工科数学分析下

李茂生

2024/4/12

重积分的应用

- 重积分在几何上的应用
- 重积分在物理上的应用

重积分在几何上的应用

- 求平面区域的面积S
  设有平面区域D，则其面积为
  $$S = \iint\limits_D 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- 求空间区域的体积V
  设有空间区域Ω，则其体积为
  $$V = \iiint\limits_\Omega 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

重积分在物理上的应用

物体的质心

设有一质点组,每个质点的位置为$(x_i, y_i, z_i)(i=1,\cdots,n)$,对应的质量为$m_i(i=1,\cdots,n)$, 则该质点组的质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$为

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, \bar{y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}, \bar{z}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{M},$$

其中$M=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$为质点组的总质量.

重积分在物理上的应用

物体的质心

问题

设有一物体，占有$\mathbb{R}^3$中的闭区域Ω,在点(x,y,z)的密度为$\rho(x,y,z)$，并设$\rho(x,y,z)$在Ω上连续，求该物体的质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{M},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{M},\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{M},$$

其中$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$为该物体的总质量.

当$\rho(x,y,z)=1$或常数时，质心也称为形心.

例

假设在 $\Omega=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\}$上分布着密度为$\rho(x,y,z)=1+x^2+y^2$的质量，求该物体的质心.

例

设曲面S在球坐标系下的方程为

$$r = a(1 + \cos\varphi)\ (a > 0)$$

令Ω为曲面S所围成的有界区域，求Ω在直角坐标系下的形心.

重积分在物理上的应用

物体的转动惯量

问题

设有一物体，占有$\mathbb{R}^3$中的闭区域Ω,在点(x,y,z)的密度为$\rho(x,y,z)$，并设$\rho(x,y,z)$在Ω上连续，求该物体的绕x,y,z轴的转动惯量.

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_y=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

例

求半径为a的均匀半圆薄片对于其半径的转动惯量.

重积分在物理上的应用

物体对质点的引力

万有引力定律：质量分别为M, m，距离为R的两个质点的引力大小为

$$F = G\frac{Mm}{R^2}, \text{ 其中G为引力常数 }.$$

注意到力是一个矢量有方向，它的方向与两质点连线对应的向量(设为$\vec{R}$)共线. 因此,

$$\vec{F} = \pm G\frac{Mm}{R^2}\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \pm G\frac{Mm\vec{R}}{|\vec{R}|^3}.$$

问题

设有一物体，占有$\mathbb{R}^3$中的闭区域Ω,在点(x, y, z)的密度为$\rho(x, y, z)$，并设$\rho(x, y, z)$在Ω上连续. 在Ω之外点$P(x_0, y_0, z_0)$处放置一个单位质量的质点，求该物体对该质量的引力$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$.

重积分在物理上的应用

物体对质点的引力

微元法. 在Ω内取出有代表性的一小块体积微元$\mathrm{d}V$, 在$\mathrm{d}V$内任取一点(x,y,z). 体积微元$\mathrm{d}V$的质量为

$$\mathrm{d}M=\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

令$\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$为由$P$指向$\mathrm{d}V$的向量. 由万有引力定律知，$\mathrm{d}V$对质点$P$的引力为

$$\mathrm{d}\vec{F}=(\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z)=G\frac{\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}.$$

因此，有

$$\begin{aligned}
F_x &= G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}V,\\
F_y &= G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}V,\\
F_z &= G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

例

设有面密度为常量,半径为R的均匀圆的薄片 $x^2+y^2\leq R^2, z=0$, 求它对位点$M_0(0,0,a)$ $(a>0)$ 处的单位质量质点的引力.

例

设有一均匀的球顶椎体，球心在原点，半径为R，椎体的顶点在原点，轴为z轴，锥面与z轴交角为α $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$. 求此球顶椎体对于在其顶点的一单位质量的质点的引力.

教学要求

1. 理解二重积分、三重积分的概念,了解重积分的性质.
2. 掌握二重积分的计算法(直角坐标、极坐标)，掌握三重积分的计算法（直角坐标、柱面坐标、球面坐标).
3. 会用重积分求一些几何量与物理量.

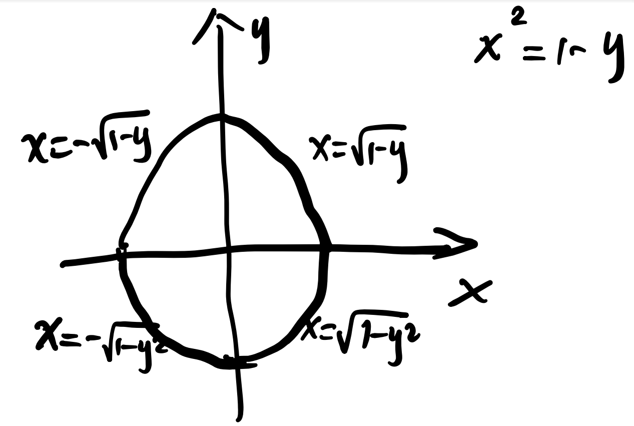
综合练习

例

交换下述累次积分的顺序

$$I=\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

$$I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx$$



综合练习

例

设$f(x)$在$[0,a]$ $(a>0)$上连续，证明:

$$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x]^2.$$

证明: 因$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le x\le y\le a} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 利用积分变元记号的对称性可得$\iint\limits_{0\le x\le y\le a} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le y\le x\le a} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 于是有,

$$\begin{aligned}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y &= \iint\limits_{0\le x\le y\le a} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{0\le y\le x\le a} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y\\ &=[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x]^2.\end{aligned}$$

综合练习

例

设$f(x)$在$[a,b]$ 上连续，证明: $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

证明：设$D=\{(x,y)|a\leq x,y\leq b\}$, 则有 $\iint\limits_D [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$. 等价地有 $\iint\limits_D f(x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D f(y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 2\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由$x,y$位置的对称性，$\iint\limits_D f(x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 于是有

$$\iint\limits_D f(x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

两边同时写成下述累次积分即可得证.

$$\iint\limits_D f(x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x = (b-a)\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x,$$

$$\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

综合练习

例

计算二重积分$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D=\{(x,y)|x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}.$$

解：做变换 $u=x+y, v=y$, 可算得雅可比行列式$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$. 区域$D$在该变换下变为

$$D':=\{(u,v)|v\leq u\leq 1, v\geq 0\}.$$

由于被积函数为$e^{\frac{v}{u}}$,因此我们必须先对v积分后对u积分，

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} e^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u e^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v\\ &= \int_0^1 u(e-1)\mathrm{d}u=\frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

综合练习

例

计算积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

$$\Omega:=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 2z\}.$$

解：由于区域Ω关于平面$x=0$和$y=0$对称， ax和by分别关于x和y是奇函数. 由对称性知，$\iiint\limits_{\Omega}ax\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}by\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$. 故

$$I=\iiint\limits_{\Omega}cz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}[c(z-1)+c]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

做变换$x'=x,y'=y,z'=z-2$， Ω变为Ω'(以原点为球心的单位球)，同样由对称性知， $\iiint\limits_{\Omega}c(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'}cz'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'=0$. 故有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}c\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi c}{3}.$$

综合练习

例

求由下述方程定义得两个球体

$$x^2+y^2+z^2\le 1,\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$$

相交部分的体积.

解：记$\Omega=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1,\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4\}$ 两球相交部分投影到xOy平面(此时$1-z^2=4-(z-2)^2$, 即$z=\frac{1}{4}$)为$D:=\{(x,y)|x^2+y^2\le\frac{3}{4}\}$.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D[\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}[\sqrt{1-r^2}-(2-\sqrt{4-r^2})]r\mathrm{d}r\\
&= (9-\frac{1}{8}-(\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}})\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

综合练习

例

令$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$f$可微,

$$\Omega_t := \{(x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2\le t^2\}.$$

求$F'(t)$.

解：作标准的球坐标变换得

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\ &= [\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta][\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi][\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r] = 4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

故有

$$F'(t) = 4\pi f(t^2)t^2.$$

综合练习

例

$\forall t \neq 0$, $\Omega_t = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le t^2\}$, 设$f(x)$在$x=0$处可导, 且$f(0)=0$, 求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解：令$G(t)=\iiint\limits_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 类似上题，可得 $G(t)=4\pi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$. 由$\lim\limits_{t\to 0}G(t)=0$, $f(0)=0$, 用两次洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^4}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{G'(t)}{4t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4t^3}\\ &= \pi f'(0).\end{aligned}$$

综合练习

例

求由$z=x^2+y^2$, $2z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x+y=-1$, $x-y=1$, $x-y=-1$所围成立体的形心坐标.

解：记所围立体为Ω,则 Ω关于平面$x=0$和$y=0$对称，易得$\bar{x}=\bar{y}=0$.
不妨设该立体的密度为1,则

$$M=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{3}.$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\times 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{7}{20}.$$

于是，该几何体的形心坐标为$(0,0,\frac{7}{20})$.

作业：2024年4月18日交

- 习题 8.5 (A)
  - 1. (4)
  - 6.
- 总习题（8）
  - 5.
  - 9.
  - 10.
  - 12.

谢谢大家!