

Mathe 1 Tutorium Blatt 4

Alex B.

November 2024

1 Kombinatorik

- Die Mächtigkeit einer Menge M $|M|$ kann als die Anzahl der in ihr enthaltenen Elemente gesehen werden
- Für zwei disjunkte Mengen A und B ist die Mächtigkeit ihrer Vereinigung $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Für zwei nicht disjunkte Mengen A und B ist die Mächtigkeit ihrer Vereinigung nach dem Inklusions-Exklusionsprinzip $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- In der Kombinatorik unterscheidet man zwischen Variationen (Reihenfolge wichtig) und Kombinationen (Reihenfolge egal). Für diese gelten folgende Formeln. n beschreibt dabei die Anzahl an unterscheidbaren Elementen, k die auszuwählende Anzahl.

	Ohne Wdh.	Mit Wdh.
Variation	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Kombination	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

- Ist eine Permutation mit k nicht unterscheidbaren Objektklassen gefragt (Objekte innerhalb der Klasse unterscheiden sich nicht voneinander), so gilt die Formel: $\frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$ für die Anzahl an möglichen Anordnungen

2 Aufgaben

1. In einer Schule nehmen 40 Schüler am Matheclub und 25 Schüler am Physikclub teil. 15 Schüler sind Mitglied in beiden Clubs. Wie viele Schüler sind in mindestens einem Club?
2. In einer Umfrage unter 100 Personen wurde festgestellt, dass:
 - 60 Personen Tee trinken,
 - 50 Personen Kaffee trinken,

- 30 Personen Saft trinken,
- 20 Personen Tee und Kaffee trinken,
- 15 Personen Tee und Saft trinken,
- 10 Personen Kaffee und Saft trinken,
- 5 Personen alle drei Getränke trinken.

Berechnen Sie die Anzahl der Personen, die mindestens ein Getränk trinken.

3. Ein Safe hat eine vierstellige Zahlenkombination. Es kann jede Dezimalzahl eingestellt werden. Wie viele mögliche Zahlenkombinationen gibt es, wenn
 - a) Jede Ziffer nur einmal vorkommen darf
 - b) Keine Einschränkung zur Anzahl der gleichen Ziffern existiert
4. Ein Rennen hat acht Teilnehmer. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Siegertreppchen zu füllen, wenn nicht auf die Reihenfolge geachtet wird?
5. Ein Glücksrad hat 4 verschiedene Farben: Rot, Blau, Grün und Gelb. Das Rad wird 4-mal gedreht.
 - a) Wie viele verschiedene Farbkombinationen können dabei entstehen?
 - b) Wie viele Kombinationen enthalten genau zweimal die Farbe Rot?
 - c) Wie viele Kombinationen haben genau einmal Blau und einmal Grün?
 - d) Wie viele möglichen Farbvariationen gibt es, bei der an dritter Stelle Gelb kommt?
 - e) Wie viele möglichen Farbabfolgen können entstehen, wenn an dritter Stelle Gelb kommt, die erste Stelle nicht Gelb ist und zwei benachbarte Farben nicht gleich sein dürfen?
6. Eine Gruppe von 20 Personen hat sich in zwei von 1 bis 10 durchnummerierte Teilgruppen aufgeteilt.
 - a) Wie viele Möglichkeiten für Zahlenpaare gibt es, diese Teilgruppen in 2er-Gruppen zusammenzufügen, wobei je eine Person aus der anderen Teilgruppe stammt?
 - b) Wie viele Möglichkeiten bleiben übrig, wenn die Zahl 5 sicher mit der Zahl 5 gepaart wird?
 - c) Wie viele Möglichkeiten sind gegeben, wenn zwischen den Zahlen 9 und 10 genau eine mit sich selbst gepaart werden soll?
 - d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn sich nur 5 Paare bilden sollen?
 - e) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn zwischen den Zahlen 1 und 2 höchstens eine mit sich selbst ein Paar bilden soll?

7. Eine Gruppe von 20 Studenten soll eine Klausur schreiben. Diese wird in 3 verschiedenen Räumen abgehalten. Die Reihenfolge der Studenten innerhalb eines Raumes ist egal. Die Räume werden vom größten zum kleinsten hin befüllt.
- a) Es passen 5 Studenten in den ersten Raum, 4 in den zweiten und 11 in den dritten Raum. Wie viele mögliche Aufteilungen der Studenten auf die Räume sind möglich?
 - b) 3 der Studenten müssen die Klausur nachschreiben. Die Nachschreibeklausur wird im größten Raum abgehalten. Wie verändert sich somit die Anzahl der Möglichkeiten?
 - c) 2 Studierende sind am Tag der Klausur krank. Wie verändert sich die Anzahl an Möglichkeiten?

3 Zusatzaufgabe: Induktion

Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussage gilt:
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$