工科数学分析下

李茂生

2024/3/22

7.11 约束最优化问题

- 拉格朗日乘数
- 拉格朗日乘数法

约束优化问题

问题

设$f(x,y),g(x,y)$均为可微函数，求函数$z=f(x,y)$在条件

$$\Gamma := \{(x,y)|g(x,y)=0\}$$

下的最大最小值.

这里我们把$f(x,y)$称为目标函数，$g(x,y)=0$称为约束条件.

定义 (条件极值)

函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有满足 $g(x,y)=0$的条件极大(小)值，是指对于曲线Γ上位于P_0附近的点$P(x,y)$ 有

$$f(P)\leq f(P_0),(f(P)\geq f(P_0)).$$

我们称点P_0为函数 f在$\Gamma := \{(x,y)|g(x,y)=0\}$上的极大(小)值点.

拉格朗日(Lagrange)乘数法

定理 (Lagrange乘数法)

设$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开区域，$f(x,y), g(x,y) : D \to \mathbb{R}$均为可微函数，$\forall (x,y) \in D$, $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$，令$\Gamma := \{(x,y) \in D | g(x,y) = 0\} \neq \emptyset$. $\forall (x,y) \in D$ 及$\lambda \in \mathbb{R}$，定义函数

$$\text{拉格朗日函数}: \quad L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

如果点$(x_0, y_0) \in \Gamma$ 为函数f在Γ上的条件极值点，则存在$\lambda_0 \in \mathbb{R}$使得(x_0, y_0, λ_0)为L的驻点.

这里引进的参数λ也被称为拉格朗日函数乘数.

评注

- 点(x_0, y_0, λ_0)为L的驻点当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

  等价地有，

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \\ g(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

- 即使(x_0, y_0, λ_0)为L的驻点，点(x_0, y_0)也不一定是f在曲线Γ上的条件极值点, 还需要具体分析!

求曲面上的条件极值的典型方法

- 由于Lagrange乘数法只给出条件极值点的必要条件，于是为了确定条件极值点，需要想办法将条件极值问题转化为最值问题.
- 定义拉格朗日函数并求出它的驻点，由此得到原来那个函数的可能的条件极值点.
- 比较原来那个函数在上述驻点处值得大小，由此确定极值点.

例

求函数$f(x,y)=xy$在圆周$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$上的最大值和最小值.

解：由于 $f(x,y)$ 为连续函数，圆周 C 为有界闭集，故 f 在 C 上有最大最小值，当然也是条件极值.

令 $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-4)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x=0 & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y=0 & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-4=0 & ③\end{cases}$$

$① \times y - ② \times x \Rightarrow y^2=x^2 \Rightarrow x^2=y^2=2$

$x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}$

即 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 为仅可能的条件极值点.

而 $f(\sqrt{2},\sqrt{2})=2=f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$　$f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-2=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

于是函数的最大值为 2，最小值为 -2.

例

求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$内接长方体的最大体积.

解: 内接长方体体积为 $V(x,y,z)=8|xyz|$ 该值的最大值对应于

求 $f(x,y,z)=|xyz|^2=x^2y^2z^2$ 的最大值 $x,y,z\neq 0$

令 $F(x,y,z)=x^2y^2z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2xy^2z^2+2\lambda x/a^2=0 & ①\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2yx^2z^2+2\lambda y/b^2=0 & ②\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2zx^2y^2+2\lambda z/c^2=0 & ③\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 & ④\end{cases}$$

①×x, ②×y, ③×z 可知

$$2\lambda\cdot\frac{x^2}{a^2}=2\lambda\frac{y^2}{b^2}=2\lambda\frac{z^2}{c^2}$$

($\lambda\neq 0$, 否则 x,y,z 有一个必为0)

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\quad z=\frac{1}{\sqrt{3}}c$$

此时 $V(x,y,z)=\frac{1}{3\sqrt{3}}abc$

$\frac{-b+\sqrt{\ }}{2a}$

例

求抛物面$z=x^2+y^2$与平面$x+y+z=1$的交线到原点的最长距离与最短距离.

解: $d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 条件 $z=x^2+y^2$, $x+y+z=1$

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$

令 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=2x-2\lambda x+\mu=0 & ① \\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda y+\mu=0 & ② \\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z+\lambda+\mu=0 & ③ \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=z-x^2-y^2=0 & ④ \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}=x+y+z-1=0 & ⑤ \end{cases}$

(1) 当$\lambda=1$时. $\mu=0$, $z=-\frac{1}{2}$ (舍去)

(2) 当$\lambda\neq1$时 由①②, $x=y$

$\begin{cases} 2x-2\lambda x+\mu=0 \\ 2z+\lambda+\mu=0 \\ z=2x^2 \\ z=1-2x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

求出对应的 $x^2+y^2+z^2$ . . . ,

有界闭区域上最值的求法

极值或最值问题常可被转化为有界闭区域上的连续函数的最值问题，由连续函数在有界闭区域上的最大最小值总是能达到，因此关键就是如何最值点.

求最值的一般方法

1. 求出$f(x,y)$在D内的所有驻点；
2. 计算$f(x,y)$在各个驻点的函数值；
3. 求出$f(x,y)$在边界点∂D上的最大最小值, 此时求相应的拉格朗日函数的驻点，并计算相应的函数值;
4. 将上面计算的函数值进行比较，最大者就是最大值，最小者就是最小值.

例

求函数$f(x,y)=x^2-y^2+2$在 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$上的最大值和最小值.

D_1

解：首先 $f(x,y)$ 为D上连续函数 且 D 为有界闭集故一定可达到最大最小值. 对应的点要么是f在D内的驻点，要么是边界处的条件极值点.

(1) $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0\end{cases}$ $x=y=0$ 此时 $f(0,0)=2$.

(2) $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$

令 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0\end{cases}$

$x=0$ 或 $\lambda=-1$ $\Rightarrow$ $(0,\pm 2)$ $f(0,\pm 2)=-2$

$y=0$ 或 $\lambda=4$ $(\pm 1,0)$ $f(\pm 1,0)=3$

故最大值为3，最小值为-2.

偏导数计算在偏微分方程中的应用

- 验证给定函数满足某偏微分方程
- 变量代换

验证给定函数满足某偏微分方程

例

证明：函数$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在定义域上满足 Laplace方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

验证给定函数满足某偏微分方程

例

设函数$z = z(x, y)$由方程$F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$确定，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

变量代换

例

设函数$u = u(x, y)$的所有二阶偏导数都连续，试求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 在变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$下的方程.

教学要求

1. 理解二元函数的极限和连续的概念，知道有界闭区域上连续函数的性质.
2. 理解偏导数和全微分的概念，掌握全微分存在的充分条件和必要条件.
3. 熟练掌握复合函数和隐函数的求导法则，掌握求高阶偏导数的方法.
4. 理解方向导数和梯度的概念，掌握方向导数和梯度的求法, 知道梯度的应用.
5. 掌握空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线方程的求法.
6. 理解多元函数的极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，掌握二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用 Lagrange 乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值并会解决一些简单的应用问题.

综合练习

例

固定$k>0$. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,定义 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|^k}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 问k为何值时，函数f在原点连续，可偏导，可微？

解： 连续性. 当$k>1$时， $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{|xy|^k}{x^2+y^2}\leq\frac{(\frac{1}{2}(x^2+y^2))^k}{x^2+y^2}=\frac{1}{2^k}(x^2+y^2)^{k-1}.$$

此时由夹逼原理知f在原点连续.
当$k=1$时，由于$\lim\limits_{x\to0}f(x,x)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$, 故$f$在原点不连续.
当$k<1$时，由于$\lim\limits_{x\to0}f(x,x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}|x|^{2k-2}=\infty$, 故$f$在原点不连续.
综上所述可知f在原点连续当且仅当$k>1$.

可偏导性. 由定义可知, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = f(0,y) = 0$，由偏导的定义可知 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 故函数$f$在原点处偏导总存在.

可微性. 因$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 则由微分的定义立刻可知$f$在原点可微当且仅当

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|^k}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

而这又等价于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|^{\frac{2k}{3}}}{x^2+y^2} = 0.$$

于是由前面连续性的证明可知， f在原点可微当且仅当$\frac{2k}{3} > 1$, 即 $k > \frac{3}{2}$.

例

假设ϕ为二阶连续可微，而$z=z(x,y)$是由方程$x^3+y^3+z^3=\phi(z)$确定的隐函数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：定义$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-\phi(z)$, 则$F$为二阶偏导连续.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=3x^2, \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=3y^2, \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-\phi'(z).$$

由隐函数存在定理知，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{3x^2}{\phi'(z)-3z^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{3y^2}{\phi'(z)-3z^2}.$$

于是有，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^2}{\phi'(z)-3z^2}\right)\\ &= -\frac{3y^2(\phi''(z)-6z)\frac{\partial z}{\partial x}}{(\phi'(z)-3z^2)^2}=\frac{9x^2y^2(6z-\phi''(z))}{(\phi'(z)-3z^2)^3}.\end{aligned}$$

例

求旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$x+y-2z=2$之间的最短距离.

解：由几何直观知，求旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$x+y-2z=2$之间的最短距离等价于求抛物面$z=x^2+y^2$与平面$x+y-2z=2$平行的切平面与该平面的距离. 设该切平面的切点为(x_0,y_0,z_0), 则该点处的切平面的法向量为$(2x_0,2y_0,-1)$, 于是向量$(2x_0,2y_0,-1)$和向量$(1,1,-2)$平行，即

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{2y_0}{1}=\frac{-1}{-2}.$$

可算得$(x_0,y_0,z_0)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$. 而两平行平面的距离等于一平面上的点到另一个平面的距离

$$d=\frac{|x_0+y_0-2z_0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{7\sqrt{6}}{24}.$$

例

证明函数$f(x,y)=\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$在平面$\mathbb{R}^2$上可以取到最大最小值，并求出它的最大最小值及其对应的最大值点和最小值点.

解：由于f是初等函数，因此偏导数连续且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(1+x^2+y^2)-2x(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1+y^2-x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(1+x^2+y^2)-2y(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

令$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$, 解得$f$的驻点有:$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. 对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有

$$0\le|f(x,y)|\le\frac{|x+y|}{1+x^2+y^2}\le\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)})}{1+x^2+y^2},$$

由夹逼原理可得，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=0$. 故$\exists R\ge0$, 使得当$x^2+y^2>R^2$时，

均有$|f(x,y)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 令$D_R := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$, 可算得

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

于是，$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in D_R$. 由最值定理知，$\exists (x_1,y_1)$, $(x_2,y_2) \in D_R$ 使得

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) &= \max_{(x,y)\in D_R} f(x,y) \ge f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ f(x_2,y_2) &= \min_{(x,y)\in D_R} f(x,y) \le f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

对比f在D_R外的函数值可得,(x_1,y_1),(x_2,y_2)就是函数f在$\mathbb{R}^2$上的最大值点和最小值点. 于是(x_1,y_1),(x_2,y_2)必定是函数f的驻点,而我们又已经知道f只有两个驻点，于是最大值点和最小值点必定在该两驻点中取得. 进而可得函数的最大值为$\frac{1}{\sqrt{2}}$, 最小值为$-\frac{1}{\sqrt{2}}$；对应的最大值点和最小值点分别为$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

例

求下列方程所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值：$z^2+xyz-x^2-xy^2=9$.

解：对题设等式两边同时对x,y求偏导可得，

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}-2x-y^2=0,\ 2z\frac{\partial z}{\partial y}+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}-2xy=0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y^2-yz}{2z+xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy-xz}{2z+xy},$$

令$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 可得

$$2x+y^2-yz=0,\quad x(z-2y)=xz-2xy=0.$$

当$x=0$时联合原方程，可解得 $y=z=\pm 3$. 当$x\neq 0$时$z=2y$ 且 $x=y^2/2$ 代入原方程，可解得 $y=\pm\sqrt{2}$. 因此，函数z的驻点有$(0,3)$, $(0,-3)$, $(1,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2})$ 对应的函数值分别为$3,-3,2\sqrt{2},-2\sqrt{2}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2 - y\frac{\partial z}{\partial x})(2z + xy) - (2x + y^2 - yz)(2\frac{\partial z}{\partial x} + y)}{(2z + xy)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{(2y - z - y\frac{\partial z}{\partial y})(2z + xy) - (2x + y^2 - yz)(2\frac{\partial z}{\partial y} + x)}{(2z + xy)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(2x - x\frac{\partial z}{\partial y})(2z + xy) - (2xy - xz)(2\frac{\partial z}{\partial y} + x)}{(2z + xy)^2}.$$

注意到在驻点处$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 可得海赛矩阵$H_z$在4个驻点处分别为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{5} \end{bmatrix},$$

对应的矩阵分别是不定的、不定的、正定的和负定的. 因此, $(0,3)$和$(0,-3)$不是极值点, $(1,\sqrt{2})$是极小值点对应的极小值为$\sqrt{2}$, 而$(1,-\sqrt{2})$是极大值点对应的极大值为$-\sqrt{2}$.

例

设隐函数$z=z(x,y)$由方程$x=u+v,y=u^2+v^2,z=u^3+v^3$确定. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：方法1. 由题设可知，

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\ 0=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由此可解得，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u-v}.$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}=-3uv$, 进而可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-3v\frac{\partial u}{\partial x}-3u\frac{\partial v}{\partial x}=-3(u+v)=-3x.$$

例

设隐函数$z=z(x,y)$由方程$x=u+v, y=u^2+v^2, z=u^3+v^3$确定.
求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：方法2. 由题设可知，$2uv=x^2-y$, 从而

$$\begin{aligned} z &= (u+v)(u^2-uv+v^2) \\ &= x\left(y-\tfrac{1}{2}(x^2-y)\right) \\ &= \tfrac{3}{2}xy-\tfrac{1}{2}x^3. \end{aligned}$$

由此我们可算得，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-3x.$$

例

求函数$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$的极值.

解：由于f是初等函数，故二阶偏导数连续. 又

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xe^{-x^2-y^2}-2x(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}=2x(1-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2ye^{-x^2-y^2}-2y(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}=2y(1-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

故f的驻点为$(0,0)$和单位圆周上的任意点. 另外，我们可算得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2(1-5x^2-y^2+2x^4+2x^2y^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4xy(2-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2(1-5y^2-x^2+2y^4+2x^2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

于是在原点$(0,0)$处的海赛矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. 该矩阵为正定矩阵，于是

$(0,0)$点为函数f的极小值点，对应的极小值为0. 另外，f的海赛H_f在单位圆周上任意一点处的的特征值为$0,-\frac{4}{e}$. 此时，H_f是半负定的，故不能用来判断f在是否该点取极值. $\forall u\in\mathbb{R}$, 定义$F(u)=ue^{-u}$. 由于F为初等函数，故二阶连续可导

$$F'(u)=e^{-u}-ue^{-u}=(1-u)e^{-u}.$$

于是，$F'(u)$在$(-\infty,1)$上为正，在$(1,+\infty)$上为负，故F在$u=1$处达到最大值. 也即， $\forall u\in\mathbb{R}$, $F(u)\le F(1)=\frac{1}{e}$. 于是，$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=F(x^2+y^2)\le F(1)=\frac{1}{e}.$$

这意味着f在单位圆上取到最大值$\frac{1}{e}$. 由于单位圆上任意一点都是$\mathbb{R}^2$的内点，因此它们都是f的极大值点相应的极大值为$\frac{1}{e}$.

作业： 2024年3月28日交

- 习题 7.11 (A)
  - 2. (1) (3)
- 习题 7.11 (B)
  - 2.
  - 4.
- 习题 7.12
  - 1.

谢谢大家!