Algebra e Geometria
Appunti

Alex Bastianini

Contents

Chapter 1

Sistemi lineari

1.1 Equazione lineare

Definition 1.1.1: Equazione lineare

Un' **equazione lineare** in n incognite e' un'equazione di tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

dove $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ sono i coefficenti e $x_1, ..., x_n$ sono le incognite (tutte di primo grado).
Una **soluzione** e' una n-upla ordinata $(c_1, ..., c_n)$ che sostituita alle incognite rende vera l'equazione.

1.2 Sistema lineare

Definition 1.2.1: Sistema lineare

Un sistema lineare e' un insieme di equazioni lineari che devono valere contemporaneamente.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_2 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_3 \end{cases}$$

Si chiama soluzione del sistema ogni n-upla $(c_1, ..., c_n)$ che e' soluzione di ogni equazione del sistema. Un sistema e' **compatibile** se ammette almeno una soluzione.
Il sistema si dice **omogeneo** se $\forall i \in [1, n] \to b_i = 0$, in questo caso esiste per forza la soluzione x = (0, 0,...,0).

Chapter 2

Matrici

Definition 2.0.1: Matrice

Una **matrice** A con m righe e n colonne e' una tabella (di numeri reali) dove a_{ij} e' il coefficente di posto (i,j) della matrice A.

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

L'insieme delle matrici di m righe e n colonne si indica con $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Una matrice e' **quadrata** quando m = n. La **trasposta** di una matrice A $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ e' la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne ($a_{ij}^T = a_{ji}$).

Due matrici A e B sono uguali sse $\forall i, j. a_{ij} = b_{ij}$.
Una riga di una matrice $A_{m\times n}$ puo' essere vista come una matrice $1 \times n$, mentre una colonna puo' essere vista come una matrice $m \times 1$.

2.1 Prodotti

Definition 2.1.1: Prodotto riga-colonna

Date una riga $1 \times n$ e una colonna $n \times 1$ aventi la stesssa lungezza, il loro prodotto e':

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \in \mathbb{R}$$

Definition 2.1.2: Prodotto di due matrici

Date due matrici $A \in M_{m\times k}$ e $B \in M_{k\times n}$, il loro prodotto e' una matrice $C \in M_{m\times n}$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ b_{12} & ... & b_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & ... & c_{mn} \end{pmatrix} = C \in M_{m\times n}$$

Ogni elemento di C e' definito come segue:

$$c_{ij} = (\text{riga i di A}) \cdot (\text{colonna j di B})$$

Il prodotto BA non e' definito se non sono matrici quadrate, quindi **il prodotto non e' commutativo**.

Example 2.1.1 (Prodotto fra matrici)

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -9 & 5 & -8 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{undefined}$$

2.2 Somma

Definition 2.2.1: Somma

Possiamo sommare due matrici A e B solo se hanno la stessa forma ($A, B \in M_{m\times n}$).

$$A + B = C \iff \forall c_{ij} = aij + bij$$

Example 2.2.1 (Somma di matrici)

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{undefined}$$

2.3 Proprieta'

- (A+B)C = AC+BC (distributiva)
- C(A+B) = CA+CB
- $(AB)^T = B^T A^T$
- (AB)C = A(BC)

2.4 Soluzioni di sistemi lineari

E' possibile rappresentare un sistema lineare usando il prodotto di due matrici:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_2 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longrightarrow A\underline{x} = \underline{b}$$

La matrice A si dice **incompleta**, mentre con $A|b$ si indica la matrice **completa**.

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Una matrice si dice a **scala** se:

- Le righe vuote (dove tutti gli elementi sono 0) si trovano in fondo.
- Il primo elemento diverso da 0 di ogni riga (detto **pivot**) si trova piu' a destra della riga sovrastante.

Example 2.4.1 (Matrici a scala)

1. La seguente matrice e' a scala (i pivot sono sottolineati):

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & 5 & 6 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Data una matrice A a scala, si chiama **rango righe** di A (rr(A)) il numero di righe non nulle di A. Nell'esempio 2.4 il rango righe della matrice e' 3.

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare a scala con incognite $x_1, \dots, x_n$:

- il sistema ha soluzioni $\iff rr(A) = rr(A|b)$
- se $rr(A) = rr(A|b) = n \implies$ esiste una sola soluzione
- se $rr(A) = rr(A|b) = k, k < n \implies$ esistono infinite soluzioni che dipendono da n-k parametri

Example 2.4.2 (Numero di soluzioni)

1. $$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   $rr(A) = 1 \neq rr(A|b) = 2$, quindi non ci sono soluzioni.

2. $$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   $rr(A) = rr(A|b) = 2 = n$, quindi esiste una sola soluzione.

3. $$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

   $rr(A) = rr(A|b) = 1 < n = 2$, quindi esistono infinite soluzioni dipendenti da 2-1=1 parametri.

2.5 Algoritmo di Gauss

Definition 2.5.1: Equivalenza fra sistemi lineari

Due sistemi lineari si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Per risolvere un sistema lineare A$\underline{x}$=$\underline{b}$, lo trasformiamo in un sistema **equivalente** A'x=b' tale che A'x=b' sia a scala. Guardiamo prima le operazioni che modificano i sistemi lineari senza cambiare il risultato finale:

- Scambio di due equazioni.
- Moltiplicazione di una equazione per un numero reale $c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$.
- Sostituzione della equazione j-esima con la somma della equazione j-esima piu' l'equazione i-esima moltiplicata per $a \in \mathbb{R}$.

A queste operazioni corrispondono delle **operazioni elementari** sulle righe (lavorando quindi sulle matrici):

Definition 2.5.2: Operazioni elementari

Sono le seguenti operazioni fra le righe di una matrice:

- Scambio di due righe $R_i \leftrightarrow R_j$.
- Moltiplicazione di una riga per $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ $R_i \longrightarrow cR_i$.
- $R_j \longrightarrow R_j + aR_i, a \in \mathbb{R}$.

Tramite l'algoritmo di Gauss, possiamo trasformare una matrice in una matrice a scala per righe.

Definition 2.5.3: Algoritmo di Gauss

Guardare su virtuale...

Note:

La matrice a scala non e' univocamente determinata. Quindi partendo da una stessa matrice possiamo ottenere diverse matrici a scala equivalenti.

Chapter 3

Spazi vettoriali

3.1 Introduzione

Definition 3.1.1: Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale su un **campo** F (per noi sempre $\mathbb{R}$) e' una struttura algebrica $(V, F, +, \cdot)$ dove V e' un insieme per cui e' definita una somma $(\forall v, u \in V . \exists s \in V . s = v + u)$ e un prodotto per numeri **scalari** $(\forall v \in V, \forall \lambda \in F . \exists u \in V . u = \lambda \cdot v)$ dove valgono le seguenti proprieta':

1. Somma
   - Commutativa
   - Associativa
   - Esistenza elemento **neutro**: $\exists \underline{0} \in V . \forall v \in V . v + \underline{0} = v$
   - Esistenza elemento **opposto**: $\forall v \in V . \exists -v \in V . v + (-v) = \underline{0}$

   Si nota che per tali proprieta' (V,+) forma un **gruppo abeliano**.

2. Prodotto
   - Distributiva a destra: $\forall v, u \in V, \forall \lambda \in F . \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$
   - Distributiva a sinistra: $\forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in F . (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
   - Associativa: $\forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in F . (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
   - Esistenza elemento **neutro**: $\exists 1 \in F . \forall v \in V . 1 \cdot v = v$

Dalla definizione di spazio vettoriale seguono altre proprieta' interessanti:

- Il vettore nullo $\underline{0}$ e' **unico**
- Per ogni vettore v il suo opposto $-v$ e' **unico**
- L'elemento neutro della somma del campo F ha la proprieta' **assorbitiva** rispetto al prodotto scalare: $\forall v \in V . 0v = \underline{0}$
- Legge di cancellazione del prodotto: $\forall v \in V, \forall \lambda \in F . \lambda v = 0 \iff v = \underline{0} \lor \lambda = 0$
- $\forall v \in V, \forall \lambda \in F . (-\lambda)v = \lambda(-v) = -\lambda v$

Note:

Un insieme contenente solo il vettore nullo e' uno spazio vettoriale, e viene chiamato **banale**:

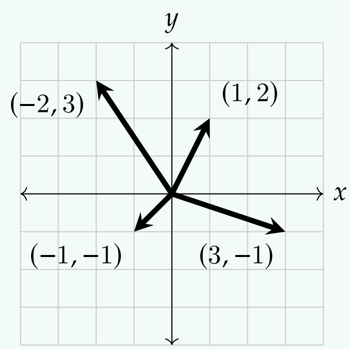
$$V = \{\underline{0}\} \implies \text{Spazio vettoriale banale}$$

Example 3.1.1 (Spazio vettoriale)

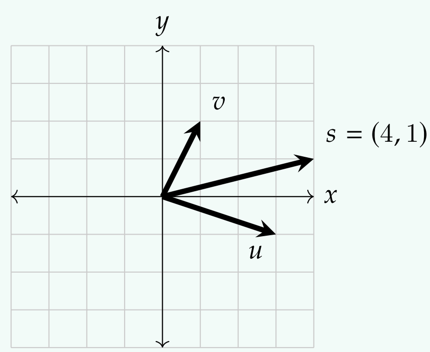
Dimostriamo che $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ e' uno spazio vettoriale, dove $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$:

- Si puo' dimostrare che valgono la prop. comm. e ass. della somma
- Si puo' dimostrare che valgono la prop. ass. e distr. del prodotto scalare
- L'elemento neutro della somma e' il vettore $v = (0, 0)$, e ogni vettore (x,y) ha il suo opposto (-x,-y)
- L'elemento neutro del prodotto e' lo scalare 1

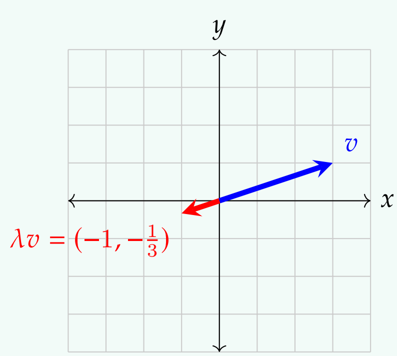
Si nota che esiste una corrispondenza biunivoca fra i vettori di $\mathbb{R}^2$ e i punti del piano cartesiano, quindi ogni vettore puo' essere rappresentato come una "freccia" che parte dall'origine (il vettore nullo) e arriva al punto cartesiano corrispondente:



Esempio di somma di due vettori $v = (1, 2)$ e $u = (3, -1)$:



Esempio di prodotto scalare λv, dove $\lambda = -\frac{1}{3}, v = (3, 1)$:



3.2 Sottospazi

Definition 3.2.1: Sottospazio

V sp. vett., $U \subseteq V$ di dice **sottospazio** se:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in U . a + b \in U$(chiusura rispetto alla somma)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in U . \lambda v \in U$(chiusura rispetto al prodotto per scalari)

Note:

Sia $U \leqslant V$ (U sottospazio V), per la proprieta' 3 si ha che ogni sottospazio contiene il vettore nullo $\underline{0}$, perche' $\forall v \in U . 0v = \underline{0}$, quindi:

1. $U = \{\underline{0}\}$ (sottospazio banale),
2. oppure $U \neq \{\underline{0}\}$, allora $\exists u \in V \neq \underline{0}$, ed esistono anche tutti i **multipli** di u (che sono infiniti).

(Da notare la somiglianza con i sistemi lineari: se ci sono "soluzioni" o ce ne' una, o ce ne sono infinite)

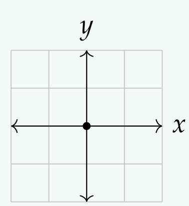
3.2.1 Sottospazi di $\mathbb{R}^2$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e' in corrispondenza diretta con i punti del piano cartesiano.
Sia $U \leqslant \mathbb{R}^2$, si ha che:

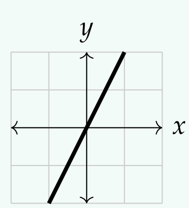
- $U = \{(0,0)\}$, oppure
- $\exists u \in U . u \neq \underline{0}$, e di conseguenza tutti i suoi multipli, ovvero la **retta** r_u passante per l'origine.
- $\exists v \in U$ con $v \notin r_u$, quindi esistono anche tutti i punti ottenuti sommando punti di r_u e r_v e le rette passanti per questi punti e l'origine, che si puo' dimostrare che occupano tutto il piano $\mathbb{R}^2$.

Example 3.2.1 (Possibili sottospazi di $\mathbb{R}^2$)

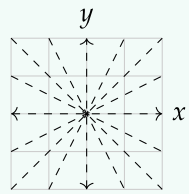
1. $U = \{\underline{0}\}$:



2. $U = \{(0,0), (1,2), (2,4), (-1,-2), ...\}$, ovvero $U = \{(\lambda 1, \lambda 2) | \lambda \in \mathbb{R}\} = r_v$:



3. Se aggiungiamo il vettore $u = (1, 1) \notin r_v$ a U, $U = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$:



3.3 Combinazioni lineari e generatori

Definition 3.3.1: Combinazione lineare

V SV con $v_1, ..., v_n \in V$. $v \in V$ si dice **combinazione lineare** di $v_1, ..., v_n$ se esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$. Quindi:

$$v \in < v_1, ..., v_n >= \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n | \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\} \text{ (Insieme di combinazioni lineari di } v_1, ..., v_n)$$

Proposition 3.3.1

Sia V SV e $\{v_1, ..., v_n\} \in V$, allora:

$$< v_1, ..., v_n > \leqslant V$$

Inoltre, se $Z \leqslant V \wedge v_1, ..., v_n \in Z$, allora:

$$< v_1, ..., v_n > \leqslant Z$$

Cio' significa che l'insieme di combinazioni di **qualunque** sotto-insieme di vettori di uno spazio vettoriale e' un sottospazio vettoriale. Inoltre tale sotto-spazio e' il piu' piccolo contenente i vettori del sotto-insieme.

Definition 3.3.2: Generatore

Dati V SV e $v_1, ..., v_n \in V$, si dice che $v_1, ..., v_n$ **generano** V se $V =< v_1, ..., v_n >$

Example 3.3.1 (Generatore $\mathbb{R}^3$)

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ generano $\mathbb{R}^3$, cioe' $\mathbb{R}^3 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ che ovviamente si puo' fare.

Proposition 3.3.2

Dati V SV e $v_1, ..., v_n, v \in V$:

$$v \text{ e' } \textit{combinazione lineare} \text{ di } v_1, ..., v_n \iff < v_1, ..., v_n >=< v_1, ..., v_n, v >$$

3.4 Vettori linearmente indipendenti

Definition 3.4.1

Dati V SV e $v_1, ...v_n \in V$, $v_1, ..., v_n$ si dicono **linearmente indipendenti** sse l'**unica** loro combinazione lineare che da il vettore nullo e' quella con scalari tutti uguali a 0, cioe' se vale:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1, ..., \lambda_n = 0$$

Proposition 3.4.1

Se S e' un insieme di vettori linearmente indipendenti, ogni suo sotto-insieme e' ancora linearmente indipendente. (L'insieme vuoto e' linearmente indipendente)

Proposition 3.4.2

Dati V SP e $v_1, ..., v_n \in V$, $v_1, ..., v_n$ sono **linearmente dipendenti** sse uno di essi e' combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: Dimostro entrambe le direzioni:

- $\Rightarrow$ Sapendo che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti (H1), devo dimostrare che $\exists r \in [1, n].v_r \in < v_1, ..., v_n > \backslash v_r$. Da H1, sappiamo che $\exists \lambda_r \neq 0.\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$, quindi $v_r = -\frac{1}{\lambda_r}(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n)$. Allora v_r e' combinazione lineare degli altri.
- $\Leftarrow$ Sapendo che $v_r \in < v_1, ..., v_n > \backslash v_r$ (H1), devo dimostrare che $v_1, ..., v_n$ sono linearemente dipendenti. Per H1 $v_r = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, quindi $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + (-1)v_r = 0$. Cio' dimostra che una combinazione lineare di $v_1, ...v_n$ e' risultata 0 quando uno dei fattori scalari era diverso da 0 (-1), quindi $v_1, ...v_n$ sono linearmente dipendenti.

☺

Corollary 3.4.1

Due vettori sono lin dip $\iff$ unodi essi e' multiplo dell'altro

Example 3.4.1

(a, b, c) e (d, e, f) sono linearmente dipendenti solo se (con $\lambda, \mu \neq 0$):

- $(a, b, c) = \lambda(d, e, f) = (\lambda d, \lambda e, \lambda f)$
- $(d, e, f) = \mu(a, b, c) = (\mu a, \mu b, \mu c)$

Ma se vale il primo allora $\mu = \frac{1}{\lambda}$, quindi i due vettori sono multipli.

Proposition 3.4.3

L'insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo e' sempre un sottospazio.

Example 3.4.2

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha sempre almeno una soluzione (il vettore nullo $\underline{0}$).

Proposition 3.4.4

Sia $V =< v_1, ..., v_n > \neq \{\underline{0}\}$. Allora esiste un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti di $\{v_1, ..., v_n\}$ che genera V.

Dimostrazione: Dimostriamo in modo algoritmico:

1. Se $v_1, ..., v_n$ sono lin. ind., allora la prop. e' dimostrata.
2. Altrimenti, per il teo. 3.4, esiste un vettore $v_r \in \{v_1, ..., v_n\}$ tale che questo e' combinazione lineare degli altri. Rimuoviamo quindi tale vettore dai generatori, e per 3.3 $< v_1, ..., v_n >=< v_1, ..., v_n > \backslash v_r = V$. Tornare quindi al passo 1.

Dopo un numero finito di passi (fino al massimo ad avere solo un elemento), si arriva a un insieme di vettori dove nessuno e' combinazione lineare degli altri, quindi per 3.4 si ha un insieme di vettori lin. ind. che generano V. 😊

Definition 3.4.2: Base

Un insieme di vettori $v_1, ..., v_n$ si dice **base** di V se:

1. $v_1, ..., v_n$ generano V, quindi $V =< v_1, ..., v_n >$
2. $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti

Example 3.4.3

1. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e' base di $\mathbb{R}^2$:
   (a) vera (gia visto)
   (b) sono le righe non nulle di una matrice a scala
2. $\{(1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ non sono una base:
   (a) generano $\mathbb{R}^2$
   (b) pero' non sono indipendenti ($(1, 2)$ e' comb. lin. degli altri)
3. $\{(1, 2, 0), (0, 5, 0)\}$:
   (a) sono linearmente indipendenti (non sono uno il multiplo dell'altro)
   (b) ma non generano $\mathbb{R}^3$, perche' due vettori individuano solo un piano

Definition 3.4.3

Un SV si dice finitamente generato se ha un insieme finito di generatori.
Cioe' se esistono $v_1, ..., v_n \in V.V =< v_1, ..., v_n >$.

Example 3.4.4

1. $\mathbb{R}^n$ e' finitamente generato: $\mathbb{R}^n =< (1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) >$
2. $\mathbb{R}[x]$ (polinomi) non e' finitamente generato (non c'e' un numero finito di polinomi che puo' generare ogni polinomio di ogni grado)

Proposition 3.4.5

Sia V SV f.g. (finitamente generato), allora V ha una base.
Nota: se $V = \{\underline{0}\}$, allora V ha base $\emptyset$ (e non $\{\underline{0}\}$ perche' la dimensione di V e' 0, quindi per convenzione anche la sua base deve avere 0 vettori).

Dimostrazione: Sia $V =< v_1, ..., v_n >$, per 3.4 esiste un sottoinsieme di $\{v_1, ..., v_n\}$ linearmente indipendente che genera V, quindi per def. base esiste una base di V. 😊

Note:

Una base si ottiene cancellando i generatori superflui (combinazioni lineari degli altri)

Definition 3.4.4: Basi canoniche

Sono le basi "belle" per ogni SV:

1. $\mathbb{R}^n, B = \{(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,...,1)\}$
2. $\mathbb{R}_n[x]$ (polinomi di grado max. n), $B = \{x^n,...,x,1\}$
3. $M_{m\times n}$

Theorem 3.4.1 Completamento

Sia V SV f.g. e $B = \{w_1,...,w_n\}$ base di V. Siano $\{v_1,...,v_m\} \in V$ lin. indip:

- $m \leqslant n$
- possiamo aggiungere a $v_1,...,v_m$ $m-n$ vettori di B in modo da ottenere una base

Corollary 3.4.2

Se V f.g. allora due basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

: Siano B_1, B_2 basi di V. $B_1 = \{v_1,...,v_n\}$ e $B_2 = \{w_1,...,w_k\}$. Prendiamo come base di V $B = B_1$ e vediamo B_2 semplicemente come un insieme di vettori lin. ind., quindi per il teo. di compl. abbiamo che $k \leqslant n$. Ripetendo questo passaggio invertendo B_1 e B_2, otteniamo $n \leqslant k$. Allora per soddisfare entrambe le ipotesi abbiamo che n = k. 😊

Definition 3.4.5: Dimensione dello SV

La dimensione di uno spazio vettoriale e' il numero di vettori in una base.

Example 3.4.5

- $dim\mathbb{R}^n = n$
- $dim\mathbb{R}_n[x] = n+1$
- $dimM_{m\times n} = m \times n$

Definition 3.4.6: Massimale e minimale

Un insieme S si dice **massimale** (**minimale**) con la proprieta $\mathcal{P}$ su S se S ha $\mathcal{P}$ e ogni sovrainsieme (sottoinsieme) proprio di S non ha (piu') $\mathcal{P}$.

Proprieta' equivalenti:

- $\{v_1,...,v_n\}$ e' base $\iff$ e' un insieme minimale di generatori
- $\{v_1,...,v_n\}$ e' base $\iff$ e' un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

Proposition 3.4.6

Sia V SV e $W \leqslant V$:

- $dimW \leqslant dimV$
- $dimW = dimV \implies V = W$

: 1. Sia $\{w_1,...,w_k\}$ una base di W, $w_1,...,w_k$ sono k vettori di V lin. ind., quindi per il teo. compl $k \leqslant dimV$.

2. Se $k = dimV$, per il teo. compl., aggiungedo a $\{w_1, ..., w_k\}$(lin. ind.)0 vettori allora diventa base di V. Allora e' gia base di V.

😊

Proposition 3.4.7 GEL (Generare equivale a indipendenza lineare)

Sia V SV di dim n, allora sono equivalenti (se vale uno valgono tutti):

1. $\{v_1, ..., v_n\}$ e' base di V
2. $\{v_1, ..., v_n\}$ sono lin. ind.
3. $\{v_1, ..., v_n\}$ generano V

: E' ovvio che 1 $\implies$ 2 e 1 $\implies$ 3.
2 $\implies$ 1 Per teo. compl., dato che $v_1, ..., v_n$ sono lin. ind., posso aggiungere $dimV - n = 0$ vettori per ottenere una base, quindi sono gia una base.
3 $\implies$ 2 Se $v_1, ..., v_n$ fossero dipendenti, potrei cancellarne qualcuno e ottenerne una base di meno di n elementi. Ma questo e' assurdo perche' tutte le basi di V hanno n elementi. Quindi sono lin. ind. 😊

Example 3.4.6

Per controllare che $\{2x, 5, x^2\}$ sono una base di $R_2[x]$, basta dimostrare che siano lin. ind. (dato che $3 = dimR_2[x]$)

Proposition 3.4.8

Sia $B = \{v_1, ..., v_n\}$ base ordinata di V SV e $v \in V$, allora esistono **unici** $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tale che:

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

: Dato che B e' un insieme di generatori (per def. base), si ha che per def. generatori $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n$ tali che:

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

Dimostriamo ora l'unicita' prendendo $\mu_1, ..., \mu_n$ per cui:

$$v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

Sottraiamo a questa uguaglianza v a sinistra e $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ a destra (possiamo farlo perche' abbiamo dimostrato che sono uguali) e otteniamo:

$$0 = (\mu_1 - \lambda_1)v_1 + ... + (\mu_n - \lambda_n)v_n$$

Dato che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, una loro combinazione lineare e' 0 sse $(\mu_1 - \lambda_1) = ... = (\mu_n - \lambda_n) = 0$. Quindi abbiamo che $\mu_1 = \lambda_1, ..., \mu_n = \lambda_n$, e quindi abbiamo dimostrato l'unicita. 😊

Definition 3.4.7

Gli scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}.v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ si dicono le **coordinate** di V rispetto alla base β, e si scrive:

$$(v)_\beta = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

3.5 Algotirmo di Gauss Diretto

Possibile grazie a due teoremi:

Theorem 3.5.1

Le operazioni elementari sulle righe di una matrcie non cambiano il sottospazio generato dalle righe stesse.

Dimostrazione: Mostriamo per ogni operazione elementare come non cambia il sottospazio generato dalle sue righe:

- $R_i \leftrightarrow R_j$ ovvio
- $R_i \leftrightarrow \lambda R_i$ ovvio
- $R_i \leftrightarrow R_i + \lambda R_j$ vero per prop. 3.3

😄

Theorem 3.5.2

Le righe non nulle di una matrice a scala sono linearmente indipendenti.

Ci permette di trovare una base del sottospazio generato da alcunni vettori di $\mathbb{R}^n$

Example 3.5.1

Sia $W =< (1, 1, 3, 0), (2, 2, 5, 1), (1, 1, 4, -1) >\leqslant \mathbb{R}^4$, trovare una base di W.

- Costruiamo una matrice che ha per righe i tre vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Usiamo l'algoritmo di Gauss per ridurre la matrice in scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dato che abbiamo usato solo operazioni lineari, per prop. a $< (1, 1, 3, 0), (0, 0, -1, 1) >=< (1, 1, 3, 0), (2, 2, 5, 1), (1, 1, 4, -1) >$. Inoltre, per prop. b sappiamo che i due vettori nuovi sono lin. ind., quindi $< (1, 1, 3, 0), (0, 0, -1, 1) >$ e' una base (quindi $dimW = 2$)

Chapter 4

Applicazioni lineari

4.1 Cos'e' una applicazione lineare

Definition 4.1.1: Applicazione lineare

Siano V, W SV, $f : V \to W$ si dice **applicazione lineare** sse:

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- $f(0_V) = 0_W$

Morfismo di gruppi addittivi

Example 4.1.1

1. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\text{derivabili}\}, W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$:

$$DV \to W$$

$$f \to Df = f'$$

   - $D(f_1 + f_2) = Df_1 + Df_2$ ok
   - $D(\lambda f) = \lambda D(f)$ ok

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(x_1, x_2) \to (x_1, 2x_2, -x_1)$ e' lineare
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2, x_3) \to (3x_2, -x_1 + x_3 + 1)$ non e' lineare (il +1 la trolla)
4. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \to A\underline{x}(m \times n \cdot n \times 1)$ e' lineare

4.2 Nucleo e immagine

Definition 4.2.1

Siano A, B insiemi. $f : A \to B$. $Immf = \{f(x)|x \in A\}$. f si dice **suriettiva** quando:

$$\forall y \in B.\exists x.f(x) = y \ (Immf = B)$$

f e' **iniettiva** quando:

$$\forall x, y.f(x) = f(y) \implies x = y \text{ (contronominale)}$$

Definition 4.2.2: Nucleo e Immagine

$F : V \to W$ lin

$$kerF = \{v \in V | F(v) = \underline{0}\} \subseteq V$$

$$ImF = \{F(v) | v \in V\} \subseteq W$$

Il **nucleo** e' quindi l'insieme dei vettori di V che vengono "mappati" al vettore nullo in W da F, mentre l'**immagine** e' semplicemente l'insieme che contiene solo tutti i valori possibili di $F(v)$.

Proposition 4.2.1

$F : V \to W$ applicazione lineare:

1. $kerF \leqslant V$
2. $ImmF \leqslant W$

: Si dimostra usando la linearita' di F ☺

4.2.1 Legami fra nucleo/immagine e iniettivita'/suriettivita'

Proposition 4.2.2

$F : V \to W$ lin.

- F e' surittiva $\iff ImF = W$
- F e' iniettiva $\iff kerF = \{\underline{0}\}$

:
- Vera per def.
- Dimostro entrambe le direzioni:
  - $\implies$ sia F iniettiva e sia $v \in kerF$. Allora $F(v) = \underline{0} = F(0_V)$, quindi essendo iniettiva si ha che $v = 0_V$.
  - $\impliedby$ Supponiamo $kerF = \{\underline{0}\}$, mostriamo che F iniettiva, quindi che $F(u) = F(v) \implies u = v$. $F(u) = F(v) \implies F(u) - F(v) = \underline{0}$ lin. $F(u - v) = \underline{0} \implies u - v \in kerF \implies u - v = \underline{0} \implies u = v$

☺

Proposition 4.2.3

Sia V, W SV e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e $w_1, ..., w_n \in W$ (non necessariamente distinti).
Esiste una unica applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_1) = w_1, F(v_2) = w_2, ..., F(v_n) = w_n$ $(\forall i.F(v_i) = w_i)$

: Sia $v \in V$, definisco $F(v)$. Abbiamo che $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, in particolare $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base B. Pongo $F(v) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n$ (in questo modo $F(v_i) = 0w_1 + ... + 1w_i + ... + 0w_n = w_i$). Mostriamo ora che F e' lineare. Dati $u, v \in V$:

- Dimostriamo che $F(u + v) = F(u) + F(v)$:
  $u + v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n = (\lambda_1 + \beta_1)v_1 + ... + (\lambda_n + \beta_n)v_n$
  - $F(u + v) = (\lambda_1 + \beta_1)w_1 + ... + (\lambda_n + \beta_n)w_n$
  - $F(u) + F(v) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n + \beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n = (\lambda_1 + \beta_1)w_1 + ... + (\lambda_n \beta_n)w_n$
- Dimostriamo che $F(\rho v) = \rho F(v)$:

$$F(\rho v) = \rho\lambda_1 w_1 + ... + \rho\lambda_n w_n = \rho(\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n) = \rho F(v)$$

Quindi F e' lineare. Ora dimostriamo che e' unica:
Sia $G : V \longrightarrow W$ lineare t.c. $G(v_1) = w_1, ..., G(v_n) = w_n$. Sia $v \in V$ $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, dimostriamo che $G = F$:

$$G(v) = G(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 G(v_1) + ... + \lambda_n G(v_n) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = F(v)$$

☺

Note:
Se ho una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ di V e conosco $F(v_1), ..., F(v_n)$, allora conosco F!

Example 4.2.1
Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. So che:

- $F(1, 0, 0) = (1, 1)$
- $F(0, 1, 0) = (1, 0)$
- $F(0, 0, 1) = (0, -1)$

Dato che $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$ e' base (canonica) di $\mathbb{R}^3$, e dato che conosco $F(v)$ per ogni vettore di tale base, allora posso trovare F lineare per ogni $v \in \mathbb{R}^3$:

$$F(v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 1) + v_2(1, 0) + v_3(0, -1) = (v_1 + v_2, v_1 - v_3)$$

Si puo' notare che la scrittura $v_1(1, 1) + v_2(1, 0) + v_3(0, -1)$ puo' essere riscritta come prodotto fra matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$

Possiamo definire una funzione $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dove $L_A(x_1, x_2, x_3) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, dove le colonne corrispondono a $F(1, 0, 0), F(0, 1, 0), F(0, 0, 1)$. Facendo i calcoli, si puo' dimostrare che $\forall v \in B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.(L_A(v))_B = F(v)$, quindi per la proposizione 4.2.1 si ha che $\forall v \in V.(L_A(v))_B = F(v)$.

Corollary 4.2.1
Se $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e' una applicazione lineare, allora:

$$L_A = F$$

Proposition 4.2.4 Immagine di una app. lin.
Sia $F : V \longrightarrow W$ app. lin, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ base di V, allora:

$$ImF =< F(v_1), ..., F(v_n) >$$

Attenzione: non sono per forza una base

: $ImF = \{F(v) | v \in V\}$ e $< F(v_1), ..., F(v_n) >= \{\lambda_1 F(v_1) + ... + \lambda_n F(v_n) | \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\}$. (dimostra che $ImF \leqslant < F(v_1), ..., F(v_n) >$) ..... Osserviamo che $F(v_1), ..., F(v_n) \in ImF$, inoltre $ImF \leqslant W$, quindi dato che se uno sottospazio contiene dei vettori allora ha anche le loro combinazioni lineari $< F(v_1), ..., F(v_n) > \subseteq ImF$. ☺

4.2.2 Teorema della dimensione

Theorem 4.2.1 Dimensione

$F : V \to W$ app. lin.

$$dimV = dim(kerF) + dim(ImF)$$

: Sia $m = dimV, r = dim(kerF)$, dimostriamo che $dim(ImF) = m - r$. Sia $u_1, ..., u_r$ una base di $KerF$, quindi sono lin. ind. che quindi possiamo completare ad una base $B = \{u_1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ aggiungendo $n - r$ vettori. Mostriamo che $\{F(v_{r+1}), ..., F(v_n)\}$ sono una base di ImF:

- Dimostriamo che generano: per la prop. 4.2.1, $ImF =< F(u_1), ..., F(u_r), F(v_{r+1}), ..., F(v_n) >$. Ma per def. di nucleo, $F(u_1), ..., F(u_r) = \underline{0}$, quindi $ImF =< F(v_{r+1}), ..., F(v_n) >$.
- Dimostriamo che sono indipendenti: Sia $\lambda_{r+1}F(v_{r+1}) + ... + \lambda_n F(v_n) = \underline{0}$, vogliamo dimostrare che $\lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0$. Per lin. di F: $F(\lambda_{r+1}v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n) = \underline{0}$, quindi per def. nucleo $v = \lambda_{r+1}v_{r+1} + ... + \lambda_n v_n \in KerF$. Quindi possiamo scrivere v come comb lin. della base di $KerF$: $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r - \lambda_{r+1}v_{r+1} - ... - \lambda_n v_n = \underline{0}$. Ma i vettori $u_1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_n$ sono proprio i vettori della base di B, quindi sono lin. ind., quindi per forza $\lambda_1, ..., \lambda_r, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n = 0$.

😊

Corollary 4.2.2

Siano V, W SV e $F : V \to W$ app. lin.:

- Se $dimV > dimW \implies F$ non e' iniettiva
- Se $dimV < dimW \implies F$ non e' suriettiva

Corollary 4.2.3

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, si ha che:

$$\text{rango righe di } A = \text{rango colonne di } A$$

: Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : V \to W$ l'applicazione lineare associata. Il rango colonne di A conincide con la dimensione dell' immagine di L_A. La dimensione del nucleo e' data dal numero di colonne di A (n) meno il rango righe. Quindi $dim(KerL_A) = n - rr(A)$, allora $rr(A) = n - dim(KerL_A)$. Dobbiamo dimostrare che $rr(A) = rc(A)$, quindi che $n - dim(KerL_A) = dim(ImL_A)$. Dato che le colonne sono l'immagine della base di V rispetto a L_A, possiamo dire che $n = dim(V)$. Quindi dobbiamo dimostrare che $dim(V) = dim(ImL_A) + dim(KerL_A)$, ovvio per teo. dim. 😊

4.3 Isomorfismo

Definition 4.3.1: Isomorfismo

Siano V, W SV. Si dicono **isomorfi** se esiste una $F : V \to W$ lineare biettiva. Si indica come:

$$V \cong W$$

Sapere che due SV sono isomorfi vuol dire che possiamo trattarli nello stesso modo quando dobbiamo risolvere problemi algebrici.

Proposition 4.3.1

Siano V, W SV. V e W sono isomorfi $\iff dimV = dimW$

: Dimostriamo entrambe le direzioni:

- $\implies$) Siano V, W isomorfi, allora esiste $F : V \longrightarrow W$ iniettiva e suriettiva. Quindi $dimV \geqslant dimW$ e $dimV \leqslant dimW$, che valgono contemporaneamente solo quando $dimV = dimW$.

- $\impliedby$) Sapendo che $dimV = dimW = n$, possiamo dire che esistono la base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e la base $\{u_1, ..., u_n\}$ di W che hanno lo stesso numero di elementi. Prendiamo l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ per cui $F(u_i) = v_i$ e dimostriamo che e' biettiva. Sappiamo che $ImF =< v_1, ..., v_n >$, ma anche W e' generato dagli stessi vettori, quindi $ImF = W$ ed F e' suriettiva. Per il teo. dim. abbiamo che $dim(KerF) = dimV - dim(ImF)$, ma noi sappiamo che $dimV = dimW$, e che $dimW - dim(ImF) = 0$. Quindi $dim(KerF) = 0$ che implica che F e' anche iniettiva.

😄

Poiche' conosciamo la dimensione degli spazi vettoriali $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^n[x]$, abbiamo subito il seguente corollario:

Corollary 4.3.1

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R}_d[x] \cong \mathbb{R}^{d+1}$$

Proposition 4.3.2 Applicazioni lineari composte

Siano $F : O \longrightarrow W, G : V \longrightarrow O$ app. lin., allora la funzione composta:

$$F \circ G : V \longrightarrow W \text{ e' lineare}$$

Corollary 4.3.2

Date due applicazioni lineari L_A, L_B con matrici associate A, B, la matrice associata alla composizione $L_A \circ L_B$ e' il prodotto AB, ovvero:

$$L_A \circ L_B = AB$$

Nota che in generale $AB \neq BA$, e che quindi la composizione non e' commutativa.

4.4 Controimmagine

Definition 4.4.1

Sia $f : A \longrightarrow B$ funzione (A, B insiemi) e sia $b \in B$, la controimmagine di b e':

$$f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$$

Note:

Scrivere $f^{-1}(b)$ non implica che f sia invertibile, serve solo per rappresentare un sottoinsieme del dominio di f.

Osservazioni:

- La controimmagine di b e' $\emptyset \iff b \notin Imf$
- Se $F : V \longrightarrow W$ e' lineare e se $w \in W$, $F^{-1}(w) = \{v \in V | F(v) = w\} \subseteq V$. Se $w \neq \underline{0}_W$, allora $F^{-1}(w)$ non e' un sottospazio di V, infatti $\underline{0}_V \notin F^{-1}(w)$. Se $w = \underline{0}_W$, allora $F^{-1}(w) = KerF$.

L'inversa di una applicazione lineare puo' essere usata per trovare le soluzioni di un sistema lineare. Infatti se convertiamo il sistema lineare nella forma $A\underline{x} = b$, essenzialmente ci stiamo chiedendo quali sono i vettori $\underline{x}$ che dopo la trasformazione combaciano col vettore b. Ovvero, le soluzioni dell'equazione sono la **controimmagine** del vettore b rispetto alla funzione L_A, quindi $L_A^{-1}(b)$ e' l'insieme delle soluzioni del sistema.

Proposition 4.4.1 Struttura dei sistemi lineari

Sia $F : V \longrightarrow W$ lin., e $w \in W$. Se $w \notin ImF$, allora $F^{-1}(w) = \emptyset$. Se $w \in ImF$:

$$\exists v \in V.F(v) = w$$

Allora possiamo identificare l'insieme dei vettori appartenenti alla controimmagine come:

$$F^{-1}(w) = \{v + z | z \in KerF\}$$

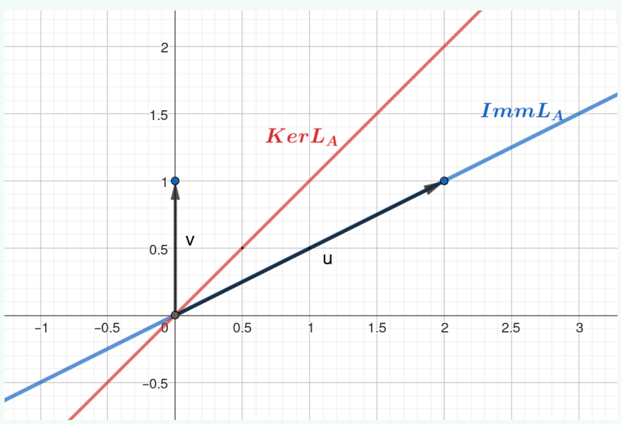
: Se $w \notin ImF$, per definizione si ha che $F^{-1}(w) = \emptyset$. Ugualmente sappiamo che se $w \in ImF$, allora $\exists v \in V.F(v) = w$ sempre per definizione di immagine. Dimostriamo ora che $w \in ImF \implies F^{-1}(w) = \{v + z | z \in KerF\}$: assumiamo che $w \in ImF$, allora $\exists v \in V.F(v) = w$ e sia v tale elemento. Usando l'assioma di estensionalita', mi riduco a dimostrare entrambe le direzioni:

- $\implies$) Assumo che $u \in F^{-1}(w)$ per dimostrare che $u \in \{v + z | z \in KerF\}$. Per la prima ipotesi sappiamo che $F(u) = F(v) = w$, quindi per linearita' $F(u) - F(v) = F(u - v) = \underline{0}$. Per definizione di nucleo $u - v \in KerF$, quindi $v + (u - v) \in \{v + z | z \in KerF\}$, ma $v - v + u = u$ quindi ovvio.
- $\impliedby$) Assumo che $u \in \{v + z | z \in kerF\}$ per dimostrare che $u \in F^{-1}(w)$. Per prima ipotesi scrivo u come $v + z$. Devo dimostrare che $F(v + z) = w$, quindi applicando la linearita' $F(v) + F(z) = w$. Per ipotesi e per def. nucleo viene $w = w$. Ovvio.

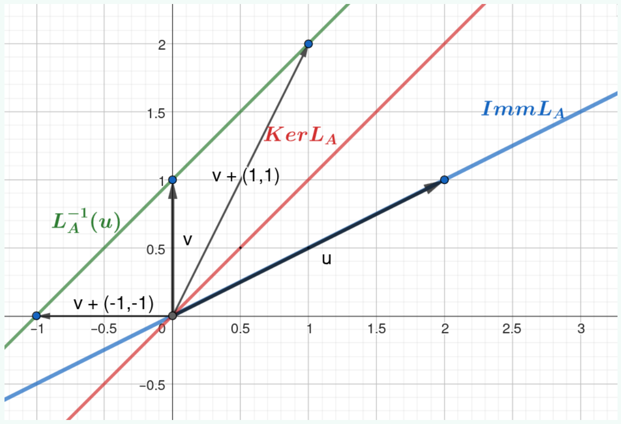
😊

Example 4.4.1

Data un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, abbiamo che $ImmL_A = \langle(2, 1)\rangle$ e $KerL_A = \langle(1, 1)\rangle$:



Prendiamo un vettore $v = (1, 0)$ e calcoliamo la sua immagine $u = (2, 1)$. Ora calcoliamo la controimmagine del vettore u appena trovato usando la proposizione sopra: $L_A^{-1}(u) = \{v + z | z \in KerL_A\}$, che graficamente e' la retta passante per la punta di v con la stessa pendenza della retta formata da $KerL_A$:



Quindi, dato un sistema lineare $A\underline{x} = b$ l'insieme delle sue soluzioni (se ce ne' almeno una) e' $\{v + z | z \in KerF\}$, dove v e' il vettore per cui $Av = b$.

Theorem 4.4.1 Rouche'-Capelli

Un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in n variabili ha soluzioni sse $rk(A) = rk(A|b)$, in tale caso si ha:

- Se $rk(A) = rk(A|b) = n$ allora esiste una sola soluzione
- Se $rk(A) = rk(A|b) < n$ allora ci sono infinite soluzioni che dipendono da $n - rk(A)$ parametri.

: Dimostriamo che un sistema lineare $Ax = b$ ha soluzioni sse rk(A) = rk(A—b). Dimostriamo entrambe le direzioni:

- $\implies$) Assumiamo che il sistema abbia soluzioni. Sappiamo quindi che $b \in ImL_A$, ovvero che b appartiene al sottospazio generato dalle colonne di A. Cio' implica che $dim\langle$colonne di $A\rangle = \langle$colonne di $A|b\rangle$, quindi per 4.2.2 $rk(A) = rk(A|b)$.
- $\impliedby$) Stesso procedimento al contrario.

Si possono dimostrare le due proposizioni dopo. ☺

4.5 Determinante

4.5.1 Definizione e proprieta'

Il determinante di una matrice quadrata e' un numero reale che e' importante per due motivi:

- A e' invertibile $\iff$ $detA \neq 0$
- Se consideriamo $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $detA$ e' il fattore che determina come cambiano le aree o i volumi quando applichiamo L_A.

Definition 4.5.1: Matrice identita'

E' la matrice quadrata che e' l'elemento neutro per il prodotto fra matrici quadrate:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Puo' essere vista come la matrice associata all'applicazione lineare che non modifica i vettori, ovvero l'applicazione lineare identita'. Infatti le colonne, che indicano la posizione dei nuovi vettori base, sono uguali a quelli della base canonica.

Definition 4.5.2: Determinante

Il determinante e' una funzione $det : M_{m\times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprieta':

- Se $v + u =$ j-esima riga di A, allora $detA = det(A$ con riga j-esima v$) + det(A$con riga j-esima u$)$
- Se $\lambda v =$ j-esima riga di A, allora $detA = \lambda det(A$ con riga j-esima v$)$
- Se due righe di A sono uguali, il determinante e' nullo
- Se I e' la matrice identita', $detI = 1$

Si puo' dimostrare che questa funzione esiste ed e' unica.

Dalla definizione derivano altre proprieta' importanti del determinante:

Proposition 4.5.1

Siano A, B due matrici quadrate di ordine n:

- Se B e' ottenuta da A scambiando due righe, allora:
$$det(B) = -det(A)$$
- Se B e' ottenuta da A sommando ad una riga di A una quaunque combinazione lineare delle altre righe, allora:
$$det(B) = det(A)$$

Note:

Tutte queste proprieta' valgono anche per le colonne (pensio sia perche' $detA = detA^T$? non so neanche se e' vero).

Theorem 4.5.1 Binet

Se A e B sono due matrici quadrate, allora:

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Mentre in generale $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

4.5.2 Calcolo del determinante

Definition 4.5.3: Matrice triangolare

Matrice quadrata tale che sotto/sopra (superiore/inferiore) la diagonale superiore ci sono solo zeri:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici triangolari ci sono utili, dato che calcolare il loro determinante e' molto facile:

Proposition 4.5.2

Data una matrice triangolare A di ordine n, il suo determinante e' dato da:

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Grazie a queste proprieta' possiamo calcolare il determinante di ogni matrice utilizzando il sommo **GAUSS**

Example 4.5.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Facciamo Gauss:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Si ha che:

$$det(A) = -det(A') = 7$$

(Il meno e' perche' abbiamo scambiato la seconda e la terza riga)

Ma questo metodo puo' essere lungo ed e' facile sbagliare il segno del determinante alla fine, quindi sono stati ideati altri metodi piu' diretti per il calcolo del determinante.
Il primo e' la regola di Sarrus (guardare dispense).

Esiste anche un metodo ricorsivo per calcolare il determinante di una matrice, che puo' essere piu' veloce della regola di Sarrus nelle matrici che hannno una riga/colonna con molti zeri. Prima ci serve definire il *minore* di una matrice:

Definition 4.5.4: Minore di una matrice

Data una matrice quadrata A di ordine n, si indica con A_{ij} la sottomatrice ottenuta cancellando da A la riga i e la colonna j. Allora A_{ij} si dice **minore** di A di ordine $n-1$.

Theorem 4.5.2 Teorema di Laplace

Sia A una matrice quadrata:

- Se A ha ordine 1, cioe' $A = (a_{11})$ ha una riga e una colonna, allora:

$$det(A) = a_{11}$$

- Se A ha ordine > 1, sia:

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

  Allora lo sviluppo di $det A$ secondo la *r-esima* riga e':

$$det A = \sum_{k=1}^{n} a_{rk} \Gamma_{rk}$$

  Mentre lo sviluppo secondo la *s-esima* colonna e':

$$det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ks} \Gamma_{ks}$$

Come avevo scritto prima, conviene scegliere la riga/colonna che contiene piu' zeri, dato che ci permettono di non calcolare il Γ di quella sottomatrice. Inoltre, dato che il calcolo del determinante di una matrice di ordine 2 e' semplice, conviene prendere tali matrici come caso base per velocizzare l'algoritmo.

4.6 Invertibilita'

Definition 4.6.1: Matrice invertibile

Una matrice quadrata A si dice **invertibile** se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine n t.c.

$$AB = BA = I_n$$

Proposition 4.6.1

Una matrice quadrata A:

$$\text{e' invertibile} \iff det(A) \neq 0$$

: Dimostriamo entrambe i versi:

- $\implies$) Sia A invertibile, quindi sia B la sua matrice inversa. Abbiamo che $det(AB) = det(I) = 1$, quindi $det(A)det(B) \neq 0$ quindi $det(A) \neq 0$.
- $\impliedby$) Se il $det(A) \neq 0$, allora si puo' dimostrare che e' invertibile e che la sua matrice inversa A^{-1} e' data da questa formula:

  $$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{det(A)} det(A_{ji})$$

  Questo e' il metodo di Laplace per trovare l'inversa di una matrice.

😃

Un altro metodo per calcolare la matrice inversa e' l'algoritmo di GAUSS:

- Si scrive la matrice $A|I$
- Con l'algoritmo is arriva a $I|B$ e $B = A^{-1}$

Definition 4.6.2

Una funzione $f : A \to B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ t.c.

$$g \circ f = id_B \text{ e } f \circ g = id_A$$

Proposition 4.6.2

Sia $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lin. con $F = L_A$. Allora F e' invertibile $\iff$ $detA \neq 0$. In tal caso l'inversa di F e' l'applicazione lineare associata ad A^{-1}

: Sia $detA \neq 0$, quindi sia A^{-1} l'inversa di A. Sia g l'applicazione lineare associata a A^{-1}. La matrice associata a $g \circ f$ e' $A^{-1} \cdot A = I$, quindi $g \circ f = id$ (g e' l'inversa di f). (altro verso) 😃

Note:

Se A e' una matrice quadrata e B t.c. AB = I, allora BA = I. Quindi non c'e' bisogno di controllare entrambe le direzioni. $(AB = I \implies (A^{-1}A)B = A^{-1}I \implies IB = A^{-1}I \implies B = A^{-1} \implies BA = I)$

4.7 Riassuntino

Proposition 4.7.1 Teoremone

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, allora sono equivalenti:

- F e' un isomorfismo (invertibile)
- F e' iniettiva

- F e' suriettiva
- dim(ImF) = n
- rk(A) = n
- Le colonne di A sono lin. ind.
- Le righe di A sono lin. ind
- Il sistema $Ax = 0$ ha una sola soluzione
- Il sistema $Ax = b$ ha una sola soluzione $\forall b \in \mathbb{R}^n$
- A e' invertibile
- detA $\neq 0$

4.8 Cambio di base

Abbiamo visto finora che ad ogni applicazione lineare possiamo associare una matrice, che moltiplicata per qualunque vettore da il vettore trasformato. Per costruire questa matrice, prendavamo l'immagine della base canonica del dominio e mettavamo in colonna le loro coordinate rispetto alla base canonica del codominio. Notiamo che abbiamo sempre usato la base **canonica** per ottenere la nostra matrice, e se usassimo una base diversa?

Example 4.8.1

Prendiamo $F : V \longrightarrow W, B = \{v_1, ..., v_n\}, \overline{B} = \{w_1, ..., w_m\}$, dove B e $\overline{B}$ sono rispettivamente basi di V e di W. La matrice associata a tale applicazione lineare sara' del tipo:

$$A_{B\overline{B}} = M_B^{\overline{B}}(\mathbb{R})$$

E sara costruita in tale modo:

$$A_{B\overline{B}} = \begin{pmatrix} (F(v_1))_{\overline{B}} & \dots & (F(v_n))_{\overline{B}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

4.8.1 Cambio di base di un vettore

Andiamo a vedere cosa succede nel caso particolare dell' applicazione identita' $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (ovvero il cambio di base dello stesso vettore):

- Prendiamo $B = \{v_1, ..., v_n\}$ come base del dominio e usiamo la base canonica C come base del codominio, la matrice sara' costruita in tale modo:

$$\begin{pmatrix} (F(v_1))_C & \dots & (F(v_n))_C \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

  Dato che F e' una identita', possiamo riscrivere $F(v)$ come v. Ci rimane da trovare le coordinate rispetto alla base canonica dell'immagine $(v)_C$, ovvero i lamda per cui $v = \lambda_1 c_1 + ... + \lambda_n c_n$. Ci viene che $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = v$, quindi le colonne della nostra matrice saranno i vettori della base B del dominio.

$$I_{BC} = \begin{pmatrix} (v_1) & \dots & (v_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

- Considerando sempre il primo caso, se noi cambiassimo la base dell'immagine e la ponessimo uguale a B in modo tale da essere uguale a quella del dominio, ci viene che per ogni $v_i \in B$, $(v_i)_B = (0_1, ..., 1_i, ..., 0_n)$. In questo caso la matrice associata diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Che' e' la matrice identita! Quindi mettendo la stessa base al dominio e all'immagine, la matrice associata all'identita' non cambia.

Ora ci serve una proposizione che ci dice come la composizione funziona bene col cambio di base:

Proposition 4.8.1

Presi $F : V \longrightarrow W, G : W \longrightarrow Z$ app. lin. e $B, \overline{B}, B'$ basi rispettivamente di V, W, Z, le matrici associate sono $A_{B\overline{B}}, B_{\overline{B}B'}$. La matrice associata a $F \circ G$ sara':

$$C_{BB'} = B_{\overline{B}B'} A_{B\overline{B}}$$

- Analizziamo ora il caso in qui cambia solo la base dell'immagine. La matrice associata sarebbe:

$$\begin{pmatrix} (c_1)_B & \dots & (c_n)_B \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Possiamo procedere risolvendo i sistemi lineari per trovare le coordinate, ma un modo che puo' essere piu' veloce e' quello di sfruttare la composizione di funzioni. Consideriamo l'identita' G che ha come base del dominio B e come base dell'immagine C. Chiamiamo F la nostra identita' originale, la composizione $F \circ G$ e' sempre una identita', ma ha come matrice associata I_{BB}, che come abbiamo visto prima e' la matrice identita' I. Quindi $I_{BC} I_{CB} = I$, da cui possiamo ricavare che $I_{CB} = I_{BC}^{-1}$.

$$\mathbb{R}^n_B \xrightarrow[I_{BC}]{G} \mathbb{R}^n_C \xrightarrow[I_{CB}]{F} \mathbb{R}^n_B$$

$$I_{CB} I_{BC} = \begin{pmatrix} (c_1)_B & \dots & (c_n)_B \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_1) & \dots & (v_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{BB} = I$$

$$I_{CB} = \begin{pmatrix} (v_1) & \dots & (v_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^{-1} = I_{BC}^{-1}$$

Ricapitolando, si ha che:

Proposition 4.8.2 Cambio di base di un vettore

Sia V SV e $v \in V$, e siano $C, B = \{v_1, \dots, v_n\}$ rispettivamente la base canonica e una base qualsiasi di V:

- $(v)_C = I_{BC}(v)_B = ((v_1), \dots, (v_n))(v)_B$
- $(v)_B = I(v)_B$
- $(v)_B = I_{BC}^{-1}(v)_C = ((v_1), \dots, (v_n))^{-1}(v)_C$

Note:

I_{BC} e' anche detta **matrice del cambio di base**.

Combiando queste formule, possiamo cambiare la base di un vettore con qualsiasi base. Ad esempio, prese due basi B, B' possiamo trovare $((v)_B)_{B'}$ trasformando prima $(v)_B$ in $(v)_C$ poi a $(v)_{B'}$:

$$\mathbb{R}^n_B \xrightarrow{I_{BC}} \mathbb{R}^n_C \xrightarrow{I_{CB'}} \mathbb{R}^n_{B'}$$

Corollary 4.8.1

Date due basi B, B' e un vettore v, si ha che:

$$((v)_B)_{B'} = I_{B'C}^{-1} I_{BC} (v)_B$$

4.8.2 Cambio di base di una applicazione lineare

Consideriamo una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e la sua matrice associata $A_{CC'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (che rappresenta una rotazione di $-90°$). Notiamo che le colonne di questa matrice ci stanno indicando dove vanno a finire i vettori della base canonica C $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Di conseguenza anche i vettori immagine saranno relativi alla base canonica C' del codominio. Ma se noi volessimo applicare la stessa trasformazione ma considerando una base diversa B del dominio e B' del codominio?

Come prima cosa, possiamo cambiare la base al vettore di input $(v)_B$ in modo da ottenere le sue coordinate rispetto alla base canonica C:

$$((v)_B)_C = I_{BC} (v)_B$$

Ora possiamo applicare la trasformazione F alle coordinate canoniche del nostro vettore:

$$F(((v)_B)_C) = A_{CC'} I_{BC} (v)_B$$

Pero', il vettore che otteniamo e' scritto ancora usando le coordinate canoniche (questa volta del codominio). Quindi ci basta usare la formula del cambio di base:

$$F(((v)_B)_C)_{B'} = I_{B'C'}^{-1} A_{CC'} I_{BC} (v)_B$$

Quindi in generale:

Proposition 4.8.3

Data un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e la sua matrice associata rispetto alle basi canoniche $A_{CC'}$, la matrice associata ad F rispetto alle basi ordinate B, B' e':

$$A_{BB'} = I_{B'C'}^{-1} A_{CC'} I_{BC}$$

Chapter 5

Autovalori e autovettori

5.1 Diagonalizzabilita'

Definition 5.1.1: Matrice diagonale

Matrice dove i valori che non sono sulla diagonale principale sono nulli:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

Definition 5.1.2: Applicazione lineare diagonalizzabile

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. con matrice associata A si dice **diagonalizzabile** se:

$$\exists B \text{ base di } \mathbb{R}^n . A_{BB} \text{ e' diagonale}$$

Note:

In questo caso $A_{BB} = I_{BC}^{-1} A I_{BC}$

Utilizzare una matrice diagonale per rappresentare una applicazione lineare porta vari vantaggi. Uno di questi e' la facilita' con cui possiamo calcolare successive applicazioni della stessa trasformazione. Infatti, nel caso di una matrice associata diagonale, basta elevare i valori sulla diagonale alla numero di volte che si vuole ripetere l'operazione.

Definition 5.1.3: Matrici simili

Due matrici A e B si dicono **simili** se esiste P tale che:

$$B = P^{-1} A P$$

Essere simili e' una relazione di equivalenza. Da notare come con questa definizione, se cambiamo la base ad una matrice otteniamo comunque una matrice simile.

Definition 5.1.4: Matrice diagonalizzabile

Una matrice A quadrata si dice **diagonalizzabile** se e' simile a una matrice diagonale, cioe' se:

$$\exists P \text{ invertibile}.P^{-1}AP = D, \text{ con D diagonale}$$

Quindi una matrice e' diagonalizzabile se e' **simile** ad una matrice diagonale

Proposition 5.1.1

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. e sia A matrice associata. Allora:

$$F \text{ e' diagonalizz} \iff A \text{ e' diagonalizz}$$

: Per definizione, F e' diagonalizzabile sse esiste una base B per cui A_{BB} e' una matrice diagonale, ovvero sse A e' simile a una matrice diagonale. Per definizione cio' equivale a dire che A e' diagonalizzabile. 😊

5.2 Autovettori e autovalori

Si dicono autovettori tutti quei vettori del dominio che dopo una trasformazione lineare rimangonon sulla stessa direzione su cui giacevano prima.

Definition 5.2.1: Autovettore

$v \in \mathbb{R}^n v \neq 0$ si dice **autovettore** di una applicazione lineare $F : V \to W$ se:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}.F(v) = \lambda v$$

Quindi, prendendo A matrice associata, si puo' scrivere:

$$Av = \lambda v$$

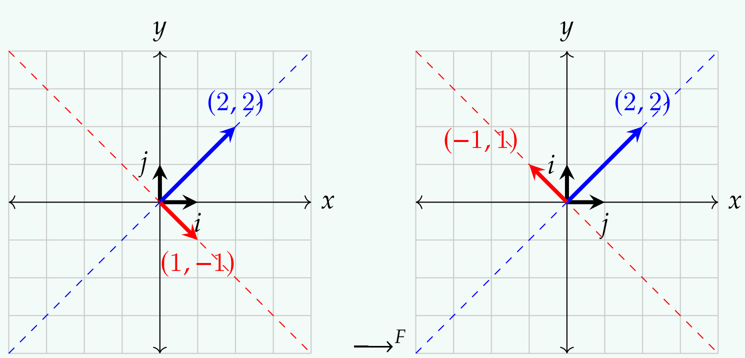
Definition 5.2.2: Autovalore

$\lambda \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore** di F se esiste $v \in \mathbb{R}^n v \neq \underline{0}$ tale che:

$$F(v) = \lambda v$$

Example 5.2.1

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $F(e_1) = e_2, F(e_2) = e_1$. I vettori della base canonica vengono scambiati, mentre i vettori $(1,1), (2,2), (-3,-3), \dots$ rimangono invariati. Abbiamo quindi una simmetria rispetto alla retta $y = x$. Anche i vettori $(1,-1), (-2,2), \dots$ conservano la direzione, quindi possiamo dire che tutti questi sono **autovettori**. Prendiamo un autovettore per direzione v_1, v_2, notiamo che questi formano una base di $\mathbb{R}^2$, $B = \{v_1, v_2\}$ dato che sono lin. ind.



Theorem 5.2.1

Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. F e' diagonalizzabile $\iff$ esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di F.

: Dimostriamo entrambe i versi:

- Supponiamo che $B = \{v_1, ..., v_n\}$ sia una base di autovettori, e mostriamo che A_{BB} e' diagonale. Dato che sono autovettori, $F(v) = \lambda v$, dove λ sono gli autovalori. Costuiamo A_{BB}:

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1 v_1)_B & ... & (\lambda_n v_n)_B \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

  Le coordinate di $\lambda_i v_i$ rispetto a B saranno $(0_1, ..., \lambda_i, ..., 0_n)$, quindi forma una matrice diagonale dove i valori sulla diagonale sono gli autovalori:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Sia F diagonalizzabile. Sappiamo che esiste una base B tale che A_{BB} e' diagonale:

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  Calcolando l'immagine della base B di F, abbiamo che $\forall i \in [1, n].F(v_i) = A_B(v_i)_B = \lambda_i v_i$, quindi $\forall i \in [1, n].\lambda_i$ e' un autovalore di F, e la base B e' formata solo da autovettori.

😄

Proposition 5.2.1

A_B e' diagonale $\iff$ B e' base di autovettori

: Dimostro entrambe i versi:

- Sia A_B diagonale e $B = \{v_1, ..., v_n\}$, seguendo lo stesso ragionamento dell'ultima dimostrazione verso la fine, abbiamo che $\forall i \in [1, n].A_B(v_i)_B = \lambda_i v_i$, quindi tutti i vettori di B sono autovettori.

- Sia B una base di autovettori $\{v_1, ..., v_n\}$, dimostriamo che A_B e' diagonale. Dato che $v_1, ..., v_n$ sono autovettori, sappiamo che $A_B(v_i)_B = \lambda_i(v_i)_B$, ovvero:

$$A_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Quindi $\forall i \in [1, n].x_{1i}, ..., x_{i-1i} \cup x_{i+1i}, ..., x_{ni} = 0 \wedge x_{ii} = \lambda_i$, che crea una matrice diagonale.

😄

5.3 Calcolo degli autovalori e autovettori

La definizione degli autovettori ci dice che data la matrice A associata all'applicazione lineare, $\lambda v = Av$. Possiamo usare questa equazione per riuscire a trovare gli autovalori e di conseguenza gli autovettori, vediamo come. Trasformiamo il prodotto scalare λv in un prodotto di matrici usando la matrice identita', quindi abbiamo $(\lambda I)v = Av$. Ora portiamo tutto a destra e raccogliamo v, viene:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Quindi stiamo cercando i vettori non nulli la cui immagine rispetto alla app. lin. F associata alla matrice $A - \lambda I$ e' 0, ovvero il $kerF \setminus \underline{0}$. Ma noi sappiamo che questo insieme ha elementi sse $det(A - \lambda I) = 0$, quindi dobbiamo trovare i λ che soddisfano tale richiesta. Svolgendo il determinante, otteniamo un polinomio in funzione di λ (il polinomio caratteristico), i cui zeri sono tutti gli autovalori di F. Una volta ottenuti gli autovalori basta calcolare il nucleo delle matrici ottenute mettendo al posto di λ gli autovalori (l'autospazio di λ_i), togliendo il vettore nullo.

Definition 5.3.1: Polinomio caratteristico

Data una matrice quadrata A definiamo **polinomio caratteristico** p_A di A il seguente polinomio in x:

$$p_A(x) = det(A - xI)$$

Definition 5.3.2: Autospazio

Dato un autovalore λ di una app. lin. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si dice **autospazio** di λ il sottospazio vettoriale definito:

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n | F(v) = \lambda v\}$$

Proposition 5.3.1

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. e $v_1, ..., v_k$ autovettori di T, con autovalori distinti $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Allora:

$$v_1, ..., v_k \text{ sono linearmente indipendenti}$$

Corollary 5.3.1

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. ha n autovalori distinti, allora:

$$T \text{ e' diagonalizzabile}$$

: Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ gli autovalori di T distinti. Sappiamo quindi che $v_1, ..., v_n$ sono i rispettivi autovettori per ogni autospazio. Per la prop. sappiamo che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti. Quindi per GEL formano una base (fatta da autovettori), quindi T e' diagonalizzabile 😃

5.3.1 Molteplicita' algebrica e geometrica

Vediamo cosa succede se ci sono degli autovalori coincidenti:

Definition 5.3.3

$A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia λ autovalore. La **molteplicita' algebrica** di λ, indicata con $m_a(\lambda)$ e' la massima potenza di $(x - \lambda)$ che divide $P_A(x)$.

Es: $P_A(x) = (x-3)^5(x+2)^3(x-1)(x^2+7)$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$, quindi per ognuno dobbiamo controllare il grado del fattore $(x - \lambda)$ nel polinomio caratteristico.

Definition 5.3.4

$A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia λ autovalore. La **molteplicita' geometrica** di λ, indicata con $m_g(\lambda)$ e' la dimensione dell'autospazio generato da λ.

Proposition 5.3.2

Sia λ un autovalore di A, allora

$$1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Proposition 5.3.3

Sia A una matrice quadrata di ordine n e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti con molteplicita' geometriche rispettive $n_1, \ldots, n_k$. Sia ha che:

$$n_1 + \ldots + n_k = n \iff A \text{ e' diagonalizzabile}$$

Proposition 5.3.4

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e' diagonaliz $\iff$ esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita di autovettori. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $p_A(x)$ con $F = L_A$ che ha grado n.

Fattorizziamo $p_A(x)$ e troviamo i suoi zeri. $m_a(\lambda)$ ci dice quante volte compare uno zero, ma a noi interessa la dimensione dell'autospazio $m_g(\lambda)$ perche' ci servono gli autovettori.

Proposition 5.3.5

$$1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Per avere una base di autovettori, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori, deve essere $dimV_{\lambda_1} + \ldots + dimV_{\lambda_k}$. Deve valere che $m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_k) = n$ e $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$. La prima condizione vuol dire che $p_A(x)$ si fattorizza completamente, ovvero che ha n zeri, la seconda ci dice che la dimensione dell'autospazio deve essere quello "massimo".

Proposition 5.3.6

sia $F \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con autovalore 0:

$$kerF = V_0 \neq \{\underline{0}\}$$

Quindi $dim(kerF) = dim(V_0) \geqslant 1$ e F non e' invertibile!

: Se un isomorfismo $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ha un autovalore $\lambda = 0$, significa che esiste un autospazio V_0 t.c. $dimV_0 \geqslant 1$ per cui $\forall v \in V_0 . F(v) = \underline{0}$. Per definizione, l'autospazio V_0 coincide con il nucleo di K, quindi $kerF = V_0$ e $dim(KerF) \geqslant 1$, quindi F non e' invertibile. 😊

Note:

diagonalizzabile $\not\Rightarrow$ invertibile e viceversa

Proposition 5.3.7

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (non vale l'opposto)

Note:

Quindi cambiando le basi ad una matrice, il polinomio non cambia (purche' siano le stesse al dominio e codominio)

Chapter 6

Ortogonalita'

6.1 Prodotto scalare euclideo

Sul libro si chiama 'prodotto scalare definito positivo', ma non lo seguiamo esattamente.
Siano $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$, il prodotto scalare si indica con $< v, w >$ (non e' il sottospazio!) ed e' un numero.
Osserviamo che $< v, w >= |v||w|cos\theta$, dove θ e' l'angolo convesso formato dalle semirette di v e w.

Proposition 6.1.1

Il prodotto scalare fra due vettori del piano $v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2)$, allora un'altra formula per ottenere il loro prodotto scalare e':

$$< v, w >= x_1x_2 + y_1y_2$$

Si puo' espandere in $\mathbb{R}^n$

In altre parole si puo' vedere il prodotto scalare fra due vettori come il prodotto di due matrici (una a riga e l'altra a colonna):

$$< v, w >= v \cdot w^T = (v_1, ..., v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1w_1 + ... + v_nw_n$$

6.2 Proprieta' del prodotto scalare

Possiamo quindi vedere il prodotto scalare come una funzione che prende due vettori di $\mathbb{R}^n$ e ci restituisce uno scalare: $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che gode di varie proprieta':

- **Simmetria**: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n. < x, y >=< y, x >$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n. < x + z, y >=< x, y > + < z, y >$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}. < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

Notiamo che se fissiamo y, questa funzione diventa lineare. Inoltre, grazie alla simmetria, possiamo applicare le prop. 2 e 3 anche a y. Quindi fissando x otteniamo nuovamente una funzione lineare, per questo motivo il prodotto scalare e' detto **bilineare**.

- $\forall x \in \mathbb{R}^n. < x, x >\geqslant 0 \wedge < x, x >= 0 \iff x = \underline{0}$

Questa ultima proprieta' ci dice che il prodotto scalare ha forma **definita positiva** e ci consente di dare la seguente definizione:

Definition 6.2.1: Norma

Dato un vettore $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si dice **norma** di v la "lunghezza" del vettore che parte dall'origine $(0, ..., 0)$ e arriva a $(v_1, ..., v_n)$ e si calcola in tale modo:

$$||v|| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$$

6.3 Vettori e basi ortogonali

Definition 6.3.1: Vettori ortogonali

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** se l'angolo compreso fra di loro e' $\frac{\pi}{2}$, ovvero quando:

$$< v, w >= 0$$

Seguendo questa definizione, l'ortogonalita' gode delle seguenti proprieta':

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n . x \perp y \iff y \perp x$ (simmetria)
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n . x \perp y \wedge x \perp z \iff x \perp \lambda y + \mu z$

Quest'ultima proprieta' ci dice che se un vettore e' ortogonale rispetto ad altri due vettori, allora e' ortogonale rispetto a tutti i vettori appartenenti al sottospazio vettoriale formato dai due vettori. Allora possiamo dire che:

Proposition 6.3.1 Indipendenza lineare di vettori ortogonali

Presi dei vettori non nulli $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ ortogonali fra di loro, questi sono *linearmente indipendenti*

: Dati k vettori non nulli $v_1, ..., v_k$ ortogonali, dimostriamo che $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = \underline{0} \implies \lambda_1, ..., \lambda_k = 0$. Sappiamo che $\forall i = 1, ..., j, < \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k, v_i >= 0$, dato che il prodotto scalare per il vettore nullo e' sempre zero. Usando la bilinearita', possiamo trasformare il prodotto scalare $\lambda_1 < v_1, v_i > + ... + \lambda_i < v_i, v_i > + ... + \lambda_k < v_k, v_i >= 0$, togliendo i prodotti scalari che per ortogonalita' sono nulli, ci rimane (usando la definizione di norma) $\lambda_i ||v_i||^2 = 0$. Dato che v_i non e' nullo per ipotesi, abbiamo che $\forall i = 1, ..., k . \lambda_i = 0$. 😊

Definition 6.3.2: Base ortonormale

I vettori $v_1, ..., v_n$ si dicono **ortonormali** se $< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Cioe' se sono tutti lunghi 1 e perpendicolari

Le basi ortonormali hanno la caratteristica per cui facendo il prodotto scalare di un vettore con ognuno dei vettori della base si ottiene la coordinata (rispetto alla base) corrispondente, ovvero:

Proposition 6.3.2

Data una base ortonormale $B = \{v_1, ..., v_n\}$ e un vettore v con coordinate rispetto a B $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$, si ha che:

$$\forall i = 1, ..., n . < v, v_i >= \lambda_i$$

Cio' coincide con l'interpretazione geometrica del prodotto scalare, in quanto i λ trovati in questo modo corrispondono al modulo del vettore proiettato su ciascun vettore della base.

6.4 Sottospazi ortogonali

Definition 6.4.1: Sottospazio ortogonale

Dato uno sottospazio $W \leqslant \mathbb{R}^n$, si chiama **sottospazio ortogonale** di W l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali a tutti i vettori di W, ovvero:

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n | \forall w \in W. < v, w >= 0\}$$

Proposition 6.4.1

Tutti i sottospazi ortogonali sono sottospazi vettoriali

Proposition 6.4.2

Dato un sottospazio W con base $v_1, ..., v_k$, il suo sottospazio ortogonale e' formato da:

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n | \forall i = 1, ..., k. < v, v_i >= 0\}$$

Ovvero, per vedere se un vettore e' ortogonale a tutti i vettori di un sottospazio, basta controllare che sia ortogonale ai vettori base.

: Si dimostra usando la dipendenza lineare e la bilinearita' del prodotto scalare. 😄

Proposition 6.4.3 Dimensione sottospazio ortogonale

Dato un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$, allora:

$$dimW^{\perp} = n - dimW$$

Inoltre, $W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$

: La $dimW^{\perp}$ e' l'insieme delle soluzioni del sistema rappresentato dalla matrice omogenea che ha come righe la base di W, che quindi ha dimensione $n - r(W^{\perp})$. Ma noi sappiamo che il rango righe e il rango colonne di una matrice coincidono, quindi $r(W^{\perp}) = r(W) = k = dimW$. Allora per il teorema della dimensione $dimW^{\perp} = n - dimW$.
Per dimostrare la seconda parte, e' subito ovvio che dato un vettore $v \in W^{\perp}$ per cui $\forall w \in W. \langle v, w \rangle = 0$ puo' appartenere anche a W solo se $v = \underline{0}$. 😄

6.5 Proiezione ortogonale

Definition 6.5.1: Proiezione ortogonale

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, si dice **proiezione di v su w** il vettore $\overline{v}$ dato da:

$$proj_w(v) = \overline{v} = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

Inoltre, se noi togliamo dal vettore v la sua proiezione su w, allora rimane solo la componente di v ortogonale a w, quindi in generale:

Proposition 6.5.1

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, il vettore $\overline{v}$ dato da:

$$\overline{v} = v - proj_w(v)$$

E' ortogonale rispetto a w.

6.6 Algoritmo di Gram-Schmidt

Algoritmo per trovare una base ortonormale di un sottospazio data una sua qualunque base. Utilizza la proposizione precedente per trovare la componente di ogni vettore che e' perpendicolare a tutti i vettori precedenti, formalmente:

Proposition 6.6.1

Dato un SV W e una sua base $\{v_1, ..., v_k\}$, e' possibile trovare una base ortonormale di W seguendo questo procedimento:

- Prima di tutto troviamo una base ortogonale:

$$w_i = \begin{cases} w_1 & i = 1 \\ v_i - proj_{v_1}(v_i) - ... - proj_{v_{i-1}}(v_i) & i \neq 1 \end{cases}$$

- Ora basta normalizzare i vettori $w_1, ..., w_k$ per ottenere una base ortonormale:

$$f_i = \frac{w_i}{||w_i||}$$

Quindi $\{f_1, ..., f_k\}$ e' una base ortonormale di W.

6.7 Applicazioni e matrici ortogonali

Definition 6.7.1

Una app. lin. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice ortogonale se:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n . \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Quindi F e' una applicazione lineare che conserva le lunghezze ($||F(v)|| = \sqrt{\langle F(v), F(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = ||v||$) e che conserva gli angoli ($\langle F(v), F(w) \rangle = ||F(v)||||F(w)||cos\theta = ||v||||w||cos\gamma \implies cos\theta = cos\gamma$).

Definition 6.7.2: Matrice ortogonale

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice ortogonale se:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n . \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$$

E' ovvio per definizione che:

Proposition 6.7.1

Una applicazione lineare L_A e' ortogonale $\iff$ la sua matrice associata A e' ortogonale

Vediamo delle implicazioni interessanti riguardo le matrici ortogonali:

Proposition 6.7.2

Data una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$, sono equivalenti:

- A e' ortogonale
- $\forall x \in \mathbb{R}^n . < Ax, Ax >=< x, x >$
- $AA^T = I$, cioe' $A^{-1} = A^T$
- Le colonne e le righe di A formano due basi ortogonali di $\mathbb{R}^n$

: $3 \iff 4$ ☺

6.8 Simmetria

Definition 6.8.1: Endomorfismo simmetrico

Dato un endomorfismo $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, si dice simmetrico se:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n . \langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle$$

Definition 6.8.2: Matrice simmetrica

Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice simmetrica se:

$$\forall i, j = 1, \ldots, n . c_{ij} = c_{ji}$$

Proposition 6.8.1

Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo e sia $A = M_C^C(F)$:

$$F \text{ e' simmetrica} \iff A \text{ e' simmetrica}$$

6.9 Teorema spettrale

Theorem 6.9.1 Spettrale

Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo simmetrico, allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di F. Piu' in particolare:

- F e' diagonalizzabile
- Se λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti, allora gli autospazi relativi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ sono ortogonali
- Se $A = M_C^C(F)$, allora esiste una matrice ortogonale P per cui esiste una matrice diagonale D tale che $D = P^{-1}AP = P^TAP$. Ovvero, A e' "ortogonalmente simile" a una matrice diagonale.

Chapter 7

Divisione Euclidea

Dati $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$, $\exists! q, m \in \mathbb{N}$ tali che $a = bq + r$ dove q e' il **quoziente** e $0 \leqslant r < b$ e' il **resto** sono unici.
Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ diciamo che b divide a e scriviamo $b|a$ se $\exists c \in \mathbb{Z}$ tale che $a = bc$

Note:

$b|0$ perche' $0 = b0$

Theorem 7.0.1 Bezout

Dati $a, b \in \mathbb{N}$ (vale anche con $a, b \in \mathbb{Z}$), $\exists r, s \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$mcd(a, b) = ra + sb$$

Note:

r e s non sono unici

7.0.1 Relazione di congruenza

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ diciamo che a e' congruo a b modulo n:

$$acongruent_n bsen|a - b$$

Chapter 8

Aritmetica modulare