Reele Zahlen

Donnerstag, 9. Mai 2019 16:33

Aufgabe 1: Rechnen im Quellsystem

Wandeln Sie folgende Zahlen per Rechnung im Quellsystem ins Dual- und Hexadezimalsystem um:

- 0.10011_2
- 11.010010_2
- 0.2575_{10}
- 0.203125_{10}
- $0.AED_{16}$
- $7.CE_{16}$

$(0{,}10011)_2 \rightarrow$ hex

$0{,}10011 \cdot 10000$

$10011\,0000$

$1001{,}10000 \rightarrow 9$

$0{,}10000 \cdot 10000$

$10000\,0000$

$1000{,}00000 = 0$ ✓ $\rightarrow 8$

$\Rightarrow (0{,}98)_{16}$

$0{,}\underbrace{1001}_{9}\,\underbrace{1000}_{8}$ } hex

$0{,}|1001|1000|$

$0{,}|\underbrace{100}_{4}|\underbrace{110}_{6}|$ } oktal

$(11{,}010010) \rightarrow$ hex

$[0{,}]010010 \cdot 10000$

$10010\,0000$

$+$

$100{,}100000$

$(3{,}48)_{16}$

$100000 \cdot 10000$

100000

$\quad\quad\quad 0\ 0\ 0\ 0$

$+$

1000000000 ✓

$(0{,}2575)_{10} \rightarrow$ dual

$0{,}2575 \cdot 2 = 0{,}515 \rightarrow 0$

$0{,}515 \cdot 2 = 1{,}030 \rightarrow 1$

$0{,}030 \cdot 2 = 0{,}060 \rightarrow 0$

$0{,}060 \cdot 2 = 0{,}120 \rightarrow 0$

$0{,}12 \cdot 2 = 0{,}24 \rightarrow 0$

$0{,}24 \cdot 2 = 0{,}48 \rightarrow 0$

$0{,}48 \cdot 2 = 0{,}96 \rightarrow 0$

$0{,}96 \cdot 2 = 1{,}92 \rightarrow 1$

$0{,}92 \cdot 2 = 1{,}84 \rightarrow 1$

$0{,}84 \cdot 2 = 1{,}68 \rightarrow 1$

$0{,}68 \cdot 2 = 1{,}36 \rightarrow 1$

$0{,}36 \cdot 2 = 0{,}72 \rightarrow 0$

$0{,}72 \cdot 2 = 1{,}44 \rightarrow 1$

$0{,}44 \cdot 2 = 0{,}88 \rightarrow 0$

$0{,}88 \cdot 2 = 1{,}76 \rightarrow 1$

$0{,}76 \cdot 2 = 1{,}52 \rightarrow 1$

$0{,}52 \cdot 2 = 1{,}04 \rightarrow 1$

$0{,}04 \cdot 2 = 0{,}08 \rightarrow 0$

$0{,}08 \cdot 2 = 0{,}16 \rightarrow 0$

$0{,}16 \cdot 2 = 0{,}32 \rightarrow 0$

$0{,}32 \cdot 2 = 0{,}64 \rightarrow 0$

$0{,}64 \cdot 2 = 1{,}28 \rightarrow 1$

$0{,}28 \cdot 2 = 0{,}56 \rightarrow 0$

$0,56 \cdot 2 = 1,12 \rightarrow 1$

$0,12 \cdot 2 =$

$\Rightarrow (0,2575)_{10} = (0,0100\overline{00011110101110000101})_2$

$(0,2575)_{10} \rightarrow hex$

$0,2575 \cdot 16 = 4,12 \rightarrow 4$

$0,12 \cdot 16 = 1,92 \rightarrow 1$

$0,92 \cdot 16 = 14,72 \rightarrow 14 = E$

$0,72 \cdot 16 = 11,52 \rightarrow 11 = B$

$0,52 \cdot 16 = 8,32 \rightarrow 8$

$0,32 \cdot 16 = 5,12 \rightarrow 5$

$\Rightarrow (0,4\overline{1EB8}5)_{16}$

$(0,203125)_{10} \rightarrow dual$

$0,203125 \cdot 2 = 0,40625 \rightarrow 0$

$0,40625 \cdot 2 = 0,8125 \rightarrow 0$

$0,8125 \cdot 2 = 1,625 \rightarrow 1$

$0,625 \cdot 2 = 1,25 \rightarrow 1$

$0,25 \cdot 2 = 0,5 \rightarrow 0$

$0,5 \cdot 2 = 1,0 \rightarrow 1$

$\Rightarrow (0,203125)_{10} = \underline{(0,001101)_2}$

$(0{,}203125)_{10}) \Rightarrow$ hex

$0{,}203125 \cdot 16 = 3{,}25 \rightarrow 3$

$0{,}25 \cdot 16 = 4{,}0 \rightarrow 4$

$\Rightarrow (0{,}203125)_{10} \Rightarrow \underline{(0{,}34)_{16}}$

$0{,}AED \rightarrow$ dual

$0{,}AED \cdot 2 = 1{,}5DA \rightarrow 1$

$0{,}5DA \cdot 2 = 0{,}BB4 \rightarrow 0$

$0{,}BB4 \cdot 2 = 1{,}768 \rightarrow 1$

$0{,}768 \cdot 2 = 0{,}ED0 \rightarrow 0$

$0{,}ED0 \cdot 2 = 1{,}DA0 \rightarrow 1$

$0{,}DA0 \cdot 2 = 1{,}B40 \rightarrow 1$

$0{,}B40 \cdot 2 = 1{,}680 \rightarrow 1$

$0{,}680 \cdot 2 = 0{,}D00 \rightarrow 0$

$0{,}D \cdot 2 = 1{,}A \rightarrow 1$

$0{,}A \cdot 2 = 1{,}4 \rightarrow 1$

$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \rightarrow 0$

$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}0 \rightarrow 1$

$(0{,}AED)_{16} = \underline{(0{,}101011101101)}_2$

$(7{,}CE)_{16} \rightarrow$ dual

$0{,}CE \cdot 2 = 1{,}9C \rightarrow 1$

$0{,}9C \cdot 2 = 1{,}38 \rightarrow 1$

$0{,}38 \cdot 2 = 0{,}70 \rightarrow 0$

$0{,}7 \cdot 2 = 0{,}E \rightarrow 0$

$0{,}E \cdot 2 = 1{,}C \rightarrow 1$

$0{,}C \cdot 2 = 1{,}8 \rightarrow 1$

$0,8 \cdot 2 = 1,0 \rightarrow 1$

$\Rightarrow (7,CE)_{16} = (111,110011)_2$

Aufgabe 2: Rechnen im Zielsystem

Wandeln Sie folgende Zahlen per Rechnung im Zielsystem ins Dezimal- und Hexadezimalsystem um:

- 0.10011_2
- 11.010010_2
- 0.2575_{10}
- $0.AED_{16}$
- $7.CE_{16}$

$Z = a_{-m}\ a_{-m+1} \dots a_1\ a_0 , a_1\ a_2\ a_3\ a_4$

$= a_{-m}\left(\frac{1}{B}\right)^{-m} a_{-m+1}\left(\frac{1}{B}\right)^{-m+1} \dots a_1\left(\frac{1}{B}\right)^{-1} a_0\left(\frac{1}{B}\right)^{0}, a_1\left(\frac{1}{B}\right)^{1} \dots$

$(0,10011)_2 \rightarrow$ dez

$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

$= \frac{16}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{19}{32} = \underline{(0,59375)}_{10}$

$(0,10011)_2 \rightarrow$ hex

$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$

$= \frac{10}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = \underline{\underline{\frac{13}{20}}}$

$(11,01001\cancel{0})_2 \to$ dez

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = 3 + \frac{8}{32} + \frac{1}{32}$$

$$= 3\,\frac{9}{32} = (\underline{\underline{3{,}28125}})_{10}$$

$(11,01001)_2 \to$ hex

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{(20)_{16}}$$

$$= 3 + \frac{8}{20} + \frac{1}{20}$$

$$\underline{\underline{= 3 + \frac{9}{20}}}$$

$(0,2575)_{10} \to$ hex

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{A}\right)^{1} + 5 \cdot \left(\frac{1}{A}\right)^{2} + 7\left(\frac{1}{A}\right)^{3} + 5 \cdot \left(\frac{1}{A}\right)^{4}$$

$$= \frac{2}{A} + \frac{5}{A^2} + \frac{7}{A^3} + \frac{5}{A^4}$$

$$= \frac{2 \cdot A^3}{A^4} + \frac{5 \cdot A^2}{A^4} + \frac{7 \cdot A}{A^4} + \frac{5}{A^4}$$

$$= \frac{2 \cdot 3E8 + 5 \cdot 64 + 7 \cdot A + 5}{A^4}$$

$$= \frac{7D0 + 1F4 + 46 + 5}{2710}$$

$$= \left(\frac{A0F}{\underline{\underline{2710}}}\right)_{16}$$

$(0{,}AED)_{16} \rightarrow$ dez

$$= 10 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^1 + 14 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 + 13 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3$$

$$= \frac{10}{16} + \frac{14}{256} + \frac{13}{4096}$$

$$= \frac{2560}{4096} + \frac{224}{4096} + \frac{13}{4096} = \underline{\underline{\frac{2797}{4096}}} \approx \underline{\underline{(0{,}6829)}}_{10}$$

$(7{,}CE)_{16} \rightarrow$ dez

$$= 7 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^0 + 12 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^1 + 14 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$$

$$= 7 + \frac{12}{16} + \frac{14}{256}$$

$$= 7 + \frac{192}{256} + \frac{14}{256}$$

$$= 7 + \frac{206}{256} = \underline{\underline{7 + \frac{103}{128}}} \approx \underline{\underline{(7{,}8047)}}_{10}$$

Aufgabe 3: Festkommadarstellung

Stellen Sie die folgenden Zahlen in Festkommadarstellung Dual mit 4 Vor- und 4 Nachkommastellen dar:

- 3.5_{10}
- 15.9375_{10}
- 16.75_{10}
- 8.96875_{10}

$$(3{,}5)_{10} = (11{,}1)_2$$

$$= \underline{(0011{,}1000)}_2$$

$$(15{,}9375)_{10} = \underline{(1111{,}1111)}_2$$

$$(16{,}75)_{10} = (10000{,}1100)_2$$

$$= \underline{(0000{,}1100)}_2$$ ↯ da nur 4 Vorkommastellen

Vorkommastellen

$(8,96875)_{10} = (1000,11111)_2$

$= \underline{(1000,1111)_2}$ ↯ da nur 4 Nachkommastellen

Aufgabe 4: Gleitkommadarstellung – normalisiert $[\frac{1}{B} \leq m < 1]$

Geben Sie folgende Zahlen normalisiert an:

- $10011 * 2^0$
- $0.001011 * 8^{12}$
- $0.110110 * 2^{-59}$
- $0.000011 * 8^{13}$

$(10011)_2 \cdot 2^0 = 0,10011 \cdot 2^5 \cdot 2^0$

$\underline{= (0,10011)_2 \cdot 2^5}$

$(0,001011)_2 \cdot 8^{12}$ $\quad \frac{1}{8} \leq 0,001011 < 1$ ✓

$\Rightarrow$ Zahl ist normalisiert.

$(0,110110)_2 \cdot 2^{-59}$: $\frac{1}{2} \leq 0,110110 < 1$ ✓

$\Rightarrow$ Zahl ist normalisiert.

$(0,000011)_2 \cdot 8^{13}$: $\frac{1}{8} \leq 0,000011 < 1$ ↯, nicht erfüllt

$(0,000011)_2 \cdot 8^{13} = 0,011 \cdot 8^{-1} \cdot 8^{13}$

$\underline{\underline{= 0,011 \cdot 8^{12}}}$ $\quad \frac{1}{8} \leq 0,011 < 1$ ✓

Wandeln Sie folgende normalisierte Gleitkommazahlen in dezimale VZ+Betrag Darstellung um: (VZ = 0 bedeutet +)

Vorzeichen (1bit)	Mantisse (23bit)	Exponent(8bit) (Exzess-64)
1) 0	1110110….0	01010101
2) 1	100110110…0	01001111
3) 0	1000…01	10000000

1) $VZ = 0 \Rightarrow \oplus$

$m = 0{,}1110110\ldots0 = 111011 \cdot 2^{-6} = 59 \cdot 2^{-6}$

$e = 01010101 - 64 = 00010101 = 21$

$\Rightarrow Z = 59 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{21}$

$= 59 \cdot 2^{15}$

$= \underline{+(1933312)_{10}}$

2) $VZ = 1 = \ominus$

$m = 0{,}100110110\ldots0 = 10011011 \cdot 2^{-8} = 155 \cdot 2^{-8}$

$e = 01001111 - 64 = 00001111 = 15$

$\Rightarrow Z = 155 \cdot 2^{-8} \cdot 2^{15}$

$= 155 \cdot 2^{7}$

$= \underline{-(19840)_{10}}$

3) $VZ = 0 = \oplus$

$m = 100\ldots01 = 100\ldots01 \cdot 2^{-23} = 4194305 \cdot 2^{-23}$

$e = 10000000 - 64 = 01000000 = 64$

$\Rightarrow Z = 4194305 \cdot 2^{-23} \cdot 2^{64}$

$= \underline{\underline{4194305 \cdot 2^{41}}}$

Aufgabe 5: IEE-754

IEEE-754 definiert 5 Formate, die zur Darstellung eingesetzt werden

normalisiert	±	0 < Exp < 255	jedes Bitmuster
denormalisiert	±	0 0 0 0 0 0 0 0	jedes Bitmuster ungleich 0
Null	±	0 0 0 0 0 0 0 0	0
unendlich	±	1 1 1 1 1 1 1 1	0
keine Zahl (NaN)	±	1 1 1 1 1 1 1 1	jedes Bitmuster ungleich 0

VZ: 1bit Mantisse: 23bit Exponent: 8bit [Excess-127]

Geben Sie folgende Zahlen in IEE-754 Darstellung normalisiert als Bitfolge an:

1) • $10011.0 * 2^0$
2) • $-0.001011 * 2^9$
3) • $0.110110 * 2^5$

1) $10011 \cdot 2^0 = 1,0011 \cdot 2^4 \cdot 2^0$

$= 1,0011 \cdot 2^4$

$\Rightarrow$ m = 001100..00

VZ = (+) = 0

e = 4 + 127 = 131 = 10000011

$\Rightarrow$ Z = 0 | 10000011 | 001100..00

VZ e m

2) $-(0,001011 \cdot 2^9) = -(1,011 \cdot 2^{-3} \cdot 2^9)$

$= -(1,011 \cdot 2^6)$

$\Rightarrow$ VZ = (−) = 1

m = 0110..0

e = 6 + 127 = 133 = 10000101

Z = 1 | 10000101 | 0110..0

3) $0,110110 \cdot 2^5 = 1,1011 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5$

$= 1,1011 \cdot 2^4$

VZ = (+) = 0

$m = 10110...0$

$e = 4 + 127 = 131 = 10000011$

$\Rightarrow z = 0 | 10000011 | 10110 ... 0$

Zusatzaufgabe: Grenzen der Gleitkommadarstellung

Für die Darstellung $z = m \cdot 2^e$ von binären, normalisierten Gleitkommazahlen stehen insgesamt 24 Stellen zur Verfügung, davon 1 Bit für das Vorzeichen und 8 Bit für den Exponenten. Die Exponenten seien kodiert in

- *Einerkomplement-Darstellung*
- *Zweierkomplement-Darstellung*
- *Exzess-128-Darstellung*

Lösen Sie für alle Fälle folgende Aufgaben:

1. Was ist der Unterlauf- und Überlaufbereich der Darstellung?

$z = m \cdot 2^e$: 24 bit : 1 VZ, 8 Exponent, 15 Mantisse

1) Unterlauf:

1er Komplement:

$e_{min} = 10000000 = -127$

$m_{min} = (0{,}1)_2$ [da $\frac{1}{2} \le m < 1$ erfüllt sein muss]

$\Rightarrow$ kleinste darstellbare Zahl $= \frac{1}{2} \cdot 2^{-127}$

$\Rightarrow$ Unterlauf ab $|z| < \frac{1}{2} \cdot 2^{-127}$

2er-Komplement:

$e_{min} = 1000\,0000 = -128$

$m_{min} = (0{,}1)_2$

$\Rightarrow$ Unterlauf ab $|z| < \frac{1}{2} \cdot 2^{-128}$

Excess-128:

$e_{min} = 00000000 - 128 = -128$

$m_{min} = (0,1)_2$

$\Rightarrow$ Unterlauf ab $|z| < \frac{1}{2} \cdot 2^{-128}$

<u>Überlauf:</u>

1er-Komplement:

$e_{max} = 01111111 = +127$

$m_{max} = 0,111....1 = 1 - 2^{-15}$

$0,1 = \frac{1}{2} = 2^{-1} = 1 - 2^{-1}$

$0,11 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2^{-1} + 2^{-2} = 1 - 2^{-2}$

....

$\Rightarrow$ größte darstellbare Zahl $= 1 - 2^{-15} \cdot 2^{127}$

$\Rightarrow$ Überlauf ab $|z| > 1 - 2^{-15} \cdot 2^{127}$

2er-Komplement:

$e_{max} = 01111111 = +128$

$m_{max} = 1 - 2^{-15}$

$\Rightarrow$ Überlauf ab $|z| > 1 - 2^{-15} \cdot 2^{128}$

Excess-128:

$e_{max} = 11111111 - 128 = 255 - 128 = 127$

$m_{max} = 1 - 2^{-15}$

$\Rightarrow$ Überlauf ab $|z| > 1 - 2^{-75} \cdot 2^{127}$

2.Welche Zahl wird durch das Bitmuster e = 11010101 und m = 111001110 ... 0 dargestellt?

$m = 1{,}111001110\ldots0 = 111001111 \cdot 2^{-8}$

$= 455 \cdot 2^{-8}$

1er - Komplement:

$e = 11010101 \rightarrow$ negativ

$= K_1(11010101) = 00101010 = -42$

$\Rightarrow |z| = 455 \cdot 2^{-8} \cdot 2^{-42}$

$\underline{= 455 \cdot 2^{-50}}$

2er - Komplement:

$e = 11010101 \rightarrow$ negativ

$= K_2(11010101)$

$= K_1(11010101) + 1$

$= 00101011$

$= -43$

$\Rightarrow |z| = 455 \cdot 2^{-8} \cdot 2^{-43}$

$\underline{= 455 \cdot 2^{-51}}$

Excess - 128:

$e = 11010101 - 128$

$= 01010101$

$= 85$

$\Rightarrow |z| = 455 \cdot 2^{-8} \cdot 2^{85}$

$\underline{= 455 \cdot 2^{77}}$

3. Wie groß ist der Abstand zwischen zwei benachbarten, darstellbaren Zahlen z in den Bereichen:
$2^{-32} \le z < 2^{-31}$, $2^{-12} \le z < 2^{-11}$, $2^{2} \le z < 2^{3}$, $2^{27} \le z < 2^{28}$

seien z_1, z_2 darstellbar und benachbart
sei $z_1 > z_1$
gesucht: $d = z_1 - z_2$ minimal

$z_1 = m_1 \cdot 2^{e_1}$
$z_2 = m_2 \cdot 2^{e_2}$

$\Rightarrow d = m_1 \cdot 2^{e_1} - m_2 \cdot 2^{e_2}$

Annahme für minimales d: $e_1 = e_2 := e$

$\Rightarrow d = m_1 \cdot 2^e - m_2 \cdot 2^e = (m_1 - m_2) \cdot 2^e$

$m_1 = (0{,}1...)_2 = 1... \cdot 2^{-15}$
$m_2 = (0{,}1...)_2 = 1... \cdot 2^{-15}$
} Ganzzahlen

$\Rightarrow m_1 - m_2 = 1 \cdot 2^{-15}$ da min. Abstand zwischen Ganzzahlen $= 1$

$\Rightarrow d = 1 \cdot 2^{-15} \cdot 2^e$
$= 1 \cdot 2^{e-15}$

Schema der Aufgabe:

$2^a \le z < 2^{a+1}$

$\downarrow$

$2^a \le m \cdot 2^e < 2^{a+1}$

$\downarrow$ $2a = \frac{1}{2} 2^{a+1}$

$\frac{1}{2} 2^{a+1} \le m \cdot 2^e < 1 \cdot 2^{a+1}$

$\Rightarrow$ vgl. Ähnlichkeit zu Normalisierung $\frac{1}{2} \le z < 1$

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{a+1} \le m \cdot 2^{a+1} < 1\cdot 2^{a+1}$$

$$\Rightarrow e = a+1$$

$$\Rightarrow d = 2^{a+1-15}$$

Zahlenbereiche	d
$2^{-32} \le z < 2^{-31}$	$2^{-31-15} = 2^{-46}$
$2^{-12} \le z < 2^{-11}$	$2^{-11-15} = 2^{-26}$
$2^{2} \le z < 2^{3}$	$2^{3-15} = 2^{-12}$
$2^{27} \le z < 2^{28}$	$2^{28-15} = 2^{13}$

4. Ist die Zahl $z = 187 + \frac{71}{512}$ darstellbar? Welche darstellbaren Zahlen haben minimalen Abstand von z? Geben Sie deren Bitmuster und den Abstand an.

$$z = 187 + \frac{71}{512} = 128+32+16+8+2+1+\frac{64}{512}+\frac{4}{512}+\frac{2}{512}+\frac{1}{512}$$

$$= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}$$

$$= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + 2^{-3} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-9}$$

$\downarrow$ Normalisierung

$$= 2^8 \cdot \left(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-11} + 2^{-15} + 2^{-16} + 2^{-17}\right)$$

Mantisse: 15 Stellen

$\hookrightarrow 15 < 17$

$\Rightarrow$ z ist nicht darstellbar.

Zahlen mit minimalem Abstand:

$$z_u < z < z_o$$

$$z_u = \left(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-11} + 2^{-15}\right) \cdot 2^8$$

$$= 187\,\frac{68}{512} = \underline{\underline{187\,\frac{17}{128}}}$$

z_o : nächstgrößere Zahl von z_u

$$z_o = \left(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-11} + 2^{-14}\right) \cdot 2^{8}$$

$$= 187 \frac{9}{64} = \underline{\underline{187 \frac{18}{128}}}$$