Orale Modulo 2

- Somme di Riemann e definizione di integrale. Proprietà dell'interale. Teorema della media integrale (*).

$$x_k \leq \epsilon_k \leq x_{k+1}$$

Def. $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\epsilon_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow$ somma di Riemann n-esima

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora la successione $(S_n)_n$ é convergente per $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n)_n = l \in \mathbb{R}$$

Def. $\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \to +\infty} (S_n)_n$

- se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ é l'area del sottografico
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\quad$ • $f(x) = k$, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)K$ (area rettangolo)
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ Additività
- $\int_a^b (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)dx$ Linearità

- Teo. media integrale

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\exists c \in [a,b] \,.\, f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

– Weierstrass $\Rightarrow \exists M, m \in [a,b] \,.\, \forall x \,.\, f(m) \leq f(x) \leq f(M)$

- $g_1(x) = f(m)$, $g_2(x) = f(M)$

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

$$\int_a^b g_1(x)dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g_2(x)dx \quad \text{(Monotonia)}$$

$$f(m) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(M)$$

- Per valori intermedi, $\exists c \in [m, M] \,.\, f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b] \,.\, f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

- Definizione di primitiva. Caratterizzazione delle primitive di f su un intervallo (∗).

<u>Def</u>. Primitiva

Data $f: A \to \mathbb{R}$, si chiama primitiva la funzione derivabile F t.c. $F'(x) = f(x)$

- <u>Primitive di f su un intervallo</u>

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, tutte le primitive di f differiscono di una costante

<u>Dim</u>

- Considero due primitive di f, $F, G:]a,b[\to \mathbb{R}$.

- Creo la funzione $h:]a,b[\to \mathbb{R} \,.\, h(x) = F(x) - G(x)$ e dimostro che é costante

$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

— Per corollario di Lagrange $h(x) = K$

- Funzioni integrali. Teorema fondamentale del calcolo (derivata di funzione integrale (∗). Teorema sul calcolo degli integrali definiti tramite primitive (∗). Formula di integrazione per parti (∗). Formula per la derivata di funzioni integrali del tipo $\int_c^{h(x)} f(t)dt$. Formula del cambio di variabile per integrali (∗).

Da qui in poi lavoriamo su intervalli aperti per qualche ragione

Def. Funzione integrale

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua, si chiama funzione integrabile $I_c(x)$ (con $c \in]a,b[$) $:]a,b[\to \mathbb{R}$:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

- Teo. fond. calcolo integrale

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua e la sua funzione integrale associata $I_c:]a,b[\to \mathbb{R}$, allora:

$$I_c'(x) = f(x)$$

— **Dim**

— $I_c'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\int_c^{x+h} - \int_c^x}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\int_x^{x+h}}{h}$

— Per media integrale (su dominio ristretto $[x, x+h]$), $\exists c_h \in [x, x+h] . f(c_h) = \dfrac{\int_x^{x+h}}{h}$

$$\lim_{h\to 0} f(c_h)$$

— Per caramba, per $h \to 0$ $c_h \to x$, quindi per continuità di f:

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

- Calcolo di integrali definiti

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $F:]a,b[\to \mathbb{R}$ primitiva di f, $x_1, x_2 \in A$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Dim

- Per teo. fond., I_c é una primitiva di f, quindi per la caratt. delle primitive su un intervallo
$$I_c(x) = F(x) + K$$

- Per additività

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_c^{x_2} - \int_c^{x_1} = I_c(x_2) - I_c(x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

- Integrazione per parti

$f, g: A \to \mathbb{R}$, F primitiva di f, $a, b \in A$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Dim

- Usando la formula della derivata di un prodotto di funzioni:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)g(x)\right) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

$$\left[F(x)g(x)\right]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

- Formula del cambio di variabile

$h : [\alpha, \beta] \to I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua

derivabile con h' continua

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))\, h'(t)\,dt$$

$h(t) = x$

Dim

- Prendiamo $G, H : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $G(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)\,dx$, $H(z) = \int_{\alpha}^{z} f(h(t))\, h'(t)\,dt$

e dimostriamo che sono uguali

- $G(\alpha) = H(\alpha) = 0$

- $\frac{d}{dz} G(z) = \frac{d}{dz} H(z)$

$$\frac{d}{dz} \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)\,dx = f(h(z))\, h'(z) \quad (\text{teo. fond. generalizzato})$$

- Avendo derivata uguale e un punto in comune, sono uguali!

Teo. fond. generalizzato

$$\frac{d}{dx} \int_{c}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))\, h'(x)$$

- Lo spazio $\mathbb{R}^n$. Prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$ e sue proprietà. Vettori ortogonali. Norma euclidea e sue proprietà. Formula per $\|x+y\|^2$ in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Pitagora. Normalizzato di $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Rappresentazione in coordinate polari $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times [0,2\pi[$ di un punto $(x,y) \neq (0,0)$. Scrittura del prodotto scalare in coordinate polari e disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $(*)$ in $\mathbb{R}^2$.
Distanza tra punti in $\mathbb{R}^n$. Intorni sferici (dischi) $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Successioni in $\mathbb{R}^n$. Successioni

- Prodotto scalare euclideo ($\mathbb{R}^n$)

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ • $\langle x, x \rangle \geq 0$ $(=0 \iff x = \underline{0})$
- $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z \rangle = \lambda_1 \langle x, z \rangle + \lambda_2 \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ • $\langle x, 0 \rangle = 0$

- Vettori ortogonali

x e y sono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

$\downarrow$

$\theta = 90°$

$(\text{se } x \text{ e } y \neq \underline{0})$

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta$$

- Norma euclidea

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$\|x\| \geq 0$ $(=0 \quad x = \underline{0})$ $\quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dim

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\| \qquad \left(\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\right)$$

- Normalizzato

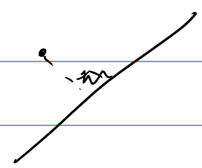
$$x \in \mathbb{R}^n \qquad \bar{x} = \frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|}\right)$$

$$\|x\|(\cos\theta, \sin\theta) \qquad \langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \langle(\cos\theta, \sin\theta), (\cos\gamma, \sin\gamma)\rangle$$

$$= \|x\|\|y\| \cos(\theta-\gamma)$$

- Distanza punti

$$\|x-y\|$$



$$v \frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|^2}$$

$$\{vt \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \|x - vt\| = \sqrt{\langle x-vt, x-vt\rangle}$$

x

$$\|x-vt\|^2 = \|x\|^2 + \|vt\|^2 - 2\langle x, vt\rangle$$

$$= \|x\|^2 + t^2\|v\|^2 - 2t\langle x,v\rangle \qquad \|v\|^2 t - 2\langle x,v\rangle \qquad \frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|^2}$$

$$\|v\|^2 t - \langle x,v\rangle$$

$\searrow \quad \phi \quad \nearrow$

$- \qquad +$

$$\sqrt{\|x\|^2 + \|v\|^2 \frac{\langle x,v\rangle^2}{\|v\|^4} - 2\left\langle x, v\frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|^2}\right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\frac{\|x\|^2\|v\|^2 + \langle x,v\rangle^2 - 2\langle x,v\rangle^2}{\|v\|^2}} = \frac{\sqrt{\|x\|^2\|v\|^2 - \langle x,v\rangle^2}}{\|v\|}$$

$$\left\langle \left(x - v\frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|^2}\right), v \right\rangle = \langle x,v\rangle - \frac{\langle x,v\rangle}{\cancel{\|v\|^2}}\cancel{\|v\|^2} = 0$$

- Intorno sferico

Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$, $B(\bar{x}, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - \bar{x}\| < r \}$

- Successioni in $\mathbb{R}^n$

$h_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $h_k = (h^1_k, h^2_k, h^3_k \dots h^n_k)$

$\forall k \in \mathbb{N}.\ h_k \in \mathbb{R}^n$

$$h_k \xrightarrow{k\to+\infty} \bar{x} \iff \begin{cases} h^1_k \to \bar{x}_1 \\ \vdots \\ h^n_k \to \bar{x}_n \end{cases}$$

$$\lim_{k\to+\infty} h_k = \bar{x} \iff \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\|h_k - \bar{x}\|}_{\text{una dimensione}} = 0$$

- A é un insieme aperto se $\forall x \in A . \exists r > 0 . B(x, r) \subseteq A$

- B é un insieme chiuso se $D(B) \subseteq B$

- Continuitá

$(A \subseteq \mathbb{R}^n)$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ é continua se $\forall x \in A . \forall (h_K)_K \subseteq A . \forall K \in \mathbb{N} . h_K \neq x . h_K \xrightarrow{K \to +\infty} x .$

$$\lim_{K \to +\infty} f(h_K) = f(x)$$

- Derivate parziali di $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ insieme aperto. Esempio di funzione discontinua in $(0,0)$ ma con derivate parziali in $(0,0)$ $(*)$. Definizione di funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in A \subset \mathbb{R}^2$. Formula di Taylor ordine 1. Teorema sulla differenziabilità delle funzioni con derivate parziali continue $(*)$. Derivate direzionali. Teorema sul calcolo delle derivate direzionali per funzioni differenziabili $(*)$. Individuazione della direzione di massima crescita per una funzione $(*)$.

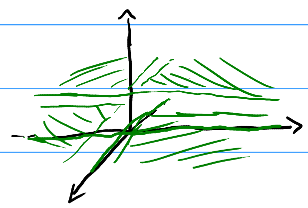
- Derivate parziali

$f : A \to \mathbb{R}$, A aperto $\subset \mathbb{R}^2$, é derivabile (parzialmente) se $\forall (x,y) \in A$:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Es. $f(x,y) = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$



$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to +\infty} (0,0)$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} 2 \neq 0$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

- Differenziabile

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice differenziabile se dato $x_0 \in A$:

$\forall x \in A$.

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle}^{\text{piano tg.}} + \overset{\text{per } x \to x_0}{o}(|x - x_0|)$$

$\forall h \in A$.

$$\left(f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \overset{\text{per } h \to 0}{o}(|h|) \right)$$

• Derivate parziali continue $\Rightarrow$ differenziabilità

$$- \underbrace{f(x+h, y+k) - f(x,y)}_{} = \langle \nabla f(x,y), (h,k) \rangle + o(|h,k|)$$

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) + f(x+h, y) - f(x,y) = (\cdot)$$

- Per Lagrange in $\mathbb{R}^2$, $\exists\, \theta, \bar{\theta} \in]0,1[$.

$$= \frac{\partial}{\partial y} f(x+h, y+\theta k)\, k + \frac{\partial}{\partial x} f(x + \bar{\theta} h, y)\, h$$

- Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\left| k \left(\partial_y f(x+h, y+\theta k) - \partial_y f(x,y) \right) + h \left(\partial_x f(x+\bar{\theta} h, y) - \partial_x f(x,y) \right) \right|}{\| (h,k) \|} = 0$$

$\leq \left(\partial_y f(x+h, y \; - \; \ldots \; \right)$ per continuità ∂_y, ∂_x
$\to 0$!

Quindi per teo. carramba vero!

- Derivate direzionali

$$f: A \to \mathbb{R}, \; A \subset \mathbb{R}^2, \; (x,y) \in A, \; v \in \mathbb{R}^2 . \|v\| = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} (x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x,y)+hv) - f(x,y)}{h}$$

- Data $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile, $(x,y) \in A$, $v \in \mathbb{R}^2 . \|v\| = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v \rangle$$

$$\left(f((x,y)+(h,k)) - f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), (h,k) \rangle + o(|h,k|) \right)$$

$$- \lim_{h \to 0} \frac{f((x,y) + hv) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\langle \nabla f(x,y), hv \rangle + o(|hv|)}{h} =$$

$$= \langle \nabla f(x,y), v \rangle + \lim_{h \to 0} \frac{o(|h|)}{h} = \langle \quad \rangle$$

- Direzione massima crescita

$(A \in \mathbb{R}^2)$ $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile, $(x,y) \in A$, dobbiamo trovare $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 . |\bar{v}| = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(x,y) \geq \frac{\partial f}{\partial v}(x,y) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 . \|v\| = 1$$

$$|\langle \nabla f(x,y), \bar{v} \rangle| \leq \|\nabla f(x,y)\| \, \underbrace{\|\bar{v}\|}_{}^{1} \leq \|\nabla f(x,y)\|$$

$$|\langle \nabla f(x,y), \bar{v} \rangle| \overset{?}{=} \|\nabla f(x,y)\|$$

$$r \cos(\theta - \gamma) = r$$

- Curve in $\mathbb{R}^n$. Velocità di una curva. Formula di Taylor. Formula per la derivata di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lungo una curva $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (*).

Def. $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é una curva, e si ha che:

$$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Def. Velocitá curva

La velocitá di una curva é la sua derivata, ovvero:

$$\vec{r}\,'(t) = (r_1'(t), r_2'(t), \ldots, r_n'(t))$$

Def. Taylor di una curva

$$\vec{r}(\quad) = \vec{r}(x_0) + \vec{r}\,'(x_0)\, h + o(h)$$

- Derivata di una funzione lungo una curva

$(A \subset \mathbb{R}^n)$ $(I \subset \mathbb{R})$

$f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile, $\vec{r}: I \to A$ derivabile, $(f \circ r): I \to \mathbb{R}$ ha derivata:

$$\frac{d}{dx}(f \circ r)(x) = \langle \nabla f(r(x)), r'(x) \rangle$$

Dim

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ r)(x+h) - (f \circ r)(x)}{h} = \langle \nabla f(r(x)), r'(x) \rangle$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(r(x+h)) - f(r(x))}{x} = (\cdot)$$

$$f(r(x+h)) = f(r(x)) + \langle \nabla f(r(x)), r(x+h) - r(x) \rangle + \sigma(\| r(x+h) - r(x) \|)$$

$$(\cdot) \lim_{h \to 0} \frac{\langle \nabla f(r(x)), r(x+h) - r(x) \rangle + \sigma(\| r(x+h) - r(x) \|)}{h} = (*)$$

$$r(x+h) = r(x) + r'(x)h + \sigma(h)$$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h}{h} \langle \nabla f(r(x)), r'(x) \rangle + \langle \nabla f(r(x)), \frac{\sigma(h)}{h} \rangle + \frac{\sigma(\| r'(x)h + \sigma(h) \|)}{h} \right) =$$

$$\langle \nabla f(r(x)), r'(x) \rangle + \lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h}$$

- Derivate seconde. Teorema di Schwarz. Matrice Hessiana. Formula di Taylor di ordine 2 con resto di Lagrange: caso $n = 1$ (solo enunciato). Passaggio da $n = 1$ a $n > 1$ (*). Forme quadratiche e matrici associate. Forme positive, negative e indefinite. Classificazione delle forme quadratiche 2×2. (*). Teorema di classificazione dei punti di massimo e di minimo: caso di matrice Hessiana non degenere, dimostrazione per il caso del minimo (*).

– Derivate seconde

Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ aperto) differenziabile è derivabile due volte su un punto $(x,y) \in A$ se

$\exists$

– Shwarz

Se esiste almeno un intorno di un punto (x,y) t.c. le derivate seconde sono continue, allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

– Taylor (Lagrange) $n=1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists\, \theta \in]0,1[$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0+\theta h)h^2$$

$$\exists\, c \in]x_0, x_0+h[\,.\, \frac{1}{2} f''(c) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2}$$

- Taylor (Lagrange) $n>1$:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che ha derivate seconde continue $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.
$\exists \theta \in]0,1[$.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2}\langle H_{f(x_0+\theta h)} h, h \rangle$$

Dim

- Dobbiamo ridurci ad una funzione in una dim.

$\vec{v}(t) = (x_{0_1}+th_1, x_{0_2}+th_2)$

$$g(t) = f(x_0+th) = f(x_{0_1}+th_1, x_{0_2}+th_2)$$

- Scriviamo Taylor (Lag.) di $g(t)$ in $t_0=0$ e $h=1$
$\exists \theta \in]0,1[$.

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$$

$$g(1) = f(x_0+h) \qquad g(0) = f(x_0)$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ v)(t) = \langle \nabla f(x_0+th), h \rangle = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x_0+th) h_k$$

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x_0+th) h_k = \sum_{j,k=1}^{n} \partial_k \partial_j f(x_0+th) h_k h_j$$

$$= \langle H_{f(x_0+th)} h, h \rangle$$

$$g'(0) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle \qquad g''(\theta) = \langle H_{f(x_0+\theta h)} h, h \rangle$$

- Classificazione delle forme quadratiche

- $\det A < 0$ indeterminato
- $\det A > 0$ e $a > 0$ positivo
- $\det A > 0$ e $a < 0$ negativo

② $\forall x \in \mathbb{R}^2.$ $a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 > 0$

$\det A > 0$ $\quad a > 0 \quad a x_1^2 + c x_2^2 > -2b x_1 x_2$

- if $x_2 = 0$

$$a x_1^2 > 0 \quad \forall x_1 \neq 0 \ (a > 0)$$

- if $x_2 \neq 0$

$\frac{x_1}{x_2} = \cancel{t}$

$$x_2^2 \left(a \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + 2b \frac{x_1}{x_2} + c \right) > 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = b^2 - ac = -(ac - b^2) = -\det A < 0$$

sempre > 0

- Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivate seconde continue e un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\nabla f(x_0) = \underline{0}$:

- $H_f(x_0) > 0 \implies x_0$ é MINIMO

- **Dim** $\quad H_f(x_0) > 0 \qquad \nabla f(x_0) = 0$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2} \langle H_{f(x_0+h)} h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

D.d. $\exists \delta > 0 .\ \forall h \in \mathbb{R}^2 .\ \|h\| < \delta .\ f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$

$$\frac{1}{2} \langle H_{f(x_0+h)} h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq 0$$

- Per lemma $\exists \lambda > 0$.

$$\langle H_{f(x_0+h)} h, h \rangle + o(\|h\|) \geq \lambda \|h\|^2 + o(\|h\|^2)$$

$$\|h\|^2 \left(\lambda + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^2 .\ \|h\| < \delta$$

$$\left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| < \frac{\lambda}{2}$$

$$> \|h\|^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \geq 0 \qquad -\frac{\lambda}{2} < \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} < \frac{\lambda}{2}$$