座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号□□□□□□□□□□□□ 姓名________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2022-2023-1 学期《线性代数与解析几何》试卷(A 卷)

注意事项：1. 所有答案请写在答题卡上，答在试卷上无效；

2. 选择题请用 2B 铅笔涂黑；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共七大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、选择题(共 11 题，每题 3 分，共 33 分)

1. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta), B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma)$都是 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$都是 4 维列向量，$|A|=2,|B|=1$，则行列式$|A-3B|$的值为(　C　)

A．1　　B．-1　　C．8　　D．-8

2. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 64 & 1 & 16 \\ 2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 27 & 1 & 9 \end{vmatrix}$的值为(　B　)

A．12　　B．-12　　C．24　　D．-24

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则对任意常数$k$，必有(　B　)

A．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关　　B．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关

B．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关　　D．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关

4. 设A为n阶矩阵，且$|A|=0$，则A中(　C　)

A．必有一列全为零　　B．必有两列成比例

C．必有一列可由其它列线性表示　　D．任一列可由其它列线性表示

5. 关于第三类初等矩阵$P(i,j(k))$，以下成立的是(　C　)

A．$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(k))$　　B．$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(k))^T$

C．$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$　　D．$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))^T$

6. 设A为 3 阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，A^*为A的伴随矩阵，则行列式$\left|A^*-(\frac{1}{2}A)^{-1}\right|$的值为(　D　)

A．0　　B．-3　　C．$\frac{27}{4}$　　D．$-\frac{27}{4}$

7．若A是正交矩阵，则以下命题不成立的是(　C　)

A．A^T为正交矩阵　　B．A^{-1}为正交矩阵

C．A的行列式为 1　　D．A^*为正交矩阵

8．设三阶方阵A的特征值为$1,2,-2$，B与A相似，则矩阵$B-E$的迹为(　C　)

A．0　　B．1　　C．-2　　D．-4

9．xoy平面上曲线x^2+4y^2=1 绕x轴旋转所形成的旋转曲面的方程为(　A　)

A．$x^2+4y^2+4z^2$=1　　B．$4x^2+y^2+4z^2=1$

C．$4x^2+4y^2+z^2=1$　　D．$x^2+4y^2+z^2$=1

10．以下方程表示双曲抛物面的是(　D　)

A．$x^2+4y^2-9z^2=16$　　B．$x^2-4y^2-9z^2=16$

C．$x^2+4y^2+9z=0$　　D．$x^2-4y^2+9z=0$

11．设$f(X)=x_1^2+tx_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$为正定二次型，则实数$t$取(　D　)

A．$t>0$　　B．$0<t<1$　　C．$\frac{1}{2}<t<1$　　D．$0<t<\frac{1}{2}$

二、**(8 分)** 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}$

解：$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&0&0&\cdots&0&0\\2&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\n-2&n-3&n-4&\cdots&0&0\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n$

三、**(8 分)** 在$\mathbb{R}^3$中，求基$\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,3),\alpha_3=(3,7,1)$到基$\beta_1=(3,1,4),\beta_2=(5,2,1),\beta_3=(1,1,-6)$的过渡矩阵。

解：$(\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \beta_1'\ \beta_2'\ \beta_3')=\begin{pmatrix}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{pmatrix}$

故所求过渡矩阵为$\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$

四、**(15 分)** a取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+ax_3=1\\x_1+3x_2+(2a-1)x_3=1\\x_1+(a+3)x_2+ax_3=2a-1\end{cases}$ 有唯一解?无解?有无穷多解?在有无穷多解时,求通解(用方程组的特解与其导出组的基础解系表示)。

解：$\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\1 & 3 & 2a-1\\1 & a+3 & a\end{vmatrix}=-(a+1)(a-1)$

当$a\neq\pm1$时，方程组有唯一解。

当$a=1$时，$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，有无穷多解。

解为$\begin{cases}x_1=1-x_3\\x_2=0\end{cases}$,$x_3$为自由未知量，故方程组有一特解$\alpha=(1,0,0)'$,其导出组的一个基础解系为$\beta=(-1,0,1)'$,通解为$\alpha+k\beta$,其中$k$为任意常数。

当$a=-1$时，$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\1 & 3 & -3 & 1\\1 & 2 & -1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，无解。

五、**(15 分)** (1) 求过点$A(3,1,2)$且平行于平面$\pi_1: x+y+z+3=0$和$\pi_2: y-z+1=0$的直线l的方程；(2) 求点 B(1,2,1)到直线l的距离$d(B,l)$；(3) 求直线l与平面$\pi: x-y+z+3=0$的夹角θ。

解：(1)平面$\pi_1: x+y+z+3=0$的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$

平面$\pi_2: y-z+1=0$的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(0,1,-1)$

则直线l的方向向量$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(-2,1,1)$，从而直线$l$的方程为$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$

(2)$\overrightarrow{AB}=(-2,1,-1)$,$\vec{s}\times\overrightarrow{AB}=(-2,-4,0)$,$d(B,l)=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{AB}|}{|\vec{s}|}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$

(3)平面$\pi: x-y+z+3=0$的法向量$\vec{n}=(1,-1,1)$, $\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

故$\theta=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$

六、（15 分）(1)将实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$用正交变换化为标准形，并写出所作的正交变换；(2)写出此二次型的秩、正惯性指数、负惯性指数。

解：(1)**记二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X'AX$,则其矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\2 & 5 & -4\\-2 & -4 & 5\end{pmatrix}$**

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\-2 & \lambda-5 & 4\\2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$,

故A的特征值为$\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=10$

当$\lambda=1$，$E-A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故$x_1=-2x_2+2x_3$,其中x_2,x_3为自由未知量，

从而$(E-A)X=0$有一个基础解系：$\alpha_1=(-2,1,0)'$,$\alpha_2=(2,0,1)'$

对α_1,α_2作施密特正交化得：$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)'$

对β_1,β_2作单位化得：$\gamma_1=\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5},\frac{1}{5}\sqrt{5},0\right)'$,$\gamma_2=(\frac{2}{15}\sqrt{5},\frac{4}{15}\sqrt{5},\frac{1}{3}\sqrt{5})'$

当$\lambda=10$, $10E-A=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故$\begin{cases}x_2=2x_1\\x_3=-2x_1\end{cases}$,其中$x_1$为自由未知量，

从而$(10E-A)X=0$有一个基础解系：$\alpha_3=(1,2,-2)'$

对α_3作单位化得：$\gamma_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)'$

令$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\sqrt{5}&\frac{2}{15}\sqrt{5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}\sqrt{5}&\frac{4}{15}\sqrt{5}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}\sqrt{5}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,则 P 为正交矩阵，令 X=PY,

可得二次型的标准形：$f(X)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

(2)r(f)=3, 正惯性指数为 3，负惯性指数为 0.

七、(6 分) 证明：任一矩阵可写成若干秩为 1 的矩阵之和。

证明：设A是任一$m\times n$矩阵,$r(A)=r$, 则存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使得

$A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$,则$A=\sum_{i=1}^{r}PE_{ii}Q$,其中$E_{ii}$为$(i,i)$元素为 1,其余元素为 0 的$m\times n$矩阵,

令$A_i=PE_{ii}Q$，则$r(A_i)=r(PE_{ii}Q)=r(E_{ii})=1$，且$A=\sum_{i=1}^{r}A_i$。