工科数学分析下

李茂生

2024/3/4

全微分

- 偏导数讨论的只是某一自变量变化时函数的变化率.

- 现在来讨论当各个自变量同时变化时函数的变化情况.

全增量

为了引进全微分的定义,先来介绍全增量的概念.

定义 (全增量)

设二元函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的某邻域内有定义，当变量x,y在点(x,y)处分别有增量$\Delta x,\Delta y$时，函数值对应的增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

称为$f(x,y)$在点(x,y)的全增量.

全微分

定义 (全微分)

设二元函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的某邻域内有定义，若$z=f(x,y)$在点(x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

的形式时(其中A,B仅与x,y有关，而不依赖于$\Delta x,\Delta y$的选取，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$),则称函数$f(x,y)$在点$(x,y)$可微分， $A\Delta x+B\Delta y$称作是$f(x,y)$的全微分．记作$\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

全微分

全微分有类似一元函数微分的两个性质:

- $\mathrm{d}z$是关于$\Delta x, \Delta y$的线性函数;
- $\Delta z - \mathrm{d}z$ 是比ρ更高阶的无穷小量.

若函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)点可微，则

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0).$$

即,二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)点附近可局部线性化.

可微时，如何求解A, B? 注意到一元情形可微和导数存在是等价的, 那么我们自然要问多元情形可微和偏导存在有什么关系呢?

连续性与可微性

定理 (可微⇒连续)

若$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微, 则$f(x, y)$在(x_0, y_0)处也连续.

证明：由题设知，$\exists A, B$ 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho),$$

其中$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.于是，

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\rho \to 0^+} [A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)] = 0.$$

故$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

不连续的函数一定不是可微的.

偏导数与可微性

定理 (可微⇒偏导存在)

若$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 不妨设$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$,
则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处的两个偏导数都存在且有

$$A=f_x(x_0,y_0), B=f_y(x_0,y_0).$$

证明：由题设知，$\exists A,B$ 使得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho),$$

其中$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 特别地，若$y=y_0$,则有

$$f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+o(|x-x_0|).$$

因而，$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+o(|x-x_0|)}{x-x_0}=A.$

即$f_x(x_0,y_0)$存在且等于A. 同理可得，$f_y(x_0,y_0)$存在且等于B.

偏导数与可微性

设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处两偏导数均存在，则 $f(x,y)$在(x_0,y_0) 可微当且仅当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

判断函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否可微的一般思路:

1. 判断 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否连续？若不连续则不可微.
2. 判断 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处两偏导是否存在？若有不存在则不可微. 若存在，继续利用偏导数的值计算上述极限是否存在并且等于0.

偏导存在$\not\Rightarrow$可微

例 (偏导存在但不可微的例子)

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

判断$f(x,y)$在$(0,0)$处是否可微.

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0}{x}=0$, $\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{0}{y}=0$.

即$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. $\forall(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$, 均有

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$不存在. 故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

可微的充分条件

定理 (偏导连续⇒可微)

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的邻域两偏导数均存在且该偏导数都在该点连续,则函数在该点可微.

证明概要：我们需要证明 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$. 而

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= f_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y
\end{aligned}
$$

$0 \le \xi, \theta \le 1$是均依赖于$\Delta x, \Delta y$的量. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$

$$
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[f_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)]\Delta x + [f_y(x_0, y_0 + \theta\Delta y) - f_y(x_0, y_0)]\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}
$$

等于0.

可微 $\not\Rightarrow$ 偏导连续

例 (可微但偏导不连续的例子)

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

则$f(x,y)$在$(0,0)$处存在偏导数且偏导数在该点不连续，但$f(x,y)$在该点可微.

解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$ 得， $f_x(0,0)=0$. 由函数定义的对称性，类似可得 $f_y(0,0)=0$. 当$(x,y)\neq(0,0)$时，有

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$f_x(x,y)=2x\sin\tfrac{1}{x^2+y^2}-\tfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\tfrac{1}{x^2+y^2},$$
$$f_y(x,y)=2y\sin\tfrac{1}{x^2+y^2}-\tfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\tfrac{1}{x^2+y^2}.$$

令$y=x$,易得 $f_x(x,x)=2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\not\to 0\ (x\to 0)$.

故$f_x(x,y)$在$(0,0)$点不连续. 同样地，故$f_y(x,y)$在$(0,0)$点也不连续.

另外，$\forall(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$,

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

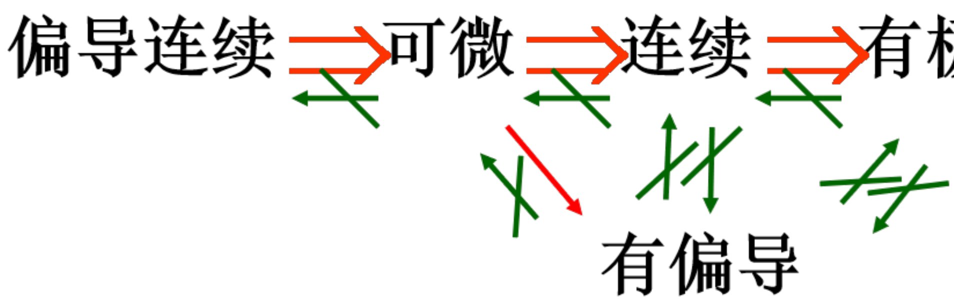
而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$. 故$f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

蕴含关系图示

对一元函数的极限、连续、可导、可微间的关系：

可微 $\Leftrightarrow$ 可导 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 有极限

对多元函数的极限、连续、可导、可微的关系：



关于函数微分的记法

若$z=f(x,y)$, 我们先前记$f(x,y)$ 的微分为$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$.

- $z=f(x,y)=x$时，由$\frac{\partial z}{\partial x}=1, \frac{\partial z}{\partial y}=0$,得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x=\Delta x.$$

- $z=f(x,y)=y$时，由$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=1$,得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}y=\Delta y.$$

对于自变量来说，其增量与微分完全是一回事. 于是如果函数的微分存在，我们就可以把它写成

$$\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

对于三元函数$u=f(x,y,z)$也类似： $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$

例

求函数$z = x^2 + 4xy^2 + y^4$的全微分.

解：因偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8xy + 4y^2$$

在全平面连续，故该函数也在全平面可微. 并且有

$$\mathrm{d}z = (2x + 4y^2)\mathrm{d}x + (8xy + 4y^2)\mathrm{d}y.$$

例

求函数$u = 2x + \cos y + e^{yz}$的全微分.

解：因偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y + ze^{yz}, \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$$

故有

$$\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x + (ze^{yz} - \sin y)\mathrm{d}y + ye^{yz}\mathrm{d}z.$$

练习题

例

计算 $(1.03)^{1.98}$的近似值.

例

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

则该函数在$(0,0)$点(　).

(A) 极限不存在

(B) 不连续

(C) 可微分

(D) 偏导存在

答案： D

练习题

例

能推出函数f在点(x_0,y_0)处可微且全微分$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$的条件是(　　)

(A) $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$;

(B) 函数f在点(x_0,y_0)处的全增量 $\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$;

(C) 函数f在点(x_0,y_0)处的全增量 $\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$;

(D) 函数f在点(x_0,y_0)处的全增量$\Delta f(x_0,y_0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

答案： D

练习题

例

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

该函数在$(0,0)$点是否可微?

例

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

该函数在$(0,0)$点是否连续?是否可偏导？是否可微？

练习题

例

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-e^{-xy}}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数f的连续性、可微性及连续可偏导性.

小结

- 偏导数的定义
- 偏导数的计算
- 偏导数的几何意义
- 偏导数存在与连续、极限的关系
- 全微分的定义、计算
- 可微分的必要条件、充分条件
- 元函数极限、连续、偏导、可微的关系

7.4 多元复合函数的求导法则

- 复合函数的求导法则

- 全微分形式不变性

- 高阶偏导数与高阶微分

复合函数的求导法则(链导法则)

回忆(一元情形)： $y = f(u), u = \varphi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

问题

设而对于二元函数 $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$. 如何求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}?$$

复合函数的求导法则(链导法则)

定理

设二元函数$u=\varphi(x,y)$和$v=\psi(x,y)$都在点$P(x,y)$处有偏导数，且函数$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v)有连续的偏导数，则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

在对应点(x,y)的偏导数存在且有以下计算公式：

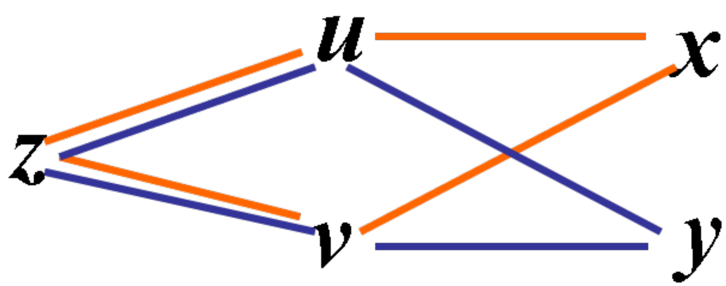
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

网络图

$$z = f[\underbrace{\varphi(x, y)}_{u}, \underbrace{\psi(x, y)}_{v}]$$

网络图原则

网络图



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

练习题

例

设$z=\ln(u^2+v)$, 而$u=e^{x+y^2}, v=x^2+y$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

例

设$u=e^{x^2+y^2+z^2}$, 而$z=x^2\sin y$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

例

设$z=f(xy,\frac{y}{x})$, f有连续偏导，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

练习题

例

设$z=f(x,y,z)$ 为k次齐次函数，即 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$. 求证：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

例

已知$f(t)$可微, 证明 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$ 满足方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

全微分形式不变性

设$z = f(u, v)$具有连续偏导数, 两偏导数均存在，若有$u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$时，则复合后关于x, y的二元函数$z = f(u(x, y), v(x, y))$有全微分

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

此外我们有以下式子成立

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

$$\mathrm{d}(f(x(u, v))) = f_x(x(u, v))dx.$$

例

设$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求$\mathrm{d}u$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

例

设$u=f(x^2-y^2, e^{xy}, z)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

通过全微分求所有一阶偏导数,比链导法则求偏导数有时会更灵活方便.

作业

- 习题 7.3 (A)
  - 3. (1) (4)
  - 4.
  - 6. 奇数题
  - 7.(1) (2)
- 习题 7.3 (B)
  - 1. (4) (5) (6)
  - 2.
  - 4.

谢谢大家!