Mathe 1 Tutorium Blatt 5

Alex B.

November 2024

1 Elementare Zahlentheorie: Teilbarkeit, Division mit Rest und Diophantische Gleichungen

- Die Operation — entspricht der Teilbarkeit einer Zahl. Sie drückt aus, ob eine (ganze) Zahl a eine (ganze) Zahl b restlos teilt.
- Zu allen ganzen Zahlen a und m existieren eindeutig bestimmbare Zahlen q und r, welche die Division von a durch m mit Rest ausdrücken. r = a mod m, q = a div m. $a = q * m + r$
- Zwei Zahlen heißen Teilerfremd, wenn ihr ggT gleich 1 ist
- Eine Gleichung der Form $a * x + b * y = c$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{Z}$ heißt diophantische Gleichung. Mit diesen kann man prüfen, ob eine ganze Zahl durch eine Linearkombination von zwei anderen ganzen Zahlen (ohne Null) darstellbar ist.
- Der ggT von zwei ganzen Zahlen ist die kleinstmögliche Zahle, welche sich als diophantische Gleichung dieser Zahlen darstellen lässt

2 Aufgaben

1. Stelle nachfolgende Zahlen c mit gegebenem a und b wenn möglich als Linearkombination dar. Begründe, falls es nicht möglich ist, warum nicht.
   a) a = 2, b = 4, c = 22
   b) a = 6, b = 9, c = 2

3 Algorithmus von Euklid und erweiterter Algorithmus von Euklid

- Um den ggT von $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ zu berechnen, kann der Algorithmus von Euklid angewandt werden. Man setzt $r_0 = a, r_1 = b$ und führt sukzessiv eine Division mit Rest durch. Der Divisor der vorherigen Gleichung wird das Ergebnis der nachfolgenden mit dem Modulus als neuem Divisor. Der Algorithmus terminiert, wenn der Modulus gleich 0 ist.

- Mit dem erweitertem euklidischen Algorithmus kann man die diophantische Gleichung $a*x+b*y = ggT(a, b), x, y \in \mathbb{Z}$ lösen. Hierfür formt man die im euklidischen Algorithmus entstandenen Gleichungen von hinten nach vorne nach den Resten um und setzt nach und nach die Zahlenwerte durch ihre Gleichungsdarstellungen, bis man bei den ursprünglichen Werten für a und b ankommt. Die Faktoren von a und b ergeben x und y.

- Mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus können einfach diophantische Gleichungen gelöst werden, bei denen eine Zahl c gesucht ist, welche ein Vielfaches des ggT von a und b ist. Hierfür muss im letzten Schritt die entstandene diophantische Gleichung des ggTs um das Vielfache erweitert werden, welches benötigt wird um auf die gesuchte Zahl c zu kommen.

4 Aufgaben

- Berechne den ggT von folgenden Zahlen. Berechne anschließend die diophantische Gleichung, mit welcher der ggT von beiden Zahlen gebildet werden kann.

  a) a = 33, b=72

  b) a = 128, b = 56

  c) a = 5046, b = 426

  d) a = 3779, b = 1031

  e) a = 9974, b = 1040

- Löse falls möglich folgende diophantische Gleichungen;

  a) $2781 * x + 812 * y = 6$

  b) $5555 * x + 105 * y = 83$

  c) $143 * x + 91 * y = 65$

5 Zusatzaufgabe: Induktion

Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussage gilt: $\sum_{k=1}^{n} n * n! = (n+1)! - 1$