Mathe 1 Tutorium Blatt 3

Alex B.

October 2024

1 Vollständige Induktion

- Bekannte Zahlenräume: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reelen Zahlen $\mathbb{R}$
- Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion basiert auf den Peanoschen Axiomen
- Anleitung für einen Beweis mittels vollständiger Induktion:
  - Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für den kleinstmöglichen Wert im zugelassenen Wertebereich gilt
  - Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage gilt für ein festes $n \in$ Wertebereich (meistens $\mathbb{N}$), zeige, dass sie auch für n + 1 gilt. Auch möglich: Gegeben die Aussage gilt für alle bisherigen $n \in$ Wertebereich, zeige, dass sie auch in n + 1 gilt.

2 Aufgaben

1. Beweise die nachfolgenden Aussagen mithilfe einer vollständigen Induktion:

   a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   b) $2^n \geq n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   d) $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   e) $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{2}{(i-1)(i+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   f) $\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$