Probabilità
Appunti

Giovanni Palma e Alex Basta

Contents

Chapter 1

Introduzione preliminare

1.1 Cos'e' la probabilita'?

E' vietato dare una definizione di "probabilita"! E' un concetto primitivo, che tutti noi conosciamo, e' una domanda che riguarda la filosofia. E' come il punto, la retta e il pinao nella geometria euclidea.

$$A = \text{"Domani a Bologna piove"}$$

Di questa affermazione, sappiamo dire solo quanto sia probabile che succeda, non siamo sicuri se si avveri o meno. Bisogna passare da una condizione di certezza (0 o 1) a un intervallo continuo $[0, 1]$. Stiamo generalizzando la logica del certo.
Indichiamo la probabilita' che A succeda con $\mathcal{P}(A)$. Quindi $P(A) \in [0, 1]$, dove $P(A) = 0$ significa che non accadra' mai e $P(A) = 1$ significa che accade con certezza.
Come si assegna la probabilita'? Non e' una domanda che riguarda la matematica, ma la statistica. L'approccio classico e' quello frequentista, dove svolgiamo vari esperimenti aleatori e calcoliamo la probabilita come

$$\mathcal{P}(A) \approx \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

Notare che questa non e' una definizione, ma un'approssimazione. Questo e' l'approccio frequentista che funziona bene in casi semplici.
L'approccio bayesiano e' un aggiornamento all'approccio precedente aggiungendo informazioni a priori che ci permette di creare una distribuzione probabilistica. Tutto questo riguarda la statistica, a noi interessa la matematica della probabilita'.

1.2 Richiami teoria degli insiemi

Dato un insieme Ω e due sottoinsiemi $A, B \subseteq \Omega$, si useranno tali notazioni per le diverse operazioni tra insiemi

$$\begin{aligned}
A \cup B &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}, \\
A \cap B &:= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}, \\
A^c &:= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}, \\
A \setminus B &:= A \cap B^c, \\
A \Delta B &:= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),
\end{aligned}$$

Andiamo inoltre a definire $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subset \Omega\}$ come l'insieme delle parte di Ω e sia $|A|$ la cardinalità di A, ovvero il suo numero di elementi

Example 1.2.1
Sia $\Omega = \{a, b, c\}$ allora $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Si noti poi questa interessante proposizione

Proposition 1.2.1
Sia Ω un insieme finito allora si ha:

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

Dimostrazione: Si puo' dimostrare per induzione su Ω:

- Caso $\Omega = \emptyset$:

$$|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^{|\emptyset|}$$
$$|\{\{\}\}| = 2^0$$
$$1 = 1$$

- Caso Ω:
  Per ipotesi induttiva $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$, dove $\Omega = X \cup p$ (con $p \notin X$). Quindi $|X| = |\Omega| - 1$. Dato che stiamo aggiungendo un nuovo elemento p a X, per ogni elemento di $\mathcal{P}(X)$ possiamo decidere se unirlo o meno a p, quindi il numero di elementi si duplica: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^{|X|} = 2 \cdot 2^{|\Omega|-1} = 2^{|\Omega|}$.

😃

Le nozioni di unione e intersezione si estendono in modo naturale a una famiglia arbitraria $(A_i)_{i\in I}$ di sottoinsiemi di Ω:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \exists i \in I \text{ tale che } \omega \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \forall i \in I \text{ si ha che } \omega \in A_i\}$$

Example 1.2.2 (Intersezione e unione in un insieme di riferimento numerabile $I = \mathbb{N}$)
Sia $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi

1. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$
   Si ha

$$\bigcup_{n=1} A_n = \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{n=1} A_n = \emptyset$$

   Giustamente $\{1\} \neq \{2\} \neq \{3\} \neq \dots$ pertanto l'unione è vuota

2. $\Omega = \mathbb{R}, A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1} A_n = [0, 1]$$

   L'intervallo $[0, 1]$ è quello che "contiene" tutti gli altri, pertanto, per come è definita l'unione, è ovvio che sia lui il risultato di tale operazione

$$\bigcap_{n=1} A_n = \{0\}$$

   L'intersezione è un insieme con solo 0, l'unico numero contenuto in tutti gli insiemi di intervalli

1.2.1 Leggi di de morgan

Theorem 1.2.1 Leggi di De Morgan

Queste proposizioni sono vere:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

che valgono, più in generale, per famiglie arbitrarie di insiemi:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Dimostrazione: Devo dimostrare che $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \wedge A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ ovvero che $w \in (A \cap B)^c \iff w \in (A^c \cup B^c)$
ebbene:

$$\begin{aligned} \omega \in (A \cap B)^c &\iff \omega \notin A \cap B \\ &\iff \omega \notin A \text{ or } \omega \notin B \\ &\iff \omega \in A^c \text{ or } \omega \in B^c \\ &\iff \omega \in (A^c \cup B^c) \end{aligned}$$

È dato come esercizio per Bastiality la dimostrazione per le altre cose 😄

1.2.2 Proprietà distributive di intersezione e unione

Theorem 1.2.2

è possibile dimostrare che valgono le seguenti leggi

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) &= \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) &= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \end{aligned}$$

: Bonzo, la dimostri per esercizio 😄

Chapter 2

Spazi di probabilità discreti

2.1 Concetti introduttivi

Innanzi tutto andiamo a definire che cosa intendiamo per *esperimento aleatorio, esito, probabilità*
Con la dicitura esperimento *aleatorio indicheremo* qualunque fenomeno (fisico, economico, sociale, ...) il cui esito non sia determinabile con certezza a priori. Il nostro obiettivo è di fornire una descrizione matematica di un esperimento aleatorio, definendo un modello probabilistico, un *esito* invece è un ipotetico risultato di un'esperimento aleatorio sulla base di un cosiddetto *spazio campionario* un insieme che contiene tutti gli esiti possibili dell'esperimento

Example 2.1.1

- **Esperimento aleatorio:** Lancio di un dado.
- **Spazio campionario:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Esito:** 4.

Note:
In casi piu' complessi ci saranno vari sotto-esperimenti aleatori, come 10 lanci di un dato.

Adesso forniamo vere e priorie definizioni

Definition 2.1.1: evento

Si definisce **evento** un'affermazione riguardante l'ipotetico esito univoco dell'esperimento, di cui si può affermare con certezza se è vero o falso una volta noto l'esito

Example 2.1.2
Esper. aleatorio: Lancio del dado
A = "esce un numero pari"

Definition 2.1.2: Spazio camipionario

Si chiama *spazio campionario* un qualunque insieme Ω che contiene tutti gli esiti dell'esperimento aleatorio.

Notare che non dice "tutti e solo tutti", quindi **tutti** gli insiemi a cui appartengono gli esiti sono degli spazi campionari.

Example 2.1.3 (Lancio dado)

Possiamo porre come spazio campionario:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ma anche

$$\Omega = \mathbb{R}$$

Definition 2.1.3: Esiti favorevoli

Esiti per cui un evento e' vero sono detti esiti favorevoli.

Definition 2.1.4: Evento in termine di insiemi

Un evento si puo' definire anche come il sottoinsieme dello spazio campionario Ω formato da tutti gli esiti favorevoli dell'evento.

Example 2.1.4

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies A =$ "esce un numero pari" $= \{2, 4, 6\} =$ evento

Note:

La definizione insiemistica di evento dipende dallo spazio campionario definito, mentre l'insieme degli esiti favorevoli e' fisso e rappresenta l'insieme evento di cardinalita' maggiore possibile (esiti favorevoli di $A \subseteq \Omega$).

Definition 2.1.5

- Ω e' l'evento *certo*
- $\emptyset$ e' l'evento *impossibile*
- $\omega \in \Omega$ e' un evento *elementare* ($A = \{\omega\}$)

Example 2.1.5

Lancio un dado.

$$A = \text{"esce un numero naturale tra 1 e 6"}$$

$$B = \text{"esce un numero maggiore di 6"}$$

$$C = \text{"esce il numero 3"}$$

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies A = \Omega(eventocerto), B = \emptyset(eventoimpossibile), C = \{3\}$
- $\Omega = \mathbb{R} \implies A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq \Omega(eventoquasicerto), B = (6, +\infty)(eventoquasiimpossibile), C = \{3\}$

2.2 Regole del calcolo probabilistico

Ad ogni relazione logica possiamo associare un'operazione insiemistica:

Connettivi Logici	Connettvi Insiemistici
$A \vee B$	$A \cup B$
$A \wedge B$	$A \cap B$
$\neg A$	A^c
$A \implies B$	$A \subseteq B$
$A \iff B$	$A = B$

Note:
Nella prima colonna, A e B sono eventi come affermazioni, mentre nella colonna di destra sono degli insiemi.

2.2.1 Assiomi della probabilita'

Poniamo tre assimi fondamentali da cui possiamo partire per derivare tutte le operazioni e proprieta' che ci servono:

Note:
Per noi tutti i sottoinsiemi di Ω sono eventi (anche se non sara' sempre cosi)

Definition 2.2.1: Assioma 1

A ciascun sottoinsieme A di Ω ($\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$) e' assegnato un numero che chiamo $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$. Questo numero si chiama *probabilita'* di A.

Note:
Quindi, per il primo assioma, esiste una funzione probabilita' $\mathbb{P}(A) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$.

Definition 2.2.2: Assioma 2

Dato Ω spazio campionario:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Definition 2.2.3: Assioma 3: Proprieta' di sigma addittivita'

Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di insiemi (eventi) tali che $\forall i \neq j. A_i \cap A_j = \emptyset$ (insiemi disgiunti) si ha che:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Quindi la probabilita' di un unione infinita di eventi **disgiunti** e' uguale alla somma delle probabilita' dei singoli eventi.

Definition 2.2.4: Probabilita' discreta

Chiamo probabilita' discreta una funzione probabilita' $\mathbb{P}$ a valori discreti, ovvero che puo' assumere un numero finito o al piu' numerabile di valori fra 0 e 1.

Vediamo una tale probabilita':

Definition 2.2.5: Delta di Dirac

Sia $\Omega = \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, allora si chiama delta di Dirac centrato in x_0 la funzione:

$$\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$

$$A \mapsto \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

Notare che per definizione, la funzione di Dirac e' una probabilita' discreta, dato che soddisfa tutti gli assiomi (ma non molto utile dato che assume solo due valori). Pero', tramite le delta di Dirac siamo in grado di costruire qualunque altra probabilita' discreta:
Sia $\Omega = \mathbb{R}$. Prendiamo un numero contabile n di eventi singoletto $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a cui corrispondono

$p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall i = 1, ..., n.\ p_i \in [0, 1], \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Definiamo la funzione:

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$
$$A \mapsto \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}(A)$$

$\mathbb{P}$ e' una combinazione lineare di delta di Dirac. Essendo una combinazione convessa, $\mathbb{P} \in [0, 1]$ e si puo' dimostrare che soddisfa gli altri due assiomi, quindi e' una probabilita' discreta! Variando le x e le p e' possibile generare qualsiasi funzione $\mathbb{P}$ discreta.

Example 2.2.1

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \forall i = 1, ..., 6.\ x_i = i,\ p_i = \frac{1}{6}$, la funzione $\mathbb{P}$ associata e':

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} d_{x_i}(A)$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies P(A) = 1$$
$$B = (6, +\infty) \implies P(B) = 0$$
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \implies P(C) = 1$$

Definition 2.2.6

Si chiama evento quasi certo un evento A. $P(A) = 1$

Definition 2.2.7

Si chiama evento quasi impossibile un evento A. $P(A) = 0$

Posso allargare Ω quanto voglio perche' tanto fuori dall'insieme minimo che comprende tutti gli eventi possibili le probabilita' che aggiugo sono quasi impossibili e quindi hanno probabilita' 0 e non cambiano il valore totale della somma.

2.2.2 Conseguenze degli assiomi

Theorem 2.2.1

Sia Ω spazio campionario e $\mathbb{P}$ probabilita' su Ω ($(\Omega, \mathbb{P})$ e' uno spazio di probabilita' con $\mathbb{P} : \mathcal{P}(A) \to [0, 1]$). Dagli assiomi 1,2,3 deduciamo le cose seguenti:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. **Addittivita' finita**: $(A_i)_{i=1,...,n}$. $\forall i \neq j. A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. **Monotonia**: $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

Dimostriamo: 1. Devo mostrare che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Per semplicita' definiamo $p := \mathbb{P}(\emptyset)$ Uso l'assioma 3 con la successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\forall i \in \mathbb{N}. A_i = \emptyset$, che sono tutti eventi disgiunti, quindi $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p$. Inoltre:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$$

Quindi:

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} p = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ +\infty & p \in (0, 1] \end{cases}$$

L'equazione e' soddisfatta solo per $p = 0$.

2. Suppongo di avere una sequenza finita disgiunta A_n, devo dimostrare che $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Definisco $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $B_i = A_i \forall i = 1, \ldots, n$ e $\forall i > n . B_i = \emptyset$. Usando l'assioma 3:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

3. Devo dimostrare che $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Per definizione di complemento $A^c + A = \Omega$ e i due insiemi sono disgiunti. Per l'addittivita' $\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c + A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ per l'assioma 2.

4. Assumiamo che $A \subseteq B$. Dimostriamo che $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$. Per ipotesi $B = A \cup (B \setminus A)$, quindi per addittivita' $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$. Per assioma 1 ovvio.

😃

Theorem 2.2.2 Probabilita' unione non disgiunta

siano A e B eventi:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (B \cap A)$, quindi per addittivita':

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ dato che $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$, ovvio. 😃

Note:

La formula si complica con un numero di eventi maggiore di 2, infatti per $n = 3$:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(b) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Provare esercizi (da soli!)