



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Formulario di Teoremi e relative Dimostrazioni

Student :

Alex Gasparini

19 novembre 2025

Indice

1	Principio d'Induzione	3
	Teorema del binomio di Newton	3
	Teorema dell'Irrazionalità di $\sqrt{2}$	6
2	Insiemistica	7
	Definizione di Insieme Limitato	7
	Definizione di Massimo e Minimo	7
	Teorema dell'unicità dei Massimi e Minimi	7
	Definizione Estremi Superiori e Inferiore	8
	Relazione Massimi/Minimi e Estremi	8
	Caratterizzazione degli Estremi	9
	Completezza di \mathbb{R} I° forma	9
	Completezza di \mathbb{R} II° forma	9
	Definizione di Intorno	10
	Teorema di Intersezione degli Intorni	10
	Teorema di Separazione degli intorni	10
	Definizione di punto di Accumulazione	10
	Definizione di punto di Accumulazione Destro/Sinistro	10
3	Limiti	12
	Definizione di Limite	12
	Teorema di Unicità del Limite	12
	Esercizi Dimostrazione Limite	13
	Definizione di Limite Destro e Sinistro	21
	Relazione Limite con limite Destro e Sinistro	23
	Limite del Valore Assoluto di una Funzione	25
	Limite del Valore Assoluto di una Funzione (caso $l = 0$)	26
	Teorema della Permanenza del Segno	27
	Limiti e Relazioni d'Ordine I	28
	Limiti e Relazioni d'Ordine II	29
	Teorema dei due Carabinieri	29
	Algebra dei Limiti Finiti	31
	Algebra dei Limiti Infiniti (Forme Determinate)	34
	Esercizi sull'Algebra dei Limiti Infiniti	35
	Forme Indeterminate	36
	Primi Esercizi sulle Forme Indeterminate	36
	Teorema del Cambio di Variabile	39
	Limite di funzioni Monotone caso Finito	41
	Limite di funzioni Monotone caso Infinito	42
	Limiti Notevoli	46
	Definizione di Funzioni Asintotiche	49
	Teorema delle Proprietà delle Funzioni Asintotiche	50
	Gerarchia degli Infiniti	50

4 Simboli di Landau	52
Definizione di o-piccolo	52
Proprietà degli o-piccoli <i>I</i>	53
Relazione tra o-piccolo e Asintoticità	55
Teorema del Cambio di variabile con o-piccolo	56
Principio di Sostituzione	57
Proprietà degli o-piccoli <i>II</i>	58
Esercizi con o-piccolo	59
Binomio con o-piccolo	62
Definizione di O-grande	64
Confronti di Infiniti	65
Confronti di Infinitesimi	65

1 Principio d'Induzione

Teorema 1: del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dimostrazione. Facciamo una dimostrazione per induzione. Partiamo con la base induttiva, con $n_0 = 0$:

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k \\ &= \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

La base induttiva è stata verificata. Ora passiamo al passo, quindi supponiamo che $P(n)$ sia vero, e proviamo a vedere se è vero $P(n + 1)$

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Per proseguire con la dimostrazione lasceremo inalterato il termine di destra e andremo a modificare quello di sinistra.

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n \cdot (a + b)$$

Ora possiamo sostituire $(a + b)^n$ con $P(n)$ visto che è $P(n)$ è vera (dato che è una nostra ipotesi)

$$(a + b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a + b) \tag{1}$$

$$= \underbrace{a \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)}_{\text{blu}} + \underbrace{b \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)}_{\text{rosso}} \tag{2}$$

Per comodità andiamo a analizzare singolarmente le due sommatorie, prima quella in blu e poi quella in rosso.

$$\begin{aligned} \underbrace{a \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)}_{\text{blu}} &= \sum_{k=0}^n a \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

Ora analizziamo la parte rossa

$$\begin{aligned} \underline{b \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)} &= \sum_{k=0}^n b \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \end{aligned}$$

ora facciamo una sostituzione $h = k + 1$

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}} &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} b^h \\ &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h \end{aligned}$$

Visto che gli indici nelle sommatorie sono muti, sostituiamo h con k , in modo che tutte le sommatorie sono rispetto a k

$$\underline{\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k$$

Ricomponiamo le due sommatorie ritornando al punto (2)

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k}_{\text{blu}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k}_{\text{rosso}} \quad (3)$$

Per unire le due sommatorie devono avere gli stessi indici, quindi rimuoviamo gli indici "in più", nella prima togliamo il termine con indice $k = 0$, in modo che entrambe partano con $k = 1$, e nella seconda rimuoviamo il termine $k = n + 1$ in modo che entrambe finiscano con il termine $k = n$

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k} &= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &= 1 \cdot a^{n+1} \cdot 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k &= \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

Riscriviamo il termine (3)

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \underbrace{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{b^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= \underbrace{a^{n+1}} + \underbrace{b^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right) \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^k \cdot \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^k \cdot \binom{n+1}{k} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

Siamo quasi alla fine ma notiamo che rispetto a $P(n+1)$ gli indici sono sbagliati, infatti $P(n+1)$ parte con indice $k=0$ e termina con $k=n+1$, mentre la sommatoria che abbiamo appena trovato parte da $k=1$ e termina con $k=n$. Proviamo a vedere cosa sarebbero i termini $k=0$ e $k=n+1$ (quelli che a noi mancano)

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 &= 1 \cdot a^{n+1} \cdot 1 = \underline{a^{n+1}} \quad (k=0) \\
 \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} &= 1 \cdot 1 \cdot b^{n+1} = \underline{b^{n+1}} \quad (k=n+1)
 \end{aligned}$$

Vediamo che i termini che ci mancano (a^{n+1} e b^{n+1}) in realtà ce li abbiamo fuori dalla sommatoria, quindi possiamo "portarli dentro" alla sommatoria sistemando gli indici

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

In questa maniera siamo riusciti a dimostrare il passo induttivo, visto che siamo partiti da $P(n)$ e siamo riusciti a dimostrare che $P(n+1)$. Pertanto, visto che sia il passo induttivo che la base induttiva sono verificati, allora il teorema è dimostrato. \square

Teorema 2: Irrazionalità di $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta per assurdo, quindi partiamo supponendo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pertanto $\sqrt{2}$ lo possiamo scrivere come:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Supponiamo anche che il $\text{mcd}(p, q) = 1$ (Massimo Comun Divisore), altrimenti p e q sarebbero semplificabili ulteriormente. Attenzione perchè questo punto sarà fondamentale per la dimostrazione.

Per semplicità, eleviamo tutto al quadrato

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \tag{4}$$

$$2q^2 = p^2 \tag{5}$$

Ora notiamo che p^2 è un multiplo di 2, perciò p^2 è un numero pari. di conseguenza anche p è un numero pari dato che solamente un il prodotto di due numeri pari da un numero pari. Allora possiamo scrivere p come

$$p = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi andiamo a sostituirlo nell'equazione (5)

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Dopo le varie semplificazioni notiamo che anche q^2 è divisibile per 2, e come abbiamo dedotto per p , allora anche q è divisibile per 2. Però sia p che q sono divisibili per 2, questo implica che $\text{mcd}(p, q) \geq 2$. Cosa assurda, visto che avevamo imposto che $\text{mcd}(p, q) = 1$, pertanto sono sbagliate le tesi: ovvero che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, e se questa affermazione è sbagliata allora per forza $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. \square

2 Insiemistica

Definizione 1: Insieme Limitato

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ è detto

- **Superiormente limitato** se $\exists M \in \mathbb{R} : M \geq a \quad \forall a \in A$
- **Inferiormente limitato** se $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a \quad \forall a \in A$

L'insieme $\{M : M \geq a \quad \forall a \in A\}$ è detto **Insieme dei maggioranti di A**.

L'insieme $\{m : m \leq a \quad \forall a \in A\}$ è detto **Insieme dei minoranti di A**

Definizione 2: Massimo e Minimo

- Un maggiorante M di $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **massimo** se $M \in A$

$$M = \max(A) = (M \geq a \quad \forall a \in A) \wedge M \in A \quad (6)$$

- Un minorante m di $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **minimo** se $m \in A$

$$m = \min(A) = (m \leq a \quad \forall a \in A) \wedge m \in A \quad (7)$$

Teorema 3: Unicità dei Massimi e Minimi

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se ammette un massimo o un minimo, essi sono **unici**

Dimostrazione. Supponiamo che ci siano due massimi M_1, M_2 con $M_1 \neq M_2$. Visto che M_1 è un massimo allora, per definizione di massimo (6), deve essere $M_1 \in A$. Poi visto che M_2 è un massimo, di conseguenza è anche un maggiorante allora, per definizione di maggiorante, deve valere la seguente affermazione

$$M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Dato che $M_1 \in A$ possiamo dire che

$$M_2 \geq M_1 \quad (8)$$

Ora rifacciamo il seguente ragionamento ma al contrario. Dato che M_2 è massimo allora deve essere $M_2 \in A$. Visto che M_1 è un massimo deve anche essere un maggiorante, e per tanto vale

$$M_1 \geq a \quad \forall a \in A$$

Dato che $M_2 \in A$ possiamo dire che

$$M_1 \geq M_2 \quad (9)$$

Ora combinando le informazioni (8) e (9) deve valere

$$(M_2 \geq M_1) \wedge (M_1 \geq M_2) \Rightarrow M_1 = M_2$$

Dato che una delle ipotesi era che $M_1 \neq M_2$ abbiamo raggiunto un assurdo, per tanto il massimo deve essere unico. La dimostrazione per il minimo è analoga. \square

Definizione 3: Estremi Superiore e Inferiore

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ definiamo

- **estremo superiore** di A come il minore dei maggioranti.

$$\sup(A) = \min\{M : M \geq a \ \forall a \in A\} \quad (10)$$

- **estremo inferiore** di A come il maggiore dei minoranti.

$$\inf(A) = \max\{m : m \leq a \ \forall a \in A\}$$

Teorema 4: Relazione Massimi/Minimi e Estremi

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

- Se esiste $\max(A)$, allora coincide con $\sup(A)$

$$M = \max(A) \Rightarrow M = \sup(A)$$

- Se esiste $\min(A)$, allora coincide con $\inf(A)$

$$m = \min(A) \Rightarrow m = \inf(A)$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista $M_1 = \max(A)$ allora sappiamo che è un maggiorante, e di conseguenza appartiene all'insieme dei maggioranti (N)

$$M_1 \in N = \{M : M \geq a \ \forall a \in A\} \quad (11)$$

e sappiamo anche che $M_1 \in A$, visto che è il massimo.

Se prendiamo un numero $u \in N$ abbiamo che

$$u \geq a \ \forall a \in A \ \forall u \in N$$

Visto che $M_1 \in A$ allora deve valere

$$u \geq M_1 \ \forall u \in N$$

Per questo deduciamo che M_1 è minorante di N , ma nel punto (11) avevamo detto che $M_1 \in N$, di conseguenza

$$M_1 = \min(N)$$

Che per definizione è anche l'estremo superiore, quindi

$$M_1 = \sup(A)$$

La dimostrazione del minimo è analoga. \square

N.B. che $\max(A) \Rightarrow \sup(A)$ e che $\sup(A) \not\Rightarrow \max(A)$. Per vederlo basta farsi degli esempi, come $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$ si vede che esiste un estremo superiore ($\sup(A) = \sqrt{2}$) mentre non esiste il massimo.

Teorema 5: Caratterizzazione degli Estremi

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste $\sup(A)$ oppure $\inf(A)$ allora possiamo definirli anche come:

$$S = \sup(A) = \begin{cases} S \in \{M : M \geq a \ \forall a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > S - \varepsilon \end{cases}$$

$$s = \inf(A) = \begin{cases} s \in \{m : m \leq a \ \forall a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a < s + \varepsilon \end{cases}$$

Teorema 6: Completezza di \mathbb{R} I° forma

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$
allora $\exists c \in \mathbb{R}$, detto **elemento separatore** tale che

$$a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$$

Teorema 7: Completezza di \mathbb{R} II° forma

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se è superiormente/inferiormente limitato allora ammette un estremo superiore/inferiore.

Dimostrazione. Dato che A è superiormente limitato allora esiste l'insieme dei maggioranti $N = \{M : M \in \mathbb{R} : M \geq a \ \forall a \in A\}$. Visto che tutti gli elementi dell'insieme dei maggioranti è maggiore di tutti gli elementi di A ($n \geq a \ \forall a \in A \ \forall n \in N$) possiamo applicare il Teorema di completezza di \mathbb{R} I° forma

$$\exists c \in \mathbb{R} : \underline{a \leq c} \leq \underline{c \leq n} \ \forall a \in A \ \forall n \in N$$

Visto che $\underline{a \leq c} \ \forall a \in A$ vuol dire che c è un maggiorante di A e di conseguenza $c \in N$ (l'insieme dei maggioranti).

Dato che $\underline{c \leq n} \ \forall n \in N$ allora c è un minorante di N . Quindi visto che $c \in N$, per definizione di minimo (7) possiamo dire che

$$c = \min(N)$$

Questo coincide con la definizione di **estremo superiore**, quindi

$$c = \sup(A)$$

Quindi abbiamo dimostrato che esiste un estremo superiore.

La dimostrazione dell'estremo inferiore è analoga. □

Definizione 4: Intorno

ia $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora

- Se $r \in \mathbb{R}$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma

$$(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \quad \varepsilon > 0$$
- Se $r = +\infty$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma

$$(M, +\infty) \quad M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
- Se $r = -\infty$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma

$$(-\infty, M) \quad M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Teorema 8: Intersezione degli introni

Sia $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ introni di x_0 , allora anche $I = I_1 \cap I_2$ è intorno di x_0 .

Teorema 9: Separazione degli introni

Sia $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora $\exists I_1$ intorno di r_1 e $\exists I_2$ intorno di r_2 tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Definizione 5: Definizione di punto di Accumulazione

ia $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è detto **punto di accumulazione** di $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se

- caso $r \in \mathbb{R}$:

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap (I \setminus \{r\}) \neq \emptyset$$

- caso $r \in \{\pm\infty\}$:

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap I \neq \emptyset$$

Definizione 6: Accumulazione Destro/Sinistro

ia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ è detto

- **Punto di accumulazione destro** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r, r + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

- **Punto di accumulazione sinistro** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r - \varepsilon, r) \cap A \neq \emptyset$$

N.B. i simboli $\pm\infty$ non ha senso definirli punti di accumulazione destro/sinistro

Esercizio 1

Sia $r \in \mathbb{R}$ e $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, r è punto di accumulazione destro o sinistro di A se e solo se r è punto di accumulazione di A

Dimostrazione. Visto che questa è una doppia implicazione dobbiamo controllare che l'implicazione sia vera da entrambi i lati.

(\Rightarrow) Partiamo dimostrando che se r è punto di accumulazione destro (o sinistro) di A allora r è punto di accumulazione di A . Partiamo con la definizione di punto di accumulazione destro.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r, r + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Ora dobbiamo controllare se è vera la definizione di punto di accumulazione, per farla riscriviamo

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap (I \setminus \{r\}) \neq \emptyset$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ((r - \varepsilon, r + \varepsilon) \setminus \{r\}) \cap A \neq \emptyset$$

Con questa riscrittura si nota che

$$(r, r + \varepsilon) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \setminus \{r\}$$

Di conseguenza per ogni insieme che troviamo per il punto di accumulazione destro, posso trovare un intervallo sul punto di accumulazione, di conseguenza se r è un punto di accumulazione destro deve anche essere un punto di accumulazione in A . Ragionamento analogo per il punto di accumulazione sinistro

(\Leftarrow) Per dimostrare che se r è punto di accumulazione allora deve essere punto di accumulazione destro o sinistro, ragioniamo per assurdo: quindi supponiamo che r non è ne punto di accumulazione destro ne sinistro. Allora sappiamo

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0 : (r - \varepsilon_1, r) \cap A = \emptyset \wedge (r, r + \varepsilon_2) \cap A = \emptyset$$

Ma se prendiamo $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ allora

$$\exists \varepsilon > 0 : (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

Questo non è altro che la definizione di punto isolato, ovvero la negazione di punto di accumulazione. Quindi abbiamo scoperto che

$$r \text{ non è punto acc. dx e } r \text{ non è punto acc. sx} \Rightarrow r \text{ non è punto di acc.}$$

Usando le proprietà dell'implicazione $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

$$r \text{ è punto di acc.} \Rightarrow r \text{ è punto acc. dx oppure } r \text{ è punto acc. sx}$$

□

3 Limiti

Definizione 7: Definizione di Limite

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è **limite di f per $x \rightarrow x_0$** se

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che} \\ f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Teorema 10: Unicità del limite

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se esiste il limite f per $x \rightarrow x_0$ allora è unico. E lo si indica con:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad (12)$$

Dimostrazione. Supponiamo che il limite esista ed abbiamo due valori: $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $l_1 \neq l_2$. Visto che per ipotesi $l_1 \neq l_2$ allora per il teorema di separazione abbiamo che $\exists U_1 \subseteq \mathbb{R}$ intorno di l_1 e $\exists U_2 \subseteq \mathbb{R}$ intorno di l_2 tali che:

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad (13)$$

Applicando la definizione di limite, $\exists I_1, I_2$ intorno di x_0 tali che:

$$\forall U_1 \text{ intorno di } l_1 \quad f(x) \in U_1 \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$$

$$\forall U_2 \text{ intorno di } l_2 \quad f(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$$

Usando il teorema di intersezione degli intorno, $\exists I_3 = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 , e visto che $I_3 \subseteq I_1$, anche in esso varrà la proprietà del limite l_1 . Contemporaneamente varrà anche la proprietà del limite l_2 visto che $I_3 \subseteq I_2$, per tanto

$$\forall U_1 \forall U_2 \quad f(x) \in U_1 \wedge f(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_3 \setminus \{x_0\})$$

la congiunzione logica la possiamo riscrivere come congiunzione insiemistica

$$\forall U_1 \forall U_2 \quad f(x) \in U_1 \cap U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_3 \setminus \{x_0\})$$

Però questo necessita che $\forall U_1 \forall U_2 \quad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, perchè altrimenti il limite non esisterebbe. Ma all'inizio con l'equazione (13) sappiamo che esistono almeno un U_1 e un U_2 che rendono l'intersezione vuota. Per tanto è un assurdo e le ipotesi erano sbagliate. Di conseguenza il limite deve essere unico e non può assumere più di un valore.

□

Esercizio 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2x + 3 = 2x_0 + 3$$

Dimostrazione. Proviamo a dimostrarlo con la definizione. $f(x) = 2x + 3$ e, dato che è un polinomio, il suo dominio sarà $A = \mathbb{R}$. l'intorno di $l = 2x_0 + 3$ sarà $U = (2x_0 + 3 - \varepsilon, 2x_0 + 3 + \varepsilon)$, e un intorno di x_0 sarà $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Di conseguenza con la definizione di limite sarà

$$\forall U \quad f(x) \in U \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

Con i dati dell'esercizio

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 2x + 3 \in (2x_0 + 3 - \varepsilon, 2x_0 + 3 + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Riscriviamo il termine $2x + 3 \in (2x_0 + 3 - \varepsilon, 2x_0 + 3 + \varepsilon)$

$$\begin{aligned} 2x_0 + 3 - \varepsilon &< 2x + 3 < 2x_0 + 3 + \varepsilon \\ 2x_0 - \varepsilon &< 2x < 2x_0 + \varepsilon \\ x_0 - \frac{\varepsilon}{2} &< x < x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Vediamo come partendo dalla prima porzione abbiamo trovato un intorno su cui deve stare x , pertanto affinché sia vero la definizione di limite possiamo scegliere

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

□

Esercizio 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad c \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Scrivendola in un'altra maniera

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow c \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$$

Però il conseguente della nostra implicazione è sempre vero, perchè c sarà sempre nell'intervallo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ per qualsiasi valore di ε positivo. Quindi volendo riscrivere la proposizione

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow Vero$$

Una implicazione è sempre vera quando implica vero (vedi tabella di verità dell'implicazione). Quindi la nostra proposizione è sempre vera, e di conseguenza il limite è verificato. □

Esercizio 4

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$$

Dimostrazione. Con la definizione di limite abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x^2 \in (x_0^2 - \varepsilon, x_0^2 + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Utilizzando le proprietà della funzione modulo possiamo scriverlo anche come

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

Riscriviamo il primo termine

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &< \varepsilon \\ |(x - x_0)(x + x_0)| &< \varepsilon \\ |x - x_0||x + x_0| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ora dobbiamo capire quanto vale $|x + x_0|$ in modo da non avere più la variabile x . Per farlo scegliamo $\delta < 1$

$$\begin{aligned} |x + x_0| &< \delta < 1 \\ |x + x_0| &< 1 \end{aligned}$$

con questo scopriamo che

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq \underline{|x - x_0|} + 2|x_0| < \underline{1} + 2|x_0|$$

$$|x + x_0| < 1 + 2|x_0|$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$, ricordandoci anche che $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |x - x_0||x + x_0| &< |x - x_0|(1 + 2|x_0|) \\ |x - x_0||x + x_0| &< \underline{|x - x_0|}(1 + 2|x_0|) < \underline{\delta}(1 + 2|x_0|) \end{aligned}$$

$$|x - x_0||x + x_0| < \delta(1 + 2|x_0|)$$

Partendo da $|x - x_0| < \delta$ siamo riusciti a capire che $|x^2 - x_0^2| < \delta(1 + 2|x_0|)$, quindi se per verificare il limite bisogna che $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ è necessario imporre

$$\begin{aligned} \delta(1 + 2|x_0|) &< \varepsilon \\ \delta &< \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \end{aligned}$$

Visto che abbiamo imposto $\delta < 1$, aggiustiamo la definizione

$$\delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

□

Esercizio 5

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 \geq 0$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \quad |x - x_0| < \delta$$

Partiamo analizzando il termine $|x - x_0| < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| < \delta$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}$$

Ora possiamo sfruttare la seguente espressione

$$|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| \geq |\sqrt{x_0}|$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{x_0}|}$$

Di conseguenza

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$$
$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$$

Affinchè il limite sia verificato è necessario che

$$\frac{\delta}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$$
$$\delta < \sqrt{x_0} \varepsilon$$

N.B. per tutto l'esercizio abbiamo potuto scrivere $\sqrt{x_0}$ non controllando se x_0 fosse non negativo perchè il dominio di $f(x) = \sqrt{x}$ è \mathbb{R}_0^+ e di conseguenza qualsiasi punto $x < 0$ non è punto di accumulazione, dato che esiste almeno un intorno di un numero negativo che intersecato con il dominio (\mathbb{R}_0^+) dà insieme vuoto. E per questo il limite lo possiamo fare solo con valori di $x \geq 0$ e possiamo scrivere $\sqrt{x_0}$ senza alcun problema.

□

Esercizio 6

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Con la definizione di limite abbiamo

$$\begin{aligned} |x^n - x_0^n| &< \varepsilon \\ \left| (x - x_0) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| &< \varepsilon \\ |x - x_0| \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ora dobbiamo capire quanto vale il secondo termine in modo da non avere più la variabile x .

$$|x + x_0| < \delta < 1$$

$$|x + x_0| < 1$$

con questo scopriamo che

$$|x| = |x - x_0 + x_0| \leq \underline{|x - x_0|} + |x_0| < \underline{1} + |x_0|$$

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Di conseguenza

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x^{n-1-k} x_0^k| = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{|x^{n-1-k}|} |x_0^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(1 + |x_0|)^{n-1-k}| |x_0^k|$$

Semplificando un po' troviamo che

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| \leq (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$, ricordandoci anche che $|x - x_0| < \delta$

$$\underline{|x - x_0|} \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| < |x - x_0| (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

$$\underline{|x^n - x_0^n|} < \underline{|x - x_0|} (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k < \underline{\delta} (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

$$|x^n - x_0^n| < \delta (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

Per trovare quanto vale ε basta fare

$$\delta(1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{(1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k}$$

Visto che abbiamo imposto $\delta < 1$, aggiustiamo la definizione

$$\delta < \min \left(1, \frac{\varepsilon}{(1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k} \right)$$

□

Esercizio 7

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$$

Usando le formule di Prostaferesi ($\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = \left| 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

Ora ricordiamo che per definizione delle funzioni trigonometriche, vale sempre la seguente proposizione

$$|\cos(x)| \leq 1 \quad |\sin(x)| \leq 1$$

Quindi usiamo questa proprietà del coseno per diventare

$$\left| \underline{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)} \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \underline{1} \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

Poi ricordiamo anche che per la funzione seno vale la seguente relazione

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

E che quindi nella nostra dimostrazione possiamo usarla

$$2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0|$$

Riscrivendo le informazioni trovate finora sappiamo che

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x-x_0|$$

Per la definizione di limite sappiamo che $|x - x_0| < \delta$

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta$$

Ora se dobbiamo trovare il ε basta imporre

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon$$

Per il coseno la dimostrazione è analoga. □

Esercizio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad a \in [1, +\infty)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo limite dobbiamo trovare un qualche $\delta > 0$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad -\delta < x < \delta \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$$

Quindi iniziamo partendo dalla disuguaglianza di Bernulli

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \tag{14}$$

Ora decidiamo che $a < 1 + n\varepsilon$ e che quindi $\forall n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ vale

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > a$$

$$(1 + \varepsilon)^n > a$$

$$1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}}$$

Ora quindi sappiamo che per qualsiasi valore di $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ vale la relazione $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, quindi se trovo per quali valori di x vale la relazione $a^x < a^{\frac{1}{n}}$ posso imporre $a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ che vuol dire che abbiamo dimostrato la prima parte.

$$a^x < a^{\frac{1}{n}}$$

Per monotonia della funzione $f(x) = a^x$ allora vale

$$x < \frac{1}{n}$$

Quindi per dimostrare il limite basta scegliere un $\delta < \frac{1}{n}$ in modo tale che l'espressione $a^x < 1 + \varepsilon$ sia valida.

Per dimostrare la porzione $1 - \varepsilon < a^x$ dobbiamo ricorrere alla formula

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (15)$$

Dai ragionamenti di prima sappiamo che $(1 + \varepsilon)^n > a$, quindi vale anche

$$\left(\frac{1}{1 + \varepsilon}\right)^n < \frac{1}{a^n}$$

Quindi se eleviamo tutto alla n l'equazione (15) ricaviamo

$$(1 - \varepsilon)^n < \left(\frac{1}{1 + \varepsilon}\right)^n < \frac{1}{a}$$

N.B. per non avere problemi di segno dobbiamo imporre $1 - \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$.

$$(1 - \varepsilon)^n < \frac{1}{a}$$

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}$$

Quindi come per la prima parte della dimostrazione ora basta scegliere delle x per cui $a^{-\frac{1}{n}} < a^x$, che per monotonia come prima rimane

$$-\frac{1}{n} < x$$

Per confermare la dimostrazione possiamo scegliere un δ tale che

$$-\frac{1}{n} < -\delta$$

$$\delta < \frac{1}{n}$$

Quindi se scegliamo un $\delta < \frac{1}{n}$ anche l'espressione $1 - \varepsilon < a^x$ sarà verificata. Pertanto per verificare il limite basta scegliere

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{a - 1}\right)$$

□

Esercizio 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad a \in (0, 1)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo limite possiamo usare uno stratagemma per evitare di fare tutta la dimostrazione classica. Perché con l'esercizio precedente abbiamo dimostrato con la base $a \geq 1$, quindi cerchiamo di ricondurli a quel limite. Per farlo usiamo le regole delle potenze infatti

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$$

Quindi il limite lo possiamo riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \right)^{-x}$$

In questa maniera la base è maggiore di 1, di conseguenza è uguale al limite dell'esercizio precedente da quel punto di vista. Quello che cambia è che all'esponente abbiamo $-x$ e non più x , però non è troppo un problema, infatti se $x \rightarrow 0$ allora anche $-x \rightarrow 0$, quindi l'esponente si avvicina lo stesso allo 0, di conseguenza il limite sarà lo stesso, di prima e possiamo usare quello (che abbiamo già dimostrato) per dimostrare questo senza la dimostrazione rigorosa.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \right)^x = 1$$

N.B. il passaggio dove diciamo che se $x \rightarrow 0$ allora $-x \rightarrow 0$ non è dimostrato in maniera rigorosa, infatti per questo passaggio serve il teorema del cambio di variabile che vedremo più avanti, ma intuitivamente ha senso che se $x \rightarrow 0$ allora $-x \rightarrow 0$. \square

Ora vediamo un caso particolare, che come vedremo non ha soluzione per come abbiamo definito il limite.

Esercizio 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq +\infty$$

Dimostrazione. Proviamo usando la definizione di limite.

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : f(x) \in (M, +\infty) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \frac{1}{x} \in (M, +\infty) \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\}$$

Partiamo analizzando $\frac{1}{x} \in (M, +\infty)$

$$\frac{1}{x} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M$$

Ricordiamo che $M > 0$, quindi anche $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Ora possiamo fare il reciproco di entrambi i membri (visto che sono entrambi positivi)

$$\frac{1}{x} > M > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

Quindi fino ad ora abbiamo capito che $f(x) \in (M, +\infty)$ è uguale a dire $0 < x < \frac{1}{M}$, però nella definizione di limite abbiamo che $\forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ però questo è impossibile, perchè per qualsiasi valore di δ l'intervallo comprenderà anche numeri negativi (dato che l'intervallo è $(-\delta, \delta)$ ma ciò va in contraddizione con quanto abbiamo trovato prima (ovvero che $0 < x < \frac{1}{M}$). Infatti non c'è nessun valore di $\delta > 0$ che valida la seguente affermazione.

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \not\subseteq (0, \frac{1}{M})$$

Pertanto il limite è sbagliato. Il ragionamento con $-\infty$ è analogo.

Per poter calcolare questo limite ci serve la nozione di limite destro e limite sinistro. \square

Definizione 8: Limite Destro e Sinistro

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

- Sia x_0 punto di accumulazione destro, allora definiamo limite destro di $f(x)$ come

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

E la sua caratterizzazione sarà

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che} \\ \forall x \in A \cap I \cap (x_0, +\infty) \quad f(x) \in U$$

- Sia x_0 punto di accumulazione sinistro, allora definiamo limite sinistro di $f(x)$ come

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

E la sua caratterizzazione sarà

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che} \\ \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0) \quad f(x) \in U$$

Ora proviamo a risolvere il limite di prima con il limite destro.

Esercizio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite destro

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \frac{1}{x} \in (M, +\infty) \quad \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\} \cap (0, +\infty)$$

Riscriviamo meglio l'ultimo termine

$$(-\delta, +\delta) \setminus \{0\} \cap (0, +\infty) = (0, \delta)$$

Ora possiamo fare gli stessi ragionamenti di prima

$$\frac{1}{x} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M$$

Visto che $M > 0$ allora anche $x > 0$, per lo stesso ragionamento di prima

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

Ora però il risultato è diverso da prima infatti, dopo le semplificazioni, la nostra condizione del limite sarà $\forall x \in (0, \delta) \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{M})$. Ora affinché questa proposizione sia vera basta prendere

$$\delta \leq \frac{1}{M}$$

E quindi ora il limite è verificato. Per il limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ il ragionamento è analogo. \square

Esercizio 12

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : \frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \quad \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\} \cap (-\infty, 0)$$

Riscrivendo meglio la definizione

$$\forall \delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \quad (16)$$

Riscriviamo il secondo termine

$$\frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

Ora non abbiamo nessun problema riguardante il segno visto che $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$, quindi possiamo invertire la disequazione

$$x^2 < \frac{1}{M}$$

Visto che, sia x^2 che $\frac{1}{M}$ sono positivi possiamo fare la radice quadrata ambo i membri

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Riscrivendo l'espressione (16)

$$\forall \delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

Questa implicazione è vera quando vale

$$-\delta \geq -\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\delta \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$$

□

Teorema 11: Relazione Limite con limite Destro e Sinistro

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Dimostrazione. Visto che è una doppia implicazione dovremmo controllare entrambe le direzioni

(\Rightarrow) quindi, usando la definizione di limite, sappiamo che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Se quindi sappiamo che l'affermazione è vera (per ipotesi) $\forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\}$ allora varrà anche per un qualunque sottoinsieme, quindi la proposizione sarà vera anche per l'insieme $A \cap I \cap (x_0, +\infty)$ e anche per $A \cap I \cap (-\infty, x_0)$, che sono gli insiemi compresi nella definizione di limite destro e limite sinistro. Pertanto saranno valide anche le definizioni di limite destro e sinistro e quindi è verificata l'implicazione.

(\Leftarrow) Se quindi esiste il limite destro e sinistro sappiamo che

- per limite destro

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I_1 \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I_1 \cap (x_0, +\infty) \Rightarrow f(x) \in U$$

- per limite sinistro

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I_2 \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I_2 \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow f(x) \in U$$

Se noi ora, per il teorema di intersezione degli interni, possiamo trovare un $I = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 . tale che vale

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \cap ((-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)) \Rightarrow f(x) \in U$$

che scrivendo meglio

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Che valida la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

□

Esercizio 13

$$\text{Sia } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 200 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \text{ Allora}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Dimostrazione. Partiamo analizzando il limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Ora nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione assume sempre il valore 1, quindi possiamo sostituire la funzione nel limite nel suo valore

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

Ora facciamo lo stesso ragionamento con il limite destro, e visto che anche nell'intervallo $(0, +\infty)$ assume sempre il valore 1 possiamo calcolare il limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Ora, dato che il limite destro e sinistro esistono e sono uguali, per il teorema visto prima sappiamo che esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

N.B. questo è un esempio lampante per capire che il limite studia "ciò che è attorno" ad un punto di una funzione, e al limite "non tiene conto" di cosa fa la funzione nel punto effettivo, come in questo esempio anche se $f(0) = 200$ non influenza il valore del limite. \square

Teorema 12: Limite del Valore Assoluto di una Funzione

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Dimostrazione. Inizialmente iniziamo a studiare per $l > 0$, quindi per ipotesi sappiamo che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 : x \in I \implies f(x) \in U$$

E dobbiamo trovare che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } |l| \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 : x \in I \implies |f(x)| \in U$$

Partiamo dalla prima proposizione, e riscriviamo meglio la prima parte

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Notiamo che se scegliamo $\varepsilon < l$ allora $l - \varepsilon > 0$ e quindi

$$0 < l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Quindi ora tutti i termini sono positivi allora, per la seguente proprietà del valore assoluto $a > 0 \implies a = |a|$ possiamo sostituire il termine $f(x)$ con $|f(x)|$

$$0 < l - \varepsilon < |f(x)| < l + \varepsilon$$

Ora riprendiamo la condizione che abbiamo imposto $\varepsilon < l$, noi sappiamo, per definizione di limite, che $\varepsilon > 0$ quindi $0 < \varepsilon < l$ di conseguenza $l > 0$, quindi abbiamo scoperto che anche l è positivo e che quindi possiamo usare la stessa proprietà di che abbiamo usato per $|f(x)|$ per mettere il modulo

$$|l| - \varepsilon < |f(x)| < |l| + \varepsilon$$

Con questo siamo riusciti a verificare il limite perchè $|f(x)|$ è in un intorno di $|l|$. Ora però ci manca da controllare i casi con $l < 0$, e per evitare di usare la dimostrazione classica di limite usiamo uno stratagemma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -l > 0$$

Ora visto che $l < 0$ allora $-l > 0$ e di conseguenza possiamo usare il teorema che abbiamo appena verificato (e possiamo applicarlo proprio perchè $-l > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |-f(x)| = |-l| \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

E quindi anche per $l < 0$ il risultato rimane lo stesso e quindi il limite è verificato $\forall l \neq 0$. □

Teorema 13: Limite del Valore Assoluto di una Funzione (caso $l = 0$)

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

Dimostrazione. Visto che c'è una doppia implicazione controlliamo entrambi i sensi
(\implies) Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Riscrivendo meglio il primo termine

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

Usiamo le proprietà dei valori assoluti

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \iff 0 \leq |f(x)| < \varepsilon$$

Quindi ora sappiamo che il limite è verificato per $0 \leq |f(x)| < \varepsilon$ ma quindi possiamo "allargare" l'intervallo e varrà comunque la proprietà e quindi

$$0 \leq |f(x)| < \varepsilon \implies -\varepsilon < |f(x)| < \varepsilon$$

E di conseguenza è verificato il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.

(\impliedby) Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x)| \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Riscrivendo meglio il primo termine

$$-\varepsilon < |f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo togliere la parte $-\varepsilon$ perchè il valore assoluto è sempre positivo

$$|f(x)| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

e quindi è verificato il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. □

N.B. facendo un riassunto dei due teoremi appena fatti sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

E vedendo bene notiamo che se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ allora non possiamo dire nulla su $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Vediamo un esempio.

Esercizio 14

Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

possiamo notare che

$$|f(x)| = \begin{cases} |1| & \text{se } x \leq 0 \\ |-1| & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \iff |f(x)| = 1$$

E che quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Ora proviamo a vedere $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, e visto che è una funzione definita a tratti facciamo il limite destro e sinistro. Partiamo con quello sinistro e vediamo che la funzione nell'intervallo $(-\infty, 0)$ assume il valore 1 quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

Con il limite destro e la nostra funzione nell'intervallo $(0, +\infty)$ assume il valore -1 e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 = -1$$

Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Teorema 14: Permanenza del Segno

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di $f(x)$ e $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ allora

- Se $l > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l < 0$ allora $f(x) < 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per $l > 0$, gli altri casi sono analoghi.

Per ipotesi sappiamo che il limite esiste, e pertanto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Se scelgo $\varepsilon < l$ avrò che

$$\varepsilon < l \implies l - \varepsilon > 0 \implies 0 < l - \varepsilon < f(x)$$

di conseguenza

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

□

Teorema 15: limiti e relazioni d'ordine I

iano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
e $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$$l_1 < l_2 \implies f(x) < g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. Dato che $l_1 < l_2$ sappiamo che $l_1 \neq l_2$ e quindi per il teorema di separazione degli interni $\exists U_1$ intorno di l_1 e $\exists U_2$ intorno di l_2 tali che

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad (17)$$

Ora per definizione di limite sappiamo

- $\forall U_1$ intorno di l_1 $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in U_1 \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall U_2$ intorno di l_2 $\exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Ora se dato che abbiamo I_1 e I_2 interni di x_0 , per il teorema di intersezione sappiamo

$$\exists I = I_1 \cap I_2 \text{ intorno di } x_0$$

E quindi nell'intorno I varrà

$$f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\}) \quad (18)$$

riscriviamo l'equazione (17)

$$(l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \cap (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$$

Dato che per ipotesi sappiamo $l_1 < l_2$, cioè può accedere soltanto se

$$\underline{l_1 + \varepsilon_1 < l_2 - \varepsilon_2}$$

Ora usiamo questa informazione e combiniamola con la formula (18)

$$f(x) \in (l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \wedge g(x) \in (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2)$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon_1 < f(x) < l_1 + \varepsilon_1} \wedge \underline{l_2 - \varepsilon_2 < g(x) < l_2 + \varepsilon_2}$$

$$\underline{f(x) < l_1 + \varepsilon_1} < \underline{l_2 - \varepsilon_2} < \underline{g(x)}$$

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

□

Teorema 16: limiti e relazioni d'ordine II

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0 \implies l_1 \leq l_2$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue per assurdo, quindi supponiamo che $l_1 > l_2$, allora per il teorema della relazione d'ordine I sappiamo che

$$l_1 > l_2 \implies f(x) > g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Ma ciò va in contraddizione con le ipotesi iniziali $f(x) < g(x)$ pertanto è impossibile che $l_1 > l_2$ e di conseguenza è vero che $l_1 \leq l_2$. \square

Esercizio 15

N.B. se $f(x) < g(x)$ non possiamo dire con certezza nulla su $l_1 < l_2$. Vediamo un esempio. Sia $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$. Noi sappiamo che

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ma i limiti per $x \rightarrow 0$ fanno $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Teorema 17: Due Carabinieri

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Dimostrazione. Visto che $f(x)$ e $h(x)$ hanno limite, sappiamo che

- $\forall U$ intorno di l $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall U$ intorno di l $\exists I_2$ intorno di x_0 tale che $h(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Ora per il teorema di intersezione degli interni sappiamo che

$$\exists I = I_1 \cap I_2 \text{ intorno di } x_0$$

In I vale

$$f(x) \in U \wedge h(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Pertanto sappiamo che

$$\underline{l - \varepsilon < f(x)} < l + \varepsilon \wedge -\varepsilon < \underline{h(x)} < l + \varepsilon$$

Combinando questa informazione con le ipotesi $(f(x) \leq g(x) \leq h(x))$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

Di conseguenza

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

E questà è la definizione di limite, quindi questo implica che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

□

Corollario 1: Teorema dei carabinieri II

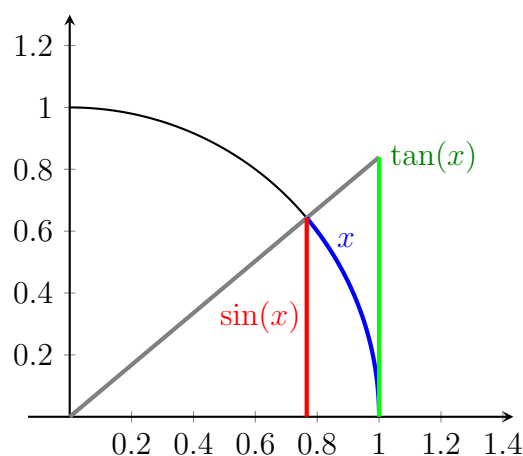
Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Allora

- se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Esercizio 16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Iniziamo disegnando una circonferenza unitaria e notiamo che



Dal grafico possiamo notare che in un intorno di 0 abbiamo che

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Ora possiamo dividere tutto per $\sin(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

inveriamo tutti i membri (e anche i segni delle disequazioni)

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Ora vediamo che $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, e visto che le due funzioni estreme tendono entrambe a 1 e la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ è compresa tra le altre due funzioni definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora per il teorema dei carabinieri abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Teorema 18: Algebra dei Limiti Finiti

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$. Allora

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{se } l_2 \neq 0)$$

Dimostrazione. (i) Partiamo scrivendo le definizioni di limite come sappiamo

- $\forall \varepsilon > 0 \exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Quindi per il teorema di intersezione trovo un $I = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \wedge g(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon} \quad \underline{l_2 - \varepsilon < g(x) < l_2 + \varepsilon}$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon} + \underline{l_2 - \varepsilon} < \underline{f(x)} + \underline{g(x)} < \underline{l_1 + \varepsilon} + \underline{l_2 + \varepsilon}$$

$$(l_1 + l_2) - 2\varepsilon < f(x) + g(x) < (l_1 + l_2) + 2\varepsilon$$

E notiamo che $f(x) + g(x)$ è in un intorno di $l_1 + l_2$ e che quindi il limite è verificato.

N.B. anche se c'è scritto 2ε e non solamente ε va bene lo stesso, anche perchè l'espressione all'interno della definizione di limite è $\forall \varepsilon > 0$ e quindi anche se moltiplico ε per una qualsiasi costante, potrò rappresentare qualunque intorno.

(ii) Partiamo analizzando il seguente modulo, e compensando il termine $l_1 \cdot g(x)$

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| = |f(x) \cdot g(x) - \underline{l_1 \cdot g(x)} + \underline{l_1 \cdot g(x)} - l_1 \cdot l_2|$$

Ora raccogliamo alcuni termini

$$|f(x) \cdot \underline{g(x)} - l_1 \cdot \underline{g(x)} + \underline{l_1 \cdot g(x)} - \underline{l_1} \cdot l_2| = |(f(x) - l_1) \cdot \underline{g(x)} + \underline{l_1} \cdot (g(x) - l_2)|$$

Applichiamo la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |(f(x) - l_1) \cdot g(x) + l_1 \cdot (g(x) - l_2)| &\leq |(f(x) - l_1) \cdot g(x)| + |l_1 \cdot (g(x) - l_2)| \\ &= |(f(x) - l_1)| \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot |(g(x) - l_2)| \end{aligned}$$

Ora dalle definizioni di limite sappiamo che $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|g(x) - l_2| < \varepsilon$

$$|\underline{(f(x) - l_1)}| \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot |\underline{(g(x) - l_2)}| < \underline{\varepsilon} \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot \underline{\varepsilon} = \varepsilon \cdot (|g(x)| + |l_1|)$$

Per valutare la quanto vale $|g(x)|$ facciamo qualche sistemazione algebrica

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - l_2 + l_2| \\ &\leq |g(x) - l_2| + |l_2| \\ &< \varepsilon + |l_2| \end{aligned}$$

Con questo possiamo semplificare

$$\varepsilon \cdot (|g(x)| + |l_1|) < \varepsilon \cdot ((\varepsilon + |l_2|) + |l_1|)$$

Per semplificare possiamo scegliere $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon \cdot ((1 + |l_2|) + |l_1|) = \varepsilon \cdot (1 + |l_2| + |l_1|)$$

Facendo un po' di ordine vediamo che

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| < \varepsilon \cdot (1 + |l_2| + |l_1|)$$

Di Conseguenza abbiamo trovato che $|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2|$ è sempre minore di ε , appatto di qualche costante proporzionale. Infatti $1 + |l_2| + |l_1|$ è sempre maggiore di 1 e quindi il limite è verificato.

(iii) Per verificare questo limite è necessario verificare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2} \quad (19)$$

Perchè se fosse vero potremmo usare il teorema del prodotto perchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = l_1 \cdot \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad (20)$$

Quindi proviamo a verificare (19) con la definizione di limite

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \left| \frac{l_2 - g(x)}{g(x) \cdot l_2} \right| = \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)| |l_2|}$$

Visto che il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ è verificato per ipotesi, allora sappiamo $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $|g(x) - l_2| < \varepsilon \forall x \in I_1$, e quindi

$$\forall x \in I_1 \quad \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)| |l_2|} < \frac{\varepsilon}{|g(x)| |l_2|}$$

Ora per capire quanto vale $|g(x)|$ dobbiamo dividere i casi con $l_2 > 0$ e $l_2 < 0$, noi ora vedremo la dimostrazione per $l_2 > 0$, l'altro caso è analogo.

Quindi sfruttando il teorema della permanenza del segno noi sappiamo che *exists* I_2 intorno di x_0 tale che $g(x) > 0 \forall x \in I_2$, di conseguenza sarà vero anche che $\forall x \in I_2$ $g(x) > \frac{l_2}{2}$, e quindi anche $\frac{1}{g(x)} < \frac{2}{l_2}$.

Possiamo usare il teorema di intersezione degli intorno per trovare $I_3 = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 tale che

$$\forall x \in I_3 \quad \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)| |l_2|} < \frac{\varepsilon}{|g(x)| |l_2|} = \frac{\varepsilon}{|l_2|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{|l_2|} \cdot \frac{2}{l_2} = \frac{2\varepsilon}{|l_2|^2}$$

E che quindi

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| < \frac{2\varepsilon}{|l_2|^2}$$

Per lo stesso ragionamento fatto prima nel prodotto, abbiamo trovato che il limite è minore di ε appatto di una costante moltiplicativa.

Quindi abbiamo trovato un intervallo I_3 che verifica il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$ e che quindi usando anche il teorema del prodotto, si verifica il teorema della divisione, come visto nel punto (20). Chiaramente visto che $g(x)$ è a denominatore è necessario che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. \square

Teorema 19: Algebra dei Limiti Infiniti (Forme Determinate)

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A . Allora

(i) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$$

(ii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

(iii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\exists c > 0 : g(x) \leq c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$$

(iv) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\exists c > 0 : 0 < g(x) \leq c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

(v) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

(vi) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ è positiva definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e
 $\exists c > 0 : g(x) > c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(vii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ è negativa definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e
 $\exists c > 0 : g(x) > c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

Esercizio 17

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty$$

Dimostrazione. Vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

In più $|\sin(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi lo è anche definitivamente per $x \rightarrow +\infty$, Quindi come nella casistica (i) dell'algebra dei limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty$$

□

Esercizio 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sin(x) + 2) = +\infty$$

Dimostrazione. Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

In più $0 < \sin(x) + 2 \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi lo è anche definitivamente per $x \rightarrow +\infty$, Quindi come nella casistica (iv) dell'algebra dei limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sin(x) + 2) = +\infty$$

□

Esercizio 19

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Se proviamo a calcolare il limite notiamo che il denominatore tende a 0, mentre il numeratore tende a -2 quindi sembra di essere nella casistica (vi), controlliamo se le ipotesi sono verificate.

In primis il teorema richiede che $f(x)$ sia positivo definitivamente per $x \rightarrow -2$, è questo è verificato sempre, infatti $(x+2)^2 > 0 \implies \forall x \neq -2$. In più il numeratore (x) è limitato definitivamente per $x \rightarrow -2$, pertanto il teorema è applicabile e quindi

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2} = +\infty$$

N.B. Se il limite fosse stato $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+2}$ il teorema non sarebbe applicabile, perchè $x+2$ non è positiva definitivamente per $x \rightarrow -2$, perchè un qualsiasi intorno dalla parte sinistra sarebbe negativo e invece la parte destra sarebbe positiva. Pertanto non si può applicare il teorema (vi). Per risolverlo è necessario calcolare o il limite destro o sinistro,

infatti in quei intorno $(x + 2)$ è positivo definitivamente. Quindi $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x + 2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x + 2} = -\infty$. E da questo notiamo che $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x + 2}$ perchè il limite destro e sinistro sono diversi. \square

Definizione 9: Forme Indeterminate

Si dicono **Forme Indeterminate** tutti i limiti che hanno come risultato

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] & \left[\frac{0}{0} \right] & [\infty \cdot 0] \\ [+ \infty - \infty] & [\infty^0] & [1^0] \end{array}$$

E il risultato effettivo del limite non si può determinare subito, ma sono necessarie altre operazioni.

N.B. Pertanto due limiti che hanno inizialmente la stessa forma indeterminata posso avere limiti diversi, vediamo degli esempi.

Esercizio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$$

Dimostrazione. Se proviamo a calcolare il limite vediamo che il numeratore tende a $+\infty$ e lo stesso si può dire per il denominatore. Quindi caschiamo nella forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Pertanto dobbiamo fare delle manipolazioni, proviamo raccogliendo il grado maggiore (x^2) al numeratore e lo stesso facciamo anche a denominatore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}$$

Notiamo che il termine x^2 si può semplificare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Ora possiamo calcolare il limite infatti i termini $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0 quando $x \rightarrow \infty$ (questo grazie alle forme determinate) e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0} = 2$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = 2$$

Quindi noi siamo partiti con una forma indeterminata e siamo arrivati a una soluzione che è 2. Ora vediamo che un altro limite sempre con la stessa forma indeterminata, ma avremo un altro risultato. \square

Esercizio 21

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1}$$

Dimostrazione. Notiamo subito che esce la stessa forma indeterminata: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e quindi proviamo a fare la stessa tecnica di prima

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Ora come prima i termini con la x a denominatore tendono a 0, però a numeratore è rimasto una x che tende a $+\infty$ quindi il numeratore, per la proprietà (iii) delle forme determinate, tende a $+\infty$, il denominatore invece tende a 1, e quindi per la proprietà (iv) il limite tende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1} = +\infty$$

N.B. inizialmente anche questo limite era della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ma abbiamo avuto un risultato diverso da prima, e quindi quando ci troviamo davanti una forma indeterminata sappiamo che dobbiamo rimaneggiare i termini. \square

Esercizio 22

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

Dimostrazione. Proviamo a calcolare il limite ma notiamo subito che viene fuori una forma indeterminata della forma $[+\infty - \infty]$ e quindi dobbiamo fare dei rimaneggiamenti. Ricordandoci la formula della somma per differenza $((A+B)(A-B) = A^2 - B^2)$ possiamo moltiplicare e dividere per il binomio coniugato

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \end{aligned}$$

Dopo tutti questi maneggiamenti sembra che abbiamo solo che complicato il limite, però li abbiamo fatto diventare in un limite nella forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ che però abbiamo già visto come risolvere, infatti basta che raccogliamo il grado maggiore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x}$$

Ora per "tirare fuori" x^2 dalla radice, dobbiamo ricordarci di mettere il modulo (perchè $\sqrt{x^2} = |x|$), però dato che noi stiamo analizzando per $x \rightarrow +\infty$ siamo sicuri che $x > 0$ (per definizione di limite) e pertanto $|x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 23

Dato un generico polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ dove a_i sono i coefficienti del polinomio e n il grado del polinomio. Con $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$$

Dimostrazione. Il limite è nella forma $[+\infty - \infty]$ e quindi procediamo raccogliendo il grado maggiore (x^n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n \right)$$

Ora possiamo calcolare il limite infatti tutti i termini dentro le parentesi infatti tendono tutti a 0. Quindi il termine dentro le parentesi tende a a_0 e che quindi moltiplicato per $x^n \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$. Se invece $a_n < 0$ il limite tendeva a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n \right) = +\infty$$

Quindi con questo iniziamo a capire che nei polinomi quello che ci interessa quando $x \rightarrow \infty$ è il termine con il grado più alto (x^n), infatti per risolvere questo esercizio i termini più piccoli di x^n è come se li avessimo trascurati. Infatti è vera la seguente equazione $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$ per qualsiasi polinomio $P(x)$ e $\forall a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

Teorema 20: Cambio di Variabile

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione in $f(A) \cap B$ allora se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, con y_0 punto di accumulazione in B e se è vera almeno una delle due proposizioni

- $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ (continuità di $g(x)$)

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

Esercizio 24

Ora vediamo perchè è fondamentale che almeno una dei due requisiti sia vero, proviamo con un controesempio. Infatti sia $f(x) = 5$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 5 \\ 1 & \text{se } x = 5 \end{cases}$ e vediamo subito che nessuna delle due proposizioni è vera.

Dimostrazione. Infatti il limite effettivo, senza usare il teorema del cambio di variabile è

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(5) = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

Invece se proviamo a usare il cambio di variabile, dobbiamo prima calcolare y_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 5 \quad [= y_0]$$

Ora il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 5} g(y) = 2$$

Quindi usando solo le funzioni composte il limite è uscito 1, mentre con il teorema del cambio di variabile è venuto fuori 2, cosa impossibile per il teorema di unicità del limite e pertanto il teorema del cambio di variabile non si può applicare in questo esercizio, proprio perchè mancavano i criteri richiesti dal teorema stesso.

□

Esercizio 25

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Dimostrazione. Vediamo che assomiglia molto al limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ l'unica cosa che cambia è che abbiamo x^2 anzichè x , quindi proviamo a cambiare la variabile x^2 con y , quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad [= y_0]$$

Visto che sono valide tutte le condizioni del teorema del cambio di variabile, infatti $x^2 \neq 0$ in un intorno di 0. Mentre l'altra condizione non è valida infatti non si può calcolare in 0 la funzione $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$, però non ci interessa perchè il teorema richiede almeno una delle due proposizioni.

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

□

Esercizio 26

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2-x}}$$

Dimostrazione. Al denominatore abbiamo una forma del tipo $[+\infty - \infty]$, quindi proviamo a vedere come si comporta quel denominatore per $x \rightarrow +\infty$. Per calcolarlo possiamo usare la proprietà dei polinomi che abbiamo visto nell'esercizio dei polinomi, infatti basta tenere il grado maggiore (x^2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad [= y_0]$$

Vediamo che il denominatore ha limite e quindi possiamo fare il cambio di variabile e possiamo applicarlo perchè è valida la prima condizione, infatti $x^2 - x \neq +\infty$ sempre, mentre la seconda non può mai essere vera perchè non possiamo calcolare $g(+\infty)$, perchè ricordiamo che $\pm\infty$ non sono punti di nessun dominio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{y}}$$

Ora possiamo riutilizzare il teorema del cambio di variabile, visto che non siamo ancora in un limite noto, e quindi vediamo come si comporta la frazione all'esponente

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0 \quad [= z_0]$$

Visto che ha limite e rispetta sempre il primo criterio e anche il secondo del teorema del cambio di variabile, allora possiamo riapplicare il teorema e finalmente calcolare il limite.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{y}} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2-x}} = 1$$

□

Teorema 21: Limite di funzioni Monotone

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x)$ è monotona in I

- Se $f(x)$ è monotona crescente allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(A \cap I \cap (x_0, +\infty))\}$$

- Se $f(x)$ è monotona decrescente allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (x_0, +\infty))\}$$

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione del caso $f(x)$ è crescente e per il limite sinistro, gli altri casi sono analoghi.

Per ipotesi chiaramente supponiamo che esista $S = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$, quindi per definizione di superiore, sappiamo che il superiore (S) è più grande di qualsiasi elemento nell'insieme (cioè $f(x)$), quindi

$$f(x) \leq S \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0) \quad (21)$$

Ora usando la caratterizzazione degli estremi e sappiamo che

$$f(\hat{x}) > S - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \hat{x} \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

Poi, per monotonia della funzione sappiamo che se $\hat{x} < x$ allora

$$f(\hat{x}) < f(x) \implies S - \varepsilon < f(\hat{x}) < f(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (22)$$

Ora combinando le informazioni (21) e (22) sappiamo che

$$S - \varepsilon < f(x) < S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

Visto che $\varepsilon > 0$ sappiamo che $S < S + \varepsilon$ e quindi

$$S - \varepsilon < f(x) < S < S + \varepsilon$$

$$S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

E questa non è altro che la definizione di limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

□

Esercizio 27

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

Dimostrazione. Questo è vero proprio perchè se $a > 1$ la funzione a^x è monotona crescente, se $a = 1$ è costante e invece se $a < 1$ la funzione è monotona decrescente, quindi si può sempre applicare il teorema. \square

Esercizio 28

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 > 0$$

Dimostrazione. Possiamo fare lo stesso ragionamento del per il logaritmo, infatti se $a > 1$ la funzione $\log_a x$ è monotona crescente, se $a = 1$ è costante e invece se $a < 1$ la funzione è monotona decrescente, quindi si può sempre applicare il teorema. L'unica cosa che cambia dall'esercizio precedente è che x_0 deve essere positivo, perchè il dominio di $\log_a x$ è $\forall x > 0$, e di conseguenza qualsiasi punto $x_0 < 0$ non è punto di accumulazione e pertanto non può essere calcolato il limite in quel punto. \square

Esercizio 29

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 \neq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Se $\alpha > 0$ avremo una potenza che è sempre monotona crescente per $x_0 > 0$, mentre se α è pari allora la funzione sarà decrescente per $x_0 < 0$ mentre se α è dispari la funzione è crescente anche per $x < 0$. Se $\alpha = 0$ allora avremo una funzione costante e se $\alpha < 0$ la funzione sarà del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ che sarà monotona decrescente. \square

Esercizio 30

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Questo è un caso particolare dell'esercizio precedente, infatti se $x \rightarrow 0^+$ allora con $\alpha > 0$ avremo una forma del tipo 0^α che chiaramente tende a 0, mentre se $\alpha < 0$ la funzione diventa $\frac{1}{x^{|\alpha|}}$ che fa tendere il denominatore a 0^+ e che quindi fa tendere la funzione a $+\infty$. \square

Teorema 22: Limite di funzioni Monotone caso Infinito

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $\pm\infty$ tale che $f(x)$ è monotona in I

- Se $f(x)$ è monotona crescente allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup\{f(A \cap I)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf\{f(A \cap I)\}$$

- Se $f(x)$ è monotona decrescente allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf\{f(A \cap I)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup\{f(A \cap I)\}$$

Esercizio 31

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 32

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 33

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 34

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Teorema 23: Potenza di Funzioni

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

Dimostrazione. Per calcolare questo limite possiamo usare la continuità dell'esponenziale. Perchè il limite lo possiamo calcolare come

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

ora con il cambio di variabile possiamo fare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \log(f(x)) = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\log(f(x)^{g(x)})} = \lim_{y \rightarrow y_0} e^y = e^{y_0}$$

□

Esercizio 35

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\log(x+1)}}$$

Dimostrazione. Usiamo il ragionamento dell'esercizio precedente, con il caso $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{\log(x+1)}$

$$x^{\frac{1}{\log(x+1)}} = e^{\log\left(x^{\frac{1}{\log(x+1)}}\right)} = e^{\frac{1}{\log(x+1)} \cdot \log(x)} = e^{\frac{\log(x)}{\log(x+1)}}$$

ora calcoliamo il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x+1)}$$

Questo limite è della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e pertanto proviamo a raggruppare come nei polinomio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x) + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log(x)}} \end{aligned}$$

Ora il termine $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tende a 0, invece $\log(x)$ tende a $+\infty$, quindi complessivamente la frazione tende a 0 e quindi possiamo calcolare il limite e sostituirlo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log(x)}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \implies \lim_{y \rightarrow 1} e^y = e^1 = e$$

□

Definizione 10: Numero di Nepero (e)

$$e := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Esercizio 36

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Dimostrazione. Per vedere come tende la funzione a $-\infty$ possiamo provare usando il cambio di variabile con $y = -x$ per provare a ricondurci alla definizione del numero di Nepero

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y}$$

Ora racciamo qualche riarrangiamento

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{-y+1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

Il denominatore $y-1$ è molto scomodo, quindi proviamo a sostituirlo con $z = y-1$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

Per sistemare l'esponente basta usare la proprietà degli esponenti e l'algebra dei limiti per il prodotto

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

Il primo limite tende a e per la definizione di numero di Nepero, mentre nel secondo limite il termine $\left(\frac{1}{z}\right)$ tende a 0 e quindi complessivamente il limite tende a 1

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e \cdot 1 = e$$

Quindi notiamo che il limite tende ad e anche per $x \rightarrow -\infty$, pertanto possiamo modificare la definizione con

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

□

Esercizio 37

$$\lim_{x \rightarrow 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Dimostrazione. Per risolvere questo limite dobbiamo usare un cambio di variabile con $y = \frac{1}{x}$ però dobbiamo stare attenti infatti per valori di $x \rightarrow 0^+ \implies y \rightarrow +\infty$ mentre $x \rightarrow 0^- \implies y \rightarrow -\infty$ quindi dobbiamo studiare in due casi separati. Indichiamo con (i) per il caso $y \rightarrow +\infty$ e (ii) per il caso $y \rightarrow -\infty$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Vediamo che nonostante abbiamo dovuto dividere in due casistiche separate il limite tende allo stesso valore, e che quindi per il teorema della relazione tra limite e limite destro/sinistro sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

□

Definizione 11: Limiti Notevoli

Si definiscono Limiti Notevoli tutti i limiti della seguente forma. (Le dimostrazione le vediamo subito dopo)

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ (Già dimostrato)}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$(vi) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Esercizio 38

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione. Si vede subito che è una forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ e però non sembra riconducibile a nessun limite tra quelli che abbiamo visto, però proviamo a "trasformare" il coseno in seno, visto che del seno sappiamo un limite notevole (i). Per farlo dobbiamo ricordarci la formula fondamentale della trigonometria: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \end{aligned}$$

Ora il primo termine, visto che è il limite notevole (i), tende a 1, mentre il secondo tende a $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = (1)^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 39

$$\frac{\tan(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Questo è molto semplice infatti basta usare la definizione di tangente ($\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

□

Esercizio 40

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x$$

Dimostrazione. Questo chiaramente assomiglia molto alla definizione di e , soltanto che c'è un α di troppo. Possiamo provare a sostituire ma notiamo una cosa, infatti se vogliamo sostituire $\alpha y = x$ dobbiamo distinguere i casi $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$. Studiamo i singoli casi e numeriamoli rispettivamente (i), (ii), (iii)

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^\alpha = (e)^\alpha = e^\alpha$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1^x = 1 \quad [= e^0]$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha = (e)^\alpha = e^\alpha$$

□

Esercizio 41

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Per risolvere questo basta usare le proprietà dei logaritmi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log(e) = 1$$

□

Esercizio 42

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dimostrazione. Questo invece è un pò più complicato, infatti non abbiamo visto limiti di questo. Però possiamo provare con una sostituzione $y = \log(x)$ e vediamo che succede, ricordandoci che se $x \rightarrow 0$ allora $y \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{\log(y)} - 1}{\log(y)} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y - 1}{\log(y)}$$

Ora assomiglia al limite dell'esercizio precedente, soltanto che all'interno dell'logaritmo abbiamo y e non $y+1$, quindi per farlo "sbucare" fuori possiamo fare un'altra sostituzione $z = y + 1$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y - 1}{\log(y)} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{\log(z+1)}$$

Adesso il limite è riconducibile a limite notevole (v)

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{\log(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{\log(z+1)}{z}} = \frac{1}{1} = 1$$

□

Definizione 12: Funzioni Asintotiche

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione in A e se

- $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Allora diciamo che " $f(x)$ è asintotica per $x \rightarrow x_0$ a $g(x)$ " e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow x_0$$

Esempio 1

$$\sin(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Dai limiti notevoli sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$, sappiamo inoltre che $\sin(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow 0$ e lo stesso vale per $x \neq 0$. Pertanto possiamo dire che

$$\sin(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$

N.B. questo ragionamento lo possiamo fare per tutti i limiti notevoli, quindi sarà vero anche $\log(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, $\tan(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, $e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$ (che lo possiamo scrivere anche come $e^x \sim 1+x$). \square

Esempio 2

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Per il limite notevole del coseno dobbiamo fare qualche ragionamento in più, infatti il limite fa come risultato $\frac{1}{2}$ e non 1, quindi non possiamo dire nulla sull'asintoticità, ma possiamo fare qualche maggeggio, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Dopo questo riarrangiamento possiamo dire che

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

Che possiamo riscrivere come

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

\square

Teorema 24: Proprietà delle Funzioni Asintotiche

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, \hat{f}, \hat{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A
 (i) se $f \sim g$ allora è vera una delle due proposizioni

- f e g hanno entrambe limite in x_0
- f e g entrambe non hanno limite in x_0

(ii) se $f \sim g$ e $h \sim g$ per $x \rightarrow x_0$ allora è vero che $f \sim h$ per $x \rightarrow x_0$

(iii) se $f \sim \hat{f}$ per $x \rightarrow x_0$, $g \sim \hat{g}$ per $x \rightarrow x_0$ allora sono vere entrambe le equivalenze:

$$f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g} \qquad \frac{f}{g} \sim \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$$

Dimostrazione. Segue la dimostrazione del punto (ii) e (iii).

(ii) Noi sappiamo che $f \sim g$ e che $g \sim h$ ma vogliamo vedere se è vero che $f \sim h$, e se fosse vera quest'ultima equivalenza allora dovrebbe essere vero che

$$f \sim h \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$$

Quindi proviamo a vedere se il limite fa 1, e per farlo dividiamo e moltiplichiamo per $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\frac{h(x)}{g(x)}}$$

Ma visto che per ipotesi $f \sim g$ e $g \sim h$, allora i rapporti varranno 1, e pertanto il teorema è verificato

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\frac{h(x)}{g(x)}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

(iii) Riscriviamo $f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g}$ usando la definizione di funzione asintotica

$$f(x) \cdot g(x) \sim \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)} = 1$$

Quindi per dimostrare il teorema basta controllare che il limite faccia 1, ma è molto semplice infatti se spezziamo la frazione e grazie alle ipotesi ($f \sim \hat{f}$ e $g \sim \hat{g}$) allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$

Il ragionamento è analogo per $\frac{f}{g} \sim \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$. □

Teorema 25: Gerarchia degli Infiniti

Siano $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ allora sono vere

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x)$$

Dimostrazione. Si può notare come sia un limite nella forma $[0 \cdot \infty]$ e quindi dobbiamo fare degli riarrangiamenti. Partimo portando il termine x a denominatore.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$$

Ora possiamo fare una sostituzione con $y = \frac{1}{x}$, e quindi se $x \rightarrow 0^+$ allora $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y}$$

Usando le proprietà dei logaritmi abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(y^{-1})}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log(y)}{y}$$

E che quindi con la gerarchia degli Infiniti

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log(y)}{y} = 0$$

□

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

Dimostrazione. Per svolgere questo limite possiamo usare la regola delle potenze di funzioni per riarrangiarla e possiamo usare il limite dell'esempio precedente per calcolarlo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log(x)} = e^0 = 1$$

□

4 Simboli di Landau

Definizione 13: o-piccolo

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Allora diciamo che " $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ " e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Ora seguiranno alcuni esempi per familiarizzare con il simbolo

Esempio 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0 \iff x^3 = o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0 \iff \sin^2(x) = o(x) \quad x \rightarrow 0$$

N.B. anche se $\sin^2(x) = o(x)$ e $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ **NON** possiamo dire che $\sin^2(x) = x^2$. Anche perché $\sin^2(x)$ e x^2 sono due cose separate. Infatti con la nozione di o-piccolo sappiamo che una funzione è più grande di un'altra, ma se due funzioni sono entrambe o-piccolo di una funzione, non possiamo dire nulla delle due funzioni.

Esempio 7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \iff x = o(x^2) \quad x \rightarrow +\infty$$

Esempio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \iff x = o(1) \quad x \rightarrow 0$$

Questo perché possiamo riscrivere x come $\frac{x}{1}$ e per questo possiamo scrivere $x = o(1)$. Difatto in generale se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ allora possiamo dire che $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$.

Esempio 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \iff x^3 = o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

Teorema 26: Proprietà o-piccoli

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

$$(ii) \quad o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$(iii) \quad o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$(iv) \quad |o(f(x))|^\alpha = o(|f(x)|^\alpha) \quad x \rightarrow x_0 \quad \forall \alpha > 0$$

Se $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora

$$(v) \quad o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Se, oltre a $g(x) \neq 0$, è vero che $|g(x)|$ è limitata definitivamente allora vale

$$(vi) \quad o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. (i) sia una qualsiasi funzione allora $g(x) = o(f(x))$, allora per definizione di o-piccolo sappiamo che

$$g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Ora però possiamo sostituire $g(x)$ con $o(f(x))$ visto che è vera per ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

E con questo abbiamo verificato il primo teorema.

(ii) Sia $g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ allora proviamo a vedere se è vero il teorema, quindi usiamo la definizione di o-piccolo

$$g_1(x) \pm g_2(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x) \pm g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} \pm \frac{g_2(x)}{f(x)}$$

Ora visto che $g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ allora se vengono divise per $f(x)$ tenderanno a 0 e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g_1(x)}{f(x)} \right) \pm \left(\frac{g_2(x)}{f(x)} \right) = 0 \pm 0 = 0$$

E quindi il teorema è verificato visto che è venuto proprio 0.

N.B. anche $o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x))$ e NON si eliminano gli o-piccoli.

(iii) Come nel punto (ii), basta che controlliamo se è vero usando la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot o(g(x))}{f(x) \cdot g(x)}$$

Ora possiamo fare degli riarrangiamenti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot o(g(x))}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

Ora usiamo la proprietà (i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

E quindi il teorema è verificato.

(iv) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$|o(f(x))|^\alpha = o(|f(x)|^\alpha) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|o(f(x))|^\alpha}{|f(x)|^\alpha}$$

Usiamo le proprietà dei moduli e delle potenze e la proprietà (i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|o(f(x))|^\alpha}{|f(x)|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{o(f(x))}{f(x)} \right|^\alpha = 0^\alpha = 0$$

L'ultimo passaggio è valido perchè abbiamo definito $\alpha > 0$ e quindi non reca alcun problema l'esponente. Il modulo serve solo per poter farlo anche di radici, così è valido anche per radici negative.

(v) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$$

Notiamo che il termine $g(x)$ si può semplificare e poi possiamo usare la proprietà (i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

(vi) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot g(x)$$

Ora notiamo che il termine $\frac{o(f(x))}{f(x)}$ tende a 0 per proprietà (i), quindi l'unico caso a cui dobbiamo stare attenti è quando $h(x)$ tende a ∞ , perchè qualora fosse avremmo una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$, però per ipotesi noi sappiamo che $|g(x)|$ è limitata, allora possiamo usare la proprietà (ii) dell'algebra dei limiti finiti per scoprire che tende a 0, grazie al fatto che $|g(x)|$ è limitata

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot g(x) = 0$$

Pertanto il teorema è verificato. □

Teorema 27: Relazione tra o-piccolo e Asintoticità

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow x_0 \implies f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. Usando la definizione di funzione asintotica sappiamo che

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ora possiamo portare 1 dall'altra parte e facciamo denominatore comune

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right] = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

A questo punto possiamo usare la definizione di o-piccolo, visto che abbiamo un limite che tende a 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$$

Facendo qualche riarrangiamento abbiamo

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \implies f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

□

Ora vediamo l'applicazione di questo teorema sui limiti notevoli

Esempio 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \implies \sin(x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Per il limite del coseno usiamo lo stesso trick che abbiamo usato l'ultima volta, ovvero di dividere per $\frac{1}{2}$ in modo che ora il limite tenda a 1

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \implies 1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \implies \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

N.B. non ho scritto $o(\frac{1}{2}x^2)$ perchè ho usato la proprietà (vi) delle proprietà degli o-piccolo, e lo abbiamo potuto applicare perchè la funzione $g(x) = \frac{1}{2}$ è sempre limitata.

Esempio 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \implies \tan(x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \implies \log(1+x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 14

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \implies e^x - 1 = x + o(x) \implies e^x = 1 + x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Teorema 28: Cambio di variabile con o-piccolo

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, f, g_1, g_2 a valori reali tali che $g_1 \circ f, g_2 \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e supponiamo che

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
- $g_1(y) = g_2(y) + o(g_2(y)) \quad y \rightarrow y_0$
- $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Allora

$$g_1(f(x)) = g_2(f(x)) + o(g_2(f(x))) \quad y \rightarrow y_0$$

Esempio 15

Proviamo a fare qualche applicazione pratica di questo teorema, per esempio proviamo con $f(x) = x^2$, $g_1(y) = \sin(y)$ e $x_0 = 0$

In primis dobbiamo controllare che esista il limite di $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad [= y_0]$$

Ora proviamo a sviluppare $g_1(y)$, e possiamo usare proprio lo sviluppo che abbiamo scoperto prima ($\sin(y) = y + o(y)$) per $y \rightarrow 0$, seguendo la notazione del teorema, $g_2(y) = y$. Ora basta controllare se $x^2 \neq 0$ definitivamente ed effettivamente lo è visto che $x^2 > 0 \forall x \neq 0$ e quindi possiamo applicare il teorema e scopriamo che

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 16

Ora proviamo a fare un altro esempio con $f(x) = \sin(x)$, $g_1(y) = e^y$ e $x_0 = 0$, vediamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \quad [= y_0]$$

Sappiamo in oltre lo sviluppo di $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$, in oltre sappiamo che $\sin(x) \neq 0$ in un intorno di 0 e di conseguenza possiamo applicare il teorema e scopriamo che

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + o(\sin(x)) \quad x \rightarrow 0$$

Teorema 29: Principio di Sostituzione

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, \hat{f}, \hat{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e $g(x) \neq 0, \hat{f}(x) \neq 0, \hat{g}(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e se

$$f(x) = \hat{f}(x) + o(\hat{f}(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$g(x) = \hat{g}(x) + o(\hat{g}(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

Dimostrazione. Per capire quanto vale $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ basta che facciamo una sostituzione con le ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x) + o(\hat{f}(x))}{\hat{g}(x) + o(\hat{g}(x))}$$

Ora possiamo raccogliere a numeratore $\hat{f}(x)$ e a denominatore $\hat{g}(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x) + o(\hat{f}(x))}{\hat{g}(x) + o(\hat{g}(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}}$$

Ora possiamo dividere per l'algebra dei limiti e possiamo usare la proprietà (i) degli o-piccoli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

□

Questo teorema è molto forte infatti vediamo un esercizio dove lo applichiamo

Esercizio 43

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1}$$

Per applicare il teorema dobbiamo trovare quelle equivalenze con gli o-piccoli, e infatti le conosciamo sia per $1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ che per $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$, e di conseguenza possiamo calcolare il limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Questo esercizio si sarebbe potuto svolgere anche con i limiti notevoli ma avrebbe richiesto molti calcoli in più.

Teorema 30: Ulteriori proprietà degli o-piccoli

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(vii) \quad o(o(f(x))) = o(f(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$(viii) \quad o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. (vii) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(o(f(x))) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)}$$

Per calcolare e controllare che il limite faccia 0, dobbiamo moltiplicare e dividere per $o(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)} \cdot \frac{o(f(x))}{o(f(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)}$$

Il secondo termine $(\frac{o(f(x))}{f(x)})$ per la proprietà (i) degli o-piccoli sappiamo che tende a 0, e lo stesso vale per il primo termine, infatti la regola generale per questi casi è $\frac{o(f(x))}{f(x)} \rightarrow 0$ però se scelgo $f(x) = o(g(x))$, allora il limite diventa $\frac{o(o(g(x)))}{o(g(x))} \rightarrow 0$, pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

E visto che il limite viene 0, la proprietà è verificata.

(viii) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)}$$

Possiamo moltiplicare e dividere per $f(x) + o(f(x))$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)} \cdot \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x) + o(f(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) \end{aligned}$$

Possiamo usare lo stesso ragionamento usato per il punto (vii) dicendo che $\frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) = 0 \cdot (1 + 0) = 0$$

Di conseguenza il teorema è verificato. □

Esercizio 44

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - e^{-x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$$

Dimostrazione. Per risolvere questo esercizio dobbiamo usare gli sviluppi degli o-piccoli, in questo esercizio ci basta quello di e^x e di $1 - \cos(x)$ e quindi sappiamo che

$$e^{-x} = 1 + -x + o(x)$$

$$1 - \cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + o((\sqrt{x})^2)$$

Semplificando lo sviluppo del coseno abbiamo che $1 - \cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x + o(x)$, non serve mettere il modulo perchè $x \rightarrow 0^+$ e quindi x è positivo. Ora però dobbiamo capire quanto vale $e^{\sin(x)}$ e intanto usiamo lo sviluppo di e^x

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + o(\sin(x))$$

Però il seno lo possiamo sviluppare a sua volta come $\sin(x) = x + o(x)$ e di conseguenza

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x) + o(x + o(x))$$

E quindi grazie alla proprietà (viii) sappiamo che possiamo riscrivere $(o(x + o(x)))$ come $o(x)$

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x) + o(x)$$

Poi per la proprietà (ii) sappiamo che

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x)$$

Ora possiamo sostituire gli sviluppi nell'esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - e^{-x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} = \frac{1 + x + o(x) - (1 - x + o(x))}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)}$$

Per il principio di sostituzione sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Se il numeratore fosse stato $e^{\sin(x)} - e^x$, allora dopo lo sviluppo il numeratore sarebbe diventato $o(x)$ e quindi la frazione sarebbe stata $\frac{o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)}$ e quindi dividendo tutto per x avremmo avuto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}$$

E che quindi per la proprietà (i) avremmo avuto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 0} = 0$$

□

Esercizio 45

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(\sin(x))} - 1}{e^{\sin(\tan(x))} - 1}$$

Dimostrazione. Iniziamo analizzando il numeratore, vediamo che possiamo fare lo sviluppo di $e^x - 1$

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = \tan(\sin(x)) + o(\tan(\sin(x)))$$

Adesso facciamo lo sviluppo di $\tan(\sin(x)) = \sin(x) + o(\sin(x))$

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = \sin(x) + o(\sin(x)) + o(\sin(x) + o(\sin(x)))$$

Possiamo usare la proprietà (viii) e (ii)

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = \sin(x) + o(\sin(x)) + o(\sin(x)) = \sin(x) + o(\sin(x))$$

Sviluppiamo anche il seno

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = x + o(x) + o(x + o(x))$$

Ripetendo le proprietà (viii) e (ii)

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = x + o(x) + o(x) = x + o(x)$$

Sistemato il numeratore, dobbiamo fare gli stessi passaggi al denominatore, ma invertendo il passaggio dello sviluppo del seno con quello della tangente

$$\begin{aligned} e^{\sin(\tan(x))} - 1 &= \sin(\tan(x)) + o(\sin(\tan(x))) \\ &= \tan(x) + o(\tan(x)) + o(\tan(x) + o(\tan(x))) \\ &= \tan(x) + o(\tan(x)) + o(\tan(x)) \\ &= \tan(x) + o(\tan(x)) \\ &= x + o(x) + o(x + o(x)) \\ &= x + o(x) + o(x) \\ &= x + o(x) \end{aligned}$$

E quindi sostituendo questi sviluppi nel limite abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(\sin(x))} - 1}{e^{\sin(\tan(x))} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

□

Esercizio 46

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x) \cos(3x^2)}$$

Dimostrazione. In primis notiamo che il termine $\cos(3x^2) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, pertanto possiamo staccarlo dal limite e calcolarlo a parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x) \cos(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x)} \cdot 1$$

Dopo questo, vediamo che abbiamo un $\log(1 + x)$ e $\tan(x)$ che possiamo sviluppare

$$\log(1 + x \sin^2(2x)) = x \sin^2(2x) + o(x \sin^2(2x))$$

Facciamo lo stesso per $\sin(2x) = 2x + o(x)$

$$\log(1 + x \sin^2(2x)) = x \cdot (2x + o(x))^2 + o(x \cdot (2x + o(x))^2)$$

ora capiamo il come calcolare il termine $(2x + o(x))^2$ infatti proviamo a sviluppare il quadrato di binomio e troviamo che $4x^2 + 4x \cdot o(x) + (o(x))^2$, per la proprietà (iv) possiamo riscrivere $(o(x))^2$ come (o^2) , mentre il termine $4x \cdot o(x)$ possiamo usare la proprietà (iii) per portare $4x$ dentro l'o-piccolo. Quindi il termine diventa $4x^2 + o(4x^2)$. Di conseguenza il logaritmo diventa, usando le proprietà (iii) e (viii)

$$\begin{aligned} \log(1 + x \sin^2(2x)) &= x \cdot (4x^2 + o(x^2)) + o(x \cdot (4x^2 + o(x^2))) \\ &= 4x^3 + o(4x^3) + o(4x^3 + o(4x^3)) \\ &= 4x^3 + o(4x^3) + o(4x^3) \\ &= 4x^3 + o(4x^3) \end{aligned}$$

Per la tangente facciamo gli stessi procedimenti

$$\begin{aligned} \tan^3(x) &= (x + o(x))^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot o(x) + 3x \cdot (o(x))^2 + (o(x))^3 \\ &= x^3 + o(3x^3) + 3x \cdot o(x^2) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) + o(3x^3) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

E quindi sostituendo gli sviluppi abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + o(4x^3)}{4(x^3 + o(x^3))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + o(4x^3)}{4x^3 + o(4x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{4x^3} = 1$$

□

Con l'esercizio precedente abbiamo scoperto che

Teorema 31: Binomio con o-piccolo

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(f(x) + o(f(x)))^n = f^n(x) + o(f^n(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema dobbiamo usare il binomiale di Newton e quindi

$$(f(x) + o(f(x)))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k$$

Estraiamo il primo termine con $k = 0$ visto che in quel caso $o(f(x))$ avrebbe esponente 0 e quindi non ci sarebbe

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k = f^n(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k$$

Ora possiamo usare le proprietà (iv) per poter portare dentro l'esponente nel o-piccolo, poi la proprietà (iii) per portare il termine $[f(x)]^{n-k}$ dentro al o-piccolo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot o(f^n(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o([f(x)]^{n-k} \cdot f^k(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o([f(x)]^{n-k+k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o(f^n(x)) \end{aligned}$$

Poi visto che $\binom{n}{k}$ è una costante la possiamo togliere per la (vi), e poi dato che dentro la sommatoria non ci sono più termini rispetto a k possiamo calcolarla ($\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$)

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o(f^n(x)) = \sum_{k=1}^n o(f^n(x)) = n \cdot o(f^n(x))$$

Ora possiamo usare di nuovo la proprietà (vi) per togliere n e così il teorema è verificato

$$n \cdot o(f^n(x)) = o(f^n(x))$$

$$(f(x) + o(f(x)))^n = f^n(x) + o(f^n(x))$$

□

Esercizio 47

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow +\infty$, discutere il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1}$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Visto che sappiamo che $f(x) = o(x^2)$, l'unica informazione che sappiamo è che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Pertanto dividiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ora il numeratore tende a 0, i termini $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$, quindi ci manca da capire il termine $x^{\alpha-2}$. Per questo dobbiamo dividere in 3 casi.

Se $\alpha > 2$ allora $\alpha - 2 > 0$ e quindi $x^{\alpha-2} \rightarrow +\infty$ e quindi il denominatore complessivamente tende a $+\infty$ e pertanto di conseguenza il limite tende a 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{+\infty + 0 + 0} = \left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$$

N.B. scrivere $\left[\frac{0}{+\infty} \right]$ è tecnicamente sbagliato perchè ∞ non è un numero ma un simbolo, e pertanto non si possono fare le operazioni con quel numero. L'ho scritto soltanto per enfatizzare il concetto di limite ma non è tecnicamente corretto scriverlo. Volendo essere più precisi, avremmo dovuto usare l'algebra dei limiti infiniti.

Se $\alpha = 2$ allora il termine $x^{\alpha-2} = x^{2-2} = 1$ e quindi il limite diventare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

Se $\alpha < 2$ allora possiamo il termine $x^{\alpha-2} \rightarrow 0$ dato che l'esponente sarebbe negativo e quindi andrebbe a denominatore. E quindi il limite diventerebbe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0 + 0 + 0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

In questo caso siamo incappati in una forma indeterminata, e che quindi con i dati che abbiamo a nostra disposizione non possiamo dire nulla in merito al limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 2 \\ \text{Non Definibile} & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

□

Definizione 14: O-grande

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A . Se esiste $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di x_0 $\exists M > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\}$$

Allora diciamo che " $f(x)$ è un O-grande di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ " e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Esempio 17

Sia $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ e possiamo vedere che

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Visto che $|\sin(x)| \leq 1$. Di conseguenza possiamo prendere un qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e sapremo che

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x) \quad x \rightarrow x_0$$

Esercizio 48

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A . Allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0 \implies f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che $f(x) = o(g(x))$, che usando la definizione di o-piccolo sappiamo che

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Pertanto usando la definizione di limite sappiamo che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di x_0 . Ora usiamo le proprietà dei moduli

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \implies \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \varepsilon \implies |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

Però la definizione O-grande richiedeva che ci fosse almeno un $M > 0$ tale che $|f(x)| < M|g(x)|$, però con la definizione di limite abbiamo trovato che vale $\forall \varepsilon > 0$ e di conseguenza basta scegliere $M = \varepsilon$ e implicazione è verificata.

□

ATTENZIONE Non è vero il contrario, infatti lo vediamo con un esempio, infatti se prendiamo $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x + 2$ è facile vedere che

$$|x + 1| \leq |x + 2| \quad \forall x \geq -1$$

Pertanto possiamo scegliere un qualsiasi intorno di 0 della forma $I = (-\delta, +\delta)$ con $\delta \leq 1$, e di conseguenza è verificata la definizione di O-grande e quindi

$$x + 1 = O(x + 2) \quad \forall x \in I$$

Però se proviamo a vedere se $f(x) = o(g(x))$ vediamo subito che non lo è dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Questo succede perchè O-grande ci dice che una funzione è più piccola di un'altra, mentre o-piccolo ci dice che una funzione è tanto più piccola di un'altra, a tal punto da rendere il limite uguale a 0.

Definizione 15: Confronti di Infiniti

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$$

Allora diciamo che

- " $f(x)$ è infinito dello stesso ordine di $g(x)$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- " $f(x)$ è infinito ordine di ordine inferiore $g(x)$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- " $f(x)$ è infinito ordine di ordine superiore $g(x)$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

- " $f(x)$ è infinito di ordine non confrontabile a $g(x)$ " se

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definizione 16: Confronti di Infinitesimi

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. in A e se

- $x_0 \in \mathbb{R}$ allora diciamo che

- " $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- " $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|x - x_0|^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $x_0 \in \{\pm\infty\}$ allora diciamo che

- " $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|x|^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- " $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esercizio 49

Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ di $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \cos(x)$,

Dimostrazione. per farlo dobbiamo usare la definizione di funzione infinitesima

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{x^\alpha}$$

Per capire quanto vale dobbiamo fare una razionalizzazione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos(x)}{\sqrt{1+x^2} + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2 - \cos^2(x)}{x^\alpha(\sqrt{1+x^2} + \cos(x))} \end{aligned}$$

Il termine $\sqrt{1+x^2} + \cos(x) \rightarrow 2$ quindi possiamo levarlo visto che non influisce sul grado della funzione. Notiamo in oltre che possiamo spaccare la funzione nel seguente modo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2 - \cos^2(x)}{x^\alpha(\sqrt{1+x^2} + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^\alpha} + \frac{1 - \cos^2(x)}{x^\alpha}$$

Ed entrambi convergono solo se $\alpha = 2$, e quindi il gradi infinitesimale di $f(x)$ è 2. Se fosse stato $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \cos(x)$ era necessario usare gli sviluppi dell'o-piccolo. \square

Teorema 32