工科数学分析下

李茂生

2024/2/29

主讲老师联系方式

- 电话：13521759982
- qq群： 714567030 工程数学分析下2023计算机类
- 办公室：五山校区4号楼4225
- email: lims21@scut.edu.cn

期末总评与平时成绩

期末总评= 期末70%+平时成绩30%(作业10%，考勤5%，小测15%)

作业要求:

- 杜绝抄作业，若有发现，平时作业均作0分处理
- 要抄题，解答时要写“解”或“证明”
- 每周四上课前交前一周布置的作业

教材与推荐的习题辅导书

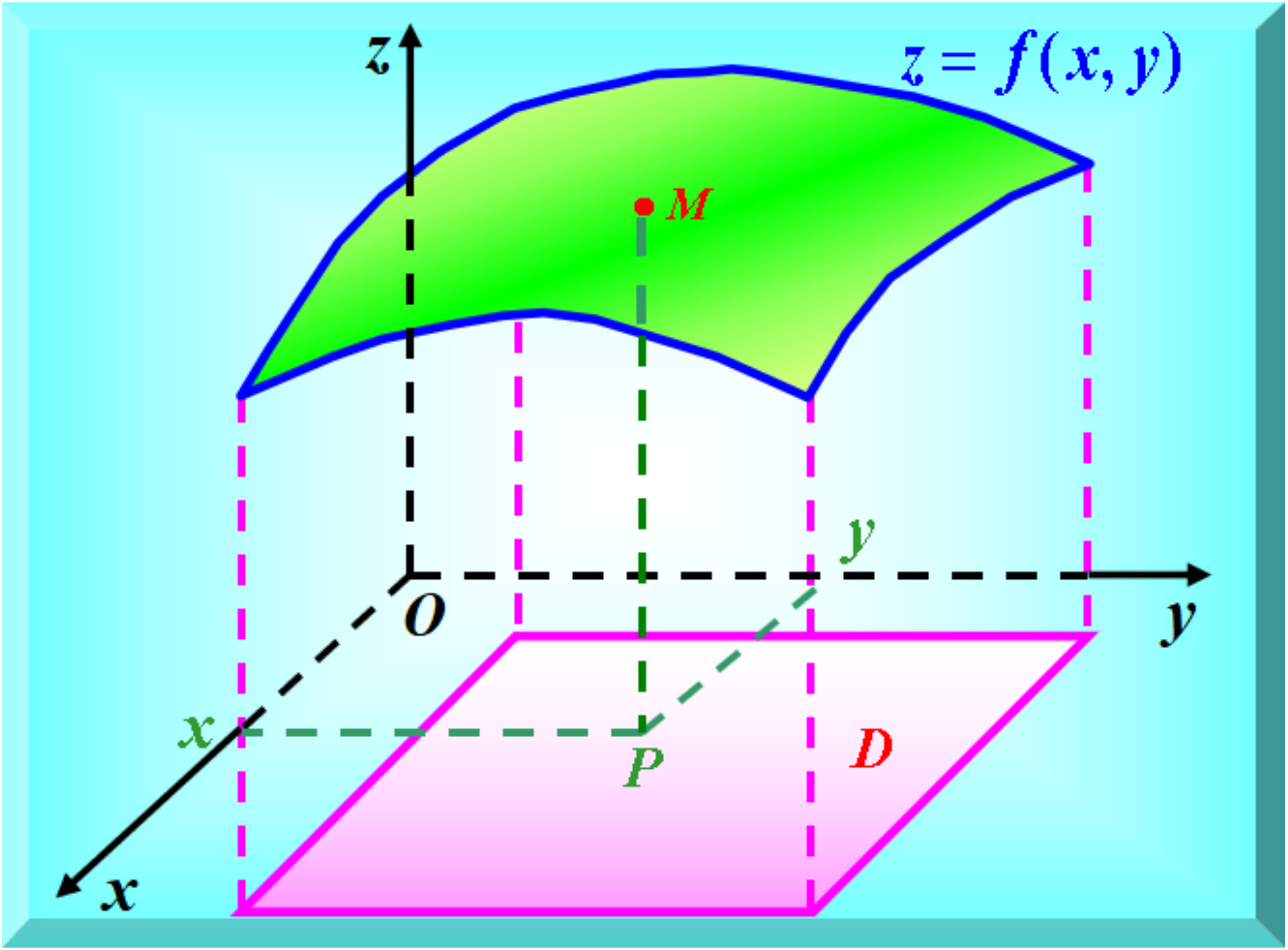
1. 李大华 林益 汤燕斌 王德荣编, 工科数学分析下册第三版
2. 吉米多维奇著 数学分析习题集 高等教育出版社（1986）
3. 华苏 扈志明 莫骄编，微积分学习指导——典型例题精解. 科学出版社（2004）
4. 方企勤 林渠源著，数学分析习题课教材北京大学出版社（1990）

本学期的主要内容

1. 微分方程 (第五章)
2. 多元函数微分学 (第七章)
3. 重积分 (第八章)
4. 曲线积分与曲面积分 (第九章)
5. 无穷级数 (第十章)

本课程将按照第七、八、九、十、五章这个顺序讲

第七章 多元函数微分学



7.1 n维欧氏空间中某些概念

- n维欧氏空间
- 邻域
- 内点，外点，边界点，聚点
- 开集，闭集，区域

n维欧氏空间

一维空间$\mathbb{R}$：数轴点集

二维空间$\mathbb{R}^2$：平面点集

n 维空间 $\mathbb{R}^n$: n元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体，记为 $\mathbb{R}^n$，即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_j \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}.$$

对于$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$||X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

称为X的范数.

n维欧氏空间

$\forall X = (x_1, \cdots, x_n), Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

称为X, Y的距离.

距离的基本性质:

- **正定性:** $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $d(X, Y) \geq 0$, 并且 $d(X, Y) = 0$ 当且仅当 $X = Y$.
- **对称性:** $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, 均有$d(X, Y) = d(Y, X)$.
- **三角不等式**: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z).$$

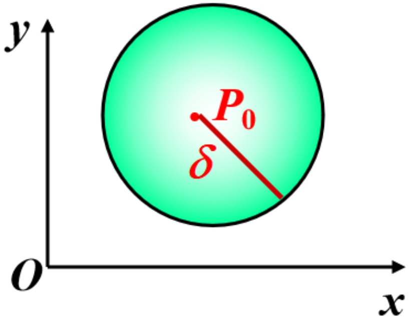
我们称$(\mathbb{R}^n, d)$ 为n维欧氏空间.

邻域

- 一维空间中点$P_0 = x_0$的δ-邻域：　$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

- 二维空间中点$P_0 = (x_0, y_0)$的δ-邻域：

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$



- n维欧氏空间中点$P_0 \in \mathbb{R}^n$的δ-邻域：

$$U(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < \delta\}.$$

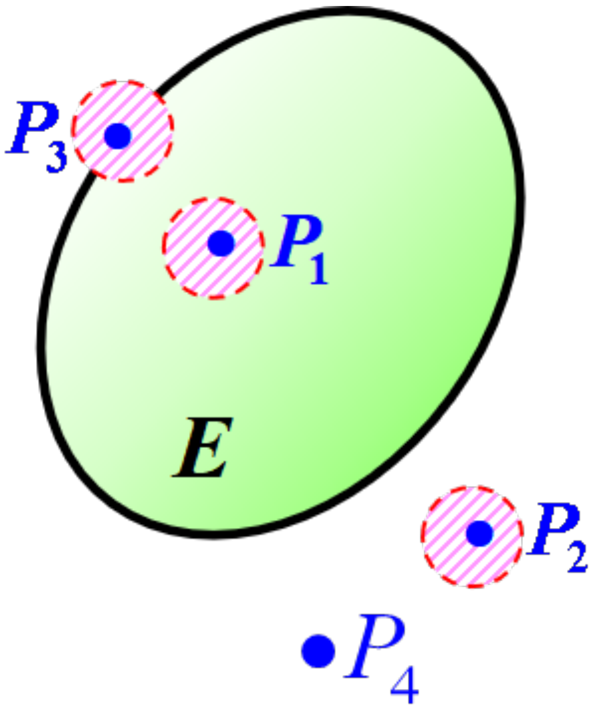
此外，我们把$\mathring{U}(P_0, \delta) := \{P \in \mathbb{R}^n | 0 < d(P, P_0) < \delta\}$ 称为P_0的去心δ-邻域.

内点，外点

固定$E \subseteq \mathbb{R}^2$， $P_0 \in \mathbb{R}^2$,

- 内点：若$\exists \delta > 0$, 使得$U(P_0, \delta) \subseteq E$, 则称点$P_0$为$E$的一个内点. E的所有内点的集合称为E的内部，记为E°.

- 外点：若$\exists \delta > 0$, 使得$U(P_0, \delta) \cap E = \emptyset$, 则称点$P_0$为$E$的一个外点. E的所有外点的集合称为E的外部，记为$\mathrm{Ext}(E)$.

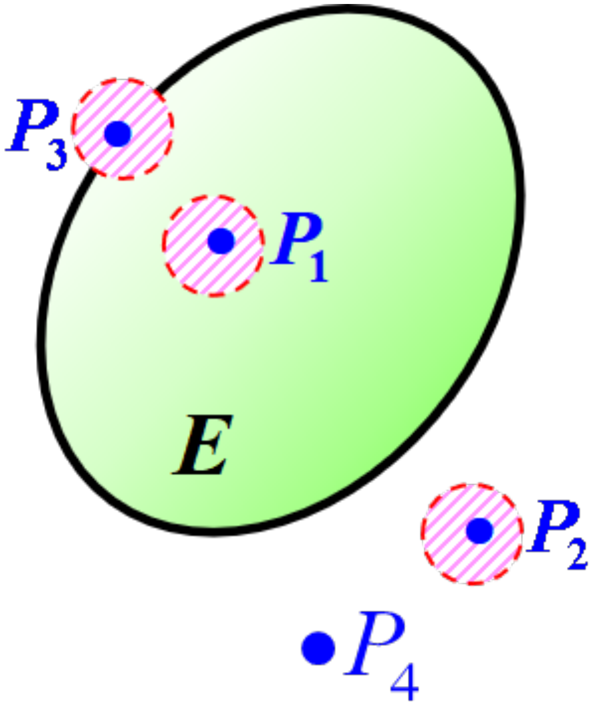


边界点，聚点

固定$E \subseteq \mathbb{R}^2$， $P_0 \in \mathbb{R}^2$,

- 边界点：若P_0既不是E的内点也不是E的外点，则称其为E的一个边界点. 等价地，P_0为E的边界点当且仅当 $\forall \delta > 0$, $U(P_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$, $U(P_0, \delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E) \neq \emptyset$. E的边界点全体的集合称为E的边界，记为∂E.

- 聚点：若$\forall \delta > 0$, 总有$\mathring{U}(P_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$, 则称点$P_0$为$E$的一个聚点，也称为极限点. E 的所有聚点的集合称为E的导集，记为E'.



例

求集合
$$E=\{(x,y)|1\le x^2+y^2<2\}\cup\{(6,6)\}$$
的所有内点、外点、边界点和聚点的集合，即$E^\circ, \mathrm{Ext}(E), \partial E, E'$.

解:

- $E^\circ=\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$,
- $\mathrm{Ext}(E)=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)|x^2+y^2>2,(x,y)\neq(6,6)\}$,
- $\partial E=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)|x^2+y^2=2\}\cup\{(6,6)\}$,
- $E'=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$.

开集，闭集

固定$E \subseteq \mathbb{R}^2$

- 开集：若 E 中的所有点都是内点，则称E为开集.
- 闭集：若 E 的余集为开集，则称E为闭集.

例

判断下列哪些是开集，哪些是闭集？

(1) $E_1 = \{(x, y)|1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

(2) $E_2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 2)\}$

(3) $E_3 = \{(x, y)|x \neq 0, y \neq 0\}$

解： E_1 既不是开集也不是闭集， E_2为闭集，E_3 为开集.

连通性、开区域、闭区域

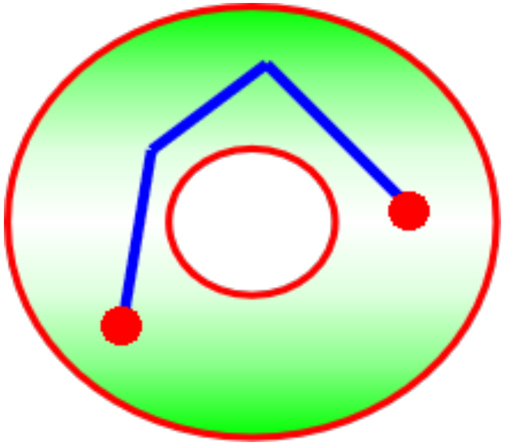
固定$E \subseteq \mathbb{R}^2$

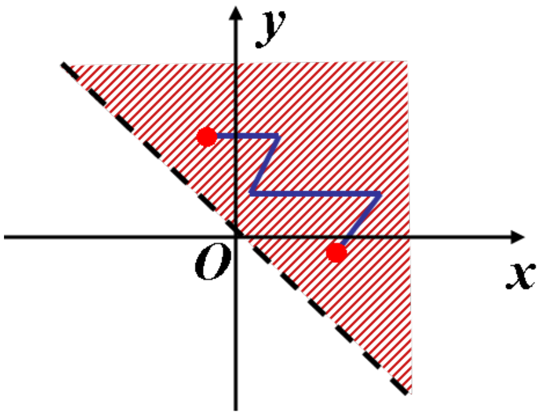
- 称E为连通集，若E中任意两点都存在E中的折线将该两点连起来. 若E不是连通集，则称其为非连通集.
- 连通集的开集称为开区域; 开区域连同其边界,称为闭区域

例

(1) $E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, $E_2 = \{(x, y) | x + y > 0\}$

(2) $E_3 = \{(x, y) | 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, $E_4 = \{(x, y) | x + y \ge 0\}$

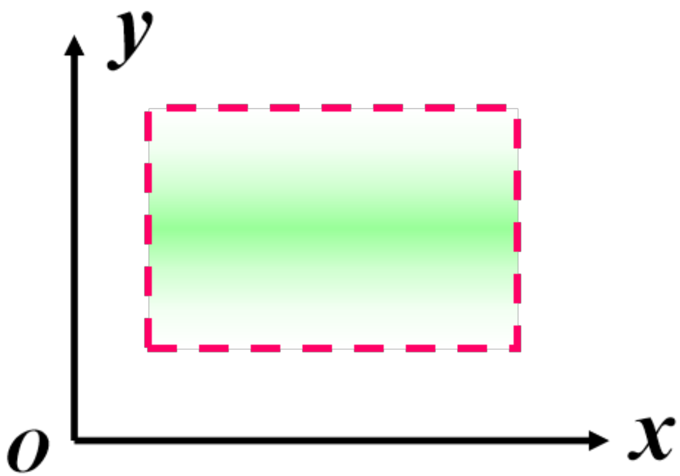




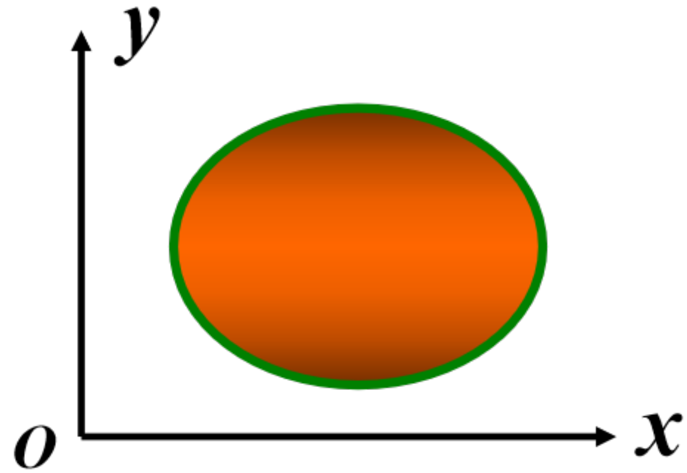
有界区域、无界区域

1. 一个区域如果总可以被包围在一个以原点为中心、半径适当大的圆内的区域，则称其为有界区域.
2. 否则称为无界区域(可伸展到无限远处的区域).

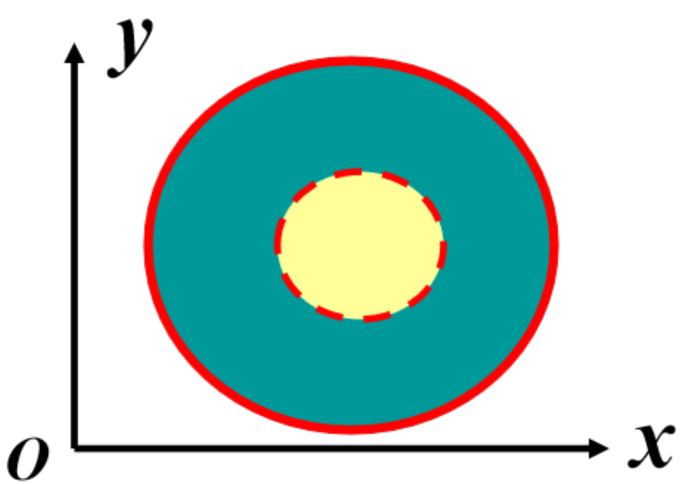
注：也可以类似考虑有界集. 有界闭区域、有界闭集类似于一维情形的有界闭区间、有界闭集, 在后面考虑多元连续函数的介值性和有界性有很好的作用.



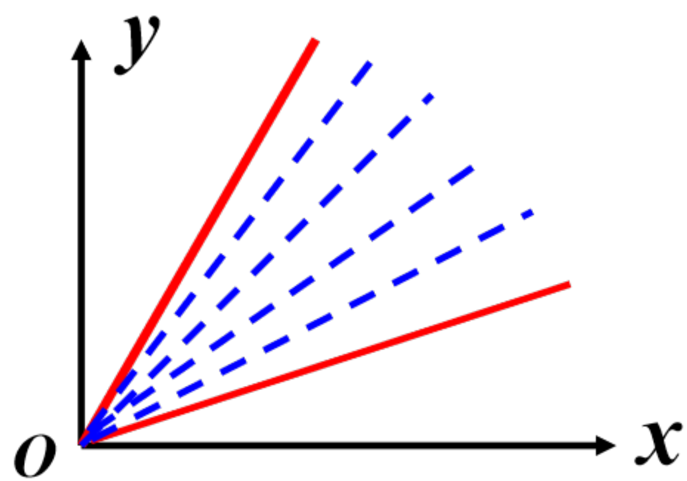
有界开区域



有界闭区域



有界半开半闭区域



无界闭区域

$\mathbb{R}^n$中点列的收敛性

回顾：设$\{x_k\}$ 为$\mathbb{R}$中的数列，$x \in \mathbb{R}$. 我们称$\{x_k\}$收敛于x，如果 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k \geq N$ 都有$|x_k - x| < \epsilon$.

定义 ($\mathbb{R}^n$中点列的收敛)

设$\{X_k\}$ 为$\mathbb{R}^n$中的点列，$X \in \mathbb{R}^n$. 我们称$\{X_k\}$收敛于X，如果 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k \geq N$ 都有$||X_k - X|| < \epsilon$. 我们记

$$\lim_{k \to \infty} X_k = X.$$

定理 ($\mathbb{R}^n$中点列的收敛充要条件)

设$\{X_k = (x_k^{(1)}, \cdots, x_k^{(n)})\}$ 为$\mathbb{R}^n$中的点列，$X = (x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, 则 $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = X$ 当且仅当 $\forall 1 \leq j \leq n$, 均有 $\lim\limits_{k \to \infty} x_k^{(j)} = x^{(j)}$.

证明： (必要性). 由 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X$的定义得， $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k \geq N$ 都有$||X_k - X|| < \epsilon$. 另外，我们有

$$|x_k^{(j)} - x^{(j)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_k^{(i)} - x^{(i)})^2} = ||X_k - X||.$$

因而，$|x_k^{(j)} - x^{(j)}| \leq ||X_k - X|| < \epsilon$. 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = x^{(j)}$.

(充分性). 若 $\forall 1 \leq j \leq n$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(j)} = x^{(j)}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_j \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall k \geq N_j$ 都有 $|x_k^{(j)} - x^{(j)}| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. 取$N := \max_j\{N_j\}$, 则$\forall k \geq N$均有

$$|X_k^{(j)} - X^{(j)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_k^{(i)} - x^{(i)})^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\epsilon}{\sqrt{n}})^2} = \epsilon.$$

因此, $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X$.

7.2 多元函数的基本概念

- 二元函数　多元函数
- 等高线与等位面
- 多元函数的极限
- 多元函数的连续性

二元函数 多元函数

回顾函数的定义： 给定 $D \subseteq \mathbb{R}$,若存在对应法则f使得 $\forall x \in D$ 都存在唯一一个实数y 与之对应，我们就称f为定义在D的函数, 记为$y = f(x)$, $x \in D$. D 称为该函数的定义域.

定义 (n元函数)

设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$,若存在对应法则f使得 $\forall X \in D$ 都存在唯一一个实数z与之对应，我们就称f为定义在D的n元函数, 记为$z = f(X), X \in D$. D 称为该函数的定义域.

例

f : 长方形 (长为a,宽为b) $\to$ 面积 A,可以看作是二元函数:
$A = f(a, b) = ab.$
g : 长方体 (长为a,宽为b，高为c) $\to$ 表面积 S,可以看作是三元函数:
$S = g(a, b, c) = 2(ab + bc + ca).$

例

理想气体的状态方程是 $pV = RT$ (R为常数)，其中p为压强，V为体积，T为温度. 如温度T, 体积V都在变化,则压强p依赖于V, T的关系为

$$p = \frac{RT}{V}$$

可看成是 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$上的二元函数.

关于n元函数的定义域

通常一个n函数的定义域D是会直接给定或按以下形式约定:

1. 实际问题中的函数: 定义域为符合实际意义的自变量取值的全体.
2. 纯数学问题的函数表达式: 定义域为使运算有意义的自变量取值的全体.

谢谢大家!