

# Linguaggi di programmazione

## Appunti

GioLaPalma

# Contents

## Chapter 1

### Introduzione ai linguaggi normali: grammatiche

Page

- 1.1 Linguaggi (naturali o artificiali)  
Sintassi — • Semantica — • Pragmatica — • Implementazione —
- 1.2 Lessico e frasi di un linguaggio
- 1.3 Notazioni e definizioni ausiliarie  
Lunghezza — • Concatenazione — • Sottostringa — • Suffisso — • Prefisso — • Potenza n-esima — • Linguaggio —
- 1.4 Operazione sui linguaggi  
Complemento — • Unione e intersezione — • Concatenazione — • Potenza di un linguaggio — • Stella di Kleene —
- 1.5 Definire finitamente un linguaggio  
esempio 1: frasi palindromo — • Esempio 2 —
- 1.6 Grammatiche
- 1.7 Derivazioni
- 1.8 Linguaggio Generato  
Algoritmo di Naif —
- 1.9 Alberi di derivazione  
Ambiguità — • Rimuovere l'ambiguità —

## Chapter 2

### Struttura di un compilatore, semantica statica, semantica dinamica

Page

- 2.1 Vincoli contestuali
- 2.2 Semantica statica
- 2.3 semantica dinamica  
Utilità della semantica dinamica — • definire la semantica —
- 2.4 Pragmatica nella descrizione di un linguaggio
- 2.5 implementazione  
Correttezza dell'implementazione — • Struttura di un compilatore —
- 2.6 fasi principali della compilazione  
analisi lessicale (scanner) — • analisi sintattica (parser) — • Analisi semantica — • Generazione della forma intermedia — • Ottimizzazione — • Generazione del codice — • Tabella dei simboli —
- 2.7 semantica operativa strutturata  
Definizione di un linguaggio a cui dare semantica —
- 2.8 Dare semantica ad un linguaggio  
Semantica delle espressioni aritmetiche — • Semantica delle espressioni booleane —

## Chapter 3

### Analisi lessicale: espressioni regolari, DFA, NFA

Page

- 3.1 analisi lessicale  
token — • espressioni regolari — • equivalenza tra espressioni regolari —

- 3.2 Automi a stati finiti  
diagrammi di transazione — • Automi a stati finiti non deterministico — • Linguaggio riconosciuto/accettato — • Automi a stati finiti deterministici — • Da espressioni regolari a NFA equivalenti — • Da NFA a espressione regolare — • Chiusura dei linguaggi regolari rispetto alle operazioni regolari —
- 3.3 Grammatiche regolari  
da grammatiche regolari a NFA equivalenti — • Da DFA a grammatiche regolari — • Grammatiche regolari ed espressioni regolari — • Per riassumere le relazioni tra espressioni regolari, linguaggi regolari e automi NFA e DFA — • minimizzazione — • automa minimo —
- 3.4 Espressività dei linguaggi regolari e pumping lemma  
Pumping lemma —

## Chapter 4

### Linguaggi liberi nondeterministici \_\_\_\_\_ Page \_\_\_\_\_

- 4.1 Grammatiche libere  
Semplificazione e forme normali —
- 4.2 PDA  
Definizione formale — • Transizioni — • Linguaggio Accettato —
- 4.3 Equivalenza fra grammatiche libere e PDA  
Da grammatica libera a PDA — • Da PDA a grammatica libera — • Relazione fra linguaggi regolari e linguaggi liberi —
- 4.4 Proprietà  
Chiusura — • Pumping Theorem —

## Chapter 5

### linguaggi liberi deterministici \_\_\_\_\_ Page \_\_\_\_\_

- 5.1 PDA e linguaggi deterministici  
PDA deterministici — • Definizione di linguaggi liberi deterministici — • Analizzatori sintattici: parser —
- 5.2 Semplificazione delle grammatiche  
Eliminare le produzioni  $\epsilon$  — • Eliminazione delle produzioni unitarie — • Rimuovere i simboli inutili — • mettere insieme le cose — • forme normali — • Eliminare la ricorsione a sinistra — • Ricorsione su non-immediata — • Fattorizzazione a sinistra —

## Chapter 6

### Parser Top-Down \_\_\_\_\_ Page \_\_\_\_\_

- 6.1 Parser a discesa ricorsiva
- 6.2 Parser predittivo  
First — • Follow — • Parser per linguaggi  $LL(1)$  — • Parser per linguaggi  $LL(K)$  —

## Chapter 7

### Bottom up parser \_\_\_\_\_ Page \_\_\_\_\_

- 7.1 Parser shift-reduce nondeterministico
- 7.2 Parser LR  
Funzionamento del parsing LR — • DFA a prefissi variabili —

# Chapter 1

## Introduzione ai linguaggi normali: grammatiche

### 1.1 Linguaggi (naturali o artificiali)

La descrizione di un linguaggio avviene su 3 dimensioni:

- **Sintassi:** regole di formazione, ovvero la relazione tra segni
- **Semantica:** attribuzione di significato
- **Pragmatica:** in quale modo frasi corrette e sensate sono usate
- **Implementazione:** come eseguire una frase corretta rispettandone la semantica

Partiamo con il descrivere questi elementi

#### 1.1.1 Sintassi

##### Definition 1.1.1: sintassi

La **sintassi** è la parte della grammatica che studia la struttura delle frasi e il modo in cui le parole si combinano per formare enunciati corretti e significativi

Si dirama in diversi aspetti:

- **Aspetto lessicale** che riguarda le parole che si possono usare, quindi:
  - descrizione del lessico, intuitivamente i dizionari per i linguaggi naturali assolvono a questo compito
  - errori dovuti a vocaboli inesistenti
- **Aspetto grammaticale** che si riferisce nel modo in cui è possibile costruire frasi corrette è possibile costruire con il lessico. Le frasi grammaticalmente corrette possono essere costruite grazie all'uso delle regole grammaticali, che sono in numero finito, mentre il numero di frasi generabili è infinito.  
Un errore grammaticale è una frase scorretta, anche se il lessico utilizzato è corretto. Es. "La cane abbaiano"

#### 1.1.2 Semantica

##### Definition 1.1.2: Semantica

La **semantica** è la branca della linguistica che studia il significato delle parole, delle frasi e degli enunciati

- **Per il lessico** (quindi lo studio e il significato delle parole) bastano i **dizionari**
- **Per le frasi** è più complicato, **devo sapere** infatti:

1. a quale linguaggio appartiene la frase
2. su quale linguaggio basarmi per dare significato



### 1.1.3 Pragmatica

#### Definition 1.1.3: Pragmatica

La **pragmatica** è un insieme di regole che guidano l'uso e come i contesti influiscono sull'interpretazione di frasi sensate e corrette

Ad esempio quando e a chi dare del "tu" o del "lei" quando ci rivolgiamo a delle persone

### 1.1.4 Implementazione

L'implementazione è l'esecuzione di una frase sintatticamente corretta rispettandone la semantica



La semantica di  $P$ , è la funzione  $f$  che è pure la semantica del programma compilato  $Q$ , quindi l'implementazione  $Q$  di  $P$  preleva la semantica di  $P$ !

## 1.2 Lessico e frasi di un linguaggio

Innanzitutto diamo tre definizioni

#### Definition 1.2.1: alfabeto

Un **alfabeto** è un insieme (tipicamente) finito i cui elementi sono detti simboli

Definire l'alfabeto ci porta alla definizione di lessico:

#### Definition 1.2.2: Lessico

Il **lessico** è un insieme di sequenze finite costituite con caratteri o simboli dell'alfabeto

Il quale ci porta alla definizione di frase:

### Definition 1.2.3: frase

Una **frase** è un insieme sequenze finite contruite con parole del lessico.

È, quindi, facile notare che **il lessico è un alfabeto per le frasi**  
Si ci si può ora astrarre e definire un linguaggio formale:

### Definition 1.2.4: linguaggio formale

Un **linguaggio formale**  $L$  su alfabeto  $A$  è un sottoinsieme di  $A^*$  ( $L \subseteq A^*$ ), dove:

$$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n \quad \text{dove } A^0 = \{\epsilon\}$$

e

$$A^{n+1} = A \cdot A^n \quad n \geq 0$$

con  $A \cdot A^n = \{aw | a \in A \wedge w \in A^n\}$

Si osservi che  **$A^*$  è un insieme infinito contabile** dato un ordinamento  $<$  sui simboli di  $A$ , possiamo elencare tutte le parole come segue:

1. elenco la parola vuota  $\epsilon$  ( $A^0$ )
2. poi elenco le parole di lunghezza 1 ( $A^1$ ) secondo l'ordinamento  $<$   
Es.  $a, b, c, \dots$
3. poi elenco le parole in  $A^2$  secondo  $<$   
Es.  $aa, ab, ac, \dots, ba, bb, bc, \dots$
4. così via

Anche se l'alfabeto  $A$  fosse infinito (quindi  $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ )  $A^*$  sarebbe ancora contabile, ovvero esisterebbe la possibilità di elencare tutte le possibili parole in  $A^*$ . Infatti, **esiste una biezione tra  $A$  e  $\mathbb{N}$**  e riguardo ai numeri naturali si sa che:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (prodotto cartesiano) è numerabile. La dimostrazione viene fatta attraverso il *dove-tailing*, una tecnica comune per dimostrare la numerabilità di coppie di numeri naturali. Questa dimostrazione introduce la cosiddetta **funzione di decodifica**

$$f^2(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + 1)}{2} + x_2$$

che presi due numeri in  $\mathbb{N}$  completa la seguente tabella ordinando i numeri naturali in "diagonale"

		$x_1$						
		0	1	2	3	4	5	...
$x_2$	0	0	1	3	6	10	15	
	1	2	4	7	11	16		
	2	5	8	12	17			
	3	9	13	18				
	4	14	19					
	5	20						

è pertanto vero, quindi, che

$$f^2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

è biunivoca

- $\mathbb{N}^k$  è numerabile. Infatti si può dimostrare attraverso questo algoritmo:

$$f^k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \text{if } (k = 2) \text{ then } f^2(x_1, x_2) \quad \text{else } f^2(x_1, f^{k-1}(x_2, \dots, x_k))$$

Ovvero riduce una funzione con  $k$  variabili nel dominio ad una serie di funzioni matrisoska per ricondurla alla forma  $f^2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{N}^k$  è numerabile. Infatti:

$$f(x_1, \dots, x_k) = f^2(k, f^k(x_1, \dots, x_k))$$

## 1.3 Notazioni e definizioni ausiliarie

Vengono riportate qui alcune definizioni/notazioni

### 1.3.1 Lunghezza

#### Definition 1.3.1: lunghezza

La **lunghezza** di una parola o stringa è definita per induzione così:

- Caso  $|\epsilon|$ : 0
- Caso  $|aw|$ :  $1 + |w|$

Es:  $|abc| = 2$

### 1.3.2 Concatenazione

#### Definition 1.3.2: Concatenazione

La **concatenazione**  $xy$  tra una stringa  $x$  e  $y$ , è la parola ottenuta giustapponendo  $x$  e  $y$ . Formalmente:

$$w = xy \iff \begin{cases} |w| = |x| + |y| \\ w(j) = x(j) & \text{per } 1 \leq j \leq |x| \\ w(|x| + j) = y(j) & \text{per } 1 \leq j \leq |y| \end{cases}$$

Dove  $w(j)$  indica il  $j$ -esimo simbolo di  $w$

Questi sono le leggi della concatenazione

- Associatività:  $x(yz) = (xy)z$
- Elemento neutro ( $\epsilon$ ):  $x\epsilon = x = \epsilon x$

### 1.3.3 Sottostringa

#### Definition 1.3.3: Sottostringa

La stringa  $v$  si dice **sottostringa** di  $w \iff \exists x, y \in A^*$  t.c.  $w = xvy$  dove  $x$  e  $y$  possono essere  $\epsilon$

Si osservi, quindi, che:

- Ogni stringa è sottostringa di se stessa
- $\epsilon$  è sottostringa di ogni stringa

### 1.3.4 Suffisso

#### Definition 1.3.4: suffisso

$v$  si dice **suffisso** di  $w \iff \exists x \in A^*. w = xv$

### 1.3.5 Prefisso

#### Definition 1.3.5: prefisso

$v$  si dice **prefisso** di  $w \iff \exists x \in A^*. w = vx$

### 1.3.6 Potenza n-esima

#### Definition 1.3.6: potenza n-esima

Si dice **potenza n-esima** di una stringa  $w$  il valore  $n \geq 0$  il cui significato è definito per induzione:

- Caso 0:  $w^0 = \epsilon$
- Caso  $n + 1$ :  $w^{n+1} = ww^n$

### 1.3.7 Linguaggio

#### Definition 1.3.7: linguaggio

Si dice **linguaggio**  $L$  su alfabeto  $A$  un sottoinsieme  $L \subseteq A^*$



Vengono riportati qui alcuni esempi

### Example 1.3.1

Se  $A = \{a\}$ , si possono avere:

- $\emptyset, \{\epsilon\}, \{a, aaa\}$  sono linguaggi finiti
- $L_1 = \{a^n \mid n \geq 1\} = \{a, aa, aaa, \dots\} = A^* \setminus \{\epsilon\}$
- $L_2 = \{a^{2n} \mid n \geq 0\} = \{\epsilon, aa, aaaa\}$

## 1.4 Operazione sui linguaggi

Qui sono elencati le varie operazioni

### 1.4.1 Complemento

#### Definition 1.4.1: complemento

È definito **complemento** il linguaggio completare ad un linguaggio  $L$ , ovvero:

$$\bar{L} = \{w \in A^* \mid w \notin L\} = A^* \setminus L$$

### 1.4.2 Unione e intersezione

#### Definition 1.4.2: unione e intersezione

Ovvi:

$$\begin{aligned} L_1 \cup L_2 &= \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\} \\ L_1 \cap L_2 &= \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\} \end{aligned}$$

### 1.4.3 Concatenazione

#### Definition 1.4.3: concatenazione

È definita **concatenazione** tale operazione:

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$$

Ecco alcuni esempi:

### Example 1.4.1

- $L_1 = \{a^n \mid n > 0\} \quad L_2 = \{b\}$   
 $L_1 \cdot L_2 = \{a^n b \mid n > 0\}$
- $L_1 = \{a^{2n} \mid n > 0\} \quad L_2 = \{b^m \mid m > 0\}$   
 $L_1 \cdot L_2 = \{a^{2n} b^m \mid n, m > 0\}$
- $L_1 = \{a^m b^n \mid n > 0\} \quad L_2 = \{b^m \mid n > 0\}$   
 $L_1 \cdot L_2 = \{a^m b^{n+m} \mid n, m > 0\}$   
 $= \{a^m b^n \mid m \geq n > 0\}$
- $L_1 = \{a^m \mid m > 1\} \quad L_2 = \{a^m b^m \mid n > 0\}$   
 $L_1 \cdot L_2 = \{a^{m+n} b^m \mid m > 1, m > 0\}$   
 $= \{a^m b^m \mid m > m > 0\}$

- $L_1 = \{ab^m \mid n \geq 1\}$      $L_2 = \{a, c\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}$   
 $L_1 \cdot L_2 = \{ab^m a \mid m \geq 1\} \cup \{ab^m c \mid n \geq 1\}$   
 $\cup \{ab^n \mid n \geq 2\}$
- $A = \{0, 1\}$   
 $L_1 = \{w \in A^* \mid w \text{ contiene un numero pari di "0"}\}$   
 $L_2 = \{w \in A^* \mid w = 0y \text{ e } y \in \{1^*\}\}$   
 $L_1 \cdot L_2 = \{w \in A^* \mid w \text{ ha un numero dispari di "0"}\}$

#### 1.4.4 Potenza di un linguaggio

##### Definition 1.4.4: Potenza di un linguaggio

La **potenza di un linguaggio** viene definita per induzione:

- Caso 0:  $L^0 = \{\epsilon\}$
- Caso  $n + 1$ :  $L \cdot L^n \quad \forall n \geq 0$

#### 1.4.5 Stella di kleene

##### Definition 1.4.5: stella di kleene

Si dice **stella di kleene**:

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

Oppure

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

Quest'ultima detta **chiusura positiva**

### 1.5 Definire finitamente un linguaggio

#### 1.5.1 esempio 1: frasi palindrome

Una frase palindroma è una parola che letta da sx a dx è uguale a se stessa letta da dx a sx  
 Es. "I topi non avevano nipoti"

- $A = \{a, b\}$      $L = \{\epsilon, a, b, aa, bb, aba, bab, \dots\}$ . Come si nota è piuttosto scomodo
- Una palindroma può essere:
  - o è la stringa  $\epsilon$
  - oppure  $a$
  - oppure  $b$
  - oppure  $a$  "palindroma"  $a$
  - oppure  $b$  "palindroma"  $b$
- rappresentazione tramite **Backus-naur form (BNF)**.

$$\langle P \rangle := \epsilon \mid a \mid b \mid a \langle P \rangle a \mid b \langle P \rangle b$$

- Come **grammatica**:

$$P \rightarrow \epsilon \mid a \mid b \mid aPa \mid bPb$$

- definizione ricorsiva in cui:
  - $P$  è detto *simbolo non terminale*
  - $a, b$  sono "simboli terminali"

### 1.5.2 Esempio 2

espressioni aritmetiche formate a partire dalle variabili  $a$  e  $b$  con gli operatori  $\times, +$  e le parentesi  $(, )$   
 Una *expr* può essere:

- - la variabile  $a$
  - la variabile  $b$
  - $expr \times expr$
  - $expr + expr$
  - $(expr)$

- **bnf:**

$$\langle E \rangle ::= a \mid b \mid \langle E \rangle \times \langle E \rangle \mid \langle E \rangle + \langle E \rangle \mid (\langle E \rangle)$$

- Grammatica:

$$E \rightarrow a \mid b \mid E \times E \mid E + E \mid (E)$$

## 1.6 Grammatiche

Una grammatica è un insieme di regole che descrivono come le parole e le frasi possono essere combinate per formare espressioni valide. Queste regole determinano la struttura sintattica di un linguaggio, specificando come le unità di base (come le parole o i simboli) si connettono per formare frasi o espressioni più complesse. Ogni grammatica **segue lo stesso pattern definito** differenziandosi solo per come sono caratterizzate le produzioni. Quelle più utili sono le cosiddette grammatiche libere dal contesto (in rapporto tra facilità di analisi ed espressività)

### Definition 1.6.1: grammatiche libere (dal contesto)

Una **grammatica libera** da contesto è una quadrupla  $(NT, T, R, S)$  dove:

- $NT$  è un insieme finito di simboli non terminali
- $T$  è un insieme finito di simboli terminali
- $S \in NT$  è detto simbolo iniziale
- $R$  è un insieme finito di produzione (o regole) della forma:

$$V \rightarrow w \text{ dove } V \in NT \wedge w \in (T \cup NT)^*$$

Alcuni esempi:

#### Example 1.6.1

$$G = (\{S\}, \{a, b, +, \times\}, S, R)$$

Con

$$R = \{S \rightarrow a, S \rightarrow b, S \rightarrow S + S, S \rightarrow S \times S\}$$

## 1.7 Derivazioni

### Definition 1.7.1: derivazione immediata

Data  $G = (NT, T, R, S)$  libera dal contesto, diciamo che da  $v$  si **deriva immediatamente**  $w$ , e lo denotiamo con  $v \Rightarrow w$ , se:

$$\frac{v = xAy \quad (A \rightarrow z) \in R \quad w = xzy}{v \Rightarrow w}$$

### Definition 1.7.2: derivazione

Diciamo che da  $v$  si **deriva**  $w$  (o anche " $v$  si riscrive in  $w$ "), e lo denotiamo con  $v \Rightarrow^* w$ , se esiste una sequenza finita (eventualmente vuota) di derivazione immediate

$$v \Rightarrow w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w$$

Cioè:

$$\frac{}{v \Rightarrow^* v} \quad \frac{v \Rightarrow^* w \quad w \Rightarrow z}{v \Rightarrow^* z}$$

Dove  $\Rightarrow^*$  è la chiusa riflessiva e transitiva della relazione  $\Rightarrow$

## 1.8 Linguaggio Generato

### Definition 1.8.1: Linguaggio Generato

Il **linguaggio generato** da una grammatica  $G = (NT, T, R, S)$  è l'insieme

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

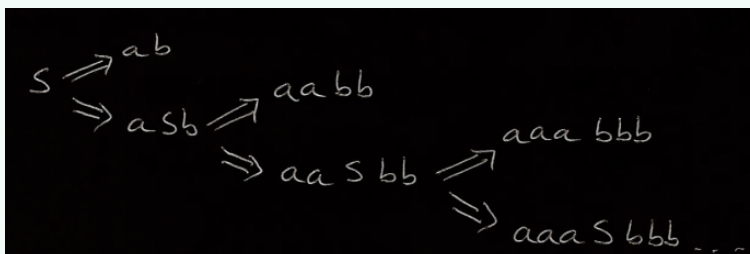
### 1.8.1 Algoritmo di Naif

Data una grammatica  $G$  è opportuno chiedersi come si fa a determinare un linguaggio  $L(G)$  e a verificare se  $w \in L(G)$ . La domanda può essere complessa, tuttavia in casi semplici ci viene in aiuto l'**algoritmo di Naif** che consiste nel partire da  $S$  e provare ad applicare in tutti i modi possibili le produzioni (regole) per trovare una derivazione che generi  $w$

In certi casi questa verifica è semplice

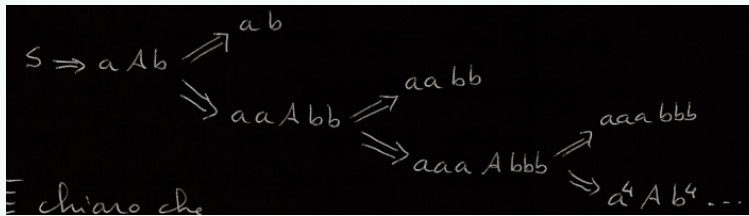
#### Example 1.8.1

- Sia  $G_3$  con  $S \rightarrow aSb|ab$



In questo esempio è facile determinare che  $L(G_3) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

- Sia  $G_1 \rightarrow aAb$  e  $A \rightarrow aAb \mid \epsilon$



Quindi  $L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Si può notare che  $G_1$  e  $G_3$  sono grammatiche equivalenti perché  $L(G_1) = L(G_3)$

In generale **esistono grammatiche diverse che generano lo stesso linguaggio**

## 1.9 Alberi di derivazione

Per rappresentare graficamente e semplicemente una certa grammatica esiste uno strumento utilissimo, ovvero l'albero di derivazione

### Definition 1.9.1: albero di derivazione

Data una grammatica libera  $G = (NT, T, S, R)$ , un albero di derivazione (o di parsing) è un albero ordinato in cui:

- Ogni nodo è etichettato con un simbolo in  $NT \cup \{\epsilon\} \cup T$
- la radice è etichettata con  $S$
- ogni nodo interno è etichettato con un simbolo in  $NT$
- se il nodo  $n$ 
  - ha etichetta  $A \in NT$
  - i suoi figli sono nell'ordine  $m_1, \dots, m_k$  con etichetta  $x_1, \dots, x_k$  (in  $NT \cup T$ ), allora

$A \rightarrow x_1, \dots, x_k$  è una produzione in  $R$

- se il nodo  $n$  ha etichetta  $\epsilon$ , allora  $n$  è una foglia, è figlio unico e, dato  $A$  suo padre,  $A \rightarrow \epsilon$  è una produzione di  $R$
- se inoltre ogni nodo foglia è etichettato su  $T \cup \{\epsilon\}$  è una produzione di  $R$
- se inoltre ogni nodo foglia è etichettato su  $T \cup \{\epsilon\}$ , allora l'alberello di derivazione corrisponde ad una derivazione completa

Un albero di derivazione, quindi, **riassume tante derivazioni diverse ma tutte equivalenti** (ovvero generano lo stesso albero)

### Example 1.9.1

Consideriamo la grammatica

$$s \rightarrow a|b|c|S + S|S \times S$$

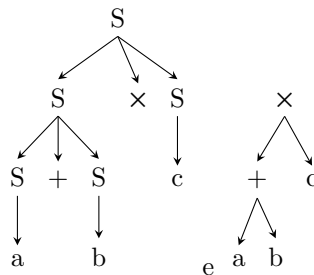
Inoltre si consideri la derivazione

$$S \Rightarrow \underline{S} + S \Rightarrow \underline{S} \times S + S \Rightarrow a \times \underline{S} + S \Rightarrow a \times b + \underline{S} \Rightarrow a \times b + c$$

Allora il suo albero di derivazione è:



Si osservi inoltre che l'albero di derivazione fornisce informazioni semantiche: "quali operandi per quali operatori" e possono essere riassunti nei cosiddetti **alberi sintattici**, tipo



### Theorem 1.9.1

Una stringa  $w \in T^*$  appartiene a  $L(G)$  sse ammette un albero di derivazione completo (le cui foglie, lette da sx a dx danno la stringa  $w$ ) cioè visita in ordine anticipato tralasciando i nonterminali

## 1.9.1 Ambiguità

Per generare una stringa  $w$ , una grammatica libera  $G$  può avere diversi *alberi di derivazione*, che quindi attribuiscono un significato diverso allo stesso input, vediamo un esempio:

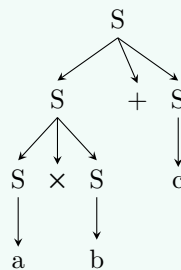
### Example 1.9.2

Si consideri la seguente grammatica

$$S \rightarrow a|b|c|S + S|S \times S$$

Si hanno due diverse derivazioni per  $a \times b + c$ :

1.  $S \Rightarrow \underline{S} + S \Rightarrow \underline{S} \times S + S \Rightarrow a \times \underline{S} + S \Rightarrow a \times b + \underline{S} \Rightarrow a \times b + c$   
con l'albero:



2.  $S \Rightarrow \underline{S} \times S \Rightarrow a \times \underline{S} \Rightarrow a \times \underline{S} + s \Rightarrow a \times b + \underline{S} \Rightarrow a \times b + c$   
Con l'albero:



Nella grammatica dell'esempio 1.9.1, la stringa  $a \times b + c$  ha più di un albero di derivazione. In questi casi si dice che la grammatica è quindi **inutilizzabile per dare semantica a  $a \times b + c$**  e viene definita **ambigua**. Bisogna utilizzare grammatiche non ambigue, o manipolare grammatiche ambigue per disambiguarle.

#### Definition 1.9.2: Grammatica ambigua

Una grammatica libera  $G$  è **ambigua** se  $\exists w \in L(G)$  che ammette più alberi di derivazione.

E di conseguenza:

#### Definition 1.9.3: Linguaggio ambiguo

Un linguaggio  $L$  è **ambiguo** se tutte le grammatiche  $G$ , tali che  $L(G) = L$ , sono ambigue

Attenzione! Abbiamo detto che una grammatica è ambigua se, per lo stesso input, ha *alberi* di derivazione diversi, **NON** *derivazioni* diverse. Questa distinzione è necessaria perché due derivazioni possono differire semplicemente nell'ordine in cui sostituiscono i nonterminali, generando però lo stesso albero di derivazione e quindi attribuendo lo stesso significato all'input.

### Derivazioni rightmost e leftmost

Per poter studiare l'ambiguità di una grammatica guardando le sue derivazioni, ci è utile fissare un'unica strategia per decidere quale nonterminale sostituire ad ogni passaggio di derivazione. Una convenzione semplice è quella di prendere il nonterminale più a sinistra (o a destra) della stringa intermedia di derivazione. Queste due strategie si chiamano derivazioni *leftmost* e *rightmost*:

#### Definition 1.9.4: Derivazione leftmost (e rightmost)

Sia  $G = (NT, T, R, S)$  una grammatica libera. Diciamo che  $u \Rightarrow_l v$  se  $u = xXy, v = xzy$ , dove  $x \in T^*, y \in (T \cup NT)^*$  e  $X \rightarrow z \in R$ . Se, invece,  $x \in (T \cup NT)^*$  e  $y \in T^*$ , allora  $u \Rightarrow_r v$ .

Quindi, scriviamo  $u \Rightarrow_l v$  quando sostituiamo il nonterminale di  $u$  che si trova più a sinistra, e  $u \Rightarrow_r v$  quando sostituiamo quello più a destra. Detto ciò, una **derivazione leftmost** è una derivazione  $u_1 \Rightarrow_l^* u_n$  tale che:

$$u_1 \Rightarrow_l u_2 \Rightarrow_l \dots \Rightarrow_l u_n$$

Quindi ad ogni passo sostituiamo il nonterminale più a sx (in modo analogo per rightmost).

Si può dimostrare che, se per una stringa  $w$  esiste un'albero di derivazione per una grammatica  $G$ , allora esistono sicuramente derivazioni leftmost e rightmost di  $w$ . In più, possiamo dimostrare che i seguenti numeri sono uguali:

- Il numero di derivazioni leftmost di  $w$
- Il numero di derivazioni rightmost di  $w$
- Il numero di alberi di derivazione distinti di  $w$

Detto ciò, possiamo utilizzare la definizione di grammatica ambigua per arrivare alla seguente proposizione:

**Proposition 1.9.1** Derivazioni leftmost/rightmost e ambiguità

Data una grammatica libera  $G$ , questa' è **ambigua** sse  $\exists w \in L(G)$  tale che:

$w$  ha piu' di una derivazione leftmost/rightmost

## 1.9.2 Rimuovere l'ambiguità

Alcune grammatiche possono essere manipolate di modo da

- rimuovere l'ambiguità
- generare lo stesso linguaggio

In altre, invece, ti tieni l'ambiguità (non è possibile rimuoverla (cazzo)). Questa CAZZATA viene spiegata con solo degli esempi:

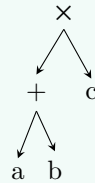
### Example 1.9.3

Sia  $S$  la grammatica

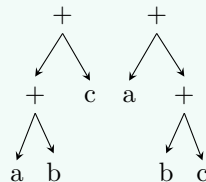
$S \rightarrow a \mid b \mid c \mid S + S \mid S \times S$  è ambigua!

Problemi:

- Precedenza del  $\times$  rispetto al  $+$  in modo che  $a \times b + c$  sia interpretato come:



- associatività del  $+$  e del  $\times$



$a + b + c$  ovvero bisogna scegliere l'associatività a dx o sx

Un modo per eliminare questa ambiguità è definire la grammatica così:

$e \rightarrow E + T \mid T \quad T \rightarrow A \times T \mid A \quad A \rightarrow a \mid b \mid c \mid (E)$



## Chapter 2

# Struttura di un compilatore, semantica statica, semantica dinamica

### 2.1 Vincoli contestuali

#### Definition 2.1.1: vincoli sintattici contestuali

I vincoli sintattici contestuali sono termini o parole riservate non esprimibili per mezzo di grammatiche libere (perché non possono descrivere vincoli che dipendono dal contesto) che bisogna evitare di considerare quando si esegue il codice

Tradizionalmente i vincoli sintattici contestuali appartengono alla sintassi, ma nel gergo dei *LP*, si intende:

- **Sintassi:** quello che si *scrive per mezzo di Grammatiche Libere*
- **semantica** tutto il resto ...

Pertanto *i vincoli contestuali sono dunque vincoli semantici, detti di semantica statica* cioè vincoli che possono essere verificati ispezionando il codice *senza mandare il programma in esecuzioni*

Il compilatore delega questi controlli di semantica statica alla cosiddetta **analisi semantica**

### 2.2 Semantica statica

#### Definition 2.2.1: Semantica statica

Per **semantica statica** si intende l'insieme di quei controlli che possono essere fatti sul testo del programma senza eseguirlo

#### Example 2.2.1

```
int A;  
bool B  
A := B (errore di tipo)
```

### 2.3 semantica dinamica

Per **semantica dinamica** si intende una rappresentazione formale dell'esecuzione del programma, la quale può mostrare errori durante l'esecuzione

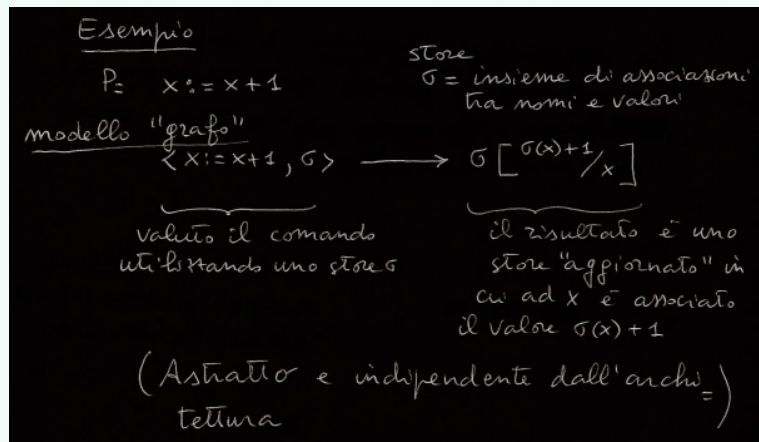
#### Example 2.3.1

```
read(A);  
B :=  $\frac{10}{A}$  (Se  $A = 0$  si dà un errore in esecuzione. F)
```

Staticamente non si può sapere l'errore perché la sua occorrenza **dipende dall'input dell'utente che fornirà durante l'esecuzione del programma**

Per implementare una semantica dinamica occorre fornire un modello matematico che descriva indipendentemente dall'architettura su cui il programma viene eseguito, il "comportamento del programma"

### Example 2.3.2



### 2.3.1 Utilità della semantica dinamica

A chi serve la semantica dinamica?

- **Al programmatore:** *ANALISI DEL PROGRAMMA*
  - deve sapere esattamente cosa debba fare il suo programma
  - deve poter dimostrare proprietà del suo programma (ad es.: "termina sempre per ogni possibile input?")
- **Al progettista del linguaggio:**
  - strumento di specifica del linguaggio
  - deve poter dimostrare proprietà del linguaggio (ad es.: "è Turing-completo?")
- **All'implementatore del linguaggio:**
  - riferimento per dimostrare la correttezza dell'implementazione

Infatti **un compilatore è corretto quando preserva la semantica dinamica**, quindi per dimostrare che un compilatore è corretto serve avere una semantica per il linguaggio sorgente e per il linguaggio oggetto

### 2.3.2 definire la semantica

Per definire la semantica si utilizzano due tecniche principali:

- **operazionale:** (macchina astratta a stati e transizioni)  
Ovvero si costruisce una specie di automa che, passo a passo, mostra l'effetto dell'esecuzione delle varie istruzioni. **vi è una maggiore enfasi su COME si calcola**
- **Denotazionale:** si associa ad ogni programma sequenziale una funzione da input ad output (incluse strutture ausiliarie e memoria). **vi è una maggiore enfasi su COSA si calcola**

## 2.4 Pragmatica nella descrizione di un linguaggio

### Definition 2.4.1: Pragmatica nella descrizione di un linguaggio

si definisce **pragmatica nella descrizione di un linguaggio** insieme di regole sul modo in cui è meglio usare le istruzioni a disposizione

Esempietti:

#### Example 2.4.1

- evitare le istruzioni di salto quando possibile
- usare le variabili di controllo del `for` solo a quello scopo
- scelta della modalità più appropriata di passaggio di parametri ad una funzione
- scelta tra iterazione determinata (`for`) e indeterminata (`while`)

## 2.5 implementazione

### Definition 2.5.1: implementazione

Per **implementazione** si intende la scrittura di un compilatore per una macchina ospite già realizzata, costruendo così una macchina astratta per il linguaggio

### 2.5.1 Correttezza dell'implementazione

Per far sì che un compilatore sia corretto occorre **dimostrare che il programma preservi la semantica**, ovvero il programma sorgente e quello oggetto calcolino la stessa funzione

### 2.5.2 Struttura di un compilatore



## 2.6 fasi principali della compilazione

### 2.6.1 analisi lessicale (scanner)

L'analisi lessicale spezza il programma sorgente nei componenti sintattici primitivi chiamati "tokens" (identificatori, numeri, operatori, parametri, parole riservate)

- controlla solo che il lessico sia ammissibile
- riempie parzialmente la tabella dei simboli per gli identificatori di variabili, procedure funzioni ...

Per realizzare uno scanner avremo bisogno di studiare:

- **grammatiche regolari**
- **espressioni regolari**: un formalismo usato per descrivere i linguaggi generati da grammatiche regolari
- **automi a stati finiti**: uno strumento che permette di riconoscere i linguaggi regolari

### 2.6.2 analisi sintattica (parser)

A partire dalla lista di tokens, generata dallo scanner, il parser produce l'albero di derivazione del programma, riconoscendo se le frasi sono sintatticamente corrette

Ad esempio controlla che:

- le parentesi siano bilanciate: `((a)+b)))`
- che i comandi siano composti secondo le regole grammaticali `if(x=5) then then x:=3`

Per realizzare un Parser, avremo bisogno di:

- grammatiche libere dal contesto
- automi a pila

### 2.6.3 Analisi semantica

L'analisi semantica **esegue dei controlli di semantica statica** (ovvero sintattici contestuali) per rilevare eventuali errori semantici

Arricchisce l'albero di derivazione generato dal Parser con informazioni sui tipi, verifica i tipi negli assegnamenti, parametri attuali vs. formali, dichiarazione e uso di variabili e genera eventuali errori

### 2.6.4 Generazione della forma intermedia

Genera codice scritto in un **linguaggio intermedio** indipendente dall'architettura, facilmente traducibile nel linguaggio macchina di varie macchine diverse. Nel generare questo codice intermedio si esegue la struttura dell'albero sintattico, ricavato dall'albero di derivazione

### 2.6.5 Ottimizzazione

Si effettuano ottimizzazioni nel codice intermedio per renderlo più efficiente

- rimozione di codice inutile (dead code)
- espansione in linea di chiamate di funzioni
- fattorizzazione di sottoespressioni
- mettere fuori dai cicli sottoespressioni che non variano

Alla fine si ottiene un codice intermedio **ottimizzato**

### 2.6.6 Generazione del codice

Viene generato codice per una specifica architettura (include anche l'assegnazione dei registri e ottimizzazioni specifiche macchine)

### 2.6.7 Tabella dei simboli

Memorizza le informazioni sui nomi presenti nel programma (identificatori di variabili, funzioni, procedure)

Es: per le matrici mette, come attributo la dimensione e il tipo dei suoi elementi

## 2.7 semantica operativa strutturata

### 2.7.1 Definizione di un linguaggio a cui dare semantica

La **semantica operativa strutturata** È utilizzata per descrivere come ogni singola istruzione o espressione in un linguaggio modifica lo stato di un sistema in termini di transizioni di stato

Il suo **linguaggio** viene **definito tramite sintassi astratta semplice ed intuitiva, ma ambigua** ed una stringa viene sempre accoppiata ad un albero sintattico (non ambiguo)

Alcuni elementi fondamentali del linguaggio vengono definiti attraverso **insiemi di base**:

- **Booleani**: l'insieme dei valori booleani è composto da due valori:  $\{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$ . Le metavariable sono  $t, t_1, t' \in \mathbf{T}$
- **numeri naturali**:  $\{0, 1, 2, \dots\}$   $n, m, p \in \mathbf{N}$
- **variabili**:  $a, b, c, \dots, z$   $v \in \mathbf{Var}$

Per descrivere espressioni più complesse, vengono definiti alcuni **insiemi derivati** utilizzando la notazione BNF (Backus-Naur Form)

- **espressioni aritmetiche (exp)**:

$$e ::= m | v | e + e | e - e | e * e$$

- **espressioni booleane (Bexp)**:

$$b ::= t | e = e | b \text{ or } b | \neg b$$

- **Comandi Com**:

$$c ::= \text{skip} | v := e | c ; c | \text{while } b \text{ do } c | \text{if } b \text{ then } c \text{ else } c$$

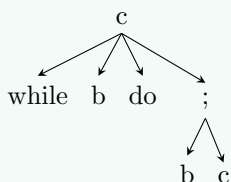
Questo tipo di sintassi è piuttosto semplice ma è ambigua, **per una sintassi non ambigua ne dovrei costruire una completa, ma molto più complicata** (dovrei gestire le precedenze, le parentesi ecc...) ma non serve nel dare una semantica in un linguaggio di programmazione perché un **parser (analizzatore sintattico) prende in input un programma scritto in sintassi concreta (non ambigua) e restituisce un albero sintattico di sintassi astratta** (quella che stiamo appena definendo), pertanto, nel dare semantica possiamo partire dagli alberi di sintassi astratta (ambigua) e ignorare la parte di analisi del parser

#### Example 2.7.1

Riportiamo qui un esempio di sintassi astratta.

Che tipo di albero sintattico vogliamo intendere con la seguente espressione?

while  $b$  do  $c_1; c_2$



## 2.8 Dare semantica ad un linguaggio

Entriamo nel vivo del discorso, ma prima definiamo, per ogni categoria sintattica (cioè **Exp**, **Bexp**, **Com**) un modello detto **sistema di transizione** che è fondamentalmente un "grafo" di stati

### Definition 2.8.1: sistema di transizione

Un **sistema di transizione** è una tripla  $\langle \Gamma, T, \rightarrow \rangle$  dove

- $\Gamma$  è l'insieme di stati (o configurazione)
- $T \subseteq \Gamma$  è l'insieme degli stati terminali (ovvero tutti quegli stati in cui il calcolo è stato terminato con successo)
- $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Gamma$  è la relazione di transazione che prende in input uno stato  $\in \Gamma$  e restituisce un'altro stato  $\in \Gamma$

Una computazione a partire dallo stato  $\gamma_0$  è una sequenza  $\gamma_0 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots$  che può essere finita o infinita, invece con  $\rightarrow^*$  si indica la chiusura riflessiva e transitiva di  $\rightarrow$ , ovvero:

$$\frac{}{\gamma \rightarrow^* \gamma} \quad \frac{\gamma \rightarrow^* \gamma' \quad \gamma' \rightarrow \gamma''}{\gamma \rightarrow^* \gamma''}$$

ovvero si può raggiungere da uno stato  $\gamma$  uno stato  $\gamma''$  in più passi

### Example 2.8.1



Questa è una rappresentazione grafica di un grafo in cui i nodi sono gli stati e gli archi le transizioni

Se voglio definire la semantica (se voglio usare questo tipo di struttura) del linguaggio con la sintassi definita prima occorre definire uno stato di transazione specifico per **Exp**, per **Bexp** e per **Com**

Vi sono tuttavia **diversi problemmucci**, del tipo:

1.  $\Gamma$  è di solito un insieme infinito contabile, allora vi è la **necessità di trovare una rappresentazione finita ed implicita attraverso grammatiche**. Questo vuol dire che  $\Gamma$  coincide con uno dei linguaggi delle 3 categorie sintattiche (ovvero **Exp**, **Bexp**, **Com**)

### Example 2.8.2

$$\Gamma_e = \{ \langle e, \sigma \rangle \mid e \in \text{Exp}, \sigma \in \text{Store} \}$$

Dove  $\sigma$  è una funzione che associa ad ogni variabile un numero naturale, perché lo stato del mio sistema è una coppia in cui la prima parte indica l'espressione che devo valutare, la seconda componente è lo store che indica il valore dell'espressione

2.  $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Gamma$  è una relazione costituita da infinite coppie  $\gamma \rightarrow \gamma'$ , anche qui vi è la necessità di trovare una rappresentazione finita ed implicita come minima relazione che soddisfa **un certo insieme finito di assiomi e regole di inferenza**, quindi la semantica non è che un insieme di regole di inferenza che mi indicano in modo calcolare le transizioni che mi portano ad eseguire un certo comando
3. per dare significato alle variabili (che possono solo assumere valore su  $\mathbb{N}$ ) è necessario introdurre uno **store**  $\sigma : Var \rightarrow \mathbb{N}$ , come funzione che associa ad ogni variabile un valore

$$\sigma = \{x_1/n_1, x_2/n_2, \dots, x_k/n_k\}$$

Se supponiamo che  $var = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

### 2.8.1 Semantica delle espressioni aritmetiche

Adesso introduciamo la **Semantica delle espressioni aritmetiche**, un tipo di semantica operativa. Deve ovviamente avere un sistema di transizione  $\langle \Gamma_e, T_e, \rightarrow_e \rangle$  dove:

- $\Gamma_e = \{\langle e, \sigma \rangle \mid e \in Exp, \sigma \in Store\}$
- $T_e = \{\langle n, \sigma \rangle \mid n \in \mathbb{N}, \sigma \in Store\}$
- La relazione  $\rightarrow_e$  è definita come la minima relazione che soddisfa gli assiomi e le regole di inferenza qui sotto:

#### 1. Variabile:

$$\overline{\langle v, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle \sigma(v), \sigma \rangle}$$

Ovvero il tuo stato terminale sarà il numero della variabile  $v$  indicato dallo Store (inoltre  $\sigma$  rimane inalterato). Quindi valuto ciò che  $v$  vale in  $\sigma$

#### 2. Somma 1:

$$\frac{\langle e_0, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_0, \sigma' \rangle}{\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_0 + e_1, \sigma' \rangle}$$

Nel momento in cui riesco a fare un passo di valutazione da  $e_0$  a  $e'_0$  alterando anche lo stato dello store da  $\sigma$  a  $\sigma'$  questa trasformazione si applica anche durante una somma, in altre parole l'espressione si semplifica o riduce (ad esempio, una variabile viene sostituita con il suo valore), e nel contempo lo stato della memoria potrebbe essere aggiornato se l'espressione stessa comporta una modifica ai valori delle variabili

#### 3. Somma 2:

$$\frac{\langle e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_1, \sigma' \rangle}{\langle m + e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle m + e'_1, \sigma' \rangle}$$

Stessa roba ma con un numero  $m$

#### 4. Somma 3:

$$\overline{\langle m + m', \sigma \rangle \rightarrow_e \langle P, \sigma \rangle} \quad \text{dove } P = m + m'$$

#### 5. Sottrazione 1:

$$\frac{\langle e_0, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_0, \sigma' \rangle}{\langle e_0 - e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_0 - e_1, \sigma' \rangle}$$

#### 6. Sottrazione 2:

$$\frac{\langle e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_1, \sigma' \rangle}{\langle m - e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle m - e'_1, \sigma' \rangle}$$

#### 7. Sottrazione 3:

$$\overline{\langle m - m', \sigma \rangle \rightarrow_e \langle p, \sigma \rangle}$$

Si noti come la somma e la sottrazione prima valutano la sottoespressione di sinistra ( $e_0$ ) con somma/sottrazione 1 poi, se questa s'è mutata in numero, valutano la sottoespressione di destra ( $e_1$ ) con somma/sottrazione 2 ed infine, se questa s'è mutata in un numero, viene fatta la somma/sottrazione finale con somma/sottrazione 3



### Example 2.8.3

Esempietto per valutare  $\langle (x+2) - y, \{x/5, y/3\} \rangle$ :

$$\begin{array}{l}
 \text{(Var)} \quad \frac{}{\langle x, \{x/5, y/3\} \rangle \rightarrow \langle 5, \{x/5, y/3\} \rangle} \\
 \text{(Sum}_1\text{)} \quad \frac{}{\langle x+2, \{x/5, y/3\} \rangle \rightarrow \langle 5+2, \{x/5, y/3\} \rangle} \\
 \text{(Sub}_1\text{)} \quad \frac{}{\underbrace{\langle (x+2) - y, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_0} \rightarrow \underbrace{\langle (5+2) - y, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_1}} \\
 \text{(Sum}_3\text{)} \quad \frac{}{\langle 5+2, \{x/5, y/3\} \rangle \rightarrow \langle 7, \{x/5, y/3\} \rangle} \\
 \text{(Sub}_1\text{)} \quad \frac{}{\underbrace{\langle (5+2) - y, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_1} \rightarrow \underbrace{\langle 7 - y, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_2}} \\
 \text{(Var)} \quad \frac{}{\langle y, \{x/5, y/3\} \rangle \rightarrow \langle 3, \{x/5, y/3\} \rangle} \\
 \text{(Sub}_2\text{)} \quad \frac{}{\underbrace{\langle 7 - y, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_2} \rightarrow \underbrace{\langle 7 - 3, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_3}} \\
 \text{(Sub}_3\text{)} \quad \frac{}{\underbrace{\langle 7 - 3, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_3} \rightarrow \underbrace{\langle 4, \{x/5, y/3\} \rangle}_{\gamma_4}}
 \end{array}$$

Si ha, quindi, che  $\gamma_0 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \rightarrow \gamma_4 \in T_e$  cioè  $\langle (x+2) - y, \{x/5, y/3\} \rangle \rightarrow^* \langle 4, \{x/5, y/3\} \rangle$

### Theorem 2.8.1

Vogliamo dimostrare che  $\rightarrow_e$  è deterministico, ovvero:

$$\gamma \rightarrow_e \gamma' \text{ e } \gamma \rightarrow_e \gamma'', \text{ allora } \gamma' = \gamma'' \quad \forall \gamma, \gamma', \gamma''$$

In altre parole significa che **da ogni transizione esce al più una transizione**, mai più di una

**dimostrazione:** mi riduco a dimostrare che  $(\langle e, \sigma \rangle \rightarrow_e \gamma' \wedge \langle e, \sigma \rangle \rightarrow_e \gamma'') \Rightarrow \gamma' = \gamma''$

Procedo per induzione strutturale, con HP  $(\langle e, \sigma \rangle \rightarrow_e \gamma' \wedge \langle e, \sigma \rangle \rightarrow_e \gamma'') \Rightarrow \gamma' = \gamma''$ .

1.  $e = m \in \mathbb{N}$ : se  $\langle e, \sigma \rangle \rightarrow_e e$  allora la conclusione è vera perché la premessa è falsa
2.  $e = v \in Var$ : Per la regola (Var), l'unica transizione derivabile per  $\langle v, \sigma \rangle$  è  $\langle v, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle \sigma(v), \sigma \rangle$  poiché  $\sigma$  è una funzione (cioè  $\sigma(v)$  è univoco) e la sola regola (Var) è applicabile allora per forza  $\langle \sigma(v), \sigma \rangle = \sigma' \text{ e } \langle \sigma(v), \sigma \rangle = \sigma''$  quindi  $\gamma' = \gamma''$
3.  $e = e_0 + e_1$ : Supponiamo che  $\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma'$  e  $\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma''$   
Ci sono 3 sottocasi da esaminare in accordo nel modo in cui derivò  $\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma'$ :

- (a)  $\langle e_0, \sigma \rangle \rightarrow \langle e'_0, \sigma' \rangle$  e  $\gamma' = \langle e'_0 + e_1, \sigma' \rangle$  in questo caso ho che  $e_0 \notin \mathbb{N}$  e la regola che ho applicato è **Somma**.  
1. Allora se  $\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma''$  è necessario che  $\langle e_0, \sigma \rangle \rightarrow \langle e''_0, \sigma'' \rangle$  e che  $\gamma'' = \langle e''_0 + e_1, \sigma'' \rangle$ .  
Tuttavia per (HP) si ha che  $\langle e'_0, \sigma' \rangle = \langle e''_0, \sigma'' \rangle$  pertanto deve essere che  $e'_0 = e''_0$  e  $\sigma' = \sigma''$ , da cui discende  $\gamma' = \gamma''$

- (b)  $e_0 = m \in \mathbb{N}$  ed  $\langle e_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle e'_1, \sigma' \rangle$  Caso analogo al precedente, dato che ho che  $e_1 \notin \mathbb{N}$  e la regola che ho applicato è **Somma 2**. Allora se  $\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma''$ , è necessario che  $\langle e_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle e''_1, \sigma'' \rangle$  e  $\gamma'' = \langle e_0 + e''_1, \sigma'' \rangle$ . Tuttavia per (HP) si ha che  $\langle e'_1, \sigma' \rangle = \langle e''_1, \sigma'' \rangle$  pertanto deve essere che  $e'_1 = e''_1$  e  $\sigma' = \sigma''$ , da cui discende  $\gamma' = \gamma''$
- (c)  $e_0 \in \mathbb{N}$  ed  $e_1 \in \mathbb{N}$  In questo caso, solo **Somma 3** è applicabile, ottenendo una sola passibile transizione:

$$\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle P, \sigma \rangle \text{ dove } P = e_0 + e_1$$

Quindi la tesi segue:

$$\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma' \wedge \langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \gamma'' \implies \gamma' = \gamma''$$

4.  $e = e_1 - e_2$ : DEL TUTTO ANALOGO AL CASO PRECEDENTE

Q.e.d. ☺

Questo teorema ci porta ad un dio boia di corollario:

### Corollary 2.8.1

poiché  $\rightarrow_e$  è deterministica, a partire da  $\langle e, \sigma \rangle$  arriveremo su una sola configurazione terminale  $\langle n, \sigma \rangle$ : "n è il valore di  $e$  in  $\sigma$ "

È possibile perciò definire una funzione

$$eval : Expr \times Store \rightarrow \mathbb{N}$$

che da semantica alle espressioni

$$eval(e, \sigma) = \begin{cases} m & \text{se } \langle e, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle m, \sigma \rangle \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempi:

### Example 2.8.4

- $eval((x + 2) - y, \{x/5, y/3\}) = 4$  dato che

$$\langle (x + 2) - y, \{x/5, y/3\} \rangle \rightarrow^* \langle 4, \{x/5, y/3\} \rangle$$

- $eval((x + 2) - y, \{x/2, y/7\}) = \text{indefinito}$  dato che

$$\langle (x + 2) - y, \{x/2, y/7\} \rangle \rightarrow^* \langle 4 - 7, \{x/2, y/7\} \rangle \nrightarrow$$

Inoltre sia introdotta la definizione di equivalenza:

### Definition 2.8.2: Equivalenza tra espressioni

Siano  $e$  ed  $e'$  due espressioni, allora si dicono **equivalenti** sse  $\forall \sigma \in Store \quad eval(e, \sigma) = eval(e', \sigma)$   
E si denota con  $e \equiv e'$

Esempietto:

### Example 2.8.5

$$v_1 + (v_2 + v_3) \equiv (v_1 + v_2) + v_3$$

Si osservi come Eval è definita rispetto alla disciplina di valutazione IS (interno destro), pertanto, rigorosamente, Eval è denotato come  $Eval_{is}$ . Si può, inoltre, dimostrare che anche per ID (interno sinistro), il risultato della valutazione è lo stesso:

$$Eval_{is} = Eval_{id}$$

Dove  $Eval_{id}(e, \sigma) = \begin{cases} m & \text{se } \langle e, \sigma \rangle \rightarrow_{id}^* \langle m, \sigma \rangle \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}$

Come vedremo, è possibile definire anche altre discipline di valutazione come Esterna Sinistra, Esterne Destra, Esterna parallela.

## 2.8.2 Semantica delle espressioni booleane

Arriviamo alle espressioni booleane con la seguente grammatica:

$$b ::= t | e = e | b \text{ or } b | \neg b$$

(ricordo che  $t$  è una metavariable con un valore di verità true o false) E il seguente sistema di transazione:

$$\langle \Gamma_b, T_b, \rightarrow_b \rangle \text{ dove } \Gamma_b = \{ \langle b, \sigma \rangle | b \in Bexp, \sigma \in Store \} \text{ e } T_b = \{ \langle tt, \sigma \rangle, \langle ff, \sigma \rangle | \sigma \in Store \}$$

e  $\rightarrow_b$  è la minima relazione generata dai seguenti assiomi e regole di inferenza:

- **Eq1**

$$\frac{\langle e_0 = e_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle e'_1, \sigma' \rangle}{\langle m = e_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle m = e'_1, \sigma' \rangle}$$

- **Eq2**

$$\frac{\langle e_1, \sigma \rangle \rightarrow_e \langle e'_1, \sigma' \rangle}{\langle m = e_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle m = e'_1, \sigma' \rangle}$$

- **Eq3**

$$\frac{}{\langle m = m, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle t, \sigma \rangle} \text{ dove } t = \begin{cases} tt & \text{se } m = n \\ ff & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

- **Or1**

$$\frac{\langle b_0, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b'_0, \sigma' \rangle}{\langle b_0 \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b'_0 \text{ or } b_1, \sigma' \rangle}$$

- **Or2**

$$\frac{}{\langle tt \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle tt, \sigma \rangle}$$

- **Or3**

$$\frac{}{\langle ff \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b_1, \sigma \rangle}$$

- **Neg1**

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b', \sigma' \rangle}{\langle \neg b, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle \neg b', \sigma' \rangle}$$

- **Neg2**

$$\frac{}{\langle \neg b, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle t', \sigma \rangle} \text{ dove } t' = \begin{cases} tt & \text{se } t = ff \\ ff & \text{se } t = tt \end{cases}$$

Si tenga presente che Eq1, Eq2 e Eq3 sono cosiddette **interne sinistre** perché inizio a valutare la sottoespressione di sinistra per poi restituire un valore di verità  $t$  sse ho ottenuto numeri in tutte e due le sottoespressioni mentre Or1, Or2 e Or3 sono **esterne sinistre** perché inizio a valutare la sottoespressione di sinistra per poi restituire un valore di verità  $t$  sse ho ottenuto numeri almeno in una sottoespressione. Quindi se nelle interne dovevo avere dei numeri in tutte le sottoespressioni per poi eseguire la valutazione finale nelle esterne per eseguire la valutazione finale mi basta avere una quantità sufficiente

Anche per i booleani si ha questo teorema:

**Theorem 2.8.2**

$\rightarrow_b$  è deterministica, ovvero

$$(\gamma \rightarrow_b \gamma' \wedge \gamma \rightarrow_b \gamma'') \implies \gamma' = \gamma''$$

Che porta al seguente corollario:

**Corollary 2.8.2**

si può, quindi, definire:

$$eval_b(b, \sigma) = \begin{cases} t & \text{se } \langle b, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle t, \sigma \rangle \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

E si ha anche la seguente definizione:

**Definition 2.8.3: Equivalenza booleani**

Siano  $b$  ed  $b'$  due booleani, allora si dicono **equivalenti** sse  $\forall \sigma \in Store \quad eval_b(b, \sigma) = eval_b(b', \sigma)$   
E si denota con  $b \equiv b'$

**Example 2.8.6**

$$\neg((3 = v) \vee (3 = 4)) = \neg(v = 3)$$

Si possono definire per  $b_0$  or  $b_1$  regole di valutazioni diverse da ES. Ad esempio ED o IS, ma non sono tutte equivalenti, si provi, ad esempio, con ED:

- Or1':

$$\frac{\langle b_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b'_1, \sigma' \rangle}{\langle b_0 \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b_0 \text{ or } b'_1, \sigma' \rangle}$$

- Or2':

$$\overline{\langle b_0 \text{ or } tt, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle tt, \sigma \rangle}$$

- Or3':

$$\overline{\langle b_0 \text{ or } ff, \sigma \rangle \rightarrow_b \langle b_0, \sigma \rangle}$$

**Example 2.8.7**

$$\gamma = \langle \rangle$$

## Chapter 3

# Analisi lessicale: espressioni regolari, DFA, NFA

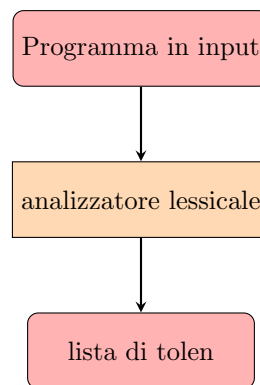
### 3.1 analisi lessicale

partiamo dalla definizione

#### Definition 3.1.1: Analisi lessicale

Riconoscere nella stringa in ingresso gruppi/sequenze di simboli che corrispondono a specifiche categorie sintattiche

La stringa in input, poi, è trasformata in una sequenza di simboli astratti, detti **token**, si analizzi la figura:



#### 3.1.1 token

#### Definition 3.1.2: Token

un token è una coppia (nome, valore), dove:

- nome: simbolo astratto che rappresenta una categoria semantica
- Valore: una sequenza di simboli del testo in ingresso

Esempietto:

#### Example 3.1.1

Un esempio di token è  $\langle Ide, x1 \rangle$ , dove:

- *Ide*: è l'informazione che identifica una classe di token

- $x1$ : è l'informazione che identifica lo specifico token
- 

Siano inoltre tali definizioni

#### Definition 3.1.3: Pattern

è la descrizione generale della forma dei valori di una classe di token

#### Example 3.1.2

Sia  $(x \mid y)(x \mid y \mid 0 \mid 1)^*$  un'espressione regolare per rappresentare un Pattern, un esempio di stringa è

#### Definition 3.1.4: lessema

si definisce **lessema** una stringa istanza di un pattern

#### Example 3.1.3

nel nostro esempio  $x1$  è un'istanza di un pattern

vedremo che ad ogni nome di categoria sintattica è associato un pattern che specifica i possibili valori che possono essere presi per quel nome, come lessemi

#### Example 3.1.4

dalla stringa C si ha:

```
if(x == 0) printf("zero")
```

un analizzatore lessicale potrebbe produrre la seguente sequenza di token:

- $\langle \text{if} \rangle$
- $\langle ( \rangle$
- $\langle \text{ide}, x \rangle$
- $\langle \text{Operel}, == \rangle$
- $\langle \text{const} - \text{num}, 0 \rangle$
- $\langle ) \rangle$
- $\langle \text{Ide}, \text{printf} \rangle$
- $\langle ( \rangle$
- $\langle \text{const} - \text{string}, \text{zero} \rangle$
- $\langle ) \rangle$

In realtà, normalmente lo scanner **associa agli identificatori un indirizzo della tabella dei simboli**, quindi  $\langle \text{ide}, x \rangle$  è in realtà  $\langle \text{ide}, \text{puntatore alla tabella dei simboli} \rangle$

### 3.1.2 espressioni regolari

Nello stesso modo in cui possiamo scrivere espressioni matematiche utilizzando operatori matematici  $(+, \times, \dots)$  e' possibile, utilizzando appositi operatori regolari, definire **espressioni regolari** che descrivono un linguaggio. Ad

esempio:

$$(a \mid b)c^*$$

dove 'a', 'b' e 'c' vengono intesi come i linguaggi  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  e  $\{c\}$ , '|' e' l'operazione di unione, quindi  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ . Fra le parentesi e la 'c' e' sottintesa l'operazione di congiunzione '.', ma ha prioritá l'operatore \* che ha lo stesso effetto della stella di Kleene. Quindi diventa:

$$\{a, b\} \cdot \{c\}^* = \{a, b, ac, bc, acc, bcc, \dots\}$$

Definiamo formalmente questo tipo di espressioni e i linguaggi che definiscono:

#### Definition 3.1.5: espressioni regolari

fissato un alfabeto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , definiamo le espressioni regolari su  $A$  con la seguente BNF

$$r ::= \emptyset \mid \epsilon \mid a \mid r \cdot r \mid r \mid r \mid r^*$$

#### Note:

La definizione non e' ciclica perche' le espressioni sono definite da altre espressioni piu' piccole.

#### Note:

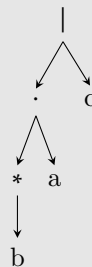
Non confondere le ER  $\emptyset$  e  $\epsilon$ : la prima identifica il linguaggio vuoto, che non accetta nessuna stringa, mentre il linguaggio associato alla seconda accetta la stringa vuota.

#### Note:

Si tenga presente che questa è una sintassi astratta ambigua, ci vorrebbero le parentesi per disambiguare, tuttavia noi assumiamo che:

- la concatenazione, disgiunzione e ripetizione associano a **sx**
- la precedenza tra gli operatori sia:  $* > \cdot > \mid$
- la concatenazione  $\cdot$  è di solito omessa

Per cui, ad esempio,  $b * a \mid c$  corrisponde all'albero sintattico:



Quindi secondo una sintassi non ambigua:  $((b)^* \cdot (a)) \mid (c)$

linguaggio denotato da una espressione regolare

### Definition 3.1.6

dato l'alfabeto  $A$ , definiamo la funzione:

$$\mathcal{L} : \text{Exp-Reg} \rightarrow \mathcal{P}(A^*)$$

Come segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\emptyset] &= \emptyset \text{ linguaggio vuoto} \\ \mathcal{L}[\epsilon] &= \{\epsilon\} \text{ linguaggio che contiene solo la stringa vuota} \\ \mathcal{L}[a] &= \{a\} \\ \mathcal{L}[r_1 \cdot r_2] &= \mathcal{L}[r_1] \cdot \mathcal{L}[r_2] \\ \mathcal{L}[r_1 | r_2] &= \mathcal{L}[r_1] \cup \mathcal{L}[r_2] \\ \mathcal{L}[r^*] &= (\mathcal{L}[r])^*\end{aligned}$$

### Note:

Si ricordi che:

$$\begin{aligned}L_1 \cdot L_2 &= \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\} \\ L_1 \cup L_2 &= \{x \mid x \in L_1 \text{ or } x \in L_2\} \\ L^\circ &= \{\epsilon\} \\ L^{n+1} &= L \cdot L^n \\ L^* &= \bigcup_{n \geq 0} L^n\end{aligned}$$

linguaggio regolare

### Definition 3.1.7: Linguaggio regolare

un linguaggio  $L \subseteq A^*$  è definito regolare sse  $\exists$  una espressione regolare  $r$  tale che:

$$L = \mathcal{L}[r]$$

### Proposition 3.1.1

ogni linguaggio finito è regolare

### Example 3.1.5

Sia  $L = \{a, bc\}$  con  $r = a \mid bc$  si ha che:

$$\mathcal{L}[a \mid bc] = \mathcal{L}[a] \cup \mathcal{L}[bc] = \{a\} \cup \mathcal{L}[b] \cdot \mathcal{L}[c] = \{a\} \cup \{b\} \cdot \{c\} = \{a, bc\} = L$$

Si osservi che esistono anche linguaggi regolari infiniti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[a^*b] &= \mathcal{L}[a^*] \cdot \mathcal{L}[b] = (\mathcal{L}[a])^* \cdot \mathcal{L}[b] \\ &= \{a\}^* \cdot \{b\} = \bigcup_{m \geq 0} \{a^m\} \cdot \{b\} \\ &= \{\epsilon, a, aa, \dots\} \cdot \{b\} = \{a^m b \mid m \geq 0\}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[a \mid a^*b] = \mathcal{L}[a] \cup \mathcal{L}[a^*b] = \{a\} \cup \{a^m b \mid m \geq 0\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(a \mid b) \cdot b^*] &= \mathcal{L}[a \mid b] \cdot \mathcal{L}[b^*] = (\mathcal{L}[a] \cup \mathcal{L}[b]) \cdot (\mathcal{L}[b])^* \\ &= \{a, b\} \cdot \{b\}^* = \{ab^m \mid m \geq 0\} \cup \{b^n \mid n \geq 1\}.\end{aligned}$$



**Example 3.1.6** (espressioni regolari)

$A = \{0, 1\}$

- $0^*10^*$   
Con  $L_2\{w \in A^* \mid A^* \mid w \text{ contiene un solo } 1\}$
- $(0 \mid 1)^*001(0 \mid 1)^*$   
Con  $L_1\{w \in A^* \mid A^* \mid w \text{ contiene un solo } 1\}$
- $1^*(011^*)^*$   
Con  $L_3 = \{w \in A^* \mid w \text{ contiene } 001 \text{ come sottostringa}\}$

**altri operatori ausiliari****Definition 3.1.8**

- Ripetizione positiva:  $r^+ = rr^*$
- Possibilità:  $r? = r \mid \epsilon$
- Elenco:  $[a_1, \dots, a_n] = a_1 \mid \dots \mid a_n$

**3.1.3 equivalenza tra espressioni regolari****Definition 3.1.9: equivalenza**

Due espressioni regolari  $r$  ed  $s$  sono **equivalenti** sse  $\mathcal{L}[r] = \mathcal{L}[s]$  (cioè demotano lo stesso linguaggio) e lo denotiamo con  $r \equiv s$

Esistono molte leggi per  $\equiv$ , alcune sono le seguenti

$$\begin{aligned}
 r|s &\simeq s|r & (1 \text{ è commutativa}) \\
 r|(s|t) &\simeq (r|s)|t & (1 \text{ è associativa}) \\
 z|z &\simeq z & (1 \text{ è idempotente}) \\
 z \cdot (s \cdot t) &\simeq (z \cdot s) \cdot t & (\cdot \text{ è associativa}) \\
 \epsilon \cdot z &\simeq z \cdot \epsilon \simeq z & (\epsilon \text{ è l'elemento neutro per } \cdot) \\
 (r^*)^* &\simeq r^* & (* \text{ è idempotente}) \\
 r(s|t) &\simeq rs|rt & (\text{distribuisce a sinistra su } \mid) \\
 (r|s)t &\simeq rt|st & (\text{distribuisce a destra su } \mid)
 \end{aligned}$$

In alcuni casi è facile dimostrare queste leggi:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[r|s] &= \mathcal{L}[r] \cup \mathcal{L}[s] = \mathcal{L}[s] \cup \mathcal{L}[r] = \mathcal{L}[s|r] \\
 \mathcal{L}[r|r] &= \mathcal{L}[r] \cup \mathcal{L}[r] = \mathcal{L}[r] \\
 \mathcal{L}[r\epsilon] &= \mathcal{L}[r] \cdot \{\epsilon\} = \mathcal{L}[r] \\
 \mathcal{L}[\emptyset^+] &= (\mathcal{L}[\emptyset]) = \emptyset^+ = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \emptyset^2 \dots = \{\epsilon\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{\epsilon\} = \mathcal{L}[\epsilon] \\
 \mathcal{L}[r\emptyset] &= \mathcal{L}[r] \cdot \mathcal{L}[\emptyset] = \mathcal{L}[r] \cdot \emptyset = \emptyset = \mathcal{L}[\emptyset]
 \end{aligned}$$

Le espressioni regolari servono per specificare il pattern di una categoria sintattica, ovvero la forma dei possibili lessemi, tuttavia occorre riconoscere se una certa sequenza in ingresso è un lessema per una certa categoria sintattica. A questo ci vengono in aiuto gli automi a stati finiti

## 3.2 Automi a stati finiti

Un **automa a stati finiti** (o DFA, deterministic finite automaton, per la versione deterministica) è un modello computazionale utilizzato per rappresentare e analizzare linguaggi regolari. È un **dispositivo astratto che processa stringhe di simboli e decide se appartengono o meno a un linguaggio**

Si può immaginare il DFA come una automa ideale dotato di una testina di lettura, una sequenza di simboli in input da leggere e un sistema di stati, del tipo

Dove inizialmente

- la testina di lettura è posizionata sul primo carattere dell'input
- e vi è un controllo sullo stato iniziale  $q_0$

E funziona ciclicamente nel modo seguente:

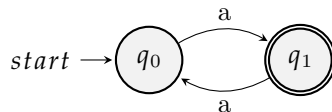
- leggi il carattere in input e in base allo stato in cui si trova decide:
  - di cambiare di stato
  - di spostare la testina sull'input successivo

FINO A CHE:

- ha finito di leggere l'input (e riconosce la stringa)
- non ha riconosciuto la stringa

### 3.2.1 diagrammi di transizione

il funzionamento di un automa finito è ben descritto dai cosiddetti **diagrammi di transizione**

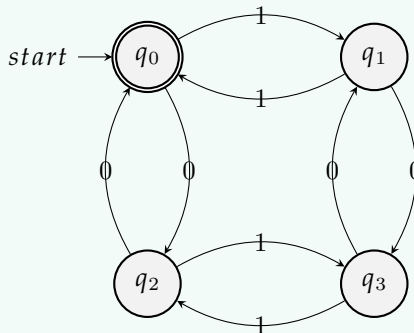


Riconoscere una stringa  $w$  significa trovare un cammino etichettato  $w$  sul grafo a partire dallo stato iniziale che finisce su uno stato finale

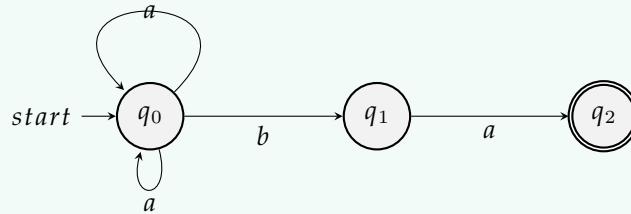
$$L = \{a^{2n+1} \mid n \geq 0\} = \{a^n \mid n \text{ è dispari}\} = \mathcal{L}[a(aa)^*]$$

#### Example 3.2.1

- Primo esempio: Sia  $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{in } w \text{ il numero di 0 e 1 è sempre pari}\}$   
Il suo automa è:



- secondo esempio  
Sia  $L = \mathcal{L}[(a|b)^*ba]$   
il suo automa è:



Si noti che  $ba \in L[M]$  (ovvero  $ba$  appartiene al linguaggio riconosciuto dall'automa  $M$ ) perché esiste un cammino da  $q_0$  a  $q_2$  etichettato  $ba$

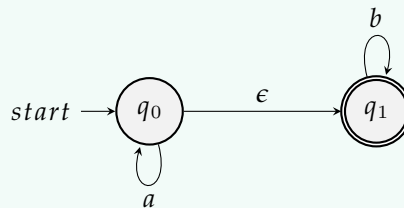
Questo linguaggio è **non deterministico**:

- $(q_0, b)$  offre 2 mosse o su  $q_0$  o su  $q_1$
- $(q_1, b)$  non offre mosse
- $(q_2, a/b)$  non offre mosse

• terzo esempio:

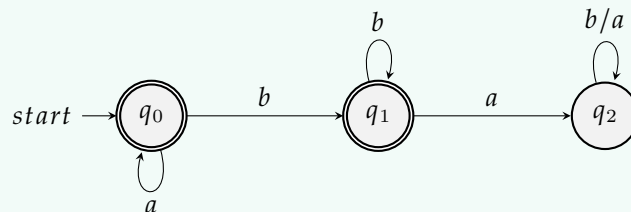
Sia  $L[M] = \mathcal{L}[a^*b^*]$

Riconosciuto dal seguente automa:



Che **nondeterministico** perché è possibile spostarsi dallo stato  $q_0$  allo stato  $q_1$  senza leggere l'input.

Se vogliamo un automa deterministico:



Dove  $q_2$  è uno stato pozzo d'errore. Inoltre da ogni stato per ognuno dei due simboli ( $a$  e  $b$ ), esce una e una sola transizione e non vi sono transizioni  $\epsilon$

### 3.2.2 Automi a stati finiti non deterministico

Adesso formalizziamo la definizione

### Definition 3.2.1: Automi a stati finiti non deterministici

Si definisce **NFA o automa a stati finiti non deterministico** una quintupla  $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  dove:

- $\Sigma$  è un alfabeto finito di simboli in input
- $Q$  è un insieme finito di stati
- $q_0 \in Q$  è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$  è l'insieme degli stati finali
- $\delta$  è la funzione di transizione con tipo

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

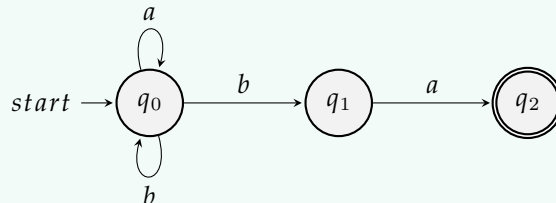
Esempietto:

#### Example 3.2.2

$$\Sigma = \{a, b\} \quad Q = \{q_0, q_1, q_2\} \quad q_0 \text{ iniziale} \quad F = \{q_2\}$$

	$a$	$b$	$\epsilon$
$\delta =$			
$q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Si può vedere la seguente tabella mutarsi in automa



### 3.2.3 Linguaggio riconosciuto/accettato

Fornisco prima, formalmente, prima alcune definizioni:

#### Definition 3.2.2: mossa

Si definisce **mossa** da uno stato  $q$  ad uno stato  $q'$  leggendo un simbolo  $\sigma$  dall'input e la si denota con  $\vdash_n$  tale derivazione (attraverso regole di inferenza logica):

$$\frac{q' \in \delta(q, \sigma)}{(q, \sigma w) \vdash_n (q', w)} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \\ w \in \Sigma^* \end{array}$$

Da cui discende la definizione di cammino

### Definition 3.2.3: cammino (chiusura riflessiva e transitiva di $\vdash_n$ )

Si definisce cammino da uno stato  $q$  ad uno stato  $q''$  tale derivazione:

$$\frac{(q, w) \vdash_n^* (q', w') \quad (q', w') \vdash_n (q'', w'')}{(q, w) \vdash_n^* (q'', w'')}$$

Inoltre si ha:

$$\overline{(q, w) \vdash_n^* (q, w)}$$

da cui discende la definizione di riconoscimento

### Definition 3.2.4: riconoscimento

Una stringa  $w$  si definisce **riconosciuta** se è vera tale proposizione:

$$w \in L[N] \iff \exists q \in F. (q_0, w) \vdash_n^* (q, \epsilon)$$

e da cui discende la definizione di linguaggio accettato

### Definition 3.2.5: linguaggio accettato

Un linguaggio  $L$  si definisce **accettato da un automa**  $N$ , indicato con  $L[N]$ , è

$$L[N] = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F. (q_0, w) \vdash_n^* (q, \epsilon)\}$$

#### Note:

due NFA  $N_1$  e  $N_2$  si dicono **equivalenti** sse accettano lo stesso linguaggio, cioè se  $L[N_1] = L[N_2]$

Gli NFA sono comodi, ovvero facili da costruire, tuttavia sono **inefficienti**, infatti accettare  $w$  significa cercare un cammino su un grafo nondeterministico, il che porta a tante potenziali strade alternative.

In alternativa si possono costruire dei DFA ovvero automi deterministici a stati finiti

### 3.2.4 Automi a stati finiti deterministici

Un DFA a differenza degli NFA ha le seguenti caratteristiche:

- $\delta(q, \sigma)$  è sempre un singoletto (solo una mossa possibile)
- non ci sono mosse  $\epsilon$

E questo implica

- una scansione completa dell'input garantita
- in un tempo  $O(|w|)$  sappiamo se  $w$  è accettata o meno
- difficile da definire

Introduciamo la definizione formalmente

### Definition 3.2.6: Automi deterministici a stati finiti

Un **automa deterministico a stati finiti** (DFA) è una quintupla  $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  dove:

- $\Sigma$  è un alfabeto finito di simboli in input
- $Q$  è un insieme finito di stati
- $q_0 \in Q$  è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$  è l'insieme degli stati finali
- $\delta$  è la funzione di transazione con tipo

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

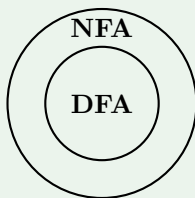
e si ha che  $(q, \sigma) = q'$

Si osservi che

#### Claim 3.2.1

Un DFA è un particolare tipo di NFA tale che:

- $\forall q \in Q. \delta(q, \epsilon) = \emptyset$   
Ovvero **non ci sono transizioni  $\epsilon$**
- $\forall \sigma \in \Sigma. \forall q \in Q. \exists q' \in Q. \delta(q, \sigma) = \{q'\}$   
Ovvero l'insieme delle mosse possibile è sempre un singoletto



Si vuole ora dimostrare che i **DFA sono tanto espressivi quanto gli NFA**, sebbene siano un loro sottoinsieme proprio

#### Proposition 3.2.1

Per ogni NFA, è possibile costruire un DFA ad esso equivalente

**Dimostrazione:** Occorre seguire contemporaneamente tutti i possibili cammini alternativi dell'NFA di modo che gli stati del DFA che andranno a costruire sono costituiti da insiemi di stati dell'NFA ☺

Per dimostrare questa cosa occorre prima introdurre diversi concetti

## $\epsilon$ -closure

### Definition 3.2.7: $\epsilon$ -closure

L' $\epsilon$ -closure di uno stato  $q \in Q$ , denotata come  $\epsilon\text{-closure}(q)$ , è definita come l'insieme degli stati  $q'$  tali che esiste un cammino da  $q$  a  $q'$  usando solo transizioni  $\epsilon$ , inclusivamente  $q$  stesso.

In simboli:

$$\epsilon\text{-closure}(q) = \{q' \in Q \mid q \xrightarrow{\epsilon^*} q'\},$$

In altre parole si può definire come il minimo insieme che rispetta le seguenti regole:

$$\frac{}{\{q\} \subseteq \epsilon\text{-closure}(q)} \quad \frac{p \in \epsilon\text{-closure}(q)}{\delta(p, \epsilon) \subseteq \epsilon\text{-closure}(q)}$$

nel caso abbiamo un insieme  $P$  di nodi allarghiamo la definizione di  $\epsilon$ -closure a quella di:

$$\epsilon\text{-closure}(P) = \bigcup_{p \in P} \epsilon\text{-closure}(p)$$

### Example 3.2.3

Considera il seguente NFA:

- Stati:  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- Transizioni:
  - $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1\}$
  - $\delta(q_1, \epsilon) = \{q_2\}$
  - $\delta(q_2, a) = \{q_2\}$

Il calcolo dell' $\epsilon$ -closure è presto fatto:

- $\epsilon\text{-closure}(q_0)$ :
  - Da  $q_0$ , puoi raggiungere  $q_1$  attraverso una transizione  $\epsilon$
  - Da  $q_1$ , puoi raggiungere  $q_2$  attraverso un'altra  $\epsilon$

Quindi:  $\epsilon\text{-closure}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

- $\epsilon\text{-closure}(q_1)$ :
  - Da  $q_1$ , puoi raggiungere  $q_2$  attraverso una transizione  $\epsilon$

Quindi:  $\epsilon\text{-closure}(q_1) = \{q_1, q_2\}$

- $\epsilon\text{-closure}(q_2)$ :
  - $q_2$  non ha transizioni  $\epsilon$  in uscita

Quindi:  $\epsilon\text{-closure}(q_2) = \{q_2\}$

Qui è presentato l'algoritmo per calcolare la  $\epsilon$ -closure:

### Claim 3.2.2

usando le  $\epsilon$ -closure. si può definire il linguaggio riconosciuto da un NFA in modo elegante. Definiamo la seguente funzione

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* Q(P)$$

per in induzione

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \epsilon\text{-closure}(q)$$

---

**Algorithm 1:**  $\epsilon$ -closure

---

**Input:** Stato  $p$   
**Output:** insieme di stati raggiungibili da  $p$  con mosse  $\epsilon$

```
1  $T \leftarrow P;$  // inizializzazione
2  $\epsilon\text{-closure}(p) = P;$  // inizializzazione
3 while  $T \neq \emptyset$  do
4   scegli un  $r \in T$  e rimuovilo da  $T$ ;
5   foreach  $s \in \delta(r, \epsilon)$  do
6     if  $s \neq \epsilon\text{-closure}(p)$  then
7       add  $s$  to  $\epsilon\text{-closure}(p)$ ;
8       add  $s$  to  $T$ ;
```

---

$$\hat{\delta}(q, xa) = \epsilon\text{-closure}(q) \text{ dove } P = \{p \in Q \mid \exists r \in \hat{\delta}(q, x) \wedge p \in (r, a)\}$$

Pertanto si può dimostrare (dimostrazione difficile) che:

$$w \in L[N] \iff \exists p \in Ft.c.p \in \hat{\delta}(q_0, w)$$

**funzione mossa****Definition 3.2.8: funzione mossa**

Si definisce la **funzione mossa** come estensione della funzione di transizione  $\delta$  di un NFA come:

$$\begin{aligned} \text{mossa} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma &\rightarrow \mathcal{P}(Q) \\ \text{mossa}(P, a) &= \bigcup_{p \in P} \delta(p, a) \end{aligned}$$

Cioè l'insieme delle mosse  $a$  da un insieme di nodi  $P$  è l'unione di tutte le mosse  $a$  di ogni nodo dell'insieme.

**funzione transizione****Definition 3.2.9: funzione transizione**

Si definisce **transizione** e la si denota con  $\Delta$  tale funzione:

$$\Delta(A, b) = \epsilon\text{-closure}(\text{mossa}(A, b))$$

Con  $A$  un insieme di stati e  $b$  una transizione

**costruzione per sottoinsiemi del DFA**

Qua di seguito l'algoritmo per la costruzione di sottoinsiemi, che serve per passare da un NFA a un DFA equivalente. Definiamo quindi il DFA equivalente:

**Definition 3.2.10: DFA equivalente**

Si definisce il DFA equivalente tale automa:

$$M_n = (\Sigma, T, \Delta, \epsilon\text{-closure}(q_0), \mathcal{F})$$

dove  $R \in \mathcal{F} \iff \exists q \in R \text{ con } q \in F$

Si può notare come l'algoritmo che definisce la funzione di transizione (vista poch'anzi) rispetta le limitazioni dei DFA: non ci sono mosse epsilon e per ogni carattere dell'alfabeto esiste una ed una sola mossa in qualunque stato



---

**Algorithm 2:** costruzionePerSottoinsiemi()

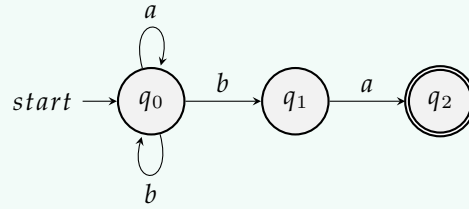
---

```
Input: NFA  $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ 
Output: DFA  $M_N = (\Sigma, T, \Delta, \epsilon\text{-closure}(q_0), \mathcal{F})$ 
1  $S \leftarrow \epsilon\text{-closure}(q_0);$  // stato iniziale del DFA
2  $T = \{S\};$  //  $T$  è il l'insieme degli stati del DFA
3 while  $c'è\ un\ P \in T\ non\ marcato\ do$ 
4   marca  $P;$ 
5   foreach  $a \in \Sigma\ do$ 
6      $R \leftarrow \epsilon\text{-closure}(mossa(P, a));$ 
7     if  $R \notin T\ then$ 
8       add  $R\ to\ T;$  //  $R$  non ha marca
9       definisci  $\Delta(P, a) = R;$ 
```

---

**Example 3.2.4**

Consideriamo l'NFA seguente (relativo all'espressione regolare  $((a|b)^*ab)$ ):



Vogliamo ora trovare un DFA equivalente ad esso, applichiamo l'algoritmo di costruzioni per sottoinsiemi:

- calcoliamo lo stato iniziale  $S = \epsilon\text{-closure}(q_0)$ , che è  $S = q_0$ .
- Creiamo  $T$  e gli inseriamo  $S$  marcandolo
- Per ogni simbolo dobbiamo calcolare  $\epsilon\text{-closure}(mossa(P, a))$ , ma visto che l'alfabeto è  $\{a, b\}$  lo facciamo 2 volte:
  - per il carattere  $a$  calcoliamo con  $P = S = \{q_0\}$ :

$$\begin{aligned} R &= \epsilon\text{-closure}(mossa(P, a)) = \epsilon\text{-closure}\left(\bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta(p, a)\right) \\ &= \epsilon\text{-closure}(\delta(q_0, a)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_0\}) = \{q_0\} \end{aligned}$$

Si definisca  $\delta(S, a) = \{q_0\}$  e visto che  $\{q_0\} \in T$  non lo andiamo a ri-aggiungere

- per il carattere  $a$  calcoliamo con  $P = S = \{q_0\}$ :

$$\begin{aligned} R &= \epsilon\text{-closure}(mossa(P, b)) = \epsilon\text{-closure}\left(\bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta(p, b)\right) \\ &= \epsilon\text{-closure}(\delta(q_0, b)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_0, q_1\}) = \{q_0, q_1\} \end{aligned}$$

visto che  $\{q_0, q_1\} \notin T$  lo andiamo ad aggiungere

- si calcoli ora con  $P = \{q_0, q_1\}$  andando a calcolare la stessa cosa:

- per  $a$  si ha:

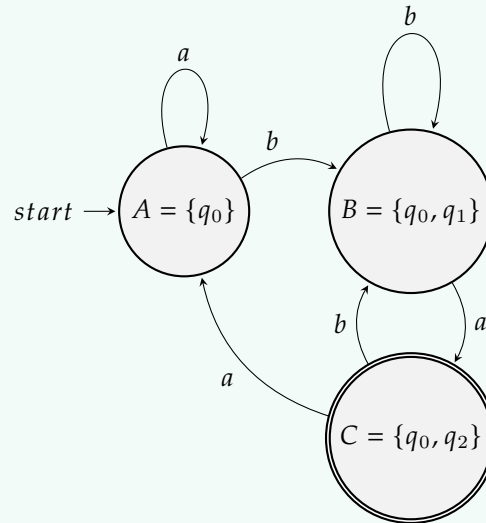
$$\begin{aligned} R &= \epsilon\text{-closure}(mossa(P, a)) = \epsilon\text{-closure}\left(\bigcup_{p \in \{q_0, q_1\}} \delta(p, a)\right) \\ &= \epsilon\text{-closure}(\{q_0\} \cup \{q_2\}) = \{q_0, q_2\} \end{aligned}$$

quindi  $\Delta(\{q_0, q_1\}, a) = \{q_0, q_2\}$ . Visto  $\{q_0, q_2\} \notin T$  lo aggiungiamo

- per  $b$  si ha  $R = \{q_0, q_1\}$ . Quindi  $\Delta(\{q_0, q_1\}, b) = \{q_0, q_1\}$  e non lo si aggiunge

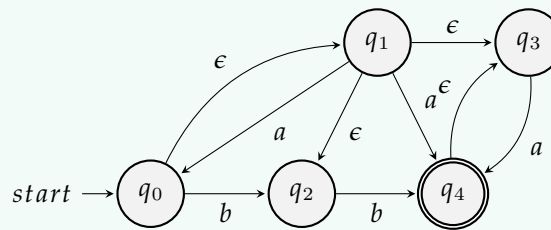
- ripetiamo per  $P = \{q_0, q_2\}$  (salto i calcoli)

alla fine di sto ambaradam si ottiene  $DFA N' = (\Sigma, \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_0, q_2\})$  che in forma di diagramma di transizione e:



esempio bello corposo:

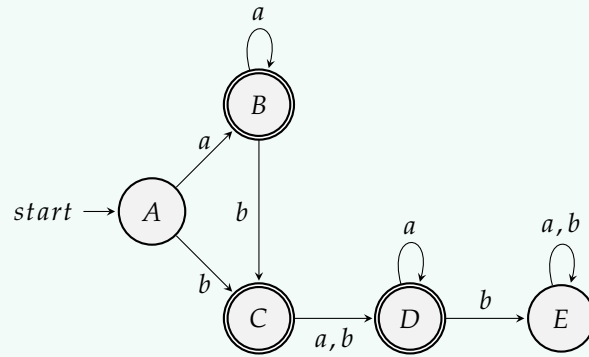
### Example 3.2.5



si noti i seguenti calcoli

$$\begin{aligned}
 A &= \epsilon\text{-closure}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
 \Delta(A, a) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(A, a)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_0, q_4\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} = B \\
 \Delta(A, b) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(A, b)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_2, q_3, q_4\}) = \{q_2, q_3, q_4\} = C \\
 \Delta(B, a) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(B, a)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_0, q_4\}) = B \\
 \Delta(B, b) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(B, b)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_2, q_4\}) = C \\
 \Delta(C, a) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(C, a)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_4\}) = \{q_3, q_4\} = D \\
 \Delta(C, b) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(C, b)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_4\}) = D \\
 \Delta(D, a) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(D, a)) = \epsilon\text{-closure}(\{q_4\}) = \emptyset = D \\
 \Delta(D, b) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(D, b)) = \epsilon\text{-closure}(\emptyset) = \emptyset = E \\
 \Delta(E, a) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(E, a)) = \epsilon\text{-closure}(\emptyset) = \emptyset = E \\
 \Delta(E, b) &= \epsilon\text{-closure}(\text{move}(E, b)) = \epsilon\text{-closure}(\emptyset) = \emptyset = E
 \end{aligned}$$

il cui DFA  $M_N$  è:

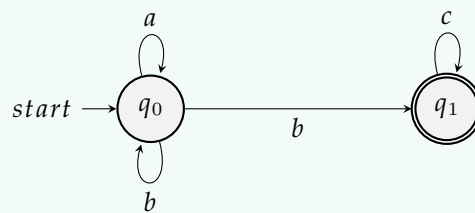


casi pessimi

Claim 3.2.3

### Example 3.2.6

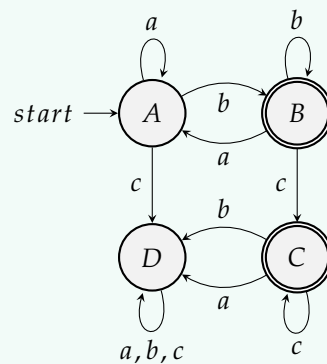
Sia  $N$  il seguente NFA con 2 stati:



per costruire il suo  $M_N$  si hanno i seguenti nodi

- $A = \{q_0\}$
- $B = \{q_0, q_1\}$
- $C = \{q_1\}$
- $D = \emptyset$

in diagramma di transazione diventa:



Adesso si può dimostrare il teorema dell'equivalenza

## teorema d'equivalenza tra NFA e DFA

### Theorem 3.2.1 Bonzo-GioLaPalma

Sia  $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  un NFA e sia  $M_n$  l'automa ottenuto con la costruzione per sottoinsiemi. allora  $M_n$  è un DFA e si ha che

$$L[N] = L[M_n]$$

In altre parole,  $N$  e  $M_n$  sono equivalenti.

**Dimostrazione:** Sia  $N = (Z, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un NFA e sia  $M_N = (\Gamma, \Sigma, \Delta, A, F')$  l'automa ottenuto con l'algoritmo.

- $M_N$  è **deterministico**: Infatti  $\Delta(A, a)$  con  $A \in T \wedge a \in \Sigma$  è definita in modo univoco
- Quindi mi riduco a dimostrare che  $L[N] = L[M_n]$ 
  - si osservi che per un DFA,  $\epsilon\text{-closure}(R) = R$
  - chiamiamo  $i_m = \epsilon\text{-closure}(q_0)$  lo stato iniziale di  $M_n$

Vogliamo dimostrare che  $\forall w \in \Sigma^*$

$$\delta(q_0, w) = \Delta(A, w)$$

per induzione sulla lunghezza di  $w$

- **Caso base:**  $|w| = 0$  cioè  $w = \epsilon$ :

$$\hat{\delta}(A, \epsilon) = \epsilon\text{-closure}(q_0)$$

$$\hat{\Delta}(i_m, \epsilon) = \epsilon\text{-closure}(i_m) = i_M = \epsilon\text{-closure}(q_0)$$

- **Caso induttivo:**  $w = xa$  con  $x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$  Per ipotesi induttiva, sappiamo che:

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \Delta(\{q_0\}, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$$

Per definizione di  $\hat{\delta}$ :

$$\hat{\delta}(q_0, xa) = \Delta(\epsilon\text{-closure}(\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)))$$

Similmente:

$$\Delta(\{q_0\}, xa) = \Delta(\{p_1, \dots, p_k\}, a)$$

In base all'algoritmo, la definizione di  $\Delta$  ci dice che:

$$\Delta(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \epsilon\text{-closure}(\text{mossa}(\{p_1, \dots, p_k\}, a)) = \epsilon\text{-closure}(\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)) = \hat{\delta}(q_0, xa)$$

OK.

—

Infine, abbiamo che:

$$w \in L[N] \iff \exists p \in \hat{\delta}(q_0, w) \text{ con } p \in F$$

$$\iff \exists p \in \Delta(i_H, w) \text{ con } p \in F$$

$$\iff w \in L[M_N] \quad \forall w \in \Sigma^*$$

Quindi:

$$L[N] = L[M_N] \quad \text{c.v.d.}$$



## 3.2.5 Da espressioni regolari a NFA equivalenti

### Theorem 3.2.2 Basta - Dario è svenuto

Data un'espressione regolare  $S$ , possiamo costruire un NFA  $N[s]$  tale che:

$$\mathcal{L}[s] = L[N[s]]$$

ovvero un linguaggio individuato da un linguaggio regolare è equivalente ad un linguaggio riconosciuto da un automa non deterministico a stati finiti costruito a partire da  $S$ , questo significa che **gli NFA riconoscono TUTTI i linguaggi regolari**, vedremo poi che riconoscono solo i linguaggi regolari

**Dimostrazione:** Dimostreremo il teorema per induzione sulla sintassi astratta della espressione regolare  $S$ . Si costruisca un possibile NFA associato all'espressione regolare  $S$ , in modo da mantenere i seguente due invarianti:

- lo stato iniziale non ha archi entranti
- $N[s]$  ha un solo stato finale senza archi uscenti

Procedo ad esaminare i vari casi

- Sia  $s = \emptyset$

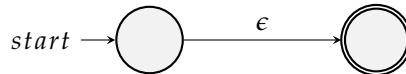
In questo caso sarà possibile costruire un NFA con due stati (iniziale e finale) non connessi, quindi  $N[s]$ :



Si osservi che  $\mathcal{L}[\emptyset] = \emptyset = L[N[s]]$

- Sia  $s = \epsilon$

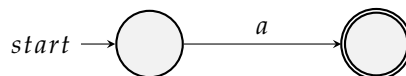
In questo caso sarà possibile costruire un NFA con due stati (iniziale e finale) connessi da un  $\epsilon$ , quindi  $N[s]$ :



Si osservi che, in questo caso,  $\mathcal{L}[\epsilon] = \{\epsilon\} = L[N[s]]$

- Sia  $S = a$

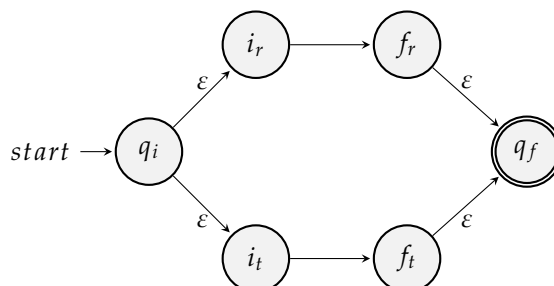
In questo caso sarà possibile costruire un NFA con due stati (iniziale e finale) connessi da una transizione  $a$ , quindi  $N[s]$ :



Si osservi che, in questo caso,  $\mathcal{L}[a] = \{a\} = L[N[s]]$

- caso  $s = r|t$

Ipotizziamo di avere già costruito gli automi  $N[t]$  ed  $N[r]$ , per costruire "l'or" è possibile partire da uno stato iniziale  $i$  e collegarlo con transizioni  $\epsilon$  ai due automi, da entrambi si confluisce in uno stato finale  $f$  con transazioni  $\epsilon$



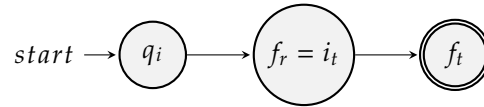
Algebricamente si può dimostrare che  $\mathcal{L}[r|t] = \mathcal{L}[t] \cup \mathcal{L}[r]$

e per ipotesi induttiva si ha:

$$\mathcal{L}[t] \cup \mathcal{L}[r] = L[N[r]] \cup L[N[t]] = L[N[r|t]]$$

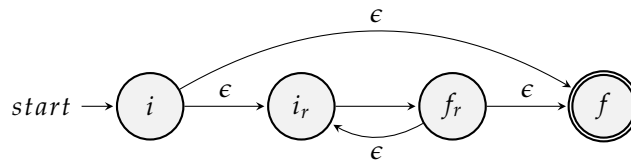
- Sia  $s = r \cdot t$

Ipotizziamo di avere già costruito gli automi  $N[t]$  ed  $N[r]$ , per costruire la concatenazione è possibile fondere lo stato finale del primo automa con quello del secondo automa, si ha, quindi, che  $N[s]$ :



- Sia  $s = r^*$

Ipotizzando di aver già costruito  $N[r]$  è possibile costruire l'automa creando un ciclo  $\epsilon$  dalla fine di  $N[r]$  al suo inizio



Si osservi che:

$$\mathcal{L}[r^*] = (\mathcal{L}[r])^*$$

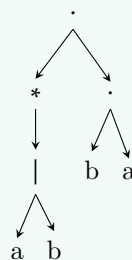
per ipotesi induttiva

$$(\mathcal{L}[r])^* = (L[N[r]])^* = L[N[r^*]]$$

☺

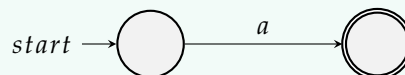
### Example 3.2.7

Sia  $S = (a|b^*)ba$  un'espressione regoale e costruiamone l'albero sintattico

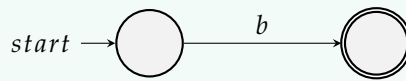


Partiamo dalle foglie e risaliamo alla radice (bottom-up) Si ha:

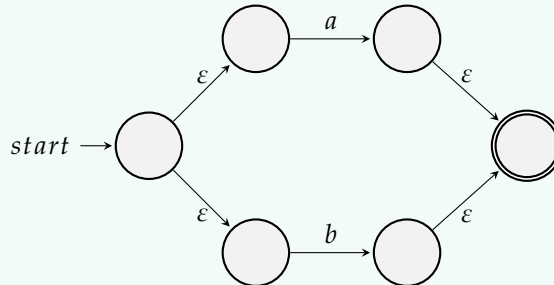
- $N[a]$ :



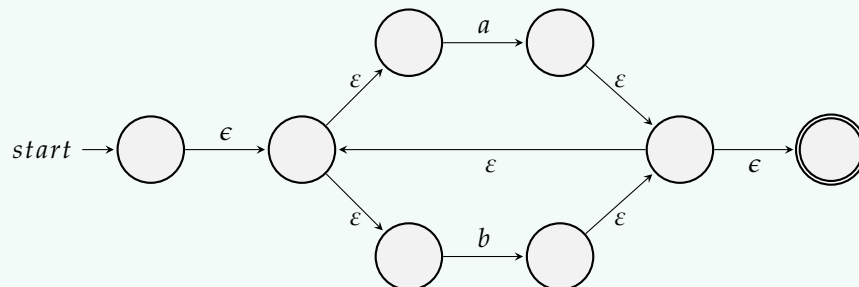
- $N[b]$ :



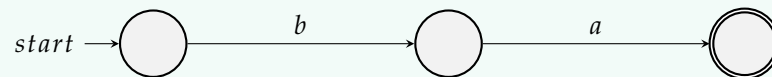
- $N[a|b]$ :



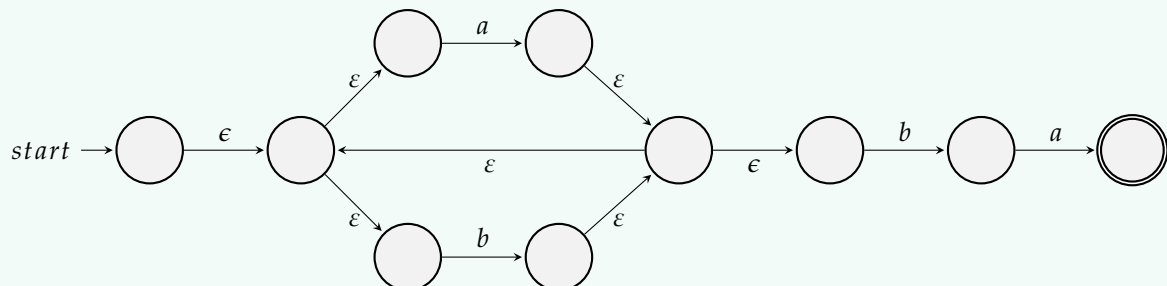
- $N[(a|b)^*]$ :



- $N[ba]$ :



- $N[s]$ :



Altro esempietto:

### Example 3.2.8

TODO da fare l'automa diretto qui

Costruiamo il DFA associato a  $N[s]$  :

$$A = \varepsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{0\}$$

$$\Delta(A, a) = \varepsilon\text{-closure}(\{1\}) = \{1, 2, 3\} = B$$

$$\Delta(A, b) = \varepsilon\text{-closure}(\emptyset) = \emptyset = C$$

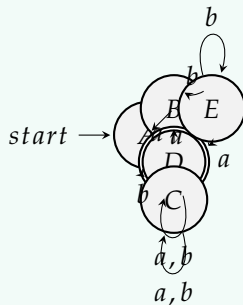
$$\Delta(B, a) = \varepsilon\text{-closure}(\{5\}) = \{5\} = D$$

$$\Delta(B, b) = \varepsilon\text{-closure}(\{3\}) = \{3, 4, 2\} = E$$

$$\Delta(D, a) = \emptyset = C, \quad \Delta(D, b) = \emptyset = C$$

$$\Delta(E, a) = \varepsilon\text{-closure}(\{5\}) = D, \quad \Delta(E, b) = \varepsilon\text{-closure}(\{3\}) = E$$

$$\Delta(C, a) = \emptyset = C, \quad \Delta(C, b) = \emptyset = C$$



DFA associato a  $N[a b^* a]$

### 3.2.6 Da NFA a espressione regolare

Aggiungo una dimostrazione presa dal libro di Michael Sipser, "Introduction to the Theory of Computation", che descrive come creare un'espressione regolare partendo direttamente da un NFA. Nella sezione successiva introdurremo le grammatiche regolari con le quali e' possibile dimostrare lo stesso teorema, quindi questa parte non e' necessaria ma solo un'idea interessante e piu' diretta.

Come anticipato precedentemente, e' possibile anche dimostrare la direzione inversa del teorema, ovvero che dato un NFA che riconosce un linguaggio  $L[N]$ , e' sempre possibile generare un'espressione regolare che riconosca lo stesso linguaggio. Quindi vale il teorema generale:

#### Theorem 3.2.3 Teorema Piccolomini

Un linguaggio regolare esiste se e solo se esiste un automa a stati finiti che lo riconosce.

Sopra abbiamo già dimostrato che preso un linguaggio regolare (ovvero descritto da un'espressione regolare) possiamo sempre costruire un NFA equivalente. Ci tocca dimostrare la direzione inversa, ovvero che preso un qualsiasi NFA, il linguaggio che riconosce e' regolare e quindi esiste un'espressione regolare che lo descrive.

Dato che abbiamo dimostrato col teorema di Bonzo-GiolaPalma che un NFA e' sempre convertibile a un DFA, possiamo partire proprio da un DFA e definire un procedimento per ottenere un'espressione regolare equivalente. Dividiamo in due parti questo processo: prima convertiamo il DFA in un GNFA (General Nondeterministic Finite Automata), che ora definiremo, poi convertiamo il GNFA in un'ER.

#### Automi finiti nondeterministici generali

I GNFA sono praticamente dei NFA con funzione di transizione che funziona utilizzando le ER. Possono leggere blocchi alla volta dall'input, non solo caratteri, e se tale blocco soddisfa l' ER di una transizione che parte dallo stato corrente, allora si puo' seguire l'arco e cambiare stato. Ovviamente e' fortemente nondeterministico e possono esserci molti modi per elaborare la stessa sequenza di caratteri.

TODO: esempio di GNFA

Formalmente:



### Definition 3.2.11: GNFA

Un **automa finito nondeterministico generale** e' una quintupla  $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$  tale che:

- $Q$  e' un insieme finito di stati
- $\Sigma$  e' l'alfabeto dell'input
- $\delta : (Q - q_{\text{accept}}) \times (Q - q_{\text{start}}) \rightarrow \mathcal{R}_{\Sigma}$  e' la funzione di transizione

Dove  $\mathcal{R}_{\Sigma}$  e' l'insieme di tutte le ER sull'alfabeto  $\Sigma$ .

Un GNFA riconosce una stringa  $w \in \Sigma^*$  se esistono una suddivisione  $w = w_1 w_2 \dots w_k$  con  $w_i \in \Sigma^*$  e una serie di stati  $q_0, q_1, \dots, q_k$  tali che:

1.  $q_0 = q_{\text{start}}$
2.  $q_k = q_{\text{accept}}$
3.  $\forall i > 0. w_i \in [R_i]$ , dove  $R_i = \delta(q_{i-1}, q_i)$

Per i fini della dimostrazione, ci interessiamo solo di GNFA specifici che rispettano le seguenti condizioni:

- Lo stato iniziale ha archi che vanno verso tutti gli altri stati, ma nessuno entrante.
- Lo stato finale e' unico e ha archi entranti da tutti gli altri stati, ma nessuno uscente. Inoltre e' distinto dallo stato iniziale.
- Senza contare lo stato iniziale e lo stato finale, gli stati hanno archi che vanno verso tutti gli altri stati e anche verso loro stessi.

### Da DFA a GNFA

Convertire un DFA in un GNFA in forma speciale e' semplice: basta aggiungere uno stato iniziale con arco  $\epsilon$  verso lo stato iniziale vecchio, aggiungere uno stato finale con archi  $\epsilon$  entranti da tutti i vecchi stati finali e se ce piu' di un arco nella stessa direzione fra due nodi, fonderli insieme creando un unico arco la cui ER corrispondente e' l'unione delle ER dei vecchi archi. Infine, se mancano degli archi, aggiungere transizioni segnati dall'ER  $\emptyset$ , che non puo' essere mai usata.

### Da GNFA a ER

Per ottenere l'ER a partire dal GNFA, l'idea principale e' la seguente:

Diciamo che il GNFA ha  $k$  stati. Sappiamo che  $k \geq 2$  perche ci devono essere uno stato finale e uno iniziale distinti. Se riusciamo a rimuovere uno stato alla volta, che non sia finale o iniziale, mantenendo il nuovo GNFA appena ottenuto equivalente a quello prima, arriviamo ad un punto dove  $k = 2$  e l'automa e' costituito semplicemente da un arco che applica l'ER che ci porta dallo stato iniziale direttamente a quello finale, e che descrive quindi il linguaggio riconosciuto dal DFA iniziale.

Dobbiamo fare in modo che quando uno stato  $q_{\text{rip}}$  viene rimosso, le ER sugli archi vengano modificate in modo da simulare tutti i percorsi che sono stati rimossi. Quindi le nuove ER devono considerare sia le stringhe che portano direttamente dallo stato  $q_i$  allo stato  $q_j$ , che le stringhe che portavano da  $q_i$  a  $q_j$  passando da  $q_{\text{rip}}$ .

TODO: copia figure 1.63 del libro

Quindi, se nel vecchio GNFA:

1.  $q_i$  va da  $q_{\text{rip}}$  per l'ER  $R_1$
2.  $q_{\text{rip}}$  va a se stesso per  $R_2$
3.  $q_{\text{rip}}$  va a  $q_j$  per  $R_3$
4.  $q_i$  va a  $q_j$  per  $R_4$

allora nel nuovo GNFA dobbiamo etichettare l'arco da  $q_i$  a  $q_j$  con l'ER:

$$(R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4)$$

Ad ogni iterazione applichiamo questa trasformazione per ogni arco fra una coppia  $q_i q_j$  (anche quando  $i = j$ ). Formalizziamo tutto cio' (zio perone):

**Dimostrazione formale:** Sia  $M$  il DFA equivalente all'NFA del teorema. Usando la procedura descritta sopra trasformiamo  $M$  in un GNFA  $G$ . Usiamo la procedura ricorsiva  $\text{CONVERT}(G)$  per ottenere l'ER equivalente:

1. Sia  $k$  il numero di stati di  $G$
2. Se  $k = 2$ , ritorna l'espressione regolare associata ai due nodi
3. Se  $k > 2$ , seleziona uno stato  $q_{\text{rip}} \in Q$  che sia diverso dallo stato iniziale e finale e sia  $G' = (Q', \Sigma, \delta', q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$  tale che:
  - $Q' = Q \setminus \{q_{\text{rip}}\}$
  - $\forall q_i \in Q' \setminus \{q_{\text{start}}\}, \forall q_j \in Q' \setminus \{q_{\text{accept}}\} :$

$$\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4)$$

$$\text{con } R_1 = \delta(q_i, q_{\text{rip}}), R_2 = \delta(q_{\text{rip}}, q_{\text{rip}}), R_3 = \delta(q_{\text{rip}}, q_j), R_4 = \delta(q_i, q_j)$$

Ora dimostriamo che  $\text{CONVERT}(G)$  ritorni il valore corretto.

Dimostriamo per induzione su  $k$ , il numero di stati del GNFA  $G$ :

• **Caso base:**

Se  $k = 2$ , per la definizione di GNFA specifico abbiamo uno stato iniziale e un arco che lo collega allo stato finale. L'ER dell'arco descrive tutte le stringhe che portano  $G$  allo stato finale, quindi e' equivalente a  $G$ .

• **Caso induttivo su  $k$ :**

Assumiamo che  $\text{CONVERT}(G')$  equivale a  $G'$ , dove  $G'$  e' il caso con  $k - 1$  stati. Dimostriamo che  $G'$  e  $G$  sono equivalenti. Prendiamo una parola  $w \in \Sigma^*$  accettata da  $G$ . Quindi siano

$$q_{\text{start}}, q_1, q_2, q_3, \dots, q_{\text{accept}}$$

la sequenza di stati di  $G$  di un percorso che accetta  $w$ . Se  $q_{\text{rip}}$  (lo stato rimosso da  $G$  per creare  $G'$ ) non appartiene a questa sequenza, allora chiaramente  $w$  e' riconosciuto anche da  $G'$ . Questo e' perche' i nuovi archi fra tutti gli stati mantengono l'ER originale tramite un'unione. Altrimenti, se  $q_{\text{rip}}$  fa parte del percorso, basta rimuovere tutte le evenienze dalla sequenza per trovare un percorso per cui  $G'$  accetta  $w$ . Questo e' perche' nella definizione di  $\text{CONVERT}$ , facciamo in modo che le nuove ER fra due nodi considerino descrivino anche tutte le stringhe che portavano fra i due stati passando da  $q_{\text{rip}}$ .

Al contrario, se  $G'$  riconosce  $w$ , ad ogni arco e' associata un'ER che riconosce stringhe che in  $G$  fanno passare da  $q_i$  a  $q_j$  sia direttamente che tramite  $q_{\text{rip}}$ . Quindi ovviamente anche  $G$  riconosce  $w$ . Avendo dimostrato che  $G$  e  $G'$  sono equivalenti, possiamo usare l'ipotesi induttiva per dire che  $\text{CONVERT}(G)$  equivale a  $G$ .

☺

### 3.2.7 Chiusura dei linguaggi regolari rispetto alle operazioni regolari

Per aiutarci ad architettare automi finiti o per distinguere linguaggi regolari da altri tipi di linguaggi che vedremo piu' avanti, puo' tornare utile sapere se sono chiusi rispetto alle operazioni regolari (concatenazione, unione, stella di Kleene). Generalmente, diciamo che un'insieme di oggetti e' chiusa rispetto a un'operazione se applicando quest'ultima a qualunque elemento dell'insieme, il risultato appartiene sempre allo stesso insieme. Quindi se consideriamo come macro-insieme l'insieme di tutti i linguaggi regolari e dimostriamo la chiusura rispetto a una certa operazione, allora siamo sicuri che il risultato di questa operazione applicata a linguaggi regolari sara' sempre un linguaggio regolare. Partiamo con l'operazione di unione:

### Theorem 3.2.4 Chiusura di linguaggi regolari rispetto all'unione

La classe dei linguaggi regolari e' chiusa sotto l'unione.

In altre parole, se  $A_1$  e  $A_2$  sono linguaggi regolari, lo e' anche  $A_1 \cup A_2$ .

Dato che abbiamo gia' dimostrato l'equivalenza fra DFA e NFA, possiamo usare il nondeterminismo per dimostrare il teorema sopra (e' possibile anche usare solo DFA, ma e' piu' lunga). L'idea della dimostrazione e' quella di creare due NFA,  $N_1, N_2$  che riconoscono rispettivamente i linguaggi  $A_1, A_2$ , e poi di unirli per creare un nuovo NFA  $N$  che riconosca  $A_1 \cup A_2$ . Quindi,  $N$  deve riconoscere sia le stringhe di  $A_1$  che di  $A_2$ . Creando un nuovo stato iniziale e collegandolo ai due stati iniziali di  $N_1$  e  $N_2$  con mosse  $\epsilon$ , quindi usando il nondeterminismo per accettare sia i casi in cui l'input appartiene ad  $A_1$ , sia quando appartiene ad  $A_2$ .

**Dimostrazione formale:** Siano  $N_1 = \{Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1\}$  e  $N_2 = \{Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2\}$  NFA che riconoscono rispettivamente  $A_1$  e  $A_2$ .

Costruisco un nuovo NFA  $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$  per riconoscere  $A_1 \cup A_2$  in tale modo:

$$1. Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$$

$$2. F = F_1 \cup F_2$$

$$3. \forall q \in Q. \forall a \in \Sigma. \delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \wedge a = \epsilon \\ \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \epsilon \end{cases}$$

Quindi per il teorema Basta-Dario e' svenuto,  $A_1 \cup A_2$  e' un linguaggio regolare. ☺

Ora passiamo alla concatenazione:

### Theorem 3.2.5 Chiusura dei linguaggi regolari rispetto alla concatenazione

I linguaggi regolari sono chiusi sotto la concatenazione.

In altre parole, se  $A_1$  e  $A_2$  sono linguaggi regolari, anche  $A_1 \cdot A_2$  e' regolare.

Il punto chiave di questa dimostrazione e' come sapere quando finisce la parola di  $A_1$  e inizia una stringa di  $A_2$ . Infatti, con i DFA risulta molto piu' complicato, ma dato che possiamo usare i NFA risulta abbastanza banale. Come prima, vogliamo costruire un NFA  $N$  utilizzando altri due NFA  $N_1$  e  $N_2$  che riconoscono  $A_1$  e  $A_2$ . Possiamo fare cio' collegando tutti gli stati finali di  $N_1$  allo stato iniziale di  $N_2$ , usando transizioni  $\epsilon$  per accettare tutti i possibili casi. E' possibile, infatti, che una sotto-stringa di una parola in  $A_1$  appartenga anch'essa ad  $A_1$ , quindi senza il nondeterminismo sarebbe impossibile sapere quando passare a  $N_2$ . Se alla fine dell'input  $N_2$  e' su uno stato finale, allora la parola appartiene a  $A_1 \cdot A_2$ .

**Dimostrazione formale:** Siano  $N_1 = \{Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1\}$ ,  $N_2 = \{Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2\}$  NFA che riconoscono rispettivamente  $A_1, A_2$ .

Costruisco il NFA  $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2\}$  che riconosce  $A_1 \cdot A_2$  in tale modo:

$$1. Q = Q_1 \cup Q_2$$

$$2. \forall q \in Q. \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \wedge a = \epsilon \\ \delta_1(q, a) & q \in F_1 \wedge a \neq \epsilon \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

Sempre per il teorema Basta-Dario e' svenuto,  $A_1 \cdot A_2$  e' regolare. ☺

Finiamo con la stella di Kleene:

### Theorem 3.2.6 Chiusura dei linguaggi regolari rispetto alla stella di Kleene

I linguaggi regolari sono chiusi rispetto alla stella di Kleene.

In altre parole, se  $A_1$  e' un linguaggio regolare, allora lo e' anche  $A_1^*$ .

Come nei primi due casi, vogliamo dimostrare per costruzione che esiste un NFA  $N$  che riconosce  $A_1^*$ . Considero l' automa  $N_1$  che riconosce  $A_1$ . Noi vogliamo che  $N$  riconosca una concatenazione di qualunque lunghezza di parole in  $A_1$ , quindi possiamo usare l'idea della dimostrazione precedente e collegare tutti gli stati finali di  $N_1$  questa volta al proprio stato iniziale, sempre con transizioni  $\epsilon$ . Non possiamo dimenticarci pero' che anche  $\epsilon \in A_1^*$ , quindi basta aggiungere un nuovo stato iniziale che sia pure finale e collegarlo al vecchio stato iniziale con un'altra transizione  $\epsilon$ .

**Dimostrazione formale:** Sia  $N_1 = \{Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1\}$  un NFA che riconosce il linguaggio regolare  $A_1$ . Costruisco  $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$  che riconosce  $A_1^*$  nel seguente modo:

$$1. Q = \{q_0\} \cup Q_1$$

$$2. F = \{q_0\} \cup F_1$$

$$3. \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta(q, a) & q \in F_1 \wedge a \neq \epsilon \\ \delta(q, a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \wedge a = \epsilon \\ \{q_1\} & q = q_0 \wedge a = \epsilon \\ \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \epsilon \end{cases}$$

Gia lo sapete cosa ci dicono il Basta e il Darione,  $A_1^*$  e' regolare. ☺

TODO: intersezione

### 3.3 Grammatiche regolari

#### Definition 3.3.1: grammatiche regoalre

Una grammatica libero si definisce **regoalre** sse ogni produzione e' della forma  $V \rightarrow aW$  oppure  $V \rightarrow a$  dove  $V, W \in NT \wedge a \in T$ . Per il simbolo iniziale  $S$  e' ammessa anche la produzione  $S \rightarrow \epsilon$

#### Note:

A volte si usera' la definizione piu' lasca che permette produzione  $V \rightarrow \epsilon$  anche per nonterminali diversi da  $S$

Di seguito riportati degli esempi

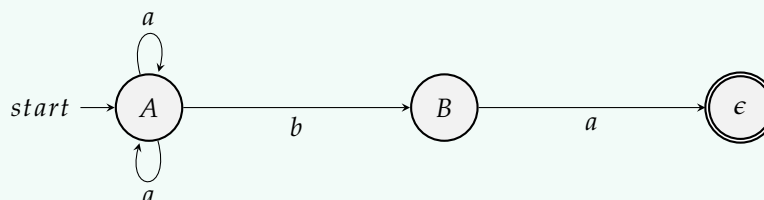
#### Example 3.3.1

Sia  $G$  la seguente grammatica regolare:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aA \mid bB \mid bA \\ B &\rightarrow a \end{aligned}$$

Si ha che  $L(G) = (A|b)^*ba!!$

Adesso si costruisca un NFA a  $G$ :



si ha che:

- abbiamo associato a ogni nonterminale uno stato dell'NFA

- abbiamo aggiunto stato finale  $\epsilon$

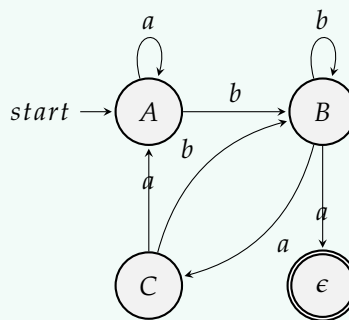
Esempio 2:

### Example 3.3.2

Sia  $G$  la seguente grammatica regolare:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aA \mid bB \\ B &\rightarrow bB \mid aC \mid a \\ C &\rightarrow aA \mid bB \end{aligned}$$

l'NFA è:



### 3.3.1 da grammatiche regolari a NFA equivalenti

#### Theorem 3.3.1

Data una grammatica regolare  $G$  si può costruire un NFA  $N_G$  equivalente

**Dimostrazione:** Sia  $G = (NT, T, R, S)$ , definiamo inoltre  $N_G = (T, Q, \delta, S, \{\epsilon\})$  come segue:

- $Q = NT \cup \{\epsilon\}$
- $\delta$  definita come segue:
  - $(V \rightarrow aZ \in R) \implies (Z \in \delta(V, a))$
  - $(V \rightarrow a \in R) \implies (\epsilon \in \delta(V, a))$
  - $(V \rightarrow \epsilon \in R) \implies (\epsilon \in \delta(V, \epsilon))$

Si può dimostrare che

$$S \implies_G^* w \text{ con la grammatica } G \iff (S, w) \vdash_{N_G}^* \text{ con l'automa } N_G$$

non verrà dimostrata quest'ultima parte cazzo



### 3.3.2 Da DFA a grammatiche regolari

#### Theorem 3.3.2

Da un DFA  $M$  possiamo definire una grammatica regolare  $G_M$  tale che:

$$L[M] = L(G_M)$$

**Dimostrazione:** Sia  $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  il DFA. La grammatica  $G_{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, R, q_0)$  ha:

- **Per non terminali:** gli stati di  $\mathcal{M}$ .

- **Per terminali:** l'alfabeto di  $\mathcal{M}$ .
- **Per simbolo iniziale:** lo stato iniziale di  $\mathcal{M}$ .
- **Per produzioni  $R$ :**
  - Per ogni  $\delta(q_i, a) = q_j$ , la produzione  $q_i \rightarrow a q_j \in R$ .
  - Inoltre, se  $q_j \in F$ , anche  $q_i \rightarrow a \in R$ .
  - Se  $q_0 \in F$ , allora  $q_0 \rightarrow \varepsilon \in R$ .

Versione alternativa che usa la definizione di grammatica regolare più lasca:

- Per ogni  $\delta(q_i, a) = q_j$ , la produzione  $q_i \rightarrow a q_j \in R$ .
- Se  $q \in F$ , allora  $q \rightarrow \varepsilon \in R$ .

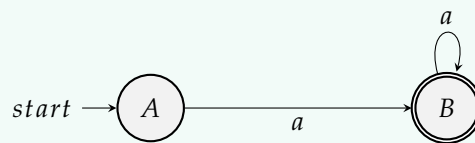
Si può dimostrare che:

$$w \in L[\mathcal{M}] \iff w \in L(G_{\mathcal{M}})$$

☺

### Example 3.3.3

Sia  $M$ :



Si ha che  $aa^*$  è l'espressione regolare che descrive  $L[M]$

Secondo la costruzione appena descritta  $G_M$  è:

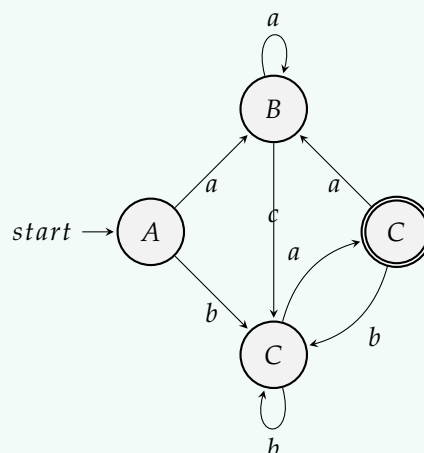
$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \mid a \\ B &\rightarrow aB \mid a \end{aligned}$$

secondo la variante, invece:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \\ B &\rightarrow aB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

### Example 3.3.4

sia il seguente automa  $M$ :



secondo il metodo descritto si ha che  $G_M$  è:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \mid bC \\ B &\rightarrow aB \mid bC \\ C &\rightarrow bC \mid aD \mid a \\ D &\rightarrow aB \mid bC \end{aligned}$$

alternativamente:

$$A \rightarrow aB \mid bCB \rightarrow aBmidbCC \rightarrow bC \mid aDD \rightarrow aB \mid bC \mid \epsilon$$

### 3.3.3 Grammatiche regolari ed espressioni regolari

#### Theorem 3.3.3

Il linguaggio definito da una grammatica regolare  $G$  è un linguaggio regolare, cioè è possibile costruire una espressione regolare  $S_G$  tale che:

$$L(G) = \mathcal{L}[S_G]$$

*sketch della dimostrazione:* idea della prova:

- **caso semplice:** un solo non terminale:

$$A \rightarrow aA \mid b \mid \epsilon$$

è intuitivo vedere che  $a^*(b|\epsilon)$  è la espressione regolare associata

- **caso medio:** due non terminali

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aA \mid bB \mid c \\ B &\rightarrow cA \mid aB \mid d \end{aligned}$$

ricaviamo  $B$  dalla seconda equazione

$$B \approx a^*(cA|d) \text{ dove } A \text{ compare nella espressione regolare}$$

ora sostituiamo  $B$  nella prima "equazione"

$$A \approx aA \mid ba^*(cA \mid d) \mid c$$

con opportune manipolazioni su espressioni regolari, usando leggi che abbiamo visto, possiamo scrivere

$$A \approx aA \mid ba^*cA \mid ba^*d \mid c$$

e quindi

$$a \approx (a \mid ba^*c)A \mid ba^*d \mid c$$

ora siamo nella forma "semplice" -

$A$  ha associata la espressione regolare

$$(a \mid ba^*c)^*(ba^*d \mid c)$$

- **in generale**

$$A_1 \simeq a_{11}A_1 \mid \dots \mid a_{1m}A_m \mid b_1 \mid \dots \mid b_{1p_1}$$

$$A_2 \simeq a_{21}A_1 \mid \dots \mid a_{2n}A_n \mid b_{21} \mid \dots \mid b_{2p_2}$$

$$\vdots$$

$$A_m \simeq a_{m1}A_1 \mid \dots \mid a_{mn}A_n \mid b_{n1} \mid \dots \mid b_{np_n}$$

Si parte con:

$$A_m \simeq S_m[A_1, \dots, A_{n-1}]$$

cioè si costruisce una espressione regolare per  $A_m$  che usa  $A_1, \dots, A_{n-1}$ .

Poi si procede sostituendo  $A_n$  (o meglio  $S_n[A_1, \dots, A_{n-1}]$ ) al posto di  $A_n$  nell'equazione per  $A_{n-1}$ , cioè:

$$A_{n-1} \simeq S_{n-1}[A_1, \dots, A_{n-2}]$$

e così via fino ad arrivare ad  $A_1$  (che è il simbolo iniziale).

### Example 3.3.5

Sia  $G$  la seguente grammatica

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \mid \epsilon \\ B &\rightarrow bA \mid \epsilon \end{aligned}$$

PER  $B$  la espressione regoalre associata è  $(bA \mid \epsilon)$ , sostituisco questa al posto di  $B$  nella prima equazione

$$A \approx a(bA \mid \epsilon) \mid \epsilon$$

manipolo la espressione regoalre

$$A \approx abA \mid a \mid \epsilon$$

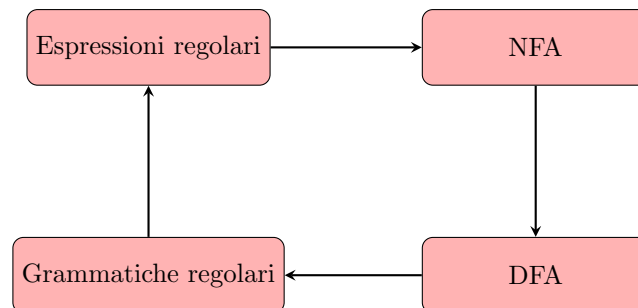
siamo ora nel caso semplice

$$A \approx (ab)^*(a \mid \epsilon)_{S_G}$$

#### Note:

la grammatica regolare  $G$  con unica prodizione  $A \rightarrow aA$  definisce il linguaggio vuoto, non  $a^*$  quindi  $S_G = \emptyset$

### 3.3.4 Per riassumere le relazione tra espressioni regolari, linguaggi regolari e automi NFA e DFA



#### Claim 3.3.1

Si osservi che tutti questi formalismi sono equivalenti

**Tutti generano/riconoscono/descrivono la stessa classe di linguaggi, ovvero i linguaggi regolari**

Tuttavia vi è un serio problema, infatti, per costruire uno scanner si parte dalla specifica dei pattern associati alle categorie sintattiche del linguaggio, mediante espressioni regolari. Per poi

$$\text{regexp} \rightarrow \text{NFA} \rightarrow \text{DFA}$$

ma se l'NFA ha  $n$  stati il DFA potrebbe averne al più  $2^n$ , pertanto serve trovare un DFA equivalente più piccolo possibile

$$\text{min(DFA) minimizzato}$$

### 3.3.5 minimizzazione

Alle volte per minimizzare degli automi occorre individuare stati equivalenti nello stesso automa, eliminarli e fonderli insieme costruendo, così, l'automa minimo. Prima della definizione formale occorre definire la seguente notazione:



**Definition 3.3.2: notazione  $\hat{\delta}$** 

Per un DFA  $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  si ha che

$$\begin{aligned}\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* &\rightarrow Q \text{ è definita come} \\ \hat{\delta}(q, \epsilon) &= q \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x)a)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$w \in L[N] \iff \hat{\delta}(q_0, w) \in F$$

**equivalenza/indistinguibilità****Definition 3.3.3: stati equivalenti/indistinguibili**

due stati si dicono  $q_1$  e  $q_2$  di un DFA  $N$  si definiscono **equivalenti (o indistinguibili)** se

$$\forall x \in \Sigma^* (\hat{\delta}(q_1, x) \in F \iff \hat{\delta}(q_2, x) \in F)$$

Simmetricamente si può definire la non equivalenza

**Definition 3.3.4: non equivalenza/indistinguibilità**

due stati  $q_1$  e  $q_2$  **non sono equivalenti (o indistinguibili)** se

$$\exists x \in \Sigma^* ((\hat{\delta}(q_1, x) \in F \wedge \hat{\delta}(q_2, x) \notin F) \vee (\hat{\delta}(q_1, x) \notin F \wedge \hat{\delta}(q_2, x) \in F))$$

$q_1$  e  $q_2$  pertanto sono distinguibili

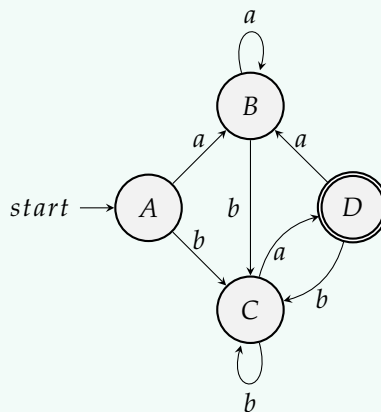
**Note:**

Una strategia per individuare la distinguibilità tra due stati è cercare di distinguere due stati a partire da  $x \in \Sigma^*$  partendo dalla più corta  $\epsilon$

Si noti questo esempio

**Example 3.3.6**

Sia  $N$  il seguente DFA:



Inanzi tutto cerco di vedere quali coppie di stati NON sono equivalenti, a partire dalla stringa  $\epsilon$ :

- $\epsilon$  distingue ogni stato in  $F$  da ogni stato in  $Q \setminus F$ , dato che  $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$ , sicuramente non sono

equivalenti:

$$\cancel{(A,D)} \quad \cancel{(B,D)} \quad \cancel{(C,D)}$$

Infatti  $A \notin F \wedge D \in F$ ,  $B \notin F \wedge D \in F$  e  $C \notin F \wedge D \in F$

- adesso si consideri le stringhe di lunghezza q, ovvero  $a$  e  $b$

– si parti con la lettera  $a$ :

\*  $a$  distingue  $B$  e  $C$  perché

$$\delta(B, a) = A \text{ e } \delta(C, a) = D$$

E  $(B, D)$  l'avevo già cancellata del primo punto

\*  $a$  distingue anche  $A$  e  $C$  perché

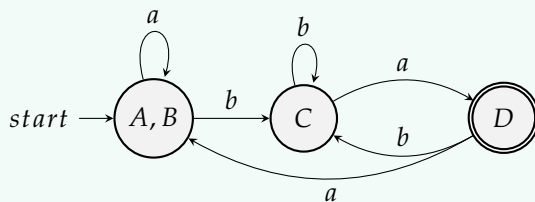
$$\delta(A, a) = B \text{ e } \delta(C, a) = D$$

E  $(B, D)$  l'avevo già cancellata del primo punto

–  $b$  non permette di fare ulteriori distinzioni

- procedo con le stringhe di lunghezza lunghe 2, ma non riesco a fare nessuna ulteriore distinzione. quindi ho finito

Non sono riuscito a distinguere solo  $A$  e  $B$ , quindi sono equivalenti e li fondo. Il nostro automa finale sarà



## Famiglia di relazioni

### Definition 3.3.5: famiglia di relazioni

Dato un DFA  $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ , definiamo una famiglia di relazioni  $\sim_i \subseteq Q \times Q$  nel seguente modo:

- $\sim_0 = F \times F \cup (Q \setminus F) \times (Q \setminus F)$   
ovvero stati che non possono essere distinti da  $\epsilon$
- $q_1 \sim_{i+1} q_2 \iff \forall a \in \Sigma \quad \delta(q_1, a) \sim_i \delta(q_2, a)$   
ovvero  $q_1$  e  $q_2$  sono in relazione  $\sim_{i+1}$  se  $\forall x \in \Sigma^*$  con  $|x| \leq i + 1$

$$\hat{\delta}(q_1, x) \in F \iff \hat{\delta}(q_2, x) \in F$$

### Note:

Si osservi che:

- La relazione  $Id = \{(q, q) \mid q \in Q\}$  è tale che  $Id \subseteq \sim_i \forall i$ . Si ha in fatti che uno stato è sempre equivalente a se stesso
- $\sim_i$  è una relazione d'equivalenza  $\forall i$
- –  $\sim_0$  ha solo 2 classi d'equivalenza, ovvero  $F$  e  $Q \setminus F$
- Per  $\sim_i$ , riflessività e simmetria sono ovvie, mentre la transitività è meno banale:

$$q_1 \sim_i q_2 \text{ e } q_2 \sim_i q_3 \implies q_1 \sim_i q_3$$

- Ad ogni passo, rimuovo qualche coppia!

Si verifica che:

$$\sim_0 \supseteq \sim_1 \supseteq \sim_2 \supseteq \sim_3 \supseteq \dots$$

Ossia una **catena decrescente** (o non crescente) di relazioni di equivalenza.

- Se esiste un  $K$  tale che  $\sim_K = \sim_{K+1}$ , allora per ogni  $j > K$  vale che  $\sim_j = \sim_K$ .  
In altre parole: Non appena la relazione non viene modificata in un passo, ho trovato la soluzione
- Un tale  $K$  esiste sicuramente ed è minore di:

$$|\sim_0| = |F \times F| + |(Q \setminus F) \times (Q \setminus F)| = |F|^2 + |Q \setminus F|^2$$

Questo perché, nella peggiore delle ipotesi, ad ogni passo iterativo si rimuove solo una (o al massimo due) coppia.

In realtà si può dimostrare che  $K < |Q| - 1$ , poiché  $|Q|$  è la lunghezza del massimo cammino aciclico. Infatti, negli esempi che abbiamo visto, ho considerato solo stringhe che non portavano a cicli.

### Theorem 3.3.4

Siano  $\sim_2$ ,  $\sim_1$  e  $\sim_3$  le relazioni d'equivalenza mostrate poc'anzi si ha che

$$\sim_2 = \sim_1 \implies \sim_3 = \sim_2$$

**Dimostrazione con un esempio:** Supponiamo, per assurdo, che  $r_2 = r_1$  ma che  $r_3 \neq r_2$ , cioè esistano  $A, B$  tali che:

$$A \sim_2 B \quad \text{ma} \quad A \not\sim_3 B,$$

ossia:

$$\sim_3 \subset r_2 = r_1.$$

Allora, poiché  $A \not\sim_3 B$ , deve essere:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} A_2 \xrightarrow{a_3} A_3 \\ B &\xrightarrow{a_1} B_1 \xrightarrow{a_2} B_2 \xrightarrow{a_3} B_3 \end{aligned}$$

con  $A_3 \in F$  e  $B_3 \notin F$  (ovviamente).

Ma allora  $A_1 \not\sim_2 B_1$  e poiché  $r_2 = r_1$ , deve essere:

$$A_1 \not\sim_1 B_1.$$

Ma allora:

$$A_1 \xrightarrow{b} A_u \quad B_1 \xrightarrow{b} B_u$$

con  $A_u \in F$  e  $B_u \notin F$  (ovviamente).

Ma allora  $A \not\sim_2 B$  perché:

$$A \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{b} A_u \quad B \xrightarrow{a_1} B_1 \xrightarrow{b} B_u,$$

contraddicendo l'ipotesi iniziale.

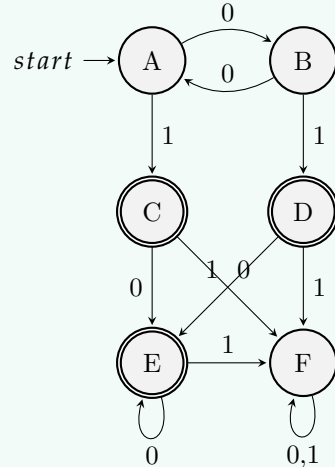
$$\implies \text{non è possibile che } r_1 = r_2 \text{ e } r_3 \subset r_2.$$

Quindi, se  $\sim_{K+1} = \sim_K$ , allora per ogni  $j > K$  vale  $\sim_j = \sim_K$

☺

### Example 3.3.7

Proviamo a minimizzare il DFA seguente:



Costruiamo ora l'insieme  $\sim_0$  come per definizione:

$$\sim_0 = \{(A, A), (B, B), (A, F), (B, A), (B, F), (F, F), (F, A), (F, B)\}$$

∪

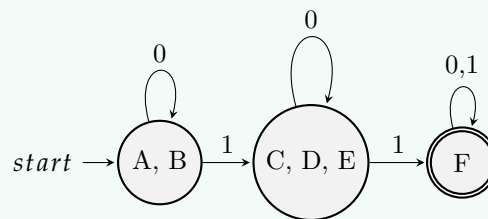
$$\{(C, C), (C, D), (C, E), (D, C), (D, D), (D, E), (E, C), (E, D), (E, E)\}.$$

Procediamo ora per costruire l'insieme  $\sim_1$ . Per velocizzare controlliamo solo le coppie in  $\sim_0$  e ovviamente non quelle identiche (tipo  $(A, A)$ ). Per ora consideriamo solo stringhe di lunghezza 1 ("0" e "1"). Otteniamo:

$$\sim_1 = \{(A, A), (A, B), (B, B), (A, F), (B, A), (B, F), (F, F)\} \cup$$

$$\{(C, C), (C, D), (C, E), (D, C), (D, D), (D, E), (E, C), (E, D), (E, E)\}.$$

Si ha che  $\sim_2 = \sim_1$ , quindi possiamo terminare e ridisegnare il DFA. Gli stati equivalenti sono quindi quelli che non compaiono nelle coppie  $(A, B), (F), (C, D, E)$ . Otteniamo quindi:



È semplice anche dire che la regex associata è  $0^*10^*$ . Inoltre, lo stato  $F$  rappresenta uno stato di errore a cui si arriva con stringhe del tipo  $0^*10^*10^+$ .

## tabella d'equivalenza

Le tabelle di equivalenza sono un modo per memorizzare l'equivalenza, di modo, da costruire un algoritmo per la minimizzazione poi, l'idea è la seguente

- **Tabella con solo coppie "vere".**
- Al round 0 dell'algoritmo iterativo, metto una marca  $X_0$  per indicare che la coppia è distinta: (finale, non finale) oppure (non finale, finale).
- Al round 1, metto la marca  $X_1$  per distinguere le coppie  $(q_1, q_2)$  non ancora marcate che, per qualche  $a \in \Sigma$ , hanno  $(\delta(q_1, a), \delta(q_2, a))$  già marcata.
- Al round 2, metto la marca  $X_2$  e così via per le coppie successive.

- **Condizione di arresto:** se non riesco a mettere nessuna nuova marca in un round, l'algoritmo termina.

### Example 3.3.8

Prendiamo in esame il DFA dell'esempio precedente

Prima di tutto costruiamo una tabella con solo delle coppie che non sono identiche per far ciò la costruiamo a scaletta. Si ha che:

	A	B	C	D	E
B	X <sub>0</sub>				
C	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>			
D	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>		
E	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>	
F	X <sub>1</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>	X <sub>0</sub>

Per calcolarla è possibile utilizzare il seguente algoritmo

---

#### Algorithm 3: Costruzione di una tabella d'equivalenza

---

**Input:** DFA N

**Output:** tabella d'equivalenza

```

1 Sia  $T^{n \times n}$  dove  $T$  è il numero di stati in  $n$ ;
2 marca  $x_0$  ogni coppia  $(q_1, q_2)$  tale che  $q_1 \in F$  e  $q_2 \in Q \setminus F$  o viceversa;
3  $b \leftarrow true$ ;
4  $i \leftarrow 1$ ;
5 while  $b$  do
6    $b \leftarrow false$ ;
7   foreach  $(q_1, q_2)$  non marcata do
8     if  $\exists a \in \Sigma$  con  $(\delta(q_1, a), \delta(q_2, a))$  già marcate then
9       marca  $(q_1, q_2)$  con  $x_i$ ;
10       $b \leftarrow true$ ;
11    $i \leftarrow i + 1$ ;
```

---

### Theorem 3.3.5

Dato un DFA  $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  l'algoritmo della tabella a scala termina, inoltre due stati  $p$  e  $q$  sono distinguibili se e solo se la casella  $(p, q)$  (o la casella  $(q, p)$ ) è marcata

**Dimostrazione:** Procedo a dimostrare le due parti

- Poiché abbiamo visto che  $\exists k. \sim_k = \sim_{k+1}$  e quando l'algoritmo iterativo termina entro  $k$  iterazioni
- procedo a dimostrare la distinguibilità:
  - $\Rightarrow$  Se  $p$  e  $q$  sono distinguibili, allora  $\exists x \in \Sigma^*. \hat{\delta}(p, x) \in F$  e  $\hat{\delta}(q, x) \notin F$  (o viceversa).  
Se prendo  $k = |x|$ , allora di sicuro  $(p, q) \notin \sim_k$  cioè  $(p, q)$  viene marcata entro il round  $k$
  - $\Leftarrow$   
Se  $(p, q)$  sono marcati, allora sicuramente  $(p, q)$  sono distinguibili:  
occorre prendere la catena di coppie che portano ad una coppia non presente in  $\sim_0$ . ad esempio

$$(p, q) \rightarrow (p', q') \rightarrow (p'', q'')$$

Allora  $ab$  è la stringa che distingue  $p$  e  $q$

### 3.3.6 automa minimo

#### Definition 3.3.6: Automa minimo

Dato un DFA  $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ , l'automa minimo equivalente  $M_{min} = (\Sigma, Q_{min}, \delta_{min}, [q_0], F_{min})$  è dato da:

- $Q_{min} = \{[q] \mid q \in Q\}$  con  $[q] = [q' \in Q \mid q \sim q']$   
Gli stati di  $M_{min}$  sono classi di equivalenza di stati di  $M$
- $\delta_{min}([q], a) = [\delta(q, a)]$
- $F_{min} = \{[q] \mid q \in F\}$

#### Note:

non esistono 2 stati distinti in  $M_{min}$  che siano tra loro equivalenti:

$$[q] \neq [q'] \implies q \not\sim q'$$

Adesso estendiamo la notazione di  $\hat{\delta}$  per i DFA  $M_{min}$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{min} : Q_{min} \times \Sigma^* &\rightarrow Q_{min} \\ \hat{\delta}_{min}([q], \epsilon) &= [q] \\ \hat{\delta}_{min}([q], xa) &= \hat{\delta}_{min}(\hat{\delta}_{min}([q], x), a) \\ w \in L[M_{min}] &\iff \hat{\delta}_{min}([q_0], w) \in F_{min} \end{aligned}$$

#### Theorem 3.3.6 Morbidelli - Morigi (innamorato italiano, innamorata giapponese)

Dato un DFA  $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  l'automa  $M_{min} = (\Sigma, Q_{min}, \delta_{min}, [q_0], F_{min})$  riconosce lo stesso linguaggio di  $M$ , ed ha il minimo numero di stati tra tutti gli automi deterministici per questo linguaggio

**Dimostrazione:** Dimostriamo per gradi:

- dimostro che  $M_{min}$  è ben definito, cioè  $\delta_{min}$  non dipende dallo specifico stato scelto per rappresentare la classe di equivalenza.

Si ha se  $q \sim q'$ , allora:

- $[q] = [q']$
- $\delta_{min}([q], a) = [\delta] = [\delta(q', a)] = \delta_{min}([q'], a)$

Se non fosse vero allora  $\delta(q, a)$  e  $\delta(q', a)$  sarebbero distinguibili, quindi pure  $q$  e  $q'$

- Per dimostrare che  $L[M] = L[M_{min}]$ , dimostrare che

$$\hat{\delta}(q_0, w) = r \iff \hat{\delta}([q_0], w) = [r]$$

ovvero che

$$\hat{\delta}([q_0], w) = [\hat{\delta}, w]$$

si fa la dimostrazione per induzione su  $|w|$

- Caso base:  $|w| = 0$  cioè  $w = \epsilon$

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0 \quad \hat{\delta}([q_0], \epsilon) = [q_0] = [\hat{\delta}(q_0, \epsilon)]$$

Dimostrato

– Passo induttivo:  $w = xa$

$$\hat{\delta}(q_0, xa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)$$

e, per definizione di  $\delta_{min}$

$$\hat{\delta}([q_0], xa) = \delta_{min}(\hat{\delta}([q_0], x), a)$$

Per ipotesi induttiva

$$\delta_{min}(\hat{\delta}([q_0], x), a) = \delta_{min}([\hat{\delta}(q_0, x)], a)$$

per definizione di  $\delta_{min}$

$$\delta_{min}([\hat{\delta}(q_0, x)], a) = [\delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)]$$

per definizione di  $\hat{\delta}$

$$[\delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)] = [\hat{\delta}(q_0, xa)]$$

Quindi

$$w \in L[M] \iff \hat{\delta}(q_0, w) = r \in F \iff \hat{\delta}_{min}([q_0], w) = [r] \in F_{min} \iff w \in L[M_{min}]$$

- rimane da dimostrare che è minimo, ovvero che un qualunque altro automa deterministico  $N$  non può avere meno stati. Supponiamo esista un DFA  $N$  tale che  $L[N] = L[M_{min}]$ , ma con un numero di stati inferiore a quelli di  $M_{min}$ .

– Gli stati iniziali di  $N$  e  $M_{min}$  devono essere equivalenti (nell'automata  $N \cup M_{min}$ ), poiché  $L[N] = L[M_{min}]$ .

\* Infatti, si suppone che  $N$  e  $M_{min}$  abbiano lo stesso linguaggio.

– Se più  $q \in M_{min}$  e  $q' \in N$  sono equivalenti, nell'automata  $N \cup M_{min}$ , allora sono equivalenti anche i loro successori per ogni  $a \in \Sigma$ .

–  $N$  non ha stati inaccessibili dal suo iniziale (altrimenti si potrebbe costruire un automa  $N'$  con ancora meno stati).

\*  $M_{min}$  non ha stati inaccessibili per costruzione.

Di conseguenza, ogni stato di  $M_{min}$  è equivalente ad almeno uno stato di  $N$  (per il punto precedente).

– Poiché  $N$  ha meno stati di  $M_{min}$ , due stati  $p$  e  $p'$  di  $M_{min}$  devono essere equivalenti ad uno stesso stato  $q$  di  $N$ .

\* Ma la relazione di equivalenza  $\sim$  è transitiva, quindi  $p \sim p'$  e dunque  $p$  e  $p'$  devono essere equivalenti!

\* Ma questo è impossibile!

Per costruzione di  $M_{min}$ , non ci sono due stati diversi in  $M_{min}$  equivalenti tra loro.

☺

### 3.4 Espressività dei linguaggi regolari e pumping lemma

Finora abbiamo parlato solo di linguaggi regolari, senza dimostrare l'esistenza di altri tipi di linguaggi più espressivi. In questa sezione, faremo vedere che esistono linguaggi che non possono essere riconosciuti da automi finiti.

Prendiamo come esempio il linguaggio  $B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ . Per costruire un automa che lo riconosca, dobbiamo ricordarci il numero di 0 inseriti all'inizio per controllare che il numero di 1 sia uguale. Ma, dato che il valore di  $n$  non ha un limite superiore, dobbiamo rappresentare un numero infinito di valori di  $n$  con un numero finito di stati, che dimostreremo essere impossibile in questo caso.

Potrebbe sembrare che qualunque linguaggio simile a  $B$  con  $n$  illimitato sia non regolare, ma questo non è corretto. Anche se a prima apparenza può sembrare che un linguaggio necessiti di memoria infinita, ci possono essere modi intelligenti per circuire questa apparente necessità. Prendiamo, ad esempio, il linguaggio  $C = \{w \mid w \text{ ha un uguale numero di sottostringhe } 01 \text{ e } 10\}$ , si può dimostrare che questo linguaggio sia regolare! Quindi la nostra intuizione può spesso sbagliare, vediamo ora un modo per dimostrare per certo che certi linguaggi non sono regolari:

### 3.4.1 Pumping lemma

Il pumping lemma e' un teorema che attribuisce una proprieta' speciale a tutti i linguaggi regolari. Se un linguaggio non ha questa proprieta', allora sappiamo per certo che non e' regolare. In breve, la proprieta' dice che ogni stringa di un linguaggio regolare puo' essere "pompata" se e' almeno lunga quanto una specifica lunghezza chiamata **lunghezza di pompaggio** **HHahaHAahaha**. Ovvero, ognuna di queste stringhe ha una sezione che puo' essere concatenata a se stessa un numero illimitato di volte e la stringa risultante fa sempre parte dello stesso linguaggio.

#### Theorem 3.4.1 Pumping lemma

Sia  $A$  un linguaggio regolare, allora  $\exists p$  tale che  $\forall s \in A. |s| \geq p$ ,  $s$  puo' essere suddivisa in tre parti  $s = xyz$  tali che:

1.  $\forall i \geq 0. xy^iz \in A$
2.  $|y| > 0$
3.  $|xy| \leq p$

In questa formalizzazione,  $y$  e' la parte della stringa che puo' essere ripetuta (condizione 1), che deve essere non nulla per non rendere trivialmente vero il teorema (condizione 2). La terza condizione sara' utile per dimostrare che certi linguaggi non sono regolari, e ci dira' che prendiamo la **prima** porzione della stringa che puo' essere ripetuta. Vediamo perche':

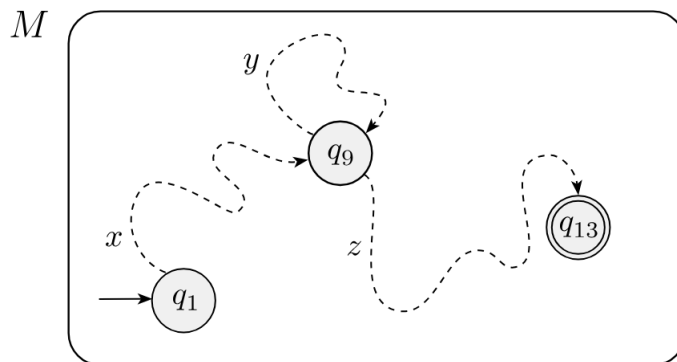
#### Dimostrazione

Prima della dimostrazione formale, proviamo a capire l'idea di base. Sia  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$  un DFA che riconosce  $A$ . Poniamo che la lunghezza di pompaggio sia uguale al numero di stati di  $M$  ( $p = |Q|$ ). Se in  $A$  non ci sono stringhe di tale lunghezza, allora il teorema e' ovviamente vero perche' vale per tutte le zero stringhe a cui puo' essere applicato.

Altrimenti,  $\exists w \in A. |w| = n \geq p$  che viene accettato da  $M$  passando da una serie di stati  $q_1, q_3, q_{20}, q_9, \dots, q_{13}$  (dove  $q_1$  e' lo stato iniziale e  $q_{13} \in F$ ), che avra' lunghezza uguale a  $n + 1$ . Dato che  $n \geq p$ , siamo sicuri che  $n + 1 > p$ , quindi ci sono piu' stati nella sequenza di quanti stati distinti esistano. Allora, ci deve essere per forza uno stato che si ripete (per il **pigeonhole principle**):

$$s = |_{q_1} s_1 |_{q_3} s_2 |_{q_{20}} s_3 |_{q_9} s_4 |_{q_{17}} s_5 |_{q_9} s_6 |_{q_6} \dots |_{q_{35}} s_n |_{q_{13}}$$

in questo caso, lo stato  $q_9$  e' il primo che si ripete. Possiamo ora dividere  $s$  in tre parti  $x, y$  e  $z$ :  $x$  e' la parte di  $s$  prima di  $q_9$ ,  $y$  e' la parte fra le due ripetizioni di  $q_9$  e  $z$  e' la parte rimanente.



Vediamo perche' questa suddivisione rispetta le tre condizioni. Consideriamo l'input  $xyyz$  passato a  $M$ :  $x$  ci porta da  $q_1$  a  $q_9$ , la prima  $y$  ci porta da  $q_9$  a  $q_9$ , anche la seconda  $y$  ci porta da  $q_9$  a  $q_9$ , infine  $z$  ci porta da  $q_9$  a  $q_{13}$  (lo stato finale). Quindi  $xyyz$  e' accettato da  $M$ , ma anche  $xy^iz$  per lo stesso motivo. Nel caso  $xy^0z$  vediamo che viene riconosciuto anche lui, quindi la prima condizione e' verificata. Dato che  $y$  e' la parte della stringa che ci porta da  $q_9$  a  $q_9$ , deve essere per forza non nulla perche'  $M$  e' deterministico. Infine, la terza condizione e'



rispettata dato che, per la **pigeonhole principle** la prima ripetizione deve avvenire per forza entro i primi  $p + 1$  stati, quindi  $|xy| \leq p$ .

**Dimostrazione formale:** Sia  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$  un DFA che riconosce il linguaggio regolare  $A$  e  $p = |Q|$ . Sia  $s = s_1 s_2 \dots s_n$  una stringa in  $A$  tale che  $|s| = n \geq p$  e siano  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  la sequenza di stati che attraversa  $M$  quando viene dato  $s$  come input, quindi  $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$ . Dato che  $n + 1 \geq p + 1$ , per il pigeonhole principle fra i primi  $p + 1$  stati ce ne deve essere uno che si ripete. Chiamiamo  $r_j$  il primo e  $r_l$  la ripetizione, quindi abbiamo che  $l \leq p + 1$ .

Ora siano  $x = s_1 \dots s_{j-1}$ ,  $y = s_j \dots s_{l-1}$  e  $z = s_l \dots s_n$ . Dato che  $x$  porta  $M$  da  $r_1$  a  $r_j$ ,  $y$  porta da  $r_j$  a  $r_l$  e  $z$  porta da  $r_l$  a  $r_{n+1}$  e siccome  $r_j$  e  $r_l$  sono lo stesso stato,  $M$  deve accettare  $xy^i z \forall i \geq 0$ . Siccome  $j \neq l$ ,  $|y| > 0$ ; e  $l \leq p + 1$ , quindi  $|xy| \leq p$ . Abbiamo quindi soddisfatto tutte le condizioni del pumping lemma.  $\odot$

## Utilizzo ed esempi

Per dimostrare che  $B$  non e' un linguaggio regolare, prima assumiamo che  $B$  sia regolare e poi dimostriamo che non vale la proprieta'  $P$  del pumping lemma:

$$\neg P \implies B \text{ non e' regolare}$$

Dato che proprio per il lemma,  $B$  e' regolare  $\implies P$ . Quindi, bisogna assumere che  $p$  sia la lunghezza garantita dal pumping lemma e prendere una stringa  $s \in B$ ,  $|s| \geq p$  tale che noi sappiamo che  $z$  non puo' essere pompata. Dimostriamo questo mostrando che per qualunque suddivisione  $xyz$  che rispetti le ultime due condizioni, la prima condizione non vale mai. Solitamente possiamo raggruppare i tipi di suddivisione in diverse categorie che possono essere analizzate individualmente, in modo da non dover controllare davvero ogni suddivisione. Trovando  $s$ , abbiamo dimostrato  $\neg P$  e quindi che  $B$  non e' regolare.

Per trovare  $s$ , solitamente ci vuole un po' di creativita'. Bisogna provare a trovare una stringa che raccolga l'"essenza" dell'irregolarita' del linguaggio, vediamo un paio di esempi per chiarire:

### Example 3.4.1

$$B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

### Example 3.4.2

$$C = \{w \mid w \text{ ha lo stesso numero di 0 e 1}\}$$

### Example 3.4.3

$$F = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

TODO: fai esercizi (che sono risolti sul libro)

## Chapter 4

# Linguaggi liberi nondeterministici

Fino ad ora abbiamo studiato due modi equivalenti per descrivere linguaggi: gli **automi finiti** e le **espressioni regolari**. Abbiamo anche visto le limitazioni di questi metodi, che non riescono ad accettare linguaggi, anche alcuni semplici come  $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ .

Per espandere la quantita' di linguaggi che possiamo studiare, introduciamo le cosiddette **grammatiche libere (dal contesto)**, un metodo piu' potente che permette di descrivere certe proprieta' di linguaggi che hanno una struttura ricorsiva. Inizialmente queste grammatiche sono state studiate per analizzare linguaggi umani, ma piu' recentemente hanno visto svariate applicazioni, come nel caso dei **parser**, utilizzati dalla maggior parte di compilatori e interpreti per estrarre il significato dal codice.

L'insieme dei linguaggi che possono essere riconosciute da grammatiche libere sono i **linguaggi liberi (dal contesto)**, che includono propriamente i linguaggi regolari. Per riconoscere tali linguaggi, introdurremo un nuovo tipo di automa: l'**automa a pila** (PDA - pushdown automata).

### 4.1 Grammatiche libere

Per qualche motivo, le grammatiche libere le abbiamo viste all'inizio, io le metterei qua ma va beh andate qui per capire cosa sono: [1.6](#)

#### 4.1.1 Semplificazione e forme normali

Questa roba qua invece e' stata messa nei linguaggi liberi deterministici, secondo me ha piu' senso metterla qua' o fare proprio un capitolo solo sulle grammatiche: [5.2.1](#)

### 4.2 PDA

In che modo possiamo modificare gli automi visti fin'ora (DFA/NFA) per far si che riescano a riconoscere linguaggi non-regolari?

Vediamo ad esempio il linguaggio  $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ . Si puo' dimostrare (fallo per esercizio) che non e' un linguaggio regolare, dato che per riconoscerlo si dovrebbe **memorizzare** tutta la prima parte della parola palindroma (la cui lunghezza non e' limitata). Quindi serve una forma di memoria ausiliaria, che nei PDA e' implementata con una **pila** con memoria illimitata.

Essendo una pila (LIFO), ci sono certe restrizioni per come puo' essere gestita la memoria:

- Si puo' leggere solo il primo elemento in cima alla pila (top)
- Si puo' rimuovere solo l'elemento top
- Si puo' aggiungere elementi solo in cima alla pila (in modo che diventino il nuovo top)

I PDA possono essere *nondeterministici*, e come tali hanno una potenza espressiva maggiore rispetto ai PDA deterministici (DPDA). Dimostreremo alla fine della sezione che i PDA (nondeterministici) hanno lo stesso potere espressivo delle grammatiche libere.

### 4.2.1 Definizione formale

La definizione formale di un PDA e' simile a quella dei NFA, con l'aggiunta della presenza della pila. Questa pila contiene simboli di un alfabeto che puo' essere diverso rispetto a quello di input, quindi dobbiamo definire sia un alfabeto  $\Sigma$  per l'input, sia l'alfabeto  $\Gamma$  per la pila. L'operazione di transizione, che ci dice come si comporta l'automa, ha come dominio  $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma$  (dove  $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$ ), quindi la mossa del PDA e' determinata dallo stato corrente, dal carattere in input e dal carattere in cima alla pila. Di questi, il secondo puo' essere anche  $\epsilon$ , quindi la macchina puo' fare una mossa senza leggere l'input, ma il simbolo in cima alla stack viene sempre letto (e consumato).

Dato un input, l'automa puo' spostarsi su un nuovo stato e aggiungere un numero arbitrario di elementi alla pila (anche nessuno). Inoltre, dato che il nondeterminismo ha come conseguenza la possibilita' di avere diverse transizioni possibili dato lo stesso input, dobbiamo considerare come codominio l'insieme di tutti i possibili insiemi che hanno come elementi coppie del tipo  $Q \times \Gamma^*$ , ovvero l'insieme potenza  $\mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ .

#### Definition 4.2.1: PDA

Un automa a pila nondeterministico e' una 7-pla  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$  dove:

- $Q$  e' un insieme finito di stati
- $\Sigma$  e' un alfabeto di input finito
- $\Gamma$  e' un alfabeto per la pila finito
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$  e' la funzione di transizione
- $q_0$  e' lo stato iniziale
- $\perp \in \Gamma$  e' il primo simbolo sulla pila
- $F \subset Q$  e' l'insieme degli stati finali

### 4.2.2 Transizioni

A ogni passo di computazione, possiamo attribuire a un PDA una **descrizione istantanea** (o configurazione) che ci dice lo stato corrente  $q \in Q$ , l'input rimasto  $w \in \Sigma^*$  e la stringa sulla pila  $\beta \in \Gamma^*$  (dove l'elemento top e' il "carattere piu' a sinistra"):

$$(q, w, \beta)$$

Le mosse possono essere definite come una derivazione da una configurazione a quella successiva (indicata col simbolo  $\vdash_N$ , come con gli altri automi). Mostriamo, usando l'inferenza logica, i due tipi di mossa:

1. Lettura di un carattere in input ( $a \in \Sigma$ ):

$$\frac{(q', \alpha) \in \delta(q, a, X)}{(q, aw, X\beta) \vdash_N (q', w, \alpha\beta)}$$

2. Senza lettura dell'input:

$$\frac{(q', \alpha) \in \delta(q, \epsilon, X)}{(q, w, X\beta) \vdash_N (q', w, \alpha\beta)}$$

Come per gli automi finiti, introduciamo anche  $\vdash_N^*$ , la chiusura riflessiva e transitiva di  $\vdash_N$ :

$$\frac{}{(q, w, \beta) \vdash_N^* (q, w, \beta)} \text{ e } \frac{(q, w, \beta) \vdash_N^* (q', w', \beta') \vdash_N (q'', w'', \beta'')}{(q, w, \beta) \vdash_N^* (q'', w'', \beta'')}$$

### 4.2.3 Linguaggio Accettato

Ci sono diversi modi in cui possiamo determinare se una stringa e' accettata o meno da un PDA. Oltre al classico riconoscimento per stato finale, possiamo dire che una stringa e' accettata se alla fine dell'input la pila e' vuota:

- $L[N] = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \perp) \vdash_N^* (q, \epsilon, \alpha). q \in F\}$
- $P[N] = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \perp) \vdash_N^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$

Osserviamo che non per forza un PDA deve svuotare la pila alla fine di un input accettato, quindi in generale:

$$L[N] \neq P[N]$$

Dimostriamo pero' che questi due metodi di riconoscimento hanno la stessa espressivita':

#### Theorem 4.2.1

Dato un PDA  $N$  si ha che:

- Se  $L = L[N]$  e' il linguaggio riconosciuto da  $N$  per stato finale, allora  $\exists N'$  PDA tale che  $L = P[N']$ , dove  $P[N']$  e' il linguaggio riconosciuto da  $N'$  per pila vuota.
- Viceversa, se  $L = P[N]$  allora  $\exists N''$  PDA tale che  $L = L[N'']$ .

Quindi i PDA che riconoscono per stato finale e quelli che riconoscono per pila vuota sono equivalenti.

Vediamo prima un'osservazione che ci servira' per dimostrare questo teorema:

#### Note:

Si osservi che, se la pila viene completamente svuotata, il PDA che abbiamo definito non puo' avere altre transizioni. Questo e' perche'  $\epsilon \notin \Gamma$ , e quindi non e' neanche presente nel dominio della funzione di transizione. Quindi se la pila di un PDA e' vuota, allora si blocca.

Detto questo, passiamo a una dimostrazione per costruzione di entrambe gli enunciati: TODO aggiungi figure

**Dimostrazione:** Dimostriamo (in ordine inverso) i due versi:

- Sia  $N$  un PDA che accetta un linguaggio  $L$  per pila vuota ( $L = P[N]$ ). Costruiamo un PDA  $N'$  che riconosca lo stesso linguaggio per stato finale. L'idea e' quella di aggiungere un elemento in fondo alla pila, in modo tale da poter riconoscere quando la pila di  $N$  si sarebbe svuotata, e di aggiungere transizioni da tutti gli stati ad un nuovo stato finale. Per aggiungere l'elemento sulla pila, basta aggiungere un nuovo stato iniziale con una transizione verso il vecchio stato iniziale che non legga l'input e che aggiunga un elemento  $Z \notin \Gamma$  sotto a  $\perp$ .

Le transizioni aggiuntive non leggono caratteri in input (sono nondeterministiche) e guardano se in cima alla pila e' presente l'elemento finale aggiunto inizialmente. In questo modo, se la pila non arriva mai all'ultimo elemento allora e' impossibile arrivare allo stato finale, mentre se la pila viene svuotata e' possibile spostarsi sullo stato finale. Se  $N'$  si trova nell'ultimo caso ma non ha finito di leggere la stringa, il PDA si blocca e la parola non viene accettata. Altrimenti viene riconosciuta, sse appartiene al linguaggio  $L$ .

- Sia  $N$  un PDA che accetta un linguaggio  $L$  per stato finale ( $L = L[N]$ ). Costruiamo un PDA  $N''$  che riconosca lo stesso linguaggio per pila vuota. L'idea e' simile a quella sopra: aggiungiamo un elemento  $Z \notin \Gamma$  in fondo alla pila (sempre per evitare che la pila si svuoti, rendendo impossibili ulteriori transizioni), e aggiungiamo delle transizioni nondeterministiche, questa volta solo dagli stati finali di  $N$ , che portano a uno stato da cui parte un'unica transizione verso se stesso. Questa transizione non fa altro che rimuovere elementi dalla pila senza leggere input, in modo che se  $N$  arriva ad uno stato finale dopo aver consumato tutto l'input, allora  $N''$  ha una possibile strada che svuota completamente la pila. Altrimenti, o la pila non viene mai svuotata, oppure viene svuotata ma senza consumare tutto l'input (e quindi non viene riconosciuta). Osservare che in tutte le altre transizioni non si puo' leggere  $Z$  dalla pila (dato che non appartiene all'alfabeto della pila), quindi non potra' accadere che la pila si svuoti consumando tutto l'input senza raggiungere lo stato aggiunto, riconoscendo erroneamente l'input.

## 4.3 Equivalenza fra grammatiche libere e PDA

In questa sezione dimostreremo che i PDA e le grammatiche libere hanno lo stesso potere espressivo, ovvero che riconoscono lo stesso insieme di linguaggi. Quindi sia le grammatiche libere che i PDA riconoscono linguaggi liberi e faremo vedere come costruire un PDA equivalente partendo da una CFG (context free grammar) e viceversa. Dato che per definizione un linguaggio è libero sse esiste una grammatica libera che lo descrive, ci riduciamo a dimostrare il seguente teorema:

### Theorem 4.3.1

Un linguaggio è libero sse esiste un PDA che lo riconosce

Dobbiamo dimostrare le due direzioni. Dato che sono un po' corpose, separiamole in due lemmi:

### 4.3.1 Da grammatica libera a PDA

#### Lemma 4.3.1

Dato un linguaggio libero  $L$ , esiste un PDA  $N$  tale che

$$L = P[N]$$

Notare che potevamo anche scrivere  $L = L[N]$ , dato che abbiamo dimostrato che i due metodi di riconoscimento hanno la stessa espressività. Per la dimostrazione ci è più utile costruire un PDA che riconosca per pila vuota, andiamo a vedere come costruirlo:

**Idea della dimostrazione:** Data la grammatica libera  $G$  che descrive  $L$ , vogliamo costruire un PDA  $N$  che accetta un input  $w$  se esiste una derivazione di  $G$  che porta a  $w$ . Ricordiamo che una derivazione è la serie di sostituzioni che fa una grammatica, partendo dalla variabile iniziale, per generare una stringa. Ad ogni passo viene generata una **stringa intermedia** formata da terminali e non-terminali. Il compito di  $N$  è quello di decidere se esistono una serie di sostituzioni (prese dalle regole di  $G$ ) che generano  $w$ .

La parte difficile è sapere quale sostituzione è quella giusta, dato che possono esserci più regole di sostituzione per una sola variabile. Fortunatamente, utilizzando il nondeterminismo possiamo semplicemente considerare tutte le opzioni come percorsi validi.

Allo stato iniziale, quindi, il PDA si ritrova solo il nonterminale  $S$  sulla pila. Poi passa per una serie di stringhe intermedie prima di avere solo terminali, che se combaciano con l'input significa che esiste una derivazione di  $G$  che genera  $w$  e quindi  $N$  lo accetta. Se in tutte le possibili diramazioni nondeterministiche l'input non combacia con la stringa nella pila, allora  $G$  non può generarlo e non viene riconosciuto da  $N$ .

L'unico problema è che un PDA può solo accedere al primo elemento della pila. Questo significa che se un non-terminale non è top, non possiamo sostituirlo senza rimuovere tutti i terminali sopra, quindi non possiamo tenere in memoria l'intera stringa intermedia. Possiamo risolvere questo problema consumando il top ogni volta che appare un terminale che combacia con il carattere in input, passando quindi al carattere successivo. Se non combaciano, il PDA deve fare *backtracking* e provare una nuova combinazione di sostituzioni. Se per tutte le combinazioni c'è un terminale in top che non combacia con l'input, la stringa non viene accettata.

Notare che in questo modo, il PDA svolge una **derivazione leftmost** (1.9.1) dal simbolo iniziale all'input. ☺

**Dimostrazione formale:** Sia  $L$  un linguaggio libero. Allora per definizione esiste una grammatica  $G = (NT, T, R, S)$  che lo descrive. Vogliamo costruire un PDA  $N$  tale che  $L = P[N]$ . Sia  $N = (\{q\}, T, NT \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$ . Aggiungiamo le transizioni  $\forall a \in T, \forall A \in NT$ :

$$\begin{aligned}\delta(q, a, a) &= \{(q, \epsilon)\} \\ \delta(q, \epsilon, A) &= \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \in R\}\end{aligned}$$

Si può dimostrare per induzione sulla lunghezza dell'input che:

$$S \Rightarrow_l^* w \iff (q, w, s) \vdash_N^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

### 4.3.2 Da PDA a grammatica libera

#### Lemma 4.3.2

Dato un PDA  $N$  tale che  $L = P[N]$ , possiamo costruire una grammatica libera  $G$  tale che:

$$L = L[G]$$

Questa direzione e' molto piu' lunga e complessa rispetto alla prima, dato che "programmare" un automa e' molto piu' semplice rispetto a "programmare" una grammatica. E piu' semplice dimostrare il lemma se consideriamo un PDA con un solo stato, quindi ci torna utile il seguente lemma:

#### Lemma 4.3.3

Per ogni PDA  $N$ , esiste un PDA  $N'$  con un solo stato tale che:

$$P[N] = P[N']$$

Questo lemma ci dice che ogni PDA puo' essere trasformato in un PDA equivalente che ha un solo stato. Non lo dimostriamo perche' sbattecazz.

Ora ci possiamo ricondurre a dimostrare il lemma con l'ipotesi aggiuntiva che  $N$  ha un solo stato:

**Idea della dimostrazione:** Dato che la dimostrazione formale e' davvero lunghissima, tale da mandare in tilt anche il dio degli audiolibri detto "Il Guerriero", ne parleremo solo schematicamente.

L'idea e' la seguente: dato un PDA  $N = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \emptyset)$  a uno stato, generiamo una grammatica libera  $G = (T, NT, R, S)$  equivalente tale che:

$$\forall a \in \Sigma_\epsilon, \forall A \in \Gamma. (q, B_1 B_2 \dots B_k) \in \delta(q, a, A) \text{ con } k \geq 0 : \\ A \rightarrow a B_1 B_2 \dots B_k \in R$$

Si puo' dimostrare che  $S \Rightarrow^* w \iff (q, w, s) \vdash_N^* (q, \epsilon, \epsilon)$ .

☺

### 4.3.3 Relazione fra linguaggi regolari e linguaggi liberi

Abbiamo quindi dimostrato che gli automi a pila riconoscono la classe di linguaggi liberi. Dato che gli automi finiti riconoscono i linguaggi regolari e possono essere convertiti in PDA che ignorano la pila, possiamo dire che:

#### Proposition 4.3.1 Relazione fra linguaggi regolari e linguaggi liberi

I linguaggi regolari sono un sottoinsieme proprio dei linguaggi liberi.

TODO: figura

## 4.4 Proprieta'

### 4.4.1 Chiusura

Come nei linguaggi regolari, anche i linguaggi liberi sono chiusi rispetto alle operazioni regolari:

#### Theorem 4.4.1

I linguaggi liberi sono chiusi per:

1. Unione
2. Concatenazione
3. Ripetizione (stella di Kleene)

**Dimostrazione:** Siano  $L_1, L_2$  i linguaggi generati da due grammatiche libere  $G_1 = (NT_1, T_1, R_1, S_1), G_2 = (NT_2, T_2, R_2, S_2)$  e assumiamo che  $NT_1 \cap NT_2 = \emptyset$ , allora:

1. **Unione:**

Costruisco la grammatica libera  $G = (NT_1 \cup NT_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}, S)$ . Si puo' dimostrare che  $L(G) = L_1 \cup L_2$ .

2. **Concatenazione:**

Costruisco la grammatica libera  $G = (NT_1 \cup NT_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$ . Si puo' dimostrare che  $L(G) = L_1 \cdot L_2$ .

3. **Ripetizione:**

Costruisco la grammatica libera  $G = (NT_1 \cup \{S\}, T_1, R_1 \cup \{S \rightarrow \epsilon \mid S_1 S\}, S)$ . Si puo' dimostrare che  $L(G) = L_1^*$ .

☺

Rispetto all'intersezione:

**Theorem 4.4.2**

Dati un linguaggio libero  $L_1$  e un linguaggio regolare  $L_2$ , la loro intersezione  $L_1 \cap L_2$  e' un linguaggio libero.

Notare che questo teorema **NON** dice che i linguaggi liberi sono chiusi rispetto all'intersezione (infatti vedremo dopo che non lo sono). Dimostriamolo:

**Idea della dimostrazione:** Vogliamo in qualche modo eseguire contemporaneamente sia il PDA che riconosce il linguaggio libero (per stato finale), sia il DFA che riconosce il linguaggio regolare. Se alla fine dell'input sono entrambe in stato di riconoscimento, allora significa che la stringa fa parte sia del linguaggio regolare che di quello libero, quindi appartiene all'intersezione. ☺

**Dimostrazione:** Dati un PDA  $N_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_1, Z, F_1)$  e un DFA  $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  che riconoscono rispettivamente il linguaggio libero  $L_1 = L[N_1]$  e il linguaggio regolare  $L_2 = L[N_2]$ , costruiamo un PDA  $N$  che riconosca il linguaggio  $L_1 \cap L_2$ :

- $N = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, \langle q_1, q_2 \rangle, Z, F_1 \times F_2)$
- $\forall q \in Q_1, \forall p \in Q_2, \forall a \in \Sigma, \forall X \in \Gamma :$

$$\delta(\langle q, p \rangle, a, X) = \{(\langle r, s \rangle, \gamma) \mid s = \delta_2(p, a) \wedge \langle r, \gamma \rangle \in \delta_1(q, a, X)\}$$

Si puo' dimostrare che  $\forall w \in \Sigma^*$ :

$$(q_1, w, Z) \vdash_{N_1}^* (q, \epsilon, \gamma) \wedge \hat{\delta}_2(q_2, w) = q' \\ \text{sse}$$

$$(\langle q_1, q_2 \rangle, w, Z) \vdash_N^* (\langle q, q' \rangle, \epsilon, \gamma)$$

Quindi, se  $q \in F_1$  e  $q' \in F_2$  e quindi  $w \in L_1 \cap L_2$ , anche  $N$  riconosce  $w$  dato che  $\langle q, q' \rangle \in F_1 \times F_2$ . Vale anche la direzione opposta, quindi  $L_1 \cap L_2 = L[N]$ . ☺

Possiamo usare questa proprieta' per dimostrare che un linguaggio non e' libero. Infatti, dato un linguaggio  $L_1$  che vogliamo analizzare, basta trovare un linguaggio  $L_2$  regolare per cui  $L_1 \cap L_2$  non e' libero. Se riusciamo a trovare tale linguaggio, allora siamo sicuri che  $L_1$  non e' regolare:

$$\forall L_1,$$

$$\exists L_2 \text{ regolare } L_1 \cap L_2 \text{ non e' libero} \implies L_1 \text{ non e' libero}$$

I linguaggi liberi, come anticipato, non sono chiusi per intersezione. Per dimostrarlo, basta trovare una controprova:

**Controprova:** Consideriamo i due linguaggi liberi  $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$  e  $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}$ . Le uniche stringhe che appartengono sia a  $L_1$  che a  $L_2$  sono quelle che hanno lo stesso numero di tutti e tre i caratteri, ovvero:  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Vediamo ora il **pumping theorem** per dimostrare che questo linguaggio non e' libero. ☺

## 4.4.2 Pumping Theorem

Il **pumping theorem** ci serve per dimostrare quando un linguaggio non fa parte della classe di linguaggi liberi. Si ricordi il pumping lemma (TODO: aggiungi ref), introdotto con i linguaggi regolari. Il pumping theorem è abbastanza simile, dato che anche questo dimostra l'esistenza di una **lunghezza di pompaggio** per i linguaggi liberi, tale che ogni stringa di lunghezza maggiore o uguale può essere pompata. In questo caso, però, non c'è una sola sezione che può essere ripetuta, ma due. Vediamo in dettaglio:

### Theorem 4.4.3

Se  $L$  è un linguaggio libero, allora esiste un numero  $p$  tale che, sia  $s \in L$  con  $|s| \geq p$ , allora  $s$  può essere divisa in cinque sezioni  $s = uvxyz$  che soddisfano tali condizioni:

1.  $\forall i \geq 0, uv^i xy^i z \in L$
2.  $|vy| > 0$
3.  $|vxy| \leq p$

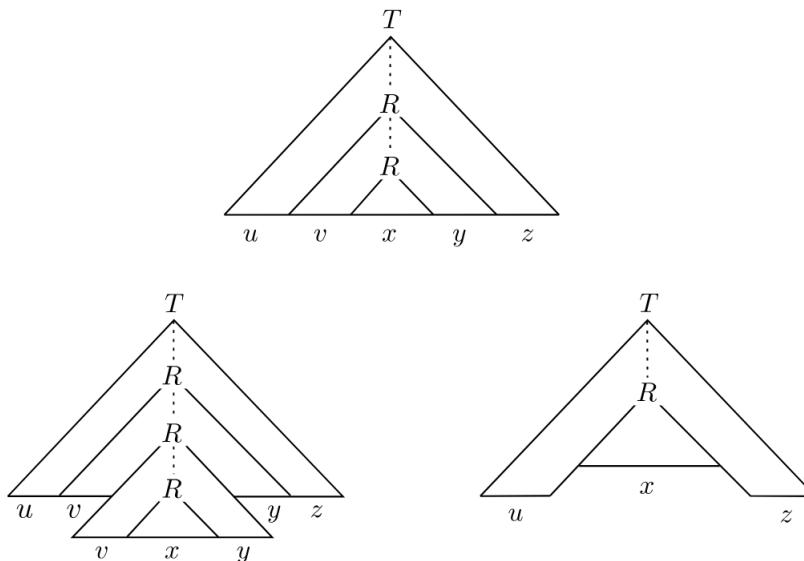
La seconda condizione ci dice che  $v$  o  $y$  devono essere non nulli, se no il teorema diventa ovviamente vero per ogni linguaggio. La terza condizione ci può aiutare in alcune dimostrazioni.

**Idea della dimostrazione:** Per capire questa dimostrazione, è necessario avere ben presente le grammatiche libere e i relativi alberi di derivazione (1.9). Infatti dato che  $L$  è un linguaggio libero, avrà anche una grammatica che lo genera.

Consideriamo una parola  $s \in L$  "abbastanza lunga" (defineremo dopo cosa significa): questa avrà almeno un **albero di derivazione** che la genera. Avendo scelto  $s$  abbastanza lunga, allora la distanza massima dalla radice  $S$  a una foglia (ovvero l'**altezza dell'albero**) è tale da garantire, per il **pigeonhole principle**, il ripetersi di uno dei nonterminali fra i nodi del percorso.

Chiamiamo  $A$  il nonterminale ripetuto. Come si vede dalla figura, possiamo rimpiazzare il sottoalbero radicato nella seconda ripetizione di  $A$  con il sottoalbero radicato nella prima ripetizione di  $A$ , ottenendo un albero di derivazione valido e quindi una stringa appartenente a  $L$ . Possiamo ripetere questa procedura all'infinito, e vale anche se facciamo al contrario.

Quindi, se divido  $s$  in cinque sezioni  $uvxyz$  come indica la figura, è possibile ripetere  $v$  e  $y$  e ottenere sempre parole che appartengono a  $L$ .



☺

Entriamo ora nei dettagli e proviamo a dimostrare in modo più formale tutte e tre le condizioni, oltre a vedere come calcolare la lunghezza di pompaggio  $p$ :



**Dimostrazione:** Sia  $G = (T, NT, R, S)$  una grammatica libera che genera  $L$ . Sia  $b$  il massimo numero di simboli (sia  $T$  che  $NT$ ) che si trovano nella parte destra di una produzione in  $R$  ( $b = \max\{|\alpha| \mid A \rightarrow \alpha \in R\}$ ). Possiamo assumere che  $b \geq 2$ , dato che altrimenti la grammatica sarebbe banale. In qualsiasi albero di derivazione generato da  $G$ , il massimo numero di figli che puo' avere un nodo e'  $b$ . In altre parole, ci saranno un massimo di  $b$  nodi che distano 1 dalla radice  $S$ , al massimo  $b^2$  che distano 2 e in generale un massimo di  $b^h$  nodi che distano esattamente  $h$  dalla radice. Quindi, se un albero e' alto  $h$  la stringa che genera e' lunga al massimo  $b^h$ . Viceversa, se una stringa e' lunga almeno  $b^h + 1$ , allora il suo albero di derivazione sara' alto almeno  $h + 1$ .

$$|w| \geq b^h + 1 \implies \text{height}(\text{parseTree}(w)) \geq h + 1$$

Sia  $|NT|$  il numero di nonterminali in  $G$ , impostiamo la lunghezza di pompaggio nel seguente modo:  $p = b^{|NT|+1}$ . Dato che  $b \geq 2$ , sappiamo che  $p > b^{|NT|}$ , e quindi  $p \geq b^{|NT|} + 1$  (tecnicamente si puo' mettere maggiore stretto, ma per la dimostrazione non serve). Così facendo, se  $s$  e' una stringa di  $L$  tale che  $|s| \geq p$ , sappiamo che il suo albero di derivazione e' alto almeno  $|NT| + 1$ :

$$|w| \geq p = b^{|NT|+1} \geq b^{|NT|} + 1 \implies \text{height}(\text{parseTree}(w)) \geq |NT| + 1$$

Notare che l'implicazione vale anche se poniamo  $b^{|NT|} + 1$  come pumping length, ma per garantire la terza condizione dobbiamo scegliere la lunghezza maggiore che puo' generare un albero alto  $|NT| + 1$ , vedremo dopo perche'.

Per vedere come pompare una stringa  $w \in L$ ,  $|w| \geq p$ , chiamiamo  $\tau$  il suo albero di derivazione che ha il minor numero di nodi (questa condizione serve per garantire la seconda condizione). Sappiamo che  $\text{height}(\tau) \geq |NT| + 1$ , ovvero che esiste un percorso dalla radice a una foglia lungo almeno  $|NT| + 1$ . Contando la radice, ci sono  $|NT| + 2$  nodi lungo questo percorso, di cui uno e' la foglia che e' quindi un terminale. Quindi i restanti  $|NT| + 1$  nodi sono tutti nonterminali, e per il *pigeonhole principle* almeno uno si deve ripetere. Chiamiamo  $A$  il nonterminale che si ripete entro i  $|NT| + 1$  nonterminali "piu' in basso", ovvero piu' vicini alla foglia, lungo il percorso (questa scelta serve per garantire la terza condizione).

Dividiamo  $w$  in cinque parti  $uvxyz$  come nella figura. L' occorrenza superiore di  $A$  ha un sottoalbero piu' grande che genera  $vxy$ , mentre quella piu' in basso ha un sottoalbero piu' piccolo e genera solo  $x$ . Entrambe le sottostringhe sono generate dalla stessa variabile, quindi possiamo sostituire l'una con l'altra e ottenere un nuovo albero di derivazione valido. Sostituendo il minore con il maggiore ripetutamente ci da tutti gli alberi di derivazione per le stringhe  $uv^i xy^i z$  con  $i > 1$ . Sostituendo il maggiore con il minore otteniamo la stringa  $uxz$  (il caso in cui  $i = 0$ ), quindi abbiamo stabilito che questa divisione soddisfa la prima condizione, vediamo le altre due:

Per la condizione 2, dobbiamo accertarci che  $u$  e  $y$  non siano entrambe  $\epsilon$ . Usando l'eliminazione del not, assumiamo che siano entrambe  $\epsilon$  e dimostriamo il falso. Se fosse così, potremmo sostituire il sottoalbero minore a quello maggiore ottenendo comunque la stringa iniziale ( $uxz = uv^i xy^i z$ ), pero' con un albero piu' piccolo. Ma questo e' assurdo, perche' come ipotesi avevamo stabilito che  $\tau$  fosse l'albero di derivazione di  $w$  con meno nodi.

La terza condizione dice che  $|vxy| \leq p$ . Questa e' la sottostringa generata dalla prima occorrenza di  $A$  (dalla radice verso le foglie), il cui sottoalbero e' alto al massimo  $|NT| + 1$ , dato che le due ripetizioni di  $A$  devono essere entro i  $|NT| + 1$  nonterminali piu' vicini alla foglia. La stringa piu' lunga che puo' generare un albero di quell'altezza e'  $b^{|NT|+1} = p$ , quindi  $|vxy| \leq p$  come volevamo dimostrare. ☺

# Chapter 5

## linguaggi liberi deterministici

### 5.1 PDA e linguaggi deterministici

#### 5.1.1 PDA deterministici

##### Definition 5.1.1: PDA deterministico

Un PDA  $N = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$  si dice **deterministico** sse:

1.  $\forall q \in Q, \forall z \in \Gamma, (\forall a \in \Sigma, (\delta(q, \epsilon, z) \neq \emptyset \implies \delta(q, a, z) = \emptyset))$
2.  $\forall q \in Q, \forall z \in \Gamma, \forall a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\}), (|\delta(q, a, z)| \leq 1)$

Ovvero un PDA è libero deterministico sse in ogni configurazione, il PDA ha al massimo una transizione possibile per un dato stato, simbolo di input, e simbolo in cima alla pila e se ha una transizione  $\epsilon$  disponibile allora non ha altri tipi di transizioni.

Quindi un PDA:

- ha al massimo una transizione
- non ha conflitti tra transizioni  $\epsilon$  e transizioni che leggono un simbolo

#### 5.1.2 Definizione di linguaggi liberi deterministici

##### Definition 5.1.2: Linguaggio libero deterministico

Un linguaggio è **libero deterministico** se è accettato per stato finale da un DPDA

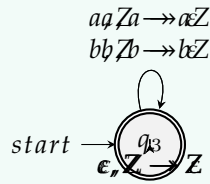
##### Theorem 5.1.1

la classe dei linguaggi liberi deterministici è inclusa propriamente nella classe dei linguaggi liberi :)

##### Example 5.1.1

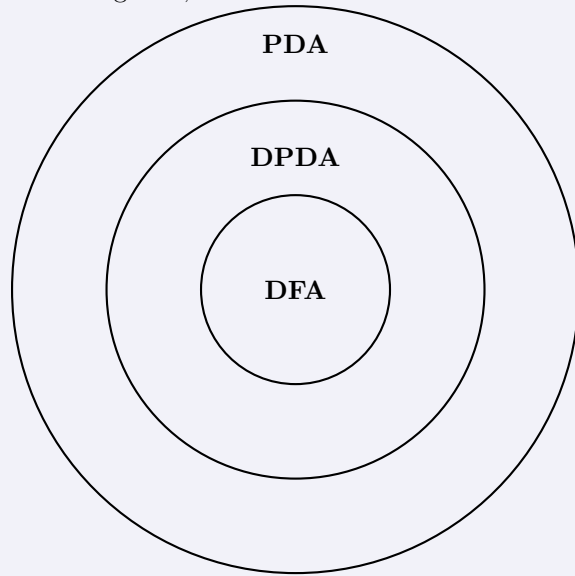
- Sia  $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$  è libero, am si può dimostrare che non esiste un DPDA che lo riconosca, infatti con un DPDA non esiste un modo deterministico per riconoscere quando finisce  $w$  e inizia  $w^R$
- $L_2 = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$  è libero deterministico grazie al segnaposto  $c$  è possibile riconoscere

quando inizia  $w^R$ , si ha infatti:



### Theorem 5.1.2

Se  $L$  è regolare, allora  $\exists DPDA N$  tale che  $L = L[N]$  per stato finale



$a^*b^*$

$wcw^R$

$ww^R$

**dimostrazione:** Se  $L$  è regolare, allora  $\exists DFA M$  tale che  $L = L[M]$ . A partire da  $M$ , posso costruire un DPDA  $N$  si compone come  $M$  senza mai manipolare lo stack, allora si che  $L = L[N]$  per stato finale ☺

### Prefix propriety

Si giunge così al seguente fatto:

#### Claim 5.1.1

Un linguaggio libero deterministico  $L$  è riconosciuto da un DPDA per pila vuota sse  $L$  gode della "prefix propriety", ovvero

$$\nexists x, y \in L : x \text{ è prefisso di } y$$

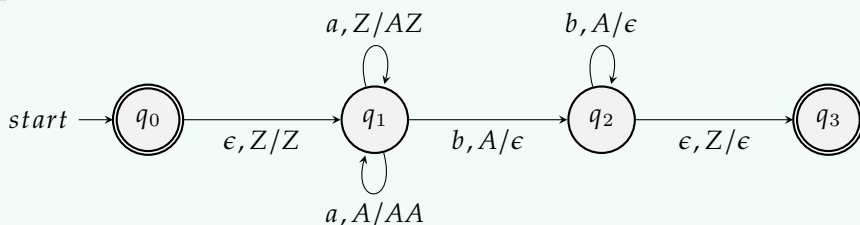
Pertanto si ha che:

- Se  $L$  non gode della prefix propriety non può essere riconosciuto da un DPDA per pila vuota
- Se  $L$  è libero deterministico e gode della prefix propriety, allora può essere riconosciuto da un DPDA per pila vuota
- Se  $L$  è libero deterministico, allora  $L\$ = \{w\$ \mid w \in L\}$  gode della prefix propriety, infatti  $L\$$  può essere riconosciuto da un DPDA per pila vuota.

Dove  $\$ \notin \Sigma$  ovvero  $\$$  non è un simbolo dell'alfabeto di  $L$ , ma grazie ad esso alla fine di ogni linguaggio regolare vale la prefix propriety

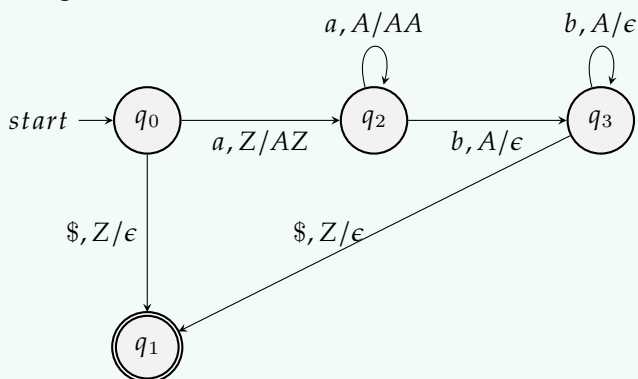
### Example 5.1.2

Sia  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  il seguente linguaggio che non gode della prefix propriety, in quanto  $\epsilon \in L_1$  e  $\epsilon$  è prefisso di  $ab$



Si ha quindi che il seguente linguaggio è riconosciuto da un DPDA *per stato finale* e non *per pila vuota*. Tuttavia il seguente linguaggio con il  $\$ \notin \Sigma$  è riconosciuto da un DPDA *per pila vuota*

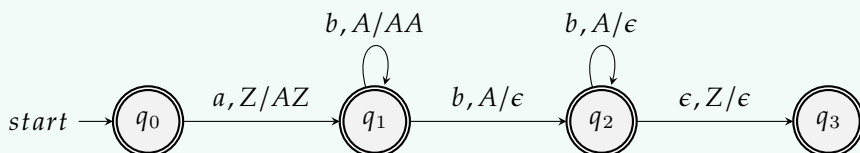
Sia  $L_1 \$$ :



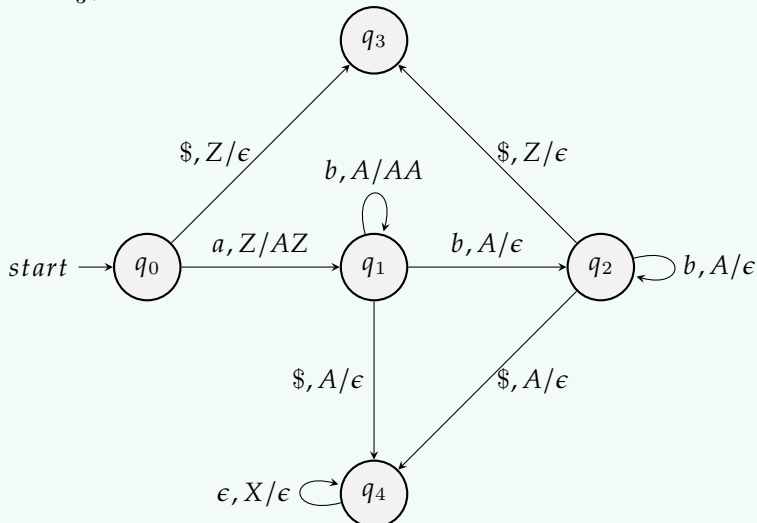
Si verifichi, infatti, come egli venga riconosciuto per pila vuota

### Example 5.1.3

Sia  $L_3 = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$  e dato che  $\epsilon \in L_3$  tale linguaggio non gode della prefix propriety



e sia  $L_3 \$$ :



## non ambiguità dei linguaggi liberi deterministici

### Proposition 5.1.1

Se  $L$  è libero deterministico, ovvero riconosciuto da un *DPDA* per *stato finale*, allora  $L$  è generabile da una **grammatica libera non ambigua**.

Si ha quindi che i **linguaggi liberi deterministici non sono ambigui**

## Proprietà dei linguaggi liberi deterministici

I linguaggi liberi deterministici presentano le seguenti proprietà:

### Proposition 5.1.2 chiusura solo per complementazione

Sia  $L$  un linguaggio libero deterministico, allora questo è chiuso per complementazione, ovvero:

$$(\exists \text{ DPDA } N : L = L(N)) \implies (\exists \text{ DPDA } N' : \bar{L} = L(N')) \quad \text{dove} \quad \bar{L} = \Sigma^* \setminus L$$

**Dimostrazione:** Bisogna rendere totale la  $\delta$  di  $N$ , eventualmente aggiungendo stati non finali, e poi  $N'$  si ottiene da questo  $N$  "aumentato", semplicemente scambiando **finali e non finali** ☹

### Proposition 5.1.3 Non chiusura per intersezione

Un linguaggio libero deterministico non è chiuso per intersezione

### Example 5.1.4

$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$  è libero deterministico

$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 0\}$  è libero deterministico

ma

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  non è libero!

### Proposition 5.1.4 non chiusura per unione

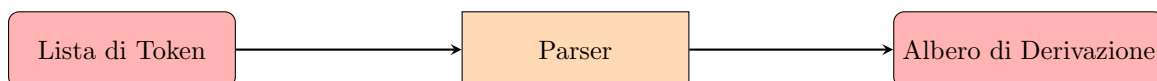
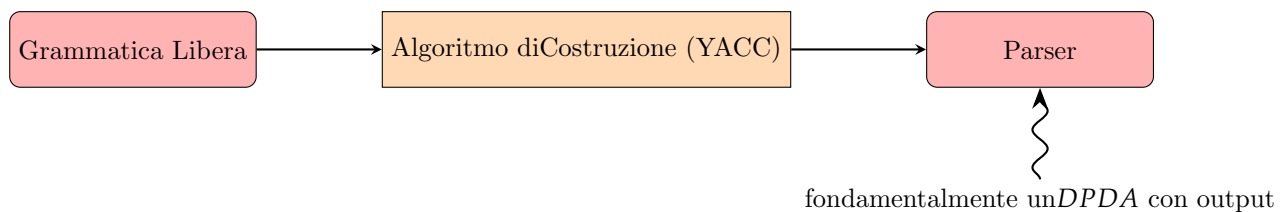
Un linguaggio libero deterministico non è chiuso per unione

**Dimostrazione:** Assumiamo per assurdo che un linguaggio libero deterministico sia chiuso per unione, allora:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

Per questo fatto e la proposizione precedente si è verificato un assurdo ☹

## 5.1.3 Analizzatori sintattici: parser



I parser possono essere:

- **nondeterministici**: se, durante la ricerca di una derivazione, si scopre che una scelta è improduttiva e non porta a riconoscere l'input, **il parser torna indietro** (*backtracking*), disfa parte della derivazione appena costruita e sceglie un'altra produzione, **tornando a leggere parte dell'input**
- **deterministici**: leggono l'input una sola volta ed **ogni loro decisione è definitiva**

entrambi cercano di sfruttare informazioni dall'input per guidare la ricerca della derivazione

### introduzione al top-down parsing

#### Definition 5.1.3

Data  $G = (NT, T, S, R)$  legera, costruiamo il PDA  $M = (T, \{q\}, T \cup NT, \delta, q, S, \emptyset)$ , che riconosce per pila vuota, dove  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \backslash Q \times \Gamma^*$  è definita:

- **espandi**:  $(q, \beta) \in \delta(q, \epsilon, A)$  se  $A \rightarrow \beta \in R$
- **consuma**:  $\forall a \in T ((q, \epsilon) \in \delta(q, a, a))$

Tale che  $L(G) = P[M]$  (riconoscimento per pila vuota)

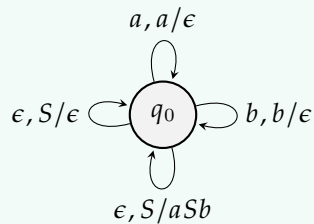
Quindi, grazie alla prima regola se il simbolo in cima alla pila è un non terminale  $A$ , l'automa può espanderlo sostituendolo con la produzione  $\beta$ , come descritto nelle regole  $R$  della grammatica, mentre secondo la regola di consumazione si ha che se il simbolo sulla cima della pila e il simbolo corrente della stringa in input sono entrambi  $a$ , allora l'automa può eliminare quel simbolo dalla pila e procedere nella lettura dell'input.

#### Example 5.1.5

Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$S \rightarrow aSb \mid \epsilon$$

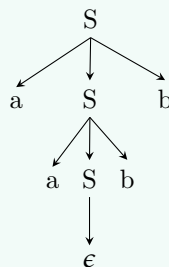
Si ha che  $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$



Si osservi che il seguente automa che riconosce il linguaggio della grammatica  $S$  non è un PDPA. Nella maggior parte delle configurazioni standard di un Pushdown Automaton (PDA) utilizzato per il parsing top-down, la pila viene inizializzata con il simbolo iniziale della grammatica, nel nostro caso, quindi, la serie di passaggi che porteranno a riconoscere il linguaggio sarà:

$$\begin{aligned} (q, aabb, S) &\vdash (q, aabb, aSb) \\ &\vdash (q, abb, Sb) \vdash (q, abb, aSbb) \\ &\vdash (q, bb, Sbb) \vdash (q, bb, bb) \\ &\vdash (q, b, b) \vdash (q, \epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$

che costruisce il seguente albero di derivazione



Si ha, quindi:

- derivazione canonica a sx (leftmost)
- costruzione dell'albero dall'alto in basso

Tuttavia in questo esempio è facile verificare che il parser è nondeterministico, infatti l'automa è un *PDA*, tuttavia questo nondeterminismo può essere risolto scegliendo la produzione in base al simbolo di lettura nell'input (**look-ahead**), ad esempio:

- se leggo  $a$ , espando  $S \rightarrow aSb$
- se leggo  $b$ , espando  $S \rightarrow \epsilon$

input	stack	azione
<u>a</u> abb\$	$S$	leggo $a$ e espando in $aSb$
	$aSb$	consumo
<u>a</u> bb\$	$Sb$	leggo $a$ e espando in $aSb$
	$aSbb$	consumo
<u>b</u> b\$	$Sbb$	leggo $b$ e espando in $\epsilon$
	$bb$	consumo
<u>b</u> \$	$b$	leggo $b$ e espando in $\epsilon$
\$	$\epsilon$	fin

#### Note:

Non tutte le grammatiche sono adatte per il top down-parser

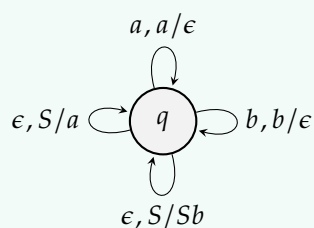
#### Example 5.1.6

Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$S \rightarrow Sb \mid a$$

e  $L(G) = ab^*$  (linguaggio regolare semplice)

L'automa che riconosce il linguaggio è:



Con i seguenti passaggi:

$$(q, ab, S) \vdash (q, ab, Sb) \vdash (q, ab, Sbb) \vdash \dots$$

Qui il determinismo non funziona, infatti se vogliamo espandere quando leggiamo  $a$  in input non possiamo anche consumare, pertanto l'automa espanderà all'infinito

Occorre manipolare la grammatica affinché non vi siano ricorsioni sinistre

## Introduzione al botto-up parsing

#### Claim 5.1.2

Data una grammatica libera  $G = (NT, T, R, S)$ , costruiamo un *PDPA*  $M = (T, \{q\}, T \cup NT \cup \{Z\}, \delta, q, Z, \emptyset)$  che riconosce  $L(G).\$$  dove:

- **shift:**  $\forall a \in T, \left( \forall X \in T \cup NT \cup Z, ((q, aX) \in \delta(q, a, Z)) \right)$

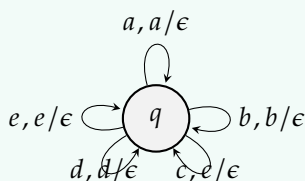
- **reduce:**  $(A \rightarrow \alpha R) \implies (q, A) \in \delta(q, \epsilon, \alpha^R)$   
Con  $\alpha^R$  una generalizzazione dei *PDA* in cui si consuma una stringa sulla pila anziché solo il top
- **accept:**  $(q, \epsilon) \in \delta(q, \$, SZ)$   
Con  $S$  che deve essere alla fine sulla pila e  $\$$  simbolo di fine input

Cominciamo subito con un esempio

### Example 5.1.7

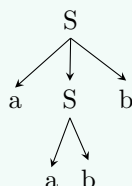
Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$S \rightarrow aSb \mid ab$$



stack	input	azione
Z	aabb\$	shift
Za	abb\$	shift
Zaa	bb\$	shift
Zaab	b\$	reduce $S \rightarrow ab$
ZaS	b\$	shift
ZaSb	\$	reduce $S \rightarrow aSb$
ZS	\$	accept
$\epsilon$	$\epsilon$	

In passaggi,  $S \implies aSb \implies aabb$ . Viene prodotto il seguente albero di derivazione:



Si può verificare come la costruzione dell'input sia:

- **left-to-right** (come leggo l'input)
- **right-derivation**
- 

Tuttavia è facile verificare che c'è molto nondeterminismo:

- **Conflitti: Shift-Reduce**
  1.  $zaab \quad b\$$  (può fare shift)
  2.  $zaabb \quad \$$  (ma è un percorso infruttuoso)
- **Conflitti: Reduce-Reduce**  
Più riduzioni possibili (non ci sono in quest'esempio, ma con grammatiche più complesse è possibile)



Per ottenere un DPDA, serve introdurre informazioni aggiuntive per risolvere i conflitti:

- **Più stati:** (o strutture particolari di supporto alle decisioni, come un DFA dei prefissi validi).
- **Look-ahead:** (guardare l'input in avanti).

Vediamo un esempio più corposo relativo alle grammatiche delle espressioni aritmetiche:

### Example 5.1.8

Sia  $G$  tale grammatica:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T + E \mid T \\ T &\rightarrow T \times A \mid A \\ A &\rightarrow a \mid b \mid (E) \end{aligned}$$

Si ha:

G	M
(R1) $E \rightarrow T + E$	$t_0 : \delta(q, a, X) = (q, aX) \forall aX$ SHIFT
(R2) $E \rightarrow T$	$t_1 : \delta(q, \epsilon, E + T) = (q, E)$
(R3) $T \rightarrow T * A$	$t_2 : \delta(q, \epsilon, T) = (q, E)$
(R4) $T \rightarrow A$	$t_3 : \delta(q, \epsilon, A * T) = (q, T)$ REDUCE
(R5) $A \rightarrow (E)$	$t_4 : \delta(q, \epsilon, A) = (q, T)$
(R6) $A \rightarrow a$	$t_5 : \delta(q, \epsilon, (E)) = (q, A)$
(R7) $A \rightarrow b$	$t_6 : \delta(q, \epsilon, a) = (q, A)$
	$t_7 : \delta(q, \epsilon, b) = (q, A)$
	$t_8 : \delta(q, \$, EZ) = (q, \epsilon)$ ACCEPT

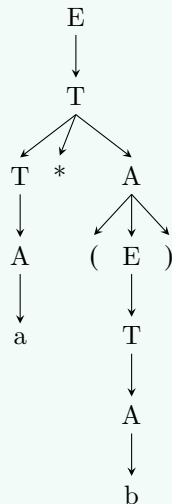
La cui sequenza è:

$$a * (b) \Leftarrow A * (b) \Leftarrow T * (b) \Leftarrow T * (A) \Leftarrow T * (T) \Leftarrow T * (E) \Leftarrow T * A \Leftarrow T \Leftarrow E$$

La cui pila-stack-input è:

Stack	Input	Action
Z	$a * (b)\$$	shift
Za	$*(b)\$$	reduce $R_6$
ZA	$*(b)\$$	reduce $R_4$
ZT	$*(b)\$$	shift
ZT*	$(b)\$$	shift
ZT * (	$b)\$$	shift
ZT * (b	)\$	shift
ZT * (b)	\$	reduce $R_7$
ZT * (A	)\$	reduce $R_4$
ZT * (T	)\$	reduce $R_2$
ZT * (E	)\$	shift
ZT * (E)	\$	reduce $R_5$
ZT * A	\$	reduce $R_3$
ZT	\$	reduce $R_2$
ZE	\$	accept
$\epsilon$	$\epsilon$	

Il cui albero di derivazione:



L'automa è non deterministico perché:

1. Chi ha precedenza tra *shift* e *reduce*?

**Ad esempio:**

- 1)  $Za * (b)\$$  *shift*
- 2)  $Za * (b)\$$  non buono! Qui *reduce* è in conflitto con *shift*!

**Altro esempio:**

- (a)  $ZT * (b)\$$  *reduce*  $R_2$
- (b)  $ZE * (b)\$$  non buono! Qui *shift* è in conflitto con *reduce*!

2. Chi ha precedenza tra due diverse *reduce*?

**Ad esempio:**

- (a)  $ZT * A \$$  *reduce*  $R_3$
- (b)  $ZT \$$
- (c)  $ZT * T \$$  se faccio, *reduce*  $R_4$   
Qui *reduce*  $R_3$  è in conflitto con *reduce*  $R_4$ !

È buona norma scegliere in modo tale che ciò che si trova nella pila sia un prefisso (a rovescio) di una parte destra di una produzione della grammatica.

**Ad esempio:**

- (a)  $Za$
- (b)  $ZA$  con la “norma” produco chi coincide con ciò che è un prefisso di una parte destra che comincia con  $A$ .

**problema con le pruzioni  $\epsilon$**

Sia la produzione  $S \rightarrow \epsilon$

TODO! NON HO CAPITO

## 5.2 Semplificazione delle grammatiche

Per avere **PDA** efficienti e con minor non determinismo è necessario semplificare le grammatiche. Ad esempio:

- Eliminare le produzioni  $\epsilon$  (del tipo  $A \rightarrow \epsilon$ ) inadatte al bottom up parsing
- Eliminare le **produzione unitarie** (del tipo  $A \rightarrow B$  che possono creare dei cicli  $A \Rightarrow {}^+A$ )
- Eliminare **simboli inutili**, cioè quei terminali e non terminali che non sono raggiungibili/generabili a partire dal simbolo iniziale  $S$   
es. gli stati d'errore
- Eliminare la **ricorsione sinistra** (del tipo  $A \rightarrow A\alpha$ ), perché inadatte al top - down parsing
- **fattorizzare** le grammatiche, per ottenere grammatiche con meno non determinismo nel top-down parsing

### 5.2.1 Eliminare le produzioni $\epsilon$

Per fare ciò si usi un algoritmo che ha:

- in **input**: una  $G$  libera con produzione  $\epsilon$
- in **output**: una  $G'$  libera senza produzione  $\epsilon$  tale che  $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

#### Note:

Se  $\epsilon \in L(G)$  e si vuole ottenere una  $G''$  t.c.  $L(G) = L(G'')$ , basta considerare  $G' = (NT, T, S, R')$  e definire  $G'' = G' \cup \{S' \rightarrow \epsilon | S\}$  t.c.

$$G'' = (NT \cup \{S'\}, T, S', R' \cup \{S' \rightarrow \epsilon | S\})$$

#### simboli annullabili

Per l'algoritmo occorre innanzi tutto definire i **simboli annullabili**

##### Definition 5.2.1: simboli annullabili

I **simboli annullabili** sono quei non terminali tale che possono risciversi in uno o più passi in  $\epsilon$ , ovvero:

$$N(G) = \{A \in NT | A \Rightarrow {}^+\epsilon\}$$

Dove  $N(G)$  è l'insieme dei simboli annullabili e viene calcolato induttivamente come segue:

- $N_0(G) = \{A \in NT | A \rightarrow \epsilon\}$ , questo è il caso in cui un non terminale  $A$  viene riscritto direttamente in  $\epsilon$  tramite una produzione
- $N_{i+1}(G) = N_i(G) \cup \{B \in NT | B \rightarrow c_1, \dots, c_k \in R \text{ e } c_1, \dots, c_k \in N_i(G)\}$  questo è il caso in cui un non terminale  $B$  possa essere ricondotto a  $\epsilon$  in più passi

Ovviamente  $\exists i_c$  tale che  $N_{i_c}(G) = N_{i_c+1}(G)$ , cioè che ad un certo punto non aggiungo nessun altro  $B$  all'insieme ( $NT$  è finito)

#### Theorem 5.2.1

L'insieme  $N(G) = N_{i_c}(G)$  è esattamente l'insieme di tutti i simboli annullabili

#### algoritmo per il calcolo della grammatica

Una volta calcolato  $N(G)$  per  $G = (N, T, S, R)$ , costruiamo la grammatica  $G' = (N, T, S, R')$  dove per ogni produzione  $A \rightarrow \alpha \in R$  con  $\epsilon \notin \alpha$ , in cui occorrono simboli annullabili  $Z_1, \dots, Z_k$ , mettiamo in  $R'$  tutte le produzioni del tipo  $A \rightarrow \alpha'$  dove  $\alpha'$  si ottiene da  $\alpha$  cancellando tutti i possibili sottoinsiemi di  $Z_1, \dots, Z_k$  (incluso  $\emptyset$ ), ad eccezione del caso in cui  $\alpha'$  risulta  $\epsilon$ , in altre parole si creano tutte le possibili combinazioni di  $\alpha$  eliminando uno o più di questi simboli  $Z_1, \dots, Z_n$ :

- in  $G'$  non mettiamo produzioni  $A \rightarrow \epsilon \in R$ ,
- in  $G'$  non introduciamo mai produzioni del tipo  $A \rightarrow \epsilon$ .

### Theorem 5.2.2

Data una grammatica libera  $G$ , la grammatica  $G'$  determinata dall'algoritmo sopra non ha  $\epsilon$ -produzioni, e  $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

### Example 5.2.1

Sia  $G$  una grammatica tale che:

$$G = \begin{cases} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow aAA \mid \epsilon \\ B \rightarrow bBB \mid \epsilon \end{cases} \quad N_0(G) = \{A, B\} \text{ e } N_1(G) = \{A, B, S\} = N(G)$$

Quindi tutti sono simboli annullabili

Adesso procedo con l'algoritmo, procedo per ogni simbolo annullabili

- $S \rightarrow AB$ : secondo l'algoritmo devo cancellare in tutti i modi possibili i simboli non terminali che compaiono nella parte destra della produzione. In questo caso dobbiamo considerare 4 casi:
  - $\emptyset \implies S \rightarrow AB$ , rinuncio a cancellare
  - $\{B\} \implies S \rightarrow A$ , se cancello  $B$  rimane  $A$  nella parte destra
  - $\{A\} \implies S \rightarrow B$
  - $\{A, B\} \implies S \rightarrow \epsilon$  dato che non devo mai introdurre produzioni del tipo  $A \rightarrow \epsilon$  **non posso cancellare  $A$  e  $B$**

Unisco i vari sottoinsiemi e si ha:

$$S \rightarrow AB|B|A$$

- $A \rightarrow aAA \in R$ . dobbiamo considerare 4 casi:

- $\emptyset \implies A \rightarrow aAA$
- $\{A\} \implies A \rightarrow aA$
- $\{A, A\} \implies A \rightarrow a$

Quindi si ha:

$$A \rightarrow aAA|aA|a$$

- si ha la stessa cosa con  $B$ , quindi cancellare che verrà trasformato in

$$B \rightarrow bBB|bB|b$$

Così la nuova grammatica sarà:

$$G' = \begin{cases} S \rightarrow AB|A|B \\ A \rightarrow aAA|aA|a \\ B \rightarrow bBB|bB|b \end{cases}$$

## 5.2.2 Eliminazione delle produzioni unitarie

### Definition 5.2.2: Produzione unitaria

Una produzione si dice **unitaria** quando  $A \rightarrow B$  si ha che  $A, B \in NT$

## coppie unitarie

Per eliminare queste produzioni unitarie si deve però calcolare quelle che sono definite le "coppie unitarie"

### Definition 5.2.3: Coppia unitaria

Una coppia  $(A, B)$  si dice **unitaria** quando  $A \Rightarrow^* B$  (quindi quando  $A$  può riscriversi in 0 o più passi nel non terminale  $B$ ) usando solo produzioni unitarie.

Vi è qui ripostata la definizione induttiva:

- $U_0(G) = \{(A, A) | A \in NT\}$ , quindi ogni non terminale fa coppia con se stesso
- $U_{i+1}(G) = U_i(G) \cup \{(A, C) | (A, B) \in U_i(G) \text{ e } B \rightarrow C \in R, \text{ quindi } \text{è l'insieme delle coppie al passo } i \text{ unito alle coppie alle coppie } (A, C) \text{ tali che } (A, B) \text{ sono coppie presenti nell'insieme dell'iterazione precedente e } B \rightarrow C \in R\}$

Anche in questo caso  $\exists i_c$  t.c.  $U_{i_c}(G) = U_{i_c+1}(G)$  dato che  $NT$  è finito. Pertanto per definizione si ha che  $U(G) = U_{i_c}(G)$ , detto insieme di tutte le coppie unitarie

### algoritmo per il calcolo dell'eliminazione delle produzioni unitarie

Data  $G = (N, T, R, S)$  libera, si definisce una  $G' = (N, T, R', S)$  dove, per ogni  $(A, B) \in U(G)$ ,  $R'$  contiene tutte le produzioni  $A \rightarrow \alpha$ , dove  $B \rightarrow \alpha \in R$  e non è unitaria

#### Note:

Poiché, per ogni  $A \in N$ , la coppia  $(A, A) \in U(G)$ ,  $R'$  contiene tutte le produzioni non unitarie di  $R$  e in aggiunta un po' di altre.

### Theorem 5.2.3

Sia  $G = (NT, T, R, S)$  libera e sia  $U(G)$  l'insieme delle sue coppie unitarie. Sia  $G' = (NT, T, R', S)$  la grammatica ottenuta dall'algoritmo  $G'$  non ha produzioni unitarie e  $L(G) = L(G')$

Esempietto:

### Example 5.2.2

Prediamo con esempio la grammatica non ambigua  $E$  delle espressioni aritmetiche:

$$E = \begin{cases} E \rightarrow E + T \\ T \rightarrow T * A \\ A \rightarrow a | b | (E) \end{cases}$$

Si noti subito che ha 2 produzioni unitarie:  $E \rightarrow T$  e  $T \rightarrow A$ . Iniziamo a calcolare l'insieme delle coppie unitarie:

- $U_0(G) = \{(E, E), (T, T), (A, A)\}$  e grazie al cuzzo
- $U_1(G) = U_0(G) \cup \{(E, T), (T, A)\}$
- $U_2(G) = U_1(G) \cup \{(E, A)\} = U_3(G) = U(G)$  dato che da  $E$  si arriva ad  $T$  e si arriva a  $A$

Per calcolare la grammatica  $G'$  devo prendere tutte le produzioni non unitarie della grammatica originale, ovvero:

$$G' = \begin{cases} E \rightarrow E + T \\ T \rightarrow T * A \\ A \rightarrow a | b | (E) \end{cases}$$

In aggiunta:

$$\begin{cases} E \rightarrow E + T & \text{perché } (E, T) \in U_1(G) \\ T \rightarrow a|b|(E) & \text{perché } (T, A) \in U_1(G) \\ E \rightarrow a|b|(E) & \text{perché } (E, A) \in U_2(G) \end{cases}$$

Pertanto  $G'$  sarà:

$$G' = \begin{cases} E \rightarrow E + T|T \times A|a|b|(E) \\ T \rightarrow T \times A|a|b|(E) \\ A \rightarrow a|b|(E) \end{cases}$$

Sia ha che non contiene produzioni unitarie ed è equivalente a  $G$

### 5.2.3 Rimuovere i simboli inutili

#### Definition 5.2.4: Simboli generatori, raggiungibili e utili

Un simbolo  $X \in T \cup NT$  è

- Un **generatore**  $\iff \exists w \in T^*$  con  $x \implies *w$

Quindi un generatore è o un terminale (un simbolo può risciversi in se stesso) oppure un non terminale che in uno o più passi. è definito induttivamente come segue:

- $G_0(G) = T$  se  $a \in T, a \implies *a$  (quindi tutti i terminali sono generatori)
- $G_{i+1}(G) = G_i(G) \cup \{B \in NT | B \rightarrow C_1 \dots C_k \in R \wedge C_1, \dots, C_k \in G_i(G)\}$

- Un **raggiungibile**  $\iff (\exists \alpha, \beta \in (T \cup NT)^*. (S \implies * \alpha X \beta))$ . Sono definiti induttivamente:

- $R_0(G) = \{S\}$
- $R_{i+1}(G) = R_i(G) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \forall B \in R_i(G), B \rightarrow x_1, \dots, x_k \in R$

- **utile** sse è sia un generatore e sia raggiungibile, ovvero se  $S \implies * \alpha X \beta \implies *x \in L(G)$  cioè  $X$  compare in almeno una derivazione di una stringa  $z \in L(G)$

#### algoritmo per l'eliminazione dei simboli inutili

1. Prima di tutto elimino tutti i non-generatori (e tutte le produzioni che usano almeno uno di questi)
2. Poi dalla nuova grammatica, elimino tutti i non - raggiungibili (E tutte le produzioni che li usano)

#### Theorem 5.2.4

Sia  $G = (NT, T, R, S)$  una grammatica libera t.c.  $L(G) \neq \emptyset$

- Sia  $G_1$  la grammatica che si ottiene da  $G$  eliminando tutti i simboli che non appartengono a  $G(G)$  (insieme dei generatori), e tutte le produzioni che fanno uso di almeno uno di tali simboli
- Sia  $G_2$  la grammatica che si ottiene da  $G_1$  eliminando tutti i simboli che non appartengono a  $R(G)$ , e tutte le produzioni che fanno uso di almeno uno di tali simboli

Allora  $G_2$  non ha simboli inutili e  $L(G_2) = L(G)$

**Dimostrazione:** La dimostrazione si divide nelle due parti dell'enunciato:

- $L(G_2) \subseteq L(G)$  è ovvio, dato che  $G_2$  contiene meno produzioni di  $G$
- $L(G) \subseteq L(G_2)$ : dobbiamo dimostrare che  $S \implies *_G w$  (ovvero se  $S$  deriva  $W$  usando le produzioni di  $w$ ) allora  $S \implies *_{G_2} w$   
Si ha che ogni simbolo usato in  $S \implies *_G w$  è, ovviamente, sia raggiungibile sia generatore

Quindi quelle derivazioni è anche una derivazione per  $G_2$   
Q.e.d.



**Note:**

L'ordine dei due generatori è importante!

- prima elimino i non-generatori
- poi i non - raggiungibili

ma se inverto l'ordine, allora può capitare che non elimino tutti i simboli inutili

Esempietto di eliminazione di tutti quei simboli non utili (inutili)

**Example 5.2.3**

Si parta da questa grammatica:

$$G = \begin{cases} S \rightarrow AB|a \\ B \rightarrow b \end{cases}$$

Poiché  $a \Rightarrow *a, b \Rightarrow *b, S \Rightarrow *a, B \Rightarrow *b$  si ha che i generatori saranno  $\{S, B, a, b\}$  (dove manca  $A$ ). Possiamo così eliminare tutte le produzioni che includono  $A$ :

$$G' = \begin{cases} S \rightarrow a \\ B \rightarrow b \end{cases}$$

Adesso posso eliminare tutti i non raggiungibili da  $S$ , che in questo caso l'unico è solo  $B$ . Si ha che:

$$G'' = S \rightarrow a$$

Si ha che  $G''$  è equivalente a  $G$ , ma non contiene simboli utili

Esempio secondo:

**Example 5.2.4**

$$G = \begin{cases} S \rightarrow aC \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow bB \\ C \rightarrow b \mid AC \\ D \rightarrow a \mid aS \end{cases}$$

Poiché  $G(G) = \{S, a, C, b, A, D\}$  e solo  $B$  non è generatore, possiamo eliminare tutte le produzioni che includono  $B$ . Si ha quindi:

$$G_1 = \begin{cases} S \rightarrow aC \\ A \rightarrow a \\ C \rightarrow b \mid AC \\ D \rightarrow a \mid aS \end{cases}$$

A questo punto, notiamo che solo  $D$  non è raggiungibile, quindi possiamo eliminarlo. Si ottiene:

$$G_2 = \begin{cases} S \rightarrow aC \\ A \rightarrow a \\ C \rightarrow b \mid AC \end{cases}$$

$G_2$  è la grammatica semplificata, equivalente a  $G$ , senza simboli inutili.

In questo esempio si ha che  $L(G_2) = \{ab, aab, aaab, \dots\} = a^+b$

Si osservi però che è possibile trovare una grammatica più semplice per il linguaggio  $a^+b$ :

$$S \rightarrow aS|ab$$

#### 5.2.4 mettere insieme le cose

Se, nel semplificare la grammatica  $G$ , seguiamo questo ordine:

- Eliminare le  $\epsilon$ -produzioni
- Eliminare le produzioni unitarie (ovvero i cicli)
- eliminare i simboli inutili

allora la grammatica risultante è garantita non avere nè  $\epsilon$ -produzioni, ne produzioni unitarie, ne simboli inutili ed è equivalente a quella di partenza.

##### Note:

Si presti attenzione all'ordine poiché alcune delle costruzioni possono interagire tra di loro durante la fase di eliminazione delle  $\epsilon$ -produzioni, potremmo introdurre produzioni unitarie, pertanto le  $\epsilon$ -produzioni vanno eliminate prima della fase di eliminazione delle produzioni unitarie

Esempietto:

#### Example 5.2.5

$$G = \begin{cases} S \rightarrow aAa \mid aa \\ A \rightarrow C \\ C \rightarrow S \mid \epsilon \end{cases}$$

##### 1. Togliere le $\epsilon$ -produzioni

$$N(G) = \{S, C, A\} \Rightarrow G' = \begin{cases} S \rightarrow aAa \mid aa \\ A \rightarrow C \\ C \rightarrow S \end{cases}$$

##### 2. Togliere le produzioni unitarie

$$U(G') = \{(A, A), (C, C), (S, S), (A, C), (C, S), (A, S)\}$$

$$G'' = \begin{cases} S \rightarrow aAa \mid aa & \text{perché } (S, S) \in U(G') \\ C \rightarrow aAa \mid aa & \text{perché } (C, S) \in U(G') \\ A \rightarrow aAa \mid aa & \text{perché } (A, S) \in U(G') \end{cases}$$

##### 3. Rimuovere i simboli inutili

$$G(G'') = \{S, a, A, C\} \quad \text{tutti i generatori}$$

$$R(G'') = \{S, a, A\} \quad \text{ma non } C$$

$$G''' = \begin{cases} S \rightarrow aAa \mid aa \\ A \rightarrow aAa \mid aa \end{cases}$$



In questo esempio si ha che  $L(G''') = \{aa, aaaa, \dots\} = (aa)^+$

Si osservi però che è possibile trovare una grammatica più semplice per il linguaggio  $(aa)^+$ :

$$S \rightarrow aSa|aa$$

o anche

$$S \rightarrow aaS|aa$$

### 5.2.5 forme normali

le **forme normali** sono particolari configurazioni di rappresentazione di un linguaggio formale o di un'espressione logica che rispettano determinate regole e strutture. Ne studieremo di due tipi:

- **Chomsky**: Una grammatica è in forma normale di Chomsky se ogni produzione ha la forma  $A \rightarrow BC$  o  $A \rightarrow a$ , dove  $A, B, C \in NT$  e  $a \in T$ . Ogni produzione deriva quindi o una coppia di variabili o un singolo terminale. Questa forma è utile, per esempio, negli algoritmi di parsing
- **Greibach**: Una grammatica è in forma normale di Greibach se ogni produzione ha la forma  $A \rightarrow a\alpha$ , dove  $A \in NT$ ,  $a \in T$  e  $\alpha$  è (eventualmente) una stringa di variabili. La GNF è usata in particolare per costruire parser discendenti

#### Forma normale di Chomsky

##### Definition 5.2.5: Forma normale di Chomsky

Una grammatica si dice in **forma normale di Chomsky** se sono nella forma:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow BC \\ A &\rightarrow a \end{aligned}$$

Dove  $\epsilon$  è trattato a parte  $S \rightarrow \epsilon|BC$  e  $S$  non compare mai a destra in una produzione

##### Note:

se  $G$  è libera in forma normale di Chomsky, allora:

- non ha  $\epsilon$ -produzioni
- non ha produzioni unitarie

##### Note:

ogni grammatica libera  $G$  può essere trasformata in una equivalente  $G'$  in forma normale di Chomsky

#### Forma normale di Greibach

##### Definition 5.2.6: forma normale di Greibach

Una grammatica si dice in **forma normale di Greibach** se sono nella forma:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBC \\ A &\rightarrow aB \\ A &\rightarrow a \end{aligned}$$

Dove  $\epsilon$  è trattato a parte  $S \rightarrow \epsilon|BC$  e  $S$  non compare mai a destra in una produzione

##### Note:

se  $G$  è libera in forma normale di Greibach, allora:

- non ha  $\epsilon$ -produzioni
- non ha produzioni unitarie

- non è ricorsiva a sinistra
- ogni produzione applicata in una derivazione allunga il prefisso di terminali  $\implies$  il parser costruito a partire dalla forma normale di Greibach sono meno non deterministici

**Note:**

ogni grammatica libera  $G$  può essere trasformata in una equivalente  $G'$  in forma normale di Greibach

### 5.2.6 Eliminare la ricorsione a sinistra

L'eliminazione della ricorsione a sinistra è un problema tipico dei parser top-down

**Definition 5.2.7: produzione ricorsiva a sinistra**

Si definisce **una produzione ricorsiva a sinistra** una produzione del tipo

$$A \rightarrow A\alpha \in R$$

**Definition 5.2.8: grammatica ricorsiva a sinistra**

Si definisce una **grammatica ricorsiva a sinistra** una grammatica  $G$  del tipo:

$$A \implies {}^+A\alpha \text{ per qualche } A \in NT, \alpha \in (T \cup NT)^*$$

Una tipica ricorsione a sinistra è:

$$A \rightarrow A_{\alpha_1} | \dots | A_{\alpha_n} | \beta_1 | \dots | \beta_n$$

Dove le stringhe  $\beta_i$  non cominciano per  $A$ . Queste produzioni possono essere rimpiazzate da

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta_1 A' | \dots | \beta_m A' \\ A' &\rightarrow \alpha_1 A' | \dots | \alpha_n A' | \epsilon \end{aligned}$$

Se nella grammatica originale avviamo la derivazione

$$A \implies A\alpha_{i_1} \implies A\alpha_{i_2}\alpha_{i_1} \implies \dots \implies A\alpha_{i_k}\dots\alpha_{i_2}\alpha_{i_1} \implies \beta_i\alpha_{i_k}\dots\alpha_{i_2}\alpha_{i_1}$$

Con la nuova grammatica si ha:

$$A \implies \beta_i A' \implies \beta_i \alpha_{i_k} A' \implies \dots \implies \beta_i \alpha_{i_k} \dots \alpha_{i_2} A' \implies \beta_i \alpha_{i_k} \dots \alpha_{i_1} A' \implies \beta_i \alpha_{i_k} \dots \alpha_{i_1}$$

Esempi concreti:

**Example 5.2.6**

$$\begin{aligned} A &\rightarrow Aa|b \\ &\implies \\ A &\rightarrow bA' \\ A' &\rightarrow aA'|\epsilon \end{aligned}$$

Poi

$$\begin{aligned} A &\rightarrow Ab|Ac|d \\ &\implies \\ A &\rightarrow dA' \\ A' &\rightarrow bA'|cA'|\epsilon \end{aligned}$$

**Note:**

Se  $G = [A \rightarrow Aa]$ , non si può applicare l'algoritmo perché mancano le produzioni di base da cui partire ( $A \rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_m$ ). Infatti,  $L(G) = \emptyset$  e la grammatica corrispondente non ha produzioni

### 5.2.7 Ricorsione sx non-immediata

Consideriamo

$$G = \begin{cases} S \rightarrow Ba|b \\ B \rightarrow Bc|Sc|d \end{cases}$$

In  $G$  c'è ricorsione sx immediata ( $B \rightarrow Bc$ ) ma anche non immediata ( $S \Rightarrow Ba \Rightarrow Sca$ )

**algoritmo per il calcolo della ricorsione non immediata**

---

**Algorithm 4:** ricorsione non immediata

---

**Input:** una  $G$  libera senza  $\epsilon$ -prod, senza produzioni unitarie, ma con ricorsione sc non immediata  
**Output:** una  $G$  libera senza  $\epsilon$ -prod, senza produzioni unitarie e senza alcuna ricorsione a sx

- 1 Let  $NT = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  in un ordine fissato;
- 2 **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**
- 3     **for**  $j = 1$  **to**  $i - 1$  **do**
- 4         Sostituisci ogni produzione della forma  $A_i \rightarrow A_j\alpha$  con le produzioni  $A_i \rightarrow \beta_1\alpha | \dots | \beta_k\alpha$ , dove  
 $A_j \rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_k$  sono produzioni correnti per  $A_j$ ;
- 5         Elimina la ricorsione immediata su  $A_i$ ;

---

- L'obiettivo dell'algoritmo è che, alla fine, ogni produzione del tipo  $A_i \rightarrow A_k\alpha$  sia tale che  $i < k$ , in modo che sia impossibile avere ricorsione sx non immediata.
- Quando  $i = 1$ , l'unica cosa che viene fatta è l'istruzione 2), che rimuove l'eventuale ricorsione sx immediata. Al termine,  $A_1 \rightarrow A_k\alpha$  avremo  $i < k$ .
- Alla  $i$ -esima iterazione del **for** esterno, tutti i non-terminali  $A_m$  con  $m < i$  hanno produzioni con la proprietà desiderata.  
Ora il ciclo **for** interno (istruzione 1) aumenta progressivamente l'indice dei non-terminali in prima posizione; finché, al termine del ciclo ( $j = i - 1$ ), avremo che ogni produzione  $A_i \rightarrow A_k\alpha$  è tale che  $i < k$ .  
Ora l'istruzione 2) rimuove l'eventuale ricorsione sx immediata da  $A_i$ , sicché ogni produzione  $A_i \rightarrow A_k\alpha$  è tale che  $i < k$ .
- Quindi al termine dell'algoritmo, avremo che ogni produzione  $A_i \rightarrow A_k\alpha$  è tale che  $i < k$ , garantendo l'impossibilità di creare ricorsione sx non immediata.

#### Example 5.2.7

Come esempio si consideri la grammatica di prima, ovvero

$$G = \begin{cases} S \rightarrow Ba|b \\ B \rightarrow Bc|Sc|d \end{cases}$$

Si segua passo-passo l'algoritmo j3:

- **i=1** (ovvero  $S$ ): il ciclo interno non viene eseguito e, siccome non c'è ricorsione immediata per  $S$ , non viene fatto nulla
- **i=2** (cioè  $A_i = B$ ): il ciclo interno ( $j$  da 1 a 1) si esegue solo per  $A_j = A_1 = S$ .  
Allora la produzione  $B \rightarrow Sc$  viene rimpiazzata con:

$$B \rightarrow Bac|bc$$

Ora le produzioni complessive per  $B$  sono :

$$B \rightarrow Bc|Bac|bc|d$$

Dalla quale dobbiamo eliminare la ricorsione immediata, il risultato è:

$$\begin{aligned} B &\rightarrow bcB'|sB' \\ B' &\rightarrow cB'|acB'|\epsilon \end{aligned}$$

Pertanto la gigagrammatica risultante è:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ba|B \\ B &\rightarrow bcB'|sB' \\ B' &\rightarrow cB'|acB'|\epsilon \end{aligned}$$

### 5.2.8 Fattorizzazione a sinistra

Si prendi in esempio la seguente grammatica:

$$A \rightarrow aBbC|aBd$$

Se, in un top-down parsing, sulla pila ha  $A$  e leggo in input  $a$ , non sono in grado di determinare quale produzione scegliere tipico del nondeterminismo, pertanto occorre **raccogliere la parte comune (aB) alle 2 produzioni e introduco un nuovo nonterminale per rappresentare il resto delle produzioni**, quindi:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBA' \\ A' &\rightarrow bC|d \end{aligned}$$

**algoritmo per il calcolo della fattorizzazione**

---

**Algorithm 5:** Fattorizzazione LU

---

**Input:** Grammatica  $G$  non fattorizzata

**Output:** Grammatica  $G'$  fattorizzata

1 Let  $N$  be a new variable;

2  $N \leftarrow NT$ ;

3 **while** è possibile modificare  $N$  o all'insieme delle produzioni **do**

4   **foreach**  $A \in N$  **do**

5     Sia  $\alpha$  il prefisso più lungo comune alle parti destre di alcune produzioni di  $A$ ;

6     **if**  $\alpha \neq \epsilon$  **then**

7       Sia  $A$  un nuovo non terminale ;

8        $N \leftarrow N \cup \{A\}$ ;

9       rimpiazza tutte le produzioni per  $A$  del tipo

$$A \rightarrow \alpha\beta_1|\dots|\alpha\beta_k|\gamma_1|\dots|\gamma_h$$

con le produzioni:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha A'|\gamma_1|\dots|\gamma_h \\ A' &\rightarrow \beta_1|\dots|\beta_k \end{aligned}$$

---

#### Example 5.2.8

Riporto una grammatica da fattorizzare:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T|T + E|T - E \\ T &\rightarrow A|A * T \\ A &\rightarrow a|b|(E) \end{aligned}$$

Dove sia  $E$  che  $T$  si possono fattorizzare, perciò diventa:

$$\begin{aligned}E &\rightarrow TE' \\ E' &\rightarrow \epsilon \mid + E \mid - E \\ T &\rightarrow AT' \mid \\ T' &\rightarrow \epsilon \mid * T \\ A &\rightarrow a \mid b \mid (E)\end{aligned}$$

## Chapter 6

# Parser Top-Down

Un **parser Top-Down** è un tipo di analizzatore sintattico per analizzare strutture gerarchiche, come le frasi di una lingua o la struttura di un codice. **Funziona esplorando e costruendo l'albero sintattico partendo dalla radice e procedendo verso le foglie**, quindi "dall'alto verso il basso"

Adesso presentiamo un primo esempio di parser Top-Down **nondeterministico** che usa implicitamente una pila per gestire le chiamate ricorsive

### 6.1 Parser a discesa ricorsiva

Data una grammatica libera  $G = (NT, T, S, R), \forall A \in NT$  con produzioni:

$$A \rightarrow X_1^1 \dots X_{n_1}^1 \mid \dots \mid X_k^1 \dots X_{n_k}^k$$

Definisce la funzione

---

**Algorithm 6:**  $A()$

---

```
1 scegli non deterministicamente  $h$  tra 1 e  $k$ , ovvero una produzione  $X_k^h \dots X_{n_h}^h$ ;  
2 for  $i = 1$  to  $n_h$  do  
3   if  $X_i^h \in NT$  then  
4     Nothing();  
5   else if  $X_i^h = \text{simbolo corrente dell'input}$  then  
6     avanza di un simbolo nell'input;  
7   else  
8     Fail(); // backtracking! si torna alla riga 2 e si sceglie un'altra produzione  
9   return;
```

---

Si comincia invocando la funzione per il simbolo iniziale  $S$

#### Example 6.1.1

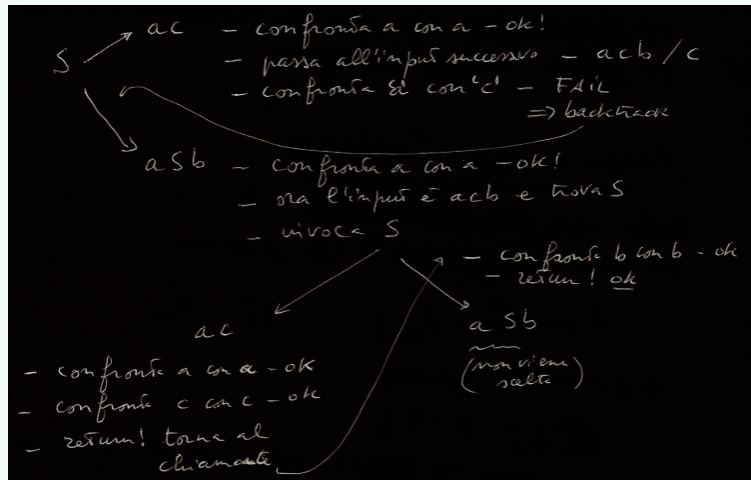
Sia  $G$  la grammatica:

$$S \rightarrow ac|aSb$$

Col linguaggio:

$$L = \{a^{n+1}cb^n | n \geq 0\}$$

e sia  $aacb$  un input. Si ha



input      Stack delle chiamate

<u>a</u> a c b	S
	<u>a</u> c
<u>a</u> c b	c fail
<u>a</u> a c b	S
	<u>a</u> S b
<u>a</u> c b	S b
	<u>a</u> c b
<u>c</u> b	<u>c</u> b
<u>b</u>	b
	<u>ok</u>

Tuttavia il parser a discesa ricorsiva è **parecchio inefficiente a causa della sua natura nondeterminista**, vi è infatti la necessità nel peggiore dei casi di esplorare tutte le alternative

### Theorem 6.1.1

Sia  $w$  la lunghezza della stringa in input, e sia  $b$  il massimo numero di produzioni per uno stesso nonterminale, allora la complessità computazionale di un parser a discesa ricorsiva nel caso peggiore è:

$$O(b^{|w|})$$

Per ovviare a questo problema di inefficienza dobbiamo guidare la scelta della produzione per creare un parser top-down deterministico. Per farlo occorrono delle funzioni ausiliarie

## 6.2 Parser predittivo

Il **parser predittivo** è un tipo parser deterministico (sotto alcune specifiche condizioni che si vedranno più avanti), molto più efficiente in quanto non ha il backtracking, tuttavia per definirlo occorre prima definire delle funzioni ausiliarie

### 6.2.1 First

#### Definition 6.2.1: First

Data una grammatica libera  $G$  e  $\alpha \in (T \cup NT)^*$ , si definisce **First**( $\alpha$ ) come l'insieme dei terminali che possono stare in prima posizione in una stringa che si deriva da  $\alpha$

- per  $a \in T, a \in \text{First}(\alpha) \iff \alpha \implies *a\beta$  per  $\beta \in (T \cup NT)^*$
- inoltre  $(\alpha \implies *\epsilon) \implies \epsilon \in \text{First}(\alpha)$

#### Note:

Sia la grammatica

$$A \rightarrow \alpha_1 | \alpha_2$$

Se  $\text{First}(\alpha_1) \cap \text{First}(\alpha_2) = \emptyset$  la scelta della produzione è deterministica

Qui vi è riportato un esempietto:

#### Example 6.2.1

$$A \rightarrow aB | bC$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \text{First}(aB) &= \{a\} \\ \text{First}(bC) &= \{b\} \end{aligned}$$

Pertanto abbiamo del determinismo con un solo carattere in lettura

algoritmo per calcolare il first

#### Algorithm 7: First()

**Input:** Una grammatica credo

**Output:** bho

```

1 for  $x \in T$  do
2    $\text{First}(x) \leftarrow \{x\};$                                      // un terminale è il primo elemento di se stesso
3 for  $X \in NT$  do
4    $\text{First}(X) \leftarrow \emptyset;$                                 // per ogni x non terminale si inizializza il suo first a "0"
5 while almeno un  $\text{First}(X)$  può essere modificato in una iterazione do
6   foreach  $x \rightarrow Y_1, \dots, Y_k$  do
7     foreach  $i = 1$  to  $k$  do
8       // se ciascuno di questi simboli  $y_1, \dots, y_{i-1}$  può derivare la stringa vuota  $\epsilon$ 
9       if  $Y_1, \dots, Y_{i-1} \in N(G)$  then
10         $\text{First}(X) \leftarrow \text{First}(X) \cup (\text{First}(Y_i) \setminus \{\epsilon\});$  // allora è possibile aggiungere gli elementi di
11         $\text{FIRST}(Y_i)$  a  $\text{FIRST}(X)$  per la produzione  $y_1, \dots, y_k$ 
12        // Se invece uno dei simboli da  $Y_1$  a  $Y_{i-1}$  non è annullabile, si interrompe la ricerca per quella
13        produzione, perché non possiamo "saltare" i simboli non annullabili per arrivare a  $Y_i$ 
14
15 foreach  $X \in N(G)$  do
16    $\text{First}(X) = \text{First}(X) \cup \{\epsilon\};$ 

```

In generale per una stringa  $\alpha$  si ha che:

- Se  $\alpha = \epsilon$ , allora  $\text{FIRST}(\alpha) = \{\epsilon\}$ .
- Se  $\alpha = X\beta$  e  $X \notin N(G)$ , allora  $\text{FIRST}(X\beta) = \text{FIRST}(X)$ .
- Se  $\alpha = X\beta$  e  $X \in N(G)$ , allora  $\text{FIRST}(X\beta) = (\text{FIRST}(X) \setminus \{\epsilon\}) \cup \text{FIRST}(\beta)$



In pratica se

$$A \rightarrow \alpha_1 | \dots | \alpha_k$$

si ha che

$$First(A) = First(\alpha_1) \cup \dots \cup First(\alpha_k)$$

### Example 6.2.2

Si ossrvi la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab|c \\ A &\rightarrow aA|\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FIRST(S) &= FIRST(Ab) \cup FIRST(c) \\ &= (FIRST(A) \setminus \{\epsilon\}) \cup FIRST(b) \cup \{\epsilon\} \\ &= \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FIRST(A) &= FIRST(aA) \cup FIRST(\epsilon) \\ &= \{a\} \cup \{\epsilon\} = \{a, \epsilon\} \end{aligned}$$

## 6.2.2 Follow

### Definition 6.2.2: Follow

Data una grammatica libera  $G$  e  $A \in NT$ , definiamo che  $Follow(A)$  è l'insieme dei terminali che possono comparire immediatamente a destra di  $A$  in una forma sentenziale.

- Per ogni  $a \in T$ ,  $a \in Follow(A)$  se  $S \Rightarrow^* \alpha A a \beta$  per qualche  $\alpha$  e  $\beta \in (T \cup NT)^*$ .
- $\$ \in Follow(A)$  se  $S \Rightarrow^* \alpha A$  (Poiché  $S \Rightarrow^* S$ , allora  $\$ \in Follow(S)$  !)

Riporto qui un esempio

### Example 6.2.3

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab \mid c \\ A &\rightarrow aA \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$Follow(S) = \{\$ \} \quad Follow(A) = \{b\}$$

- $S \Rightarrow^* S$
- $S \Rightarrow^* Ab$

## algoritmo per calcolare il Follow

### Algorithm 8: Follow()

**Input:** Una grammatica credo  
**Output:** bho

```

1 foreach  $X \in NT$  do
2    $First(X) \leftarrow \emptyset;$  // per ogni X non terminale si inizializza il suo first a "0"
3  $Follow(S) \leftarrow \{\$ \};$ 
4 while almeno un  $Follow(X)$  può essere modificato in una iterazione do
5   foreach  $X \rightarrow \alpha Y \beta$  do
6      $Follow(Y) \leftarrow Follow(Y) \cup (First(\beta) \setminus \{\epsilon\});$ 
7   foreach  $X \rightarrow \alpha Y$  do
8     foreach  $X \rightarrow \alpha \beta, \epsilon \in First(\beta)$  do
9        $Follow(Y) \leftarrow Follow(Y) \cup Follow(X);$ 

```

in pratica, occorre cercare tutte le produzioni in cui  $Y \in NT$  appare e, per ognuna di esse, applicare la 1 o la 2 sopra

### Example 6.2.4

(10)

$$\begin{aligned}
 E &\rightarrow TE' \\
 E' &\rightarrow \epsilon \mid +E \mid -E \\
 T &\rightarrow AT' \\
 T' &\rightarrow \epsilon \mid *T \\
 A &\rightarrow a \mid b \mid (E)
 \end{aligned}$$

	First	Follow
E	a, b, (	\$, )
E'	$\epsilon, +, -$	\$, )
T	a, b, (	\$, ), +, -
T'	$\epsilon, *$	\$, ), +, -
A	a, b, (	\$, ), +, -, *

$Follow(E) = \{ \$, ) \}$  perché E è il simbolo iniziale  
 perché  $A \rightarrow (E)$   
 ?  $E' \rightarrow +E \mid -E$  richiediamo che  $Follow(E') \subseteq Follow(E)$

$Follow(E') = Follow(E)$  poiché  $E \rightarrow TE'$ , deve essere  $Follow(E) \subseteq Follow(E')$   $\Rightarrow Follow(E) = Follow(E')$

$Follow(T) = \{ \$, ), +, - \}$  perché  $E \rightarrow TE'$   $\Rightarrow$  include  $First(E') \setminus \{\epsilon\}$   
 + poiché  $\epsilon \in First(E')$  include anche  $Follow(E)$ !  
 $T' \rightarrow *T \Rightarrow Follow(T') \subseteq Follow(T)$

$Follow(T') = Follow(T)$  perché  $T \rightarrow AT'$   $\Rightarrow Follow(T) \subseteq Follow(T') \Rightarrow Follow(T) = Follow(T')$

$Follow(A) = \{ \$, ), +, -, * \}$  perché  $T \rightarrow AT'$   $\Rightarrow$  include  $First(T') \setminus \{\epsilon\}$   
 + poiché  $\epsilon \in First(T')$  include  $Follow(T)$

Adesso che abbiamo introdotto i le procedure First e Follow occorre fare un passo in più per definire i parser

### 6.2.3 Parser per linguaggi $LL(1)$

#### tabella di parsing $LL(1)$

La tabella di parsing  $LL(1)$  è una struttura di dati usata nei parser sintattici molto utili per risolvere il non determinismo. Questi parser leggono l'input da sinistra a destra (da qui il primo "L" di "LL"), costruendo una derivazione sinistra, o leftmost (da qui il secondo "L") e usano un solo simbolo di lookahead (da cui il "(1)"). Questa tabella è formata da una **matrice bidimensionale**  $M$  che è formata da:

- **righe**: non-terminali
- **colonne**: terminali (incluso \$)
- **casella**  $(A, a)$ :  $M[A, a]$  contiene le produzioni che possono essere scelte dal parser mentre tenta di espandere  $A$  e l'input corrente è  $a$ .

Se ogni casella contiene **al più una produzione**, allora il parser è **deterministico**!

Per riempire la tabella occorre procedere in questo modo:

Per ogni produzione  $A \rightarrow \alpha$ :

1. per ogni  $a \in T$  e  $a \in \text{First}(\alpha)$ , inserisci  $A \rightarrow \alpha$  nella casella  $M[A, a]$
2. se  $\epsilon \in \text{First}(\alpha)$ , inserisci  $A \rightarrow \alpha$  in tutte le caselle  $M[A, x]$  per  $x \in \text{Follow}(A)$  ( $x$  può essere \$)

Ogni casella vuota, dopo aver elaborato tutte le produzioni, è un errore (cioè la funzione ricorsiva chiama 'fail')

#### grammatica $LL(1)$

##### Definition 6.2.3: grammatica $LL(1)$

Una grammatica si definisce  $LL(1)$  sse ogni casella della tabella di parsing  $LL(1)$  contiene al più una produzione, ovvero non presenta conflitti

Si ha che se  $G = LL(1)$  allora il parser è **predittivo e deterministico**, questo perché il parser ricostruisce l'albero di derivazione per l'input  $w$ , in modo top-down, predicendo quale produzione usare (tra le molte possibili) guardando il prossimo carattere dell'input

##### Theorem 6.2.1

$G$  è  $LL(1)$  sse per ogni coppia di produzioni distinte con la stessa testa

$$A \rightarrow \alpha | \beta$$

si ha che

1.  $\text{First}(\alpha) \cap \text{First}(\beta) = \emptyset$
2. (a)  $(\epsilon \in \text{First}(\alpha)) \implies (\text{First}(\beta) \cap \text{Follow}(A) = \emptyset)$   
(b)  $(\epsilon \in \text{First}(\beta)) \implies (\text{First}(\alpha) \cap \text{Follow}(A) = \emptyset)$

**Dimostrazione:** Se sono soddisfatte le condizione 1 e 2 per ogni coppia di produzioni distinte con medesima testa allora la tabella di parsing  $LL(1)$  contiene al più una prodizione in ogni cassella. Ma vale anche viceversa! ☺

## Linguaggio $LL(1)$

### Definition 6.2.4: Linguaggio $LL(1)$

Un linguaggio si definisce  $LL(1)$   $\iff \exists G'$  grammatica  $= LL(1)$  che lo genera

### Example 6.2.5

Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B \\ A &\rightarrow ab|cd \\ B &\rightarrow ad|cb \end{aligned}$$

Si può notare che  $G$  non è  $LL(1)$  dato che  $S \rightarrow A|B$  e

$$\begin{aligned} First(A) &= \{a, c\} \\ First(B) &= \{a, c\} \\ First(A) \cap First(B) &= \{a, c\} \end{aligned}$$

Dal teorema sopra fornito si può dimostrare che non è  $LL(1)$

Tuttavia si può manipolarla per farla diventare  $LL(1)$ , quindi espando  $S$ :

$$S \rightarrow ab|cd|ad|cb$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aT|cT' \\ T &\rightarrow b|d \\ T' &\rightarrow b|d \end{aligned}$$

Poi osservo che  $T$  e  $T'$  sono identici, sia quindi  $G'$  la nuova grammatica:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aT|cT \\ T &\rightarrow b|d \end{aligned}$$

Si può dimostrare che è  $LL(1)$ , pertanto, per la definizione di linguaggio  $LL(1)$  e nonostante  $G$  non sia  $LL(1)$ , si ha che  $L(G) = \{ab, cd, ad, cb\}$  è un linguaggio  $LL(1)$  perché  $G'$  che lo genera è una grammatica  $LL(1)$

### Theorem 6.2.2

Ogni linguaggio regolare è generabile da una grammatica  $G$  di classe  $LL(1)$

**Dimostrazione:** Sia  $L$  un linguaggio regolare, allora  $\exists$  DFA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) : L = [M]$ .

A partire da  $M$  si può costruire una grammatica regolare  $G = (NT, T, S, R)$  basata sul seguente automa  $M$ :

- $NT = \{[q] | q \in Q\}$ , cioè un non terminale per ogni stato  $q$
- $T = \Sigma$  cioè un terminale per ogni simbolo dell'alfabeto
- $S = [q_0]$  simbolo iniziale lo stato iniziale
- $R$  (insieme delle produzioni) è definito come:

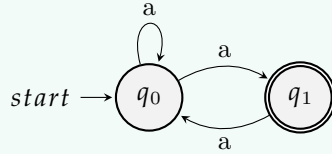
– se  $\delta(q, a) = q'$ , allora  $[q] \rightarrow a[q'] \in R$

Infatti  $\delta(q, a) = q'$  vuol dire che l'automata si trova allo stato  $q$  e legge in input  $a$  allora arriverà allo stato  $q'$ , che viene "tradotto" nella grammatica  $[q] \rightarrow a[q']$  che corrisponde ad una produzione in cui il non terminale  $[q]$  produce il terminale  $a$  e il non terminale  $[q']$ , per passare al non terminale  $[q']$  occorre, infatti, fare match con  $a$

– se  $q \in F$ , allora  $[q] \rightarrow \epsilon \in R$

Poi che  $M$  è deterministico,  $\forall q \in Q \forall a \in \Sigma \quad \exists! q'. q \xrightarrow{a} q'$ , cioè  $[q]$  avrà una sola produzione  $[q] \rightarrow a[q']$  che "inizia" per  $a$  e dato che se  $q$  è finale, allora  $[q] \rightarrow \epsilon$  è applicabile solo per i  $\text{Follow}([q]) = \{\$ \} \implies$  nessun conflitto, dato che nessuna produzione genera  $\$$ , si ha che  $G$  è  $LL(1)$  ☺

### Example 6.2.6



Le produzioni corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} [q_0] &\rightarrow a[q_1] \mid a[q_0] \\ [q_1] &\rightarrow a[q_0] \mid \epsilon \end{aligned}$$

La grammatica  $G$  è  $LL(1)$ , perché:

$$\text{First}(a[q_0]) \cap \text{First}(\epsilon) = \emptyset, \quad \text{First}(a[q_1]) \cap \text{First}(\epsilon) = \emptyset$$

Riporto qui un esempio di tabella di parsing  $LL(1)$ :

### Example 6.2.7

Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow TE' \\ E' &\rightarrow \epsilon \mid +TE' \mid -TE' \\ T &\rightarrow AT' \\ T' &\rightarrow \epsilon \mid *T \\ A &\rightarrow a \mid b \mid (E) \end{aligned}$$

Si può costruire la seguente tabella di First e Follow:

Produzione	First	Follow
$E$	$a, b, ($	$\$, )$
$E'$	$+, -, \epsilon$	$\$, )$
$T$	$a, b, ($	$+, -, \$, )$
$T'$	$*, \epsilon$	$+, -, \$, )$
$A$	$a, b, ($	$*, +, -, \$, )$

Ed ecco a voi la tabella di parsing:

	$a$	$b$	$($	$+$	$*$	$\$$
$E$	$E \rightarrow TE'$	$E \rightarrow TE'$	$E \rightarrow TE'$			
$E'$				$E' \rightarrow +TE'$	$E' \rightarrow -TE'$	$E' \rightarrow \epsilon$
$T$	$T \rightarrow AT'$	$T \rightarrow AT'$	$T \rightarrow AT'$			
$T'$				$T' \rightarrow \epsilon$	$T' \rightarrow *T$	$T' \rightarrow \epsilon$
$A$	$A \rightarrow a$	$A \rightarrow b$	$A \rightarrow (E)$			

<p>input a * (b+a) \$</p> <p>stack E</p> <p>TE'</p> <p>AT'E'</p> <p>aT'E'</p> <p>T'E'</p> <p>*T'E'</p> <p>(b+a)</p> <p>TE'</p> <p>AT'E'</p> <p>(E)T'E'</p> <p>b+a)</p> <p>E)T'E'</p> <p>TE')T'E'</p> <p>AT'E')T'E'</p> <p>bT'E')T'E'</p>	<p>input + a) \$</p> <p>a)</p> <p>)</p> <p>\$</p> <p>Esercizio: costruire l'albero di derivazione!</p>	<p>stack T'E')T'E'</p> <p>E')T'E'</p> <p>+E)T'E'</p> <p>E)T'E'</p> <p>TE')T'E'</p> <p>AT'E')T'E'</p> <p>aT'E')T'E'</p> <p>T'E')T'E'</p> <p>E')T'E'</p> <p>)T'E'</p> <p>T'E'</p> <p>E'</p> <p>E</p> <p>Avuto la pile è a posto!</p>
--	--	--

## Algoritmo Per il calcolo di un parser $LL(1)$

---

### Algorithm 9: Parser $LL(1)$

---

```

Input: Stringa  $w$ 
Output: Niente
1  $Pila \leftarrow S\$;$                                      // cima della pila a sinistra
2  $X \leftarrow S;$                                        // top della pila
   // lettura in input
3  $input \leftarrow w\$;$ 
4  $i_c =$  primo carattere dell'input;
   // viene eseguito il ciclo While finché la pila non è vuota o l'input non è stato consumato
5 while  $X \neq \$$  do
6   if  $X$  è un terminale then
7     // si controlla se  $X$  fa "match" con  $i_c$ 
8     if  $X = i_c$  then
9       Pop  $X$  dalla pila;                               // rimuovo  $X$  dalla pila
10      avanza  $i_c$  sull'input;
11    else
12      Errore();                                       // no match
13  else
14    // se nella tabella di Parsing  $M$  esiste una regola  $X \rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ 
15    if  $M[X, i_c] = X \rightarrow Y_1, \dots, Y_n$  then
16      Pop  $X$  dalla pila;
17      Push  $Y_1, \dots, Y_n$  sulla pila;               // mette sulla pila i simboli  $Y_1, \dots, Y_n$  con  $Y_1$  in cima
18      In output la produzione  $X \rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ ;
19    else
20      Errore ();                                     // se non esiste una regola in  $M[X, i_c]$  si genera un errore, viene definito caso
21      "bianco"
22     $X \leftarrow$  top della pila;                       // Aggiorna  $X$  con il nuovo simbolo in cima alla pila
23 if  $i_c \neq \$$  then
24   Errore();                                         // pila svuotata ma vi è ancora dell'input da leggere

```

---

Un altro esempio:

#### Example 6.2.8

Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$S \rightarrow aAB \mid bS$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

Che genera il seguente linguaggio

$$L(G) = L(b^*aab)$$

Si ha che questa grammatica  $G$  è  $LL(1)$ , perché:

$$First(aAB) \cap First(bS) = \emptyset, \quad \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$$

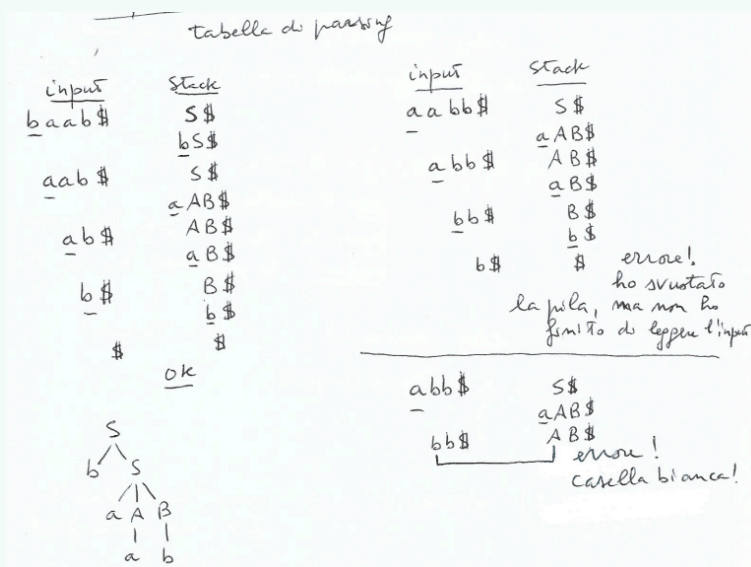
Si può proseguire con la tabella First e follow:

Simbolo	First	Follow
$S$	$a, b$	$\$$
$A$	$a$	$b$
$B$	$b$	$\$$

Da cui si può costruire la seguente tabella di parsing:

	$a$	$b$	$\$$
$S$	$S \rightarrow aAB$	$S \rightarrow bS$	
$A$	$A \rightarrow a$		
$B$		$B \rightarrow b$	

Viene qui descritto il funzionamento del parser con pila con diversi input:



## 6.2.4 Parser per linguaggi $LL(K)$

### grammatiche $LL(K)$

Le grammatiche  $LL(k)$  sono "un'estensione" del concetto di grammatiche  $LL(1)$ , dove il parser ha la capacità di guardare in avanti fino a  $k$  simboli per determinare le scelte di parsing

Per questi tipi di grammatica gli insiemi  $First$  e  $Follow$  assumo significati diversi rispetto a alle grammatiche  $LL(K)$

#### Definition 6.2.5: First $LL(K)$

L'insieme  $First_k(\alpha)$  contiene tutte le stringhe di lunghezza  $k$  o minore derivabili dall'inizio di una produzione con  $\alpha$ , in particolare  $w \in First_k(\alpha) \iff \alpha \Rightarrow^* w\beta$  con  $|w| = k, w \in T^*, \beta \in (T \cup NT)^*$  oppure  $\alpha \Rightarrow^* w$  con  $|w| \leq k$  e  $w \in T^*$

#### Definition 6.2.6: Follow $LL(K)$

L'insieme  $Follow_k(A)$  definisce quali stringhe possono apparire immediatamente dopo un simbolo non terminale  $A$  in una derivazione a partire dal simbolo iniziale  $S$ . In particolare:  $w \in Follow_k(A)$  se  $S \Rightarrow^* \alpha Aw\beta$  con  $|w| = k, w \in T^*$ , e  $\alpha, \beta \in (T \cup NT)^*$ , oppure,  $S \Rightarrow^* \alpha Aw$  con  $|w| \leq k$  e  $w \in T^*$ .

### Tabella di Parsing $LL(K)$

- **Righe:** non terminali.
- **Colonne:**  $\{w \in T^* \mid |w| \leq k\}$  (solo quelle necessarie).

Per ogni produzione  $A \rightarrow \alpha$ , la tabella  $M[A, w]$  contiene:



- $A \rightarrow \alpha$ , per ogni  $w \in \text{First}_k(\alpha)$  ( $w \neq \varepsilon$ );
- $w \in \text{Follow}_k(A)$  se  $\varepsilon \in \text{First}_k(\alpha)$ .

Ogni entrata/casella contiene al più una produzione. Se non esistono  $w_1$  e  $w_2$  tali che  $w_1$  prefisso di  $w_2$  con le due entrate corrispondenti su una riga entrambe riempite, allora  $G$  è una grammatica  $LL(k)$ .

**Nota Bene:** Le colonne sono tante quante sono le stringhe  $w$  che appartengono a  $\text{First}_k(\alpha)$  per  $A \rightarrow \alpha$  o a  $\text{Follow}_k(A)$  per  $A \rightarrow \alpha$ . Questo va verificato per tutte le produzioni:

$$w \in \text{First}_k(\alpha).$$

### Example 6.2.9

Sia  $G$  la seguente grammatica

$$S \rightarrow aSb \mid ab \mid c$$

Si ha che  $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$ , inoltre:

- $\text{First}_2(aSb) = \{aa, ac\}$
- $\text{First}_2(ab) = \{ab\}$
- $\text{First}_2(c) = \{c\}$

Si può dimostrare che  $G$  è  $LL(2)$  dato che:

- $\text{First}_2(aSb) \cap \text{First}_2(ab) = \emptyset$
- $\text{First}_2(aSb) \cap \text{First}_2(c) = \emptyset$
- $\text{First}_2(ab) \cap \text{First}_2(c) = \emptyset$

Da cui si può ricavare la tabella di parsing:

Simbolo	$aa$	$ab$	$ac$	$c$
$S$	$S \rightarrow aSb$	$S \rightarrow ab$	$S \rightarrow aSb$	$S \rightarrow c$

### Theorem 6.2.3

- Una grammatica ricorsiva sinistra non è  $LL(K)$  per nessun  $K$
- Una grammatica ambigua non è  $LL(K)$
- Se  $G$  è  $LL(K)$  per qualche  $k$ , allora  $G$  non è ambigua
- Se  $G$  è  $LL(K)$ , allora  $L(G)$  è libero deterministico
- esiste  $L$  libero deterministico tale che non esiste  $G$  di classe  $LL(K)$  per nessun  $K$ , tale che  $L = L(G)$

Viene qui riportato il funzionamento del parser con pila:

### Linguaggio $LL(K)$

#### Definition 6.2.7: Linguaggio $LL(K)$

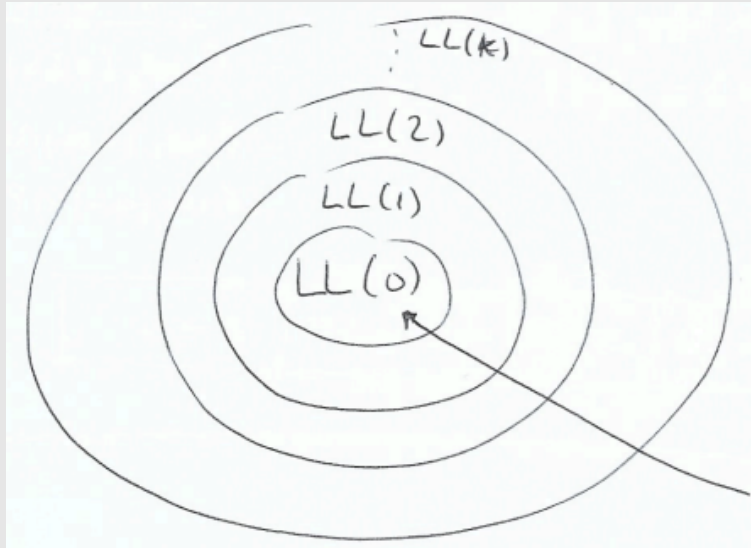
un linguaggio  $L$  è di classe  $LL(K)$  se  $G$  di classe  $LL(K)$  tale che  $L = L(G)$

### Theorem 6.2.4

$\forall k \geq 0$ , la classe dei linguaggi  $LL(k)$  contiene strettamente la classe dei linguaggi  $LL(K)$

**Note:**

$\forall k \geq 0$ , la classe dei linguaggi  $LL(k+1)$  contiene strettamente la classe dei linguaggi  $LL(k)$



Si ha che:  $(\forall A \in NT, \exists! \alpha \in (T \cup NT)^*, A \rightarrow \alpha \implies G \text{ è } LL(0)) \implies L(G) = \{w\}$  ovvero una sola parola al massimo

Nella pratica tuttavia si usano solo  $LL(1)$ , spesso la si può manipolare trasformandola in  $LL(1)$

**Example 6.2.10**

$$S \rightarrow Asb \mid ab \mid c$$

$G$  è un  $LL(2)$  ma non  $LL(1)$  Si fattorizza

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aT \mid c \\ T &\rightarrow Sb \mid b \end{aligned}$$

Ottenuta fattorizzando  $G$  è  $LL(1)$  infatti:

- $First(aT) \cap First(c) = \emptyset$
- $First(Sb) \cap First(b) = \emptyset$

Si ha che  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$  è un linguaggio di classe  $LL(1)$  perché  $G'$  è  $LL(1)$

**Casi speciali**

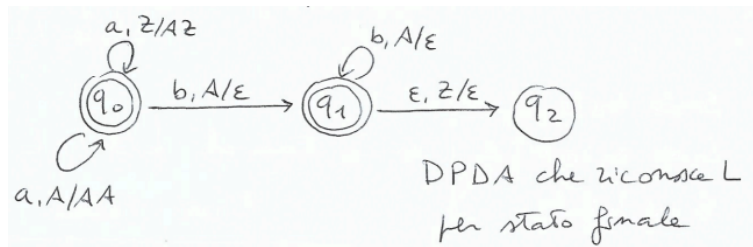
Sia

$$L = \{a^i b^j \mid i \geq j\} \text{ è libero deterministico}$$

Ma non è  $LL(K)$  per nessun  $K$ !

Adesso, mostriamo una grammatica per  $L$  e dimostriamo che non è  $LL(K)$  per nessun  $K$ . Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid B \\ B &\rightarrow aBb \mid \epsilon \end{aligned}$$



Sia  $G$  una grammatica libero per  $L$

$$S \rightarrow aS \mid BB \rightarrow aBb \mid \epsilon$$

e poniamo  $L = L(G)$

Per scegliere tra  $S \rightarrow aS$  e  $S \rightarrow B$  dovrei leggere fino in fondo l'input per sapere quante  $b$  in meno di  $a$  ci sono nella stringa! Allora  $G$  non può essere  $LL(k)$  per nessun  $k$ . Infatti quanto possa essere grande il  $K$  posso trovare una stringa più lunga che richiede di leggere più di  $k$  simboli di lookahead

Non è tuttavia possibile alcuna  $G'$  e  $k$  tali che

$$L(G') = L \text{ e } G' \in L(K)$$

La dimostrazione non verrà illustrata

# Chapter 7

## Bottom up parser

Il **parser bottom up** è un tipo di analizzatore sintattico che costruisce l'albero di derivazione partendo dalle foglie, viene anche detto **Shift-Reduce** in quanto possiede due operazioni fondamentali:

- **Shift**: un simbolo terminale viene spostato dall'input alla pila
- **Reduce**: una serie di simboli (terminali e non terminali) sulla cima della pila corrisponde al "reverse" di una parte destra di una produzione, ovvero:

$$A \rightarrow \alpha \in R - \alpha^R \text{ sulla pila}$$

La stringa  $\alpha^T$  viene rimossa dalla pila e sostituita con  $A$ , quindi  $\alpha$  viene ridotta ad  $A$

Possono essere di diversi tipi

### 7.1 Parser shift-reduce nondeterministico

---

**Algorithm 10:** Parser shift-reduce nondeterministico

---

**Input:** Una grammatica libera  $G$  con simbolo iniziale  $S$  e una stringa  $w \in T^*$

**Output:** Una stringa  $w \in T^*$

- 1 Inizializziamo la pila a \$;
- 2 Inizializziamo l'input con  $w\$$ ;
- 3 usiamo il  $PDA$  seguente per trovare la derivazione per  $w\$$ :

$$M = (T, \{q\}, \underbrace{T \cup NT \cup \{\$\}}_{\Gamma: \text{ovvero i simboli sulla pila}}, \delta, \emptyset)$$

Dove:

1.  $(q, aX) \in \delta(q, a, X) \forall A \in T \forall X \Gamma$  SHIFT
2.  $(q, A) \in \delta(q, \epsilon, \alpha^R)$  se  $A \in \alpha \in R$  REDUCE
3.  $(q, \epsilon) \in \delta(q, \$, S\$)$  accept

;

ogni volta che facciamo "reduce", forniamo in output la produzione usata;  
alla fine,  $S\$$  sulla pila, con  $\$$  in input  $\implies$  accettiamo;

---

**Note:**

generalizzazione della def. di  $PDA$  dove non si consuma solo il top della pila, ma una serie di caratteri contigui a cominciare dal top

### Example 7.1.1

Sia la seguente grammatica

$$E \rightarrow T \mid T + E \mid T - E$$

$$T \rightarrow A \mid A * T$$

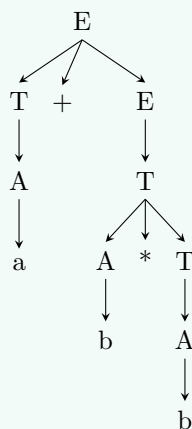
$$A \rightarrow a \mid b \mid (E)$$

N.	Pila	Input	Azione	Output
1	\$	$a + b * b \$$	<i>Shift</i>	
2	$\$a$	$+b * b \$$	<i>Reduce</i>	$A \rightarrow a$
3	$\$A$	$+b * b \$$	<i>Reduce</i>	$T \rightarrow A$
4	$\$T$	$+b * b \$$	<i>Shift</i>	
5	$\$T+$	$b * b \$$	<i>Shift</i>	
6	$\$T + b$	$*b \$$	<i>Reduce</i>	$A \rightarrow b$
7	$\$T + A$	$*b \$$	<i>Shift</i>	
8	$\$T + A *$	$b \$$	<i>Shift</i>	
9	$\$T + A * b$	$\$$	<i>Reduce</i>	$A \rightarrow b$
10	$\$T + A * B$	$\$$	<i>Reduce</i>	$T \rightarrow A * T$
11	$\$T + A * T$	$\$$	<i>Reduce</i>	$E \rightarrow T + T$
12	$\$E$	$\$$	<i>Reduce</i>	$E \rightarrow T + T$
13	$\$E$	$\$$	<i>Accept</i>	

Si ha che:

$$E \Rightarrow T + E \Rightarrow T + T \Rightarrow T + A * T \Rightarrow T + A * A \Rightarrow T + A * b \Rightarrow T + b * b \Rightarrow A + b * b \Rightarrow a + b * b$$

Il cui albero è:



Le cui proprietà sono:

Costruzione dell'albero di derivazione **bottom-up**

Derivazione canonica a destra a rovescio

forte non-determinismo:

- **conflitti shift-reduce:**

- $\$a \quad + b * b \$$  shift
- $\$a + \quad b * b \$$

- **Conflitti reduce-reduce**

- $\$T + A * T \quad \$$  reduce  $E \rightarrow T$
- $\$T + A * E \quad \$$

**Note:**

Si noti quindi che questo tipo parser genera moltissimi conflitti, in diverse situazioni era appunto possibile scegliere strade che non portano a riconoscere la stringa. F

Per "risolvere" tale nondeterminismo occorre fornire al PDA una tabella parsing (struttura di controllo) che "aiuti" a scegliere l'azione giusta, ed è grazie all'uso di questa che nascono i cosiddetti **parser LR**

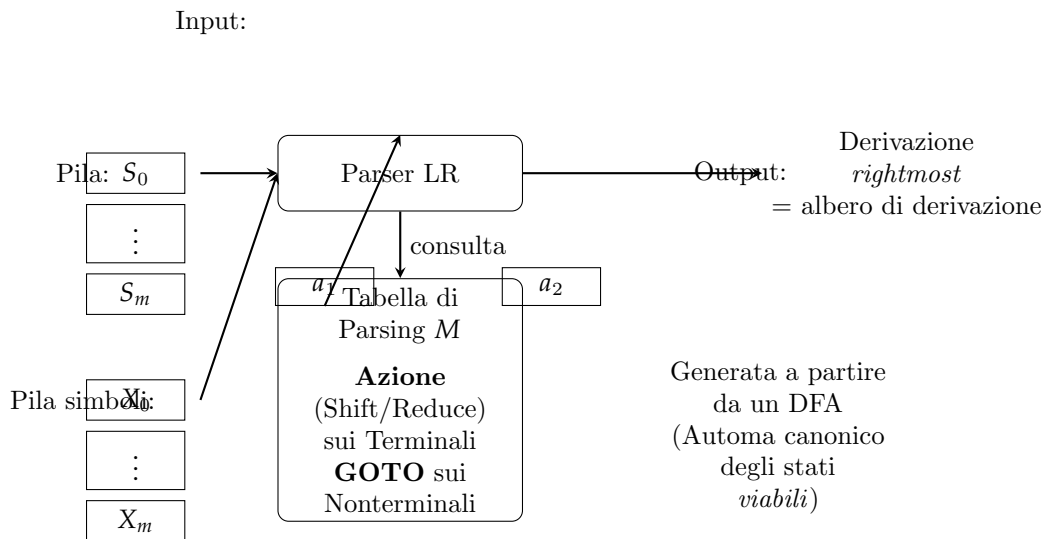
## 7.2 Parser LR

### Definition 7.2.1: Parser LR

Il **parser LR** è un tipo di analizzatore sintattico che utilizza un approccio bottom-up per analizzare un input e verificare se appartiene al linguaggio generato da una grammatica libera. Il termine LR indica che:

- L: sta per *left-to-right*: l'analisi dell'input avviene da sinistra a destra
- R: sta per *Rightmost derivation*: l'analisi ricostruisce una derivazione più a destra in senso inverso

Presento, qui uno schema bellino bellino:



dove una configurazione di tale parser è:

$$(s_0, \dots, s_n, x_1 \dots x_m, a_1 \dots a_k \$)$$

**Note:**

$x_1 \dots x_m a_1 \dots a_k$  è una stringa intermedia della derivazione canonica destra

### 7.2.1 Funzionamento del parsing LR

il parser LR funziona nel seguente modo:

1. Legge lo stato nel top della pila  $s_n$  e il simbolo corrente dell'input  $a_i$
2. consulta la tabella di parsing LR  $M[s_n, a_i]$

- Se  $M[s_n, a_i] = \text{shift } s$ , allora la nuova configurazione è:

$$(s_0 \dots s_n \underline{s}, x_1 \dots x_n \underline{a_i}, a_{i+1} \dots a_k \$)$$

- Se  $M[s_n, a_i] = \text{reduce } A \rightarrow B$ , allora la nuova configurazione è

$$(s_0 \dots s_{n-r} \underline{s}, x_1 \dots x_{m-r} A, a_i \dots a_k \$)$$

Dove  $r = |\beta|$  e  $M[s_{n-r}, A] = \text{goto } \underline{s}$

Cioè fa tre passi:

- faccio "pop" di  $r$  elementi dai 2 stack
- metto  $A$  in cima alla pila dei simboli
- calcolo il nuovo stato top, guardando

$M[s_{n-r}, A] = \text{goto } s$  e metto  $s$  in cima alla pila degli stati

- se  $M[s_n, a_i] = \text{accept} \implies$  fine!
- se  $M[s_n, a_i] = \text{"bianco"} \implies$  errore!

### Example 7.2.1

Sia  $G$  la seguente grammatica:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ \text{Senza} &\rightarrow (S) \\ S &\rightarrow () \end{aligned}$$

Assumendo che siamo già forniti di questa **Tabella di Parsing**

Stato	Azione			Goto $S$
	(	)	\$	
0	$S2$			$g1$
1	Accept			$g3$
2	$S2$	$S5$		
3		$S4$		
4	$r2$	$r2$	$r2$	
5	$r3$	$r3$	$r3$	

### Esecuzione del Parsing

Stato della pila	Stack simboli	Input	Azione	Output
(0	$\varepsilon$	$(())\$$	$S2$	–
(0, 2	(	$(())\$$	$S2$	–
(0, 2, 2	((	$(())\$$	$S5$	–
(0, 2, 2, 5	((	$)\$$	$r3$	$S \rightarrow ()$
(0, 2, 3	(S	$)\$$	$S4$	–
(0, 2, 3, 4	(S)	$\$$	$r2$	$S \rightarrow (S)$
(0, 1	S	$\$$	Accept	–

Tuttavia una domanda lecita è come si fa trovare questa tabella di parsing, bhe prima di presentarla occorre definire un automa dei prefissi variabili

## 7.2.2 DFA a prefissi variabili

### Definition 7.2.2: prefisso variabile

un prefisso variabile è una stringa  $\in (T \cup NT)^*$  che può apparire sulla pila di un parser bottom-up per una computazione che accetta un input

### Definition 7.2.3: prefisso variabile su una grammatica $G$ libera

si definisce prefisso variabile su una grammatica  $G$  libera una stringa  $\gamma \in (T \cup NT)^*$  sse esiste una derivazione rightmost

$$S \Rightarrow {}^*\delta Ay \Rightarrow \delta\alpha\beta y = \gamma\beta y$$

Dove:

- $y \in T^*$
- $\delta \in (T \cup NT)^*$
- esiste una produzione  $A \rightarrow \alpha\beta$

Inoltre  $S$  è un prefisso variabile per definizione

### Definition 7.2.4: prefisso variabile completo e maniglia

un prefisso variabile si dice completo se  $\beta = \epsilon$ , in tal caso  $\alpha$  è detta maniglia per  $\gamma y$

Dopo sta sborodolata di definizioni si possa al teorema che lega i prefissi variabili con i DFA:

#### Theorem 7.2.1

Data  $G$  libera, i prefissi variabili di  $G$  costituiscono un linguaggio regolare e può essere descritto con un DFA



zio pera