Foglio 1

$$\begin{cases} x+y-2z+t=1 \\ 3x+2y-z+6t=4 \\ y-z+t=0 \\ 3z+4t=3 \end{cases}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

- Uso l'algoritmo di gauss per ridurre la matrice a scala:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

- da cui si ricava il sistema lineare associato:

$$\begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ z = -2 \\ -y = 1 - \frac{27}{4} + 10 \qquad y = -\frac{17}{4} \\ x+y-2z+t=1 \qquad x = 1 + \frac{17}{4} - 4 - \frac{9}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=2k \\ 2x+kz=0 \\ 2x+ky-4z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2K \\ 2 & 0 & K & 0 \\ 2 & K & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2K \\ 0 & -2 & K-2 & -4K \\ 0 & K-2 & -6 & -4K \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2K \\ 0 & 1 & -\frac{K-2}{2} & 2K \\ 0 & 0 & \frac{(K-2)^2}{2}-6 & -2K(K-2)-4K \end{array}\right) \qquad \frac{K^2-4K-8}{2} \qquad -2K^2$$

Foglio 2

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ $\quad \bullet\ \underline{0} \in S$

• $\forall (x,y,z), (a,b,c) \in S : (x,y,z) + (a,b,c) \in S$

$$(x+a, y+b, z+c) \in S, \quad (0, \underset{\uparrow \mathbb{R}}{y+b}, \underset{\uparrow \mathbb{R}}{z+c}) \in S\ !$$

• $\forall (x,y,z) \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}.\ \lambda(x,y,z) \in S$

$$(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in S, \quad (0, \underset{\uparrow \mathbb{R}}{\lambda y}, \underset{\uparrow \mathbb{R}}{\lambda z}) \in S\ !$$

b) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ $\quad \bullet\ \underline{0} \in T$ $\to$ controllo veloce che si può fare

• $\forall (x,y,z), (a,b,c) \in S.\ (x,y,z) + (a,b,c) \in S,$

$$(\underbrace{x+a, x+a}_{=}, z+c) \in S\ !$$

• $\lambda(x,y,z) \in S$? $\quad (\underbrace{\lambda x, \lambda x}_{=}, \lambda z) \in S!$

c) $W_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p(x)) = n\}, n \in \mathbb{N}$

• $0 \in W_n$

• $\forall p(x), q(x) \in W_n.\ p(x) + q(x) \in W_n$ $\quad \deg(p(x) + q(x)) = \deg(p(x)) = \deg(q(x)) \Rightarrow \in W_n!$

• $\forall p(x) \in W_n, \lambda \in \mathbb{R}.\ \lambda p(x) \in W_n$ $\quad \deg(\lambda p(x)) = \deg(p(x)) \Rightarrow \in W_n!$

d) $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$ $\quad \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in D$

• $\forall A, B \in D.\ A + B \in D$ $\qquad \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & d+z \end{bmatrix} \in D$

g) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y = 0\}$ $\cdot\ \underline{0} \in X$

$\cdot\ (x, -x^2, z) + (a, -a^2, c) \overset{?}{\in} X, \quad (x+a, -x^2-a^2, z+c) \overset{?}{\in} X$

$-(x+a)^2 = -x^2 - a^2 - 2xa \neq$ $\nearrow$ $\notin X$

h) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = -1\}$ $\cdot\ \underline{0} \notin X$

$\Downarrow$

X non è sottospazio

i) $X = \{p(x) = 3x^2 + rx + s / r, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

$\cdot\ 0 \notin X$ => non è sottospazio

3.4.4

$k^2x^2 + x + 1 \in \langle 2x^2 - x, -x^2 + 3x + 1 \rangle$

$k \in \mathbb{R} .\ \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} .\quad k^2x^2 + x + 1 = \lambda_1 2x^2 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 + \lambda_2 3x + \lambda_2$

$k^2x^2 + x + 1 = (2\lambda_1 - \lambda_2)x^2 + (3\lambda_2 - \lambda_1)x + \lambda_2$

$\begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = k^2 \\ 3\lambda_2 - \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 2 \\ k^2 = 3 \end{cases} \quad k = \pm\sqrt{3}$

3.4.3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) $C \in M_{2,3}(\mathbb{R}) .\ C \in \langle A, B \rangle, C \notin \langle A \rangle \wedge C \notin \langle B \rangle$

2) $D \in M_{2,3}(\mathbb{R}) .\ D \notin \langle A, B \rangle$

1) $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} .\ C = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & -\lambda_2 & -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 4\lambda_1 & \lambda_1 - 2\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\forall k \in \mathbb{R} .\ C \neq \begin{pmatrix} k & 0 & -2k \\ 4k & k & 0 \end{pmatrix} \wedge C \neq \begin{pmatrix} -k & -k & k \\ 0 & -2k & k \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2 = K \\ -\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1+\lambda_2 = -2K \\ 4\lambda_1 = 4K \\ \lambda_1-2\lambda_2 = K \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2=0 \\ \lambda_1 = K \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 \neq 0$$

$$C=\left(\cdots\right) \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \neq 0$$

2) $D \in M_{2,3} \, . \, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \, . \, D \neq \left(\cdots \right) \quad D=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2 = a \\ -\lambda_2 = b \\ -2\lambda_1+\lambda_2 = c \\ 4\lambda_1 = d \\ \lambda_1-2\lambda_2 = e \\ \lambda_2 = f \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & b \\ -2 & 1 & c \\ 4 & 0 & d \\ 1 & -2 & e \\ 0 & 1 & f \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & -1 & c+2a \\ 0 & 4 & d-4a \\ 0 & -1 & e-a \\ 0 & 1 & f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & c+2a-b \\ 0 & 0 & d-4a+4b \\ 0 & 0 & e-a-b \\ 0 & 0 & f+b \end{array}$$

• ha soluzioni solo se

$$\begin{cases} 2a-b+c=0 \\ -4a+4b+d=0 \\ -a-b+e=0 \\ b+f=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & +4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -8 & 0 \end{array}$$

$rr(A) = rr(A|b) = 4$

• infinite soluzioni dipendenti da $6-4=2$ parametri

$$\begin{cases} a+b-e=0 \\ b+f=0 \\ c+2e+3f=0 \\ d-4e-8f=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f=b \\ e=a+b \\ c=-2a-5b \\ d=4a+12b \end{cases}$$

$$f \neq b \lor e \neq a+b \lor c \neq -2a-5b \lor d \neq 4a+12b$$

$$D = \begin{pmatrix} a & b & -2a-5b \\ 4a+12b & a+b & b+1 \end{pmatrix}$$

$\nparallel$ $\forall b \in \mathbb{R}$

b

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}_3[x] := \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
Consideriamo il suo sottoinsieme:

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d | d = 0, ab = 0\}$$

a) Si stabilisca se S èun sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Si stabilisca se esiste un sottospazio proprio T di $\mathbb{R}_3[x]$ contenente S.

a) $\cdot\ 0 \in S \quad \cdot\ (a+e)x^3 + (b+f)x^2 + (c+g)x + d+h \overset{?}{\in} S$

$d=0 \quad ab=0$
$h=0 \quad ef=0$

$$\begin{cases} d+h=0 \\ (a+e)(b+f)=0 \end{cases} \qquad ab+af+eb+ef \neq 0$$

Non è un sottospazio

b) $\exists T < \mathbb{R}_3[x] .\ S \subset T$ $\qquad T = \{p(x) = ax^3+bx^2+cx+d \,/\, d=0\}$

$S = \{p(x) \in T \,/\, ab=0\} \subset T$

Esercizio 2. Si stabilisca quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}_3[x]$ sono sottospazi vettoriali:

a) $A = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d| \quad p(1) = 0\}$

b) $B = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | \quad p(1) = 1\}$

c) $C = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | \quad p(1) = p(0)\}$

d) $D = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | \quad p(1) = p(0) + 1\}$

a) $a+b+c+d=0 \qquad \cdot\ 0 \in A \qquad \cdot\ (a+e)x^3 + (b+f)x^2 + (c+g)x + d+h \overset{?}{\in} A$

$a+e+b+f+c+g+d+h=0$ ✓

$\cdot\ \lambda a x^3 + \lambda b x^2 + \lambda c x + \lambda d \qquad \lambda(a+b+c+d)=0$ ✓

Esercizio 3. Si stabilisca per quali valori del parametro reale a il polinomio $x^2 + ax + 1$ appartiene al sottospazio $\langle ax^2 + ax + 1, ax^2 + x + a \rangle$.

$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + ax + 1 = a(\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (\lambda_1 a + \lambda_2)x + \lambda_1 + \lambda_2 a$$

$$\begin{cases} a\lambda_1 + a\lambda_2 = 1 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 + a\lambda_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & a(1-a) & 1-a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1+a)(1-a) & 0 \\ 0 & a(1-a) & 1-a \end{matrix}$$

• $(1+a) \neq 0$

$$\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1+a)(1-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{matrix}$$

– ha una soluzione se $a \neq 1$

• $(1+a) = 0 \Rightarrow a = -1$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{matrix}$$

– ha una soluzione

Esercizio 4. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $M_2(\mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti:

$A = \begin{pmatrix} -1 & k+1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scelto uno dei valori di k trovati, si scriva un vettore come combinazione lineare degli altri.

• Sappiamo che per isomorfismo $A = (-1, k+1, k, 0)$ $B = (k, 0, -2, 0)$ $C = (1, -1, 0, 0)$

• MEG ~~Gauss~~ in modo diretto

$$\begin{matrix} -1 & k+1 & k & 0 \\ k & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 \\ 0 & k & -2 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 \\ 0 & 0 & +2+k & 0 \end{matrix} \qquad k \neq 0 \wedge k \neq 2$$

$k = 0 \Rightarrow A = (-1, 1, 0, 0)$ $B = (0, 0, -2, 0)$

$$(1, -1, 0, 0) = (-\lambda_1, \lambda_1, -2\lambda_2, 0)$$

$$C = -A$$

Esercizio 1. Dire se il seguente sottoinsieme X dello spazio vettoriale V è linearmente indipendente oppure no e calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $\langle X \rangle$ da esso generato. Inoltre nel caso in cui sia linearmente indipendente completarlo ad una base per V, mentre in caso contrario esprimere uno dei suoi elementi come combinazione lineare degli altri:

a) $V = \mathbb{R}^3 \quad X = \{(3,2,1),(1,4,-3),(-1,-1,0)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^5 \quad X = \{(2,0,-1,0,0),(1,1,1,-2,0),(3,1,1,1,0)\}$.

c) $V = \mathbb{R}^4 \quad X = \{(1,2,1,0),(1,2,0,0),(0,0,0,1)\}$.

d) $V = \mathbb{R}^4 \quad X = \{(0,2,1,-4),(0,1,-2,-4),(0,2,6,0)\}$.

e) $V = \mathbb{R}^3 \quad X = \{(0,5,7),(-3,4,6),(3,6,8),(3,1,1)\}$.

a)
$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -10 & 10 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

lin. dip.

dim $X = 2$

$$V = \langle \underbrace{(1,4,-3),(0,1,-1)}_{X},(0,0,1) \rangle$$

Esercizio 2. Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto all1a base ordinata $\mathcal{B}$.

a) $\mathbf{v} = (2,1,0,-2) \in \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = ((1,0,0,-1),(1,0,2,1),(1,1,0,-1),(0,0,-2,1))$.

b) $\mathbf{v} = x^2 - 2x + 3 \in \mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.

c) $\mathbf{v} = x^2 - 2x + 3 \in \mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B} = (2, x, 1+x^2, x^3)$.

a)
$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 2 \\ c = 1 \\ 2b - 2d = 0 \\ -a+b-c+d = -2 \end{cases} \qquad (v)_{\mathcal{B}} = (1,0,1,0)$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad v = (1,0,0,-1) + (1,1,0,-1)$$

Esercizio 3.

Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] | p(1) = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$ e determinare un insieme di generatori di W.

- per def $W \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ $\quad p(x) = ax^2 + bx + c$

$p(1) = a + b + c = 0$

- $0 \in W$
- $(a+d)x^2 + (b+e)x + c+f \in W$
- $\lambda(a+b+c) = 0 \Rightarrow \in W$

- Generatori $\quad a = -b-c$

$p(x) \in W, \quad p(x) = -(b+c)x^2 + bx + c$

$$(-bx^2 + bx) + (-cx^2 + c) = b(-x^2+x) + c(-x^2+1)$$

$$W = \{b(-x^2+x) + c(-x^2+1) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \langle (-x^2+x), (-x^2+1) \rangle$$

Esercizio 4.

a) Stabilire se i vettori $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ generano $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se i vettori $(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,0)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2,1,1)$ come loro combinazione lineare. E possibile farlo in due modi diversi? → no perché B è base

c) Stabilire se i vettori $(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,0),(0,1,1)$ generano $\mathbb{R}^3$ In caso affermativo, scrivere il vettore $(2,1,1)$ come loro combinazione lineare. E possibile farlo in due modi diversi? sì

d) Stabilire se i vettori $(1,1,1),(1,-1,0),(1,3,2),(-1,3,1)$ generano $\mathbb{R}^3$.

$$(2,1,1)=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,-1,0)+\lambda_3(1,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1-\lambda_2=1\\ \lambda_1=1\end{cases} \qquad \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=1\end{cases} \qquad (2,1,1)_B=(1,0,1)$$

Esercizio 6. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$S=\langle(1,1,1)\rangle \quad T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | y+z-2x=0\}$$

a) Trovare un insieme di generatori per T.

b) Trovare una base $\mathcal{A}$ di S. Tale base è unica?

c) Verificare che $S\subset T$ e completare la base $\mathcal{A}$ in una base $\mathcal{B}$ di T.

d) Scrivere le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{A}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}$.

e) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$T=\{(x,2x-z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{x(1,2,0)+z(0,-1,1) \mid x,z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\langle(1,2,0),(0,-1,1)\rangle$$

$$S=\langle(1,1,1)\rangle=\{\lambda(1,1,1) / \lambda\in\mathbb{R}\}$$

• Dato che S é generato da solo un vettore, e' insieme minimale di generatori ha dimensione 1, quindi $\dim S=1 \Rightarrow \{(1,1,1)\}$ é base di S

$$T=\langle(1,2,0),(0,-1,1)\rangle \quad S=\langle(1,1,1)\rangle$$

• Per verificare che $S\subset T$, prima dimostro che $\{(1,2,0),(0,-1,1)\}$ é base di T usando GEL:

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \dim T=2 > \dim S \text{ quindi } S\neq T$$

• Ora dimostro che $\forall\lambda\in\mathbb{R}\,.\,\exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\,.\,\lambda(1,1,1)=\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(0,-1,1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\lambda\\2&-1&\lambda\\0&1&\lambda\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c}1&0&\lambda\\0&+1&+\lambda\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda\\ \lambda_2=\lambda\end{cases} \Rightarrow S\subset T$$

• Sapendo che $(1,1,1)\in T$, posso aggiungere $\dim T-1=1$ vettore $\in T$ lin. ind. rispetto a $(1,1,1)$ per completare la base di S a T

• Prendiamo $v\in T$, $v=\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(0,-1,1)$. Vogliamo che v sia lin. ind. rispetto a $(1,1,1)$

· Uso Gauss diretto per trovare λ_1, λ_2 per cui

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & 2\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ha rr = 2 = dim

$\downarrow$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_2 \neq \lambda_1 \end{cases} \rightarrow \lambda_2 \neq \lambda_1$

· $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \qquad A = \{(1,1,1),(1,2,0)\}$

Esercizio 7. Si considerino in $\mathbb{R}_2[x]$ i polinomi:

$$p_1(x) = x^2 + ax + 3 \quad p_2(x) = x^2 - 3x - a \quad p_3(x) = ax^2 + 2x + 2$$

a) Stabilire per quali valori del parametro relae a i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ generano $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Stabilire per quali valori del parametro reale a i polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ generano $\mathbb{R}_2[x]$.

Sia ora $S = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$.

c) Stabilire per quali valori del parametro reale a il polinomio $p(x) = ax^2 + 3x + 3$ appartiene a S.

d) Scelto un valore di a per cui $S \neq \mathbb{R}_2[x]$, stabilire se esistono due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}_2[x]$ che non appartengono a S.

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow$ n° generatori ≥ 3

· 3 vettori generano uno SV con dim = 3 $\iff$ sono una base

· Per isomorfismo considero i vettori

$p_1 = (1, a, 3) \quad p_2 = (1, -3, -a) \quad p_3 = (a, 2, 2)$

$\begin{matrix} 1 & a & 3 \\ 1 & -3 & a \\ a & 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & a & 3 \\ 0 & +3+a & a+3 \\ 0 & 2-a^2 & 2-3a \end{matrix}$

· $a \neq -3$ $\qquad \begin{matrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3-a}{3+a} \\ 0 & 0 & 2-3a+\frac{(a^2-2)(3-a)}{3+a} \end{matrix}$

$6 - 7a - 3a^2 + 3a^2 - 6 - a^3 + 2a = 0$

$-a^3 - 5a = 0 \qquad -a(a^2+5) = 0 \qquad a = 0$

$\vee$

· $a = -3 \qquad \begin{matrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \qquad a = -3$

Foglio 4

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y, -z).$$

a) Determinare una base di Ker f e una di Im f;

b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva;

c) Stabilire se il vettore $(1, 2, 3)$ appartiene a Im f e, in caso affermativo, determinare le sue coordinate rispetto alla base trovata nel punto a);

d) Stabilire se il vettore $(1, 2, 3)$ appartiene a Ker (f). Sia $w = f(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ l'immagine di $(1, 2, 3)$ tramite f. Esiste un altro vettore in $\mathbb{R}^3$ che ha immagine w tramite f ?

$A\underline{x} = 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\underline{0}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x, y, z) = (kx + y - z, ky + (k + 1) z, ky + 2z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio;

b) determinare per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva;

c) determinare per quali fattori di k l'applicazione f_k non è suriettiva. Scelto uno dei valori di k trovati, determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ che non appartiene a $\mathrm{Im} f_k$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & k+1 \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{matrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & k+1 \\ 0 & k & 2 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{matrix}$$

• $k \neq 0 \wedge k \neq 1$

• $k = 0$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

c)
$$\begin{matrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & k \\ -1 & k+1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & k & k \\ 0 & 2k+1 & 2+k \\ 0 & -k^2 & -k^2 \end{matrix}$$

• $k \neq 0$

$$\begin{matrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k \end{matrix} \qquad k = 1$$

• $k = 0$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$v \in \mathbb{R}^3 .\ v \notin \mathrm{Im} f_0$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathrm{Im} f_0 = \langle (1,0,0), (0,1,2) \rangle \qquad v = (0,0,1)$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_k(\mathbf{e}_1) = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $f_k(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2$, $f_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_3$, $f_k(\mathbf{e}_4) = -\mathbf{e}_2$. Sia inoltre $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

$$f_k = L_{A_k} \qquad A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.

Dato che $\dim \mathbb{R}^4 > \dim \mathbb{R}^3$, la funzione f_k non potrà mai essere iniettiva

c) Stabilire per quali valori di k la dimensione di Ker f_k è 2.

d) Stabilire se g è iniettiva o suriettiva.

e) Stabilire se esistono $g \circ f_k$ e $f_k \circ g$ e, in caso affermativo, determinarle.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-K^2 = 0 \iff K = 0$

$\dim(\ker f_0) = 4 - 2 = 2$

d) g non può essere iniettiva

$\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2 \Rightarrow \mathrm{Im}\, g \equiv \mathbb{R}^2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

g é suriettiva

e) Esiste $g \circ f_K : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

Matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & K & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} K+1 & 4 & K & -2 \\ 2 & 2 & 2K & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$F_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + kx_2 + 4x_3, kx_1 + x_2 + 3x_3, 2x_1 + 2x_2 + 4x_3)$.

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base del nucleo di F_k.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4 \in \mathrm{Im}\, F_k$.

c) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $G \circ F$ sia l'applicazione identica di $\mathbb{R}^3$.

$BA_0 = I \qquad B = A_0^{-1}$

a) $F_K = L_{A_K}$ $\quad A_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & K & 4 \\ K & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A\underline{x} = \underline{0} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & K & 4 & 0 \\ K & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & K-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-K & 3-2K & 0 \end{matrix}$$

• $K \neq 2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2K & 0 \end{matrix}$$

• $K = \frac{3}{2}$ $\quad B = \{(1,1,2,0), (0,1,0,0)\}$

• $K \neq 2 \wedge K \neq \frac{3}{2}$ $\quad B = \{(1,1,2,0), (0,1,0,0), (0,0,3-2K,0)\}$

• $K = 2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

• $K = 2$

$B = \{(1,1,2,0), (0,1,1,0)\}$

b) $(1,K,2,2) \in \mathrm{Im}\, F_K$ $\quad A\underline{x} = (1,K,2,2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & K & 4 & K \\ K & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & K-2 & 0 & K-2 \\ 0 & 1-K & 3-2K & 2-K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\cdot K \neq 2$

$$= \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-2K & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \cdot K \neq \frac{3}{2}$$

$\cdot K = 2$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$K \neq \frac{3}{2}$

$$G = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & n & m \end{pmatrix} \cdot A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{x} A_0 = (1,0,0)$

$$G \cdot A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a,b,c,d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

$$\begin{cases} a+2b+2d=1 \\ a+c+2d=0 \\ 2a+4b+3c+4d=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} a+2b+2d=1 \\ -2b=-1-c \\ c=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad a=-\frac{2}{3}-2d \quad b=\frac{5}{6} \qquad \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, 0\right)$$

⋮

Foglio 5 (?)

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che

- $F_k(\mathbf{e}_1) = (k-2)\mathbf{e}_1 + (k-1)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$,
- $F_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
- $F_k(\mathbf{e}_3) = (k-2)\mathbf{e}_1 + 2(k-1)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3$,
- $F_k(\mathbf{e}_4) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
- $F_k(\mathbf{e}_5) = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Stabilire per quali valori di k, se esistono, l'applicazione F_k è iniettiva e/o suriettiva.

• Non sarà mai iniettiva

$$\operatorname{Im} F_K = \langle (K-2, K-1, K-1), (0,1,1), (K-2, 2K-2, 2K-1), (0, K, 1), (0,-1,1) \rangle$$

• $K \neq 2$

$$\begin{matrix} K-2 & K-1 & K-1 \\ K-2 & 2K-2 & 2K-1 \\ 0 & K & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} K-2 & K-1 & K-1 \\ 0 & K-1 & K \\ 0 & K & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} K-2 & K-1 & K-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ se $K \neq 2$ SU

• $K = 2$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Esercizio 2. Stabilire se è possibile costruire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che:

a) f è iniettiva; Sí, dato che $\dim \mathbb{R}^3 < \dim M_2$

b) $\operatorname{Im} f = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rangle$. Sí, se $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, per il teo. dim. $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$. Dato che $\operatorname{Im} f$ é generata da tre matrici, $\dim(\operatorname{Im} f) \leq 3$ che rientra nei limiti massimi

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x + 4y + 6z, 3x - 3y - 2z, 3y + 4z).$$

a) Determinare una base di Ker f e una di Im f;

b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva;

c) Calcolare $f^{-1}((-7, 14, -7))$;

d) Determinare delle equazioni cartesiane per Ker f e per Im f.

e) Determinare, se esiste, un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -15 & -20 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} a = \frac{16}{3}z - 6z \quad -\frac{2}{3}z \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases}$$

$$\ker f = \left\{\left(-\frac{2}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \middle| z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{-\frac{1}{3}z(2,4,-3) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\alpha(2,4,-3) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \langle (2,4,-3) \rangle \quad B = \{(2,4,-3)\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \\ 0 & -20 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad B = \{(1,3,0), (0,5,-1)\}$$

c) Per teo. struttura $f^{-1}(-7,14,-7) = \{v + z \mid z \in \ker f\}$

$Av = (-7,14,-7)$

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 & -7 \\ 3 & -3 & -2 & 14 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & -20 & 35 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = -7 \\ x + 4y + 6z = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{7}{3} - \frac{4}{3}z \\ x - \frac{28}{3} - \frac{16}{3}z + 6z = -7 \end{cases} \qquad x = -\frac{2}{3}z + \frac{7}{3}$$

$$\ker f = \left\{\left(-\frac{2}{3}z + \frac{7}{3}, -\frac{7}{3} - \frac{4}{3}z, z\right) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$$

d) $\ker f = \langle (2,4,-3) \rangle$

$$\begin{matrix} 2 & x \\ 4 & y \\ -3 & z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & x \\ 0 & y - 2x \\ 0 & z + \frac{3}{2}x \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ z + \frac{3}{2}x = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{Im} f = \langle (1,3,0), (0,5,-1) \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 3 & 5 & y \\ 0 & -1 & z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 5 & y - 3x \\ 0 & -1 & z \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & -3x + y + 5z \end{matrix} \qquad -3x + y + 5z = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = x \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = y \\ -\lambda_2 = z \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2x = 0 \\ -3x + y + 5z = 0 \\ z + \frac{3}{2}x = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Foglio 6

Esercizio 2. (8 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + kx_4, x_1 - 2x_3 + kx_4, x_1 + kx_2 + kx_3 - k^2x_4)$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.

b) Esistono valori di k tali che Ker F_k abbia dimensione 2?

c) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \in$ Ker F_k.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & K \\ 0 & -2 & K \\ K & K & -K^2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & K+2 \\ 0 & 0 & 2K+2 \\ 0 & 0 & -K^2-K \end{matrix}$$

- $K \neq -1$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & K+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

- $K = -1$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

é su $\forall K \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $$\begin{matrix} 1 & -2 & 0 & K & 0 \\ 1 & 0 & -2 & K & 0 \\ 1 & K & K-K^2 & & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & K & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & K+2 & K & -K-K^2 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & K & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2K+2 & -K-K^2 & 0 \end{matrix}$$

- $\begin{cases} 2K+2=0 \\ -K(1+K)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K=-1 \\ K=0 \lor K=-1 \end{cases} \Rightarrow K=-1$

c) $(0,2,2,1) \in \operatorname{Ker} K$ $\qquad \begin{cases} x-2y+Kh=0 \\ y-z=0 \\ (2K+2)z - K(1+K)h=0 \end{cases}$

- $K \neq -1 \land K \neq 0$

$$\begin{cases} z=y \\ h=\dfrac{(2K+1)y}{K(1+K)} \\ x = 2y - \dfrac{2K+1}{1+K}\, y \end{cases} \qquad \operatorname{Ker} K = \left\{ \left(\frac{y}{1+K}, y, y, \frac{(2K+1)y}{K(1+K)} \right) / \forall y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$y\left(\frac{2+2K-2K-1}{1+K}\right) \qquad = \operatorname{Ker} K = \left\{ y\left(\frac{1}{1+K}, 1, 1, \frac{2K+1}{K(1+K)}\right) / \forall y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Ker} K = \left\langle \left(\frac{1}{1+K}, 1, 1, \frac{2K+1}{K(1+K)} \right) \right\rangle$$

$(0,2,2,1) \notin \operatorname{Ker} K$

- $K = -1$

$$\begin{cases} z=y \\ x=2y+h \end{cases} \qquad \operatorname{Ker} K = \langle (2,1,1,0), (1,0,0,1) \rangle$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix} \Rightarrow$$

sono lin ind.

$(0,2,2,1) \notin \operatorname{Ker} f_{-1}$

- $k=0$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \langle (0,0,0,1) \rangle$$

Esercizio 2. (7 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (kx_2 + x_3 + 2kx_4, kx_1 - 3x_2 - 6x_4, 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4)$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3 \in \operatorname{Im} F_k$.

c) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 \in \operatorname{Ker} F_k$.

a)
$$\begin{matrix} 0 & k & 7 \\ k & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2k & -6 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -3 & 4 \\ k & -3 & 4 \\ 0 & k & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4-k \\ 0 & k & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{4-k}{3} \\ 0 & 0 & 7+\frac{k}{3}(4-k) \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$7+\frac{k}{3}(4-k) = 0 \qquad -k^2+4k+21=0 \qquad k^2-4k-21=0$$

$(k-7)(k+3)=0$

$k=7 \vee k=3$

- $k \neq 7 \wedge k \neq 3$

  F_k é su

b)
- $k \neq 7 \wedge k \neq 3$ $\quad \operatorname{Im} F_k = \langle (1,0,1), (0,-1,\frac{4-k}{3}), (0,0,7+\frac{k}{3}(4-k)) \rangle$

  $\dim \operatorname{Im} F_k = 3 \Rightarrow F_k$ é su $\Rightarrow \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 . (x,y,z) \in \operatorname{Im} F_k$

- $k=7 \vee k=3$ $\quad \operatorname{Im} F_k = \langle (1,0,1), (0,-1,\frac{4-k}{3}) \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{4-k}{3} \\ 2 & -3 & 9 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & k-4 \\ 0 & -3 & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & k-4 \\ 0 & 0 & k+3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix}$$

$\forall k \in \mathbb{R} . (2,-3,9) \in \operatorname{Im} F_k$

c)

$$\begin{matrix} 0 & K & 1 & 2K & 0 \\ K & -3 & 0 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 8 & 0 \\ K & -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & K & 1 & 2K & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -3-\frac{4}{7}K & -\frac{K}{7} & -6-\frac{8K}{7} & 0 \\ 0 & K & 1 & 2K & 0 \end{matrix}$$

• $K \neq 0$

$$\begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{K} & 2 & 0 \\ 0 & 21+4K & K & 42+8K & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{K} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & K-\frac{21+4K}{K} & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\frac{K^2-4K-21}{K} = \frac{(K-7)(K+3)}{K}$$

$K \neq 7 \wedge K \neq -3$

$$\begin{cases} 7x+4y+z+8h=0 \\ y+\frac{z}{K}+2h=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=-2h \\ x=0 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\, F_K = \{(0,-2h,h,0) / h \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Ker}\, F_K = \langle (0,-2,1,0) \rangle$

• $K=7$

$$\begin{cases} 7x+4y+z+8h=0 \\ y+\frac{1}{7}z+2h=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{3}{49}z \\ y=-\frac{1}{7}z-2h \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\, F_7 = \langle (-\frac{3}{49}, -\frac{1}{7}, 1, 0), (0,-2,0,1) \rangle$

$= \langle (3, 7, -49, 0), (0,-2,0,1) \rangle$

• $K = -3$

$$\ker F_{-3} = \langle (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 1, 0), (0, -2, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (2, -1, 3, 0), (0, -2, 0, 1) \rangle$$

• $K = 0$

$$\begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 7x + 4y + z + 8h = 0 \\ y + 2h = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = -2h \\ x = 0 \end{cases} \qquad \ker F_0 = \langle (0, -2, 1, 0) \rangle$$

Esercizio 2. (9 punti) Sia $F_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_s(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_3, sx_1 + x_2, 10x_1 + sx_2 + sx_3, -2sx_1 - 2x_2).$$

a) Si determini una base di Im (F_s), al variare di $s \in \mathbb{R}$.

b) Si stabilisca per quali valori di s si ha che il vettore $3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4$ appartiene a Im (F_s).

c) Si stabilisca per quali valori di s si ha che F_s è iniettiva.

d) Posto $s = 0$, si determinino le equazioni cartesiane di Im (F_0).

$$\begin{matrix} 3 & s & 10 & -2s \\ 0 & 1 & s & -2 \\ -1 & 0 & s & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & s & -2 \end{matrix}$$

a) $\operatorname{Im} F_s =$

Prova Simone il Mago

Siano $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ e sia

$$U = \{p(x) \in V \mid p(2) = p(-1) \text{ e } p'(2) = p'(-1)\}.$$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$12a + 4b + c = 3a - 2b + c$

$9a + 6b = 0$

1. Determinare una rappresentazione parametrica di U, e trovare una base $\mathcal{B}$ di U.

$8a + 4b + 2c + d = -a + b - c + d$

$$\begin{cases} 9a + 3b + 3c = 0 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{cartesiana}$$

$$\begin{cases} b = -3a - c \\ 9a - 18a - 6c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3a - c \\ c = -\frac{3}{2}a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a \\ c = -\frac{3}{2}a \end{cases}$$

$U = \{tx^3 - 3tx^2 - 3tx + s \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

$$\left\langle \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right), (0, 0, 0, 1) \right\rangle$$

2. Sia $p(x) = x^3 - x^2 - 4x$ e sia

$$S = \{p(x) \in V \mid p(2) - p(-1) = -6 \text{ e } p'(2) - p'(-1) = 3\}.$$

Verificare che $p(x) \in S$, quindi, effettuando meno calcoli possibile, determinare una rappresentazione parametrica di S.

$p(x) \in S$! $S = \{U + p(x)\}$

3. S è un sottospazio vettoriale? È un sottospazio affine? Qual è la sua dimensione? Che legame c'è tra S e U?

No, $0 \notin S$! Boh.

4. Sia $W = \{p(x) \in V \mid p(-x) = -p(x)\}$. Determinare equazioni cartesiane o parametriche di W e trovare una sua base $\mathcal{B}'$. Poi determinare i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.

$p(x) = ax^3 + bx$. $W = \{ax^3 + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t(x, y) = (8x + 2y, (t-1)x + 5y).$$

1. Dire per quali valori di t l'applicazione f_t è un isomorfismo. Poi calcolare il polinomio caratteristico di f_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$f_t = L_{A_t}$ $\quad A_t = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ t-1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 8 & t-1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & t-1 \\ 0 & 5-\frac{t-1}{4} \end{pmatrix}$

$20 - t + 1 = 0$ $\quad t = 21$

$p(\lambda)_t = (8-\lambda)(5-\lambda) - 2t + 2$

2. Specificare per quali valori di t l'applicazione f_t ammetta due autovalori reali distinti, due autovalori complessi distinti, o un unico autovalore reale, di cui si specificherà la molteplicità algebrica. Quindi al variare di $t \in \mathbb{R}$, dire se f_t si diagonalizza su $\mathbb{R}$ e se f_t si diagonalizza su $\mathbb{C}$.

$p(\lambda) = 40 - 13\lambda + \lambda^2 - 2t + 2 =$

$= \lambda^2 - 13\lambda - 2t + 42$ $\quad \Delta = 13^2 - 4(42 - 2t)$

$= 13^2 - 168 + 8t = 1 + 8t$

- $t = -\frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ unico autovalore forse diag.
- $t > -\frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ ~~molteplicità ~~ 2 autovalori si diag.
- se no complessi Boh. diag.

$a(-\frac{1}{8})\ ? = 2$ $\quad g(-\frac{1}{8})$ $\quad p(\lambda) = 40 - 13\lambda + \lambda^2 + \frac{9}{4} =$

$= \lambda^2 - 13\lambda + \frac{169}{4} = (\lambda - \frac{13}{2})^2$ $\quad \lambda = \frac{13}{2}$ $\quad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

3. Fissiamo per il resto dell'esercizio $t = 3$ e dunque $f = f_3$. Trovare una base v_1, v_2 di autovettori per f e scrivere la matrice M di f in tale base.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = (8-\lambda)(5-\lambda) - 4$$

$$= 40 + \lambda^2 - 13\lambda - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-9) \quad \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 9$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad Av = \lambda v \quad (A - I\lambda)v = 0$$

$$Av = (I\lambda)v$$

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} y = -2a \end{cases} \quad V_{\lambda_1} = \langle (1, -2) \rangle$$

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} a = 2y \end{cases} \quad V_{\lambda_2} = \langle (2, 1) \rangle$$

$$B = \langle (1, -2), (2, 1) \rangle$$

4. Trovare quattro matrici D_1, D_2, D_3, D_4 tali che il prodotto riga per colonna di ciascuna matrice per se stessa faccia la matrice trovata al punto precedente: $D_i^2 = M \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Esprimere poi i vettori e_1, e_2 della base canonica come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2 del punto 3.

$$D \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ab = 0 \\ bd = 0 \\ ac = 0 \\ dc = 0 \\ a^2 + bc = 4 \\ d^2 + cb = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ d = 3 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $U = \langle (1,0,2), (0,3,1), (2,3,5) \rangle$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare un sistema di equazioni cartesiane di U.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 3 & 3 & y \\ 2 & 1 & 5 & z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & z-2x \\ 0 & 3 & 3 & y \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & z-2x \\ 0 & 0 & 0 & y-3z+6x \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y-3z+6x=0 \end{cases}$$

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x,y,z) = (y+kz, x+ky, x+y-6z, x+ky)$$

dipendente da $k \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di k l'applicazione L non è iniettiva?

b) Per ognuno di questi valori trovare una base dell'immagine e del nucleo di L ed esibire, se esistono, due vettori di $\mathbb{R}^4$ indipendenti che non appartengano all'immagine di L.

c) Per k=3 trovare la controimmagine del vettore (0,2,2,2).

a) trovo quando $\dim(\operatorname{Im} L) \neq 3$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 & K \\ K & 0 & -6 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & K & 1 & K \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -K^2 & -6-K & -K^2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & K & 1 & K \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K^2-K-6 & 0 \end{matrix}$$

$K^2-K-6=0$ $\quad K=3 \vee K=-2$

- $K=3$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$B_I = \{(1,3,1,3), (0,1,1,1)\}$

$\begin{cases} x+y-6z=0 \\ y+3z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9z \\ y=-3z \end{cases}$

$B_K = \{(9,-3,1)\}$

$f^{-1}(0,2,2,2) = \{v+z \,/\, z \in \operatorname{Ker} L\} = \{(2,0,0)+\lambda(9,-3,1) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$v=(2,0,0)$

Esercizio 2. Data la matrice A a coefficenti reali, calcolarne il polinomio caratteristico e gli autovalori. Verificare se A è o meno diagonalizzabile e in caso affermativo, calcolare una matrice diagonale D simile ad A e determinare P tale che $D = P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $p(\lambda) = (-3-\lambda)(-\lambda) + 2 = 3\lambda + \lambda^2 + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(A - I\lambda)v = 0$

• $\lambda_1 = -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $y = 2x$

$v_1 = (1, 2)$

• $\lambda_2 = -2$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $y = x$ $v_2 = (1, 1)$

$B = \{(1,2), (1,1)\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $A - I\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ -4 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)(-3-\lambda) + 3] = (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda)$

$\downarrow$

$\lambda_1 = 2$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

$V_2 = \langle (0,1,0) \rangle$

• $\lambda_1 = 2$ $A - 2I = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{matrix}$

• $\lambda_2 = 0$ $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} y = 6z \\ x = 3z \end{cases}$ $V_0 = \langle (3,6,1) \rangle$

• $\lambda_3 = -2$ $A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

$V_{-2} = \langle (1,1,1) \rangle$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Dato l'endorfismo $T : V \to V$, calcolarne gli autovalori e determinare una rappresentazione cartesiana per gli autospazi. Verificare se T è o meno diagonalizzabile e in caso affermativo, determinare una base di V costituita da autovettori di T.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (3y, -2x)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + y + 2z, x, x)$.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$ $p(\lambda) = \lambda^2 + 6$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ $p(\lambda) = -\lambda\left[(2-\lambda)(-\lambda) - 2\right] + \lambda =$

$= -\lambda(-2\lambda + \lambda^2 - 3)$

$= -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; T(\mathbf{e}_2) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2; T(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca se (-5,-5,0) è autovettore di T.

b) Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso affermativo, detta A la matrice associata a T rispetto alla base canonica si determinino una matrice diagonale D simile ad A e due matrici distinte P_1, P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$.

$\nexists \lambda \in \mathbb{R} \,.\, \lambda(-5,-5,0) = (30,-50,-25)$

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $(30, 50, -25)$

b) $p(\lambda) = \left[(-5-\lambda)(3-\lambda) + 7\right](-4-\lambda) = \left[\lambda^2 + 2\lambda - 8\right](-4-\lambda)$

$= -(\lambda + 4)^2(\lambda - 2)$

$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad m_g(\lambda_2) = 1$

$$A + 4I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A+4I)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Esercizio 1. Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x_1, x_2, x_3) = (kx_1 + 2x_2 - x_3, 6x_3, x_2 - x_3)$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b Si stabilisca per quali valori di k si ha che $-5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di T_k

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che A_k sia simile alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_K = \begin{pmatrix} K & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)_K = (K-\lambda)\left[-\lambda(-1-\lambda) - 6\right]$$
$$= (K-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda - 6\right] =$$
$$= (K-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-2)$$

- $K \neq -3 \wedge K \neq 2$

 Diagonalizza

- $K = -3 \quad m_g(-3)$

$$A_{-3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)_{-3} = -(\lambda+3)^2(\lambda-2)$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad V_{-3} = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Non diag.

- $K = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad p(\lambda)_2 = -(\lambda+3)(\lambda-2)^2$$

$m_g(2) = ?$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad V_2 = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

b) $\exists K /\quad A_K v = \lambda v \quad (A_K - I\lambda) v = 0$

$v = (-5, 3, 1) \qquad v \in \ker(A_K - I\lambda)$

$\cdot \lambda_1 = K \qquad \cdot \lambda_2 = 2 \qquad \cdot \lambda_3 = -3$

$$A_K - I\lambda = \begin{pmatrix} K-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 6 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\cdot\ A_K - IK = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -K & 6 \\ 0 & 1 & -1-K \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & -1-K & 0 \\ 0 & 0 & 2K+1 & 0 \\ 0 & 0 & 6-K(1+K) & 0 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 0 & 1 & -1-K & 0 \\ 0 & 0 & 2K+1 & 0 \\ 0 & 0 & +K^2+K-6 & 0 \end{matrix} \quad \cdot K \neq -\frac{1}{2} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & -1-K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad V_{\lambda_1} = \langle (1,0,0) \rangle$

$\cdot K = -\frac{1}{2} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad V_{\lambda_1} = \langle (1,0,0) \rangle$

$\cdot\ \lambda_2 = 2 \quad A_K - I2 = \begin{pmatrix} K-2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} K-2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

$K = 2 \to V_{\lambda_2} = \langle (1,0,0) \rangle \qquad K \neq 2$

$$\begin{cases} y = 3z \\ x = -\frac{5}{K-2} z \end{cases}$$

$V_{\lambda_2} = \langle (-5, 3K-6, K-2) \rangle$

$\cdot\ \lambda_3 = -3 \quad A_K + I3 = \begin{pmatrix} K+3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{matrix} K+3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$\cdot K = -3 \quad V_{\lambda_3} = \langle (1,0,0) \rangle \qquad \cdot K \neq -3$

$$\begin{cases} y = -2z \\ x = \frac{3}{K+3} z \end{cases}$$

$V_{\lambda_3} = \langle (3, -2K-6, K+3) \rangle$

$\cdot K \neq -3 \wedge K \neq 2$

$v \notin \langle (1,0,0) \rangle$

$K \neq 2 \quad (-5,3,1) \in \langle(-5, 3K-6, K-2)\rangle$

$$\begin{matrix} -5 & 3K-6 & K-2 \\ 0 & 3K-3 & K-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad K=1$$

$K \neq -3 \quad (-5,3,1) \in \langle(3, -2K-6, K+3)\rangle$

$$\begin{matrix} 3 & -2K-6 & K+3 \\ -5 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & -2K-6 & K+3 \\ 0 & 3-\frac{5}{3}(2K+6) & 1+\frac{5}{3}(K+3) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3-\frac{10}{3}K-10=0 \\ 1+\frac{5}{3}K+5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} K=-\frac{21}{10} \\ K=-\frac{18}{5} \end{cases} \quad \nexists\, K\in\mathbb{R}$$

Esercizio 2.
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T_k(\mathbf{e}_1) = -k\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \quad T_k(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad T_k(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_3$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica in dominio e codominio.alla base canonica.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\frac{5}{4}\mathbf{e}_3$ è un autovettore di T_k.

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che A_k sia simile alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Se una matrice B ha lo stesso polinomio caratteristico di A_k è vero che B è necessariamente simile ad A_k?

$$A_K = \begin{pmatrix} -K & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = (2-\lambda)(-K-\lambda)(6-\lambda)$

$K \neq -2 \wedge K \neq -6$

- $K=-2 \quad p(\lambda) = (2-\lambda)^2(6-\lambda)$

$$A_2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad V_{\lambda_1} = \langle(0,0,1)\rangle$ Non diag.

- $K=-6 \quad A_{-6} - 6I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{4}{3}z \end{cases}$$

$V_{\lambda_2} = \langle(\frac{4}{3}, 0, 1)\rangle$ Non diag.

$$A_K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A_{K_B} é diagonale se e solo se B é base di autovettori

$(\text{con } K \neq -2 \wedge K \neq -6)$

$\cdot \lambda_1 = 2 \quad \cdot \lambda_2 = 6 \quad \cdot \lambda_3 = -K$

$\cdot V_{\lambda_1} \quad A_K - 2I = \begin{pmatrix} -K-2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A_K - 2I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -K-2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3+\frac{K+2}{3} & 0 & 0 \end{array} \quad V_{\lambda_1} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$\cdot V_{\lambda_2} \quad A_K - 6I = \begin{pmatrix} -K-6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (A_K - 6I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -K-6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3+\frac{K+6}{3} & -\frac{4}{3}(K+6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{cases} \frac{K+15}{3} y = \frac{4}{3}(K+6) z \\ 3x = 4z - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{K+15}{K+6} \cdot \frac{1}{4} y \\ x = \left(\frac{K+15}{K+6} - 1\right) y = \frac{9}{K+6} y \end{cases} \quad V_{\lambda_2} = \left\langle \left(\frac{9}{K+6}, 1, \frac{K+15}{(K+6)4}\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(9, K+6, \frac{K+15}{4}\right) \right\rangle$$

$\cdot V_{\lambda_3} \quad A_K + IK = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6+K & 0 \\ 3 & 1 & 2+K \end{pmatrix} \quad (A + IK)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2+K & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{(2+K)}{3} z \end{cases} \quad V_{\lambda_3} = \langle (2+K, 0, -3) \rangle$$

$$B = \left\{ \underset{2}{(0,0,1)},\ \underset{6}{\left(4,\ K+6,\ \frac{K+15}{4}\right)},\ \underset{-K}{(2+K,\ 0,\ -3)} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_3$ è un autovettore di T_k

$p(\lambda) = (K-\lambda)\left[\lambda(1+\lambda)-20\right] = (K-\lambda)\left[\lambda^2+\lambda-20\right] =$

$= (K-\lambda)(\lambda+5)(\lambda-4) \quad \cdot \lambda_1 = K \quad \cdot \lambda_2 = -5 \quad \cdot \lambda_3 = 4$

• Se $K \neq -5 \wedge K \neq 4$ allora é diagonalizzabile

• $K = -5 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdot \lambda_1 = \lambda_2 = -5 \quad \cdot \lambda_3 = 4$

$m_g(-5) \overset{?}{=} 2 \quad A + I5 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A+I5)\underline{x} = \underline{0}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} z = -5x-4y \end{cases}$

$V_{-5} = \{x(1,0,-5)+y(0,1,-4) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,0,-5),(0,1,-4) \rangle \quad \dim V_{-5} = 2 \Rightarrow m_g(-5) = 2$

Diag!

• $K = 4 \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \cdot \lambda_1 = \lambda_3 = 4 \quad \cdot \lambda_2 = -5$

$m_g(4) \overset{?}{=} 2 \quad A_4 - I4 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A_4 - I4)\underline{x} = \underline{0}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$

$V_4 = \{x(1,1,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,1,0) \rangle \quad \dim V_4 = 1 \Rightarrow \underline{m_g(4) \neq 2}$ Non diag.

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$\cdot \lambda_1 = K \quad \cdot \lambda_2 = -5 \quad \cdot \lambda_3 = 4$

$\cdot \lambda_1 = K \qquad A_K - IK = \begin{pmatrix} -K & 4 & 1 \\ 5 & -1-K & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A_K - IK)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1-K & 1 & 0 \\ -K & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\cdot K \neq -5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1-K & 1 & 0 \\ 0 & 4 - \frac{K}{5}(1+K) & 1+\frac{K}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{\frac{K}{5}(1+K) - 4}{1 + \frac{K}{5}} y \\ x = (1+K) z - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{K^2+K-20}{5} \cdot \dfrac{5}{5+K} y = \dfrac{K^2+K-20}{5+K} y = \dfrac{\cancel{(K+5)}(K-4)}{\cancel{K+5}} y \\ x = (1+K)(K-4) y - y = (K^2-3K-3) y \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ y(K^2-3K-3, 1, K-4) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (K^2-3K-3, 1, K-4) \rangle$$

$\cdot K \neq -5$

$\cdot \lambda_2 = -5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K+5 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = -\frac{4}{5} y \end{cases}$$

$$V_{-5} = \langle (-\tfrac{4}{5}, 1, 0) \rangle$$

$\cdot \lambda_3 = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K-4 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$V_4 = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)+1\right] - \left[(-1-\lambda)+1\right] +$$

$$\left[-1+1-\lambda\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[\cancel{\ } + \lambda^2\right] \cancel{\ } = \lambda^2 (1-\lambda)$$

$\cdot \lambda_1 = 0 \quad \cdot \lambda_2 = 1$ $\quad V_0 = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} z = x + y \\ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases} \quad V_1 = \langle (1,1,1) \rangle$$

$(3,3,3) \in V_1$ ✓

$$A_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Foglio 9

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio

$$W = \langle (1,1,1), (2,1,0) \rangle.$$

a) Si trovi una base ortogonale per W.

b) Si trovino una rappresentazione cartesiana e una base per $W^\perp$.

c) Si trovi la proiezione ortogonale del vettore $(0,0,-1)$ su W e su $W^\perp$.

a) $v_1 = (1,1,1) \quad \mathrm{proj}_{v_1}(v_2) = \dfrac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \dfrac{3}{3}(1,1,1)$

$v_2' = (1,0,-1) \quad B_W = \{(1,1,1), (1,0,-1)\}$

$\{(1,1,1), (1,0,-1), (0,0,1)\} \to$ Base di $\mathbb{R}^3$

$$v_3' = (0,0,1) - \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' =$$

$$= (0,0,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \qquad W^\perp = \langle (1,-2,1) \rangle$$

$$\begin{matrix} 1 & x \\ -2 & y \\ 1 & z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & x \\ 0 & y+2x \\ 0 & z-x \end{matrix} \qquad \begin{cases} y+2x=0 \\ z-x=0 \end{cases}$$

$$\overline{v_3'} = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right)$$

$$v_4 = (0,0,-1) \qquad p_{\overline{v_3'}}(v_4) = \frac{\langle \overline{v_3'}, v_4 \rangle}{\langle \overline{v_3'}, \overline{v_3'} \rangle} \overline{v_3'} = -\frac{1}{\sqrt6} \overline{v_3'} =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6}\right) \rightarrow \text{proiezione di } v_4 \text{ su } W^\perp$$

proiezione di v_4 su W $= v_4 - \text{proj.}\, W^\perp =$

$$\left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio

$$W: \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si trovino una base per W e una per $W^\perp$.

b) Si trovino una base ortonormale per W e una base di $W^\perp$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{4} x_4 \\ x_1 = -\frac{3}{4} x_4 \end{cases}$$

$$W = \left\{\lambda\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) / \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \langle(-3,-1,2)\rangle$$

$$\{\overset{v_1}{(-3,-1,2)}, \overset{v_2}{(0,1,0)}, \overset{v_3}{(0,0,1)}\} \to \text{Base di } \mathbb{R}^3 \text{ (per conto diretto)}$$

$$\overline{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (0,1,0) + \frac{1}{14}(-3,-1,2) =$$

$$= \left(-\frac{3}{14}, \frac{13}{14}, \frac{2}{14}\right)$$

$$\overline{v_3} = v_3 - \frac{\langle v_1, v_3\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, v_3\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 =$$

$$= (0,0,1) - \left(-\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right) - 0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

$$W^\perp = \langle(-3,13,2),(3,1,5)\rangle \quad \{\text{'},\text{''}\} \to \text{Base ortogonale}$$

Esercizio 3. Siano $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{w}_1 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{w}_2 = (0,0,1,-1) \in \mathbb{R}^4$ e siano $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$, $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle$.

a) Si mostri che esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{u} \in U$ e $F(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{w} \in W$ e si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

b) Si trovi una base di Im F che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo.

c) Si stabilisca se F è diagonalizzabile.

a)
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix} \qquad B = \{u_1, u_2, w_1, w_2\} \text{ Base di } \mathbb{R}^4$$

$$M_{Be} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_{ee} = M_{Be} I_{eB} = M_{Be} I_{Be}^{-1}$$

$$I_{Be} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_{Be}^{-1}$$

$$M_{Be} I_{Be}^{-1} = M_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \operatorname{Im} F = \langle (1,-1,0,0),(0,0,1,-1) \rangle$$

$$B = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$$

$$v_1 = (1,-1,0,0)$$

$$\overline{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (0,0,1,-1) - 0 = v_2$$

$$P(\lambda) = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 \left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right]^2 = \left(\lambda^2 - \lambda\right)^2 = \left[\lambda(\lambda-1)\right]^2 \quad \cdot \lambda_1 = 0 \quad \cdot \lambda_2 = 1$$

$\cdot V_0 \quad M - 0I = M \quad M\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = y \\ z = h \end{cases}$$

$V_0 = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$

$\dim V_0 = 2$

$\cdot V_1 \quad M - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (M-I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = -y \\ z = -h \end{cases}$$

$V_1 = \langle (-1,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle$

$\dim V_1 = 2$

$m_g(0) + m_g(1) = 4 = \dim(\text{Dominio}) \to$ diag!

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri l'endomorfismo $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $T_\lambda(x, y, z) = (-x+y, 2\lambda x-y, \lambda z)$ e sia A_λ la matrice associata a T_λ rispetto alla base canonica.

a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A_λ è ortogonale.

b) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A_λ è simmetrica.

c) Fissato $\lambda = 1$ si trovi una base ortonormale costituita da autovettori di per T_1.

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\cdot A_\lambda$ é ortogonale se:

- $A^{-1} = A^T$
- Le righe e le colonne formano due basi ortogonali di $\mathbb{R}^3$
- $\forall x \in \mathbb{R}^3.\ \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}$$

$\cdot \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq \frac{1}{2}$ $\quad . \langle (-1,1,0), (2\lambda,-1,0) \rangle = 0$

$\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$\langle (-1,-1,0), (1,-1,0) \rangle = 0$

• A_λ é simmetrica quando $\lambda = \frac{1}{2}$

$\Delta = 8 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{cases} -1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{cases}$

• $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = (1-\lambda)\left[(1+\lambda)^2 - 2\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)$

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

a) Posto $W = \text{Ker } F$, si trovi una base ortogonale per $W^\perp$.

b) Si trovi la proiezione ortogonale di $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ su $W^\perp$.

c) Si trovino equazioni cartesiane per Im F.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A\underline{x} = \underline{0} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{1}{2}z - h \end{cases}$

$\text{Ker } F = \left\{ z\left(-1, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + h(0, -1, 0, 1) \mid z, h \in \mathbb{R} \right\}$

$= \langle (2, 1, -2, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle = W$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} y = h \\ x = z - \frac{1}{2}h \end{cases} \quad W^\perp = \langle (1, 0, 1, 0), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 1\right) \rangle$

• $\overline{v_1} = v_1 \quad$ • $\overline{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 1\right) + \frac{1}{4}(1, 0, 1, 0) =$

$= \left(-\frac{1}{4}, 1, +\frac{1}{4}, 1\right)$

$B_{W^\perp} = \{ \overset{\overline{v_1}}{(1, 0, 1, 0)}, \overset{\overline{v_2}}{(-1, 4, 1, 4)} \}$

$\text{proj}_{W^\perp} \overset{v_3}{(2, 1, 2, 0)} = \frac{\langle \overline{v_1}, v_3 \rangle}{\|\overline{v_1}\|^2} \overline{v_1} + \frac{\langle \overline{v_2}, v_3 \rangle}{\|\overline{v_2}\|^2} \overline{v_2} =$

$(2,0,2,0) + \frac{4}{34}(-1,4,1,4)$ ~~F~~

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\operatorname{Im} F = \langle (1,0,2), (0,1,1) \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-2x \end{matrix}$$

$$\{ z - 2x - y = 0$$

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione linare tale che: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ è autovettore di F di autovalore 2, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ è autovettore di F di autovalore -1 e $\mathbf{e}_3$ appartiene al nucleo di F.

a) Si determini la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

b) Si trovino una matrice P e una matrice diagonale D tale he $P^T AP = D$.

c) Si trovino tutte le matrici diagonali simili ad A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V_2 = \langle (1,1,0) \rangle$ $\quad V_0 = \langle (0,0,1) \rangle$

$V_{-1} = \langle (1,-1,0) \rangle$

$B = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

$\bar{v}_1 = v_1 \qquad \bar{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,-1,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$V_7 = \langle (1,0,1), (-\frac{1}{2}, 1, 0) \rangle$ $\quad \bar{v}_2 = (-\frac{1}{2},1,0) + (\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}) =$

$=$

$V_{-2} = \langle (-1, -\frac{1}{2}, 1) \rangle$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_{V_7} = \{ (1,0,1), (-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}) \}$

$\Rightarrow \{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), ($

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$F_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+2x_3, 2x_1+kx_2+4x_3, kx_1+x_2+3x_3, 2x_1+2x_2+4x_3)$.

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base del nucleo di F_k.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1+k\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4 \in \operatorname{Im} F_k$.

c) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata a F_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ nel codominio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & K & 4 \\ K & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} F_K =$ sol $A\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & K & 4 & 0 \\ K & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & K-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-K & 3-2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

• $K \neq 2$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2K \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

• $K \neq \frac{3}{2}, K \neq 2$ $\quad \operatorname{Ker} F_K = \{\underline{0}\}$

• $K = \frac{3}{2}$ $\quad \operatorname{Ker} F_{\frac{3}{2}} = \langle (-2, 0, 1) \rangle$

• $K = 2$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \operatorname{Ker} F_2 = \langle (-1, -1, 1) \rangle$

b) $A\underline{x} = (1, K, 2, 2)$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & K & 4 \\ K & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 \\ K \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & K-2 & 0 \\ 0 & 1-K & 3-2K \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 \\ K-2 \\ 2-K \\ 0 \end{matrix}\right)$$

• $K \neq 2$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2K \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

• $K \neq \frac{3}{2}$ $(K \neq 2)$ 1ª soluzione

• $K = \frac{3}{2}$ 0 soluzioni

• $K = 2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

• $K = 2$ infinite soluzioni dipendenti da un parametro

c) $\mathcal{B} = \{(0, 1, -1), (1, 0, 0), (1, b, 0)\}$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = A_0 I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

$$I_{B\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{B\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1+b \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & b \\ -2 & 2 & 2+2b \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2, T_k(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,$$

$$T_k(\mathbf{e}_3) = -10\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + bk\mathbf{e}_3$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di T_k.

c) Esistono valori di k tali che A_k sia simile alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2K \end{pmatrix} \quad p(\lambda)_K = (2K-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)-10\right] =$$

$$= (2K-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 10) = (2K-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+2)$$

- $\lambda_1 = 2K$ • $\lambda_2 = 5$ • $\lambda_3 = -2$

- Se $K \neq \frac{5}{2} \wedge K \neq -1$ é diagonalizz.

- $K = \frac{5}{2}$ $\ker\left(A_{\frac{5}{2}} - I5\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & -10 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

dim = 2 $\rightarrow$ diagonalizz.

- $K = -1$ $\ker\left(A_{-1} + I2\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -10 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & -4 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

dim = 1 non diag.

b) $(0,2,1)$ é autovettore

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2K \end{pmatrix}$$

$A_K(0,2,1) = \lambda(0,2,1)$

$(0, 10, 2K) = \lambda(0,2,1)$ • $\lambda = 5$ $2K = 5 \Rightarrow K = \frac{5}{2}$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad p(\lambda) = -\lambda\left[(3-\lambda)(-2-\lambda)\right]$$

è simile a $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. (4 punti)

a) Si elenchino gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{30}$.

b) È vero o falso che la congruenza $15x \equiv_{35} 10$ ammette soluzioni? Si motivi la risposta.

$[a]_{30}$ è invertibile se $\exists\, b \cdot [b]_{30}[a]_{30} = [1]_{30}$

$a \in \mathbb{Z}_{30}$

$\gcd(a, 30) = 1$

$2 \cdot 3 \cdot 5$

$[1]_{30}, [7]_{30}, [11]_{30}, [13]_{30}, [17]_{30}, [19]_{30}, [23]_{30}, [29]_{30}$

$\gcd(15, 35) = 5$ $\qquad 35 = 2 \cdot 15 + 5$

$5 | 10 \Rightarrow$ sì $\qquad 15 = 3 \cdot 5$

$gcd(123, 45) = 3$

$123 = 2 \cdot 45 + 33$

$45 = 1 \cdot 33 + 12$

$33 = 2 \cdot 12 + 9$

$12 = 1 \cdot 9 + 3$

$9 = 3 \cdot 3$

$\mathbb{Z}_{12}$

$a \in \mathbb{Z}_{12}$ é invertibile ($\exists b \in \mathbb{Z}_{12}$. $[a]_{12}[b]_{12} = [1]_{12}$)

$\iff gcd(a, 12) = 1$

$\downarrow$

sol se sono co-primi!

$[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}$

$\dot{1} \quad \dot{5} \quad \dot{7}$

$[7]_{12}\, x = [10]_{12}$

$gcd(7, 12) = 1$

$12 = 7 + 5$

$7 = 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1$

$1 = 5 - 2 \cdot 2 =$

$5 - 2(7 - 5) =$

$= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 =$

$= 3 \cdot (12 - 7) - 2 \cdot 7 =$

$= 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7$

$-35 = -3 \cdot 12 + 1$

$[-35]_{12} = [1]_{12}$

$-5 = -1 \cdot 12 + 7$

$[-5]_{12} = [7]_{12}$

$49 = 4 \cdot 12 + 1$

$x = [70]_{12} = [10]_{12}$

$70 = 5 \cdot 12 + 10$

$15x \equiv_{35} 10 \qquad [15]_{35}\, x = [10]_{35}$

$gcd(15, 35)$

$35 = 2 \cdot 15 + 5$

$15 = 3 \cdot 5$

$5 \mid 10$

$\Downarrow$

esistono 5 soluzioni distinte

Esercizio 2. (9 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (bx_1 + kx_2, kx_1 + 5x_2 + x_3, (1-b)x_1 + 4x_2 + x_3).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k non è iniettiva e scelto un tale valore a di k, si determini una base del nucleo di T_a e, se possibile, si determinino 2 vettori linearmente indipendenti che non appartengono all'immagine di T_a.

b) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T_0 \circ G$ sia l'identità di $\mathbb{R}^3$.

c) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, b\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata a T_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ nel codominio.

$$A_K = \begin{pmatrix} 2 & K & 0 \\ K & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A_K \underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & K & 0 & 0 \\ K & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & K+8 & 2 & 0 \\ 0 & 5+4K & 1+K & 0 \end{array}\right)$$

• $K \neq -8$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{K+8} & 0 \\ 0 & 0 & 1+K-(5+4K)\frac{2}{K+8} & 0 \end{array}$$

$$1+K-2\,\frac{5+4K}{K+8} = \frac{(1+K)(K+8)-10-8K}{K+8} = \frac{K^2+9K+8-10-8K}{K+8} = \frac{K^2+K-2}{K+8} = \frac{(K+2)(K-1)}{K+8}.$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{K+8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(K+2)(K-1)}{K+8} & 0 \end{array}$$

• $K \neq -8 \wedge K \neq -2 \wedge K \neq 1$

$\dim \operatorname{Ker} F_K = 0$

• $K = -2$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}z \\ x = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} F_{-2} = \langle (-1, -1, 3) \rangle$

• $K = 1$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{9}z \\ x = \frac{1}{9}z \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} F_1 = \langle (1, -2, 9) \rangle$

• $K = -8$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -27 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\dim \operatorname{Ker} F_{-8} = 0$

$K = -2 \vee K = 1$

$a = 1 \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim \operatorname{Im} F_1 = 2$

$\operatorname{Im} F_1 = \langle (1,5,4), (0,1,1) \rangle$

$(0,0,1) \notin \operatorname{Im} F_1 \qquad (0,1,2) \notin \operatorname{Im} F_1$

$(0,1,2) = (0,0,1) + (0,1,1)$

b) $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad ?\, H := M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A_0 H = I$ $\quad (0,0,1) = (0,1,2) - (0,1,1)$

$(0,0,1) \in \operatorname{Im}$ assurdo

$H = A_0^{-1}$

$\det A_0 = 2(5-4) = 2 \neq 0 \Rightarrow A_0$ è invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -4 & 5 \end{array}$$

$93x \equiv_{226} -6 \qquad x = 42 + k\,226 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$[93]_{226}\, x = [-6]_{226} \qquad x = [-6 \cdot -17]_{226} = [42]_{226}$

$\gcd(93, 226) = 1 \rightarrow$ esiste una soluzione

$226 = 2 \cdot 93 + 40$

$93 = 2 \cdot 40 + 13$

$40 = 3 \cdot 13 + 1$

$13 = 13 (1)$

$1 = 40 - 3 \cdot 13 =$

$40 - 3 \cdot (93 - 2 \cdot 40) = 7 \cdot 40 - 3 \cdot 93 =$

$= 7(226 - 2 \cdot 93) - 3 \cdot 93 = 7 \cdot 226 - 17 \cdot 93$

$[-17]_{226} = [209]_{226}$

Esercizio 2. (8 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + kx_4, x_1 - 2x_3 + kx_4, x_1 + kx_2 + kx_3 - k^2x_4)$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.

b) Esistono valori di k tali che Ker F_k abbia dimensione 2?

c) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \in$ Ker F_k.

d) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a F_0 rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

a) $A_K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & K \\ 1 & 0 & -2 & K \\ 1 & K & K & -K^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & K+2 \\ 0 & -2 & K \\ 0 & 0 & -(K^2+K) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & K+2 \\ 0 & 0 & 2K+2 \\ 0 & 0 & -(K^2+K) \end{matrix}$$

• $K \neq -1$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & K+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ $\quad \dim \operatorname{Im} F_K = 3 \to$ SU

• $K = -1$ $\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ $\quad \dim \operatorname{Im} F_{-1} = 2 \to$ Non SU

$\dim(\operatorname{Ker} F_{-1}) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{Im} F_{-1}) = 2$

$A_K \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & K \\ 1 & 0 & -2 & K \\ 1 & K & K & -K^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} K-4 \\ K-4 \\ 4K-K^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} K-4=0 \\ K(4-K)=0 \end{cases} \Rightarrow K=4$

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A_{\mathcal{CB}} = I_{\mathcal{CB}} A_0 = I_{\mathcal{BC}}^{-1} A_0$

Esercizio 3. (9 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3, T_k(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3,$$
$$T_k(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_3$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Sia a un valore di k tovato al punto A. Si determinino tutte le matrici diagonali simili ad A_a.

c) Si determinino, se possibile, due autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di T_a linearmente indipendenti tali che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ non sia un autovettore di T_a.

d) Sia r un valore di k tale che T_r non sia diagonalizzabile. Si determini, se possibile, una matrice avente gli stessi autovalori di A_r (contati con la loro molteplicità) e che non sia simile ad A_r.

$A_K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ K & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = (-2-\lambda)\left[(3-\lambda)(-\lambda) - 10\right]$

$= -(2+\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda - 10\right] = -(2+\lambda)(\lambda-5)(\lambda+2)$

$= -(2+\lambda)^2(\lambda-5)$ $\quad \cdot \lambda_1 = -2 \quad \cdot \lambda_2 = 5$

$m_g(5) = 1$ $\quad m_g(-2) \overset{?}{=} 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ K & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\frac{K}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\dim \operatorname{Ker}(A_K + 2I) = 2 \iff K = 10$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ é simile a } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Sia r un valore di k tale che T_r non sia diagonalizzabile. Si determini, se possibile, una matrice avente gli stessi autovalori di A_r (contati con la loro molteplicità) e che non sia simile ad A_r.

$$K = 0 \quad A_r = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\cdot\ \lambda = -2$, $m_g = 1$ $\quad \cdot\ \lambda = 5$, $m_g = 1$

M, $p(\lambda)_M = p(\lambda)_A$ $\quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ a & b & -2 \end{pmatrix}$

$$K \neq 10 \qquad A_K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ K & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\cdot\ \lambda_1 = -2$ $\quad \cdot\ \lambda_2 = 5$

$(m_g(\lambda_1) = 1)$ $\quad (m_g(\lambda_2) = 1)$

$[2a]_{12} = [8]_{12} \qquad [2]_{12}[a]_{12} = [8]_{12}$

Ci sono due soluzioni: $[a]_{12} = [4]_{12}$

$[a]_{12} = [10]_{12}$

quindi

$a = 4 + K12 \ \vee\ a = 10 + K12 \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

Esercizio 2. (7 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (kx_2 + x_3 + 2kx_4, kx_1 - 3x_2 - 6x_4, 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3 \in \operatorname{Im} F_k$.

c) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 \in \operatorname{Ker} F_k$.

c)
$$\begin{matrix} 0 & K & 7 \\ K & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2K & -6 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4-K \\ 0 & -6 & 8-2K \\ 0 & K & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4-K \\ 0 & K & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4-K \\ 0 & 0 & 7+\frac{K}{3}(4-K) \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\frac{21 + 4K - K^2}{3} = 0 \qquad K^2 - 4K - 21 = 0$$

$$(K-7)(K+3) = 0 \quad K = 7 \lor K = -3$$

$\dim \operatorname{Im} = 2$

- $K \neq 7 \wedge K \neq -3$

$\dim \operatorname{Im} = 3 \Rightarrow$ sì $\quad \left\{(1,0,1), (0,-3,4-K), \left(0,0,-\frac{(K-7)(K+3)}{3}\right)\right.$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -K-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$rK = 3 \Rightarrow \dim \langle\ ,v\rangle = 3$ Quindi

$\langle\ ,v\rangle \equiv \mathbb{R}^3 = \langle\ \rangle$

- $K = 7$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 7 & 1 & 14 \\ 7 & -3 & 0 & -6 \\ 7 & 4 & 1 & 8 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{matrix}$$

$rk(A) \neq rk(A|b)$
$\Downarrow$
non ci sono soluzioni

$\Leftarrow$ $(2,-3,9) \notin \operatorname{Im}$

- $K = -3$

$$\left(\begin{matrix} 0 & -3 & 1 & -6 \\ -3 & -3 & 0 & -6 \\ 7 & 4 & 1 & 8 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{matrix}\right) \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

infinite soluzioni dipendenti da 2 parametri

$$A_K \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & K & 1 & 2K \\ K & -3 & 0 & -6 \\ 7 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall K \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4. (7 punti)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 \qquad T(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$$

e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di T.

b) Si stabilisca se T è diagonalizzabile.

c) Si determinino, se possibile, due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$, ove D è una matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 9] =$$
$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - 5] =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)$$

- $\lambda_1 = 2$ • $\lambda_2 = 5$ $\lambda_3 = -1$ $\Rightarrow$ diagonal.

$$V_2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

$$V_5 = \begin{matrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad = \langle (1, \tfrac{8}{3}, 1) \rangle$$

$$V_{-1} = \left.\begin{matrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \langle (-1, -\tfrac{2}{3}, 1) \rangle$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$95x \equiv_{307} 5 \qquad [95]_{307}[x]_{307} = [5]_{307}$$

$$\gcd(307, 95) = 1$$

$$307 = 3 \cdot 95 + 22$$
$$95 = 4 \cdot 22 + 7$$
$$22 = 3 \cdot 7 + 1$$
$$3 = 3 \cdot 1$$

$$1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - 3 \cdot (95 - 4 \cdot 22)$$
$$= 13 \cdot 22 - 3 \cdot 95 = 13 \cdot (307 - 3 \cdot 95) - 3 \cdot 95$$
$$= 13 \cdot 307 - 42 \cdot 95$$

$$[95]_{307}[x]_{307}=[5]_{307} \quad [x]_{307}=[-210]_{307}=[97]_{307}$$

$$x = 97 + k\cdot 307 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

b) Sia $U = \langle(1,0,1,-1),(2,1,0,1),(0,1,-2,3)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Si scrivano le equazioni cartesiane di U.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -2 & z \\ -1 & 1 & 3 & h \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & -2 & z-x \\ 0 & 3 & 3 & h+x \end{array}\right) \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x+2y \\ 0 & 0 & 0 & h+x-3y \end{array}$$

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x-3y+h=0 \end{cases}$$

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $F_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_s(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_3, -3x_1+6x_2-6x_3, 2x_1+5x_2-2sx_3).$$

a) Si stabilisca per quali valori di s si ha che F_s è un isomorfismo.

b) Posto $s=-2$, si determinino una base di Ker F_{-2} e una base di Im F_{-2} e si determini, se possibile, un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \text{Ker } F_{-2} \cap \text{Im } F_{-2}$.

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & -2s \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2s-4 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2s-4 & 0 \end{array}$$

$s \neq -2 \Rightarrow \dim \text{Ker} = 0 \Rightarrow F_s$ é un isomorfismo

b) $\text{Ker } F_{-2} = \langle(-2,0,1)\rangle$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \end{array}$$

$\text{Im } F_{-2} = \langle(1,-3,2),(0,6,5)\rangle$

c) Posto $k=-4$, si verifichi che $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ sono autovettori di T_{-4} e, se possibile, si completi l'insieme $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T_{-4}.

$$A_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = \left[-\lambda^2(2+\lambda)+2\right] - \left[2+\lambda-4\lambda\right] =$$

$$= -2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 2 - \lambda + 4\lambda =$$

$$\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda & 2 & 4 & -2-\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \end{array} \quad = -2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2+2\lambda-3)$$

$$= -\lambda(\lambda+3)(\lambda-1) \quad \cdot \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -3 \quad \lambda_3 = 1$$

$$A_{-4}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A_{-4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$V_{-3} = \left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-1&0\\4&1&2&0\\1&0&3&0\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-10&0\\0&1&-10&0\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-10&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$= \langle(-3,10,1)\rangle$$

$[22]_{95}$

$[13]_{95}$

$\gcd(95,22)$

$95 = 4\cdot 22 + 7$

$22 = 3\cdot 7 + 1$

$7 = 7\cdot 1$

$1 = 22 - 3\cdot 7$

$7 = 95 - 4\cdot 22$

$1 = 22 - 3(95 - 4\cdot 22)$

$= 13\cdot 22 - 3\cdot 95$

Esercizio 2. (11 punti)
Al variare del parametro reale t sia $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da: $F_t(\mathbf{e}_1) = t\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2t\mathbf{e}_4$, $F_t(\mathbf{e}_2) = t\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + (t+2)\mathbf{e}_3 - 2t\mathbf{e}_4$, $F_t(\mathbf{e}_3) = (t-1)\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3 + (2-2t)\mathbf{e}_4$.

a) Si stabilisca per quali valori di t si ha che F_t non è iniettiva.

b) Scelto un valore r tale che F_r non sia iniettiva, si determini una base del nucleo di F_r e la si completi ad una base di $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Si stabilisca inoltre se esistono due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $F_r(\mathbf{v}_1) = F_r(\mathbf{v}_2)$ e due vettori linearmente dipendenti $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $F_r(\mathbf{u}_1)$ e $F_r(\mathbf{u}_2)$ siano linearmente indipendenti.

c) Si determinino le coordinate del vettore $(1,1,-3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto b).

d) Si stabilisca per quali valori di t si ha che $F_t(\mathbf{e}_1), F_t(\mathbf{e}_2), F_t(\mathbf{e}_3)$ generano un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

$$A_t = \begin{pmatrix}t&t&t-1\\3&3&0\\0&t+2&-4\\-2t&-2t&2-2t\end{pmatrix}$$

$F_2(v_1) = F_2(v_2) = w \qquad F^{-1}(w) = \{v_1 + t(-1,1,\tfrac{3}{4}) / t\in\mathbb{R}\}$

$v_2 \in \{v_1 + t(-1,1,\tfrac{3}{4}) / t\in\mathbb{R}\}$

a) $\ker F_t = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&t+2&-4&0\\t&t&t-1&0\\-2t&-2t&2-2t&0\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&t+2&-4&0\\0&0&t-1&0\\0&0&1-t&0\end{array}\right)$

- $t \neq 1$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&t+2&-4&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \qquad \dim(\ker F_t) = n - rk(A|b) = 0$

$1 - 1$

- $t = 1$ $\qquad \begin{cases}x = -y\\ z = \frac{3}{4}y\end{cases} \Rightarrow \ker F_1 = \langle(-1,1,\tfrac{3}{4})\rangle$

Per il teorema del completamento posso aggiungere $3-1=2$ vettori di una base di $\mathbb{R}^3$ a v_1 per formare una nuova base di $\mathbb{R}^3$. Prendiamo la base canonica $\mathcal{E}=\{e_1, e_2, e_3\}$, usando l'algoritmo di Gauss diretto abbiamo che e_2, e_3, v_1 sono lin. ind. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi

$$B=\{v_1, e_2, e_3\}$$

Scelgo $v_1=(1,0,0)$, per teo. struttura v_2 può essere $(0, 1, \frac{3}{4})$ che per Gauss è lin. ind. a v_1 ma $F(v_1)=F(v_2)$

c) $\underset{v}{(1, 1, -3)} \longrightarrow (v)_B = ?$

$$I_{B\mathcal{E}}\,\underline{x}=v \qquad \underline{x}=I_{B\mathcal{E}}^{-1}\,v$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = I_{B\mathcal{E}} \mid v$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \end{array}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-\frac{9}{4} \end{cases} \qquad (v)_B = \left(-1, 2, -\frac{9}{4}\right)$$