresentazioni riducibili di  $\rho$

**Sol:**  $V = U \oplus W$

**Definition 2.1.6**

Una rappresentazione si dice indecomponibile se, ogni volta che  $V = U \oplus W$  allora  $U$  e  $W$  sono sottorappresentazioni, abbiamo  $U = V$  e  $W = \{0\}$  o viceversa

**Proposition 2.1.1**

Chiaramente irriducibile  $\implies$  indecomponibile

**Note:**

vale il viceversa? in generale n perché potrebbe esserci un completamento

**Example 2.1.5**

$$V = \mathbb{C}^2 (\mathbb{Z}, +)$$

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo perché

$$\rho(n)\rho(m) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(n+m)$$

**Note:**

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Lemma 2.1.1

Sia  $G$  un gruppo finito. E sia  $V$  una sottorappresentazione (su  $\mathbb{C}$ ) allora ogni sottorappresentazione  $U \subseteq V$  ammette un complementare  $W \subseteq V$  tale che  $V = U \oplus W$  e  $W$  è una sottorappresentazione. Quindi indecomponibile  $\implies$  irriducibile

**Dimostrazione:** Data una sottorappresentazione  $U \subseteq V$  consideriamo  $U^\perp = \{v \in V | \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U\}$ , dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare hermitiano su  $V$  (quello  $G$  invariante), chiaramente  $V = U \oplus U^\perp$  e  $U^\perp$  è una sottorappresentazione perché  $\forall v \in U^\perp, \forall g \in G, \forall u \in U$  abbiamo  $\langle \rho(g)v, u \rangle = \langle v, \rho(g^{-1})u \rangle = 0$  perché  $u \in U$  e  $\rho(g^{-1})u \in U$   $\square$

### Definition 2.1.7

$A$  anello con  $1_A, (V, +)$  gruppo abeliano, è un  $A$ -modulo sinistro se  $A \times V \rightarrow V$  tale che :

- $(a + b)v = av + bv$
- $a(v + w) = av + aw$
- $a(bv) = (ab)v$
- $1_A v = v$

### Definition 2.1.8: $K[G]$

Combinazioni lineari formali di elementi di  $G$  con coefficienti in  $K = \left\{ \sum_{g \in G} a_g e_g \mid a_g \in K, \text{supp}(a_g) < \infty \right\}$  con prodotto  $a_g, e_g$