Probabilità
Appunti

Giovanni Palma e Alex Basta

Contents

0.1 Es 7

Si consideri una popolazione in cui una persona su 100 abbia una certa malattia. Un test ‘e disponibile per diagnosticare tale malattia. Si supponga che il test non sia perfetto, in quanto esso risulta positivo (ovvero indica la presenza della malattia) nel 5% dei casi quando ‘e effettuato su persone sane, mentre risulta negativo (indicando l’assenza della malattia) nel 2% dei casi quando ‘e effettuato su persone malate. Si calcolino le probabilit‘a che (a) il test risulti positivo quando effettuato su una persona malata, (b) il test risulti positivo, (c) una persona sia malata se il test risulta positivo.

- b) $P(+) = P(+ \cap M) + P(+ \cap S) = P(+|M)P(M) + P(+|S)P(S)$ (Probabilita’ totali e regola catena)
- c) $P(M|+) = \frac{P(+|M)P(M)}{P(+)}$ (Bayes)

0.2 Es 5

Ci sono quattro dadi: due non truccati, i rimanenti invece sono truccati in quanto hanno tre facce che indicano il numero 6 e le altre tre il numero 5. Si lancia una moneta (non truccata). Se viene testa si lanciano i primi due dadi, mentre se viene croce si lanciano i dadi truccati. (a) Calcolare la probabilit‘a che la somma dei due dadi sia 11. (b) Sapendo di aver ottenuto un 11 lanciando i due dadi, calcolare la probabilit‘a di aver ottenuto croce lanciando la moneta.

- a) $P(S_{11}) = P(S_{11}|T)P(T) + P(S_{11}|C)P(C) = 0.5P(\{(5,6),(6,5)|T\}) + 0.5P(\{(5,6),(6,5)\})$
- b) $P(C|S_{11}) = \frac{P(S_{11}|C)P(C)}{P(S_{11})}$

0.3 Es 2

Si consideri l’esperimento di lanciare due volte un dado. (a) Determinare uno spazio di probabilit‘a che descriva l’esperimento aleatorio. (b) Si considerino i seguenti eventi: • A = “numero dispari sul primo dado”, • B = “numero dispari sul secondo dado”, • C = “la somma dei due risultati ‘e dispari”. Gli eventi A, B e C sono indipendenti? (c) Si considerino ora gli eventi: • E = “il risultato del secondo lancio ‘e 1, 2 o 5”, • F = “il risultato del secondo lancio ‘e 4, 5 o 6”, • G = “la somma dei due risultati ‘e 9”. Gli eventi E, F e G sono indipendenti?

- a) $(\Omega, P) =$
- b) Controllo che i tre siano indipendenti guardando i prodotti delle probabilita’ e vedendo se sono uguali alla probabilita’ dell’intersezione.
- c)

0.4 Es 3

I componenti prodotti da una ditta possono avere due tipi di difetti con percentuali del 3% e del 7% rispettivamente e in modo indipendente l’uno dall’altro. Qual ‘e la probabilit‘a che un componente scelto a caso (a) presenti entrambi i difetti? (b) sia difettoso? (c) presenti il primo difetto, sapendo che ‘e difettoso? (d) presenti uno solo dei difetti, sapendo che ‘e difettoso?

- a) $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2)$ (eventi indipendenti)
- b) $P(D_1 \cup D_2) = 1 - P(D_1^c \cap D_2^c) = 1 - P(D_1^c)P(D_2^c)$ (complementari di eventi indipendenti sono indipendenti)
- c) $P(D_1|D_1 \cup D_2) =$ (Bayes)
- d) $P((D_1 \cap D_2^c) \cup (D_2 \cap D_1^c)|D_1 \cup D_2)$

0.5

A = clienti insolventi verso meccanico, B = l'aereo del cliente viene distrutto dal meccanico, C = l'aereo viene distrutto non dal e quindi $P(B|A) = 1/1000$.
Quali fra A,B e C sono indipendenti?
D = l'aereo viene distrutto $= B \cup C$
$P(B|A \cap D) = \frac{P(A \cap B \cap D)}{P(A \cap D)} = \frac{P(B \cap A \cap (B \cup C))}{P(A \cap (B \cup C))}$
$P(D) = 1/10000$, dai un limite inferiore (controllo dal basso??)
$C \subseteq D = B \cup C$, quindi per monotonia $P(C) \leqslant P(D)$ quindi

$$P(B|A) + P(C) \leqslant P(B|A) + P(D) \implies \frac{P(B|A)}{P(B|A) + P(C)} \geqslant \frac{P(B|A)}{P(B|A) + P(D)}$$

0.6 Es 2.3

Nel gioco del lotto si estraggono senza reimmissione cinque numeri da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. 1) Determinare uno spazio di probabilit'a che descriva l'esperimento aleatorio. 2) Come cambia la risposta al punto precedente se le estrazioni avvengono con reimmissione?
$\Omega = \{1, ..., 90\} \times \{1, ..., 90\} \times \{1, ..., 90\}, \times \{1, ..., 90\} \times \{1, ..., 90\}$ con x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tutti distinti, quindi $|\Omega| = 90 \cdot 89 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85$
ATTENTION! Trovare gli eventi vuol dire risolvere l'esercizio! Ricorda di separare gli eventi dei sottoesperimenti:
$\forall i = 1, ..., 5, j = 1, ..., 90 \quad E_{ij}$ = "estrazione di j dall'urna all'i-esimo turno"
NON sono indipendenti, quindi per calcolare $\mathbb{P}((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))$ dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(E_{1x_1} \cap E_{2x_2} \cap E_{3x_3} \cap E_{4x_4} \cap E_{5x_5})$, usiamo la regola della catena:

$$= \mathbb{P}(E_{1x_1})\mathbb{P}(E_{2x_2}|E_{1x_1})\mathbb{P}(E_{3x_3}|E_{1x_1} \cap E_{2x_2})...\mathbb{P}(E_{5x_5}|E_{1x_1} \cap ... \cap E_{4x_4})$$

Adesso possiamo usare la probabilita' uniforme sui singoli sottoesperimenti:
$\mathbb{P}(E_{1x_1}) =$
TODO: guarda se gli eventi sono effettivamente

0.7 Es 3.1

Un'urna contiene 10 palline di cui 6 bianche e 4 rosse. Si estraggono due palline senza reimmissione. Calcolare la probabilit'a dell'evento B2 = "la seconda estratta 'e bianca"
$\Omega = \{r, b\} \times \{r, b\}$, $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10}$ usando le probabilita' totali e la probabilita' uniforme dei sottoesperimenti.