

## 一、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分

1. 函数极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$  的  $G$ - $\delta$  定义是

\_\_\_\_\_;

2. 设  $a > b > 0$ , 则  $\arctan a - \arctan b, \frac{a-b}{1+a^2}, \frac{a-b}{1+b^2}$  的从小到大的严格不等式的顺序是\_\_\_\_\_;

3. 设  $y = x^2 e^{2x}$ , 则  $d^{(n)}y =$ \_\_\_\_\_;

4. 设  $f(x) = e^{-x^2} \sin x + \cos^4 x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_;

5. 反常积分  $\int_{-\infty}^0 \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx =$ \_\_\_\_\_.

得分

## 二、计算下列各题（共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

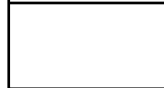
1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt}{\arcsin^4 x}$ , 其中  $f(x)$  在  $x=0$  的邻域内连续, 且

$$f(0) = 0, f'(0) = 1.$$

2. 求不定积分  $\int \sqrt{x^2-1}dx$  .

3. 计算定积分  $\int_{-2a}^{-a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} dx$  .

三、解答下列各题（共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）



1. 设  $x_1 = 2$ ，且  $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ , ( $n = 2, 3, \dots$ ). 证明数列  $\{x_n\}$  收敛，并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

2. 设曲线  $y = y(x)$  由方程  $y = 1 - xe^y$  所确定，求它在点  $(0, 1)$  处的切线方程，并求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

3. 求函数  $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$  的单调区间，极值以及凹凸区间和拐点（要求列表）.

4. 求双纽线  $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$  所围成图形的面积.

四、证明题（共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

得分

1. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上二阶可导，且满足条件： $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b, \forall x \in [0,1]$ ，其中  $a, b$  为非负常数. 证明： $|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}, \forall x \in [0,1]$ .

2. 证明：函数  $f(x) = \ln(1+x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

五、应用题（本题 9 分）

得分

设由  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0, x = 1, x = 2$  所围成的曲边梯形被直线  $x = t$  ( $1 < t < 2$ ) 分成 A, B 两部分, 将 A, B 分别绕直线  $x = t$  旋转一周, 所得旋转体体积分别为  $V_A$  和  $V_B$ , 问  $t$  为何值时,  $V_A + V_B$  最小? .