

8. Kontextfreie Sprachen

Definition Grammatik

Eine Grammatik ist ein Tupel (N, T, S, P) und beschreibt eine Sprache.

N: Alphabet der nichtterminalen Symbole

T: Alphabet der terminalen Symbole ($T \cap N = \emptyset$)

S: Startsymbol $\in N$

P: Produktionsmenge $\subset (N \cup T)^+ \times (N \cup T)^*$

Definition Chomsky Hierarchie

Typ 0: **Allgemeine Grammatiken.** Keine Bedingung

Typ 1: **Nichtverkürzende Grammatiken.** Für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta$ gilt: $\alpha, \beta \in (N \cup T)^+$ und $|\alpha| \leq |\beta|$ (d.h. linke Seite der Produktionen ist kleiner als die rechte Seite)

Typ 2: **Kontextfreie Grammatiken.** Für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta$ gilt: $\beta \in (N \cup T)^+$ und $\alpha \in N$ (d.h. auf der linken Seite der Produktion stehen nur Nichtterminale)

Typ 3: **(Rechts-) lineare Grammatiken.** Für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta$ gilt: $\alpha \in N$ und $\beta = tB$, wobei $B \in N \cup \{\varepsilon\}$ und $\beta \neq \varepsilon$ (d.h. die rechte Seite der Produktion besteht nur aus Terminalsymbolen und optional zusätzlich einem Nichtterminalsymbol rechts davon)

Sonderregel zum leeren Wort:

Zusätzliche Produktion $S_{\text{neu}} \rightarrow S \mid \varepsilon$

Definition Normalformen

Typ	3	2	1	0
$A \rightarrow \varepsilon$				x
$A \rightarrow t$	x	x	x	x
$A \rightarrow tB$	x			x
$A \rightarrow BC$		x	x	x
$AB \rightarrow CD$			x	x

Aufgabe 1

Geben Sie die Produktionen einer Grammatik G vom Typ 2 an mit $L(G) =$

- a) $\{a^m b^m c d^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$
- b) $\{x^i yzy x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- c) $\{a^i b c^j d^k \mid i, j \in \mathbb{N}, k = i + j\}$
- d) $\{0^n 1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
- e) $\{a^m b^n c^l d^{m+n+2l+k} e^k \mid l, m, n, k \in \mathbb{N}\}$
- f) {Alle Palindrome mit den Buchstaben $\{a, b\}$ }

Aufgabe 2

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, S, P)$

$P = \{ S \rightarrow aAa,$

$A \rightarrow aAa \mid B,$

$B \rightarrow BcB \mid bb\}$

- a) Normalisieren Sie die Grammatik
- b) Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort „abbcbbba“ an
- c) Welche Sprache liefert $L(G)$?

Aufgabe 3

Gegeben Sei die Sprache $L = \{(ab)^n c^m d (ba)^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$

- a) Geben Sie eine Typ 2 Grammatik G an, mit $L(G) = L$
- b) Normalisieren Sie die Grammatik

Aufgabe 4

Für ein Wort $w \in X^*$ mit w_0, w_1, \dots, w_n sei $\text{rev}(w) = w_n, w_{n-1}, \dots, w_0$.

Gegeben Sei die Sprache $L = \{a^i w b^j c^{i+j} \text{rev}(w) \mid i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^*\}$

- a) Geben Sie eine Typ 2 Grammatik G an mit $L(G) = L$
- b) Normalisieren Sie die Grammatik
- c) Zeichnen Sie einen Strukturbaum für alle Wörter x aus L mit $|x| \leq 6$