



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Formulario di Teoremi e relative Dimostrazioni

Student :

Alex Gasparini

4 dicembre 2025

Indice

1	Principio d'Induzione	4
	Teorema del binomio di Newton	4
	Teorema dell'Irrazionalità di $\sqrt{2}$	7
2	Insiemistica	8
	Definizione di Insieme Limitato	8
	Definizione di Massimo e Minimo	8
	Teorema dell'unicità dei Massimi e Minimi	8
	Definizione Estremi Superiori e Inferiore	9
	Relazione Massimi/Minimi e Estremi	9
	Caratterizzazione degli Estremi	10
	Completezza di \mathbb{R} I° forma	10
	Completezza di \mathbb{R} II° forma	10
	Definizione di Intorno	11
	Teorema di Intersezione degli Intorni	11
	Teorema di Separazione degli intorni	11
	Definizione di punto di Accumulazione	11
	Definizione di punto di Accumulazione Destro/Sinistro	11
3	Limiti	13
	Definizione di Limite	13
	Teorema di Unicità del Limite	13
	Esercizi Dimostrazione Limite	14
	Definizione di Limite Destro e Sinistro	22
	Relazione Limite con limite Destro e Sinistro	24
	Limite del Valore Assoluto di una Funzione	26
	Limite del Valore Assoluto di una Funzione (caso $l = 0$)	27
	Teorema della Permanenza del Segno	28
	Limiti e Relazioni d'Ordine I	29
	Limiti e Relazioni d'Ordine II	30
	Teorema dei due Carabinieri	30
	Algebra dei Limiti Finiti	32
	Algebra dei Limiti Infiniti (Forme Determinate)	35
	Esercizi sull'Algebra dei Limiti Infiniti	36
	Forme Indeterminate	37
	Primi Esercizi sulle Forme Indeterminate	37
	Teorema del Cambio di Variabile	40
	Limite di funzioni Monotone caso Finito	42
	Limite di funzioni Monotone caso Infinito	43
	Limiti Notevoli	47
	Definizione di Funzioni Asintotiche	50
	Teorema delle Proprietà delle Funzioni Asintotiche	51
	Gerarchia degli Infiniti	51

4	Simboli di Landau	53
	Definizione di o-piccolo	53
	Proprietà degli o-piccoli <i>I</i>	54
	Relazione tra o-piccolo e Asintoticità	56
	Teorema del Cambio di variabile con o-piccolo	57
	Principio di Sostituzione	58
	Proprietà degli o-piccoli <i>II</i>	59
	Esercizi con o-piccolo	60
	Binomio con o-piccolo	63
	Definizione di O-grande	65
	Confronti di Infiniti	66
	Confronti di Infinitesimi	66
5	Successioni e Serie	68
	Definizione di Successione	68
	Punti di Accumulazione per le Successioni	68
	Convergenza, Divergenza e Irregolarità delle successioni	68
	Monotonia e Limitatezza delle Successioni	68
	Definizione di Successione Ricorsiva	69
	Limitatezza delle successioni quando esiste Limite	69
	Definizione di Progressione Geometrica	70
	Definizione di Sottosuccessione	70
	Relazione tra Successione e le sue Sottosuccessioni	71
	Teorema di Bolzano-Weierstrass	71
	Caratterizzazione sequenziale del Limite	71
	Esempi di applicazione della Caratterizzazione sequenziale del Limite	71
	Gerarchia degli Infinito per le Successioni	73
	Formula di Stirling	75
	Criterio di convergenza per le Successione	76
	Teorema dell'Esistenza del limite di funzioni Monotone	77
	Definizione di Serie Numerica	77
	Convergenza, Divergenza e Irregolarità delle Serie	77
	Serie Geometrica	78
	Serie Armonica Generalizzata	78
	Linearità delle Serie	81
	Condizione Necessaria per la Convergenza di una Serie	81
	Definizione di Serie a Termini Positivi	82
	Criterio del Confronto delle Serie	82
	Definizione Serie Assolutamente Convergente	83
	Criterio del Confronto Asintotico	85
	Criterio del Rapporto	89
	Criterio del Rapporto Asintotico	89
	Criterio della Radice	92
	Criterio della Radice Asintotico	92
	Relazione tra criterio del Rapporto e della Radice	95
	Criterio Condensazione di Cauchy	96
	Definizione Serie a Segno Alternato	97

Criterio di Leibniz	97
6 Continuità delle Funzioni	98
Definizione di Funzione Continua	98
Caratterizzazione $\varepsilon - \delta$ della Funzione Continua	100
Algebra delle Funzioni Continue	100
Limitatezza delle Funzioni Continue	100
Permanenza del Segno delle Funzioni Continue	100
Continuità delle Funzioni Composte	101
Caratterizzazione Sequenziale di funzioni Continue	101
Definizione di Prolungamento per Continuità	101
Classificazione Punti di Discontinuità	102
Teorema di Weierstrass	104
Teorema di Bolzano	105
Teorema dei Valori Intermedi	108
Corollario del Teorema dei Valori Intermedi	109
Continuità delle Funzioni Inverse	109
7 Derivabilità	110
Definizione di Derivata di una Funzione	110
Calcolo delle Derivate Elementari	110
Interpretazione Geometrica di Derivata	114
Definizione di Retta Tangente	115
Relazione tra Continuità e Derivabilità	116
Definizione di Derivata Destra e Sinistra	116
Classificazione dei punti di non Derivabilità	117
Algebra delle Derivate	118
Derivata di Funzioni Composte	120
Esercizi sulla Derivata di Funzioni Composte	121
Derivabilità della funzione Inversa	124

1 Principio d'Induzione

Teorema 1: del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dimostrazione. Facciamo una dimostrazione per induzione. Partiamo con la base induttiva, con $n_0 = 0$:

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k \\ &= \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

La base induttiva è stata verificata. Ora passiamo al passo, quindi supponiamo che $P(n)$ sia vero, e proviamo a vedere se è vero $P(n + 1)$

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Per proseguire con la dimostrazione lasceremo inalterato il termine di destra e andremo a modificare quello di sinistra.

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n \cdot (a + b)$$

Ora possiamo sostituire $(a + b)^n$ con $P(n)$ visto che è $P(n)$ è vera (dato che è una nostra ipotesi)

$$(a + b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a + b) \tag{1}$$

$$= \underbrace{a \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)}_{\text{blu}} + \underbrace{b \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)}_{\text{rosso}} \tag{2}$$

Per comodità andiamo a analizzare singolarmente le due sommatorie, prima quella in blu e poi quella in rosso.

$$\begin{aligned} \underbrace{a \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)}_{\text{blu}} &= \sum_{k=0}^n a \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

Ora analizziamo la parte rossa

$$\begin{aligned} \underline{b \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)} &= \sum_{k=0}^n b \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \end{aligned}$$

ora facciamo una sostituzione $h = k + 1$

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}} &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} b^h \\ &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h \end{aligned}$$

Visto che gli indici nelle sommatorie sono muti, sostituiamo h con k , in modo che tutte le sommatorie sono rispetto a k

$$\underline{\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1} b^h} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k$$

Ricomponiamo le due sommatorie ritornando al punto (2)

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k}_{\text{blu}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k}_{\text{rosso}} \quad (3)$$

Per unire le due sommatorie devono avere gli stessi indici, quindi rimuoviamo gli indici "in più", nella prima togliamo il termine con indice $k = 0$, in modo che entrambe partano con $k = 1$, e nella seconda rimuoviamo il termine $k = n + 1$ in modo che entrambe finiscano con il termine $k = n$

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k} &= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &= 1 \cdot a^{n+1} \cdot 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k &= \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

Riscriviamo il termine (3)

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \underbrace{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{b^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= \underbrace{a^{n+1}} + \underbrace{b^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right) \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^k \cdot \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^k \cdot \binom{n+1}{k} \\
 &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

Siamo quasi alla fine ma notiamo che rispetto a $P(n+1)$ gli indici sono sbagliati, infatti $P(n+1)$ parte con indice $k=0$ e termina con $k=n+1$, mentre la sommatoria che abbiamo appena trovato parte da $k=1$ e termina con $k=n$. Proviamo a vedere cosa sarebbero i termini $k=0$ e $k=n+1$ (quelli che a noi mancano)

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 &= 1 \cdot a^{n+1} \cdot 1 = \underline{a^{n+1}} & (k=0) \\
 \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} &= 1 \cdot 1 \cdot b^{n+1} = \underline{b^{n+1}} & (k=n+1)
 \end{aligned}$$

Vediamo che i termini che ci mancano (a^{n+1} e b^{n+1}) in realtà ce li abbiamo fuori dalla sommatoria, quindi possiamo "portarli dentro" alla sommatoria sistemando gli indici

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

In questa maniera siamo riusciti a dimostrare il passo induttivo, visto che siamo partiti da $P(n)$ e siamo riusciti a dimostrare che $P(n+1)$. Pertanto, visto che sia il passo induttivo che la base induttiva sono verificati, allora il teorema è dimostrato. \square

Teorema 2: Irrazionalità di $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta per assurdo, quindi partiamo supponendo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pertanto $\sqrt{2}$ lo possiamo scrivere come:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Supponiamo anche che il $\text{mcd}(p, q) = 1$ (Massimo Comun Divisore), altrimenti p e q sarebbero semplificabili ulteriormente. Attenzione perchè questo punto sarà fondamentale per la dimostrazione.

Per semplicità, eleviamo tutto al quadrato

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \tag{4}$$

$$2q^2 = p^2 \tag{5}$$

Ora notiamo che p^2 è un multiplo di 2, perciò p^2 è un numero pari. di conseguenza anche p è un numero pari dato che solamente un il prodotto di due numeri pari da un numero pari. Allora possiamo scrivere p come

$$p = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi andiamo a sostituirlo nell'equazione (5)

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Dopo le varie semplificazioni notiamo che anche q^2 è divisibile per 2, e come abbiamo dedotto per p , allora anche q è divisibile per 2. Però sia p che q sono divisibili per 2, questo implica che $\text{mcd}(p, q) \geq 2$. Cosa assurda, visto che avevamo imposto che $\text{mcd}(p, q) = 1$, pertanto sono sbagliate le tesi: ovvero che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, e se questa affermazione è sbagliata allora per forza $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. \square

2 Insiemistica

Definizione 1: Insieme Limitato

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ è detto

- **Superiormente limitato** se $\exists M \in \mathbb{R} : M \geq a \quad \forall a \in A$
- **Inferiormente limitato** se $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a \quad \forall a \in A$

L'insieme $\{M : M \geq a \quad \forall a \in A\}$ è detto **Insieme dei maggioranti di A**.

L'insieme $\{m : m \leq a \quad \forall a \in A\}$ è detto **Insieme dei minoranti di A**

Definizione 2: Massimo e Minimo

- Un maggiorante M di $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **massimo** se $M \in A$

$$M = \max(A) = (M \geq a \quad \forall a \in A) \wedge M \in A \quad (6)$$

- Un minorante m di $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto **minimo** se $m \in A$

$$m = \min(A) = (m \leq a \quad \forall a \in A) \wedge m \in A \quad (7)$$

Teorema 3: Unicità dei Massimi e Minimi

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se ammette un massimo o un minimo, essi sono **unici**

Dimostrazione. Supponiamo che ci siano due massimi M_1, M_2 con $M_1 \neq M_2$. Visto che M_1 è un massimo allora, per definizione di massimo (6), deve essere $M_1 \in A$. Poi visto che M_2 è un massimo, di conseguenza è anche un maggiorante allora, per definizione di maggiorante, deve valere la seguente affermazione

$$M_2 \geq a \quad \forall a \in A$$

Dato che $M_1 \in A$ possiamo dire che

$$M_2 \geq M_1 \quad (8)$$

Ora rifacciamo il seguente ragionamento ma al contrario. Dato che M_2 è massimo allora deve essere $M_2 \in A$. Visto che M_1 è un massimo deve anche essere un maggiorante, e per tanto vale

$$M_1 \geq a \quad \forall a \in A$$

Dato che $M_2 \in A$ possiamo dire che

$$M_1 \geq M_2 \quad (9)$$

Ora combinando le informazioni (8) e (9) deve valere

$$(M_2 \geq M_1) \wedge (M_1 \geq M_2) \Rightarrow M_1 = M_2$$

Dato che una delle ipotesi era che $M_1 \neq M_2$ abbiamo raggiunto un assurdo, per tanto il massimo deve essere unico. La dimostrazione per il minimo è analoga. \square

Definizione 3: Estremi Superiore e Inferiore

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ definiamo

- **estremo superiore** di A come il minore dei maggioranti.

$$\sup(A) = \min\{M : M \geq a \ \forall a \in A\} \quad (10)$$

- **estremo inferiore** di A come il maggiore dei minoranti.

$$\inf(A) = \max\{m : m \leq a \ \forall a \in A\}$$

Teorema 4: Relazione Massimi/Minimi e Estremi

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

- Se esiste $\max(A)$, allora coincide con $\sup(A)$

$$M = \max(A) \Rightarrow M = \sup(A)$$

- Se esiste $\min(A)$, allora coincide con $\inf(A)$

$$m = \min(A) \Rightarrow m = \inf(A)$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista $M_1 = \max(A)$ allora sappiamo che è un maggiorante, e di conseguenza appartiene all'insieme dei maggioranti (N)

$$M_1 \in N = \{M : M \geq a \ \forall a \in A\} \quad (11)$$

e sappiamo anche che $M_1 \in A$, visto che è il massimo.

Se prendiamo un numero $u \in N$ abbiamo che

$$u \geq a \ \forall a \in A \ \forall u \in N$$

Visto che $M_1 \in A$ allora deve valere

$$u \geq M_1 \ \forall u \in N$$

Per questo deduciamo che M_1 è minorante di N , ma nel punto (11) avevamo detto che $M_1 \in N$, di conseguenza

$$M_1 = \min(N)$$

Che per definizione è anche l'estremo superiore, quindi

$$M_1 = \sup(A)$$

La dimostrazione del minimo è analoga. \square

N.B. che $\max(A) \Rightarrow \sup(A)$ e che $\sup(A) \not\Rightarrow \max(A)$. Per vederlo basta farsi degli esempi, come $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$ si vede che esiste un estremo superiore ($\sup(A) = \sqrt{2}$) mentre non esiste il massimo.

Teorema 5: Caratterizzazione degli Estremi

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se esiste $\sup(A)$ oppure $\inf(A)$ allora possiamo definirli anche come:

$$S = \sup(A) = \begin{cases} S \in \{M : M \geq a \ \forall a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > S - \varepsilon \end{cases}$$

$$s = \inf(A) = \begin{cases} s \in \{m : m \leq a \ \forall a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a < s + \varepsilon \end{cases}$$

Teorema 6: Completezza di \mathbb{R} I° forma

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$
allora $\exists c \in \mathbb{R}$, detto **elemento separatore** tale che

$$a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$$

Teorema 7: Completezza di \mathbb{R} II° forma

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se è superiormente/inferiormente limitato allora ammette un estremo superiore/inferiore.

Dimostrazione. Dato che A è superiormente limitato allora esiste l'insieme dei maggioranti $N = \{M : M \in \mathbb{R} : M \geq a \ \forall a \in A\}$. Visto che tutti gli elementi dell'insieme dei maggioranti è maggiore di tutti gli elementi di A ($n \geq a \ \forall a \in A \ \forall n \in N$) possiamo applicare il Teorema di completezza di \mathbb{R} I° forma

$$\exists c \in \mathbb{R} : \underline{a \leq c} \leq \underline{n} \ \forall a \in A \ \forall n \in N$$

Visto che $\underline{a \leq c} \ \forall a \in A$ vuol dire che c è un maggiorante di A e di conseguenza $c \in N$ (l'insieme dei maggioranti).

Dato che $\underline{c \leq n} \ \forall n \in N$ allora c è un minorante di N . Quindi visto che $c \in N$, per definizione di minimo (7) possiamo dire che

$$c = \min(N)$$

Questo coincide con la definizione di **estremo superiore**, quindi

$$c = \sup(A)$$

Quindi abbiamo dimostrato che esiste un estremo superiore.

La dimostrazione dell'estremo inferiore è analoga. □

Definizione 4: Intorno

ia $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora

- Se $r \in \mathbb{R}$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma

$$(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \quad \varepsilon > 0$$
- Se $r = +\infty$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma

$$(M, +\infty) \quad M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
- Se $r = -\infty$ diciamo **intorno** un qualsiasi intervallo aperto della forma

$$(-\infty, M) \quad M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Teorema 8: Intersezione degli introni

Sia $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ introni di x_0 , allora anche $I = I_1 \cap I_2$ è intorno di x_0 .

Teorema 9: Separazione degli introni

Sia $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora $\exists I_1$ intorno di r_1 e $\exists I_2$ intorno di r_2 tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Definizione 5: Definizione di punto di Accumulazione

ia $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è detto **punto di accumulazione** di $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ se

- caso $r \in \mathbb{R}$:

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap (I \setminus \{r\}) \neq \emptyset$$

- caso $r \in \{\pm\infty\}$:

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap I \neq \emptyset$$

Definizione 6: Accumulazione Destro/Sinistro

ia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ è detto

- **Punto di accumulazione destro** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r, r + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

- **Punto di accumulazione sinistro** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r - \varepsilon, r) \cap A \neq \emptyset$$

N.B. i simboli $\pm\infty$ non ha senso definirli punti di accumulazione destro/sinistro

Esercizio 1

Sia $r \in \mathbb{R}$ e $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, r è punto di accumulazione destro o sinistro di A se e solo se r è punto di accumulazione di A

Dimostrazione. Visto che questa è una doppia implicazione dobbiamo controllare che l'implicazione sia vera da entrambi i lati.

(\Rightarrow) Partiamo dimostrando che se r è punto di accumulazione destro (o sinistro) di A allora r è punto di accumulazione di A . Partiamo con la definizione di punto di accumulazione destro.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (r, r + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Ora dobbiamo controllare se è vera la definizione di punto di accumulazione, per farla riscriviamo

$$\forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } r \quad A \cap (I \setminus \{r\}) \neq \emptyset$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ((r - \varepsilon, r + \varepsilon) \setminus \{r\}) \cap A \neq \emptyset$$

Con questa riscrittura si nota che

$$(r, r + \varepsilon) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \setminus \{r\}$$

Di conseguenza per ogni insieme che troviamo per il punto di accumulazione destro, posso trovare un intervallo sul punto di accumulazione, di conseguenza se r è un punto di accumulazione destro deve anche essere un punto di accumulazione in A . Ragionamento analogo per il punto di accumulazione sinistro

(\Leftarrow) Per dimostrare che se r è punto di accumulazione allora deve essere punto di accumulazione destro o sinistro, ragioniamo per assurdo: quindi supponiamo che r non è ne punto di accumulazione destro ne sinistro. Allora sappiamo

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0 : (r - \varepsilon_1, r) \cap A = \emptyset \wedge (r, r + \varepsilon_2) \cap A = \emptyset$$

Ma se prendiamo $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ allora

$$\exists \varepsilon > 0 : (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

Questo non è altro che la definizione di punto isolato, ovvero la negazione di punto di accumulazione. Quindi abbiamo scoperto che

$$r \text{ non è punto acc. dx e } r \text{ non è punto acc. sx} \Rightarrow r \text{ non è punto di acc.}$$

Usando le proprietà dell'implicazione $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

$$r \text{ è punto di acc.} \Rightarrow r \text{ è punto acc. dx oppure } r \text{ è punto acc. sx}$$

□

3 Limiti

Definizione 7: Definizione di Limite

Dato $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è **limite di f per $x \rightarrow x_0$** se

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che} \\ f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Teorema 10: Unicità del limite

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se esiste il limite f per $x \rightarrow x_0$ allora è unico. E lo si indica con:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad (12)$$

Dimostrazione. Supponiamo che il limite esista ed abbiamo due valori: $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $l_1 \neq l_2$. Visto che per ipotesi $l_1 \neq l_2$ allora per il teorema di separazione abbiamo che $\exists U_1 \subseteq \mathbb{R}$ intorno di l_1 e $\exists U_2 \subseteq \mathbb{R}$ intorno di l_2 tali che:

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad (13)$$

Applicando la definizione di limite, $\exists I_1, I_2$ intorno di x_0 tali che:

$$\forall U_1 \text{ intorno di } l_1 \quad f(x) \in U_1 \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$$

$$\forall U_2 \text{ intorno di } l_2 \quad f(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$$

Usando il teorema di intersezione degli intorno, $\exists I_3 = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 , e visto che $I_3 \subseteq I_1$, anche in esso varrà la proprietà del limite l_1 . Contemporaneamente varrà anche la proprietà del limite l_2 visto che $I_3 \subseteq I_2$, per tanto

$$\forall U_1 \forall U_2 \quad f(x) \in U_1 \wedge f(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_3 \setminus \{x_0\})$$

la congiunzione logica la possiamo riscrivere come congiunzione insiemistica

$$\forall U_1 \forall U_2 \quad f(x) \in U_1 \cap U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_3 \setminus \{x_0\})$$

Però questo necessita che $\forall U_1 \forall U_2 \quad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, perchè altrimenti il limite non esisterebbe. Ma all'inizio con l'equazione (13) sappiamo che esistono almeno un U_1 e un U_2 che rendono l'intersezione vuota. Per tanto è un assurdo e le ipotesi erano sbagliate. Di conseguenza il limite deve essere unico e non può assumere più di un valore.

□

Esercizio 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2x + 3 = 2x_0 + 3$$

Dimostrazione. Proviamo a dimostrarlo con la definizione. $f(x) = 2x + 3$ e, dato che è un polinomio, il suo dominio sarà $A = \mathbb{R}$. l'intorno di $l = 2x_0 + 3$ sarà $U = (2x_0 + 3 - \varepsilon, 2x_0 + 3 + \varepsilon)$, e un intorno di x_0 sarà $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Di conseguenza con la definizione di limite sarà

$$\forall U \quad f(x) \in U \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

Con i dati dell'esercizio

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 2x + 3 \in (2x_0 + 3 - \varepsilon, 2x_0 + 3 + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Riscriviamo il termine $2x + 3 \in (2x_0 + 3 - \varepsilon, 2x_0 + 3 + \varepsilon)$

$$\begin{aligned} 2x_0 + 3 - \varepsilon &< 2x + 3 < 2x_0 + 3 + \varepsilon \\ 2x_0 - \varepsilon &< 2x < 2x_0 + \varepsilon \\ x_0 - \frac{\varepsilon}{2} &< x < x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Vediamo come partendo dalla prima porzione abbiamo trovato un intorno su cui deve stare x , pertanto affinché sia vero la definizione di limite possiamo scegliere

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

□

Esercizio 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad c \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Scrivendola in un'altra maniera

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow c \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$$

Però il conseguente della nostra implicazione è sempre vero, perchè c sarà sempre nell'intervallo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ per qualsiasi valore di ε positivo. Quindi volendo riscrivere la proposizione

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow Vero$$

Una implicazione è sempre vera quando implica vero (vedi tabella di verità dell'implicazione). Quindi la nostra proposizione è sempre vera, e di conseguenza il limite è verificato. □

Esercizio 4

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$$

Dimostrazione. Con la definizione di limite abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x^2 \in (x_0^2 - \varepsilon, x_0^2 + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

Utilizzando le proprietà della funzione modulo possiamo scriverlo anche come

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

Riscriviamo il primo termine

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &< \varepsilon \\ |(x - x_0)(x + x_0)| &< \varepsilon \\ |x - x_0||x + x_0| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ora dobbiamo capire quanto vale $|x + x_0|$ in modo da non avere più la variabile x . Per farlo scegliamo $\delta < 1$

$$\begin{aligned} |x + x_0| &< \delta < 1 \\ |x + x_0| &< 1 \end{aligned}$$

con questo scopriamo che

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq \underline{|x - x_0|} + 2|x_0| < \underline{1} + 2|x_0|$$

$$|x + x_0| < 1 + 2|x_0|$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$, ricordandoci anche che $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |x - x_0||x + x_0| &< |x - x_0|(1 + 2|x_0|) \\ |x - x_0||x + x_0| &< \underline{|x - x_0|}(1 + 2|x_0|) < \underline{\delta}(1 + 2|x_0|) \end{aligned}$$

$$|x - x_0||x + x_0| < \delta(1 + 2|x_0|)$$

Partendo da $|x - x_0| < \delta$ siamo riusciti a capire che $|x^2 - x_0^2| < \delta(1 + 2|x_0|)$, quindi se per verificare il limite bisogna che $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ è necessario imporre

$$\begin{aligned} \delta(1 + 2|x_0|) &< \varepsilon \\ \delta &< \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \end{aligned}$$

Visto che abbiamo imposto $\delta < 1$, aggiustiamo la definizione

$$\delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

□

Esercizio 5

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 \geq 0$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \quad |x - x_0| < \delta$$

Partiamo analizzando il termine $|x - x_0| < \delta$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| < \delta$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}$$

Ora possiamo sfruttare la seguente espressione

$$|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| \geq |\sqrt{x_0}|$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{x_0}|}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &< \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} \\ |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &< \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Affinchè il limite sia verificato è necessario che

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} &< \varepsilon \\ \delta &< \sqrt{x_0} \varepsilon \end{aligned}$$

N.B. per tutto l'esercizio abbiamo potuto scrivere $\sqrt{x_0}$ non controllando se x_0 fosse non negativo perchè il dominio di $f(x) = \sqrt{x}$ è \mathbb{R}_0^+ e di conseguenza qualsiasi punto $x < 0$ non è punto di accumulazione, dato che esiste almeno un intorno di un numero negativo che intersecato con il dominio (\mathbb{R}_0^+) dà insieme vuoto. E per questo il limite lo possiamo fare solo con valori di $x \geq 0$ e possiamo scrivere $\sqrt{x_0}$ senza alcun problema.

□

Esercizio 6

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Con la definizione di limite abbiamo

$$\begin{aligned} |x^n - x_0^n| &< \varepsilon \\ \left| (x - x_0) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| &< \varepsilon \\ |x - x_0| \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ora dobbiamo capire quanto vale il secondo termine in modo da non avere più la variabile x .

$$|x + x_0| < \delta < 1$$

$$|x + x_0| < 1$$

con questo scopriamo che

$$|x| = |x - x_0 + x_0| \leq \underline{|x - x_0|} + |x_0| < \underline{1} + |x_0|$$

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Di conseguenza

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x^{n-1-k} x_0^k| = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{|x^{n-1-k}|} |x_0^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(1 + |x_0|)^{n-1-k}| |x_0^k|$$

Semplificando un po' troviamo che

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| \leq (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$, ricordandoci anche che $|x - x_0| < \delta$

$$\underline{|x - x_0|} \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \right| < |x - x_0| (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

$$\underline{|x^n - x_0^n|} < \underline{|x - x_0|} (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k < \underline{\delta} (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

$$|x^n - x_0^n| < \delta (1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k$$

Per trovare quanto vale ε basta fare

$$\delta(1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{(1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k}$$

Visto che abbiamo imposto $\delta < 1$, aggiustiamo la definizione

$$\delta < \min \left(1, \frac{\varepsilon}{(1 + |x_0|)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|x_0|}{1 + |x_0|} \right)^k} \right)$$

□

Esercizio 7

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$$

Usando le formule di Prostaferesi ($\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$)

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = \left| 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

Ora ricordiamo che per definizione delle funzioni trigonometriche, vale sempre la seguente proposizione

$$|\cos(x)| \leq 1 \quad |\sin(x)| \leq 1$$

Quindi usiamo questa proprietà del coseno per diventare

$$\left| \underline{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)} \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \underline{1} \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

Poi ricordiamo anche che per la funzione seno vale la seguente relazione

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

E che quindi nella nostra dimostrazione possiamo usarla

$$2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0|$$

Riscrivendo le informazioni trovate finora sappiamo che

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x-x_0|$$

Per la definizione di limite sappiamo che $|x - x_0| < \delta$

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta$$

Ora se dobbiamo trovare il ε basta imporre

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon$$

Per il coseno la dimostrazione è analoga. □

Esercizio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad a \in [1, +\infty)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo limite dobbiamo trovare un qualche $\delta > 0$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad -\delta < x < \delta \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$$

Quindi iniziamo partendo dalla disuguaglianza di Bernulli

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \tag{14}$$

Ora decidiamo che $a < 1 + n\varepsilon$ e che quindi $\forall n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ vale

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > a$$

$$(1 + \varepsilon)^n > a$$

$$1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}}$$

Ora quindi sappiamo che per qualsiasi valore di $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ vale la relazione $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, quindi se trovo per quali valori di x vale la relazione $a^x < a^{\frac{1}{n}}$ posso imporre $a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ che vuol dire che abbiamo dimostrato la prima parte.

$$a^x < a^{\frac{1}{n}}$$

Per monotonia della funzione $f(x) = a^x$ allora vale

$$x < \frac{1}{n}$$

Quindi per dimostrare il limite basta scegliere un $\delta < \frac{1}{n}$ in modo tale che l'espressione $a^x < 1 + \varepsilon$ sia valida.

Per dimostrare la porzione $1 - \varepsilon < a^x$ dobbiamo ricorrere alla formula

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (15)$$

Dai ragionamenti di prima sappiamo che $(1 + \varepsilon)^n > a$, quindi vale anche

$$\left(\frac{1}{1 + \varepsilon}\right)^n < \frac{1}{a^n}$$

Quindi se eleviamo tutto alla n l'equazione (15) ricaviamo

$$(1 - \varepsilon)^n < \left(\frac{1}{1 + \varepsilon}\right)^n < \frac{1}{a}$$

N.B. per non avere problemi di segno dobbiamo imporre $1 - \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$.

$$(1 - \varepsilon)^n < \frac{1}{a}$$

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}$$

Quindi come per la prima parte della dimostrazione ora basta scegliere delle x per cui $a^{-\frac{1}{n}} < a^x$, che per monotonia come prima rimane

$$-\frac{1}{n} < x$$

Per confermare la dimostrazione possiamo scegliere un δ tale che

$$-\frac{1}{n} < -\delta$$

$$\delta < \frac{1}{n}$$

Quindi se scegliamo un $\delta < \frac{1}{n}$ anche l'espressione $1 - \varepsilon < a^x$ sarà verificata. Pertanto per verificare il limite basta scegliere

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{a - 1}\right)$$

□

Esercizio 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad a \in (0, 1)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo limite possiamo usare uno stratagemma per evitare di fare tutta la dimostrazione classica. Perché con l'esercizio precedente abbiamo dimostrato con la base $a \geq 1$, quindi cerchiamo di ricondurli a quel limite. Per farlo usiamo le regole delle potenze infatti

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$$

Quindi il limite lo possiamo riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \right)^{-x}$$

In questa maniera la base è maggiore di 1, di conseguenza è uguale al limite dell'esercizio precedente da quel punto di vista. Quello che cambia è che all'esponente abbiamo $-x$ e non più x , però non è troppo un problema, infatti se $x \rightarrow 0$ allora anche $-x \rightarrow 0$, quindi l'esponente si avvicina lo stesso allo 0, di conseguenza il limite sarà lo stesso, di prima e possiamo usare quello (che abbiamo già dimostrato) per dimostrare questo senza la dimostrazione rigorosa.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \right)^x = 1$$

N.B. il passaggio dove diciamo che se $x \rightarrow 0$ allora $-x \rightarrow 0$ non è dimostrato in maniera rigorosa, infatti per questo passaggio serve il teorema del cambio di variabile che vedremo più avanti, ma intuitivamente ha senso che se $x \rightarrow 0$ allora $-x \rightarrow 0$. \square

Ora vediamo un caso particolare, che come vedremo non ha soluzione per come abbiamo definito il limite.

Esercizio 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq +\infty$$

Dimostrazione. Proviamo usando la definizione di limite.

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : f(x) \in (M, +\infty) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \frac{1}{x} \in (M, +\infty) \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\}$$

Partiamo analizzando $\frac{1}{x} \in (M, +\infty)$

$$\frac{1}{x} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M$$

Ricordiamo che $M > 0$, quindi anche $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Ora possiamo fare il reciproco di entrambi i membri (visto che sono entrambi positivi)

$$\frac{1}{x} > M > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

Quindi fino ad ora abbiamo capito che $f(x) \in (M, +\infty)$ è uguale a dire $0 < x < \frac{1}{M}$, però nella definizione di limite abbiamo che $\forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ però questo è impossibile, perchè per qualsiasi valore di δ l'intervallo comprenderà anche numeri negativi (dato che l'intervallo è $(-\delta, \delta)$ ma ciò va in contraddizione con quanto abbiamo trovato prima (ovvero che $0 < x < \frac{1}{M}$). Infatti non c'è nessun valore di $\delta > 0$ che valida la seguente affermazione.

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \not\subseteq (0, \frac{1}{M})$$

Pertanto il limite è sbagliato. Il ragionamento con $-\infty$ è analogo.

Per poter calcolare questo limite ci serve la nozione di limite destro e limite sinistro. \square

Definizione 8: Limite Destro e Sinistro

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

- Sia x_0 punto di accumulazione destro, allora definiamo limite destro di $f(x)$ come

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

E la sua caratterizzazione sarà

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che} \\ \forall x \in A \cap I \cap (x_0, +\infty) \quad f(x) \in U$$

- Sia x_0 punto di accumulazione sinistro, allora definiamo limite sinistro di $f(x)$ come

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

E la sua caratterizzazione sarà

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che} \\ \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0) \quad f(x) \in U$$

Ora proviamo a risolvere il limite di prima con il limite destro.

Esercizio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite destro

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \frac{1}{x} \in (M, +\infty) \quad \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\} \cap (0, +\infty)$$

Riscriviamo meglio l'ultimo termine

$$(-\delta, +\delta) \setminus \{0\} \cap (0, +\infty) = (0, \delta)$$

Ora possiamo fare gli stessi ragionamenti di prima

$$\frac{1}{x} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M$$

Visto che $M > 0$ allora anche $x > 0$, per lo stesso ragionamento di prima

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

Ora però il risultato è diverso da prima infatti, dopo le semplificazioni, la nostra condizione del limite sarà $\forall x \in (0, \delta) \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{M})$. Ora affinché questa proposizione sia vera basta prendere

$$\delta \leq \frac{1}{M}$$

E quindi ora il limite è verificato. Per il limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ il ragionamento è analogo. \square

Esercizio 12

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : \frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \quad \forall x \in (0 - \delta, 0 + \delta) \setminus \{0\} \cap (-\infty, 0)$$

Riscrivendo meglio la definizione

$$\forall \delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \quad (16)$$

Riscriviamo il secondo termine

$$\frac{1}{x^2} \in (M, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

Ora non abbiamo nessun problema riguardante il segno visto che $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$, quindi possiamo invertire la disequazione

$$x^2 < \frac{1}{M}$$

Visto che, sia x^2 che $\frac{1}{M}$ sono positivi possiamo fare la radice quadrata ambo i membri

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Riscrivendo l'espressione (16)

$$\forall \delta > 0 \quad x \in (-\delta, 0) \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

Questa implicazione è vera quando vale

$$-\delta \geq -\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\delta \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$$

□

Teorema 11: Relazione Limite con limite Destro e Sinistro

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Dimostrazione. Visto che è una doppia implicazione dovremmo controllare entrambe le direzioni

(\Rightarrow) quindi, usando la definizione di limite, sappiamo che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Se quindi sappiamo che l'affermazione è vera (per ipotesi) $\forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\}$ allora varrà anche per un qualunque sottoinsieme, quindi la proposizione sarà vera anche per l'insieme $A \cap I \cap (x_0, +\infty)$ e anche per $A \cap I \cap (-\infty, x_0)$, che sono gli insiemi compresi nella definizione di limite destro e limite sinistro. Pertanto saranno valide anche le definizioni di limite destro e sinistro e quindi è verificata l'implicazione.

(\Leftarrow) Se quindi esiste il limite destro e sinistro sappiamo che

- per limite destro

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I_1 \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I_1 \cap (x_0, +\infty) \Rightarrow f(x) \in U$$

- per limite sinistro

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I_2 \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I_2 \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow f(x) \in U$$

Se noi ora, per il teorema di intersezione degli interni, possiamo trovare un $I = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 . tale che vale

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \cap ((-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)) \Rightarrow f(x) \in U$$

che scrivendo meglio

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l, \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Che valida la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

□

Esercizio 13

$$\text{Sia } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 200 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \text{ Allora}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Dimostrazione. Partiamo analizzando il limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Ora nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione assume sempre il valore 1, quindi possiamo sostituire la funzione nel limite nel suo valore

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

Ora facciamo lo stesso ragionamento con il limite destro, e visto che anche nell'intervallo $(0, +\infty)$ assume sempre il valore 1 possiamo calcolare il limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Ora, dato che il limite destro e sinistro esistono e sono uguali, per il teorema visto prima sappiamo che esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

N.B. questo è un esempio lampante per capire che il limite studia "ciò che è attorno" ad un punto di una funzione, e al limite "non tiene conto" di cosa fa la funzione nel punto effettivo, come in questo esempio anche se $f(0) = 200$ non influenza il valore del limite. \square

Teorema 12: Limite del Valore Assoluto di una Funzione

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Dimostrazione. Inizialmente iniziamo a studiare per $l > 0$, quindi per ipotesi sappiamo che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 : x \in I \implies f(x) \in U$$

E dobbiamo trovare che

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } |l| \exists I \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } x_0 : x \in I \implies |f(x)| \in U$$

Partiamo dalla prima proposizione, e riscriviamo meglio la prima parte

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ intorno di } l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Notiamo che se scegliamo $\varepsilon < l$ allora $l - \varepsilon > 0$ e quindi

$$0 < l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Quindi ora tutti i termini sono positivi allora, per la seguente proprietà del valore assoluto $a > 0 \implies a = |a|$ possiamo sostituire il termine $f(x)$ con $|f(x)|$

$$0 < l - \varepsilon < |f(x)| < l + \varepsilon$$

Ora riprendiamo la condizione che abbiamo imposto $\varepsilon < l$, noi sappiamo, per definizione di limite, che $\varepsilon > 0$ quindi $0 < \varepsilon < l$ di conseguenza $l > 0$, quindi abbiamo scoperto che anche l è positivo e che quindi possiamo usare la stessa proprietà di che abbiamo usato per $|f(x)|$ per mettere il modulo

$$|l| - \varepsilon < |f(x)| < |l| + \varepsilon$$

Con questo siamo riusciti a verificare il limite perchè $|f(x)|$ è in un intorno di $|l|$. Ora però ci manca da controllare i casi con $l < 0$, e per evitare di usare la dimostrazione classica di limite usiamo uno stratagemma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -l > 0$$

Ora visto che $l < 0$ allora $-l > 0$ e di conseguenza possiamo usare il teorema che abbiamo appena verificato (e possiamo applicarlo proprio perchè $-l > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |-f(x)| = |-l| \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

E quindi anche per $l < 0$ il risultato rimane lo stesso e quindi il limite è verificato $\forall l \neq 0$. □

Teorema 13: Limite del Valore Assoluto di una Funzione (caso $l = 0$)

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $f(x)$ e $l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

Dimostrazione. Visto che c'è una doppia implicazione controlliamo entrambi i sensi
(\implies) Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Riscrivendo meglio il primo termine

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

Usiamo le proprietà dei valori assoluti

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \iff 0 \leq |f(x)| < \varepsilon$$

Quindi ora sappiamo che il limite è verificato per $0 \leq |f(x)| < \varepsilon$ ma quindi possiamo "allargare" l'intervallo e varrà comunque la proprietà e quindi

$$0 \leq |f(x)| < \varepsilon \implies -\varepsilon < |f(x)| < \varepsilon$$

E di conseguenza è verificato il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.

(\impliedby) Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x)| \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Riscrivendo meglio il primo termine

$$-\varepsilon < |f(x)| < \varepsilon$$

Possiamo togliere la parte $-\varepsilon$ perchè il valore assoluto è sempre positivo

$$|f(x)| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

e quindi è verificato il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. □

N.B. facendo un riassunto dei due teoremi appena fatti sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

E vedendo bene notiamo che se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ allora non possiamo dire nulla su $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Vediamo un esempio.

Esercizio 14

Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

possiamo notare che

$$|f(x)| = \begin{cases} |1| & \text{se } x \leq 0 \\ |-1| & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \iff |f(x)| = 1$$

E che quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Ora proviamo a vedere $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, e visto che è una funzione definita a tratti facciamo il limite destro e sinistro. Partiamo con quello sinistro e vediamo che la funzione nell'intervallo $(-\infty, 0)$ assume il valore 1 quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

Con il limite destro e la nostra funzione nell'intervallo $(0, +\infty)$ assume il valore -1 e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 = -1$$

Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Teorema 14: Permanenza del Segno

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di $f(x)$ e $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ allora

- Se $l > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l < 0$ allora $f(x) < 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per $l > 0$, gli altri casi sono analoghi.

Per ipotesi sappiamo che il limite esiste, e pertanto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Se scelgo $\varepsilon < l$ avrò che

$$\varepsilon < l \implies l - \varepsilon > 0 \implies 0 < l - \varepsilon < f(x)$$

di conseguenza

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

□

Teorema 15: limiti e relazioni d'ordine I

iano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
e $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$$l_1 < l_2 \implies f(x) < g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. Dato che $l_1 < l_2$ sappiamo che $l_1 \neq l_2$ e quindi per il teorema di separazione degli interni $\exists U_1$ intorno di l_1 e $\exists U_2$ intorno di l_2 tali che

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad (17)$$

Ora per definizione di limite sappiamo

- $\forall U_1$ intorno di l_1 $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in U_1 \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall U_2$ intorno di l_2 $\exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Ora se dato che abbiamo I_1 e I_2 intorno di x_0 , per il teorema di intersezione sappiamo

$$\exists I = I_1 \cap I_2 \text{ intorno di } x_0$$

E quindi nell'intorno I varrà

$$f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\}) \quad (18)$$

riscriviamo l'equazione (17)

$$(l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \cap (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$$

Dato che per ipotesi sappiamo $l_1 < l_2$, cioè può accedere soltanto se

$$\underline{l_1 + \varepsilon_1 < l_2 - \varepsilon_2}$$

Ora usiamo questa informazione e combiniamola con la formula (18)

$$f(x) \in (l_1 - \varepsilon_1, l_1 + \varepsilon_1) \wedge g(x) \in (l_2 - \varepsilon_2, l_2 + \varepsilon_2)$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon_1 < f(x) < l_1 + \varepsilon_1} \wedge \underline{l_2 - \varepsilon_2 < g(x) < l_2 + \varepsilon_2}$$

$$\underline{f(x) < l_1 + \varepsilon_1} < \underline{l_2 - \varepsilon_2} < \underline{g(x)}$$

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

□

Teorema 16: limiti e relazioni d'ordine II

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0 \implies l_1 \leq l_2$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue per assurdo, quindi supponiamo che $l_1 > l_2$, allora per il teorema della relazione d'ordine I sappiamo che

$$l_1 > l_2 \implies f(x) > g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Ma ciò va in contraddizione con le ipotesi iniziali $f(x) < g(x)$ pertanto è impossibile che $l_1 > l_2$ e di conseguenza è vero che $l_1 \leq l_2$. \square

Esercizio 15

N.B. se $f(x) < g(x)$ non possiamo dire con certezza nulla su $l_1 < l_2$. Vediamo un esempio. Sia $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$. Noi sappiamo che

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ma i limiti per $x \rightarrow 0$ fanno $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Teorema 17: Due Carabinieri

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Dimostrazione. Visto che $f(x)$ e $h(x)$ hanno limite, sappiamo che

- $\forall U$ intorno di l $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall U$ intorno di l $\exists I_2$ intorno di x_0 tale che $h(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Ora per il teorema di intersezione degli interni sappiamo che

$$\exists I = I_1 \cap I_2 \text{ intorno di } x_0$$

In I vale

$$f(x) \in U \wedge h(x) \in U \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

Pertanto sappiamo che

$$\underline{l - \varepsilon < f(x)} < l + \varepsilon \wedge -\varepsilon < \underline{h(x)} < l + \varepsilon$$

Combinando questa informazione con le ipotesi $(f(x) \leq g(x) \leq h(x))$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

Di conseguenza

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (I \setminus \{x_0\})$$

E questà è la definizione di limite, quindi questo implica che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

□

Corollario 1: Teorema dei carabinieri II

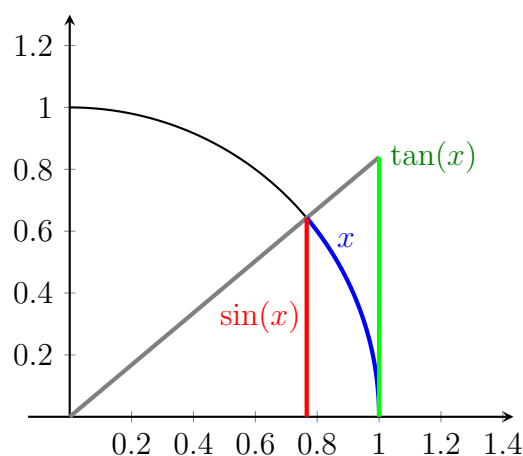
Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Allora

- se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Esercizio 16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Iniziamo disegnando una circonferenza unitaria e notiamo che



Dal grafico possiamo notare che in un intorno di 0 abbiamo che

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Ora possiamo dividere tutto per $\sin(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

inveriamo tutti i membri (e anche i segni delle disequazioni)

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Ora vediamo che $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, e visto che le due funzioni estreme tendono entrambe a 1 e la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ è compresa tra le altre due funzioni definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora per il teorema dei carabinieri abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Teorema 18: Algebra dei Limiti Finiti

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$. Allora

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{se } l_2 \neq 0)$$

Dimostrazione. (i) Partiamo scrivendo le definizioni di limite come sappiamo

- $\forall \varepsilon > 0 \exists I_1$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I_1 \setminus \{x_0\})$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists I_2$ intorno di x_0 tale che $g(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \quad \forall x \in A \cap (I_2 \setminus \{x_0\})$

Quindi per il teorema di intersezione trovo un $I = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \wedge g(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon} \quad \underline{l_2 - \varepsilon < g(x) < l_2 + \varepsilon}$$

$$\underline{l_1 - \varepsilon} + \underline{l_2 - \varepsilon} < \underline{f(x)} + \underline{g(x)} < \underline{l_1 + \varepsilon} + \underline{l_2 + \varepsilon}$$

$$(l_1 + l_2) - 2\varepsilon < f(x) + g(x) < (l_1 + l_2) + 2\varepsilon$$

E notiamo che $f(x) + g(x)$ è in un intorno di $l_1 + l_2$ e che quindi il limite è verificato.

N.B. anche se c'è scritto 2ε e non solamente ε va bene lo stesso, anche perchè l'espressione all'interno della definizione di limite è $\forall \varepsilon > 0$ e quindi anche se moltiplico ε per una qualsiasi costante, potrò rappresentare qualunque intorno.

(ii) Partiamo analizzando il seguente modulo, e compensando il termine $l_1 \cdot g(x)$

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| = |f(x) \cdot g(x) - \underline{l_1 \cdot g(x)} + \underline{l_1 \cdot g(x)} - l_1 \cdot l_2|$$

Ora raccogliamo alcuni termini

$$|f(x) \cdot \underline{g(x)} - l_1 \cdot \underline{g(x)} + \underline{l_1 \cdot g(x)} - \underline{l_1} \cdot l_2| = |(f(x) - l_1) \cdot \underline{g(x)} + \underline{l_1} \cdot (g(x) - l_2)|$$

Applichiamo la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |(f(x) - l_1) \cdot g(x) + l_1 \cdot (g(x) - l_2)| &\leq |(f(x) - l_1) \cdot g(x)| + |l_1 \cdot (g(x) - l_2)| \\ &= |(f(x) - l_1)| \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot |(g(x) - l_2)| \end{aligned}$$

Ora dalle definizioni di limite sappiamo che $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|g(x) - l_2| < \varepsilon$

$$|\underline{(f(x) - l_1)}| \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot |\underline{(g(x) - l_2)}| < \underline{\varepsilon} \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot \underline{\varepsilon} = \varepsilon \cdot (|g(x)| + |l_1|)$$

Per valutare la quanto vale $|g(x)|$ facciamo qualche sistemazione algebrica

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - l_2 + l_2| \\ &\leq |g(x) - l_2| + |l_2| \\ &< \varepsilon + |l_2| \end{aligned}$$

Con questo possiamo semplificare

$$\varepsilon \cdot (|g(x)| + |l_1|) < \varepsilon \cdot ((\varepsilon + |l_2|) + |l_1|)$$

Per semplificare possiamo scegliere $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon \cdot ((1 + |l_2|) + |l_1|) = \varepsilon \cdot (1 + |l_2| + |l_1|)$$

Facendo un po' di ordine vediamo che

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| < \varepsilon \cdot (1 + |l_2| + |l_1|)$$

Di Conseguenza abbiamo trovato che $|f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2|$ è sempre minore di ε , appatto di qualche costante proporzionale. Infatti $1 + |l_2| + |l_1|$ è sempre maggiore di 1 e quindi il limite è verificato.

(iii) Per verificare questo limite è necessario verificare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2} \quad (19)$$

Perchè se fosse vero potremmo usare il teorema del prodotto perchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = l_1 \cdot \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad (20)$$

Quindi proviamo a verificare (19) con la definizione di limite

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \left| \frac{l_2 - g(x)}{g(x) \cdot l_2} \right| = \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)| |l_2|}$$

Visto che il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ è verificato per ipotesi, allora sappiamo $\exists I_1$ intorno di x_0 tale che $|g(x) - l_2| < \varepsilon \forall x \in I_1$, e quindi

$$\forall x \in I_1 \quad \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)| |l_2|} < \frac{\varepsilon}{|g(x)| |l_2|}$$

Ora per capire quanto vale $|g(x)|$ dobbiamo dividere i casi con $l_2 > 0$ e $l_2 < 0$, noi ora vedremo la dimostrazione per $l_2 > 0$, l'altro caso è analogo.

Quindi sfruttando il teorema della permanenza del segno noi sappiamo che *exists* I_2 intorno di x_0 tale che $g(x) > 0 \forall x \in I_2$, di conseguenza sarà vero anche che $\forall x \in I_2$ $g(x) > \frac{l_2}{2}$, e quindi anche $\frac{1}{g(x)} < \frac{2}{l_2}$.

Possiamo usare il teorema di intersezione degli intorno per trovare $I_3 = I_1 \cap I_2$ intorno di x_0 tale che

$$\forall x \in I_3 \quad \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)| |l_2|} < \frac{\varepsilon}{|g(x)| |l_2|} = \frac{\varepsilon}{|l_2|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{|l_2|} \cdot \frac{2}{l_2} = \frac{2\varepsilon}{|l_2|^2}$$

E che quindi

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| < \frac{2\varepsilon}{|l_2|^2}$$

Per lo stesso ragionamento fatto prima nel prodotto, abbiamo trovato che il limite è minore di ε appatto di una costante moltiplicativa.

Quindi abbiamo trovato un intervallo I_3 che verifica il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$ e che quindi usando anche il teorema del prodotto, si verifica il teorema della divisione, come visto nel punto (20). Chiaramente visto che $g(x)$ è a denominatore è necessario che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. \square

Teorema 19: Algebra dei Limiti Infiniti (Forme Determinate)

Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A . Allora

(i) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$$

(ii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

(iii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\exists c > 0 : g(x) \leq c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$$

(iv) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\exists c > 0 : 0 < g(x) \leq c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

(v) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $g(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

(vi) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ è positiva definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e
 $\exists c > 0 : g(x) > c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(vii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $f(x)$ è negativa definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e
 $\exists c > 0 : g(x) > c$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

Esercizio 17

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty$$

Dimostrazione. Vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

In più $|\sin(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi lo è anche definitivamente per $x \rightarrow +\infty$, Quindi come nella casistica (i) dell'algebra dei limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sin(x) = +\infty$$

□

Esercizio 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sin(x) + 2) = +\infty$$

Dimostrazione. Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

In più $0 < \sin(x) + 2 \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi lo è anche definitivamente per $x \rightarrow +\infty$, Quindi come nella casistica (iv) dell'algebra dei limiti finiti abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sin(x) + 2) = +\infty$$

□

Esercizio 19

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2} = +\infty$$

Dimostrazione. Se proviamo a calcolare il limite notiamo che il denominatore tende a 0, mentre il numeratore tende a -2 quindi sembra di essere nella casistica (vi), controlliamo se le ipotesi sono verificate.

In primis il teorema richiede che $f(x)$ sia positivo definitivamente per $x \rightarrow -2$, è questo è verificato sempre, infatti $(x+2)^2 > 0 \implies \forall x \neq -2$. In più il numeratore (x) è limitato definitivamente per $x \rightarrow -2$, pertanto il teorema è applicabile e quindi

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2} = +\infty$$

N.B. Se il limite fosse stato $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+2}$ il teorema non sarebbe applicabile, perchè $x+2$ non è positiva definitivamente per $x \rightarrow -2$, perchè un qualsiasi intorno dalla parte sinistra sarebbe negativo e invece la parte destra sarebbe positiva. Pertanto non si può applicare il teorema (vi). Per risolverlo è necessario calcolare o il limite destro o sinistro,

infatti in quei intorno $(x + 2)$ è positivo definitivamente. Quindi $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x + 2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x + 2} = -\infty$. E da questo notiamo che $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x + 2}$ perchè il limite destro e sinistro sono diversi. \square

Definizione 9: Forme Indeterminate

Si dicono **Forme Indeterminate** tutti i limiti che hanno come risultato

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] & \left[\frac{0}{0} \right] & [\infty \cdot 0] \\ [+ \infty - \infty] & [\infty^0] & [1^0] \end{array}$$

E il risultato effettivo del limite non si può determinare subito, ma sono necessarie altre operazioni.

N.B. Pertanto due limiti che hanno inizialmente la stessa forma indeterminata posso avere limiti diversi, vediamo degli esempi.

Esercizio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$$

Dimostrazione. Se proviamo a calcolare il limite vediamo che il numeratore tende a $+\infty$ e lo stesso si può dire per il denominatore. Quindi caschiamo nella forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Pertanto dobbiamo fare delle manipolazioni, proviamo raccogliendo il grado maggiore (x^2) al numeratore e lo stesso facciamo anche al denominatore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}$$

Notiamo che il termine x^2 si può semplificare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Ora possiamo calcolare il limite infatti i termini $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0 quando $x \rightarrow \infty$ (questo grazie alle forme determinate) e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0} = 2$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = 2$$

Quindi noi siamo partiti con una forma indeterminata e siamo arrivati a una soluzione che è 2. Ora vediamo che un altro limite sempre con la stessa forma indeterminata, ma avremo un altro risultato. \square

Esercizio 21

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1}$$

Dimostrazione. Notiamo subito che esce la stessa forma indeterminata: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e quindi proviamo a fare la stessa tecnica di prima

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Ora come prima i termini con la x a denominatore tendono a 0, però a numeratore è rimasto una x che tende a $+\infty$ quindi il numeratore, per la proprietà (iii) delle forme determinate, tende a $+\infty$, il denominatore invece tende a 1, e quindi per la proprietà (iv) il limite tende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 7x - 1} = +\infty$$

N.B. inizialmente anche questo limite era della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ma abbiamo avuto un risultato diverso da prima, e quindi quando ci troviamo davanti una forma indeterminata sappiamo che dobbiamo rimaneggiare i termini. \square

Esercizio 22

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

Dimostrazione. Proviamo a calcolare il limite ma notiamo subito che viene fuori una forma indeterminata della forma $[+\infty - \infty]$ e quindi dobbiamo fare dei rimaneggiamenti. Ricordandoci la formula della somma per differenza $((A+B)(A-B) = A^2 - B^2)$ possiamo moltiplicare e dividere per il binomio coniugato

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \end{aligned}$$

Dopo tutti questi maneggiamenti sembra che abbiamo solo che complicato il limite, però li abbiamo fatto diventare in un limite nella forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ che però abbiamo già visto come risolvere, infatti basta che raccogliamo il grado maggiore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x}$$

Ora per "tirare fuori" x^2 dalla radice, dobbiamo ricordarci di mettere il modulo (perchè $\sqrt{x^2} = |x|$), però dato che noi stiamo analizzando per $x \rightarrow +\infty$ siamo sicuri che $x > 0$ (per definizione di limite) e pertanto $|x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 23

Dato un generico polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ dove a_i sono i coefficienti del polinomio e n il grado del polinomio. Con $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$$

Dimostrazione. Il limite è nella forma $[+\infty - \infty]$ e quindi procediamo raccogliendo il grado maggiore (x^n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n \right)$$

Ora possiamo calcolare il limite infatti tutti i termini dentro le parentesi infatti tendono tutti a 0. Quindi il termine dentro le parentesi tende a a_0 e che quindi moltiplicato per $x^n \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$. Se invece $a_n < 0$ il limite tendeva a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n \right) = +\infty$$

Quindi con questo iniziamo a capire che nei polinomi quello che ci interessa quando $x \rightarrow \infty$ è il termine con il grado più alto (x^n), infatti per risolvere questo esercizio i termini più piccoli di x^n è come se li avessimo trascurati. Infatti è vera la seguente equazione $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$ per qualsiasi polinomio $P(x)$ e $\forall a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

Teorema 20: Cambio di Variabile

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione in $f(A) \cap B$ allora se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, con y_0 punto di accumulazione in B e se è vera almeno una delle due proposizioni

- $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ (continuità di $g(x)$)

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

Esercizio 24

Ora vediamo perchè è fondamentale che almeno una dei due requisiti sia vero, proviamo con un controesempio. Infatti sia $f(x) = 5$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 5 \\ 1 & \text{se } x = 5 \end{cases}$ e vediamo subito che nessuna delle due proposizioni è vera.

Dimostrazione. Infatti il limite effettivo, senza usare il teorema del cambio di variabile è

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(5) = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

Invece se proviamo a usare il cambio di variabile, dobbiamo prima calcolare y_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 5 \quad [= y_0]$$

Ora il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 5} g(y) = 2$$

Quindi usando solo le funzioni composte il limite è uscito 1, mentre con il teorema del cambio di variabile è venuto fuori 2, cosa impossibile per il teorema di unicità del limite e pertanto il teorema del cambio di variabile non si può applicare in questo esercizio, proprio perchè mancavano i criteri richiesti dal teorema stesso.

□

Esercizio 25

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Dimostrazione. Vediamo che assomiglia molto al limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ l'unica cosa che cambia è che abbiamo x^2 anzichè x , quindi proviamo a cambiare la variabile x^2 con y , quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad [= y_0]$$

Visto che sono valide tutte le condizioni del teorema del cambio di variabile, infatti $x^2 \neq 0$ in un intorno di 0. Mentre l'altra condizione non è valida infatti non si può calcolare in 0 la funzione $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$, però non ci interessa perchè il teorema richiede almeno una delle due proposizioni.

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

□

Esercizio 26

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2-x}}$$

Dimostrazione. Al denominatore abbiamo una forma del tipo $[+\infty - \infty]$, quindi proviamo a vedere come si comporta quel denominatore per $x \rightarrow +\infty$. Per calcolarlo possiamo usare la proprietà dei polinomi che abbiamo visto nell'esercizio dei polinomi, infatti basta tenere il grado maggiore (x^2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad [= y_0]$$

Vediamo che il denominatore ha limite e quindi possiamo fare il cambio di variabile e possiamo applicarlo perchè è valida la prima condizione, infatti $x^2 - x \neq +\infty$ sempre, mentre la seconda non può mai essere vera perchè non possiamo calcolare $g(+\infty)$, perchè ricordiamo che $\pm\infty$ non sono punti di nessun dominio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{y}}$$

Ora possiamo riutilizzare il teorema del cambio di variabile, visto che non siamo ancora in un limite noto, e quindi vediamo come si comporta la frazione all'esponente

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0 \quad [= z_0]$$

Visto che ha limite e rispetta sempre il primo criterio e anche il secondo del teorema del cambio di variabile, allora possiamo riapplicare il teorema e finalmente calcolare il limite.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{y}} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2-x}} = 1$$

□

Teorema 21: Limite di funzioni Monotone

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x)$ è monotona in I

- Se $f(x)$ è monotona crescente allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(A \cap I \cap (x_0, +\infty))\}$$

- Se $f(x)$ è monotona decrescente allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (x_0, +\infty))\}$$

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione del caso $f(x)$ è crescente e per il limite sinistro, gli altri casi sono analoghi.

Per ipotesi chiaramente supponiamo che esista $S = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$, quindi per definizione di superiore, sappiamo che il superiore (S) è più grande di qualsiasi elemento nell'insieme (cioè $f(x)$), quindi

$$f(x) \leq S \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0) \quad (21)$$

Ora usando la caratterizzazione degli estremi e sappiamo che

$$f(\hat{x}) > S - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \hat{x} \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

Poi, per monotonia della funzione sappiamo che se $\hat{x} < x$ allora

$$f(\hat{x}) < f(x) \implies S - \varepsilon < f(\hat{x}) < f(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (22)$$

Ora combinando le informazioni (21) e (22) sappiamo che

$$S - \varepsilon < f(x) < S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

Visto che $\varepsilon > 0$ sappiamo che $S < S + \varepsilon$ e quindi

$$S - \varepsilon < f(x) < S < S + \varepsilon$$

$$S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \cap I \cap (-\infty, x_0)$$

E questa non è altro che la definizione di limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(A \cap I \cap (-\infty, x_0))\}$$

□

Esercizio 27

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

Dimostrazione. Questo è vero proprio perchè se $a > 1$ la funzione a^x è monotona crescente, se $a = 1$ è costante e invece se $a < 1$ la funzione è monotona decrescente, quindi si può sempre applicare il teorema. \square

Esercizio 28

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 > 0$$

Dimostrazione. Possiamo fare lo stesso ragionamento del per il logaritmo, infatti se $a > 1$ la funzione $\log_a x$ è monotona crescente, se $a = 1$ è costante e invece se $a < 1$ la funzione è monotona decrescente, quindi si può sempre applicare il teorema. L'unica cosa che cambia dall'esercizio precedente è che x_0 deve essere positivo, perchè il dominio di $\log_a x$ è $\forall x > 0$, e di conseguenza qualsiasi punto $x_0 < 0$ non è punto di accumulazione e pertanto non può essere calcolato il limite in quel punto. \square

Esercizio 29

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 \neq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Se $\alpha > 0$ avremo una potenza che è sempre monotona crescente per $x_0 > 0$, mentre se α è pari allora la funzione sarà decrescente per $x_0 < 0$ mentre se α è dispari la funzione è crescente anche per $x < 0$. Se $\alpha = 0$ allora avremo una funzione costante e se $\alpha < 0$ la funzione sarà del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ che sarà monotona decrescente. \square

Esercizio 30

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Questo è un caso particolare dell'esercizio precedente, infatti se $x \rightarrow 0^+$ allora con $\alpha > 0$ avremo una forma del tipo 0^α che chiaramente tende a 0, mentre se $\alpha < 0$ la funzione diventa $\frac{1}{x^{|\alpha|}}$ che fa tendere il denominatore a 0^+ e che quindi fa tendere la funzione a $+\infty$. \square

Teorema 22: Limite di funzioni Monotone caso Infinito

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di $\pm\infty$ tale che $f(x)$ è monotona in I

- Se $f(x)$ è monotona crescente allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup\{f(A \cap I)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf\{f(A \cap I)\}$$

- Se $f(x)$ è monotona decrescente allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf\{f(A \cap I)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup\{f(A \cap I)\}$$

Esercizio 31

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 32

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 33

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Esercizio 34

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Teorema 23: Potenza di Funzioni

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione in A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

Dimostrazione. Per calcolare questo limite possiamo usare la continuità dell'esponenziale. Perchè il limite lo possiamo calcolare come

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

ora con il cambio di variabile possiamo fare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \log(f(x)) = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\log(f(x)^{g(x)})} = \lim_{y \rightarrow y_0} e^y = e^{y_0}$$

□

Esercizio 35

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\log(x+1)}}$$

Dimostrazione. Usiamo il ragionamento dell'esercizio precedente, con il caso $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{\log(x+1)}$

$$x^{\frac{1}{\log(x+1)}} = e^{\log\left(x^{\frac{1}{\log(x+1)}}\right)} = e^{\frac{1}{\log(x+1)} \cdot \log(x)} = e^{\frac{\log(x)}{\log(x+1)}}$$

ora calcoliamo il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x+1)}$$

Questo limite è della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e pertanto proviamo a raggruppare come nei polinomio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x) + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log(x)}} \end{aligned}$$

Ora il termine $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tende a 0, invece $\log(x)$ tende a $+\infty$, quindi complessivamente la frazione tende a 0 e quindi possiamo calcolare il limite e sostituirlo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log(x)}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \implies \lim_{y \rightarrow 1} e^y = e^1 = e$$

□

Definizione 10: Numero di Nepero (e)

$$e := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Esercizio 36

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Dimostrazione. Per vedere come tende la funzione a $-\infty$ possiamo provare usando il cambio di variabile con $y = -x$ per provare a ricondurci alla definizione del numero di Nepero

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y}$$

Ora racciamo qualche riarrangiamento

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{-y+1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

Il denominatore $y-1$ è molto scomodo, quindi proviamo a sostituirlo con $z = y-1$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

Per sistemare l'esponente basta usare la proprietà degli esponenti e l'algebra dei limiti per il prodotto

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

Il primo limite tende a e per la definizione di numero di Nepero, mentre nel secondo limite il termine $\left(\frac{1}{z}\right)$ tende a 0 e quindi complessivamente il limite tende a 1

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e \cdot 1 = e$$

Quindi notiamo che il limite tende ad e anche per $x \rightarrow -\infty$, pertanto possiamo modificare la definizione con

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

□

Esercizio 37

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Dimostrazione. Per risolvere questo limite dobbiamo usare un cambio di variabile con $y = \frac{1}{x}$ però dobbiamo stare attenti infatti per valori di $x \rightarrow 0^+ \implies y \rightarrow +\infty$ mentre $x \rightarrow 0^- \implies y \rightarrow -\infty$ quindi dobbiamo studiare in due casi separati. Indichiamo con (i) per il caso $y \rightarrow +\infty$ e (ii) per il caso $y \rightarrow -\infty$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Vediamo che nonostante abbiamo dovuto dividere in due casistiche separate il limite tende allo stesso valore, e che quindi per il teorema della relazione tra limite e limite destro/sinistro sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

□

Definizione 11: Limiti Notevoli

Si definiscono Limiti Notevoli tutti i limiti della seguente forma. (Le dimostrazione le vediamo subito dopo)

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ (Già dimostrato)}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$(vi) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Esercizio 38

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione. Si vede subito che è una forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ e però non sembra riconducibile a nessun limite tra quelli che abbiamo visto, però proviamo a "trasformare" il coseno in seno, visto che del seno sappiamo un limite notevole (i). Per farlo dobbiamo ricordarci la formula fondamentale della trigonometria: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \end{aligned}$$

Ora il primo termine, visto che è il limite notevole (i), tende a 1, mentre il secondo tende a $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = (1)^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 39

$$\frac{\tan(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Questo è molto semplice infatti basta usare la definizione di tangente ($\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

□

Esercizio 40

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x$$

Dimostrazione. Questo chiaramente assomiglia molto alla definizione di e , soltanto che c'è un α di troppo. Possiamo provare a sostituire ma notiamo una cosa, infatti se vogliamo sostituire $\alpha y = x$ dobbiamo distinguere i casi $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$. Studiamo i singoli casi e numeriamoli rispettivamente (i), (ii), (iii)

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^\alpha = (e)^\alpha = e^\alpha$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1^x = 1 \quad [= e^0]$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha = (e)^\alpha = e^\alpha$$

□

Esercizio 41

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Per risolvere questo basta usare le proprietà dei logaritmi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log(e) = 1$$

□

Esercizio 42

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dimostrazione. Questo invece è un pò più complicato, infatti non abbiamo visto limiti di questo. Però possiamo provare con una sostituzione $y = \log(x)$ e vediamo che succede, ricordandoci che se $x \rightarrow 0$ allora $y \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{\log(y)} - 1}{\log(y)} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y - 1}{\log(y)}$$

Ora assomiglia al limite dell'esercizio precedente, soltanto che all'interno dell'logaritmo abbiamo y e non $y+1$, quindi per farlo "sbucare" fuori possiamo fare un'altra sostituzione $z = y + 1$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y - 1}{\log(y)} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{\log(z+1)}$$

Adesso il limite è riconducibile a limite notevole (v)

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{\log(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{\log(z+1)}{z}} = \frac{1}{1} = 1$$

□

Definizione 12: Funzioni Asintotiche

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione in A e se

- $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

$$\bullet \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Allora diciamo che " $f(x)$ è asintotica per $x \rightarrow x_0$ a $g(x)$ " e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow x_0$$

Esempio 1

$$\sin(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Dai limiti notevoli sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$, sappiamo inoltre che $\sin(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow 0$ e lo stesso vale per $x \neq 0$. Pertanto possiamo dire che

$$\sin(x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$

N.B. questo ragionamento lo possiamo fare per tutti i limiti notevoli, quindi sarà vero anche $\log(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, $\tan(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, $e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$ (che lo possiamo scrivere anche come $e^x \sim 1+x$). \square

Esempio 2

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

Dimostrazione. Per il limite notevole del coseno dobbiamo fare qualche ragionamento in più, infatti il limite fa come risultato $\frac{1}{2}$ e non 1, quindi non possiamo dire nulla sull'asintoticità, ma possiamo fare qualche maggeggio, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Dopo questo riarrangiamento possiamo dire che

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

Che possiamo riscrivere come

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

\square

Teorema 24: Proprietà delle Funzioni Asintotiche

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, \hat{f}, \hat{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A
(i) se $f \sim g$ allora è vera una delle due proposizioni

- f e g hanno entrambe limite in x_0
- f e g entrambe non hanno limite in x_0

(ii) se $f \sim g$ e $h \sim g$ per $x \rightarrow x_0$ allora è vero che $f \sim h$ per $x \rightarrow x_0$

(iii) se $f \sim \hat{f}$ per $x \rightarrow x_0$, $g \sim \hat{g}$ per $x \rightarrow x_0$ allora sono vere entrambe le equivalenze:

$$f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g} \qquad \frac{f}{g} \sim \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$$

Dimostrazione. Segue la dimostrazione del punto (ii) e (iii).

(ii) Noi sappiamo che $f \sim g$ e che $g \sim h$ ma vogliamo vedere se è vero che $f \sim h$, e se fosse vera quest'ultima equivalenza allora dovrebbe essere vero che

$$f \sim h \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$$

Quindi proviamo a vedere se il limite fa 1, e per farlo dividiamo e moltiplichiamo per $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\frac{h(x)}{g(x)}}$$

Ma visto che per ipotesi $f \sim g$ e $g \sim h$, allora i rapporti varranno 1, e pertanto il teorema è verificato

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\frac{h(x)}{g(x)}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

(iii) Riscriviamo $f \cdot g \sim \hat{f} \cdot \hat{g}$ usando la definizione di funzione asintotica

$$f(x) \cdot g(x) \sim \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)} = 1$$

Quindi per dimostrare il teorema basta controllare che il limite faccia 1, ma è molto semplice infatti se spezziamo la frazione e grazie alle ipotesi ($f \sim \hat{f}$ e $g \sim \hat{g}$) allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$

Il ragionamento è analogo per $\frac{f}{g} \sim \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$. □

Teorema 25: Gerarchia degli Infiniti

Siano $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ allora sono vere

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x)$$

Dimostrazione. Si può notare come sia un limite nella forma $[0 \cdot \infty]$ e quindi dobbiamo fare degli riarrangiamenti. Partimo portando il termine x a denominatore.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$$

Ora possiamo fare una sostituzione con $y = \frac{1}{x}$, e quindi se $x \rightarrow 0^+$ allora $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y}$$

Usando le proprietà dei logaritmi abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(\frac{1}{y})}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(y^{-1})}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log(y)}{y}$$

E che quindi con la gerarchia degli Infiniti

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log(y)}{y} = 0$$

□

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

Dimostrazione. Per svolgere questo limite possiamo usare la regola delle potenze di funzioni per riarrangiarla e possiamo usare il limite dell'esempio precedente per calcolarlo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log(x)} = e^0 = 1$$

□

4 Simboli di Landau

Definizione 13: o-piccolo

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Allora diciamo che " $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ " e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Ora seguiranno alcuni esempi per familiarizzare con il simbolo

Esempio 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0 \iff x^3 = o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0 \iff \sin^2(x) = o(x) \quad x \rightarrow 0$$

N.B. anche se $\sin^2(x) = o(x)$ e $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ **NON** possiamo dire che $\sin^2(x) = x^2$. Anche perché $\sin^2(x)$ e x^2 sono due cose separate. Infatti con la nozione di o-piccolo sappiamo che una funzione è più grande di un'altra, ma se due funzioni sono entrambe o-piccolo di una funzione, non possiamo dire nulla delle due funzioni.

Esempio 7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \iff x = o(x^2) \quad x \rightarrow +\infty$$

Esempio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \iff x = o(1) \quad x \rightarrow 0$$

Questo perché possiamo riscrivere x come $\frac{x}{1}$ e per questo possiamo scrivere $x = o(1)$. Difatto in generale se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ allora possiamo dire che $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$.

Esempio 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \iff x^3 = o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

Teorema 26: Proprietà o-piccoli

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

$$(ii) \quad o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$(iii) \quad o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$(iv) \quad |o(f(x))|^\alpha = o(|f(x)|^\alpha) \quad x \rightarrow x_0 \quad \forall \alpha > 0$$

Se $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora

$$(v) \quad o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Se, oltre a $g(x) \neq 0$, è vero che $|g(x)|$ è limitata definitivamente allora vale

$$(vi) \quad o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. (i) sia una qualsiasi funzione allora $g(x) = o(f(x))$, allora per definizione di o-piccolo sappiamo che

$$g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Ora però possiamo sostituire $g(x)$ con $o(f(x))$ visto che è vera per ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

E con questo abbiamo verificato il primo teorema.

(ii) Sia $g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ allora proviamo a vedere se è vero il teorema, quindi usiamo la definizione di o-piccolo

$$g_1(x) \pm g_2(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x) \pm g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} \pm \frac{g_2(x)}{f(x)}$$

Ora visto che $g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ allora se vengono divise per $f(x)$ tenderanno a 0 e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g_1(x)}{f(x)} \right) \pm \left(\frac{g_2(x)}{f(x)} \right) = 0 \pm 0 = 0$$

E quindi il teorema è verificato visto che è venuto proprio 0.

N.B. anche $o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x))$ e NON si eliminano gli o-piccoli.

(iii) Come nel punto (ii), basta che controlliamo se è vero usando la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot o(g(x))}{f(x) \cdot g(x)}$$

Ora possiamo fare degli riarrangiamenti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot o(g(x))}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

Ora usiamo la proprietà (i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

E quindi il teorema è verificato.

(iv) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$|o(f(x))|^\alpha = o(|f(x)|^\alpha) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|o(f(x))|^\alpha}{|f(x)|^\alpha}$$

Usiamo le proprietà dei moduli e delle potenze e la proprietà (i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|o(f(x))|^\alpha}{|f(x)|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{o(f(x))}{f(x)} \right|^\alpha = 0^\alpha = 0$$

L'ultimo passaggio è valido perchè abbiamo definito $\alpha > 0$ e quindi non reca alcun problema l'esponente. Il modulo serve solo per poter farlo anche di radici, così è valido anche per radici negative.

(v) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x) \cdot g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$$

Notiamo che il termine $g(x)$ si può semplificare e poi possiamo usare la proprietà (i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$$

(vi) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x)) \cdot g(x) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x)) \cdot g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot g(x)$$

Ora notiamo che il termine $\frac{o(f(x))}{f(x)}$ tende a 0 per proprietà (i), quindi l'unico caso a cui dobbiamo stare attenti è quando $h(x)$ tende a ∞ , perchè qualora fosse avremmo una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$, però per ipotesi noi sappiamo che $|g(x)|$ è limitata, allora possiamo usare la proprietà (ii) dell'algebra dei limiti finiti per scoprire che tende a 0, grazie al fatto che $|g(x)|$ è limitata

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} \cdot g(x) = 0$$

Pertanto il teorema è verificato. □

Teorema 27: Relazione tra o-piccolo e Asintoticità

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow x_0 \implies f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. Usando la definizione di funzione asintotica sappiamo che

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ora possiamo portare 1 dall'altra parte e facciamo denominatore comune

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right] = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

A questo punto possiamo usare la definizione di o-piccolo, visto che abbiamo un limite che tende a 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$$

Facendo qualche riarrangiamento abbiamo

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \implies f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

□

Ora vediamo l'applicazione di questo teorema sui limiti notevoli

Esempio 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \implies \sin(x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Per il limite del coseno usiamo lo stesso trick che abbiamo usato l'ultima volta, ovvero di dividere per $\frac{1}{2}$ in modo che ora il limite tenda a 1

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \implies 1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \implies \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

N.B. non ho scritto $o(\frac{1}{2}x^2)$ perchè ho usato la proprietà (vi) delle proprietà degli o-piccolo, e lo abbiamo potuto applicare perchè la funzione $g(x) = \frac{1}{2}$ è sempre limitata.

Esempio 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \implies \tan(x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \implies \log(1+x) = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 14

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \implies e^x - 1 = x + o(x) \implies e^x = 1 + x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

Teorema 28: Cambio di variabile con o-piccolo

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, f, g_1, g_2 a valori reali tali che $g_1 \circ f, g_2 \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e supponiamo che

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
- $g_1(y) = g_2(y) + o(g_2(y)) \quad y \rightarrow y_0$
- $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Allora

$$g_1(f(x)) = g_2(f(x)) + o(g_2(f(x))) \quad y \rightarrow y_0$$

Esempio 15

Proviamo a fare qualche applicazione pratica di questo teorema, per esempio proviamo con $f(x) = x^2$, $g_1(y) = \sin(y)$ e $x_0 = 0$

In primis dobbiamo controllare che esista il limite di $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad [= y_0]$$

Ora proviamo a sviluppare $g_1(y)$, e possiamo usare proprio lo sviluppo che abbiamo scoperto prima ($\sin(y) = y + o(y)$) per $y \rightarrow 0$, seguendo la notazione del teorema, $g_2(y) = y$. Ora basta controllare se $x^2 \neq 0$ definitivamente ed effettivamente lo è visto che $x^2 > 0 \forall x \neq 0$ e quindi possiamo applicare il teorema e scopriamo che

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

Esempio 16

Ora proviamo a fare un altro esempio con $f(x) = \sin(x)$, $g_1(y) = e^y$ e $x_0 = 0$, vediamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \quad [= y_0]$$

Sappiamo in oltre lo sviluppo di $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$, in oltre sappiamo che $\sin(x) \neq 0$ in un intorno di 0 e di conseguenza possiamo applicare il teorema e scopriamo che

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + o(\sin(x)) \quad x \rightarrow 0$$

Teorema 29: Principio di Sostituzione

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, \hat{f}, \hat{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e $g(x) \neq 0, \hat{f}(x) \neq 0, \hat{g}(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e se

$$f(x) = \hat{f}(x) + o(\hat{f}(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$g(x) = \hat{g}(x) + o(\hat{g}(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

Dimostrazione. Per capire quanto vale $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ basta che facciamo una sostituzione con le ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x) + o(\hat{f}(x))}{\hat{g}(x) + o(\hat{g}(x))}$$

Ora possiamo raccogliere a numeratore $\hat{f}(x)$ e a denominatore $\hat{g}(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x) + o(\hat{f}(x))}{\hat{g}(x) + o(\hat{g}(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}}$$

Ora possiamo dividere per l'algebra dei limiti e possiamo usare la proprietà (i) degli o-piccoli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 + \frac{o(\hat{f}(x))}{\hat{f}(x)}}{1 + \frac{o(\hat{g}(x))}{\hat{g}(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}$$

□

Questo teorema è molto forte infatti vediamo un esercizio dove lo applichiamo

Esercizio 43

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1}$$

Per applicare il teorema dobbiamo trovare quelle equivalenze con gli o-piccoli, e infatti le conosciamo sia per $1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ che per $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$, e di conseguenza possiamo calcolare il limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Questo esercizio si sarebbe potuto svolgere anche con i limiti notevoli ma avrebbe richiesto molti calcoli in più.

Teorema 30: Ulteriori proprietà degli o-piccoli

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(vii) \quad o(o(f(x))) = o(f(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$(viii) \quad o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. (vii) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(o(f(x))) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)}$$

Per calcolare e controllare che il limite faccia 0, dobbiamo moltiplicare e dividere per $o(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{f(x)} \cdot \frac{o(f(x))}{o(f(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)}$$

Il secondo termine $(\frac{o(f(x))}{f(x)})$ per la proprietà (i) degli o-piccoli sappiamo che tende a 0, e lo stesso vale per il primo termine, infatti la regola generale per questi casi è $\frac{o(f(x))}{f(x)} \rightarrow 0$ però se scelgo $f(x) = o(g(x))$, allora il limite diventa $\frac{o(o(g(x)))}{o(g(x))} \rightarrow 0$, pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))} \cdot \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

E visto che il limite viene 0, la proprietà è verificata.

(viii) Usiamo la definizione di o-piccolo

$$o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)}$$

Possiamo moltiplicare e dividere per $f(x) + o(f(x))$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x)} \cdot \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x) + o(f(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \frac{f(x) + o(f(x))}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) \end{aligned}$$

Possiamo usare lo stesso ragionamento usato per il punto (vii) dicendo che $\frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(f(x) + o(f(x)))}{f(x) + o(f(x))} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) = 0 \cdot (1 + 0) = 0$$

Di conseguenza il teorema è verificato. □

Esercizio 44

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - e^{-x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$$

Dimostrazione. Per risolvere questo esercizio dobbiamo usare gli sviluppi degli o-piccoli, in questo esercizio ci basta quello di e^x e di $1 - \cos(x)$ e quindi sappiamo che

$$e^{-x} = 1 + -x + o(x)$$

$$1 - \cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + o((\sqrt{x})^2)$$

Semplificando lo sviluppo del coseno abbiamo che $1 - \cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x + o(x)$, non serve mettere il modulo perchè $x \rightarrow 0^+$ e quindi x è positivo. Ora però dobbiamo capire quanto vale $e^{\sin(x)}$ e intanto usiamo lo sviluppo di e^x

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + o(\sin(x))$$

Però il seno lo possiamo sviluppare a sua volta come $\sin(x) = x + o(x)$ e di conseguenza

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x) + o(x + o(x))$$

E quindi grazie alla proprietà (viii) sappiamo che possiamo riscrivere $(o(x + o(x)))$ come $o(x)$

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x) + o(x)$$

Poi per la proprietà (ii) sappiamo che

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + o(x)$$

Ora possiamo sostituire gli sviluppi nell'esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - e^{-x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} = \frac{1 + x + o(x) - (1 - x + o(x))}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)}$$

Per il principio di sostituzione sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Se il numeratore fosse stato $e^{\sin(x)} - e^x$, allora dopo lo sviluppo il numeratore sarebbe diventato $o(x)$ e quindi la frazione sarebbe stata $\frac{o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)}$ e quindi dividendo tutto per x avremmo avuto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}$$

E che quindi per la proprietà (i) avremmo avuto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 0} = 0$$

□

Esercizio 45

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(\sin(x))} - 1}{e^{\sin(\tan(x))} - 1}$$

Dimostrazione. Iniziamo analizzando il numeratore, vediamo che possiamo fare lo sviluppo di $e^x - 1$

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = \tan(\sin(x)) + o(\tan(\sin(x)))$$

Adesso facciamo lo sviluppo di $\tan(\sin(x)) = \sin(x) + o(\sin(x))$

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = \sin(x) + o(\sin(x)) + o(\sin(x) + o(\sin(x)))$$

Possiamo usare la proprietà (viii) e (ii)

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = \sin(x) + o(\sin(x)) + o(\sin(x)) = \sin(x) + o(\sin(x))$$

Sviluppiamo anche il seno

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = x + o(x) + o(x + o(x))$$

Ripetendo le proprietà (viii) e (ii)

$$e^{\tan(\sin(x))} - 1 = x + o(x) + o(x) = x + o(x)$$

Sistemato il numeratore, dobbiamo fare gli stessi passaggi al denominatore, ma invertendo il passaggio dello sviluppo del seno con quello della tangente

$$\begin{aligned} e^{\sin(\tan(x))} - 1 &= \sin(\tan(x)) + o(\sin(\tan(x))) \\ &= \tan(x) + o(\tan(x)) + o(\tan(x) + o(\tan(x))) \\ &= \tan(x) + o(\tan(x)) + o(\tan(x)) \\ &= \tan(x) + o(\tan(x)) \\ &= x + o(x) + o(x + o(x)) \\ &= x + o(x) + o(x) \\ &= x + o(x) \end{aligned}$$

E quindi sostituendo questi sviluppi nel limite abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(\sin(x))} - 1}{e^{\sin(\tan(x))} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

□

Esercizio 46

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x) \cos(3x^2)}$$

Dimostrazione. In primis notiamo che il termine $\cos(3x^2) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, pertanto possiamo staccarlo dal limite e calcolarlo a parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x) \cos(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x)} \cdot 1$$

Dopo questo, vediamo che abbiamo un $\log(1 + x)$ e $\tan(x)$ che possiamo sviluppare

$$\log(1 + x \sin^2(2x)) = x \sin^2(2x) + o(x \sin^2(2x))$$

Facciamo lo stesso per $\sin(2x) = 2x + o(x)$

$$\log(1 + x \sin^2(2x)) = x \cdot (2x + o(x))^2 + o(x \cdot (2x + o(x))^2)$$

ora capiamo il come calcolare il termine $(2x + o(x))^2$ infatti proviamo a sviluppare il quadrato di binomio e troviamo che $4x^2 + 4x \cdot o(x) + (o(x))^2$, per la proprietà (iv) possiamo riscrivere $(o(x))^2$ come (o^2) , mentre il termine $4x \cdot o(x)$ possiamo usare la proprietà (iii) per portare $4x$ dentro l'o-piccolo. Quindi il termine diventa $4x^2 + o(4x^2)$. Di conseguenza il logaritmo diventa, usando le proprietà (iii) e (viii)

$$\begin{aligned} \log(1 + x \sin^2(2x)) &= x \cdot (4x^2 + o(x^2)) + o(x \cdot (4x^2 + o(x^2))) \\ &= 4x^3 + o(4x^3) + o(4x^3 + o(4x^3)) \\ &= 4x^3 + o(4x^3) + o(4x^3) \\ &= 4x^3 + o(4x^3) \end{aligned}$$

Per la tangente facciamo gli stessi procedimenti

$$\begin{aligned} \tan^3(x) &= (x + o(x))^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot o(x) + 3x \cdot (o(x))^2 + (o(x))^3 \\ &= x^3 + o(3x^3) + 3x \cdot o(x^2) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) + o(3x^3) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

E quindi sostituendo gli sviluppi abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + o(4x^3)}{4(x^3 + o(x^3))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + o(4x^3)}{4x^3 + o(4x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{4x^3} = 1$$

□

Con l'esercizio precedente abbiamo scoperto che

Teorema 31: Binomio con o-piccolo

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A allora

$$(f(x) + o(f(x)))^n = f^n(x) + o(f^n(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema dobbiamo usare il binomiale di Newton e quindi

$$(f(x) + o(f(x)))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k$$

Estraiamo il primo termine con $k = 0$ visto che in quel caso $o(f(x))$ avrebbe esponente 0 e quindi non ci sarebbe

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k = f^n(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k$$

Ora possiamo usare le proprietà (iv) per poter portare dentro l'esponente nel o-piccolo, poi la proprietà (iii) per portare il termine $[f(x)]^{n-k}$ dentro al o-piccolo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot [o(f(x))]^k &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [f(x)]^{n-k} \cdot o(f^n(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o([f(x)]^{n-k} \cdot f^k(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o([f(x)]^{n-k+k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o(f^n(x)) \end{aligned}$$

Poi visto che $\binom{n}{k}$ è una costante la possiamo togliere per la (vi), e poi dato che dentro la sommatoria non ci sono più termini rispetto a k possiamo calcolarla ($\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$)

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot o(f^n(x)) = \sum_{k=1}^n o(f^n(x)) = n \cdot o(f^n(x))$$

Ora possiamo usare di nuovo la proprietà (vi) per togliere n e così il teorema è verificato

$$n \cdot o(f^n(x)) = o(f^n(x))$$

$$(f(x) + o(f(x)))^n = f^n(x) + o(f^n(x))$$

□

Esercizio 47

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow +\infty$, discutere il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1}$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Visto che sappiamo che $f(x) = o(x^2)$, l'unica informazione che sappiamo è che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Pertanto dividiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ora il numeratore tende a 0, i termini $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$, quindi ci manca da capire il termine $x^{\alpha-2}$. Per questo dobbiamo dividere in 3 casi.

Se $\alpha > 2$ allora $\alpha - 2 > 0$ e quindi $x^{\alpha-2} \rightarrow +\infty$ e quindi il denominatore complessivamente tende a $+\infty$ e pertanto di conseguenza il limite tende a 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{+\infty + 0 + 0} = \left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$$

N.B. scrivere $\left[\frac{0}{+\infty} \right]$ è tecnicamente sbagliato perchè ∞ non è un numero ma un simbolo, e pertanto non si possono fare le operazioni con quel numero. L'ho scritto soltanto per enfatizzare il concetto di limite ma non è tecnicamente corretto scriverlo. Volendo essere più precisi, avremmo dovuto usare l'algebra dei limiti infiniti.

Se $\alpha = 2$ allora il termine $x^{\alpha-2} = x^{2-2} = 1$ e quindi il limite diventare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

Se $\alpha < 2$ allora possiamo il termine $x^{\alpha-2} \rightarrow 0$ dato che l'esponente sarebbe negativo e quindi andrebbe a denominatore. E quindi il limite diventerebbe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{x^{\alpha-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0 + 0 + 0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

In questo caso siamo incappati in una forma indeterminata, e che quindi con i dati che abbiamo a nostra disposizione non possiamo dire nulla in merito al limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 2 \\ \text{Non Definibile} & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

□

Definizione 14: O-grande

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A . Se esiste $I \subseteq \mathbb{R}$ intorno di x_0 $\exists M > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in A \cap I \setminus \{x_0\}$$

Allora diciamo che " $f(x)$ è un O-grande di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ " e lo indichiamo con il simbolo

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Esempio 17

Sia $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ e possiamo vedere che

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Visto che $|\sin(x)| \leq 1$. Di conseguenza possiamo prendere un qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e sapremo che

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x) \quad x \rightarrow x_0$$

Esercizio 48

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A . Allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0 \implies f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che $f(x) = o(g(x))$, che usando la definizione di o-piccolo sappiamo che

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Pertanto usando la definizione di limite sappiamo che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di x_0 . Ora usiamo le proprietà dei moduli

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon \implies \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \varepsilon \implies |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

Però la definizione O-grande richiedeva che ci fosse almeno un $M > 0$ tale che $|f(x)| < M|g(x)|$, però con la definizione di limite abbiamo trovato che vale $\forall \varepsilon > 0$ e di conseguenza basta scegliere $M = \varepsilon$ e implicazione è verificata.

□

ATTENZIONE Non è vero il contrario, infatti lo vediamo con un esempio, infatti se prendiamo $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x + 2$ è facile vedere che

$$|x + 1| \leq |x + 2| \quad \forall x \geq -1$$

Pertanto possiamo scegliere un qualsiasi intorno di 0 della forma $I = (-\delta, +\delta)$ con $\delta \leq 1$, e di conseguenza è verificata la definizione di O-grande e quindi

$$x + 1 = O(x + 2) \quad \forall x \in I$$

Però se proviamo a vedere se $f(x) = o(g(x))$ vediamo subito che non lo è dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Questo succede perchè O-grande ci dice che una funzione è più piccola di un'altra, mentre o-piccolo ci dice che una funzione è tanto più piccola di un'altra, a tal punto da rendere il limite uguale a 0.

Definizione 15: Confronti di Infiniti

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di acc. in A e se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$$

Allora diciamo che

- " $f(x)$ è infinito dello stesso ordine di $g(x)$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- " $f(x)$ è infinito ordine di ordine inferiore $g(x)$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- " $f(x)$ è infinito ordine di ordine superiore $g(x)$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

- " $f(x)$ è infinito di ordine non confrontabile a $g(x)$ " se

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definizione 16: Confronti di Infinitesimi

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. in A e se

- $x_0 \in \mathbb{R}$ allora diciamo che

- " $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- " $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|x - x_0|^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $x_0 \in \{\pm\infty\}$ allora diciamo che

- " $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|x|^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- " $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ " se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esercizio 49

Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ di $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \cos(x)$,

Dimostrazione. per farlo dobbiamo usare la definizione di funzione infinitesima

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{x^\alpha}$$

Per capire quanto vale dobbiamo fare una razionalizzazione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos(x)}{\sqrt{1+x^2} + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2 - \cos^2(x)}{x^\alpha(\sqrt{1+x^2} + \cos(x))} \end{aligned}$$

Il termine $\sqrt{1+x^2} + \cos(x) \rightarrow 2$ quindi possiamo levarlo visto che non influisce sul grado della funzione. Notiamo in oltre che possiamo spaccare la funzione nel seguente modo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2 - \cos^2(x)}{x^\alpha(\sqrt{1+x^2} + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^\alpha} + \frac{1 - \cos^2(x)}{x^\alpha}$$

Ed entrambi convergono solo se $\alpha = 2$, e quindi il gradi infinitesimale di $f(x)$ è 2. Se fosse stato $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \cos(x)$ era necessario usare gli sviluppi dell'o-piccolo. \square

5 Successioni e Serie

Definizione 17: Successioni

Si definisce successione una funzione a variabile naturale a valori reali, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e si indica con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oppure $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, mentre il termine generale si indica con $a(n)$ oppure a_n . Il dominio può essere \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 oppure $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, dove n_0 è un qualsiasi numero naturale dal quale inizia la successione.

vediamo qualche esempio di successione

Esempio 18

- $a_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

- $a_n = (n - 5)! \quad \forall n \geq 5$

Qui chiaramente il fattoriale è definito per numeri non negativi, quindi la successione deve partire da 5, perchè prima non è definita.

- $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

In questo caso basta togliere soltanto il caso $n = 0$

- $a_n = \frac{1}{n-7} \quad \forall n \geq 8$

Teoricamente in questo caso basterebbe levare il caso $n = 7$, ma per evitare di avere un "buco" nella sequenza, la facciamo partire da $n = 8$.

Teorema 32: Punti di Accumulazione per le Successioni

Dato che le successioni sono delle funzioni, allora saranno validi tutti i teoremi visti in precedenza, però abbiamo qualche particolarità, in fatti nelle successioni esiste un unico punto di accumulazione: $+\infty$, dato che se prendiamo un qualsiasi altro punto vedremo che è isolato. Infatti per ogni punto del dominio posso sempre trovare un intervallo vuoto, basta scegliere un raggio < 1 . Quindi nelle successioni possiamo fare solo ed esclusivamente il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Di conseguenza possiamo scrivere anche soltanto $\lim a_n = l$ oppure ancora più semplicemente $a_n \rightarrow l$.

Definizione 18: Convergenza, Divergenza e Irregolarità delle successioni

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ allora

- Se $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$ allora diciamo che $(a_n)_{n \in A}$ è convergente a l
- Se $\lim a_n = l \in \{\pm\infty\}$ allora diciamo che $(a_n)_{n \in A}$ è divergente a $\{\pm\infty\}$
- Se $\nexists \lim a_n$ allora diciamo che $(a_n)_{n \in A}$ è irregolare

Definizione 19: Monotonia e Limitatezza delle Successioni

Dato che le successioni sono delle funzioni, riprendiamo le principali definizioni delle funzioni a variabili reali e le analizziamo per le successioni

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ allora diciamo che

- $(a_n)_{n \in A}$ è monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in A$
- $(a_n)_{n \in A}$ è monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in A$

E chiaramente ci sarà anche la monotonia crescente stretta con $a_n < a_{n+1}$ e uguale per la decrescenza. In oltre possiamo dire che è definitivamente crescente se è crescente $\forall n \geq \bar{n}$, ragionamento analogo alla decrescenza.

- $(a_n)_{n \in A}$ è limitata se $\exists M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in A$
- $(a_n)_{n \in A}$ è limitata definitivamente se $\exists M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \geq \bar{n}$

N.B. come dicevamo le successioni sono vere e proprie funzioni e pertanto saranno validi tutti i seguenti Teoremi: Teorema dell'unicità del limite, Relazione d'ordine I e II, Teorema dei due carabinieri, algebra dei limiti finiti e infiniti.

Definizione 20: Successioni Ricorsive

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ allora diciamo che a_n è ricorsiva se esiste una funzione tale che

$$a_n = f(a_{n-1})$$

Un esempio classico è il fattoriale, infatti il fattoriale lo possiamo scrivere come

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$a_n = n \cdot a_{n-1}$$

Teorema 33: Limitatezza delle successioni quando esiste Limite

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ e se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ allora $(a_n)_{n \in A}$ è limitata globalmente.

Dimostrazione. Nelle funzioni a variabili reali sapevamo che se esiste il limite allora la funzione era limitata definitivamente, proprio perché se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ sapevamo che

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

E da questo potevamo dedurre che

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - l + l| \\ &\leq |f(x) - l| + |l| \\ &< \varepsilon + |l| \end{aligned}$$

E di conseguenza noi sappiamo che $f(x)$ era limitata definitivamente, e quindi questo sarà vero anche per le successioni, ma con le successioni possiamo dire qualcosa di più. Infatti se $a_n \rightarrow l$ per lo stesso ragionamento possiamo dire che

$$|a_n| < \varepsilon + |l| \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Ora possiamo prendere tutti i numeri prima di \bar{n} e $\varepsilon + |l|$ e prendere il massimo tra questi valori

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{\bar{n}}|, \varepsilon + |l|\}$$

Importante specificare che $M \notin \{\pm\infty\}$, perché tutti i valori con $n \leq \bar{n}$ sono valori finiti, e lo stesso vale per $\varepsilon + |l|$. Ora notiamo che per i valori di $n \leq \bar{n}$ saranno sicuramente più piccoli del massimo tra loro, mentre per i valori con $n > \bar{n}$ abbiamo che saranno sempre minori di $\varepsilon + |l|$, di conseguenza $|a_n| < M$ per $\forall n \in A$ che è la definizione di limitata globalmente, e non solamente definitivamente. \square

Definizione 21: Progressione Geometrica

Fissato $r \in \mathbb{R}$ detta ragione, allora si dice progressione geometrica la successione definita come

$$a_n = r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{il cui limite è } \lim a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } r > 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ \text{Non Esiste} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Definizione 22: Sottosuccessione

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ e una funzione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente, allora si dice Sottosuccessione, o estratta, di $(a_n)_{n \in A}$ la successione $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$

Vediamo un esempio di sottosuccessione

Esempio 19

$$a_n = (-1)^n \quad \varphi : n \rightarrow 2n$$

Dimostrazione. Notiamo subito che la funzione $\varphi(n)$ è strettamente crescente, quindi la possiamo usare. Proviamo quindi a trovare la sotto successione $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, per farlo basta sostituire la funzione nella n nella funzione originale.

$$a_{\varphi(n)} = (-1)^{2n} \implies a_{\varphi(n)} = ((-1)^2)^n \implies a_{\varphi(n)} = 1^n \implies a_{\varphi(n)} = 1$$

Quindi questa sottosuccessione è semplicemente una sequenza di 1. Da notare che le sottosuccessioni sono come le funzioni composte nelle funzioni a variabile reale. In oltre in questo esempio possiamo notare che se avessimo scelto $\varphi(n) = 2n + 1$ la sottosuccessione risultante sarebbe stata $a_{\varphi(n)} = -1$, e questo vedremo presto implica una cosa molto importante. \square

Teorema 34: Relazione tra Successione e le sue Sottosuccessioni

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ allora $\exists a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\}$ se e solo se tutte le sottosuccessioni hanno limite l

Il teorema per com'è scritto non è molto utile, infatti è molto difficile controllare se tutte le possibili sottosuccessioni facciano lo stesso limite, ma è molto più utile la negazione di questo teorema, infatti se è vero che tutte le sottosuccessioni devono avere limite l , è anche vero che ne basta trovare almeno una che hanno limite diverso per dire che la successione originale non ha limite.

Esempio 20

$$a_n = (-1)^n$$

Dimostrazione. Infatti come avevamo visto se usiamo la sottosuccessione con $\varphi(n) = 2n$, veniva fuori $a_{\varphi(n)} = 1$, mentre se prendevo la sottosuccessione $\varphi(n) = 2n + 1$ diventerebbe $a_{\varphi(n)} = -1$, di conseguenza due sottosuccessioni hanno limite diverso allora la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite. \square

Teorema 35: Teorema di Bolzano-Weierstrass

Se $(a_n)_{n \in A}$ è limitata, allora esiste almeno una sottosuccessione $(a_{\varphi(n)})_{n \in A}$ che converge

Un esempio lo abbiamo visto appena adesso con la successione $a_n = (-1)^n$, visto che è una funzione limitata allora almeno una, noi ne abbiamo trovate 2, sottosuccessione converge.

Teorema 36: Caratterizzazione sequenziale del Limite

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. in A allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

Per ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

- $a_n \neq 0$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$
- $\lim a_n \rightarrow x_0$

Anche qua come nella relazione tra Successione e Sottosuccessioni, è impossibile trovare qualsiasi successione e controllare che tutte facciano l . Questo teorema è molto utile usare la sua negazione, infatti basta trovare due successioni che rendono il limite diverso per capire che il limite della funzione originale non esiste. Infatti proviamo a calcolare un limite che è difficile da dimostrare, ma che con questo teorema diventa molto semplice.

Esercizio 50

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

Dimostrazione. Possiamo scegliere $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ e possiamo vedere che possiamo applicare il teorema perchè $a_n \neq 0$ definitivamente, e che $a_n \rightarrow +\infty$, quindi vediamo come diventa il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

Usando le proprietà del seno sappiamo che $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Ora ripetiamo lo stesso procedimento per $b_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, ricordando che per le proprietà del seno $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1$$

Abbiamo trovato quindi due successione che fanno tendere la funzione a due limiti diversi e di conseguenza $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ □

Esercizio 51

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

Dimostrazione. Anche se lo abbiamo già dimostrato che questo limite non esiste, proviamo a dimostrarlo grazie a questo teorema, infatti se scelgo $a_n = \frac{1}{n}$, è valida perchè $a_n \rightarrow 0$ e di conseguenza il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Invece se prova con la successione $b_n = \frac{-1}{n}$ succede che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$$

Anche qua vediamo che con la successione a_n il nostro limite tende a $+\infty$, mentre con b_n tende a $-\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, come avevamo già dimostrato. □

Esercizio 52

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica non costante, Allora

$$\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Dimostrazione. In primis capiamo che ipotesi abbiamo infatti una funzione è periodica se $\exists T > 0$ tale che $f(x + nT) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$. In più sappiamo che non è costante, che vuol dire $\exists x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Quindi se scelgo $a_n = x_1 + nT$, e posso farlo perchè $a_n \rightarrow +\infty$ visto che $T > 0$ per ipotesi, allora posso sostituirlo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_1 + nT)$$

Per definizione di funzione periodica sappiamo che $f(x_1 + nT) = f(x_1)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_1 + nT) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_1) = f(x_1)$$

Ora posso scegliere $b_n = x_2 + nT$, e per la stessa logica di a_n

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_2 + nT) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_2) = f(x_2)$$

Notiamo che in un caso il limite tende a $f(x_1)$ e in un altro tende a $f(x_2)$, e visto che per ipotesi $f(x_1) \neq f(x_2)$ allora $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ \square

Teorema 37: Gerarchia degli Infinito per le Successioni

Visto che le successioni sono funzioni ci portiamo dietro i seguenti teoremi

Sia $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log(n))^\beta}{n^\alpha} = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

In più, visto che le successioni sono definite per i numeri interi, allora possiamo usare anche il fattoriale, e quindi abbiamo due limiti nuovi

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Dimostrazione. I primi due sono verificati perchè sono vere per le funzioni a variabili reali, e di conseguenza valgono anche per le successioni. Iniziamo dimostrando la (iv).

(iv) Notiamo subito che sia $n! \geq 0$ che $n^n \geq 0$ e di conseguenza $\frac{n!}{n^n} \geq 0$. Ora riscriviamo la frazione usando la definizione di fattoriale

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

Notiamo subito che il primo termine $\frac{n}{n} = 1$ quindi possiamo toglierlo, in più tutti i termini sono ≤ 1 , quindi

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} &\leq 1 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq \dots \\ &\leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

Visto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

(iii) Come prima, sappiamo che $a^n \geq 0$ e che $n! \geq 0$ e quindi $\frac{a^n}{n!} \geq 0$. Visto che $a > 1$ allora $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $N > a$. Quindi potremo riscrivere la sequenza con $n \geq N$ come

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N-1} \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}$$

Notiamo che tutti i termini nel riquadro rosso sono tutti $\leq a$, dato che $N > 1$, mentre tutti i termini nel riquadro blu sono ≤ 1 perchè $N \geq a \implies 1 \geq \frac{a}{N}$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &\leq \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1) \cdot N} \cdot \frac{1 \cdot \dots \cdot 1}{(N+1) \cdot \dots \cdot (n-1)} \cdot \frac{a}{n} \\ &\leq a^N \cdot 1 \cdot \frac{a}{n} \\ &\leq \frac{a^{N+1}}{n} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^{N+1}}{n}$$

Visto che a^{N+1} è un numero ben definito e non è dipendente da n allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{N+1}}{n} = 0$, e quindi per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

□

Teorema 38: Formula di Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Vediamo qualche esercizio per allenarci con questa formula

Esercizio 53

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Dimostrazione. Visto che è una equivalenza asintotica possiamo sostituire $n!$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Facciamo qualche riarrangiamento

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{e}\right) \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} \\ &= e^{-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt[n]{2\pi n} \end{aligned}$$

Ora possiamo usare la tecnica delle potenze di funzioni e applichiamo le regole dei logaritmi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt[n]{2\pi n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n \sqrt[n]{2\pi n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n) + \log((2\pi n)^{\frac{1}{2n}})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n) + \frac{1}{2n} \log(2\pi n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\log(2)}{n} + \frac{\log(\pi)}{n} + \frac{\log(n)}{n} \right)} \end{aligned}$$

Ora i termini $\frac{\log(2)}{n}$ e $\frac{\log(\pi)}{n}$ è facile vedere che tendono a 0, poi per la gerarchia degli infiniti anche $\frac{\log(n)}{n} \rightarrow 0$, mentre il termine $\log(n) \rightarrow +\infty$, quindi l'esponente complessivamente tende a $+\infty$, quindi l'esponenziale tende anche lui a $+\infty$, e di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

□

Teorema 39: Criterio di convergenza per le Successione

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n \in A}$ definitivamente positiva allora se

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

allora

$$(i) \quad l \in [0, 1) \implies \lim a_n = 0$$

$$(ii) \quad l \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\} \implies \lim a_n = +\infty$$

$$(iii) \quad l = 1 \implies \text{nulla si può dire}$$

Dimostrazione. Per dimostrare dobbiamo riprendere la definizione di limite, infatti se esiste il limite allora sappiamo che

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in I$$

Riscriviamo il termine

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \iff l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \implies (l - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon)a_n$$

(i) Per dimostrare il punto (i) ci basta prendere un qualsiasi $N \in \mathbb{N}$ e la disequazione $a_{N+1} \leq (l + \varepsilon)a_N$, infatti dato che è vera possiamo dire anche che $a_{N+2} \leq (l + \varepsilon)a_{N+1}$ e anche $a_{N+3} \leq (l + \varepsilon)a_{N+2}$ e così via, e possiamo dire che

$$\begin{aligned} a_{N+3} &\leq (l + \varepsilon)a_{N+2} \leq (l + \varepsilon)(l + \varepsilon)a_{N+1} \\ &\leq (l + \varepsilon)^2 a_{N+1} \\ a_{N+3} &\leq (l + \varepsilon)^2 a_{N+1} \leq (l + \varepsilon)^2 (l + \varepsilon)a_N \\ &\leq (l + \varepsilon)^3 a_N \\ a_{N+3} &\leq (l + \varepsilon)^3 a_N \end{aligned}$$

Seguendo questo ragionamento possiamo dire che

$$a_{N+k} \leq (l + \varepsilon)^k a_N \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ora noi per ipotesi sappiamo che $l \in [0, 1)$, quindi se scegliamo $\varepsilon \in [0, 1 - l)$ in modo tale che il termine $(l + \varepsilon) < 1$. Ricordiamo anche che la funzione, per ipotesi, è definitivamente positiva, quindi sarà vero che $a_{N+k} \geq 0$. Ora se mandiamo al limite la seguente disequazione

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{N+k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} (l + \varepsilon)^k a_N$$

Scopriamo che il termine di destra tende a 0 per le regole degli esponenziali, e quindi complessivamente il termine di destra $0 \cdot a_N \rightarrow 0$, visto che a_N è un numero finito. In più nel termine centrale possiamo togliere N visto che $k \sim k + N$ per $k \rightarrow +\infty$, pertanto per il teorema dei due carabinieri abbiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$$

(ii) Per dimostrare il secondo punto ci serve riprendere la disequazione impostata all'inizio della dimostrazione

$$(l - \varepsilon)a_n < a_{n+1}$$

Ora per lo stesso ragionamento del punto scorso possiamo scegliere un $N \in \mathbb{N}$ e potremo dire che

$$(l - \varepsilon)^k a_N \leq a_{N+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Se scegliamo un $\varepsilon \in [0, l - 1)$ avremo che $l - \varepsilon > 1$ e quindi se lo portiamo al limite avremo che $(l - \varepsilon)^k \rightarrow +\infty$, e di conseguenza per il corollario del teorema dei due carabinieri abbiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty$$

N.B. è impossibile che $a_N = 0$, infatti a_N è il termine generale di una serie, quindi ammeno che non sia la serie $a_N = 0$ che in quel caso converge, non ci sono problemi che venisse fuori una forma indeterminata $[\infty \cdot 0]$. \square

Teorema 40: Esistenza del limite di funzioni Monotone

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n \in A}$ definitivamente monotona allora $\lim a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e possiamo dire anche che

- Se $(a_n)_{n \in A}$ è monotona crescente allora

$$\lim a_n = \sup\{a_n : n \in A\}$$

- Se $(a_n)_{n \in A}$ è monotona decrescente allora

$$\lim a_n = \inf\{a_n : n \in A\}$$

Questo teorema è la versione del Teorema del limite di funzioni monotone applicato alle successioni, quindi non serve la dimostrazione perchè è la stessa delle funzioni.

Definizione 23: Serie Numeriche

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un successione a valori reali, definiamo la successione delle **somme parziali** $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definita come

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

Diciamo "**serie numerica con termine generale a_n** " il limite della successione delle somme parziali, e la indichiamo come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Visto che S_k è una successione, allora anche nelle serie ereditiamo i termini già visti: **Convergenza, Divergenza e Irregolare**

Definizione 24: Convergenza, Divergenza e Irregolarità delle Serie

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, allora diciamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è

- Convergente se $\lim S_k = l \in \mathbb{R}$
- Divergente se $\lim S_k = l \in \{\pm\infty\}$
- Irregolare se $\nexists \lim S_k$

Esempio 21

Se prendiamo $a_n = r^n$, con $r \in \mathbb{R}$, per induzione si può dimostrare che la successione delle somme parziale è definita come

$$S_k = \sum_{n=1}^k r^n = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

Pertanto se portiamo tutto al limite abbiamo che

$$\sum_{n=1}^k r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } r \in (-1, 1) \\ +\infty & \text{se } r \geq 1 \\ \nexists & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

E questa è detta **Serie Geometrica**.

Teorema 41: Serie Armonica Generalizzata

Dato $\alpha \in [0, +\infty)$ allora con **Serie Armonica Generalizzata** intendiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{Divergente a } +\infty & \text{se } \alpha \in [0, 1] \\ \text{Convergente} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. (caso $\alpha \in [0, 1)$) Scriviamo le somme parziali per capire meglio

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{k^\alpha}$$

Notiamo che $\forall n \leq k$ vale $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$, quindi possiamo dire che

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{k^\alpha} &\geq \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{k^\alpha} + \dots + \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \frac{k}{k^\alpha} = k^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Dato che $\alpha \in [0, 1)$, abbiamo che $1 - \alpha > 0$, e quindi se portiamo la sommatoria al limite abbiamo che $k^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$, e visto che la serie armonica è maggiore di una somma divergente, anche lei diventa divergente.

(caso $\alpha = 1$) Notiamo che la sommatoria S_k è monotona crescente, infatti

$$S_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{k+1}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k+1}$$

E notiamo che $\frac{1}{k+1} > 0, \forall k > 0$, quindi

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k+1} > S_k + 0$$

$$S_{k+1} > S_k$$

E pertanto la serie è monotona crescente, e visto che la somma delle serie parziali è una successione, per il teorema dell'esistenza di funzioni monotone sappiamo che il limite esiste e deve valere $S \in [1, +\infty] \cup \{+\infty\}$. Osserviamo che

$$S_{2k} - S_k = \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} \right) - \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right) + \left(\sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} \right) - \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k}$$

Come per il caso $\alpha \in [0, 1)$, vediamo che $\frac{1}{k+n} \geq \frac{1}{2k}, \forall n \leq k$ e quindi

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k}$$

$$= k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo scoperto che $S_{2k} - S_k \geq \frac{1}{2}$, quindi sappiamo anche che $S_{2k} \geq S_k + \frac{1}{2}$, ma se supponiamo che $S \neq +\infty$ vediamo che per $S_{2k} \rightarrow S$ e anche $S_k \rightarrow S$ e quindi

$$S_{2k} \geq S_k + \frac{1}{2}$$

$$S \geq S + \frac{1}{2}$$

$$0 \geq \frac{1}{2}$$

Chiaramente è impossibile che $0 \geq \frac{1}{2}$, e quindi vuole dire che l'ipotesi che $S \neq +\infty$ è sbagliata e di conseguenza abbiamo scoperto che $S = +\infty$ e che quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

(caso $\alpha > 1$) Come per il caso $\alpha = 1$ possiamo dire che la successione delle serie parziali è monotona crescente

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)^\alpha} \geq S_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

E di conseguenza il limite esiste e varrà $S \in [1, +\infty) \cup \{+\infty\}$, notiamo che

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2k)^\alpha} + \frac{1}{(2k+1)^\alpha} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2k)^\alpha} + \frac{1}{(2k+1)^\alpha} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) \end{aligned}$$

Sappiamo che $\frac{1}{(2n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(2n)^\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \right) &\leq \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{2}{(2n)^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{2^{1-\alpha}}{n^\alpha} \\ &= 2^{1-\alpha} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$S_{2k+1} \leq 1 + 2^{1-\alpha} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha}$$

Però ricordiamo che $\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha} = S_k$ e quindi

$$S_{2k+1} \leq 1 + 2^{1-\alpha} S_k$$

Prima abbiamo detto che la sommatoria ha limite visto che è monotona crescente, quindi supponiamo che $S \in [1, +\infty)$, pertanto se portiamo tutto al limite abbiamo che $S_{2k+1} \rightarrow S$ e $S_k \rightarrow S$.

$$\begin{aligned} S &\leq 1 + 2^{1-\alpha} S \\ S &\leq \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Pertanto abbiamo che il limite delle somme parziali è minore di un certo valore finito, quindi la serie converge. \square

Teorema 42: Linearità delle Serie

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} (c \cdot a_n + d \cdot b_n)$ converge ($\forall c, d \in \mathbb{R}$).

Dimostrazione. Per dimostrarlo è necessario usare l'algebra dei limiti finiti, infatti se, per ipotesi, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$, allora sappiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (c \cdot a_n + d \cdot b_n) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k (c \cdot a_n + d \cdot b_n) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k (c \cdot a_n) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k (d \cdot b_n) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} c \sum_{n=1}^k a_n + \lim_{k \rightarrow +\infty} d \sum_{n=1}^k b_n \\ &= c \cdot A + d \cdot B \end{aligned}$$

E chiaramente, visto che A e B sono dei numeri finiti, allora anche $c \cdot A + d \cdot B$ converge, e pertanto la sommatoria della combinazione lineare è convergente. \square

Teorema 43: Termine Generale in funzione dalla relativa Serie Numerica

Dato $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione delle somme parziali di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, allora possiamo trovare l'espressione analitica del termine generale di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ come

$$a_n = S_k - S_{k-1}$$

Teorema 44: Condizione Necessaria per la Convergenza

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, e $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali, allora se $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è convergente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Usando il termine Generale in funzione dalla relativa Serie Numerica sappiamo che $a_n = S_k - S_{k-1}$, ma visto che per ipotesi S_k converge a un numero (S), allora $S_k \rightarrow S$ e anche $S_{k-1} \rightarrow S$ pertanto se portiamo quell'informazione al limite abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_k - S_{k-1}) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= S - S \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= 0 \end{aligned}$$

\square

Negli esercizi dovremmo trovare il carattere di una serie, quindi per come è posto questo teorema, non ci è molto utile. Però per le regole della implicazione logica, sappiamo anche che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ non converge.}$$

N.B. dall'implicazione sappiamo che la serie non converge, cioè vuol dire che o diverge o è irregolare, quindi attenzione a non dire che diverge, perchè potrebbe essere irregolare. Per controllare se è divergente o convergente basta controllare se la serie è monotona, e in quel caso allora la serie è divergente.

Però se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, NON possiamo dire nulla, quindi per questi casi è necessario usare altri criteri. Faccendo un esempio: sia $a_n = \frac{1}{n}$ che $b_n = \frac{1}{n^2}$ abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Però abbiamo visto con la serie armonica generalizzata abbiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Definizione 25: Serie a Termini Positivi

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ oppure $\forall n \geq \bar{n}$, allora diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è a **termini positivi** oppure a **termini definitivamente positivi**.

Teorema 45: Proprietà delle Serie a Termini Positivi

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è a termini positivi, allora ha limite $S \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Dimostrazione. Visto che la serie è a termini definitivamente positivi, allora sappiamo che $a_n \geq 0, \forall n \geq \bar{n}$ allora sappiamo che

$$S_k = S_{k-1} + a_k \geq S_{k-1} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$S_k \geq S_{k-1}$$

Abbiamo scoperto che se la serie è a termini positivi allora è anche monotona crescente, e dato che sappiamo che se una serie è monotona crescente allora ha limite, di conseguenza anche se una serie è a termini positivi avrà limite convergente o divergente. \square

Teorema 46: Criterio del Confronto delle Serie

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ abbiamo che

- (i) se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge a $B \in \mathbb{R}$ allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a $A \in \mathbb{R}$ con $A \leq B$.
- (ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge a $+\infty$

Dimostrazione. Per dimostrarlo è necessario usare le somme parziali, infatti siano

$$A_k = \sum_{n=1}^k a_n \quad B_k = \sum_{n=1}^k b_n$$

(i) Poi dato che $a_n \leq b_n$ allora è vero anche che $A_k \leq B_k$, pertanto per il teorema di relazione d'ordine sappiamo che se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$, in più, sempre per il teorema delle relazioni d'ordine sappiamo che $A \leq B$

(ii) Per dimostrare questo punto invece è necessario usare il corollario del teorema dei carabinieri, infatti se A_k diverge allora anche B_k diverge. \square

Esempio 22

Determinare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Intanto notiamo che assomiglia molto alla serie $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi proviamo a vedere se una è maggiore dell'altra

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &\leq \frac{1}{n^2} \\ n^2 &\leq n^2 + n \\ 0 &\leq n \end{aligned}$$

Quindi sappiamo che $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ e quindi per il criterio del confronto sappiamo che se $\sum \frac{1}{n^2}$ convergesse allora anche $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Però abbiamo visto con le serie armoniche che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, visto che l'esponente $2 > 1$ e di conseguenza anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Per questa serie lo potevamo scoprire anche usando le serie tele-

scopiche, infatti $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$, e infatti la serie converge a 1.

Definizione 26: Serie Assolutamente Convergente

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **Assolutamente Convergente** se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 47: Relazione Convergenza Assoluta e Semplice

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è anche convergente anche semplicemente.

Dimostrazione. Proviamo a sviluppare la seguente serie, e applichiamo k-volte la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| &= |a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k| \\ &\leq |a_1| + |a_2 + a_3 + \dots + a_k| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + |a_3 + \dots + a_k| \\ &\leq \dots \\ &\leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_k| \\ \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| &\leq \sum_{n=1}^k |a_n| \end{aligned}$$

Pertanto se, per ipotesi, $\sum |a_n|$ converge a $S \in \mathbb{R}^+$, allora se portiamo al limite la disequazione abbiamo che

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq S \iff \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in [-S, S]$$

Però visto che S è un numero finito, e sappiamo che la serie è compresa tra due valori finiti, allora di conseguenza anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente. \square

N.B. la convergenza assoluta implica la convergenza semplice, ma NON è vero il viceversa, vediamo con un esempio.

Esempio 23

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Notiamo subito che la serie non converge assolutamente infatti

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Che per la serie armonica sappiamo che diverge, quindi sappiamo che la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ diverge assolutamente. Però ora proviamo a vedere se converge o diverge semplicemente, per farlo proviamo analizzando la serie delle somme parziali

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^{2k}}{2k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{-2n + 2n - 1}{(2n-1)2n} = - \sum_{n=1}^k \frac{1}{(2n-1)2n} \end{aligned}$$

Ora questa serie assomiglia molto alla serie armonica con $\alpha = 2$ che converge, quindi proviamo a vedere se può funzionare il criterio del confronto

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n-1)2n} &\leq \frac{1}{n^2} \iff n^2 \leq 4n^2 - 2n \\ \iff 2n &\leq 3n^2 \iff 2 \leq 3n \iff n \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Quindi sappiamo che la nostra serie è minore della serie armonica, pertanto la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge semplicemente, ma diverge assolutamente.

Teorema 48: Criterio del Confronto Asintotico

Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni definitivamente positive tali che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- (i) se $l \in [0, +\infty)$ allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.
- (ii) se $l = 0$ allora valgono:
 - se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge
 - se $\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge
- (iii) se $l = +\infty$ allora valgono:
 - se $\sum a_n$ converge allora $\sum b_n$ converge
 - se $\sum b_n$ diverge allora $\sum a_n$ diverge

Dimostrazione. (i) Usiamo la definizione di limite

$$l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Ora per comodità possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{l}{2}$

$$l - \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < l + \frac{l}{2}$$

$$\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}$$

$$\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n$$

E quindi

$$\frac{l}{2} \sum_{n=N}^k b_n < \sum_{n=N}^k a_n < \frac{3l}{2} \sum_{n=N}^k b_n$$

E quindi dalla disequazione sottolineata di rosso sappiamo, grazie al criterio del confronto, se $\sum b_n$ diverge allora $\sum a_n$ diverge, mentre con la disequazione in blu abbiamo che se $\sum b_n$ converge allora anche $\sum a_n$ converge. Pertanto notiamo che le due serie hanno sempre lo stesso carattere.

N.B. non possono essere irregolari visto che per ipotesi devono essere a termini positivi, che ricordiamo che per le proprietà delle serie a termini positivi, non possono essere irregolari.

(ii) Usiamo la definizione di limite

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < +\varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Poi dato che a_n e b_n sono definitivamente positivi abbiamo che $\frac{a_n}{b_n} > 0$, in più possiamo scegliere $\varepsilon = 1$ e quindi abbiamo

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies a_n < b_n$$

Pertanto $\sum a_n < \sum b_n$ e quindi per il teorema del confronto verifichiamo il teorema.

(iii) Usiamo la definizione di limite

$$\frac{a_n}{b_n} > M \quad \forall n \geq N$$

Pertanto possiamo dedurre che

$$a_n > M \cdot b_n \implies \sum a_n > M \sum b_n$$

Ed ora possiamo il teorema del confronto per dimostrare questo punto. □

Esercizio 54

Determina il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$$

Dimostrazione. In primis proviamo a controllare la condizione necessaria per la convergenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

E quindi non possiamo dire nulla con la condizione necessaria di convergenza, quindi proviamo razionalizzando

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} &= \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \frac{(n^2+1) - n^2}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} \end{aligned}$$

Possiamo notare che la nuova frazione è $\sim \frac{1}{2n^2}$ infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)}}{\frac{1}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1)}}{\frac{1}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+1} = 1$$

Pertanto le serie avranno lo stesso carattere, ma $\frac{1}{2n^2}$ sappiamo che converge visto che è la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$, e di conseguenza anche la serie $\sum \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$ convergerà per il criterio del confronto asintotico. \square

Esercizio 55

Determina il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \arcsin\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Dimostrazione. Per i confronti asintotici sappiamo che per $n \rightarrow +\infty$

$$\sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \sim \frac{1}{3^n} \quad \arcsin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$$

Pertanto $\sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \arcsin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{6^n}$, ma noi sappiamo che $\sum \frac{1}{6^n}$ converge visto che è una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{6}$ e quindi converge, ma visto che la serie $\sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \arcsin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ è asintotica a $\sum \frac{1}{6^n}$ allora anche l'altra serie è convergente. \square

Esercizio 56

Discutere il carattere della serie al variare di $\alpha \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(1 - \cos(\frac{1}{n}))}{e^{\tan(\frac{1}{n^\alpha})} - 1}$$

Dimostrazione. Iniziamo a fare delle equivalenze asintotiche, infatti per $n \rightarrow +\infty$

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

E pertanto

$$1 - \cos\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim 1 - \cos\left(\frac{1}{2n^2}\right) \sim \frac{1}{8n^4}$$

Mentre al denominatore iniziamo con

$$\tan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

Di conseguenza

$$e^{\tan(\frac{1}{n^\alpha})} - 1 \sim e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

Ricomponendo la frazione abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(1 - \cos(\frac{1}{n}))}{e^{\tan(\frac{1}{n^\alpha})} - 1} \sim \frac{\frac{1}{8n^4}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{8n^{4-\alpha}}$$

e per la serie armonica sappiamo che

$$\sum \frac{1}{8n^{4-\alpha}} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } 4 - \alpha > 1 \\ \text{Diverge} & \text{se } 4 - \alpha \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha < 3 \\ \text{Diverge} & \text{se } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

E chiaramente dato che le due serie sono asintotiche tra di loro, per forza devo avere lo stesso carattere, e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(1 - \cos(\frac{1}{n}))}{e^{\tan(\frac{1}{n^\alpha})} - 1} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha < 3 \\ \text{Diverge} & \text{se } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

□

Teorema 49: Criterio del Rapporto

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ definitivamente allora

- (i) Se $\exists r \in (0, 1)$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ definitivamente allora la serie $\sum a_n$ converge
- (ii) Se $\exists r \in [1, +\infty)$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$ definitivamente allora la serie $\sum a_n$ diverge

Dimostrazione. (i) Per ipotesi sappiamo che è vero definitivamente che

$$a_{N+1} \leq r \cdot a_N \quad \text{con } N \in \mathbb{N}$$

Per lo stesso ragionamento fatto per il criterio di convergenza delle Successioni possiamo dire che

$$a_{N+k} \leq r^k \cdot a_N \quad \forall k \geq 1$$

Di conseguenza abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum a_{N+k} &\leq \sum r^k \cdot a_N \\ \sum a_{N+k} &\leq a_N \sum r^k \end{aligned}$$

E chiaramente per $r \in (-1, 1)$ abbiamo che la serie $\sum r^k$ converge, e pertanto per il criterio del confronto abbiamo che anche la serie $\sum a_{N+k}$ converge. Dato che la successione è a termini positivi allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, pertanto è impossibile che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-1, 0]$ e quindi possiamo trovare solamente valori di $r \in (0, 1)$. (ii) è necessario fare lo stesso ragionamento, chiaramente la disequazione sarà

$$a_{N+k} \geq r^k \cdot a_N \quad \forall k \geq 1$$

E quindi la serie geometrica diverge per valori di $r \in [1, +\infty)$, e quindi la serie $\sum a_{N+k}$ diverge anch'essa. \square

Teorema 50: Criterio del Rapporto Asintotico

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ definitivamente allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- (i) $l < 1 \implies \sum a_n$ converge
- (ii) $l > 1 \implies \sum a_n$ diverge
- (iii) $l = 1$ Non possiamo dire nulla sulla serie

Esercizio 57

Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}}$$

Dimostrazione. Proviamo il criterio del rapporto asintotico

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3(n+1))!}{(n+1)^{3(n+1)}} \cdot \frac{n^{3n}}{(3n)!} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)^{3n+3}} \cdot \frac{n^{3n}}{(3n)!} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)^{3n+3}} \cdot \frac{n^{3n}}{(3n)!} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(n+1)^{3n}(n+1)^3} \cdot \frac{n^{3n}}{(3n)!} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^{3n}}{(n+1)^{3n}} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n} \sim \frac{(3n)(3n)(3n)}{(n)^3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-3n} \\ &= \frac{3^3 n^3}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n} = 3^3 \cdot e^{-3} = \left(\frac{3}{e}\right)^3 > 1 \end{aligned}$$

E pertanto per il criterio del rapporto asintotico abbiamo che la serie diverge. \square

Questa serie si poteva risolvere anche con il criterio necessario per la convergenza e tramite la formula di Stirling, infatti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}} &\sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} \sqrt{2\pi(3n)}}{n^{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{e}\right)^{3n} n^{3n} \sqrt{6\pi n}}{n^{3n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^{3n} \sqrt{6\pi n} = +\infty \end{aligned}$$

Esercizio 58

Discutere il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 2^n}$$

Dimostrazione. Dato che $x \in \mathbb{R}$ per valori negativi avremo che la nostra serie non è a termini positivi, e quindi non potremmo applicare il teorema del rapporto asintotico, quindi proviamo a vedere se converge la serie $\sum \left| \frac{x^n}{n^3 2^n} \right| = \sum \frac{|x|^n}{n^3 2^n}$, in questa maniera la serie è a termini positivi e quindi possiamo applicare il teorema del criterio asintotico.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3 2^{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{n^3 2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{2} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \right| \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \frac{n^3}{(n)^3} = \frac{|x|}{2}$$

Per il criterio del rapporto asintotico sappiamo che se $\frac{|x|}{2} > 1$, cioè $x < -2 \vee x > 2$ allora la serie diverge assolutamente, mentre per $\frac{|x|}{2} < 1$, cioè per $-2 < x < 2$ la serie converge

assolutamente e quindi anche semplicemente. Però ora mancano i caso $x = \pm 2$, visto che il criterio non ci permette di dedurre nulla, e quindi dobbiamo fare altro. Però notiamo subito che se $x = 2$ allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^3 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Notiamo che viene fuori la somma armonica generalizzata con $\alpha = 3$, che sappiamo che converge, mentre per il caso $x = -2$, possiamo riutilizzare il criterio della convergenza assoluta, infatti $\sum \left| \frac{(-2)^n}{n^3 2^n} \right| = \sum \frac{|-2|^n}{n^3 2^n} = \sum \frac{2^n}{n^3 2^n} = \sum \frac{1}{n^3}$ che abbiamo appena visto che converge. Pertanto per il caso $x = -2$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 2^n} = \begin{cases} \text{Diverge} & x < -2 \vee x > 2 \\ \text{Converge Semplicemente e Assolutamente} & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

N.B. in caso $x < -2 \vee x > 2$ ho scritto che diverge, e questo si può verificare con la condizione necessaria alla convergenza. \square

Esercizio 59

Discutere il carattere della serie al variare di $\alpha \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot \alpha^n}{n^n}$$

Dimostrazione. Proviamo usando il criterio del rapporto asintotico

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! \cdot \alpha^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot \alpha^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n! \cdot \alpha}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \alpha \cdot e^{-1} = \frac{\alpha}{e} \end{aligned}$$

Quindi se $\frac{\alpha}{e} > 1 \implies \alpha > e$ allora la serie diverge, mentre se $\frac{\alpha}{e} < 1 \implies \alpha < e$ la serie converge. Proprio come l'esercizio precedente dobbiamo studiare a parte il caso $\alpha = e$, e notiamo che la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot \alpha^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n}$$

Proviamo a vedere con la condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \cdot e^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty$$

E quindi per condizione necessaria sappiamo che con $\alpha = e$ la serie diverge. E quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot \alpha^n}{n^n} = \begin{cases} \text{Converge} & \alpha < e \\ \text{Diverge} & \alpha \geq e \end{cases}$$

\square

Teorema 51: Criterio della Radice

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ definitivamente allora

- (i) Se $\exists r \in (0, 1)$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ definitivamente allora la serie $\sum a_n$ converge
- (ii) Se $\exists r \in [1, +\infty)$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \geq r$ definitivamente allora la serie $\sum a_n$ diverge

Dimostrazione. (i) Dato che a_n è definitivamente positiva, e visto che $n \in \mathbb{N}$ possiamo dire che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq r \implies a_n \leq r^n \implies \sum a_n \leq \sum r^n$$

Se portiamo tutto al limite abbiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k a_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k r^n$$

Come abbiamo già visto, la serie geometrica converge solamente se $-1 < r < 1$, e quindi per il confronto abbiamo che anche la serie $\sum a_n$ converge. Però dato che la serie è a termini positivi è impossibile che $r \in (-1, 0]$ e quindi potremo avere valore di $r \in (0, 1)$.

(ii) ragionamento analogo al caso (i), e quindi possiamo dire che

$$\sqrt[n]{a_n} \geq r \implies \sum a_n \geq \sum r^n$$

Se portiamo tutto al limite abbiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k a_n \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k r^n$$

Ma la serie geometrica diverge per $r \leq -1 \vee r \geq 1$ e di conseguenza anche la serie $\sum a_n$ diverge. Però dato che la serie è a termini positivi è impossibile che $r \leq -1$ e quindi potremo avere valore di $r \geq 1$. \square

Teorema 52: Criterio della Radice Asintotico

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ definitivamente allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- (i) $l < 1 \implies \sum a_n$ converge
- (ii) $l > 1 \implies \sum a_n$ diverge
- (iii) $l = 1$ Non possiamo dire nulla sulla serie

Esercizio 60

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n$$

Dimostrazione. Se proviamo ad usare la condizione necessaria abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$$

E quindi non possiamo dedurre nulla. Quindi proviamo ad usare il criterio della radice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} < 1$$

Notiamo che il risultato è minore di 1, e quindi per il criterio della radice sappiamo che la serie $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n$ è convergente. \square

Esercizio 61

Determinare il carattere della serie al variare $\alpha \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

Dimostrazione. Utilizziamo il criterio della radice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \left(1 + \frac{2}{n} \right) = \alpha$$

Quindi visto che il risultato del limite è α , abbiamo che per $\alpha > 1$ la serie diverge, mentre per $\alpha < 1$ la serie converge. Come al solito dobbiamo studiare a parte il caso $\alpha = 1$. Abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

Per questa serie è necessario usare la condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^2 \neq 0$$

E quindi abbiamo che la serie con $\alpha = 1$ diverge. E quindi abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = \begin{cases} \text{Convergente} & 0 \leq \alpha < 1 \\ \text{Divergente} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

\square

Esercizio 62

Determinare il carattere della serie al variare $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}}$$

Dimostrazione. Visto che $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che per $x < 0$ la serie non è più definitivamente positiva, quindi per poter usare i vari criteri è necessario che studiamo la serie dei valori assoluti: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{3^n \sqrt{n+1}}$. Dato che ora la serie è definitivamente positiva possiamo applicare il criterio della radice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{3^n \sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{3 \sqrt[n]{n+1}}$$

Per calcolare il denominatore dobbiamo fare un paio di riarrangiamenti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(\sqrt[n]{n+1})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log((n+1)^{\frac{1}{n}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log(n+1)}{n}} = e^0 = 1$$

E quindi abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{3 \sqrt[n]{n+1}} = \frac{|x|}{3}$$

Quindi per $\frac{|x|}{3} < 1$, e cioè $-3 < x < 3$, la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente. Per vedere l'altra casistica dobbiamo usare la condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{\sqrt{n}}$$

Ora dato che $|x| > 3$ (che è la casistica che ci manca), abbiamo che $\frac{x}{3} > 1$ e quindi per gerarchia degli infiniti abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{\sqrt{n}} = \infty$$

E quindi abbiamo che la serie per $|x| > 3$ è divergente. Ci mancano i casi $x = \pm 3$, iniziamo con $x = 3$ e abbiamo Che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Per la serie armonica abbiamo che la serie diverge. Per il caso $x = -3$ è necessario usare un criterio che dobbiamo ancora vedere (quello di Leibniz), e che quindi per ora lo lasciamo stare. Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}} \begin{cases} \text{Convergente} & 0 - 3 < x < 3 \\ \text{Divergente} & x < -3 \vee x \geq 3 \end{cases}$$

□

Teorema 53: Relazione tra criterio del Rapporto e della Radice

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva, allora se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Dimostrazione. Per risolverlo dobbiamo dividere in due casi: $l \in [0, +\infty)$ e $l = +\infty$. Partiamo con la prima casistica

(i) Per ipotesi sappiamo che esiste il limite del rapporto (e fa un numero finito), e quindi usando la definizione di limite abbiamo che

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Dato che questo vale $\forall n \geq \bar{n}$, allora sarà vero anche che $l - \varepsilon < \frac{a_{\bar{n}+1}}{a_{\bar{n}}} < l + \varepsilon$, ma anche $l - \varepsilon < \frac{a_{\bar{n}+2}}{a_{\bar{n}+1}} < l + \varepsilon$, sarà valido anche per $\frac{a_{\bar{n}+3}}{a_{\bar{n}+2}}$, $\frac{a_{\bar{n}+4}}{a_{\bar{n}+3}}$ e così via fino a $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. E dato che tutti i termini sono positivi, possiamo dire

$$\begin{aligned} l - \varepsilon &< \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \\ (l - \varepsilon) \frac{a_n}{a_{n-1}} &< \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{a_{n-1}} < (l + \varepsilon) \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ (l - \varepsilon)(l - \varepsilon) &< (l - \varepsilon) \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} < (l + \varepsilon) \frac{a_n}{a_{n-1}} < (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) \\ (l - \varepsilon)^2 &< \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} < (l + \varepsilon)^2 \end{aligned}$$

E quindi possiamo continuare con questo ragionamento moltiplicando per tutte le frazioni e abbiamo

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon)^{n-\bar{n}} &< \frac{a_{n+1}}{a_{\bar{n}}} < (l + \varepsilon)^{n-\bar{n}} \\ (l - \varepsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} &< a_{n+1} < (l + \varepsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} \end{aligned}$$

Ora se applichiamo la radice n-esima abbiamo che

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{(l - \varepsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}} &< \sqrt[n]{a_{n+1}} < \sqrt[n]{(l + \varepsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}} \\ (l - \varepsilon)^{1-\frac{\bar{n}}{n}} \sqrt[n]{a_{\bar{n}}} &< \sqrt[n]{a_{n+1}} < (l + \varepsilon)^{1-\frac{\bar{n}}{n}} \sqrt[n]{a_{\bar{n}}} \end{aligned}$$

Portando tutto al limite abbiamo che $n+1 \rightarrow n$, $\frac{\bar{n}}{n} \rightarrow 0$ e $\sqrt[n]{a_{\bar{n}}} \rightarrow 1$

$$(l - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (l + \varepsilon)$$

Questo verifica il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

(ii) basta fare lo stesso ragionamento ma il limite di partenza sarà $\frac{a_{n+1}}{a_n} > M$, e poi il ragionamento è analogo. \square

N.B. quindi se durante un esercizio fai il criterio del rapporto è inutile che provi quello della radice perchè darà lo stesso risultato. Il criterio della radice va applicato dopo quello del rapporto solo se il limite del rapporto non esiste.

Esercizio 63

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n+(-1)^n}$$

Dimostrazione. Se proviamo con il criterio del rapporto abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}{2^{n+(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1+(-1)^{n+1}-n-(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{1+(-1)^{n+1}-(-1)^n}$$

Però per il teorema della caratterizzazione sequenziale dei limiti e se scegliamo $a_n = 2n$ e $b_n = 2n + 1$ abbiamo che il nostro limite tende a due valori diversi con a_n il limite tende a $\frac{1}{2}$, mentre con b_n tende a 8, e quindi il limite non esiste. In questo caso ha senso usare il criterio della radice, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^{n+(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{n+(-1)^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{1+\frac{(-1)^n}{n}} = 2^{1+0} = 2 > 1$$

Quindi la serie diverge. □

Teorema 54: Criterio Condensazione di Cauchy

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (non negativa)
- $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (decrescente)

Allora le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

Hanno lo stesso carattere e vale

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

Questo teorema può essere utilizzato per dimostrare la serie armonica generalizzata, infatti se $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, sappiamo che $a_n \geq 0$ e vale anche $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, e quindi possiamo applicare il teorema e avremo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^n$$

Che per la serie geometrica abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^n = \begin{cases} \text{Convergente} & 2^{1-\alpha} < 1 \\ \text{Divergente} & 2^{1-\alpha} \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \text{Convergente} & \alpha > 1 \\ \text{Divergente} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Difatti abbiamo ritrovato lo stesso risultato trovato precedentemente.

Definizione 27: Serie a Segno Alterno

Una serie a **segno alterno** è detta una qualsiasi serie esprimibile come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

Con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una qualsiasi successione definitivamente positiva

Con queste tipologie di serie non possiamo applicare nessuno dei teoremi visti prima, perchè la serie non è mai definitivamente positiva (per via del $(-1)^n$). L'unico che potremmo applicare sarebbe la condizione necessaria o il criterio del valore assoluto. Quindi le serie a segno alternato esiste un solo criterio usabile: quello di Leibniz.

Teorema 55: Criterio di Leibniz

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, se

- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (non negativa)
- $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (decescente)
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (infinitesima)

Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

Esempio 24

Studiamo il caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Ora per il criterio con il valore assoluto sappiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Questa sappiamo che converge per $\alpha > 1$, e quindi la nostra serie originale converge anche semplicemente, ma per $\alpha \in (0, 1]$, non sappiamo nulla, quindi usiamo il criterio di Leibniz. Notiamo che $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ e che

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

Quindi la serie a segni alterni converge, e quindi per $\alpha \in (0, 1]$ abbiamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Converge semplicemente, ma diverge assolutamente. Mentre per $\alpha > 1$ converge sia semplicemente che assolutamente.

6 Continuità delle Funzioni

Definizione 28: Definizione di Funzione Continua

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ diciamo che f è **continua in** x_0 se vale una delle due proposizioni:

- x_0 è un punto isolato in A
- x_0 è un punto di accumulazione in A e vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se f è continua $\forall x \in A$, diciamo che è **continua nel suo dominio** e lo indichiamo con il simbolo $f \in C^0(A)$, e lo definiamo come

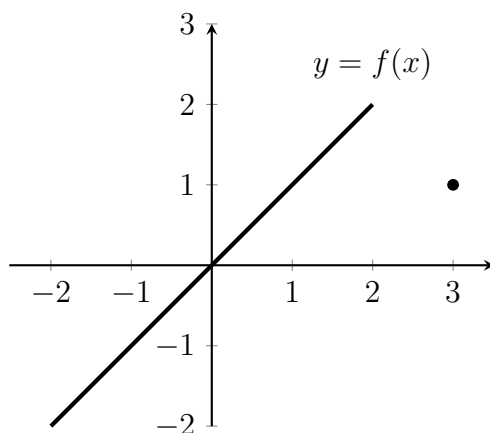
$$C^0(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } A\}$$

Usando questa definizione possiamo dimostrare che alcune funzioni sono continue, infatti

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$, è continua in \mathbb{R} infatti, come abbiamo già dimostrato

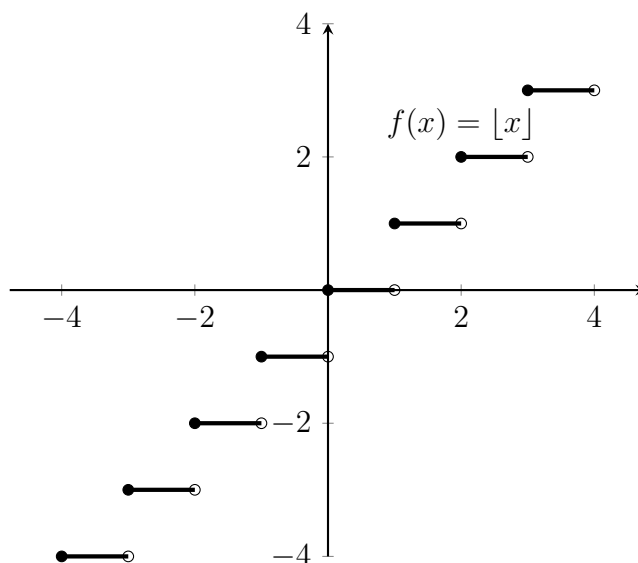
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \sum_i a_i x^i$, ogni polinomio è continuo, come abbiamo già dimostrato
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P, Q polinomi, abbiamo che è continua in $A = \{x : Q(x) \neq 0\}$
- $f(x) = a^x$ con $a > 0$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \cos(x)$



Notiamo che il dominio di questa funzione è $\mathbb{D}(f) = [-2, 2] \cup \{3\}$, e la funzione è continua nel suo dominio, questo perché $\forall x \in [-2, 2]$ la vale la seconda proposizione di funzione continua, mentre per il punto $x = 3$ dato che è un punto isolato è continuo per definizione.

Proviamo a vedere se è continua la funzione parte intera: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, il cui grafico è



Notiamo che per $x_0 \in \mathbb{Z}$ abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \lfloor x \rfloor = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$$

Ma Dato che il limite destro e sinistro sono diversi e quindi il limite in quel punto non esiste, e di conseguenza non è continua, visto che la continuità richiede che si possa calcolare il limite nel punto.

Mentre per $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, usando la definizione di limite e prendendo un valore di $\varepsilon < \min(x_0 - \lfloor x_0 \rfloor, \lceil x_0 \rceil - x_0)$ la funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ è costante $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ è costante e, quindi esiste il limite in quel punto e fa proprio

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$$

E quindi per quei valori la funzione è continua. Di conseguenza possiamo scrivere che $\lfloor x \rfloor \in C^0(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.

Un altro caso molto particolare è la funzione di Dirichlet, che è definita come

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Notiamo che se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, per caratterizzazione sequenziale possiamo scegliere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n \in \mathbb{Q}$ e $a_n \rightarrow x_0$, e questo possiamo farlo per la densità di \mathbb{Q} . In quei casi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_D(a_n) = 0$ perchè $a_n \in \mathbb{Q}$ e quindi la funzione restituisce 0, ma è diverso da $f_D(x_0) = 1$, visto che x_0 è irrazionale. Quindi visto che limite e valore effettivo sono diversi la funzione non è continua. Mentre per i casi $x_0 \in \mathbb{Q}$, possiamo usare sempre la caratterizzazione sequenziale con $a_n = x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2}$, e questa successione $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dato che c'è $\sqrt{2}$, ma $a_n \rightarrow x_0$, quindi il limite $f(a_n) \rightarrow 1$ visto che $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ma il valore della funzione è $f(x_0) = 0$, e quindi la funzione non è continua. In sostanza la funzione è discontinua $\forall x \in \mathbb{R}$, come era prevedibile.

Teorema 56: Caratterizzazione $\varepsilon - \delta$ della Funzione Continua

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, se f è continua in x_0 allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Questo viene dalla definizione di limite.

Teorema 57: Algebra delle Funzioni Continue

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, se f, g sono continue in x_0 allora

- $(f \pm g)(x)$ è continua in x_0
- $(f \cdot g)(x)$ è continua in x_0
- $(\frac{f}{g})(x)$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

Per dimostrare queste proposizioni è necessario usare l'algebra dei limiti finiti.

N.B. se le funzioni sono continue perchè x_0 è isolato, funziona lo stesso il teorema, perchè vuol dire che anche le funzioni $(f \pm g)$, $(f \cdot g)$ e $(\frac{f}{g})$ sono isolate nel punto x_0 , e quindi è continua per definizione. Con questo teorema possiamo dimostrare che le funzioni $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ e $\tan(x)$ sono continue.

Teorema 58: Limitatezza delle funzioni continue

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, se f è continua in x_0 allora è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$

Dimostrazione. Se x_0 è punto isolato, allora per forza la funzione è limitata visto che $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo che $|f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon$, quindi non abbiamo nulla da dimostrare.

Se x_0 è un punto di accumulazione, possiamo usare la definizione di limite e abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap I$$

Ma se guardiamo il termine

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \\ &\leq \varepsilon + |f(x_0)| \end{aligned}$$

Quindi notiamo che $f(x)$ è sempre limitata. □

Teorema 59: Permanenza del Segno di Funzioni Continue

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, se f è continua in x_0 allora

- $f(x_0) > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- $f(x_0) < 0$, allora $f(x) < 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Per dimostrarlo è sufficiente fare il ragionamento analogo al teorema della permanenza del segno

Teorema 60: Continuità di Funzioni Composte

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, f, g funzioni tali che $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia ben definita e sono tali

- f è continua in $x_0 \in \mathbb{D}(f) \cap A$
- g è continua in $f(x_0) \in \mathbb{D}(g)$

Allora anche $(g \circ f)(x)$ è continua in $x_0 \in A$.

Per dimostrarlo è sufficiente usare il teorema del cambio di variabile nella definizione di continuità.

Teorema 61: Caratterizzazione Sequenziale di funzioni Continue

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, se f è continua in x_0 se e solo se $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$ vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Per dimostrarlo è sufficiente usare la caratterizzazione sequenziale del limite nella definizione di continuità.

Definizione 29: Prolungamento per Continuità

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione in A , $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, se

$$l \neq f(x_0) \quad \text{oppure} \quad x_0 \notin A$$

Allora possiamo definire una nuova funzione $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ che chiamiamo **prolungamento di f in x_0** e la definiamo come

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

Vediamo un esempio pratico.

Esempio 25

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

Notiamo che il dominio di questa funzione è $\mathbb{D}(f) = x > -1 \wedge x \neq 0$, quindi possiamo vedere se possiamo prolungare in $x = 0$, e notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Quindi visto che esiste il limite e $0 \notin \mathbb{D}(f)$, e quindi possiamo prolungare la funzione:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

In questo modo abbiamo reso continua una funzione che prima era discontinua.

N.B. con la definizione che abbiamo dato di prolungamento, potremmo estendere anche per $\pm\infty$, infatti se la funzione ha limite ad infinito e sicuramente $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, quindi potremmo fare anche estensioni del tipo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Di conseguenza possiamo scrivere che

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \arctan(x) & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & x = +\infty \\ -\frac{\pi}{2} & x = -\infty \end{cases}$$

Pertanto possiamo calcolare la funzione nei punti $\pm\infty$, e possiamo scrivere $\tilde{f}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, visto che ora $+\infty$ è un punto del dominio. Questo può essere comodo per dimostrare certi problemi, però è meno intuitivo. Quindi per non rendere le definizioni ambigue, definiamo **prolungamento di f nei numeri reali** il prolungamento dove $x \neq \pm\infty$. D'ora in poi, quando scriverò prolungamento di una funzione, darò per scontato che sia un prolungamento nei reali.

Definizione 30: Punti di Discontinuità

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione in A , e diciamo che f **presenta una discontinuità** nel punto x_0 , se f non è continua in x_0 . Definiamo 3 tipologie di discontinuità:

- definiamo discontinuità **eliminabile** un punto x_0 se possiamo fare un prolungamento di f in x_0 .
- definiamo discontinuità **I specie** se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_{sx} \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_{dx} \in \mathbb{R}$$

Ma $l_{sx} \neq l_{dx}$. Questa discontinuità è detta anche **Salto**, infatti possiamo definire il salto come $S = l_{dx} - l_{sx}$.

- definiamo discontinuità **II specie** tutte le altre casistiche che non rientrano nella discontinuità eliminabile o di I specie.

Vediamo qualche esempio

Esempio 26

Determinare le discontinuità di

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

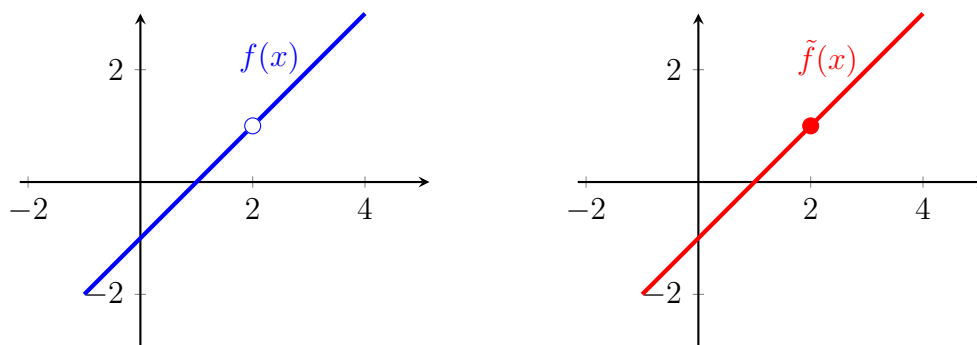
In primis notiamo che abbiamo un denominatore, quindi necessitiamo che il denominatore sia diverso da zero: $x - 2 \neq 0 \implies x \neq 2$, quindi $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Di conseguenza nel punto $x = 2$ la funzione non sarà continua. Capiamo che specie di discontinuità è

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1$$

Quindi notiamo che ricadiamo nella discontinuità eliminabile, visto che esiste il limite nel punto. E quindi è anche estendibile:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

Guardiamo il grafico delle 2 funzioni



Esempio 27

Determinare le discontinuità di

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

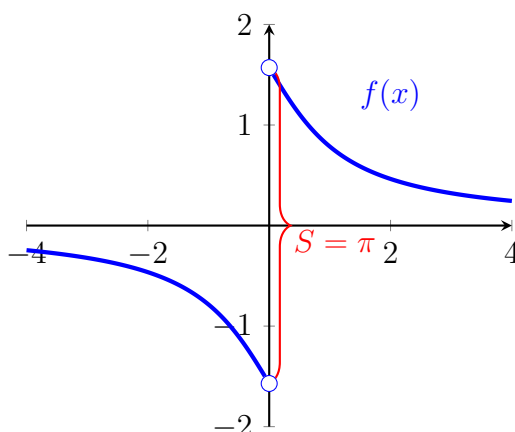
Anche qua come prima dobbiamo stare attenti al denominatore: $x \neq 0$, e quindi dobbiamo controllare solamente il punto $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Però ricordiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ perchè dobbiamo dividere nel limite destro e limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Quindi visto che esistono il limite destro e sinistro ma sono valori finiti ma diversi, ricadiamo nella discontinuità di I specie, e possiamo calcolare il salto $S = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$. Vediamo il grafico



Teorema 62: Teorema di Weierstrass

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e $f \in C^0([a, b])$, allora f ammette un massimo e un minimo in $[a, b]$. Cioè $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ tali che

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x_{\max}) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione. Dimostriamo per il caso del massimo, il minimo è analogo. Dato che $f \in C^0([a, b])$ allora sappiamo che almeno esiste un estremo superiore

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

E supponiamo che $M \in \mathbb{R}$, con la caratterizzazione dell'estremo superiore, sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in [a, b]$ tale che

$$f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$$

Di conseguenza possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

Ma visto che sappiamo che per ogni n possiamo trovare un x_n che soddisfa quella relazione, possiamo definire una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, che sappiamo che è limitato da

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \geq 1$$

Ora però per il teorema di Bolzano-Weierstrass, dato che la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, sappiamo che esiste almeno una sottosuccessione, $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l \in [a, b]$, per un qualsiasi valore di l . Ma dato che la nostra funzione è continua $\forall x \in [a, b]$, e dato che $l \in [a, b]$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \quad (23)$$

Riusiamo la caratterizzazione degli estremi, e la definizione di estremo superiore e sappiamo che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) < M \quad \forall n \geq 1$$

Portando tutto al limite abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} M - \frac{1}{n} &< \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) < \lim_{n \rightarrow +\infty} M \\ M < \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) < M &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M \end{aligned}$$

Ma dato che la serie converge ad M con la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, allora questo varrà per ogni sottosuccessione $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M \quad (24)$$

Ma combinando le informazioni (23) e (24) sappiamo che esiste almeno una sottosuccessione tale che

$$f(l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M \implies f(l) = M$$

Quindi abbiamo trovato un valore $l \in [a, b]$ tale che $f(l) = M$, ma M è l'estremo superiore, di conseguenza M è anche un massimo.

Se invece $M = +\infty$, dobbiamo ripetere tutto il ragionamento, e quindi sappiamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Ma allora x_n è limitata, e di conseguenza esiste almeno una sottosuccessione $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l \in [a, b]$, ma dato che f è continua abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \quad (25)$$

Riutilizzando la caratterizzazione degli estremi sappiamo che

$$f(x_n) > n$$

ma portando al limite abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) > \lim_{n \rightarrow +\infty} n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty \quad (26)$$

Ma questo varrà anche per ogni sottosuccessione $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, ma quindi campinando le informazioni (25) e (26) sappiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) &= f(l) \implies f(l) = +\infty \end{aligned}$$

Ma così abbiamo scoperto che un punto $l \in [a, b]$ vale $+\infty$, ma ciò è impossibile visto che f è continua in $[a, b]$, e quindi deve valutare solo valori finiti, quindi per assurdo, scopriamo che $M \neq +\infty$. \square

Teorema 63: Teorema di Bolzano (o degli Zeri)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e $f \in C^0([a, b])$ e se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$

Dimostrazione. Dato che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora possono accadere due casistiche: $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(b) < 0 < f(a)$, per comodità supponiamo che $f(a) < 0 < f(b)$, nell'altro caso è sufficiente porre $g(x) = -f(x)$, in questo modo $g(a) \cdot g(b) < 0$ e anche che $g(a) < 0 < g(b)$, e così con la dimostrazione che segue abbiamo dimostrato entrambe le casistiche.

Definiamo

$$a_0 = a \quad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad b_0 = b$$

E seguiamo il seguente algoritmo:

- Se $f(c_0) = 0$ abbiamo dimostrato il teorema, dato che $c_0 \in (a, b)$
- Se $f(c_0) < 0$, allora poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$, in modo tale che $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$
- Se $f(c_0) > 0$, allora poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$, in modo tale che $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$

Reiteriamo il procedimento, quindi definiamo

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

E seguiamo l' algoritmo:

- Se $f(c_1) = 0$ abbiamo dimostrato il teorema, dato che $c_1 \in (a, b)$
- Se $f(c_1) < 0$, allora poniamo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$, in modo tale che $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$
- Se $f(c_1) > 0$, allora poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$, in modo tale che $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$

All' n -esimo passo, qualora non fosse mai stata verificata la prima condizione dell'algoritmo, avremo che

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- Se $f(c_n) = 0$ abbiamo dimostrato il teorema, dato che $c_n \in (a, b)$
- Se $f(c_n) < 0$, allora poniamo $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$
- Se $f(c_n) > 0$, allora poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$

Con questo, possiamo definire le due successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e sappiamo che

(i) $f(a_n) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $f(b_n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente, dato che ad ogni passaggio o resta uguale al passaggio precedente oppure diventa $\frac{a_n + b_n}{2}$, che dato che $a_n < b_n$ sappiamo che

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \frac{a_n + a_n}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente, per lo stesso ragionamento di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Dato che entrambe le successioni sono monotone e limitate sappiamo che convergono a dei valori, che chiamiamo $a_n \rightarrow A \in (a, b)$ e $b_n \rightarrow B \in (a, b)$. In più, dato che ad ogni passaggio prendiamo la metà degli estremi, sappiamo che

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \implies b_n = a_n + \frac{b - a}{2^n}$$

Se portiamo al limite questa informazione scopriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_n + \frac{b - a}{2^n} \right) \implies B = A + 0 \implies B = A$$

Se prendo $c = A = B$, usando la continuità di f e (i), (ii)

$$f(c) = f(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0$$

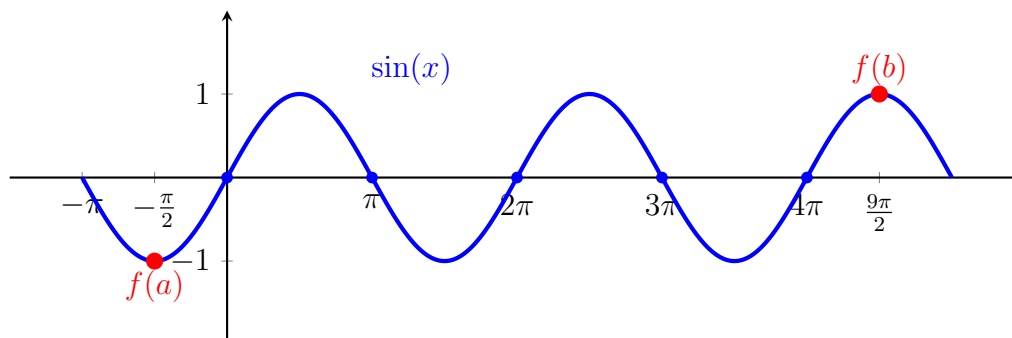
$$f(c) = f(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0$$

Da cui

$$0 \leq f(c) \leq 0 \implies f(c) = 0$$

□

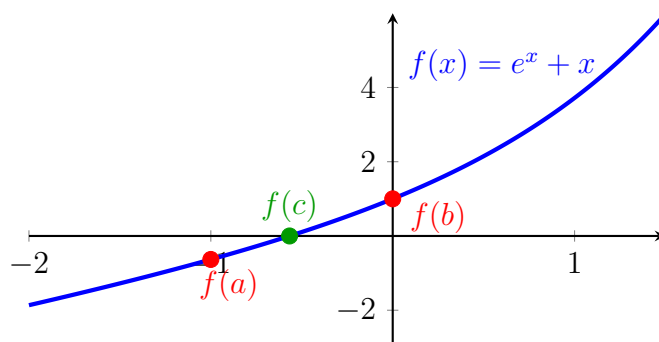
N.B. Il teorema ci dice che esiste almeno uno zero, ciò vuol dire che ne possono esistere molteplici. Per esempio se prendo $f(x) = \sin(x)$ e prendo $a = -\frac{\pi}{2}$ e $b = \frac{9\pi}{2}$, sappiamo che $\sin(x) \in C^0(\mathbb{R})$ e che $f(a) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(b) = \sin(\frac{9\pi}{2}) = 1$ e quindi $f(a) \cdot f(b) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$, quindi è applicabile il teorema di Bolzano, e quindi sappiamo che ne esiste almeno uno zero. Ma se andiamo a vedere il grafico.



Ma notiamo subito che esistono 4 zeri. Può succedere che ci venga richiesto dell'esistenza di un unico zero, in quel caso bisogna controllare se è verificato il teorema di Bolzano (per vedere se ha degli zeri), e poi controllare se la funzione è monotona. Infatti se la funzione è monotona è verifica il teorema di Bolzano allora sappiamo che $\exists! c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Infatti con l'esempio del seno, sappiamo che il seno non è monotono, e pertanto abbiamo che ci sono più zeri.

Invece se prendiamo la funzione $f(x) = e^x + x$ e prendiamo $a = -1$ e $b = 0$, notiamo subito che $f \in C^0(\mathbb{R})$ e che $f(b) = f(0) = e^0 + 0 = 1$ e per $f(a)$ dobbiamo ricordarci che $e^{-1} < 1$, infatti $f(-1) = e^{-1} - 1 < 1 - 1 = 0$, e quindi il teorema è applicabile.

In più notiamo che e^x è monotona crescente, e anche x è crescente e di conseguenza f è crescente e per questo sappiamo che $\exists! c \in (-1, 0)$ tale che $f(c) = 0$. Infatti con il grafico notiamo che



Infatti graficamente abbiamo ciò che ci aspettavamo. Per calcolare c possiamo usare il metodo usato nella dimostrazione del teorema di Bolzano, che è detto **metodo di bisezione**. Facciamo qualche passo per questo esempio:

$$c_0 = \frac{-1 + 0}{2} = -0.5 \implies f(c_1) = e^{-0.5} + 0.5 \approx 0.1065$$

$$a_1 = -1 \quad b_1 = -0.5 \quad c_1 = -0.75 \implies f(c_1) \approx -0.2776$$

$$a_2 = -0.75 \quad b_2 = -0.5 \quad c_2 = -0.625 \implies f(c_2) \approx -0.090$$

E così via. Tramite una decina di iterazioni con un computer scopriamo che $c \approx -0.5671$.

Teorema 64: Teorema dei Valori Intermedi

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^0(I)$ allora

$$\left(\inf_I(f), \sup_I(f) \right) \subseteq f(I) \subseteq \left[\inf_I(f), \sup_I(f) \right]$$

Dimostrazione. In primis possiamo notare che la disequazione

$$f(I) \subseteq \left[\inf_I(f), \sup_I(f) \right] \implies \inf_I(f) \leq f(I) \leq \sup_I(f)$$

Ma questo è ovvio, per la definizione di estremo superiore e inferiore. Pertanto dobbiamo solamente dimostrare l'altra disequazione.

Per dimostrare il teorema è sufficiente che $\forall y \in (\inf_I(f), \sup_I(f)) \exists x \in I : y = f(x)$. Perchè vuol dire che ad ogni valore di y riesco a trovare una x in modo tale che $y = f(x)$, e se riesco a dimostrarlo per tutti i valori di y abbiamo dimostrato il teorema. Ora quindi supponiamo di prendere $y \in (\inf_I(f), \sup_I(f))$, riscrivendo scopriamo che

$$\underline{\inf_I f} < y < \sup_I f$$

Da cui scopriamo che

- $\underline{\inf_I f} < y$ vuol dire che y NON è un minorante, dato che è più grande dell' estremo inferiore. Quindi potremmo trovare $\forall y \exists a \in I$ tale che

$$\inf_I f < f(a) < y \implies f(a) - y < 0 \quad (27)$$

- $y < \sup_I f$ vuol dire che y NON è un maggiorante, dato che è più piccolo dell'estremo superiore. Quindi potremmo trovare $\forall y \exists b \in I$ tale che

$$y < f(b) < \sup_I f \implies f(b) - y > 0 \quad (28)$$

Per comodità supponiamo che $a < b$. Da qui definiamo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$g(x) = f(x) - y \quad \forall x \in [a, b]$$

Notiamo che

- (i) dato che, per ipotesi, $f(x) \in C^0(I)$ allora anche $g(x) \in C^0(I)$
- (ii) Con (27) deduciamo che $g(a) = f(a) - y < 0$
- (iii) Con (28) deduciamo che $g(b) = f(b) - y > 0$

Ma queste tre condizioni rendono possibile l'applicazione del teorema di Bolzano, dato che $g(a) \cdot g(b) < 0$, e quindi sappiamo che $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$g(c) = 0 \implies f(c) - y = 0 \implies f(c) = y$$

Ma quindi $\forall y \in (\inf_I(f), \sup_I(f))$ riesco trovare un $\exists a, b \in I$, e abbiamo scoperto che $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = y$, e quindi abbiamo verificato il teorema. \square

Corollario 2: del Teorema dei Valori Intermedi

Sia $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^0([a, b])$ allora

$$f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$$

Dimostrazione. Per il teorema dei valori intermedi sappiamo che

$$\left(\inf_{[a, b]}(f), \sup_{[a, b]}(f) \right) \subseteq f([a, b]) \subseteq \left[\inf_{[a, b]}, \sup_{[a, b]} \right]$$

Ma con il teorema di Weierstrass sappiamo che la funzione ammette un massimo e un minimo, per la relazione dei estremi e massimi e minimi, allora sappiamo che se esiste un massimo o minimo allora coincide con l'estremo superiore/inferiore, quindi l'equazione sopra diventa

$$\left(\min_{[a, b]}(f), \max_{[a, b]}(f) \right) \subseteq f([a, b]) \subseteq \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$$

Ma dato che $\max_{[a, b]}(f) \in f([a, b])$ e $\min_{[a, b]}(f) \in f([a, b])$, allora sappiamo che

$$\left[\min_{[a, b]}(f), \max_{[a, b]}(f) \right] \subseteq f([a, b]) \subseteq \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right] \implies f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$$

□

Teorema 65: Continuità della funzione inversa

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^0(I)$ e invertibile in I allora

$$f^{-1} \in C^0(f(I)) \iff f \text{ è strettamente monotona}$$

Con questo teorema possiamo trovare altre funzioni continue, per esempio $f(x) = a^x$ con $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, noi sappiamo che $f \in C^0(\mathbb{R})$ e in più sappiamo che f è strettamente crescente per $x \in (1, +\infty)$ e decrescente per $x \in (0, 1)$, e quindi da questo sappiamo che la funzione inversa: $f(x) = \log_a(x)$ è continua nel suo dominio: $(0, +\infty)$.

Poi possiamo trovare anche per le funzione trigonometriche inverse, ma dobbiamo fare delle eventuali costrizioni. Prendiamo la funzione $f(x) = \sin(x)$, è vero che è continua in \mathbb{R} , ma non è sempre monotona, però se noi prendiamo il seno da $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ allora in questo intervallo è strettamente crescente, quindi possiamo dedurre che $f(x) = \arcsin(x)$ è continua in $[-1, 1]$.

Stesso ragionamento, per $f(x) = \cos(x)$ se lo prendiamo per $x \in [0, \pi]$ allora la funzione è strettamente decrescente e quindi possiamo dedurre che $f(x) = \arccos(x)$ e che $f \in C^0([-1, 1])$.

Ragionamento analogo anche per $f(x) = \tan(x)$, infatti se prendo la funzione nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, allora so che è monotona crescente e quindi $f(x) = \arctan(x)$ è continua in \mathbb{R} .

Tutto ciò si può dire anche per le funzioni iperboliche.

7 Derivabilità

Definizione 31: Derivata di una funzione in un punto

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, se esiste il seguente limite finito

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

Diciamo che f è **derivabile** in x_0 e lo indichiamo con il simbolo

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se invece non esiste il limite oppure tende a $\pm\infty$ diciamo che non è derivabile.

Diciamo che f è **derivabile** (oppure **differenziabile**) se è derivabile per ogni punto del suo dominio.

N.B. la notazione di derivata può variare, infatti ci sono varie notazioni e possono aiutare a capire il contesto, infatti potreste trovare indicata la derivata di $f(x)$ in x_0 come:

- $f'(x_0)$ che è la più classica ed usata
- $\frac{df}{dx}(x_0)$ oppure $\frac{d}{dx}(f(x_0))$ nei contesti geometrici oppure nelle equazioni differenziali
- $\dot{f}(x_0)$ tendenzialmente si usa in fisica
- $D[f(x_0)]$ quando vogliamo indicare l'operatore derivata
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ quando usiamo funzioni a più dimensioni

Quindi quando trovate uno di questi simboli indicano sempre una derivata, ma in contesti differenti. Ora proviamo a calcolare quelle fondamentali

Esercizio 64

Calcolare la derivata di $f(x) = c$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ con $c \in \mathbb{R}$

Usiamo la definizione di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

Quindi per qualsiasi funzione costante abbiamo che la sua derivata è sempre e solo 0. Questo quando vedremo gli integrali porterà ad una proprietà unica degli integrali.

Esercizio 65

Calcolare la derivata di $f(x) = x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$

Usiamo sempre la definizione

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Esercizio 66

Calcolare la derivata di $f(x) = x^2$ in $x_0 \in \mathbb{R}$

Usiamo sempre la definizione

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Per ora non abbiamo ancora trovato un pattern comodo per le potenze, proviamo a calcolare la potenza n-esima.

Esercizio 67

Calcolare la derivata di $f(x) = x^n$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$

Usiamo sempre la definizione

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

Per calcolarlo dobbiamo riutilizzare la formula che abbiamo usato anche per il limite $x^n \rightarrow x_0^n$ e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1-k} x_0^k = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1-k+k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Per le prossime derivate dobbiamo un attimino modificare la definizione di derivata, infatti se alla definizione applico un cambio di variabile con $h = x - x_0$, e quindi $x = h + x_0$, abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Con questo possiamo sostituire x_0 con x per calcolare la funzione derivata su qualsiasi punto anzichè su un punto solo. Quindi la nuova definizione di derivata (che è uguale a quella di prima ma può essere più comoda per certi conti) è

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Esercizio 68

Calcolare la derivata di $f(x) = x^\alpha$ in $x > 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Usiamo sempre la definizione

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(x \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right)^\alpha - x^\alpha}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cdot \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{h} \end{aligned}$$

Possiamo applicare un cambio di variabile con $t = \frac{h}{x}$, e dato che $x > 0$ non ci reca alcun danno.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cdot \left(\left(1 + \frac{h}{x} \right)^\alpha - 1 \right)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{(1+t)^\alpha - 1}{tx} = \lim_{t \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$$

Ora dobbiamo usare un limite notevole al contrario. Infatti noi sappiamo che

$$e^t \sim 1 + t \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

E quindi nella stramagioranza degli esercizi sostituivamo $1+t$ al posto di e^t , ma possiamo fare anche il contrario. In effetti in questo caso ci conviene sostituire $1+t$ con e^t . Quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} \sim \lim_{t \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \frac{(e^t)^\alpha - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Esercizio 69

Calcolare da derivata di $f(x) = \sin(x)$

Usiamo sempre la definizione

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \sin(h) \cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) \cos(h) - \sin(x)}{h} + \frac{\sin(h) \cos(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

Sistemando i limiti notevoli abbiamo

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) \cos(h) - \sin(x)}{h} + \frac{\sin(h) \cos(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin(x) \frac{(\cos(h) - 1)}{h^2} \cdot h + \frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \right) = \sin(x) \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

Ragionamento analogo per il coseno

Esercizio 70

Calcolare da derivata di $f(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \sin(h) \sin(x) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) \cos(h) - \cos(x)}{h} - \frac{\sin(h) \sin(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

Per lo stesso ragionamento di prima

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \frac{\sin(h) \sin(x)}{h} \right) = \cos(x) \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot 0 - 1 \cdot \sin(x) = -\sin(x)$$

Attenzione quindi che la derivata del coseno è meno seno, cosa che può portare a confusione anche perchè con gli integrali sarà il contrario, quindi attenzione

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

Esercizio 71

Calcolare la derivata di $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$$

Una caratteristica che ci tornerà utile con le equazioni differenziali è che l'esponenziale è l'unica funzione la cui derivata è uguale alla funzione di partenza, e vedremo come ci aiuterà a risolvere le equazioni differenziali.

Esercizio 72

Calcolare la derivata di $f(x) = \log(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \end{aligned}$$

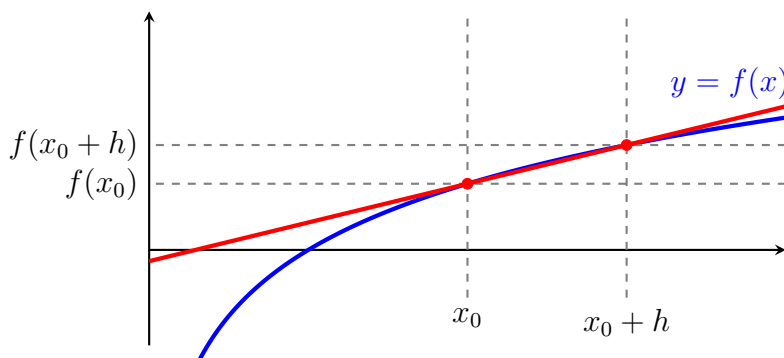
Ora è sufficiente fare un cambio di variabile con $t = \frac{h}{x}$, questo è possibile dato che $x > 0$ per il dominio di $f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \log\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \log\left((1+t)^{\frac{1}{tx}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \log\left(\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{x} \log(e) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

In seguito una tabella che racchiude le principali derivate

Funzione Base	Derivata	Funzione Base	Derivata
c	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x	$\log(x)$	$\frac{1}{x}$

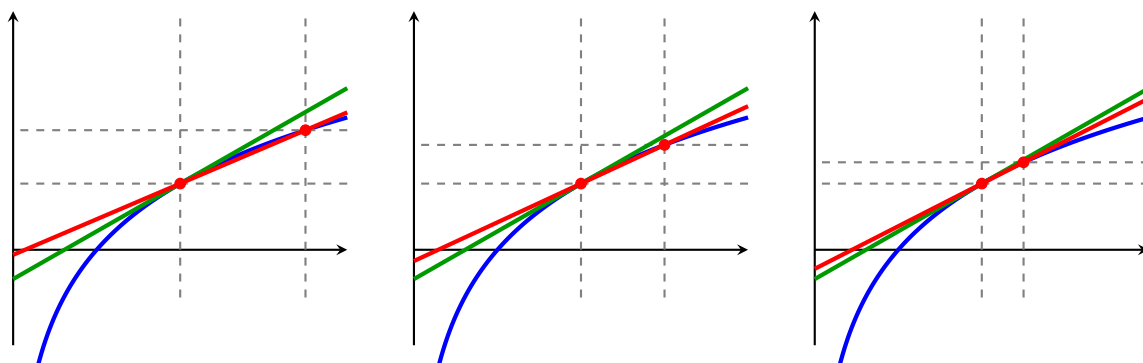
Ora vediamo da dove viene fuori la derivata, infatti se prendiamo una qualsiasi funzione e scegliamo un punto x_0 e prendiamo anche un altro punto $x_0 + h$, con $h > 0$, e tracciamo la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ notiamo che



Notiamo che il limite che abbiamo calcolato fino ad ora non è altro che il coefficiente angolare della retta disegnata in rosso. Infatti

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Questo rapporto è definito anche come **rapporto incrementale**. Ma la derivata è il limite di questo rapporto, quindi con la derivata stiamo cercando di avvicinarci il più possibile alla retta tangente nel punto x_0 , infatti più che $h \rightarrow 0$ più che la retta rossa tende alla retta tangente effettiva (quella in verde)



Di conseguenza abbiamo capito che la derivata è il limite del rapporto incrementale, e che quindi è il coefficiente angolare della retta tangente in un punto ad una qualsiasi funzione $y = f(x)$. Quindi in generale la retta tangente ad una funzione in un punto è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Possiamo notare che se calcoliamo questo limite della differenza tra la funzione $f(x)$ e la sua retta tangente e lo dividiamo per $x - x_0$ notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)$$

Ma dato che sappiamo che la funzione è derivabile (visto che esiste la retta tangente) in x_0 allora il limite tende a $f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Dato che è venuto fuori 0, allora se definiamo $a = f'(x_0)$ e $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ possiamo dire

$$f(x) - (ax + b) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Definizione 32: Retta Tangente

In maniera più formale, definiamo **retta tangente** a f nel punto x_0 la retta di equazione

$$y = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

tale che

$$f(x) - (ax + b) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Con questa formula si possono ricavare, ormai già ben noti, i prodotti notevoli, infatti se prendiamo $f(x) = e^x$, allora calcoliamo la retta tangente in $x_0 = 0$

$$f(x_0) = e^0 = 1 \quad f'(x_0) = e^0 = 1$$

Quindi la retta tangente ha l'equazione

$$y = 1 + 1(x - 0) \implies y = x + 1$$

E quindi dato che è la retta tangente sappiamo che

$$e^x - (x + 1) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Da cui ricaviamo

$$e^x = x + 1 + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Che conoscevamo già. Poi si possono dimostrare anche tutti gli altri limiti notevoli.

Esercizio 73

Determinare l'equazione delle due rette passanti per $(1, -3)$ e tangenti al grafico di $f(x) = x^2$

Possiamo trovare la retta generale ad $f(x) = x^2$ per un punto generale x_0 , che poi decideremo con l'altra condizione. Quindi in primis dobbiamo calcolare la derivata di $f(x)$, che con le formule che abbiamo scoperto prima abbiamo che

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Quindi la retta tangente sarà

$$f(x_0) = x_0^2 \quad f'(x_0) = 2x_0$$

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \implies y = x_0^2 + 2x_0x - 2x_0^2 \implies y = 2x_0x - x_0^2$$

Ora questa è la retta generica, noi dobbiamo trovare quelle che passano per $(1, -3)$ quindi sostituiamo le coordinate

$$-3 = 2x_0 \cdot 1 - x_0^2 \implies -x_0^2 + 2x_0 + 3 = 0 \implies x_0 = -1 \vee x_0 = 3$$

Quindi le due rette sono

$$y = 2(-1)x - (-1)^2 \implies y = -2x - 2 \quad y = 2(3)x - (3)^2 \implies y = 6x - 9$$

Teorema 66: Relazione tra Continuità e Derivabilità

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in $x_0 \in I$ allora è anche continua.

$$\text{Derivabilità} \implies \text{Continuità}$$

Dimostrazione. Dato che f è derivabile in x_0 allora esiste la retta tangente nel punto x_0 . Quindi se calcoliamo il limite di f possiamo sostituirlo con la formula della retta tangente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

□

Questa informazione può essere molto utile negli esercizi perchè se vediamo che un punto non è continuo, allora non sarà nemmeno derivabile.

N.B. Non è vero il contrario, infatti se prendiamo $f(x) = |x|$, per i limiti sappiamo che è continua in \mathbb{R} , però se proviamo a calcolare la derivata in $x = 0$ notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Se proviamo a distinguere il caso del limite destro e sinistro, usando anche la proprietà del modulo tale che se $x > 0$ allora $|x| = x$, mentre se $x < 0$ allora $|x| = -x$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Ma quindi limite destro e sinistro sono diversi e quindi il limite non esiste e questo vuol dire che la funzione non è derivabile in quel punto. Con questo ragionamento possiamo dedurre che

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Definizione 33: Derivata Destra e Sinistra

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ allora

- Se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

diciamo che f è **derivabile da destra** in x_0 e lo indichiamo come $f'_+(x_0)$.

- Se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

diciamo che f è **derivabile da sinistra** in x_0 e lo indichiamo come $f'_-(x_0)$.

Definizione 34: Classificazione dei punti di non Derivabilità

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ punto di non derivabilità, allora

- Se $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$ oppure $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$ allora diciamo che f ha un **Flesso a tangente verticale** in x_0
- Se $f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \vee f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ (chiaramente $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, altrimenti sarebbe derivabile), allora diciamo che f ha un **punto angoloso** in x_0
- Se $f'_-(x_0) = -\infty \wedge f'_+(x_0) = +\infty$ oppure $f'_-(x_0) = +\infty \wedge f'_+(x_0) = -\infty$ allora diciamo che f ha una **cuspide** in x_0

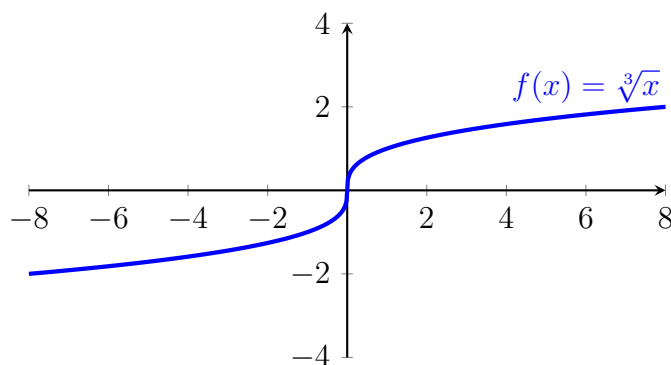
Vediamo degli esempi, per esempio la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, possiamo calcolare la derivata con le regole di prima

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ora possiamo calcolare la derivata destra e sinistra in $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

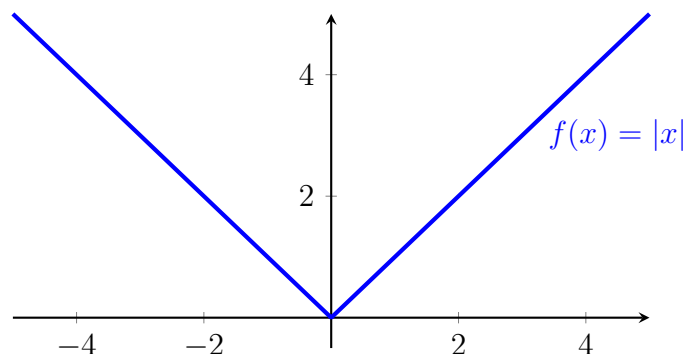
Quindi notiamo che è un flesso a tangente verticale, e vediamo graficamente che nel punto $x = 0$ la funzione "impenna" drasticamente per poi riassetarsi.



Per il punto angoloso abbiamo già visto un esempio: il valore assoluto. Infatti avevamo visto che

$$f'_-(0) = -1 \qquad f'_+(0) = 1$$

E graficamente notiamo che si forma un angolo in $x = 0$

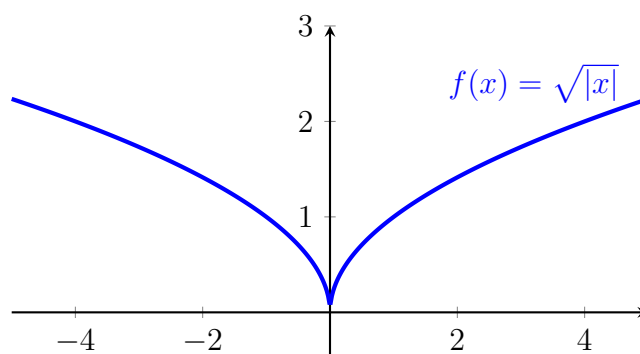


Invece se prendiamo la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ dobbiamo usare la definizione di derivata destra e sinistra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|0|}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|0|}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{-(\sqrt{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt{-x}} = -\infty$$

Quindi ricadiamo nella casistica della cuspide, che graficamente assomiglia ad una V (o una V rovesciata se il segno segni infiniti è invertito)



Teorema 67: Algebra delle Derivate

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in I allora

(i) $(\alpha f \pm \beta g)(x)$ è continua in I (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) e vale

$$\frac{d}{dx}((\alpha f \pm \beta g)(x)) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$$

(ii) $(f \cdot g)(x)$ è continua in I e vale

$$\frac{d}{dx}((f \cdot g)(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ è continua in I se $g(x) \neq 0$ e vale

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Dimostrazione. (i) quindi data la funzione $(\alpha f \pm \beta g)(x)$ usiamo la definizione di derivata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((\alpha f \pm \beta g)(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) \pm \beta g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f(x) - \alpha f(x_0)) \pm (\beta g(x) - \beta g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \beta \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Per ipotesi sappiamo che f e g sono derivabili e quindi vale

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Quindi usando l'algebra dei limiti scopriamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \beta \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) \pm \beta g'(x_0)$$

Ma dato che f e g sono continue $\forall x \in I$, possiamo più semplicemente scrivere

$$\frac{d}{dx}((\alpha f \pm \beta g)(x)) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$$

(ii) Usando la definizione di derivata abbiamo che

$$\frac{d}{dx}((f \cdot g)(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

Per dimostrare questo è sufficiente aggiungere e togliere il termine $f(x_0)g(x)$ (oppure anche $f(x)g(x_0)$) e notiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - \cancel{f(x_0)g(x)} + \cancel{f(x_0)g(x)} - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Per le frazioni usiamo lo stesso ragionamento di prima, per il termine $f(x_0)$ lo possiamo portare fuori dato che è una costante, invece il termine $g(x)$ dobbiamo ragionare. Infatti noi sappiamo solamente che g è derivabile, però non sappiamo nulla su $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Però possiamo ricordarci che se una funzione è derivabile allora è anche continua. Pertanto scopriamo che g è anche continua, e che quindi vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Come prima, dato che f e g sono derivabili (e continue) $\forall x \in I$, possiamo riscriverlo come

$$g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(iii) Usiamo la definizione di derivata

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{f}{g} \right) (x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

Facciamo il denominatore comune

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

Ora possiamo fare lo stesso truccetto di prima aggiungendo e sottraendo $f(x)g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - \cancel{f(x)g(x)} + \cancel{f(x)g(x)} - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-f(x)(-g(x_0) + g(x)) + (f(x) - f(x_0))g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) \cdot \frac{-g(x_0) + g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} + \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \cdot g(x) \end{aligned}$$

Ora possiamo usare come prima la definizione di derivata per f e g , e anche per la continuità di f e g sappiamo che $f(x) \rightarrow f(x_0)$ e $g(x) \rightarrow g(x_0)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) \cdot \frac{-g(x_0) + g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} + \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \cdot g(x) &= \frac{-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)g(x_0)} + \frac{f'(x_0)g(x_0)}{g(x_0)g(x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

□

Teorema 68: Derivata di Funzioni Composte

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, f, g due funzioni tali che $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$, è ben definito. Se

- f è derivabile in $x_0 \in I$
- g è derivabile in $f(x_0)$

Allora

$$\frac{d}{dx}((g \circ f)(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dimostrazione. Usando la definizione di retta tangente, e il cambio di variabile sappiamo che

$$(1) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$(2) \quad g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0) \text{ per } y \rightarrow y_0$$

Quindi se scegliamo $y_0 = f(x_0)$, avremo che

$$g(\underline{y}) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(\underline{y} - f(x_0)) + o(\underline{y} - f(x_0)) \text{ per } \underline{y} \rightarrow f(x_0)$$

Quindi ora calcolando $g(f(x))$ avremo che

$$g(\underline{f(x)}) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(\underline{f(x)} - f(x_0)) + o(\underline{f(x)} - f(x_0)) \text{ per } \underline{f(x)} \rightarrow f(x_0)$$

Ora dato usando (1) possiamo calcolare meglio

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

Ora riscriviamo meglio il termine con l'o-piccolo, usando la proprietà $o(f + o(f)) = o(f)$ e quella che perde tutte le costanti moltiplicative

$$\begin{aligned} o(f(x) - f(x_0)) &= o(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= o\left(f'(x_0)\left((x - x_0) + \frac{o(x - x_0)}{f'(x_0)}\right)\right) \\ &= o(x - x_0 + o(x - x_0)) = o(x - x_0) \end{aligned}$$

Quindi riprendendo l'espressione con $g(f(x))$ possiamo dire che

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(x - x_0) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0)) + g'(f(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0)) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

Portanto il termine $g(f(x_0))$ alla sinistra scopriamo che

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0)) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Con questa informazione possiamo usare la definizione di derivata

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0)) + o(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0) + 0 \\ &= g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

□

Vediamo qualche esercizio per impraticarci con i teoremi visti fino ad ora.

Esercizio 74

Calcolare la dericata di

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x}$$

Notiamo subito che è una frazione, quindi usiamo la regola del quoziente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 + x^2}{1 + x} \right) &= \frac{(1 + x^2)'(1 + x) - (1 + x^2)(1 + x)'}{(1 + x)^2} \\ &= \frac{(2x)(1 + x) - (1 + x^2)(1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Esercizio 75

Calcolare la dericata di

$$f(x) = \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)^5$$

Notiamo che questo esercizio è molto simile a quello precedente, però c'è la potenza 5 che rovina i piani. Quindi possiamo fare il teorema delle funzioni composte, infatti se scelgo $y = \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)$, in questo modo abbiamo

$$g(y) = y^5 \qquad h(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$$

Dato che la funzione originale non è altro che $f(x) = g(h(x))$, la derivata di $h(x)$ la possiamo utilizzare quella dell'esercizio scorso. Quindi calcoliamo le singole derivate

$$g'(y) = 5y^4 \qquad h'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

Di conseguenza:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(g(h(x))) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 5 \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)^4 \cdot \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

Scrivendo meglio

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{5(1+x^2)^4(x^2 + 2x - 1)}{(x+1)^6}$$

Esercizio 76

Calcolare la dericata di

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Questo esercizio è semplicemente una frazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) &= \frac{(\cos(x))'(\sin(x)) - (\cos(x))(\sin(x))'}{(\sin(x))^2} \\ &= \frac{(-\sin(x))(\sin(x)) - (\cos(x))(\cos(x))}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Esercizio 77

Calcolare la dericata di

$$f(x) = (x \cot(x))^2$$

Notiamo che sembra di essere nella situazione simile a prima, quindi posso scegliere

$$g(y) = y^2 \qquad h(x) = x \cot(x)$$

Però notiamo che la derivata di $g(y)$ è molto semplice, infatti $g'(y) = 2y$, però la derivata di $h(x)$ dobbiamo fare qualche conto in più, infatti dobbiamo usare la regola del prodotto

$$h'(x) = (x)' \cot(x) + x(\cot(x))' = 1 \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + x \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2(x)} \right) = \frac{\cos(x) \sin(x) - x}{\sin^2(x)}$$

Ora possiamo usare la regola della composizione

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(g(h(x))) = g'(h(x))h'(x) = 2(x \cot(x)) \cdot \frac{\cos(x) \sin(x) - x}{\sin^2(x)}$$

Che scrivendo meglio

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{2x \cos(x)(\cos(x) \sin(x) - x)}{\sin^3(x)}$$

Esercizio 78

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Rimandando con la stessa logica potremmo scegliere

$$g(y) = \sqrt{y} \quad h(x) = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

La derivata di $g(y)$ sappiamo che è $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, ma la dobbiamo invece calcolare la derivata di $h(x)$.

$$h'(x) = \frac{d}{dx} \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right) = 1 + \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right)'$$

Però noi non sappiamo quale è la derivata di quella radice, quindi dobbiamo riapplicare il criterio della composta, e scegliamo

$$j(y) = \sqrt{y} \quad k(x) = x + \sqrt{x}$$

Di questo possiamo calcolare la derivata

$$j'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad k'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Di conseguenza

$$\frac{d}{dx}(j(k(x))) = j'(k(x))k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Quindi ora possiamo calcolare $h'(x)$

$$h'(x) = 1 + \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right)' = 1 + \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Ma quindi ora possiamo calcolare $f'(x)$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(g(h(x))) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} \right)$$

Teorema 69: Derivabilità della funzione Inversa

Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se f è derivabile e invertibile, sia $x_0 \in I$, se $f'(x_0) \neq 0$ allora definiamo $y_0 = f(x_0)$ e vale

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(y_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di derivata

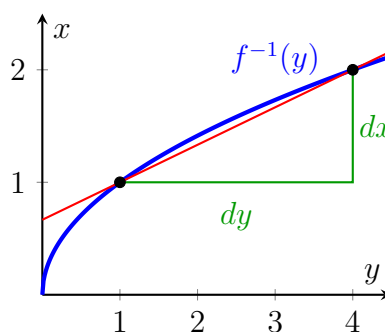
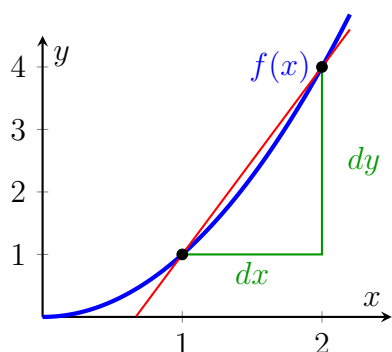
$$\frac{d}{dy}(f^{-1}(y_0)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Ora possiamo applicare un cambio di variabile con $y = f(x)$, allora sappiamo che $y_0 = f(x_0)$, e di conseguenza $x = f^{-1}(y)$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$ allora

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

□

Proviamo a derivare la derivata della funzione inversa in maniera geometrica. Infatti noi sappiamo che la derivata è il limite del coefficiente angolare della retta tangente, e quindi se il coefficiente della retta lo calcoliamo con $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se lo portiamo il limite lo scriviamo come $\frac{dy}{dx}$, è per questo motivo che si scrive anche in questo modo la derivata. Quindi se prendiamo la funzione $f(x) = x^2$ e la sua inversa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ (Consideriamo solo valori positivi di x).



Possiamo notare che il coefficiente angolare della retta di $f^{-1}(y)$ non è altro che $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, dato che gli assi sono invertiti rispetto alla funzione originale. Quindi se portiamo al limite questa informazione sappiamo che la derivata di $f^{-1}(y)$ la calcoliamo come $\frac{dx}{dy}$. Noi però conosciamo solamente la derivata di $f(x)$ che è $\frac{dy}{dx}$, quindi dato che è una frazione possiamo calcolare la derivata di $f^{-1}(y)$ come

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esercitiamoci con qualche funzione inversa molto importante, partiamo con

Esercizio 79

Calcolare la derivata della funzione inversa di

$$f(x) = \sin(x)$$

In sostanza l'esercizio ci sta chiedendo di calcolare la derivata di $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$, quindi in primis dobbiamo calcolare la derivata di $f(x)$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Quindi

$$\frac{d}{dy}(\arcsin(y)) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Però ora dobbiamo tornare alla variabile y , e quindi dovremmo sostituire al posto di $x = \arcsin(y)$, ma dopo verrebbe un denominatore troppo complesso. Quindi per semplificarci la vita, cerchiamo di riscrivere $\cos(x)$ in funzione di $\sin(x)$, in modo tale che dopo possiamo sostituire $\sin(x) = y$ (dato che prima dovevamo sostituire $x = \arcsin(y)$). Quindi usando le formule fondamentali della trigonometria abbiamo che

$$\frac{d}{dy}(\arcsin(y)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Esercizio 80

Calcolare la derivata della funzione inversa di

$$f(x) = \tan(x)$$

Quindi ci stanno chiedendo di calcolare la derivata di $f^{-1}(y) = \arctan(y)$, quindi in primis dobbiamo calcolare la derivata di $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

Ho scritto la derivata così, e non $\frac{1}{\cos^2(x)}$, per evitare di avere lo stesso problema dell'esercizio di prima. Infatti prima abbiamo dovuto riscrivere il $\cos(x)$ in funzione del $\sin(x)$ in modo da sostituire $y = \sin(x)$. Quindi ho già scritto la derivata di $f(x)$ in funzione di $\tan(x)$, così da evitare il passaggio che abbiamo fatto sopra (e anche perchè non era così semplice per questo esercizio) e poter sostituire subito $y = \tan(x)$. Quindi la derivata di $\arctan(y)$ è

$$\frac{d}{dy}(\arctan(y)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}$$