Mathe 1 Tutorium Blatt 2

Alex B.

October 2024

1 Relationen

- Eine Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes zweier (oder mehrerer) Mengen. $R \subseteq A \times B$
- Eine Umkehrrelation erhält man durch vertauschen von a und b (d.h. die Relation gilt von B auf A). Zeichen: R^{-1}
- Zwei Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ kann ausgedrückt werden durch $R \circ S = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
- Relationen können folgende Eigenschaften aufweisen:
  - *Reflexivität*: Relation auf sich selbst, d.h. $(a, a) \in R \; \forall a \in A$
  - *Symmetrie*: Ungerichtete Relation, d.h. wenn $(b, a) \in R$ ist auch $(a, b) \in R$
  - *Transitivität*: Folgernde Relation, d.h. wenn $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ dann ist $(a, c) \in R$
  - *Antisymmetrie*: Nur gleiche Elemente haben eine symmetrische Relation, d.h. wenn $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ dann ist $a = b$
- Eine Relation, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt Äquivalenzrelation
- Eine Relation, welche reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heißt Ordnungsrelation
- Eine Äquivalenzklasse zu einer Teilmenge sind alle Mengen, welche eine Äquivalenzrelation zu dieser besitzen

2 Aufgaben

1. Gegeben ist die Menge $A = \{1, 2, 3\}$. Schreibe folgende Relationen als Menge von Paaren auf

   a) $R \subseteq A \times A | a_1 \geq a_2$

b) $R \subseteq A \times A | a_1 + a_2 \leq 4$
c) $R \subseteq A \times A \times A \times A | a_1 * a_2 + a_3 * a_4 = 10$

2. Gib für nachfolgende Relationen auf der Menge $A = \{1, 2, 3\}$ an, welche Eigenschaften sie erfüllen

   a) $R = \{(a_1, a_2) \in A^2 | (a_1 * a_2)/(a_1) = a_1\}$
   b) $R = \{(a_1, a_2) \in A^2 | a_1 < a_2\}$
   c) $R = \{(a_1, a_2) \in A^2 | a_1 + a_2 \geq 5\}$

3. Gegeben ist die Menge $A = \{1, 2, 3, -1, 0, -2\}$. Überprüfe, ob die Relation $R = \{(a_1, a_2) \in A^2 : a_1 * a_2 \geq 0$ eine Äquivalenzrelation ist.

4. Die Relation $R = \{(x, y) \in A^2 : |x^2 + y| \leq |x + y^2|\}$ ist auf der Menge $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gegeben. Ist die Relation reflexiv oder symmetrisch? Gib zusätzlich ein Paar an, für das gilt $(x, y) \in R, x \neq y$ und $(y, x) \in R$

3 Funktionen

- Funktionen sind Relationen, die eindeutig sind, mit anderen Worten, jedes $a \in A$ hat genau ein $b \in B$, sodass $(a, b) \in R$
- Funktionen können verknüpft werden, indem die Werte der zweiten Funktion in die erste eingesetzt werden
- Eigenschaften von Funktionen
  - *Injektivität*: Wenn die Werte unterschiedlich sind, ist ihr Funktionswert unterschiedlich, d.h. aus $a_1 \neq a_2$ folgt $f(a_1) \neq f(a_2) \forall a \in A$
  - *Surjektivität*: Der komplette Wertebereich wird abgedeckt, mit anderen Worten $\forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$
  - *Bijektivität*: Die Funktion ist sowohl injektiv als auch surjektiv. Für bijektive Abbildungen existiert die Umkehrfunktion.

4 Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x + 3$

   a) Gib den Wertebereich der Funktion an, wenn ihr Definitionsbereich wie folgt definiert ist: $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   b) Ist die Funktion injektiv?
   c) Ist die Funktion surjektiv für folgenden Wertebereich: $W = \{-3, -2, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

2. Gib zu folgenden Funktionen an, ob sie auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ injektiv, surjektiv und bijektiv sind

   a) $f(x) = x^2$
   b) $f(x) = e^x$