华南理工大学期末考试

2021-2022-2学期《工科数学分析（二）》(A) 答案

一、叙述定义和定理（共5 小题, 每小题2 分, 共10 分）

1．二元函数的偏导数.

设二元函数$z=f(x,y)$ 定义于开区域D, 且点$(a,b)\in D$, 称一元函数$z=f(x,b)$ 在a 点的导数为二元函数$f(x,y)$ 在(a,b) 点关于x 的偏导数, $\cdots\cdots$ (1 分)

一元函数$z=f(a,y)$ 在b 点的导数为二元函数$f(x,y)$ 在(a,b) 点关于y 的偏导数.

2. 高斯公式.

设V 是$\mathbb{R}^3$ 内的一个有界闭区域, 其边界Σ 由光滑曲面或分片光滑曲面组成, 方向取外侧. 又设函数P, Q, R 在V 上有一阶连续偏导数,

则下列高斯公式成立:

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中$\cos\alpha$,$\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为Σ 上单位外法向量e_n 的方向余弦. 上述公式还可写成

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3．条件收敛级数.

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

4. 函数列的一致收敛.

设函数列$\{f_n(x)\}$ 在区间I 上有一极限函数$f(x)$. 如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$, 使当$n>N$ 时, $\forall x\in I$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

成立, 则称$\{f_n(x)\}$ 在I 上一致收敛于$f(x)$.

5. 二阶线性齐次常微分方程$L[y]=0$ 的基础解系.

$L[y]=0$的两个线性无关解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$称为$L[y]=0$ 的基础解系.

二、 计算题(共4 小题，每小题10 分，共40 分)

1. 设$u=z^2+2z$, 且$z=z(x,y)$ 由方程$x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z,(z\neq1)$ 所确定, 求$\mathrm{d}u$ 和$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$.

解: 令$F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$. 则$F_x=(x+1)e^x,F_y=-(y+1)e^y,F_z=-(z+1)e^z$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+1}{z+1}e^{x-z},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z},(z\neq-1)$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(2z+2)\frac{\partial z}{\partial x}=2(x+1)e^{x-z},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=(2z+2)\frac{\partial z}{\partial y}=-2(y+1)e^{y-z}.$$

因此

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=2(x+1)e^{x-z}dx-2(y+1)e^{y-z}dy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2e^{x-z}+2(x+1)e^{x-z}(1-z_x)=\frac{2e^{x-z}[(z+1)(x+2)-(x+1)e^{x-z}]}{z+1}$$

2. 计算$\int_1^2\ \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\ \mathrm{d}y+\int_2^4\ \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\ \mathrm{d}y$.

解:

$$\int_1^2\ \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\ \mathrm{d}y+\int_2^4\ \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\ \mathrm{d}y=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$

$$\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

3. 计算$\iint_\Sigma x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, 其中$\Sigma$ 为$x^2+y^2=1, z=x+2$ 和$z=0$ 所围立体的表面,取外侧.

解: 令$S=S_1+S_2+S_3$, 其中$S_1: z=0$, 取下侧; $S_2: z=x+2$, 取上侧, 在Oyz 平面的投影区域为$D_{yz}:\{(y,z)\mid y^2+(z-2)^2\le 1\}$. 则由于$S_1$ 在Oyz 平面的投影为线, 故

$$\iint_{S_1}xdydz=0.$$

而

$$\iint_{S_2}xdydz=-\iint_{D_{yz}}(z-2)dydz=-\int_{-1}^1 dy\int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}}(z-2)dz=0.$$

对于$S_3: x^2+y^2=1$, 令$S_3=S_{31}+S_{32}$. 即, $S_{31}: x=\sqrt{1-y^2}$, 取前侧($\cos\alpha>0$), 在Oyz 平面的投影区域为

$$D_{31}: 0\le z\le 2+\sqrt{1-y^2}, -1\le y\le 1.$$

$S_{32}: x=-\sqrt{1-y^2}$, 取后侧($\cos\alpha<0$), 在Oyz 平面的投影区域为

$$D_{32}: 0\le z\le 2-\sqrt{1-y^2}, -1\le y\le 1.$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_{S_3}xdydz&=\iint_{D_{31}}\sqrt{1-y^2}dydz-\iint_{D_{32}}-\sqrt{1-y^2}dydz\\&=\int_{-1}^1 dy\int_0^{2+\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dz+\int_{-1}^1 dy\int_0^{2-\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dz\\&=4\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy=4\times\frac{\pi}{2}=2\pi\end{aligned}$$

故, 原式$=0+0+2\pi=2\pi$.

4. 计算$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s$, 其中$L$ 为圆周$x^2+y^2=a^2,(a>0)$, 直线$y=x$ 与x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

解: 边界分成三段: $L_1: y=0, 0\le x\le a$, $L_2: y=x, 0\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}a$, $L_3: x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

且

$$\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s=\int_0^a e^x dx=e^a-1.$$

$$\int_{L_2} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}a} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}dx = e^a - 1.$$

$$\int_{L_3} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a d\theta = \frac{\pi a}{4}e^a.$$

故

$$\int_{L} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s + \int_{L_1} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s + \int_{L_3} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = 2(e^a-1) + \frac{\pi a}{4}e^a.$$

三、 解答题（共3 小题，每小题10 分，共30 分)。

1. 设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中$\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且$\varphi(0)=0$, 计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

解: 设$P(x,y)=xy^2, Q(x,y)=y\varphi(x)$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)] = y\varphi'(x)$$

由于积分与路径无关, 故$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 即有

$$y\varphi'(x) = 2xy \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + C.$$

由$\varphi(0)=0$, 知$C=0 \Rightarrow \varphi(x)=x^2$.

因此

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + yx^2dy = \int_0^1 0dx + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}.$$

$\cdots\cdots$ (2分)

2. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解: 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

(1) 求收敛区间.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

收敛区间为$(-1,1)$.

(2) 求和函数$S(x)$. 对于$x\in(-1,1)$, 有

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

设$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$\int_0^x g(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

故

$$g(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

即

$$\int_0^x S(x)dx = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

从而

$$S(x)=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

(3) 求函数$S(x)$ 在$x=\frac{1}{2}$ 的值.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=S\left(\frac{1}{2}\right)=8$$

3. 求方程$y''+4y'+4y=\cos 2x$ 的通解.

解: (1) 特征方程为

$$r^2+4r+4=0,$$

解得特征根为

$$r=-2\quad(\text{二重})$$

故齐次方程$y''+4y'+4y=0$ 的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

(2)设方程的一个特解为

$$y^*=A\sin 2x+B\cos 2x$$

代入方程, 比较系数得$A=\frac{1}{8}$.

故方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x.$$

四、应用题（10 分）

将长为2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解: 设铁丝分成的三段长分别为x,y,z, 则$x+y+z=2$, 且依次围成的圆的半径、正方形的边长、三角形的边长分别为$\frac{x}{2\pi}$,$\frac{y}{4}$, $\frac{z}{3}$.

因此三个图形之和为

$$S=\pi(\frac{x}{2\pi})^2+(\frac{y}{4})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{z}{3})^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2$$

作Lagrange函数

$$L(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$$

由

$$L_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0,L_y=\frac{y}{8}+\lambda=0,L_z=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0,L_\lambda=x+y+z-2=0,$$

得

$$x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}},y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}},z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

最小值为$x=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

五、证明题（10 分）。

证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在$[0,1]$ 上一致收敛.

证明：对一般项$u_n(x)=x^n(1-x)^2$求导，令

$$u_n'(x)=nx^{n-1}(1-x)^2-2x^n(1-x)=0$$

得到可以极值点$x=0,1,\frac{n}{n+2}$.

由于

$$u_n\left(\frac{n}{n+2}\right)>u_n(0)=u_n(1)=0$$

故$u_n(\frac{n}{n+2})$为$u_n(x)$在$[0,1]$上的最大值. 从而

$$u_n(x)\le(\frac{n}{n+2})^n(1-\frac{n}{n+2})^2\le(\frac{2}{n+2})^2<\frac{4}{n^2}.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在$[0,1]$ 上一致收敛.