Foglio 7

Esercizio 1. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(2,1,3) = (-2,-1,-3) \; T(2,4,0) = (2,1,3) \; T(0,1,1) = (2,2,1)$$

a) Si verifichi che è ben definita e si calcoli l'immagine di $(0,3,3)$ e di $(0,0,1)$.

b) La trasformazione T è suriettiva? È iniettiva?

c) Siano $\mathcal{B} = \{(2,1,3),(2,1,0),(10,1,1)\}$ e $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si scrivano $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$,$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$,$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)$,$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$.

d) Si calcolino la dimensione, un insieme di generatori e una rappresentazione parametrica per Ker T.

e) Si trovino una base e la dimensione di Im T.

f) Si calcoli la controimmagine di (2,1,3).

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x,y,z) = (y+kz, x+ky, x+y-6z, x+ky)$$

dipendente da $k \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di k l'applicazione L non è iniettiva?

b) Per ognuno di questi valori trovare una base dell'immagine e del nucleo di L ed esibire, se esistono, due vettori di $\mathbb{R}^4$ indipendenti che non appartengano all'immagine di L.

c) Per k=3 trovare la controimmagine del vettore (0,2,2,2).

Esercizio 3. Data la matrice A a coefficenti reali, calcolarne il polinomio caratteristico e gli autovalori. Verificare se A è o meno diagonalizzabile e in caso affermativo, calcolare una matrice diagonale D simile ad A e determinare P tale che $D = P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Dato l'endorfismo $T : V \to V$, calcolarne gli autovalori e determinare una rappresentazione cartesiana per gli autospazi. Verificare se T è o meno diagonalizzabile e in caso affermativo, determinare una base di V costituita da autovettori di T.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (3y, -2x)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + y + 2z, x, x)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(1, 2, 1) = (-2, -4, -2), T(1, 1, 1) = (-1, -2, -1)$, $T(0, 0, 1) = (1, 0, -1)$.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; T(\mathbf{e}_2) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2; T(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca se (-5,-5,0) è autovettore di T.

b) Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso affermativo, detta A la matrice associata a T rispetto alla base canonica si determinino una matrice diagonale D simile ad A e due matrici distinte P_1, P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$.

Es. 1

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(2,1,3) = (-2,-1,-3)$

$T(2,4,0) = (2,1,3)$

$T(0,1,1) = (2,2,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{GAUSS}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$v_1 = (0,3,3)$

$v_2 = (0,1,1)$

a)

$$T(0,3,3) = (6,6,3)$$

$$(0,0,1) = a_1(2,1,3) + a_2(2,4,0) + a_3(0,0,1)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 + a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_1 - 4a_1 + 1 - 3a_1 = 0 \\ a_3 = 1 - 3a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ -6a_1 = -1 \\ - \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{6} \\ a_1 = \frac{1}{6} \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(0,0,1)_C = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)_D$$

$$D = \{(2,1,3),(2,4,0),(0,1,1)\}$$

$$\frac{1}{6}(-2,-1,-3) - \frac{1}{6}(2,1,3) + \frac{1}{2}(2,2,1) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1, -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1, -\frac{3}{6} - \frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

b) NON é SURIETTIVA perché $(-2,-1,-3) = -(2,1,3)$

$\text{Ker } T = 0$

c) Sia

$$\beta = \{(2,1,3),(2,1,0),(10,1,1)\}$$

$$M_{\beta}^{\beta}(T), M_{\beta}^{e}(T), M_{e}^{\beta}(T), M_{e}^{e}(T)$$

$$M_D^e(T) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ id\ } & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ T\ } & \mathbb{R}^3 \\ e & \longrightarrow & D & \longrightarrow & e \end{array}}_{T \circ id = T}$$

$$M_e^e(T) = M_D^e(T) I_c^D = M_D^e(T) {I_D^e}^{-1}$$

Trovo l' inversa : Gauss

$$I_D^e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-\frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ R_3+R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} R_1-R_2 \\ \Rightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{13}{6} & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M_e^e(T)$$

d) $\mathrm{Ker}\, T = ?$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{GAUSS}}{\rightsquigarrow} \overset{\displaystyle A \\ \parallel}{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$Ax = 0$

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = (1, 1, 0)$$