

1. 求  $f(n) = \log n!$  的确界。

1. 求  $f(n) = \log n!$  的确界。

$$f(n) = \log n! = \sum_{j=1}^n \log j$$

- 显然  $\sum_{j=1}^n \log j \leq \sum_{j=1}^n \log n$   
 $\Rightarrow \sum_{j=1}^n \log j = O(n \log n)$

- $\sum_{j=1}^n \log j \geq \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \log \frac{n}{2}$   
 $= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log \frac{n}{2}$   
 $= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$   
 $\Rightarrow \sum_{j=1}^n \log j = \Omega(n \log n)$

因此,  $f(n) = \Theta(n \log n)$ .

## 2. 分析Selection-Sort算法的复杂度。

### Selection-Sort

- 输入:  $n$ 个元素的数组:  $A[1...n]$
- 输出: 按非降序排列的数组:  $A[1...n]$ 
  1.  $\text{sort}(1)$
- 过程:  $\text{sort}(i)$  {对 $A[1...n]$ 排序}
  1. **if**  $i < n$  **then**
  2.      $k \leftarrow i$
  3.     **for**  $j \leftarrow i+1$  **to**  $n$
  4.         **if**  $A[j] < A[k]$  **then**  $k \leftarrow j$
  5.     **end for**
  6.     **if**  $k \neq i$  **then** 互换 $A[i]$  和  $A[k]$
  7.      $\text{sort}(i+1)$
  8. **end if**

## 2. 分析Selection-Sort算法的复杂度。

$C(n)$ 表示有 $n$ 个输入元素时的比较次数

- $C(1)=0$
- 第 $i = 1$ 次调用sort的比较次数等于 $n - i$ 次元素比较加上对 $A[i + 1, \dots, n]$ 排序的比较次数 $C(n - i)$ ,

得到递推式 
$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ C(n - 1) + (n - 1) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

- 该递推式的解为 $C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n - 1)/2$

因此,  $C(n) = \Theta(n^2)$ .