座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号□□□□□□□□□□□□ 姓名________

（密封线内不答题）

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2021-2022 第一学期《工科数学分析》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷相应空白处；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共十大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

一）（10 分）用 $\varepsilon - N$ 定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$.

得分

证明：$\because \left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right| = \frac{5}{4\sqrt{n}-2}$

$\leq \frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}} < \frac{5}{\sqrt{n}}$

$\therefore \forall \varepsilon>0$，令 $N=\left[\frac{5^2}{\varepsilon^2}\right]+1$ 则 $n>N$ 时

$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right| < \frac{5}{\sqrt{n}} < \frac{5}{\sqrt{N}} = \varepsilon$ #

二）（10 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

得分

解：$\because \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x\to 0$

$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to\infty$

$\therefore \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$ #

三）（10 分）完成下面两题：

得分

（1）．令 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(2021)}(0)$.

解：$\because f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(x)(1+x^2)=1$

两边取 2020 阶导数

则由莱布尼兹公式： $y^{(2019)}(x)=0$

$(1+x^2)y^{(2021)}(x)+2\cdot 2020\cdot x\,y^{(2020)}(x)+2020\cdot 2019$

令 $x=0$．则

$y^{(2021)}(0)=-2020\cdot 2019\cdot y^{(2019)}(0)$

由 $y'(0)=1$，$y''(0)=0$ 可得 $y^{(2021)}(0)=(2020)!$ #

（2）．计算积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

解：$\because \frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1$

令 $\frac{x-a}{b-a}=\sin^2 t$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(b-a)\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t\,(b-a)\cos^2 t}}$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$ #

注：也可以 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}+$

$\int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

再令 $x-a=t$.

四）（10 分）计算以下两题：

得分

(1). $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\mathrm{d}x$;

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,d\cos x$

$=-\sin^3 x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x\,dx$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$

$=\frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 2x\,dx\quad=\frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\,dx$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$ #

(2). 设旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\qquad (a>0,\ t\in[0,2\pi]).$$

求旋轮线与 x 轴所围区域的面积。

解：$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a\cdot(1-\cos t)\,dt$

$=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,dt$

$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$

$=2\pi a^2-0+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt$

$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}\cdot t\Big|_0^{2\pi}+0$

$=3\pi a^2$ #

得分

五）（10 分）设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续可微，且 $f(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $f(b^-)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 均存在，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b^-)-f(a^+)}{b-a}.$$

证：定义函数

$$g(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$$

$\because$ $f(a^+)$，$f(b^-)$ 均存在且 $f(x)$ 在 $(a.b)$ 上连续可微．故 $g(x)$ 在 $[a.b]$ 上连续 在 $(a.b)$ 上可微，则由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(a.b)$．s.t

$$g'(\xi)=f'(\xi)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(b^-)-f(a^+)}{b-a}\ \#.$$

六）（12 分）设心脏线方程为 $r=a(1+\cos\theta)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 为极坐标。

得分

(1). 求心脏线上斜率为 1 的切线；

解：$\because r'(\theta)=-a\sin\theta$

令 $\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$

$=-\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}=1$

3分 — $\Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{2},\ \theta_2=\frac{7}{6}\pi,\ \theta_3=\frac{11\pi}{6}$

$\therefore r_1=a(1+\cos\frac{\pi}{2})=a,\ x_1=0,\ y_1=a$

$r_2=a(1-\frac{\sqrt3}{2}),\ x_1=-a(1-\frac{\sqrt3}{2})\frac{\sqrt3}{2},\ y_2=-a(1-\frac{\sqrt3}{2})\frac{1}{2}$

5分 — $r_3=a(1+\frac{\sqrt3}{2})\quad x_3=a(1+\frac{\sqrt3}{2})\frac{\sqrt3}{2},\ y_3=-a(1+\frac{\sqrt3}{2})\frac{1}{2}$

$\therefore$ 切线：

$y=x+a$

$y=x+\frac{3\sqrt3-5}{4}a$

$y=x-(\frac{5}{4}+\frac{3\sqrt3}{4})a.$

(2). 求心脏线的全长。

解：$\because$ 心脏线极坐标为 $r=a(1+\cos\theta)$

又 $x=r(\theta)\cos\theta\quad y=r(\theta)\sin\theta$

$\therefore x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta$

$y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$

$\therefore l=2\int_0^\pi\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}\,d\theta.$

$=2\int_0^\pi\sqrt{r'^2+r^2}\,d\theta$

$=2\int_0^\pi\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$

$=2\sqrt2 a\int_0^\pi\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$

$=8a$ #

七）(10 分) 证明函数 $F(x)=\frac{\int_0^x te^t\mathrm{d}t}{\int_0^x e^t\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加的函数。

得分

证明：$F'(x)=\frac{1}{(\int_0^x e^t dt)^2}[xe^x\int_0^x e^t dt - e^x\int_0^x te^t dt]$

$=\frac{e^x}{(\int_0^x e^t dt)^2}\int_0^x (x-t)e^t dt \geq 0$

$\therefore$ $F(x)$ 为单调增函数 #

八）(10 分) 证明 $f(x)=\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

得分

证明：对任何 $[x_1,x_2]\subset(-\infty,+\infty)$

$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件.

$\therefore \exists\, \xi=x_1+\theta(x_2-x_1)$，$\theta\in(0,1)$．s.t

$\arctan x_1-\arctan x_2=\frac{1}{1+\xi^2}(x_1-x_2)$.

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|$

$\therefore \forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon$ 则 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ #

得分

九）(10 分)设 $0<p<1, a, b>0$. 证明：

(1). $f(x)=x^p$ 在 $x>0$ 时是凹函数；

证明：$\because f(x)=x^p$

$\therefore f'(x)=px^{p-1}$

$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$

$\because p\in(0,1)$. $\therefore f'(x)=p(p-1)x^{p-2}<0$

$\therefore f(x)$ 在 $x>0$ 时为凹函数 #

(2). $2^{p-1}(a^p+b^p)\le(a+b)^p\le a^p+b^p$.

证明：$\because f(x)=x^p$ 为凹函数. 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^p\ge\frac{1}{2}(a^p+b^p)$$

$$\therefore (a+b)^p\ge 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

又令 $p=1-h$, $h\in(0,1)$

则 $(a+b)^p=(a+b)^{1-h}=\dfrac{a}{(a+b)^h}+\dfrac{b}{(a+b)^h}$

$$\le\frac{a}{a^h}+\frac{b}{b^h}=a^{1-h}+b^{1-h}=a^p+b^p$$

$$\therefore 2^{p-1}(a^p+b^p)\le(a+b)^p\le a^p+b^p$$ #.

十）（8 分）已知

得分

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

试给出 $f(x)$ 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林展开。

解：首先

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\underline{0}$$

其次，$x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

假设 $x\neq 0$ 时

$f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中 P_n 为多项式.

则

$$f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{2}{x^3}P_n(\tfrac{1}{x})-\frac{1}{x^2}P_n'(\tfrac{1}{x})\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\triangleq P_{n+1}(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$$

其中 $P_{n+1}(\frac{1}{x})$ 依然为 $\frac{1}{x}$ 的多项式.

由归纳法知 $f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$

其中 P_n 为多项式. $\forall n\in\mathbb{N}$

因此，若 $f^{(n)}(0)=0$. 则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

又由归纳法知 $f^{(n)}(0)=0$. $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\therefore f(x)=o(x^n)$，$\forall n\in\mathbb{N}$. #