得分

一、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．函数极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的 ε-X 定义是

____;

2．叙述函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lagrange 中值定理：__________________________________

____;

3．设 $y=x^2\cos x$，则

$d^{(n)}y=$____;

4．设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}+\cos^4 x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$,则 $f(x)=$__________________________________;

5．设 n 为自然数，则反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=$_________________________.

得分

二、计算下列各题（共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan^2 x\bullet\ln\left(1-x^2\right)}{e^{x^2}+2\cos x-3}$.

2. 求不定积分 $\int \sin(\ln x)\,dx$.

3. 计算定积分 $\int_0^2 \frac{dx}{x+\sqrt{4-x^2}}$.

三、**解答下列各题**（共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1. 设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+x_1},\cdots$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n},\cdots$，其中 $a>0$ 是常数.证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设曲线方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\int_0^t \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$，求曲线上对应 $t=1$ 处的切线方程，并求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. 求函数 $f\left(x\right)=\left(x+6\right)e^{\frac{1}{x}}$ 的单调区间，极值以及凹凸区间和拐点（要求列表）.

4. 求由 $y=\sin x\ \left(0\le x\le \pi\right)$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的立体的体积.

得分

四、**证明题**（共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 可导， 求证：在 $f(x)$ 的两个零点之间必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

2. 证明：函数 $f(x)=\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

得分

五、**应用题**（本题 9 分）

问当 $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内取何值时，曲线 $y = \cos(x-a)\left(\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi\right)$ 与 x 轴及直线 $x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$ 围成的图形的面积最小？并求此最小面积.