Università degli Studi di Padova

Formulario di Teoremi e relative Dimostrazioni

Student :
Alex Gasparini

23 novembre 2025

Indice

1 Principio d'Induzione

Teorema 1: del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dimostrazione. Facciamo una dimostrazione per induzione. Partiamo con la base induttiva, con $n_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k \\
1 &= \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 \\
1 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

La base induttiva è stata verificata. Ora passiamo al passo, quindi supponiamo che $P(n)$ sia vero, e proviamo a vedere se è vero $P(n+1)$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Per proseguire con la dimostrazione lasceremo in alterato il termine di destra e andremo a modificare quello di sinistra.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$$

Ora possiamo sostituire $(a+b)^n$ con $P(n)$ visto che è $P(n)$ è vera (dato che è una nostra ipotesi)

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a+b) && (1) \\
&= \underline{a \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)} + \underline{b \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)} && (2)
\end{aligned}$$

Per comodità andiamo a d analizzare singolarmente le due sommatorie, prima quella in blu e poi quella in rosso.

$$\begin{aligned}
\underline{a \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)} &= \sum_{k=0}^{n} a \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Ora analiziamo la parte rossa

$$\begin{aligned}
\underline{b \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \right)} &= \sum_{k=0}^{n} b \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}
\end{aligned}$$

ora facciamo una sostituzione $h = k + 1$

$$\begin{aligned}
\underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}} &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} b^{h} \\
&= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^{h}
\end{aligned}$$

Visto che gli indici nelle sommatorie sono muti, sostituiamo h con k, in modo che tutte le sommatorie sono rispetto a k

$$\underline{\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^{h}} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k}$$

Ricomposiamo le due sommatorie ritornando al punto (2)

$$(a+b)^{n+1} = \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k}} + \underline{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k}} \tag{3}$$

Per unire le due sommatorie devono avere gli stessi indici, quindi rimoviamo gli indici "in più", nella prima togliamo il termine con indice $k = 0$, in modo che entrambe partano con $k = 1$, e nella seconda rimuoviamo il termine $k = n + 1$ in modo che entrambe finiscano con il termine $k = n$

$$\begin{aligned}
\underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k}} &= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} \\
&= 1 \cdot a^{n+1} \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k} &= \binom{n}{(n+1)-1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\
&= \binom{n}{n}a^0b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\
&= 1\cdot 1\cdot b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\
&= b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

Riscriviamo il termine (3)

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \underline{a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k}+\underline{b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k}\\
&= \underline{a^{n+1}}+\underline{b^{n+1}}+\underline{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k}+\underline{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k}\\
&= a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\right)\\
&= a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a^{n+1-k}b^k\cdot\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\\
&= a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a^{n+1-k}b^k\cdot\binom{n+1}{k}\\
&= a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

Siamo quasi alla fine ma notiamo che rispetto a $P(n+1)$ gli indici sono sbagliati, infatti $P(n+1)$ parte con indice $k=0$ e termina con $k=n+1$, mentre la sommatoria che abbiamo appena trovato parte da $k=1$ e termina con $k=n$. Proviamo a vedere cosa sarebbero i termini $k=0$ e $k=n+1$ (quelli che a noi mancano)

$$\binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^0 = 1\cdot a^{n+1}\cdot 1 = \underline{a^{n+1}} \qquad (k=0)$$
$$\binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1} = 1\cdot 1\cdot b^{n+1} = \underline{b^{n+1}} \qquad (k=n+1)$$

Vediamo che i termini che ci mancano (a^{n+1} e b^{n+1}) in realtà ce li abbiamo fuori dalla sommatoria, quindi possiamo "portarli dentro" alla sommatoria sistemando gli indici

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}
$$

In questa maniera siamo riusciti a dimostrare il passo indutttivo, visto che siamo partiti da $P(n)$ e siamo riusciti a dimostrare che $P(n+1)$. Pertanto, visto che sia il passo induttivo che la base induttiva sono verificati, allora il teorema è dimostrato. □

Teorema 2: Irrazionalità di $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta per assurdo, quindi partiamo supponendo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pertanto $\sqrt{2}$ lo possiamo scrivere come:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Supponiamo anche che il $mcd(p, q) = 1$ (Massimo Comun Divisore), altrimenti p e q sarebbero semplificabili ulteriormente. Attenzione perchè questo punto sarà fondamentale per la dimostrazione.

Per semplicità, eleviamo tutto al quadrato

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \tag{4}$$

$$2q^2 = p^2 \tag{5}$$

Ora notiamo che p^2 è un multiplo di 2, perciò p^2 è un numero pari. di conseguenza anche p è un numero pari dato che solamente un il prodotto di due numeri pari da un numero pari. Allora possiamo scrivere p come

$$p = 2k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi andiamo a sostituirlo nell'equazione (5)

$$
\begin{aligned}
2q^2 &= (2k)^2 \\
2q^2 &= 4k^2 \\
q^2 &= 2k^2
\end{aligned}
$$

Dopo le varie semplificazioni notiamo che anche q^2 è divisivile per 2, e come abbiamo dedotto per p, allora anche q è divisibile per 2. Però sia p che q sono divisibili per 2, questo implica che $mcd(p, q) \geq 2$. Cosa assurda, visto che avevamo imposto che $mcd(p, q) = 1$, pertanto sono sbagliate le tesi: ovvero che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, e se questa affermazione è sbagliata allora per forza $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

2 Insiemistica

Definizione 1: Insieme Limitato

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ è detto

- **Superiormente limitato** se $\exists M \in \mathbb{R} : M \geq a \ \ \forall a \in A$
- **Inferiormente limitato** se $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a \ \ \forall a \in A$

L'insieme $\{M : M \geq a \ \ \forall a \in A\}$ è detto **Insieme dei maggioranti di** A.
L'insieme $\{m : m \leq a \ \ \forall a \in A\}$ è detto **Insieme dei minoranti di** A

Definizione 2: Massimo e Minimo

- Un maggiorante M di $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **massimo** se $M \in A$

$$M = max(A) = (M \geq a \ \ \forall a \in A) \wedge M \in A \tag{6}$$

- Un minorante m di $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **minimo** se $m \in A$

$$m = min(A) = (m \leq a \ \ \forall a \in A) \wedge m \in A \tag{7}$$

Teorema 3: Unicità dei Massimi e Minimi

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se ammette un massimo o un minimo, essi sono **unici**

Dimostrazione. Supponiamo che ci siano due massimi M_1, M_2 con $M_1 \neq M_2$. Visto che M_1 è un massimo allora, per definizione di massimo (6), deve essere $M_1 \in A$. Poi visto che M_2 è un massimo, di conseguenza è anche un maggiorante allora, per definizione di maggiorante, deve valere la seguente affermazione

$$M_2 \geq a \ \ \forall a \in A$$

Dato che $M_1 \in A$ possiamo dire che

$$M_2 \geq M_1 \tag{8}$$

Ora rifacciamo il seguente ragionamento ma al contrario. Dato che M_2 è massimo allora deve essere $M_2 \in A$. Visto che M_1 è un massimo deve anche essere un maggiorante, e per tanto vale

$$M_1 \geq a \ \ \forall a \in A$$

Dato che $M_2 \in A$ possiamo dire che

$$M_1 \geq M_2 \tag{9}$$

Ora combinando le informazioni (8) e (9) deve valere

$$(M_2 \geq M_1) \wedge (M_1 \geq M_2) \Rightarrow M_1 = M_2$$

Dato che una delle ipotesi era che $M_1 \neq M_2$ abbiamo raggiunto un assurdo, per tanto il massimo deve essere unico. La dimostrazione per il minimo è analoga. $\square$

Definizione 3: Estremi Superiore e Inferiore

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ definiamo

- **estremo superiore** di A come il minore dei maggioranti.

$$sup(A) = min\{M : M \geq a \ \ \forall a \in A\} \tag{10}$$

- **estremo inferiore** di A come il maggiore dei minoranti.

$$inf(A) = max\{m : m \leq a \ \ \forall a \in A\}$$

Teorema 4: Relazione Massimi/Minimi e Estremi

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$

- Se esiste $max(A)$, allora coincide con $sup(A)$

$$M = max(A) \Rightarrow M = sup(A)$$

- Se esiste $min(A)$, allora coincide con $inf(A)$

$$m = min(A) \Rightarrow m = inf(A)$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista $M_1 = max(A)$ allora sappiamo che è un maggiorante, e di conseguenza appartiene all'insieme dei maggioranti (N)

$$M_1 \in N = \{M : M \geq a \ \ \forall a \in A\} \tag{11}$$

e sappiamo anche che $M_1 \in A$, visto che è il massimo.
Se prendiamo un numero $u \in N$ abbiamo che

$$u \geq a \ \ \forall a \in A \ \ \forall u \in N$$

Visto che $M_1 \in A$ allora deve valere

$$u \geq M_1 \ \ \forall u \in N$$

Per questo deduciamo che M_1 è minorante di N, ma nel punto (11) avevamo detto che $M_1 \in N$, di conseguenza

$$M_1 = min(N)$$

Che per definizione è anche l'estremo superiore, quindi

$$M_1 = sup(A)$$

La dimostrazione del minimo è analoga. $\square$

N.B. che $max(A) \Rightarrow sup(A)$ e che $sup(A) \not\Rightarrow max(A)$. Per vederlo basta farsi degli esempi, come $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$ si vede che esiste un estremo superiore ($sup(A) = \sqrt{2}$) mentre non esiste il massimo.

Teorema 5: Caratterizzazione degli Estremi

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste $sup(A)$ oppure $inf(A)$ allora possiamo definirli anche come:

$$S = \sup(A) = \begin{cases} S \in \{M : M \geq a \;\; \forall a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in A : a > S - \varepsilon \end{cases}$$

$$s = \inf(A) = \begin{cases} s \in \{m : m \leq a \;\; \forall a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in A : a < s + \varepsilon \end{cases}$$

Teorema 6: Completezza di $\mathbb{R}$ *I°* forma

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \leq b \;\; \forall a \in A \;\; \forall b \in B$
allora $\exists c \in \mathbb{R}$, detto **elemento separatore** tale che

$$a \leq c \leq b \;\; \forall a \in A \;\; \forall b \in B$$

Teorema 7: Completezza di $\mathbb{R}$ *II°* forma

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se è superiormente/inferiormente limitato allora ammette un estremo superiore/inferiore.

Dimostrazione. Dato che A è superiormente limitato allora esiste l'insieme dei maggiornati $N = \{M : M \in \mathbb{R} : M \geq a \;\; \forall a \in A\}$. Visto che tutti gli elementi dell'inisieme dei maggioranti è maggiore di tutti gli elementi di A ($n \geq a \;\; \forall a \in A \;\; \forall n \in N$) possiamo applicare il Teorema di completezza di $\mathbb{R}$ *I°* forma

$$\exists c \in \mathbb{R} : \;\; \underline{a \leq} c \underline{\leq n} \;\; \forall a \in A \;\; \forall n \in N$$

Visto che $\underline{a \leq c} \;\; \forall a \in A$ vuol dire che c è un maggiorante di A e di conseguenza $c \in N$ (l'insieme dei maggioranti).

Dato che $\underline{c \leq n} \;\; \forall n \in N$ allora c è un minorante di N. Quindi visto che $c \in N$, per definizione di minimo (7) possiamo dire che

$$c = min(N)$$

Questo coincide con la definizione di **estremo superiore**, quindi

$$c = sup(A)$$

Quindi abbiamo dimostrato che esiste un estremo superiore.
La dimostrazione don l'estremo inferiore è analoga. □

Definizione 4: Intorno

ia $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora

- Se $r \in \mathbb{R}$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma
$$(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \quad \epsilon > 0$$
- Se $r = +\infty$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma
$$(M, +\infty) \quad M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
- Se $r = -\infty$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma
$$(-\infty, M) \quad M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Teorema 8: Intersezione degli introni

Sia $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intorni di x_0, allora anche $I = I_1 \cap I_2$ è intorno di x_0.

Teorema 9: Separazione degli introni

Sia $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora $\exists I_1$ intorno di r_1 e $\exists I_2$ intorno di r_2 tali che $I_1 \cap I_2 = \varnothing$

Definizione 5: Definizione di punto di Accumulazione

ia $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è detto **punto di accumulazione** di $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se

- caso $r \in \mathbb{R}$:
$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap (I \setminus \{r\}) \neq \varnothing$$
- caso $r \in \{\pm\infty\}$:
$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap I \neq \varnothing$$

Definizione 6: Accumulazione Destro/Sinistro

ia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ è detto

- **Punto di accumulazione destro** se
$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r, r + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$
- **Punto di accumulazione sinistro** se
$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r - \varepsilon, r) \cap A \neq \varnothing$$

N.B. i simboli $\pm\infty$ non ha senso definirli punti di accumulazione destro/sinistro

Esercizio 1

Sia $r \in \mathbb{R}$ e $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, r è punto di accumulazione destro o sinistro di A se e solo se r è punto di accumulazione di A

Dimostrazione. Visto che questa è una doppia implicazione dobbiamo controllare che l'implicazione sia vera da entrambi i lati.

($\Longrightarrow$)Partiamo dimostrando che se r è punto di accumulazione destro (o sinistro) di A allora r è punto di accumulazione di A. Partiamo con la definizione di punto di accumulazione destro.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r, r + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

Ora dobbiamo controllare se è vera la definizione di punto di accumulazione, per farla riscriviamola

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap (I \setminus \{r\}) \neq \varnothing$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ((r - \varepsilon, r + \varepsilon) \setminus \{r\}) \cap A \neq \varnothing$$

Con questa riscrittura si nota che

$$(r, r + \varepsilon) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \setminus \{r\}$$

Di conseguenza per ogni insieme che troviamo per il punto di accumulazione destro, posso trovare un intervallo sul punto di accumulazione, di conseguenza se r è un punto di accumulazione destro deve anche essere un punto di accumulazione in A. Ragionamento analogo per il punto di accumulazione sinistro

($\Longleftarrow$)Per dimostrare che se r è punto di accumulazione allora deve essere punto di accumulazione destro o sinistro, ragioniamo per assurdo: quindi supponiamo che r non è ne punto di accumulaione destro ne sinistro. Allora sappiamo

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0 : (r - \varepsilon_1, r) \cap A = \varnothing \wedge (r, r + \varepsilon_2) \cap A = \varnothing$$

Ma se prendiamo $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ allora

$$\exists \varepsilon > 0 : (r - \varepsilon_, r + \varepsilon_) \cap A = \varnothing$$

Questo non è altro che la definizione di punto isolato, ovvero la negazione di punto di accumulazione. Quindi abbiamo scoperto che

$$r \text{ non è punto acc. dx e } r \text{ non è punto acc. sx} \Rightarrow r \text{ non è punto di acc.}$$

Usando le proprietà dell'implicazione $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

$$r \text{ è punto di acc.} \Rightarrow r \text{ è punto acc. dx opure } r \text{ è punto acc. sx}$$

$\square$

3 Limiti

Definizione 7: Definizione di Limite

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per A, $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è **limite di f per $x \to x_0$** se

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l,\ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}$$
$$f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Teorema 10: Unicità del limite

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per A, $f : A \to \mathbb{R}$. Se esiste il limite f per $x \to x_0$ allora è unico. E lo si indica con:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{12}$$

Dimostrazione. Supponiamo che il limite esista ed abbiamo due valori: $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $l_1 \neq l_2$. Visto che per ipotesi $l_1 \neq l_2$ allora per il teorema di separazione abbiamo che $\exists U_1 \subseteq \mathbb{R}$ intorno di l_1 e $\exists U_2 \subseteq \mathbb{R}$ intorno di l_2 tali che:

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \tag{13}$$

Applicando la definizione di limite, $\exists I_1, I_2$ intorni di x_0 tali che:

$$\forall U_1 \text{ intorno di } l_1 \qquad f(x) \in U_1 \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$$
$$\forall U_2 \text{ intorno di } l_2 \qquad f(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$$

Usando il teorema di intersezione degli intorni, $\exists I_3 = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0, e visto che $I_3 \subseteq I_1$, anche in esso varrà la proprietà del limite l_1. Contemporaneamente varrà anche la proprietà del limite l_2 visto che $I_3 \subseteq I_2$, per tanto

$$\forall U_1\ \forall U_2 \qquad f(x) \in U_1 \land f(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_3 \setminus \{x_0\})$$

la congiungiole logica la possiamo riscrivere come congiunzione insiemistica

$$\forall U_1\ \forall U_2 \qquad f(x) \in U_1 \cap U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_3 \setminus \{x_0\})$$

Però questo necessita che $\forall U_1\ \forall U_2 \quad U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, perchè altrimenti il limite non esisterebbe. Ma all'inizio con l'equazione (13) sappiamo che esistono almeno un U_1 e un U_2 che rendono l'intersezione vuoto. Per tanto è un assurdo e le ipotesi erano sbagliate. Di conseguenza il limite deve essere unico e non può assumere più di un valore.

□

Esercizio 2

$$\lim_{x\to x_0} 2x+3 = 2x_0+3$$

Dimostrazione. Proviamo a dimostrarlo con la definizione. $f(x) = 2x+3$ e, dato che è un polinomio, il suo dominio sarà $A = \mathbb{R}$. l'intorno di $l = 2x_0+3$ sarà $U = (2x_0+3-\varepsilon, 2x_0+3+\varepsilon)$, e un intorno di x_0 sarà $I = (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Di conseguenza con la definizione di limite sarà

$$\forall U \quad f(x) \in U \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

Con i dati dell'esercizio

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 2x+3 \in (2x_0+3-\varepsilon, 2x_0+3+\varepsilon) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$$

Riscriviamo il termine $2x+3 \in (2x_0+3-\varepsilon, 2x_0+3+\varepsilon)$

$$\begin{gathered} 2x_0+3-\varepsilon < 2x+3 < 2x_0+3+\varepsilon \\ 2x_0-\varepsilon < 2x < 2x_0+\varepsilon \\ x_0-\tfrac{\varepsilon}{2} < x < x_0+\tfrac{\varepsilon}{2} \end{gathered}$$

Vediamo come partendo dalla prima porzione abbiamo trovato un intorno su cui deve stare x, pertanto affinchè sia vero la definizione di limite possiamo scegliere

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

□

Esercizio 3

$$\lim_{x\to x_0} c = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$$

Scrivendola in un'altra maniera

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$

Però il conseguente della nostra implicazione è sempre vero, perchè c sarà sempre nell'intevallo $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ per qualsiasi valore di ε positivo. Quindi volendo riscrivere la proposizione

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow Vero$$

Una implicazione è sempre vera quando implica vero (vedi tabella di verità dell'implicazione). Quindi la nostra proposizione è sempre vera, e di conseguenza il limite è verificato. □

Esercizio 4

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

Dimostrazione. Con la definizione di limite abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x^2 \in (x_0^2 - \varepsilon, x_0^2 + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Utilizzando le proprietà della funzione modulo possiamo scriverlo anche come

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \;\Leftarrow\; |x - x_0| < \delta$$

Riscriviamo il primo termine

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$
$$|(x - x_0)(x + x_0)| < \varepsilon$$
$$|x - x_0||x + x_0| < \varepsilon$$

Ora dobbiamo capire quanto vale $|x + x_0|$in modo da non avere più la variabile x. Per farlo scegliamo $\delta < 1$

$$|x + x_0| < \delta < 1$$
$$|x + x_0| < 1$$

con questo scopriamo che

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq \underline{|x - x_0|} + 2|x_0| < \underline{1} + 2|x_0|$$

$$|x + x_0| < 1 + 2|x_0|$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$, ricordandoci anche che $|x - x_0| < \delta$

$$|x - x_0||x + x_0| < |x - x_0|(1 + 2|x_0|)$$
$$|x - x_0||x + x_0| < \underline{|x - x_0|}(1 + 2|x_0|) < \underline{\delta}(1 + 2|x_0|)$$

$$|x - x_0||x + x_0| < \delta(1 + 2|x_0|)$$

Partendo da $|x - x_0| < \delta$ siamo riusciti a capire che $|x^2 - x_0^2| < \delta(1 + 2|x_0|)$, quindi se per verificare il limite bisogna che $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ è necessario imporre

$$\delta(1 + 2|x_0|) < \varepsilon$$
$$\delta < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$$

Visto che abbiamo imposto $\delta < 1$, aggiustiamo la definizione

$$\delta < min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

□

Esercizio 5

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 \geq 0$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon \quad |x - x_0| < \delta$$

Partiamo analizzando il termine $|x - x_0| < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| < \delta$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}$$

Ora possiamo sfruttare la seguente espressione

$$|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| \geq |\sqrt{x_0}|$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{x_0}|}$$

Di conseguenza

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$$

Affinchè il limite sia verificato è necessiario che

$$\frac{\delta}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

$$\delta < \sqrt{x_0}\varepsilon$$

N.B. per tutto l'esercio abbiamo potuto scrivere $\sqrt{x_0}$ non controllando se x_0 fosse non negativo perchè il dominio di $f(x) = \sqrt{x}$ è $\mathbb{R}_0^+$ e di conseguenza qualsiasi punto $x < 0$ non è punto di accumulazione, dato che esiste almeno un intorno di un numero negativo che intersecato con il dominio ($\mathbb{R}_0^+$) dà insieme vuoto. E per questo il limite lo possiamo fare solo con valori di $x \geq 0$ e possiamo scrivere $\sqrt{x_0}$ senza alcun problema.

□

Esercizio 6

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Con la definizione di limite abbiamo

$$|x^n - x_0^n| < \varepsilon$$

$$\left| (x - x_0) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| < \varepsilon$$

Ora dobbiamo capire quanto vale il secondo termine in modo da non avere più la variabile x.

$$|x + x_0| < \delta < 1$$

$$|x + x_0| < 1$$

con questo scopriamo che

$$|x| = |x - x_0 + x_0| \leq \underline{|x - x_0|} + |x_0| < \underline{1} + |x_0|$$

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Di conseguenza

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x^{n-1-k} x_0^k| = \sum_{k=0}^{n-1} |\underline{x^{n-1-k}}||x_0^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\underline{(1 + |x_0|)^{n-1-k}}||x_0^k|$$

Semplificando un po troviamo che

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| \leq (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$, ricordandoci anche che $|x - x_0| < \delta$

$$\underline{|x - x_0| \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right|} < |x - x_0| (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

$$\underline{|x^n - x_0^n|} < \underline{|x - x_0|} (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k < \underline{\delta} (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

$$|x^n - x_0^n| < \delta (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

Per trovare quanto vale ε basta fare

$$\delta(1+|x_0|)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|x_0|}{1+|x_0|}\right)^k < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{(1+|x_0|)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|x_0|}{1+|x_0|}\right)^k}$$

Visto che abbiamo imposto $\delta < 1$, aggiustiamo la definizione

$$\delta < min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|x_0|)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|x_0|}{1+|x_0|}\right)^k}\right)$$

□

Esercizio 7

$$\lim_{x\to x_0} sin(x) = sin(x_0)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite

$$|sin(x) - sin(x_0)| < \varepsilon$$

Usando le formule di Prostaferesi ($sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

$$|sin(x) - sin(x_0)| = \left|2cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

Ora ricordiamo che per definizione delle funzioni trigonometriche, vale sempre la seguente proposizione

$$|cos(x)| \leq 1 \qquad |sin(x)| \leq 1$$

Quindi usiamo questa proprietà del coseno per diventare

$$\left|\underline{2cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)} sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\underline{1}\cdot sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

Poi ricordiamo anche che per la funzione seno vale la seguente relazione

$$|sin(x)| \leq |x|$$

E che quindi nella nostra dimostrazione possiamo usarla

$$2\left|sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

Riscrivendo le informazioni trovate finora sappiamo che

$$|sin(x) - sin(x_0)| \leq |x - x_0|$$

Per la definizione di limite sappiamo che $|x - x_0| < \delta$

$$|sin(x) - sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta$$

Ora se dobbiamo trovare il ε basta impore

$$|sin(x) - sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon$$

Per il coseno la dimostrazione è analoga. $\square$

Esercizio 8

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \qquad a \in [1, +\infty)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo limite dobbiamo trovare un un qualche $\delta > 0$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \epsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad -\delta < x < \delta \Rightarrow 1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon$$

Quindi iniziamo partendo dalla disuguaglianza di Bernulli

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall \varepsilon \geq 0 \tag{14}$$

Ora decidiamo che $a < 1 + n\varepsilon$ e che quindi $\forall n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ vale

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > a$$

$$(1 + \varepsilon)^n > a$$

$$1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}}$$

Ora quindi sappiamo che per qualsiasi valore di $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ vale la relazione $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, quindi se trovo per quali valori di x vale la relazione $a^x < a^{\frac{1}{n}}$ posso imporre $a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$ che vuol dire che abbiamo dimostrato la prima parte.

$$a^x < a^{\frac{1}{n}}$$

Per monotonia della funzione $f(x) = a^x$ allora vale

$$x < \frac{1}{n}$$

Quindi per dimostrare il limite basta scegliere un $\delta < \frac{1}{n}$ in modo tale che l'espressione $a^x < 1 + \varepsilon$ sia valida.

Per dimostrare la porzione $1-\varepsilon < a^x$ dobbiamo ricorrere alla formula

$$1-\varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} \tag{15}$$

Dai ragionamenti di prima sappiamo che $(1+\varepsilon)^n > a$, quindi vale anche

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n < \frac{1}{a^n}$$

Quindi se eleviamo tutto alla n l'equazione (15) ricaviamo

$$(1-\varepsilon)^n < \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n < \frac{1}{a}$$

N.B. per non avere problemi di segno dobbiamo imporre $1-\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$.

$$(1-\varepsilon)^n < \frac{1}{a}$$

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}$$

Quindi come per la prima parte della dimostrazione ora basta scegliere delle x per cui $a^{-\frac{1}{n}} < a^x$, che per monotonia come prima rimane

$$-\frac{1}{n} < x$$

Per confermare la dimostrazione possiamo scegliere un δ tale che

$$-\frac{1}{n} < -\delta$$

$$\delta < \frac{1}{n}$$

Quindi sce scegliamo un $\delta < \frac{1}{n}$ anche l'espressione $1-\varepsilon < a^x$ sarà verificata. Pertanto per verificare il limite basta scegliere

$$\delta = min\left(1, \frac{\varepsilon}{a-1}\right)$$

□

Esercizio 9

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \qquad a \in (0,1)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo limite possiamo usare uno stratagemma per evitare di fare tutta la dimostrazione classica. Perchè con l'esercizio precendente abbiamo dimostrato con la base $a \geq 1$, quindi cerchiamo di ricondurli a quel limite. Per farlo usiamo le regole delle potenze infatti

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$$

Quindi il limite lo possiamo riscrivere come

$$\lim_{x\to 0} a^x = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

In questa maniera la base è maggiore di 1, di conseguenza è uguale al limite dell'esercizio precedente da quel punto di vista. Quello che cambia è che all'esponente abbiamo $-x$ e non più x, però non è troppo un problema, infatti se $x \to 0$ allora anche $-x \to 0$, quindi l'esponente si avvicina lo stesso allo 0, di conseguenza il limite sarà lo stesso, di prima e possiamo usare quello (che abbiamo già dimostrato) per dimostrare questo senza la dimostrazione rigorosa.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{x} = 1$$

N.B. il passaggio dove diciamo che se $x \to 0$ allora $-x \to 0$ non è dimostrato in maniera rigorosa, infatti per questo passaggio serve il teorema del cambio di variabile che vedremo più avanti, ma intuitivamente ha senso che se $x \to 0$ allora $-x \to 0$. □

Ora vediamo un caso particolare, che come vedremo non ha soluzione per come abbiamo definito il limite.

Esercizio 10

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \neq +\infty$$

Dimostrazione. Proviamo usando la definizione di limite.

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : f(x) \in (M, +\infty)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \frac{1}{x} \in (M, +\infty)\ \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\}$$

Partiamo analizzando $\frac{1}{x} \in (M, +\infty)$

$$\frac{1}{x} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M$$

Ricordiamo che $M > 0$, quindi anche $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Ora possiamo fare il reciproco di entrambi i membri (visto che sono entrampi positivi)

$$\frac{1}{x} > M > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

Quindi fino ad ora abbiamo capito che $f(x) \in (M, +\infty)$ è uguale a dire $0 < x < \frac{1}{M}$, però nella definizione di limite abbiamo che $\forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ però questo è impossibile, perchè per qualsiasi valore di δ l'intevallo comprenderà anche numeri negativi (dato che l'intervallo è $(-\delta, \delta)$ ma ciò va in contraddizione con quanto abbiamo trovato prima (ovvero che $0 < x < \frac{1}{M}$. Infatti non c'è nessun valore di $\delta > 0$ che valida la seguente affermazione.

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \not\subseteq (0, \frac{1}{M})$$

Pertanto il limite è sbagliato. Il ragionamento con $-\infty$ è analogo.

Per poter calcolare questo limite ci serve la nozione di limite destro e limite sinistro.

□

Definizione 8: Limite Destro e Sinistro

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

- Sia x_0 punto di accumulazione destro, allora definiamo limite destro di $f(x)$ come

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

E la sua caratterizzazione sarà

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l\ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}$$
$$\forall x \in A \cap I \cap (x_0, +\infty) \quad f(x) \in U$$

- Sia x_0 punto di accumulazione sinistro, allora definiamo limite sinistro di $f(x)$ come

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

E la sua caratterizzazione sarà

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l\ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}$$
$$\forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0) \quad f(x) \in U$$

Ora proviamo a risolvere il limite di prima con il limite destro.

Esercizio 11

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite destro

$$\forall M > 0\ \ \exists \delta > 0 : \ \frac{1}{x} \in (M, +\infty)\ \ \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\} \cap (0, +\infty)$$

Riscriviamo meglio l'ultimo termine

$$(-\delta, +\delta) \setminus \{0\} \cap (0, +\infty) = (0, \delta)$$

Ora possiamo fare gli stessi ragionamenti di prima

$$\frac{1}{x} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M$$

Visto che $M > 0$ allora anche $x > 0$, per lo stesso ragionamento di prima

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

Ora però il risultato è diverso da prima infatti, dopo le semplificazione, la nostra condizione del limite sarà $\forall x \in (0, \delta) \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{M})$. Ora affinchè questa proposizione sia vera basta prendere

$$\delta \leq \frac{1}{M}$$

E quindi ora il limite è verificato. Per il limite $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ il ragionamento è analogo. □

Esercizio 12

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione

$$\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; \frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \;\; \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\} \cap (-\infty, 0)$$

Riscrivendo meglio la definizione

$$\forall \delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \tag{16}$$

Riscriviamo il secondo termine

$$\frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

Ora non abbiamo nessun problema riguardante il segno visto che $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$, quindi possiamo invertire la disequazione

$$x^2 < \frac{1}{M}$$

Visto che, sia x^2 che $\frac{1}{M}$ sono positivi possiamo fare la radice quadrata ambo i membri

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Riscrivendo l'espressione (16)

$$\forall \delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

Questa implicazione è vera quando vale

$$-\delta \geq -\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\delta \le \frac{1}{\sqrt{M}}$$

□

Teorema 11: Relazione Limite con limite Destro e Sinistro

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Dimostrazione. Visto che è una doppia implicazione dovremmo controllare entrambe le direzione

($\implies$) quindi, usando la definizione di limite, sappiamo che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l,\ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow \ f(x) \in U$$

Se quindi sappiamo che l'affermazione è vera (per ipotesi) $\forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\}$ allora varrà anche per un qualunque sottoinsieme, quindi la proposizione sarà vera anche per l'insieme $A \cap I \cap (x_0, +\infty)$ e anche per $A \cap I \cap (-\infty, x_0)$, che sono gli insiemi compresi nella definizione di limite destro e limite sinistro. Pertanto saranno valide anche le definizioni di limite destro e sinistro e quindi è verificata l'implicazione.

($\impliedby$) Se quindi esiste il limite destro e sinistro sappiamo che

- per limite destro

$$\begin{gathered}\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l,\ \exists I_1 \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}\\ \forall x \in A \cap I_1 \cap (x_0, +\infty) \ \Rightarrow \ f(x) \in U\end{gathered}$$

- per limite sinistro

$$\begin{gathered}\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l,\ \exists I_2 \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}\\ \forall x \in A \cap I_2 \cap (-\infty, x_0) \ \Rightarrow \ f(x) \in U\end{gathered}$$

Se noi ora, per il teorema di intersezione degli intorni, possiamo trovare un $I = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0. tale che vale

$$\begin{gathered}\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l,\ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}\\ \forall x \in A \cap I \cap ((-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)) \ \Rightarrow \ f(x) \in U\end{gathered}$$

che scrivendo meglio

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l,\ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow \ f(x) \in U$$

Che valida la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. □

Esercizio 13

Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 200 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ Allora

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Dimostrazione. Partiamo analizzando il limite sinistro

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Ora nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione assume sempre il valore 1, quindi possiamo sostiture la funzione nel limite nel suo valore

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

Ora facciamo lo stesso ragionamendo con il limite destro, e visto che anche nell'intervallo $(0, +\infty)$ assume sempre il valore 1 possiamo calcolare il limite destro

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Ora, dato che il limite destro e sinistro esistono e sono uguali, per il teorema visto prima sappiamo che esiste anche il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

N.B. questo è un esempio lampante per capire che il limite studia "ciò che è attorno" ad un punto di una funzione, e al limite "non tiene conto" di cosa fa la funzione nel punto effettivo, come in questo esempio anche se $f(0) = 200$ non influenza il valore del limite. $\square$

Teorema 12: Limite del Valore Assoluto di una Funzione

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Dimostrazione. Inizialmente iniziamo a studiare per $l > 0$, quindi per ipotesi sappiamo che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 : x \in I \implies f(x) \in U$$

E dobbiamo trovare che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } |l| \ \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 : x \in I \implies |f(x)| \in U$$

Partiamo dalla prima proposizione, e riscriviamo meglio la prima parte

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Notiamo che se scegliamo $\varepsilon < l$ allora $l - \varepsilon > 0$ e quindi

$$0 < l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Quindi ora tutti i termini sono positivi allora, per la seguente proprietà del valore assoluto $a > 0 \implies a = |a|$ possiamo sostituire il termine $f(x)$ con $|f(x)|$

$$0 < l - \varepsilon < |f(x)| < l + \varepsilon$$

Ora riprendiamo il la condizione che abbiamo imposto $\varepsilon < l$, noi sappiamo, per definizione di limite, che $\varepsilon > 0$ quindi $0 < \varepsilon < l$ di conseguenza $l > 0$, quindi abbiamo scoperto che che anche l è positivo e che quindi possiamo usare la stessa proprietà di che abbiamo usato per $|f(x)|$ per mettere il modulo

$$|l| - \varepsilon < |f(x)| < |l| + \varepsilon$$

Con questo siamo riusciti a verificare il limite perchè $|f(x)|$ è in un introno di $|l|$. Ora però ci manca da controllare i casi con $l < 0$, e per evitare di usare la dimostrazione classica di limite usiamo uno stratagemma

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l < 0 \iff \lim_{x\to x_0} -f(x) = -l > 0$$

Ora visto che $l < 0$ allora $-l > 0$ e di conseguenza possiamo usare il teorema che abbiamo appena verificato (e possiamo applicarlo proprio perchè $-l > 0$)

$$\lim_{x\to x_0} -f(x) = -l \implies \lim_{x\to x_0} |-f(x)| = |-l| \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

E quindi anche per $l < 0$ il risultato rimane lo stesso e quindi il limite è verificato $\forall l \neq 0$. □

Teorema 13: Limite del Valore Assoluto di una Funzione (caso $l = 0$)

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

Dimostrazione. Visto che c'è una dobbia implicazione controlliamo entrambi i sensi

($\implies$) Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che

$$f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Riscrivendo meglio il primo termine

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

Usiamo le proprietà dei valori assoluti

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \iff 0 \leq |f(x)| < \varepsilon$$

Quindi ora sappiamo che il limite è verificato per $0 \leq |f(x)| < \varepsilon$ ma quindi possiamo "allargare" l'intervallo e varrà comunque la proprietà e quindi

$$0 \leq |f(x)| < \varepsilon \implies -\varepsilon < |f(x)| < \varepsilon$$

E di conseguenza è verificato il limite $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

($\impliedby$) Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x)| \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Riscrivendo meglio il primo termine

$$-\varepsilon < |f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo togliere la parte $-\varepsilon$ perchè il valore assoluto è sempre positivo

$$|f(x)| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

e quindi è verificato il limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. □

N.B. faccendo un riassunto dei due teoremi appena fatti sappiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

E vedendo bene notiamo che se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ allora non possiamo dire nulla su $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Vediamo un esempio.

Esercizio 14

Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

possiamo notare che

$$|f(x)| = \begin{cases} |1| & \text{se } x \leq 0 \\ |-1| & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \iff |f(x)| = 1$$

E che quindi

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Ora proviamo a vedere $\lim_{x\to 0} f(x)$, e visto che è una funzione definita a tratti facciamo il limite destro e sinistro. Partiamo con quello sinistro e vediamo che la funzione nell'intervallo $(-\infty, 0)$ assume il valore 1 quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

Con il limite destro e la nostra funzione nell'intervallo $(0, +\infty)$ assume il valore -1 e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

Notiamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \implies \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Teorema 14: Permanenza del Segno

Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di $f(x)$ e $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ allora

- Se $l > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$
- Se $l < 0$ allora $f(x) < 0$ definitivamente per $x \to x_0$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per $l > 0$, gli altri casi sono analoghi.

Per ipotesi sappiamo che il limite esiste, e pertanto

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Se scelgo $\varepsilon < l$ avrò che

$$\varepsilon < l \implies l - \varepsilon > 0 \implies 0 < l - \varepsilon < f(x)$$

di conseguenza

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

$\square$

Teorema 15: limiti e relazioni d'ordine *I*

iano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $l_2 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

$$l_1 < l_2 \implies f(x) < g(x) \text{ definitivamente per } x \to x_0$$

Dimostrazione. Dato che $l_1 < l_2$ sappiamo che $l_1 \neq l_2$ e quindi per il teorema di separazione degli intorni $\exists U_1$ intorno di l_1 e $\exists U_2$ intorno di l_2 tali che

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \tag{17}$$

Ora per definizione di limite sappiamo

- $\forall U_1$ intorno di l_1 $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in U_1 \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall U_2$ intorno di l_2 $\exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Ora se dato che abbiamo I_1 e I_2 intorni di x_0, per il teorema di intersezione sappiamo

$$\exists I = I_1 \cap I_2 \text{ intorno di } x_0$$

E quindi nell'intorno I varrà

$$f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\}) \tag{18}$$

riscriviamo l'equazione (17)

$$(l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \cap (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2) = \varnothing$$

Dato che per ipotesia sappiamo $l_1 < l_2$, cioò può accedere soltanto se

$$\underline{l_1 + \varepsilon_1 < l_2 - \varepsilon_2}$$

Ora usiamo questa informazione e combiniamola con la formula (18)

$$f(x) \in (l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \wedge g(x) \in (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2)$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon_1 < f(x) < l_1 + \varepsilon_1} \wedge \underline{l_2 - \varepsilon_2 < g(x) < l_2 + \varepsilon_2}$$

$$\underline{f(x) < l_1} + \underline{\varepsilon_1 < l_2} - \underline{\varepsilon_2 < g(x)}$$

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

□

Teorema 16: limiti e relazioni d'ordine *II*

Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $l_1 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ e $l_2 = \lim_{x\to x_0} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \text{ definitivamente per } x \to x_0 \implies l_1 \leq l_2$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue per assurdo, quindi supponiamo che $l_1 > l_2$, allora per il teorema della relazione d'ordine I sappiamo che

$$l_1 > l_2 \implies f(x) > g(x) \text{ definitivamente per } x \to x_0$$

Ma ciò va in contraddizione con le ipotesi iniziali $f(x) < g(x)$ pertanto è impossibile che $l_1 > l_2$ e di conseguenza è vero che $l_1 \leq l_2$. □

Esercizio 15

N.B. se $f(x) < g(x)$ non possiamo dire con certezza nulla su $l_1 < l_2$. Vediamo un esempio. Sia $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$. Noi sappiamo che

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ma i limiti per $x \to 0$ fanno $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Teorema 17: Due Carabinieri

Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \implies \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

Dimostrazione. Visto che $f(x)$ e $h(x)$ hanno limite, sappiamo che

- $\forall U$ intorno di l $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall U$ intorno di l $\exists I_2$ intorno di x_0 tale che $h(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Ora per il teorema di intersezione degli intorni sappiamo che

$$\exists I = I_1 \cap I_2 \text{ intorno di } x_0$$

In I vale

$$f(x) \in U \wedge h(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Pertanto sappiamo che

$$\underline{l - \varepsilon < f(x)} < l + \varepsilon \wedge -\varepsilon < \underline{h(x) < l + \varepsilon}$$

Combinando questa informazione con le ipotesi ($f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$)

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

Di conseguenza

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

E questà è la definizione di limite, quindi questo implica che

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

□

Corollario 1: Teorema dei carabinieri II

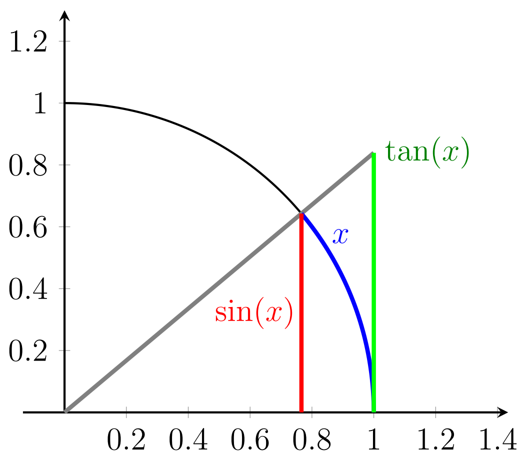
Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$. Allora

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Esercizio 16

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Iniziamo disegnando una circonferenza unitaria e notiamo che



Dal grafico possiamo notare che in un intorno di 0 abbiamo che

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Ora possiamo dividere tutto per $\sin(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

inveriamo tutti i membri (e anche i segni delle disequazioni)

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Ora vediamo che $\lim_{x\to 0} 1 = 1, \lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, e visto che le due funzioni estreme tendono entrambe a 1 e la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ è compresa tra le altre due funzioni definitivamente per $x \to x_0$ allora per il teorema dei carabinieri abbiamoche

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Teorema 18: Algebra dei Limiti Finiti

Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \text{ (se } l_2 \neq 0)$$

Dimostrazione. (i) Partiamo scrivendo le definizioni di limite come sappiamo

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Quindi per il teorema di intersezione trovo un $I = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \wedge g(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$$
$$\underline{l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon} \quad \underline{l_2 - \varepsilon < g(x) < l_2 + \varepsilon}$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon} + \underline{l_2 - \varepsilon} < \underline{f(x)} + \underline{g(x)} < \underline{l_1 + \varepsilon} + \underline{l_2 + \varepsilon}$$

$$(l_1 + l_2) - 2\varepsilon < f(x) + g(x) < (l_1 + l_2) + 2\varepsilon$$

E notiamo che $f(x) + g(x)$ è in un intorno di $l_1 + l_2$ e che quindi il limite è verificato.

N.B. anche se c'è scritto 2ε e non solamente ε va bene lo stesso, anche perchè l'espressione all'interno della definizione di limite è $\forall \varepsilon > 0$ e quindi anche se moltiplico ε per una qualsiasi costante, potrò rappresentare qualunque intorno.

(ii) Partiamo analizzando il seguente modulo, e compensando il termine $l_1 \cdot g(x)$

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| = |f(x) \cdot g(x) - \underline{l_1 \cdot g(x)} + \underline{l_1 \cdot g(x)} - l_1 \cdot l_2|$$

Ora raccogliamo alcuni termini

$$|f(x) \cdot \underline{g(x)} - l_1 \cdot \underline{g(x)} + \underline{l_1} \cdot g(x) - \underline{l_1} \cdot l_2| = |(f(x) - l_1) \cdot \underline{g(x)} + \underline{l_1} \cdot (g(x) - l_2)|$$

Applichiamo la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |(f(x) - l_1) \cdot g(x) + l_1 \cdot (g(x) - l_2)| &\leq |(f(x) - l_1) \cdot g(x)| + |l_1 \cdot (g(x) - l_2)| \\ &= |(f(x) - l_1)| \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot |(g(x) - l_2)| \end{aligned}$$

Ora dalle definizioni di limite sappiamo che $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|g(x) - l_2| < \varepsilon$

$$\underline{|(f(x) - l_1)|} \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot \underline{|(g(x) - l_2)|} < \underline{\varepsilon} \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot \underline{\varepsilon} = \varepsilon \cdot (|g(x)| + |l_1|)$$

Per valutare la quanto vale $|g(x)|$ facciamo qualche sistemazione algebrica

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - l_2 + l_2| \\ &\leq |g(x) - l_2| + |l_2| \\ &< \varepsilon + |l_2| \end{aligned}$$

Con questo possiamo semplificare

$$\varepsilon \cdot (|g(x)| + |l_1|) < \varepsilon \cdot ((\varepsilon + |l_2|) + |l_1|)$$

Per semplificare possiamo scegliere $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon \cdot ((1 + |l_2|) + |l_1|) = \varepsilon \cdot (1 + |l_2| + |l_1|)$$

Facendo un po' di ordine vediamo che

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| < \varepsilon \cdot (1 + |l_2| + |l_1|)$$

Di Conseguenza abbiamo trovato che $|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2|$ è sempre minore di ε, appatto di qualche costante proporzionale. Infatti $1 + |l_2| + |l_1|$ è sempre maggiore di 1 e quindi il limite è verificato.

(iii) Per verificare questo limite è necessario verificare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2} \tag{19}$$

Perchè se fosse vero potremmo usare il teorema del prodotto perchè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = l_1 \cdot \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2} \tag{20}$$

Quindi proviamo a verificare (19) con la definizione di limite

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \left| \frac{l_2 - g(x)}{g(x) \cdot l_2} \right| = \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)||l_2|}$$

Visto che il limite $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ è verificato per ipotesi, allora sappiamo $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $|g(x) - l_2| < \varepsilon \; \forall x \in I$, e quindi

$$\forall x \in I_1 \quad \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)||l_2|} < \frac{\varepsilon}{|g(x)||l_2|}$$

Ora per capire quanto vale $|g(x)|$ dobbiamo dividere i casi con $l_2 > 0$ e $l_2 < 0$, noi ora vedremo la dimostrazione per $l_2 > 0$, l'altro caso è analogo.

Quindi sfruttando il teorema della permanenza del segno noi sappiamo che $exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) > 0 \; \forall x \in I_2$, di conseguenza sarà vero anche che $\forall x \in I_2$ $g(x) > \frac{l_2}{2}$, e quindi anche $\frac{1}{g(x)} < \frac{2}{|l_2|}$.

Possiamo usare il teorema di intersezione degli intorno per trovare $I_3 = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 tale che

$$\forall x \in I_3 \quad \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)||l_2|} < \frac{\varepsilon}{|g(x)||l_2|} = \frac{\varepsilon}{|l_2|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{|l_2|} \cdot \frac{2}{|l_2|} = \frac{2\varepsilon}{|l_2|^2}$$

E che quindi

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| < \frac{2\varepsilon}{|l_2|^2}$$

Per lo stesso ragionamento fatto prima nel prodotto, abbiamo trovato che il limite è minore di ε appatto di una costante moltiplicativa.

Quindi abbiamo trovato un intevallo I_3 che verifica il limite $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$ e che quindi usando anche il teorema del prodotto, si verifica il teorema della divisione, come visto nel punto (20). Chiaramente visto che $g(x)$ è a denominatore è necessario che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. $\square$

Teorema 19: Algebra dei Limiti Infiniti (Forme Determinate)

Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A. Allora

(i) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$$

(ii) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0]$$

(iii) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\exists c > 0 : g(x) \leq c$ definitivamente per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$$

(iv) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\exists c > 0 : 0 < g(x) \leq c$ definitivamente per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

(v) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

(vi) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ è positiva definitivamente per $x \to x_0$ e
$\exists c > 0 : g(x) > c$ definitivamente per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(vii) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ è negativa definitivamente per $x \to x_0$ e
$\exists c > 0 : g(x) > c$ definitivamente per $x \to x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

Esercizio 17

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty$$

Dimostrazione. Vediamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

In più $|\sin(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi lo è anche definitivamente per $x \to +\infty$, Quindi come nella casistica (i) dell'algebra dei limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty$$

□

Esercizio 18

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sin(x) + 2) = +\infty$$

Dimostrazione. Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

In più $0 < \sin(x) + 2 \leq 3$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi lo è anche definitivamente per $x \to +\infty$, Quindi come nella casistica (iv) dell'algebra dei limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sin(x) + 2) = +\infty$$

□

Esercizio 19

$$\lim_{x\to-2} \frac{x}{(x+2)^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Se proviamo a calcolare il limite notiamo che il denominatore tende a 0, mentre il numeratore tende a -2 quindi sembra di essere nella casistica (vi), controlliamo se le ipotesi sono verificate.

In primis il teorema richiede che $f(x)$ sia positivo definitivamente per $x \to -2$, è questo è verificato sempre, infatti $(x+2)^2 > 0 \implies \forall x \neq -2$. In più il numeratore (x) è limitato definitivamente per $x \to -2$, pertanto il teorema è applicabile e quindi

$$\lim_{x\to-2} \frac{x}{(x+2)^2} = +\infty$$

N.B. Se il limite fosse stato $\lim_{x\to-2} \frac{x}{x+2}$ il teorema non sarebbe applicabile, perchè $x + 2$ non è positiva definitivamente per $x \to -2$, perchè un qualsiasi intorno dalla parte sinistra sarebbe negativo e invece la parte destra sarebbe positiva. Pertanto non si può applicare il teorema (vi). Per risolverlo è necessario calcolare o il limite destro o sinistro, infatti in quei intorni $(x+2)$ è positivo definitivamente. Quindi $\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x+2} = +\infty$ e $\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x+2} = -\infty$. E da questo notiamo che $\nexists \lim_{x\to -2} \frac{x}{x+2}$ perchè il limite destro e sinistro sono diversi. $\square$

Definizione 9: Forme Indeterminate

Si dicono **Forme Indeterminate** tutti i limiti che hanno come risultato

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \qquad [\infty \cdot 0]$$
$$[+\infty - \infty] \qquad [\infty^0] \qquad [1^0]$$

E il risultato effettivo del limite non si può determinare subito, ma sono necessarie altre operazioni.
N.B. Pertanto due limiti che hanno inizialmente la stessa forma indeterminata posso avere limiti diversi, vediamo degli esempi.

Esercizio 20

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2-1}$$

Dimostrazione. Se proviamo a calcolare il limite vediamo che il numeratore tende a $+\infty$ e lo stesso si può dire per il denominatore. Quindi caschiamo nella forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Pertanto dobbiamo fare delle manipolazioni, proviamo raccogliendo il grado maggiore (x^2) al numeratore e lo stesso facciamo anche a demonimatore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

Notiamo che il termine x^2 si può semplificare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Ora possiamo calcolare il limite infatti i termini $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0 quando $x\to\infty$ (questo grazie alle forme determinate) e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1-0} = 2$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2-1} = 2$$

Quindi noi siamo partiti con una forma indeterminata e siamo arrivati a una soluzione che è 2. Ora vediamo che un altro limite sempre con la stessa forma indeterminata, ma avremo un altro risultato. $\square$

Esercizio 21

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1}$$

Dimostrazione. Notiamo subito che esce la stessa forma indeterminata: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e quindi proviamo a fare la stessa tecnica di prima

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Ora come prima i termini con la x a denominatore tendono a 0, però a numeratore è rimasto una x che tende a $+\infty$ quindi il numeratore, per la proprietà (iii) delle forme determinate, tende a $+\infty$, il denominatore invece tende a 1, e quindi per la proprietà (iv) il limite tende a $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1} = +\infty$$

N.B. inizialmente anche questo limite era della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ma abbiamo avuto un risultato diverso da prima, e quindi quando ci troviamo davanti una forma indetermnata sappiamo che dobbiamo rimaneggiare i termini. □

Esercizio 22

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

Dimostrazione. Proviamo a calcolare il limite ma notiamo subito che viene fuori una forma indeterminata della forma $[+\infty - \infty]$ e quindi dobbiamo fare dei rimaneggiamenti. Ricordandoci la formula della somma per differenza ($(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$) possiamo moltiplicare e dividere per il binomio coniugato

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}
\end{aligned}$$

Dopo tutti questi maneggiamenti sembra che abbiamo solo che complicato il limite, però li abbiamo fatto diventare in un limite nella forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ che però abbiamo già visto come risolvere, infatti basta che raccogliamo il grado maggiore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

Ora per "tirare fuori" x^2 dalla radice, dobbiamo ricordarci di mettere il modulo (perchè $\sqrt{x^2} = |x|$), però dato che noi stiamo analizzando per $x \to +\infty$ siamo sicuri che $x > 0$ (per definizione di limite) e pertanto $|x| = x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 23

Dato un generico polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dove a_i sono i coefficenti del polinomio e n il grado del polinomio. Con $a_n > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)$$

Dimostrazione. Il limite è nella forma $[+\infty - \infty]$ e quindi procediamo raccogliendo il grado maggiore (x^n)

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = \lim_{x\to+\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + ... + a_n\right)$$

Ora possiamo calcolare il limite infatti tutti i termini dentro le parentesi infatti tendonon tutti a 0. Quindi il termine dentro le parentesi tende a a_0 e che quindi moltiplicato per $x^n \to +\infty$ tente a $+\infty$. Se invece $a_n < 0$ il limite tendeva a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + ... + a_n\right) = +\infty$$

Quindi con questo iniziamo a capire che nei polinomi quello che ci interessa quando $x \to \infty$ è il termine con il grado più alto (x^n), intatti per risolvere questo esercizio i termini più piccoli di x^n è come se li avessimo trascurati. Infatti è vera la seguente equazione $\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$ per qualsiasi polinomio $P(x)$ e $\forall a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

Teorema 20: Cambio di Variabile

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione in $f(A) \cap B$ allora se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, con y_0 punto di accumulazione in B e se è vera almeno una delle due proposizioni

- $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$
- $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$ (continuità di $g(x)$)

Allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Esercizio 24

Ora vediamo perchè è fondamentale che almeno una dei due requisiti sia vero, proviamo con un controesempio. Infatti sia $f(x) = 5$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 5 \\ 1 & \text{se } x = 5 \end{cases}$ e vediamo subito che nessuna delle due proposizioni è vera.

Dimostrazione. Infatti il limite effettivo, senza usare il teorema del cambio di variabile è

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(5) = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Invece se proviamo a usare il cambio di variabile, dobbiamo prima calcolare y_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 5 \quad [= y_0]$$

Ora il limite diventa

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to 5} g(y) = 2$$

Quindi usando solo le funzioni composte il limite è uscito 1, mentre con il teorema del cambio di variabile è venuto fuori 2, cosa impossibile per il teorema di unicità del limite e pertanto il teorema del cambio di variabile non si può applicare in questo esercizio, proprio perchè mancavano i criteri richiesti dal teorema stesso. □

Esercizio 25

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Dimostrazione. Vediamo che assomiglia molto al limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ l'unica cosa che cambia è che abbiamo x^2 anzichè x, quindi proviamo a cambiare la variabile x^2 con y, quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad [= y_0]$$

Visto che sono valide tutte le condizioni del teorema del cambio di variabile, infatti $x^2 \neq 0$ in un intorno di 0. Mentre l'altra condizione non è valida infatti non si può calcolare in 0 la funzione $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$, però non ci interessa perchè il teorema richiede almeno una delle due proposizioni.

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{sin(y)}{y} = 1$$

□

Esercizio 26

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2 - x}}$$

Dimostrazione. Al denominatore abbiamo una forma del tipo $[+\infty - \infty]$, quindi proviamo a vedere come si comporta quel denominatore per $x \to +\infty$. Per calcolarlo possiamo usare la proprietà dei polinomi che abbiamo visto nell'esercizio dei polinomi, infatti basta tenere il grado maggiore (x^2)

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad [= y_0]$$

Vediamo che il denominatore ha limite e quindi possiamo fare il cambio di variabile e possiamo applicarlo perchè è valida la prima condizione, infatti $x^2 - x \neq +\infty$ sempre, mentre la seconda non può mai essere vera perchè non possiamo calcolare $g(+\infty)$, perchè ricordiamo che $\pm\infty$ non sono punti di nessun dominio

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2 - x}} = \lim_{y \to +\infty} e^{\frac{1}{y}}$$

Ora possiamo riutilizzare il teorema del cambio di variabile, visto che non siamo ancora in un limite noto, e quindi vediamo come si comporta la frazione all'esponente

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0 \quad [= z_0]$$

Visto che ha limite e rispetta sempre il primo criterio e anche il secondo del teorema del cambio di variabile, allora possiamo riapplicare il teorema e finalmente calcolare il limite.

$$\lim_{y \to +\infty} e^{\frac{1}{y}} = \lim_{z \to 0} e^z = 1$$

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2 - x}} = 1$$

□

Teorema 21: Limite di funzioni Monotone

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x)$ è monotona in I

- Se $f(x)$ è monotona crescente allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(A \cap I \cap (x_0, +\infty))\}$$

- Se $f(x)$ è monotona decrescente allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (x_0, +\infty))\}$$

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione del caso $f(x)$ è crescente e per il limite sinistro, gli altri casi sono analoghi.

Per ipotesi chiaramente supponiamo che esista $S = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$, quindi per definizione di superiore, sappiamo che il superiore (S) è più grande di qualsiasi elemento nell'insieme (cioè $f(x)$), quindi

$$f(x) \leq S \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0) \tag{21}$$

Ora usando la caratterizzazione degli estremi e sappiamo che

$$f(\hat{x}) > S - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \hat{x} \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

Poi, per monotonia della funzione sappiamo che se $\hat{x} < x$ allora

$$f(\hat{x}) < f(x) \implies S - \varepsilon < f(\hat{x}) < f(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{22}$$

Ora combinando le informazioni (21) e (22) sappiamo che

$$S - \varepsilon < f(x) < S \quad \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

Visto che $\varepsilon > 0$ sappiamo che $S < S + \varepsilon$ e quindi

$$S - \varepsilon < f(x) < S < S + \varepsilon$$

$$S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

E questa non è altro che la definizione di limite

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$\square$

Esercizio 27

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

Dimostrazione. Questo è vero proprio perchè se $a > 1$ la funzione a^x è monotona crescente, se $a = 1$ è costante e invece se $a < 1$ la funzione è monotona decrescente, quindi si può sempre applicare il teorema. □

Esercizio 28

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \qquad \forall x_0 > 0$$

Dimostrazione. Possiamo fare lo stesso ragionamento del per il logaritmo, infatti se $a > 1$ la funzione $\log_a x$ è monotona crescente, se $a = 1$ è costante e invece se $a < 1$ la funzione è monotona decrescente, quindi si può sempre applicare il teorema. L'unica cosa che cambia dall'esercizio precedente è che x_0 deve essere positivo, perche il dominio di $\log_a x$ è $\forall x > 0$, e di conseguenza qualsiasi punto $x_0 < 0$ non è punto di accumulazione e pertanto non può essere calcolato il limite in quel punto. □

Esercizio 29

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \qquad \forall x_0 \neq 0 \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Se $\alpha > 0$ avremo una potenza che è sempre monotona crescente per $x_0 > 0$, mentre se α è pari allora la funzione sarà decrescente per $x_0 < 0$ mentre se α è dispari la funzione è crescente anche per $x < 0$. Se $\alpha = 0$ allora avremo una funzione costante e se $\alpha < 0$ la funzione sarà del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ che sarà monotona decrescente. □

Esercizio 30

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Questo è un caso particolare dell'esercizio precedente, infatti se $x \to 0^+$ allora con $\alpha > 0$ avremo una forma del tipo 0^α che chiaramente tende a 0, mentre se $\alpha < 0$ la funzione diventa $\frac{1}{x^{|\alpha|}}$ che fa tendere il denominatore a 0^+ e che quindi fa tendere la funzione a $+\infty$. □

Teorema 22: Limite di funzioni Monotone caso Infinito

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $\pm\infty$ tale che $f(x)$ è monotona in I

- Se $f(x)$ è monotona crescente allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup\{f(A \cap I)\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf\{f(A \cap I)\}$$

- Se $f(x)$ è monotona decrescente allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf\{f(A \cap I)\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup\{f(A \cap I)\}$$

Esercizio 31

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 32

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 33

$$\lim_{x \to +\infty} log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 34

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x|^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Teorema 23: Potenza di Funzioni

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$$

Dimostrazione. Per calcolare questo limite possiamo usare la continuità dell'esponenziale. Perchè il limite lo possiamo calcolare come

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

ora con il cambio di variabile possiamo fare

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \log(f(x)) = y_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \lim_{y \to y_0} e^y = e^{y_0}$$

□

Esercizio 35

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\log(x+1)}}$$

Dimostrazione. Usiamo il ragionamento dell'esercizio precedente, con il caso $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{log(x+1)}$

$$x^{\frac{1}{\log(x)}} = e^{\log\left(x^{\frac{1}{\log(x+1)}}\right)} = e^{\frac{1}{\log(x+1)} \cdot \log(x)} = e^{\frac{\log(x)}{\log(x+1)}}$$

ora calcoliamo il limite dell'esponente

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{log(x)}{log(x+1)}$$

Questo limite è della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e pertanto proviamo a raggruppare come nei polinomio

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{\log(x)}{\log(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{\log\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x) + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log(x)}}$$

Ora il termine $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tende a 0, invece $\log(x)$ tende a $+\infty$, quindi complessivamente la frazione tende a 0 e quindi possiamo calcolare il limite e sostituirlo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log(x)}} = \frac{1}{1+0} = 1 \implies \lim_{y \to 1} e^y = e^1 = e$$

□

Definizione 10: Numero di Nepero (e)

$$e := \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Esercizio 36

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Dimostrazione. Per vedere come tende la funzione a $-\infty$ possiamo provare usando il cambio di variabile con $y=-x$ per provare a ricondurci alla definizione del numero di Nepero

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}$$

Ora racciamo qualche riarrangiamento

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y+1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

Il denominatore $y-1$ è molto scomodo, quindi proviamo a sostituirlo con $z=y-1$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

Per sistemare l'esponente basta usare la proprietà degli esponenti e l'algebra dei limiti per il prodotto

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

Il primo limite tende a e per la definizione di numero di Nepero, mentre nel secondo limite il termine $\left(\frac{1}{z}\right)$ tende a 0 e quindi complessivamente il limite tende a 1

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right) = e\cdot 1 = e$$

Quindi notiamo che il limite tende ad e anche per $x\to-\infty$, pertanto possiamo modificare la definizione con

$$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

□

Esercizio 37

$$\lim_{x\to 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Dimostrazione. Per risolvere questo limite dobbiamo usare un cambio di variabile con $y = \frac{1}{x}$ però dobbiamo stare attenti infatti per valori di $x \to 0^+ \implies y \to +\infty$ mentre $x \to 0^- \implies y \to -\infty$ quindi dobbiamo studiare in due casi separati. Indichiamo con (i) per il caso $y \to +\infty$ e (ii) per il caso $y \to -\infty$

$$(i) \quad \lim_{x\to 0^+} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to 0^-} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

Vediamo che nonostante abbiamo dovuto dividere in due casistiche separate il limite tende allo stesso valore, e che quindi per il teorema della relazione tra limite e limite destro/sinistro sappiamo che

$$\lim_{x\to 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

□

Definizione 11: Limiti Notevoli

Si definiscono Limiti Notevoli tutti i limiti della seguente forma. (Le dimostrazione le vediamo subito dopo)

$$\text{(i)} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ (Già dimostrato)}$$

$$\text{(ii)} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(iii)} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\text{(iv)} \;\; \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{(v)} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\text{(vi)} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Esercizio 38

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Dimostrazione. Si vede subito che è una forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ e però non sembra riconducibile a nessun limite tra quelli che abbiamo visto, però proviamo a a "trasformare" il coseno in seno , visto che del seno sappiamo un limite notevole (i). Per farlo dobbiamo ricordarci la formula fondamentale della trigonometria: $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\end{aligned}$$

Ora il primo termine, visto che è il limite notevole (i), tende a 1, mentre il secondo tende a $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=(1)^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

□

Esercizio 39

$$\frac{\tan(x)}{x}=1$$

Dimostrazione. Questo è molto semplice infatti basta usare la definizione di tangente $(\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

□

Esercizio 40

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$$

Dimostrazione. Questo chiaramente assomiglia molto alla definizione di e, soltanto che c'è un α di troppo. Possiamo provare a sostituire ma notiamo una cosa, infatti se vogliamo sostituire $\alpha y=x$ dobbiamo distinguere i casi $\alpha>0$, $\alpha=0$, $\alpha<0$. Studiamo i singoli casi e numeriamoli rispettivamente (i),(ii),(iii)

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\alpha y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha=(e)^\alpha=e^\alpha$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} 1^x = 1 \quad [= e^0]$$

$$(iii) \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\alpha} = (e)^\alpha = e^\alpha$$

□

Esercizio 41

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Per risolvere questo basta usare le proprietà dei logaritmi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log(e) = 1$$

□

Esercizio 42

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Dimostrazione. Questo invece è un pò più complicato, infatti non abbiamo visto limiti di questo. Però possiamo provare con una sostituzione $y = \log(x)$ e vediamo che succede, ricordandoci che se $x \to 0$ allora $y \to -\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to-\infty}\frac{e^{\log(y)}-1}{\log(y)} = \lim_{y\to-\infty}\frac{y-1}{\log(y)}$$

Ora assomiglia al limite dell'esercizio precedente, soltanto che all'interno dell'logaritmo abbiamo y e non $y+1$, quindi per farlo "sbucare" fuori possiamo fare un'altra sostituzione $z = y+1$

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{y-1}{\log(y)} = \lim_{z\to-\infty}\frac{z}{\log(z+1)}$$

Adesso il limite è riconducibile a limite notevole (v)

$$\lim_{z\to-\infty}\frac{z}{\log(z+1)} = \lim_{z\to-\infty}\frac{1}{\frac{\log(z+1)}{z}} = \frac{1}{1} = 1$$

□

Definizione 12: Funzioni Asintotiche

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione in A e se

- $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$
- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Allora diciamo che "$f(x)$ è asintotica per $x \to x_0$ a $g(x)$" e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0$$

Esempio 1

$$\sin(x) \sim x \qquad x \to 0$$

Dimostrazione. Dai limiti notevoli sappiamo che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$, sappiamo inoltre che $\sin(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to 0$ e lo stesso vale per $x \neq 0$. Pertanto possiamo dire che

$$\sin(x) \sim x \qquad x \to 0$$

N.B. questo ragionamento lo possiamo fare per tutti i limiti notevoli, quindi sarà vero anche $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, $\tan(x) \sim x$ per $x \to 0$, $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ (che lo possiamo scrivere anche come $e^x \sim 1 + x$). □

Esempio 2

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} \qquad x \to 0$$

Dimostrazione. Per il limite notevole del coseno dobbiamo fare qualche ragionameto in più, infatti il limite fa come risultato $\frac{1}{2}$ e non 1, quindi non possiamo dire nulla sull'asintoticità, ma possiamo fare qualche mageggio, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \implies \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Dopo questo riarrangiamento possiamo dire che

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \qquad x \to 0$$

Che possiamo riscrivere come

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} \qquad x \to 0$$

□

Teorema 24: Proprietà delle Funzioni Asintotiche

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, \hat{f}, \hat{g} : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A
(i) se $f \sim g$ allora è vera una delle due proposizioni

- f e g hanno entrambe limite in x_0
- f e g entrambe non hanno limite in x_0

(ii) se $f \sim g$ e $h \sim g$ per $x \to x_0$ allora è vero che $f \sim h$ per $x \to x_0$

(iii) se $f \sim \hat{f}$ per $x \to x_0$, $g \sim \hat{g}$ per $x \to x_0$ allora sono vere entrambe le equivalenze:

$$f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g} \qquad \frac{f}{g} \sim \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$$

Dimostrazione. Segue la dimostrazione del punto (ii) e (iii).

(ii) Noi sappiamo che $f \sim g$ e che $g \sim h$ ma vogliamo vedere se è vero che $f \sim h$, e se fosse vera quest'ultima equivalenza allora dovrebbe essere vero che

$$f \sim h \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$$

Quindi proviamo a vedere se il limite fa 1, e per farlo dividiamo e moltiplichiamo per $g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\frac{h(x)}{g(x)}}$$

Ma visto che per ipotesi $f \sim g$ e $g \sim h$, allora i rapporti varranno 1, e pertanto il teorema è verificato

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\frac{h(x)}{g(x)}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

(iii) Riscriviamo $f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g}$ usando la definizione di funzione asintotica

$$f(x) \cdot g(x) \sim \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)} = 1$$

Quindi per dimostrare il teorema basta controllare che il limite faccia 1, ma è molto semplice infatti se spezziamo la frazione e grazie alle ipotesi ($f \sim \hat{f}$ e $g \sim \hat{g}$) allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$

Il ragionamento è analogo per $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{\hat{f}}{\hat{g}}$. $\square$

Teorema 25: Gerarchia degli Infiniti

Siano $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ allora sono vere

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

Esempio 3

$$\lim_{x \to 0^+} x \log(x)$$

Dimostrazione. Si può notare come sia un limite nella forma $\left[0 \cdot \infty\right]$ e quindi dobbiamo fare degli riarrangiamenti. Partimo portando il termine x a denominatore.

$$\lim_{x \to 0^+} x \log(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$$

Ora possiamo fare una sostituzione con $y = \frac{1}{x}$, e quindi se $x \to 0^+$ allora $y \to +\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y}$$

Usando le proprietà dei logaritmi abbiamo

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\log(y^{-1})}{y} = \lim_{y \to +\infty} -\frac{\log(y)}{y}$$

E che quindi con la gerarchia degli Infiniti

$$\lim_{y \to +\infty} -\frac{\log(y)}{y} = 0$$

□

Esempio 4

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

Dimostrazione. Per svolgere questo limite possiamo usare la regola delle potenze di funzioni per riarrangiarla e possiamo usare il limite dell'esempio precedente per calcolarlo

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\log(x^x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log(x)} = e^0 = 1$$

□

4 Simboli di Landau

Definizione 13: o-piccolo

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Allora diciamo che "$f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$" e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$$

Ora seguiranno alcuni esempi per familiarizzare con il simbolo

Esempio 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0 \iff x^3 = o(x) \qquad x \to 0$$

Esempio 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0 \iff \sin^2(x) = o(x) \qquad x \to 0$$

N.B. anche se $\sin^2(x) = o(x)$ e $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$ **NON** possiamo dire che $sin^2(x) = x^2$. Anche perche $sin^2(x)$ e x^2 sono due cose separate. Infatti con la nozione di o-piccolo sappiamo che una funzione è più grande di un'altra, ma se due funzioni sono entrambe o-piccolo di una funzione, non possiamo dire nulla delle due funzioni.

Esempio 7

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \iff x = o(x^2) \qquad x \to +\infty$$

Esempio 8

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \iff x = o(1) \qquad x \to 0$$

Questo perchè possiamo riscrivere x come $\frac{x}{1}$ e per questo possiamo scrivere $x = o(1)$. Difatto in generale se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora possiamo dire che $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$.

Esempio 9

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \iff x^3 = o(x^2) \qquad x \to 0$$

Teorema 26: Proprietà o-piccoli

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$\text{(i)} \ \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

$$\text{(ii)} \ o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x)) \qquad x \to x_0$$

$$\text{(iii)} \ o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x)) \qquad x \to x_0$$

$$\text{(iv)} \ |o(f(x))|^\alpha = o(|f(x)|^\alpha) \qquad x \to x_0 \quad \forall \alpha > 0$$

Se $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$, allora

$$\text{(v)} \ o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \qquad x \to x_0$$

Se, oltre a $g(x) \neq 0$, è vero che $|g(x)|$ è limitata definitivamente allora vale

$$\text{(vi)} \ o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x)) \qquad x \to x_0$$

Dimostrazione. (i) sia una qualsiasi funzione allora $g(x) = o(f(x))$, allora per definizione di o-piccolo sappiamo che

$$g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Ora però possiamo sostituire $g(x)$ con $o(f(x))$ visto che è vera per ipotesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

E con questo abbiamo verificato il primo teorema.

(ii) Sia $g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ allora proviamo a vedere se è vero il teorema, quindi usiamo la definizione di o-piccolo

$$g_1(x) \pm g_2(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x) \pm g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} \pm \frac{g_2(x)}{f(x)}$$

Ora visto che $g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ allora se vengono divise per $f(x)$ tenderanno a 0 e quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} \pm \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0 \pm 0 = 0$$

E quindi il teorema è verificato visto che è venuto proprio 0.

N.B. anche $o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x))$ e NON si eliminano gli o-piccoli.

(*iii*) Come nel punto (*ii*), basta che controlliamo se è vero usando la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x)) \cdot o(g(x))}{f(x) \cdot g(x)}$$

Ora possiamo fare degli riarrangiamenti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x)) \cdot o(g(x))}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

Ora usiamo la proprietà (*i*)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

E quindi il teorema è verificato.

(*iv*) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$|o(f(x))|^\alpha = o(|f(x)|^\alpha) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{|o(f(x))|^\alpha}{|f(x)|^\alpha}$$

Usiamo le proprietà dei moduli e delle potenze e la proprietà (*i*)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|o(f(x))|^\alpha}{|f(x)|^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{o(f(x))}{f(x)} \right|^\alpha = 0^\alpha = 0$$

L'ultimo passaggio è valido perchè abbiamo definito $\alpha > 0$ e quindi non reca alcun problema l'esponente. Il modulo serve solo per poter farlo anche di radici, così è valido anche per radici negative.

(*v*) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$$

Notiamo che il termine $g(x)$ si può semplificare e poi possiamo usare la proprietà (*i*)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

(*vi*) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot g(x)$$

Ora notiamo che il termine $\frac{o(f(x))}{f(x)}$ tende a 0 per proprietà (*i*), quindi l'unico caso a cui dobbiamo stare attenti è quando $h(x)$ tende a ∞, perchè qualora fosse avremmo una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$, però per ipotesi noi sappiamo che $|g(x)|$ è limitata, allora possiamo usare la proprietà (*ii*) dell'algebra dei limiti finiti per scoprire che tende a 0, grazie al fatto che $|g(x)|$ è limitata

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot g(x) = 0$$

Pertanto il teorema è verificato. □

Teorema 27: Relazione tra o-piccolo e Asintoticità

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$

$$f(x) \sim g(x) \quad x \to x_0 \implies f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \to x_0$$

Dimostrazione. Usando la definizione di funzione asintotica sappiamo che

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ora possiamo portare 1 dall'altra parte e facciamo denominatore comune

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] = 0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

A questo punto possiamo usare la definizione di o-piccolo, visto che abbiamo un limite che tende a 0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$$

Facendo qualche riarrangiamento abbiamo

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \implies f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \to x_0$$

□

Ora vediamo l'applicazione di questo teorema sui limiti notevoli

Esempio 10

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \implies \sin(x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

Per il limite del coseno usiamo lo stesso trick che abbiamo usato l'ulima volta, ovvero di dividere per $\frac{1}{2}$ in modo che ora il limite tenda a 1

Esempio 11

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \implies 1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \implies \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

N.B. non ho scritto $o(\frac{1}{2}x^2)$ perchè ho usato la proprietà (vi) delle proprietà degli o-piccolo, e lo abbiamo potuto applicare perchè la funzione $g(x) = \frac{1}{2}$ è sempre limitata.

Esempio 12

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \implies \tan(x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

Esempio 13

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \implies \log(1+x)=x+o(x) \qquad x\to 0$$

Esempio 14

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-1}{x}=1 \implies e^x-1=x+o(x) \implies e^x=1+x+o(x) \qquad x\to 0$$

Teorema 28: Cambio di variabile con o-piccolo

Sia $\varnothing \neq A\subseteq\mathbb{R}$, f, g_1, g_2 a valori reali tali che $g_1\circ f, g_2\circ f : A\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e supponiamo che

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$
- $g_1(y)=g_2(y)+o(g_2(y)) \qquad y\to y_0$
- $f(x)\neq y_0$ definitivamente per $x\to x_0$

Allora

$$g_1(f(x))=g_2(f(x))+o(g_2(f(x))) \qquad y\to y_0$$

Esempio 15

Proviamo a fare qualche applicazione pratica di questo teorema, per esempio proviamo con $f(x)=x^2$, $g_1(y)=\sin(y)$ e $x_0=0$

In primis dobbiamo controllare che esista il limite di $f(x)$

$$\lim_{x\to 0}x^2=0 \quad [=y_0]$$

Ora proviamo a sviluppare $g_1(y)$, e possiamo usare proprio lo sviluppo che abbiamo scoperto prima ($\sin(y)=y+o(y)$) per $y\to 0$, seguendo la notazione del teorema, $g_2(y)=y$. Ora basta controllare se $x^2\neq 0$ definitivamente ed effettivamente lo è visto che $x^2>0$ $\forall x\neq 0$ e quindi possiamo applicare il teorema e scopriamo che

$$\sin(x^2)=x^2+o(x^2) \qquad x\to 0$$

Esempio 16

Ora proviamo a fare un altro esempio con $f(x)=\sin(x)$, $g_1(y)=e^y$ e $x_0=0$, vediamo subito che

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0 \quad [=y_0]$$

Sappiamo in oltre lo svilutto di $e^y=1+y+o(y)$ per $y\to 0$, in oltre sappiamo che $\sin(x)\neq 0$ in un intorno di 0 e di conseguenza possiamo applicare il teorema e scopriamo che

$$e^{\sin(x)}=1+\sin(x)+o(\sin(x)) \qquad x\to 0$$

Teorema 29: Principio di Sostituzione

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, \hat{f}, \hat{g} : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e $g(x) \neq 0, \hat{f}(x) \neq 0, \hat{g}(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$ e se

$$f(x) = \hat{f}(x) + o(\hat{f}(x)) \qquad x \to x_0$$

$$g(x) = \hat{g}(x) + o(\hat{g}(x)) \qquad x \to x_0$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

Dimostrazione. Per capire quanto vale $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ basta che facciamo una sostituzione con le ipotesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x) + o(\hat{f}(x))}{\hat{g}(x) + o(\hat{g}(x))}$$

Ora possiamo raccogliere a numeratore $\hat{f}(x)$ e a denominatore $\hat{g}(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x) + o(\hat{f}(x))}{\hat{g}(x) + o(\hat{g}(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}}$$

Ora possiamo dividere per l'algebra dei limiti e possiamo usare la proprietà (i) degli o-piccoli

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1 + \dfrac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \dfrac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1+0}{1+0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

□

Questo teorema è molto forte infatti vediamo un esercizio dove lo applichiamo

Esercizio 43

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1}$$

Per applicare il teorema dobbiamo trovare quelle equivalenze con gli o-piccoli, e infatti le conosciamo sia per $1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ che per $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$, e di conseguenza possiamo calcolare il limite come

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Questo esercizio si sarebbe potuto svolgere anche con i limiti notevoli ma avrebbe richiesto molti calcoli in più.

Teorema 30: Ulteriori proprietà degli o-piccoli

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$\text{(vii)} \;\; o(o(f(x))) = o(f(x)) \text{ per } x \to x_0$$

$$\text{(viii)} \;\; o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x)) \text{ per } x \to x_0$$

Dimostrazione. (*vii*) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(o(f(x))) = o(f(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)}$$

Per calcolare e controllare che il limite faccia 0, dobbiamo moltiplicare e dividere per $o(f(x))$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)} \cdot \frac{o(f(x))}{o(f(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)}$$

Il secondo termine ($\frac{o(f(x))}{f(x)}$) per la proprietà (i) degli o-piccoli sappiamo che tende a 0, e lo stesso vale per il primo termine, infatti la regola generale per questi casi è $\frac{o(f(x))}{f(x)} \to 0$ però se scelgo $f(x) = o(g(x))$, allora il limite diventa $\frac{o(o(g(x)))}{o(g(x))} \to 0$, pertanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

E visto che il limite viene 0, la proprietà è verificata.

(*viii*) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)}$$

Possiamo moltiplicare e dividere per $f(x) + o(f(x))$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)} \cdot \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x) + o(f(x))} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right)
\end{aligned}$$

Possiamo usare lo stesso ragionamento usato per il punto (vii) dicendo che $\frac{o(f(x)+o(f(x)))}{f(x)+o(f(x))} \to 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) = 0 \cdot (1 + 0) = 0$$

Di conseguenza il teorema è verificato. □

Esercizio 44

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - e^{-x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$$

Dimostrazione. Per risolvere questo esercizio dobbiamo usare gli sviluppi degli o-piccoli, in questo esercizio ci basta quello di e^x e di $1-\cos(x)$ e quindi sappiamo che

$$e^{-x} = 1 + -x + o(x)$$

$$1-\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + o((\sqrt{x})^2)$$

Semplificando lo sviluppo del coseno abbiamo che $1-\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x + o(x)$, non serve mettere il modulo perchè $x \to 0^+$ e quindi x è positivo. Ora però dobbiamo capire quanto vale $e^{\sin(x)}$ e intanto usiamo lo sviluppo di e^x

$$e^{\sin(x)} = 1 + \underline{\sin(x)} + o(\underline{\sin(x)})$$

Però il seno lo possiamo sviluppare a sua volta come $\sin(x) = x + o(x)$ e di conseguenza

$$e^{\sin(x)} = 1 + \underline{x + o(x)} + o(\underline{x + o(x)})$$

E quindi grazie alla proprietà $(viii)$ sappiamo che possiamo riscrivere $(o(x + o(x)))$ come $o(x)$

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x) + o(x)$$

Poi per la proprietà (ii) sappiamo che

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x)$$

Ora possiamo sostituire gli sviluppi nell'esercizio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\underline{e^{\sin(x)}} - \underline{e^{-x}}}{\underline{1-\cos(\sqrt{x})}} = \frac{\underline{1 + x + o(x)} - \underline{(1 - x + o(x))}}{\underline{\frac{1}{2}x + o(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)}$$

Per il prinicipio di sostituzione sappiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Se il numeratore fosse stato $e^{\sin(x)} - e^x$, allora dopo lo svilutto il numeratore sarebbe diventato $o(x)$ e quindi la frazione sarebbe stata $\frac{o(x)}{\frac{1}{2}x+o(x)}$ e quindi dividento tutto per x avremmo avuto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}$$

E che quindi per la proprietà (i) avremmo avuto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 0} = 0$$

□

Esercizio 45

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan(\sin(x))}-1}{e^{\sin(\tan(x))}-1}$$

Dimostrazione. Iniziamo analizzando il numeratore, vediamo che possiamo fare lo sviluppo di $e^x - 1$

$$e^{\tan(\sin(x))}-1 = \tan(\sin(x)) + o(\tan(\sin(x)))$$

Adesso facciamo lo sviluppo di $\tan(\sin(x)) = \sin(x) + o(\sin(x))$

$$e^{\tan(\sin(x))}-1 = \sin(x) + o(\sin(x)) + o(\sin(x) + o(\sin(x)))$$

Possiamo usare la proprietà (*viii*) e (*ii*)

$$e^{\tan(\sin(x))}-1 = \sin(x) + o(\sin(x)) + o(\sin(x)) = \sin(x) + o(\sin(x))$$

Sviluppiamo anche il seno

$$e^{\tan(\sin(x))}-1 = x + o(x) + o(x + o(x))$$

Ripetendo le proprietà (*viii*) e (*ii*)

$$e^{\tan(\sin(x))}-1 = x + o(x) + o(x) = x + o(x)$$

Sistemato il numeratore, dobbiamo fare gli stessi passaggi al denominatore, ma invertendo il passaggio dello sviluppo del seno con quello della tangente

$$\begin{aligned}
e^{\sin(\tan(x))}-1 &= \sin(\tan(x)) + o(\sin(\tan(x))) \\
&= \tan(x) + o(\tan(x)) + o(\tan(x) + o(\tan(x))) \\
&= \tan(x) + o(\tan(x)) + o(\tan(x)) \\
&= \tan(x) + o(\tan(x)) \\
&= x + o(x) + o(x + o(x)) \\
&= x + o(x) + o(x) \\
&= x + o(x)
\end{aligned}$$

E quindi sostituendo questi sviluppi nel limite abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan(\sin(x))}-1}{e^{\sin(\tan(x))}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

□

Esercizio 46

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\sin^2(2x))}{4\tan^3(x)\cos(3x^2)}$$

Dimostrazione. In primis notiamo che il termine $\cos(3x^2) \to 1$ per $x \to 0$, pertanto possiamo staccarlo dal limite e calcolarlo a parte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\sin^2(2x))}{4\tan^3(x)\cos(3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\sin^2(2x))}{4\tan^3(x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\sin^2(2x))}{4\tan^3(x)} \cdot 1$$

Dopo questo, vediamo che abbiamo un $\log(1 + x)$ e $\tan(x)$ che possiamo sviluppare

$$\log(1 + x\sin^2(2x)) = x\sin^2(2x) + o(x\sin^2(2x))$$

Facciamo lo stesso per $\sin(2x) = 2x + o(x)$

$$\log(1 + x\sin^2(2x)) = x \cdot (2x + o(x))^2 + o(x \cdot (2x + o(x))^2)$$

ora capiamo il come calcolare il termine $(2x + o(x))^2$ infatti proviamo a sviluppare il quadrato di binomio e troviamo che $4x^2+4x\cdot o(x)+(o(x))^2$, per la proprietà (iv) possiamo riscrivere $(o(x))^2$ come (o^2), mentre il termine $4x \cdot o(x)$ possiamo usare la proprietà (iii) per portare $4x$ dentro l'o-piccolo. Quindi il termine diventa $4x^2 + o(4x^2)$. Di conseguenza il logaritmo diventa, usando le proprietà (iii) e $(viii)$

$$\begin{aligned}
\log(1 + x\sin^2(2x)) &= x \cdot (4x^2 + o(x^2)) + o(x \cdot (4x^2 + o(x^2))) \\
&= 4x^3 + o(4x^3) + o(4x^3 + o(4x^3)) \\
&= 4x^3 + o(4x^3) + o(4x^3) \\
&= 4x^3 + o(4x^3)
\end{aligned}$$

Per la tangente facciamo gli stessi procedimenti

$$\begin{aligned}
\tan^3(x) &= (x + o(x))^3 \\
&= x^3 + 3x^2 \cdot o(x) + 3x \cdot (o(x))^2 + (o(x))^3 \\
&= x^3 + o(3x^3) + 3x \cdot o(x^2) + o(x^3) \\
&= x^3 + o(x^3) + o(3x^3) + o(x^3) \\
&= x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \\
&= x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

E quindi sostituiendo gli sviluppi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\sin^2(2x))}{4\tan^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 + o(4x^3)}{4(x^3 + o(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 + o(4x^3)}{4x^3 + o(4x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{4x^3} = 1$$

□

Con l'esercizio precedente abbiamo scoperto che

Teorema 31: Binomio con o-piccolo

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(f(x) + o(f(x)))^n = f^n(x) + o(f^n(x)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema dobbiamo usare il binomiale di Newton e quindi

$$(f(x) + o(f(x)))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k$$

Estraiamo il primo termine con $k = 0$ visto che in quel caso $o(f(x))$ avrebbe esponente 0 e quindi non ci sarebbe

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^n = f^n(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k$$

Ora possiamo usare le proprietà (iv) per poter portare dentro l'esponente nel o-piccolo, poi la proprietà (iii) per portare il termine $[f(x)]^{n-k}$ dentro al o-piccolo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot o(f^n(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot o([f(x)]^{n-k} \cdot f^k(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot o([f(x)]^{n-k+k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot o(f^n(x))
\end{aligned}$$

Poi visto che $\binom{n}{k}$ è una costante la possiamo togliere per la (vi), e poi dato che dentro la sommatoria non ci sono più termini rispetto a k possiamo calcolarla ($\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$)

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot o(f^n(x)) = \sum_{k=1}^{n} o(f^n(x)) = n \cdot o(f^n(x))$$

Ora possiamo usare di nuovo la proprietà (vi) per togliere n e così il teorema è verificato

$$n \cdot o(f^n(x)) = o(f^n(x))$$

$$(f(x) + o(f(x)))^n = f^n(x) + o(f^n(x))$$

□

Esercizio 47

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$, discutere il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1}$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Visto che sappiamo che $f(x) = o(x^2)$, l'unica unformazione che sappiamo è che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Pertanto divisiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ora il numeratore tende a 0, i termini $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0 per $x \to +\infty$, quindi ci manca da capire il termine $x^{\alpha-2}$. Per questo dobbiamo dividere in 3 casi.

Se $\alpha > 2$ allora $\alpha - 2 > 0$ e quindi $x^{\alpha-2} \to +\infty$ e quindi il denominatore complessivamente tende a $+\infty$ e pertanto di conseguenza il limite tende a 0

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{+\infty + 0 + 0} = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0$$

N.B. scrivere $\left[\frac{0}{+\infty}\right]$ è tecnicamente sbagliato perchè ∞ non è un numero ma un simbolo, e pertanto non si possono fare le operazioni con quel numero. L'ho scritto soltato per enfatizzare il concetto di limite ma non è tecnicamente corretto scriverlo. Volendo essere più precisi, avremmo dovuto usare l'algebra dei limiti infiniti.

Se $\alpha = 2$ allora il termine $x^{\alpha-2} = x^{2-2} = 1$ e quindi il limite diventare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

Se $\alpha < 2$ allora possiamo il termine $x^{\alpha-2} \to 0$ dato che l'esponente sarebbe negativo e quindi andrebbe a denominatore. E quindi il limite diventerebbe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0 + 0 + 0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

In questo caso siamo incappati in una forma indeterminata, e che quindi con i dati che abbiamo a nostra disposizione non possiamo dire nulla in merito al limite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 2 \\ \text{Non Definibile} & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

□

Definizione 14: O-grande

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A . Se esiste $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di x_0 $\exists M > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \qquad \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\}$$

Allora diciamo che "$f(x)$ è un O-grande di $g(x)$ per $x \to x_0$" e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) = O(g(x)) \qquad x \to x_0$$

Esempio 17

Sia $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ e possiamo vedere che

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Visto che $|\sin(x)| \leq 1$. Di conseguenza possiamo prendere un qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e sapremo che

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x) \qquad x \to x_0$$

Esercizio 48

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A. Allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0 \implies f(x) = O(g(x)) \quad x \to x_0$$

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che $f(x) = o(g(x))$, che usando la definizione di o-piccolo sappiamo che

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Pertanto usando la definizione di limite sappiamo che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di x_0. Ora usiamo le proprietà dei modili

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \implies \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \varepsilon \implies |f(x)| < \varepsilon|g(x)|$$

Però la definizione O-grande richiedeva che ci fosse almeno un $M > 0$ tale che $|f(x)| < M|g(x)|$, però con la definizione di limite abbiamo trovato che vale $\forall \varepsilon > 0$ e di conseguenza basta scegliere $M = \varepsilon$ e implicazione è verificata.

$\square$

ATTENZIONE Non è vero il contrario, infatti lo vediamo con un esempio, infatti se prendiamo $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x + 2$ è facile vedere che

$$|x + 1| \leq |x + 2| \qquad \forall x \geq -1$$

Pertanto possiamo scegliere un qualsiasi intorno di 0 della forma $I = (-\delta, +\delta)$ con $\delta \leq 1$, e di conseguenza è verificata la definizione di O-grande e quindi

$$x + 1 = O(x + 2) \qquad \forall x \in I$$

Però se proviamo a vedere se $f(x) = o(g(x))$ vediamo subito che non lo è dato che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Questo succede perchè O-grande ci dice che una funzione è più piccola di un'altra, mentre o-piccolo ci dice che una funzione è tanto più piccola di un'altra, a tal punto da rendere il limite uguale a 0.

Definizione 15: Confronti di Infiniti

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \{\pm\infty\} \qquad \exists \lim_{x \to x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$$

Allora dichiamo che

- "$f(x)$ è infinito dello stesso ordine di $g(x)$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- "$f(x)$ è infinito ordine di ordine inferiore $g(x)$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- "$f(x)$ è infinito ordine di ordine superiore $g(x)$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

- "$f(x)$ è infinito di ordine non confrontabile a $g(x)$" se

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definizione 16: Confronti di Infinitesimi

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. in A e se

- $x_0 \in \mathbb{R}$ allora diciamo che
  - "$f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

  - "$f(x)$ è infinita di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)|x - x_0|^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $x_0 \in \{\pm\infty\}$ allora diciamo che
  - "$f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)|x|^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

  - "$f(x)$ è infinita di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$" se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esercizio 49

Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \cos(x)$,

Dimostrazione. per farlo dobbiamo usare la definzione di funzione infinitesima

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos(x)}{x^\alpha}$$

Per capire quanto vale dobbiamo fare una razionalizzazione

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2} + \cos(x)}{\sqrt{1 + x^2} + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x^2 - \cos^2(x)}{x^\alpha(\sqrt{1 + x^2} + \cos(x))}\end{aligned}$$

Il termine $\sqrt{1 + x^2} + \cos(x) \to 2$ quindi possiamo levarlo visto che non influisce sul grado della funzione. Notiamo in oltre che possiamo spaccare la funzione nel seguente modo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x^2 - \cos^2(x)}{x^\alpha(\sqrt{1 + x^2} + \cos(x))} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x^\alpha} + \frac{1 - \cos^2(x)}{x^\alpha}$$

Ed entrambi convergono solo se $\alpha = 2$, e quindi il gradi infinitesimale di $f(x)$ è 2. Se fosse stato $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - \cos(x)$ era necessario usare gli sviluppi dell'o-piccolo. □

5 Successioni e Serie

Definizione 17: Successioni

Si definisce successione una funzione a variabile naturale a valori reali, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e si indica con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oppure $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mentre il ternime generale si indica con $a(n)$ oppure a_n. Il dominio può essere $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ oppure $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, dove n_0 è un qualsiasi numero naturare dal quale inizia la successione.

vediamo qualche esempio di successione

Esempio 18

- $a_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $a_n = (n-5)! \quad \forall n \geq 5$

  Qui chiaramente il fattoriale è definitio per numeri non negativi, quindi la successione deve partire da 5, perchè prima non è definita.
- $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  In questo caso basta togliere soltanto il caso $n = 0$
- $a_n = \frac{1}{n-7} \quad \forall n \geq 8$

  Teoricamente in questo caso basterebbe levare il caso $n = 7$, ma per evitare di avere un "buco" nella sequenza, la facciamo partire da $n = 8$.

Teorema 32: Punti di Accumulazione per le Successioni

Dato che le successioni sono delle funzioni, allora saranno validi tutti i teoremi visti in precedenza, però abbiamo qualche particolarità, in fatti nelle successioni esiste un unico punto di accumulazione: $+\infty$, dato che se prendiamo un qualsiasi altro punto vedremo che è isolato. Infatti per ogni punto del dominio posso sempre trovare un intervallo vuoto, basta scegliere un raggio < 1. Quindi nelle successioni possiamo fare solo ed esclusivamente il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Di conseguenza possiamo scrivere anche soltanto $\lim a_n = l$ oppure ancora più semplicemente $a_n \to l$.

Definizione 18: Convergenza, Divergenza e Irregolarità delle successioni

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ allora

- Se $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$ allora diciamo che $(a_n)_{n\in A}$ è convergente a l
- Se $\lim a_n = l \in \{\pm\infty\}$ allora diciamo che $(a_n)_{n\in A}$ è divergente a $\{\pm\infty\}$
- Se $\nexists \lim a_n$ allora diciamo che $(a_n)_{n\in A}$ è irregolare

Definizione 19: Monotonia e Limitatezza delle Successioni

Dato che le successioni sono delle funzioni, riprendiamo le prinicipali definizioni delle funzioni a variabili reali e le analiziamo per le successioni
Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ allora diciamo che

- $(a_n)_{n\in A}$ è monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in A$
- $(a_n)_{n\in A}$ è monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in A$

E chiaramente ci sarà anche la monotonia crescente stretta con $a_n < a_{n+1}$ e uguale per la descescenza. In oltre possiamo dire che è definitivamente crescente se è crescente $\forall n \geq \bar{n}$, ragionamento analogo alla decrescenza.

- $(a_n)_{n\in A}$ è limitata se $\exists M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in A$
- $(a_n)_{n\in A}$ è limitata definitivamente se $\exists M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \geq \bar{n}$

N.B. come dicevamo le successioni sono vere e proprie funzioni e pertanto saranno validi tutti i seguenti Teoremi: Teorema dell'unicità del limite, Relazione d'ordine *I* e *II*, Teorema dei due carabinieri, algebra dei limiti finiti e infiniti.

Definizione 20: Successioni Ricorsive

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ allora diciamo che a_n è ricorsiva se esiste una funzione tale che

$$a_n = f(a_{n-1})$$

Un esempio classico è il fattoriale, infatti il fattoriale lo possiamo scrivere come

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ a_n &= n \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

Teorema 33: Limitatezza delle succesioni quando esiste Limite

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ e se $a_n \to l \in \mathbb{R}$ allora $(a_n)_{n\in A}$ è limitata globalmente.

Dimostrazione. Nelle funzioni a variabili reali sapevamo che se esiste il limite allora la funzione era limitata definitivamente, proprio perche se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l$ sapevamo che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

E da questo potevamo dedurre che

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - l + l| \\ &\leq |f(x) - l| + |l| \\ &< \varepsilon + |l| \end{aligned}$$

E di conseguenza noi sappiamo che $f(x)$ era limitata definitivamente, e quindi questo sarà vero anche per le successioni, ma con le successio possiamo dire qualcosa di più. Infatti se $a_n \to l$ per lo stesso ragionamento possiamo dire che

$$|a_n| < \varepsilon + |l| \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Ora possiamo prendere tutti i numeri prima di $\bar{n}$ e $\varepsilon + |l|$ e prendere il massimo tra questi valori

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_{\bar{n}}|, \varepsilon + |l|\}$$

Importante specificare che $M \notin \{\pm\infty\}$, perche tutti i valori con $n \leq \bar{n}$ sono valori finiti, e lo stesso vale per $\varepsilon + |l|$. Ora notiamo che per i valori di $n \leq \bar{n}$ saranno sicuramente più piccoli del massimo tra loro. mentre per i valori con $n > \bar{n}$ abbiamo che saranno sempre minori di $\varepsilon + |l|$, di conseguenza $|a_n| < M$ per $\forall n \in A$ che è la definizione di limitata globarlmente, e non solamente definitivamente. □

Definizione 21: Progressione Geormetrica

Fissato $r \in \mathbb{R}$ detta ragione, allora si dice progressione geometrica la successione definita come

$$a_n = r^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{il cui limite è } \lim a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } r > 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ \text{Non Esiste} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Definizione 22: Sottosuccessione

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ e una funzione $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, allora si dice Sottosuccessione, o estratta, di $(a_n)_{n\in A}$ la successione $(a_{\varphi(k)})_{k\in A}$

Vediamo un esempio di sottosuccessione

Esempio 19

$$a_n = (-1)^n \qquad\qquad \varphi : n \to 2n$$

Dimostrazione. Notiamo subito che la funzione $\varphi(n)$ è strettamente crescente, quindi la possiamo usare. Proviamo quindi a trovare la sotto successione $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, per farlo basta sostituire la funzione nella n nella funzione originale.

$$a_{\varphi(n)} = (-1)^{2n} \implies a_{\varphi(n)} = ((-1)^2)^n \implies a_{\varphi(n)} = 1^n \implies a_{\varphi(n)} = 1$$

Quindi questa sottosuccessione è semplicemente una sequenza di 1. Da notare che le sottosuccessioni sono come le funzioni composte nelle funzioni a variabile reale. In oltre in questo esempio possiamo notare che se avessimo scelto $\varphi(n) = 2n + 1$ la sottosuccessione risultante sarebbe stata $a_{\varphi(n)} = -1$, e questo vedremo presto implica una cosa molto importante. □

Teorema 34: Relazione tra Successione e le sue Sottosuccessioni

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ allora $\exists a_n \to l \in \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\}$ se e solo se tutte le sottosuccessioni hanno limite l

Il teorema per com'è scritto non è molto utile, infatti è molto difficile controllare se tutte le possibili sottosuccessioni facciano lo stesso limite, ma è molto più utile la negazione di questo teorema, infatti se è vero che tutte le sottosuccessioni devono avere limite l, è anche vero che ne basta trovare almeno una che hanno limite diverso per dire che la successione originale non ha limite.

Esempio 20

$$a_n = (-1)^n$$

Dimostrazione. Infatti come avevamo visto se usiamo la sottosuccessione con $\varphi(n) = 2n$, veniva fuori $a_{\varphi(n)} = 1$, mentre se prendevo la sottosuccessione $\varphi(n) = 2n+1$ diventerebbe $a_{\varphi(n)} = -1$, di conseguenza due sottosuccessioni hanno limite diverso allora la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite. □

Teorema 35: Teorema di Bolzano-Weierstrass

Se $(a_n)_{n\in A}$ è limitata, allora esiste almeno una sottosuccessione $(a_{\varphi(n)})_{n\in A}$ che converge

Un esempio lo abbiamo visto appena adesso con la successione $a_n = (-1)^n$, visto che è una funzione limitata allora almeno una, noi ne abbiamo trovate 2, sottosuccessione converge.

Teorema 36: Caratterizzazione sequenziale del Limite

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. in A allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\} \iff \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$$

Per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

- $a_n \neq 0$ definitivamente per $n \to +\infty$
- $\lim a_n \to x_0$

Anche qua come nella relazione tra Successione e Sottosuccessioni, è impossibile trovare qualsiasi successione e controllare che tutte facciano l. Questo teorema è molto ultile usare la sua negazione, infatti basta trovare due successioni che rendono il limite diverso per capire che il limite della funzione originale non esiste. Infatti proviamo a calcolare un limite che è difficile da dimostrare, ma che con questo teorema diventa molto semplice.

Esercizio 50

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$$

Dimostrazione. Possiamo scegliere $a_n = \frac{\pi}{2}+2\pi n$ e possiamo vedere che possiamo applicare il teorema perchè $a_n \neq 0$ definitivamente, e che $a_n \to +\infty$, quindi vediamo come diventa il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

Usando le proprietà del seno sappiamo che $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Ora ripetiamo lo stesso procedimento per $b_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, ricordanto che per le proprietà del seno $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1$$

Abbiamo trovato quindi due successione che fanno tendere la funzione a due limiti diversi e di conseguenza $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ □

Esercizio 51

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Dimostrazione. Anche se lo abbiamo già dimostrato che questo limite non esiste, proviamo a dimostrarlo grazie a questo teorema, infatti se scelgo $a_n = \frac{1}{n}$, è valida perchè $a_n \to 0$ e di condeguenza il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Invece se provia con la successione $b_n = \frac{-1}{n}$ succede che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{-1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$$

Anche qua vediamo che con la sucessione a_n il nostro limite tende a $+\infty$, mentre con b_n tende a $-\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$, come avevamo già dimostrato. □

Esercizio 52

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica non costante, Allora

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Dimostrazione. In primis capiamo che ipotesi abbiamo infatti una funzione è periodica se $\exists T > 0$ tale che $f(x + nT) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$. In più sappiamo che non è costante, che vuol dire $\exists x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Quindi se scelgo $a_n = x_1 + nT$, e posso farlo perchè $a_n \to +\infty$ visto che $T > 0$ per ipotesi, allora posso sostituirlo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_1 + nT)$$

Per definizione di funzione periodica sappiamo che $f(x_1 + nT) = f(x_1)$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_1 + nT) = \lim_{n\to+\infty} f(x_1) = f(x_1)$$

Ora posso scegliere $b_n = x_2 + nT$, e per la stessa logica di a_n

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_2 + nT) = \lim_{n\to+\infty} f(x_2) = f(x_2)$$

Notiamo che in un caso il limite tende a $f(x_1)$ e in un altro tende a $f(x_2)$, e visto che per ipotesi $f(x_1) \neq f(x_2)$ allora $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\square$

Teorema 37: Gerarchia degli Infinito per le Successioni

Visto che le successioni sono funzioni ci portiamo dietro i seguenti teoremi
Sia $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log(n))^\beta}{n^\alpha} = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

In più, visto che le successioni sono definite per i numeri interi, allora possiamo usare anche il fattoriale, e quindi abbiamo due limiti nuovi

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\text{(iv)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Dimostrazione. I primi due sono verificati perchè sono vere per le funzioni a variabili reali, e di conseguenza valgono anche per le successioni. Iniziamo dimostrando la (iv).

(*iv*) Notiamo subito che sia $n! \geq 0$ che $n^n \geq 0$ e di conseguenza $\frac{n!}{n^n} \geq 0$. Ora riscriviamo la frazione usando la definizione di fattoriale

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n \cdot n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

Notiamo subito che il primo termine $\frac{n}{n} = 1$ quindi possiamo toglierlo, in più tutti i termini sono ≤ 1, quindi

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} &\leq 1 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq ... \\ &\leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

Visto che $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

(*iii*) Come prima, sappiamo che $a^n \geq 0$ e che $n! \geq 0$ e quindi $\frac{a^n}{n!} \geq 0$. Visto che $a > 1$ allora $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $N > a$. Quindi potremo riscrivere la sequenza con $n \geq N$ come

$$\frac{a^n}{n!} = \boxed{\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot ... \frac{a}{N-1} \cdot \frac{a}{N}} \cdot \boxed{\frac{a}{N+1} \cdot .. \frac{a}{n-1}} \cdot \frac{a}{n}$$

Notiamo che tutti i termini nel riquadro rosso sono tutti $\leq a$, dato che $N > 1$, mentre tutti i termini nel riquadro blu sono ≤ 1 perchè $N \geq a \implies 1 \geq \frac{a}{N}$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &\leq \boxed{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a} \cdot \boxed{1 \cdot ... \cdot 1} \cdot \frac{a}{n} \\ &\leq a^N \cdot 1 \cdot \frac{a}{n} \\ &\leq \frac{a^{N+1}}{n} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^{N+1}}{n}$$

Visto che a^{N+1} è un numero ben definito e non è dipendente da n allora $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{N+1}}{n} = 0$, e quindi per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$\square$

Teorema 38: Formula di Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Vediamo qualche esercizio per allenarci con questa formula

Esercizio 53

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Dimostrazione. Visto che è una equivalenza asintotica possiamo sistutire $n!$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Facciamo qualche riarrangiamento

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt[2n]{2\pi n} \\ &= e^{-1} \lim_{n\to+\infty} n \sqrt[2n]{2\pi n}\end{aligned}$$

Ora possiamo usare la tecnica delle potenze di funzioni e applichiamo le regole dei logaritmi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n \sqrt[2n]{2\pi n} &= \lim_{n\to+\infty} e^{\log(n \sqrt[2n]{2\pi n})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\log(n) + \log((2\pi n)^{\frac{1}{2n}})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\log(n) + \frac{1}{2n}\log(2\pi n)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\log(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\log(2)}{n} + \frac{\log(\pi)}{n} + \frac{\log(n)}{n}\right)}\end{aligned}$$

Ora i termini $\frac{\log(2)}{n}$ e $\frac{\log(\pi)}{n}$ è facile vedere che tendono a 0, poi per la gerarchia degli infiniti anche $\frac{\log(n)}{n} \to 0$, mentre il termine $\log(n) \to +\infty$, quindi l'esponente complessivamente tende a $+\infty$, quindi l'esponenziale tende anche lui a $+\infty$, e di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

□

Teorema 39: Criterio di convergenza per le Successione

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n\in A}$ definitivamente positiva allora se

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

allora

$$\text{(i)} \;\; l \in [0, 1) \implies \lim a_n = 0$$

$$\text{(ii)} \;\; l \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\} \implies \lim a_n = +\infty$$

$$\text{(iii)} \;\; l = 1 \implies \text{nulla si può dire}$$

Dimostrazione. Per dimostrare dobbiamo riprendere la definizione di limite, infatti se esiste il limite allora sappiamo che

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \qquad \forall x \in I$$

Riscriviamo il termine

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \iff l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \implies (l - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon)a_n$$

(i) Per dimostrare il punto (i) ci basta prendere un qualsiasi $N \in \mathbb{N}$ e la disequazione $a_{N+1} \leq (l + \varepsilon)a_N$, infatti dato che è vera possiamo dire anche che $a_{N+2} \leq (l + \varepsilon)a_{N+1}$ e anche $a_{N+3} \leq (l + \varepsilon)a_{N+2}$ e così via, e possiamo dire che

$$\begin{aligned}
a_{N+3} \leq (l + \varepsilon)\underline{a_{N+2}} &\leq (l + \varepsilon)\underline{(l + \varepsilon)a_{N+1}} \\
&\leq (l + \varepsilon)^2 a_{N+1} \\
a_{N+3} \leq (l + \varepsilon)^2 \underline{a_{N+1}} &\leq (l + \varepsilon)^2 \underline{(l + \varepsilon)a_N} \\
&\leq (l + \varepsilon)^3 a_N \\
a_{N+3} &\leq (l + \varepsilon)^3 a_N
\end{aligned}$$

Seguendo questo ragionamento possiamo dire che

$$a_{N+k} \leq (l + \varepsilon)^k a_N \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ora noi per ipotesi sappiamo che $l \in [0, 1)$, quindi se scegliamo $\varepsilon \in [0, 1 - l)$ in modo tale che il termine $(l + \varepsilon) < 1$. Ricordiamo anche che la funzione, per ipotesi, è definitivamente positiva, quindi sarà vero che $a_{N+k} \geq 0$. Ora se mandiamo al limite la seguente disequazione

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} a_{N+k} \leq \lim_{k\to+\infty} (l + \varepsilon)^k a_N$$

Scopriamo che il termine di destra tende a 0 per le regole degli esponenziali, e quindi complessivamente il termine di destra $0 \cdot a_N \to 0$, visto che a_N è un numero finito. In più nel termine centrale possiamo togliere N visto che $k \sim k + N$ per $k \to +\infty$, pertanto per il teorema dei due carabinieri abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

(*ii*) Per dimostrare il secondo punto ci serve riprendere la disequazione impostata all'inizio della dimostrazione

$$(l-\varepsilon)a_n < a_{n+1}$$

Ora per lo stesso ragionamento del punto scorso possiamo scegliere un $N \in \mathbb{N}$ e potremo dire che

$$(l-\varepsilon)^k a_N \leq a_{N+k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Se scegliamo un $\varepsilon \in [0, l-1)$ avremo che $l-\varepsilon > 1$ e quindi se lo portiamo al limite avremo che $(l-\varepsilon)^k \to +\infty$, e di conseguenza per il corollario del teorema dei due carabinieri abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$$

N.B. è impossibile che $a_N = 0$, infatti a_N è il termine generale di una serie, quindi ammeno che non sia la serie $a_N = 0$ che in quel caso converge, non ci sono problemi che venisse fuori una forma indeterminata $\left[\infty \cdot 0\right]$. □

Teorema 40: Esistenza del limite di funzioni Monotone

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \to \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n\in A}$ definitivamente monotona allora $\lim a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e possiamo dire anche che

- Se $(a_n)_{n\in A}$ è monotona crescente allora

$$\lim a_n = \sup\{a_n : n \in A\}$$

- Se $(a_n)_{n\in A}$ è monotona decrescente allora

$$\lim a_n = \inf\{a_n : n \in A\}$$

Questo teorema è la versione del Teorema del limite di funzioni monotone applicato alle successioni, quindi non serve la dimostrazione perchè è la stessa delle funzioni.

Definizione 23: Serie Numeriche

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un successione a valori reali, definiamo la successione delle **somme parziali** $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definita come

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

Diciamo "**serie numerica con termine generale** a_n" il limite della successione delle somme parziali, e la indichiamo come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} S_k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Visto che S_k è una successione, allora anche nelle serie ereditiamo i termini già visti: **Convergenza**,**Divergenza** e **Irregolare**

Definizione 24: Convergenza, Divergenza e Irregolarità delle Serie

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, allora diciamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è

- Convergente se $\lim S_k = l \in \mathbb{R}$
- Divergente se $\lim S_k = l \in \{\pm\infty\}$
- Irregolare se $\nexists \lim S_k$

Esempio 21

Se prendiamo $a_n = r^n$, con $r \in \mathbb{R}$, per induzione si può dimostrare che la successione delle somme parziale è definita come

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} r^n = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

Pertanto se portiamo tutto al limite abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{k} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } r \in (-1,1) \\ +\infty & \text{se } r \geq 1 \\ \nexists & \text{se } r \leq 1 \end{cases}$$

E questa è detta **Serie Geometrica**.

Teorema 41: Serie Armonica Generalizzata

Dato $\alpha \in [0, +\infty)$ allora con **Serie Armonica Generalizzata** intendiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{Divergente a } +\infty & \text{se } \alpha \in [0,1] \\ \text{Convergente} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. (caso $\alpha \in [0,1)$) Scriviamo le somme parziali per capire meglio

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{k^\alpha}$$

Notiamo che $\forall n \leq k$ vale $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$, quindi possiamo dire che

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{k^\alpha} &\geq \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{k^\alpha} + ... + \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \frac{k}{k^\alpha} = k^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Dato che $\alpha \in [0,1)$, appiamo che $1 - \alpha > 0$, e quindi se portiamo la sommatoria al limite abbiamo che $k^{1-\alpha} \to +\infty$, e visto che la serie armonica è maggiore di una somma divergente, anche lei diventa divergente.

(caso $\alpha = 1$) Notiamo che la sommatoria S_k è monotona crescente, infatti

$$S_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{k+1}$$
$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k+1}$$

E notiamo che $\frac{1}{k+1} > 0$, $\forall k > 0$, quindi

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k+1} > S_k + 0$$
$$S_{k+1} > S_k$$

E pertanto la serie è monotona crescente, e visto che la somma delle serie parziali è una successione, per il teorema dell'esistenza di funzioni monotone sappiamo che il limite esiste e deve valere $S \in [1, +\infty] \cup \{+\infty\}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} S_{2k} - S_k &= \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

Come per il caso $\alpha \in [0, 1)$, vediamo che $\frac{1}{k+n} \geq \frac{1}{2k}$, $\forall n \leq k$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} &\geq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + ... + \frac{1}{2k} \\ &= k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che $S_{2k} - S_k \geq \frac{1}{2}$, quindi sappiamo anche che $S_{2k} \geq S_k + \frac{1}{2}$, ma se supponiamo che $S \neq +\infty$ vediamo che per $S_{2k} \to S$ e anche $S_k \to S$ e quindi

$$S_{2k} \geq S_k + \frac{1}{2}$$
$$S \geq S + \frac{1}{2}$$
$$0 \geq \frac{1}{2}$$

Chiaramente è impossibile che $0 \geq \frac{1}{2}$, e quindi vuole dire che l'ipotesi che $S \neq +\infty$ è sbagliata e di conseguenza abbiamo scoperto che $S = +\infty$ e che quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

(caso $\alpha > 1$) Come per il caso $\alpha = 1$ possiamo dire che la successione delle serie parziali è monotona crescente

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)^\alpha} \geq S_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

E di conseguenza il limite esiste e varrà $S \in [1, +\infty) \cup \{+\infty\}$, notiamo che

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2k)^\alpha} + \frac{1}{(2k+1)^\alpha} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2k)^\alpha} + \frac{1}{(2k+1)^\alpha}\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right) \end{aligned}$$

Sappiamo che $\frac{1}{(2n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(2n)^\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right) &\leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{(2n)^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{2^{1-\alpha}}{n^\alpha} \\ &= 2^{1-\alpha} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$S_{2k+1} \leq 1 + 2^{1-\alpha} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha}$$

Però ricordiamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} = S_k$ e quindi

$$S_{2k+1} \leq 1 + 2^{1-\alpha} S_k$$

Prima abbiamo detto che la sommatoria ha limite visto che è monotona crescente, quindi supponiamo che $S \in [1, +\infty)$, pertanto se portiamo tutto al limite abbiamo che $S_{2k+1} \to S$ e $S_k \to S$.

$$S \leq 1 + 2^{1-\alpha} S$$
$$S \leq \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}$$

Pertanto abbiamo che il limite delle somme parziali è minore di un certo valore finito, quindi la serie converge. □

Teorema 42: Linearità delle Serie

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty}(c \cdot a_n + d \cdot b_n)$ converge $(\forall c, d \in \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Per dimostrarlo è necessario usare l'algebra dei limiti finiti, infatti se, per ipotesi, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$, allora sappiamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}(c \cdot a_n + d \cdot b_n) &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k}(c \cdot a_n + d \cdot b_n) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k}(c \cdot a_n) + \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k}(d \cdot b_n) \\
&= \lim_{k\to+\infty} c \sum_{n=1}^{k} a_n + \lim_{k\to+\infty} d \sum_{n=1}^{k} b_n \\
&= c \cdot A + d \cdot B
\end{aligned}$$

E chiaramente, visto che A e B sono dei numeri finiti, allora anche $c \cdot A + d \cdot B$ converge, e pertanto la sommatoria della combinazione lineare è convergente. □

Teorema 43: Termine Generale in funzione dalla relativa Serie Numerica

Dato $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione delle somme parziali di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora possiamo trovare l'espressione analitica del termine generale di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come

$$a_n = S_k - S_{k-1}$$

Teorema 44: Condizione Necessaria per la Convergenza

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, e $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali, allora se $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Usando il termine Generale in funzione dalla relativa Serie Numerica sappiamo che $a_n = S_k - S_{k-1}$, ma visto che per ipotesi S_k converge a un numero (S), allora $S_k \to S$ e anche $S_{k-1} \to S$ pertanto se portiamo quell'informazione al limite abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} (S_k - S_{k-1}) \\
\lim_{n\to+\infty} a_n &= S - S \\
\lim_{n\to+\infty} a_n &= 0
\end{aligned}$$

□

Negli esercizi dovremmo trovare il carattere di una serie, quindi per come è posto questo teorema, non ci è molto utile. Però per le regole della implicazione logica, sappiamo anche che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ non converge.}$$

N.B. dall'implicazione sappiamo che la serie non converge, cioò vuol dire che o diverge o è irregolare, quindi attensione a non dire che diverge, perchè potrebbe essere irregolare. Per controllare se è divergente o convergente basta controllare se la serie è monotona, e in quel caso allora la serie è divergente.

Però se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, NON possiamo dire nulla, quindi per questi casi è necessario usare altri criteri. Faccendo un esempio: sia $a_n = \frac{1}{n}$ che $b_n = \frac{1}{n^2}$ abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Però abbiamo visto con la serie armonica generalizzata abbiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Definizione 25: Serie a Termini Positivi

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ oppure $\forall n \geq \bar{n}$, allora diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è a **termini positivi** oppure a **termini definitivamente positivi**.

Teorema 45: Proprietà delle Serie a Termini Positivi

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è a termini positivi, allora ha limite $S \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Dimostrazione. Visto che la serie è a termini definitivamente positivi, allora sappiamo che $a_n \geq 0$, $\forall n \geq \bar{n}$ allora sappiamo che

$$S_k = S_{k-1} + a_k \geq S_{k-1} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$$S_k \geq S_{k-1}$$

Abbiamo scoperto che se la serie è a termini positivi allora è anche anche monotona crescente, e dato che sappiamo che se una serie è monotona crescente allora ha limite, di conseguenza anche se una serie è a termini positivi avrà limite convergente o divergente. □

Teorema 46: Criterio del Confronto delle Serie

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ abbiamo che

(i) se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge a $B \in \mathbb{R}$ allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a $A \in \mathbb{R}$ con $A \leq B$.

(ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge a $+\infty$

Dimostrazione. Per dimostrarlo è necessario usare le somme parziali, infatti siano

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \qquad B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$$

(i) Poi dato che $a_n \leq b_n$ allora è vero anche che $A_k \leq B_n$, pertanto per il teorema di relazione d'ordine sappiamo che se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$, in più, sempre per il teorema delle relazioni d'ordine sappiamo che $A \leq B$

(ii) Per dimostrare questo punto invece è necessario usare il corollario del teorema dei carabinieri, infatti se A_k diverge allora anche B_k diverge. $\square$

Esempio 22

Determinare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Intanto notiamo che assomiglia molto alla serie $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi proviamo a vedere se una è maggiore dell'altra

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$
$$n^2 \leq n^2 + n$$
$$0 \leq n$$

Quindi sappiamo che $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi per il criterio del confronto sappiamo che se $\sum \frac{1}{n^2}$ convergesse allora anche $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Però abbiamo visto con le serie armoniche che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, visto che l'esponente $2 > 1$ e di conseguenza anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Per questa serie lo potevamo scoprire anche usando le serie telescopische, infatti $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e quindi $\lim \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, e infatti la serie converge a 1.

Definizione 26: Serie Assolutamente Convergente

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **Assolutamente Convergente** se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 47: Relazione Convergenza Assoluta e Semplice

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è anche converge anche semplicemente.

Dimostrazione. Proviamo a sviluppare la seguente serie, e applichiamo k-volte la diseguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| &= |a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k| \\
&\leq |a_1| + |a_2 + a_3 + ... + a_k| \\
&\leq |a_1| + |a_2| + |a_3 + ... + a_k| \\
&\leq ... \\
&\leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_k| \\
\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| &\leq \sum_{n=1}^{k} |a_n|
\end{aligned}$$

Pertanto se, per ipotesi, $\sum |a_n|$ converge a $S \in \mathbb{R}^+$, allora se portiamo al limite la disequazione abbiamo che

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq S \iff \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in [-S, S]$$

Però visto che S è un numero finito, e sappiamo che la serie è compresa tra due valori finiti, allora di conseguenza anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente. $\square$