工科数学分析下

李茂生

2024/3/18

7.9 偏导数在几何上的应用

- 空间曲线的切线与法平面
- 曲面的切平面与法线

空间曲线的切线与法平面

1. 空间曲线 L的参数方程:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{i}+\psi(t)\boldsymbol{j}+\omega(t)\boldsymbol{k},\alpha\leq t\leq\beta.$$

即

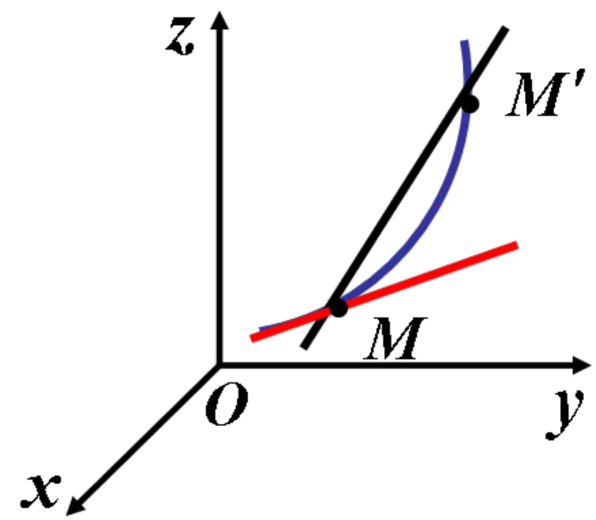
$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

物理意义: $\boldsymbol{r}'(t)$表示物体的瞬时速度;

几何意义: $\boldsymbol{r}'(t)$ 表示曲线的切向量.

几何意义

设空间的曲线方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ 并设该三个函数均可导. 设 $M(x_0, y_0, z_0)$对应于$t = t_0$; $M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$对应于$t = t_0 + \Delta t$. 则割线$MM'$的方程为



$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}.$$

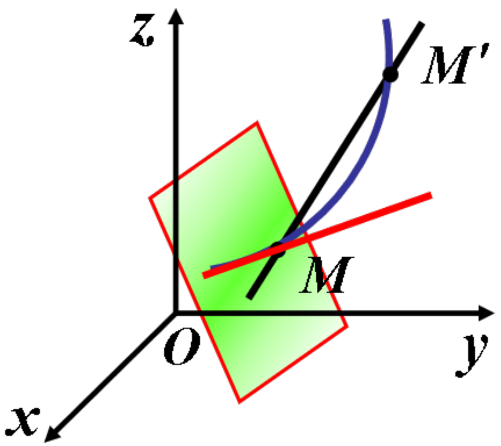
考察割线趋近于极限位置——切线的过程,上式分母同除以Δt,

$$\frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

几何意义

当$M' \to M$，即$\Delta t \to 0$时，曲线在M处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$



切向量: 切线的方向向量称为曲线的切向量. 即

$$(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)).$$

法平面: 过M点且与切线垂直的平面.

$$\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

空间曲线的方程为两个柱面的交线

即曲线表示为 $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x). \end{cases}$ 此时可以将其参数化，取x为参数，即可化为上一种的情形

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} .$$

因此，其在该线上的点(x_0, y_0, z_0)处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)}.$$

法平面方程为

$$1 \cdot (x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0.$$

例

求曲线L: $\begin{cases} x = \int_0^t e^u \cos u \mathrm{d}u \\ y = 2\sin t + \cos t \\ z = 1 + e^{3t} \end{cases}$ 在$t = 0$时刻对应的点处的切线和法平面方程.

关键求切向量 $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))\big|_{t=0}$

解: $\begin{cases} x'(t) = e^t \cos t \\ y'(t) = 2\cos t - \sin t \\ z'(t) = 3e^{3t} \end{cases}$ 故曲线L在$t=0$处的切向量 $\vec{\tau} = (1, 2, 3)$

又曲线L在$t=0$时经过点$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 2)$

故所求切线为 $\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$

所求法平面方程为: $1\cdot(x-0) + 2(y-1) + 3(z-2) = 0$

即 $x + 2y + 3z = 8$

例

求平面$y=x$和抛物柱面$z=x^2$的交线在点$M(1,1,1)$处的切线和法平面方程.

解 题意中所考虑曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x^2 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x'(x) = 1 \\ y'(x) = 1 \\ z'(x) = 2x \end{cases}$$

故该曲线在$M(1,1,1)$处的切向量为 $\boxed{(1,1,2)}$ $(x=1)$

于是所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$

所求法平面方程为 $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+2\cdot(z-1)=0$

即 $x+y+2z=4$

空间曲线的方程为两个曲面的交线

设空间曲线L为空间两曲面的交线，即其方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

设$M(x_0,y_0,z_0)$为曲线L上的一点，如何求该曲线在这点处的切线和法平面方程？我们假设 F,G关于各个变量的偏导数是连续的，且

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M \neq 0.$$

则由隐函数定理知在M的某邻域内确定了一组隐函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$. 转化为第二种类型的求法. 此时可求得，

$$y'(x_0)=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}; \quad z'(x_0)=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}.$$

切向量：$(1,y'(x_0),z'(x_0))$.

例

求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ ① 在点 $P_0(1,\sqrt{3},2)$处的切线和法平面方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-8$. $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

$$\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}\right|_{P_0} = -16\sqrt{3} \neq 0$$

由隐函数存在定理. 存在 P_0 的邻域 使得在该邻域内 原方程组决定隐函数 $y=y(x)$. $z=z(x)$. 对①中两端分别关于 x 求导可得

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot y'(x)+2z\cdot z'(x)=0 \\ 2x+2y\cdot y'(x)-2z\,z'(x)=0 \end{cases}$$ 代入 $(x,y,z)=(1,\sqrt{3},2)$.

$$\begin{cases} 2+2\sqrt{3}\,y'(1)+4z'(1)=0 \\ 2+2\sqrt{3}\,y'(1)-4z'(1)=0 \end{cases}$$ 可解得 $\begin{cases} y'(1)=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z'(1)=0 \end{cases}$. 于是所求切线的切向量为 $\boxed{(1,-\frac{1}{\sqrt{3}},0)}$

故所求切线为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{z-2}{0}$. 所求法平面方程为 $(x-1)-\frac{1}{\sqrt{3}}(y-\sqrt{3})=0$

例

求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad ①$$

在点$M(1,1,2)$处的切线与法平面方程.

解: 令 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6$, $G(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

$$\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_M = \left.\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -2y & 1 \end{vmatrix}\right|_M = (2y+4yz)|_M = 10 \neq 0$$

由隐函数存在定理, 存在M的邻域, 使得在该邻域内原方程组可决定隐函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$. 在①两边同时关于x求导可得

$$\begin{cases} 2x + 2y\cdot y'(x) + 2z\cdot z'(x) = 0 \\ z'(x) - 2x - 2y\cdot y'(x) = 0 \end{cases}$$ 代入 $(x,y,z)=(1,1,2)$ 得

$$\begin{cases} 2 + 2y'(1) + 4z'(1) = 0 \\ z'(1) - 2 - 2y'(1) = 0 \end{cases}$$ 可解得 $\begin{cases} y'(1) = -1 \\ z'(1) = 0 \end{cases}$, 故所求切线的切向量为 $(1,-1,0)$

于是所求切线为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$, 所求法平面方程为 $1\cdot(x-1) - (y-1) = 0$

即 $x-y=0$

曲面的切平面与法线

回忆二元函数的局部线性化: 若函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)点可微，则

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

即, 二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)点附近可局部线性化.

接下来，我们考察曲面$z=f(x,y)$与平面

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

之间的关系.

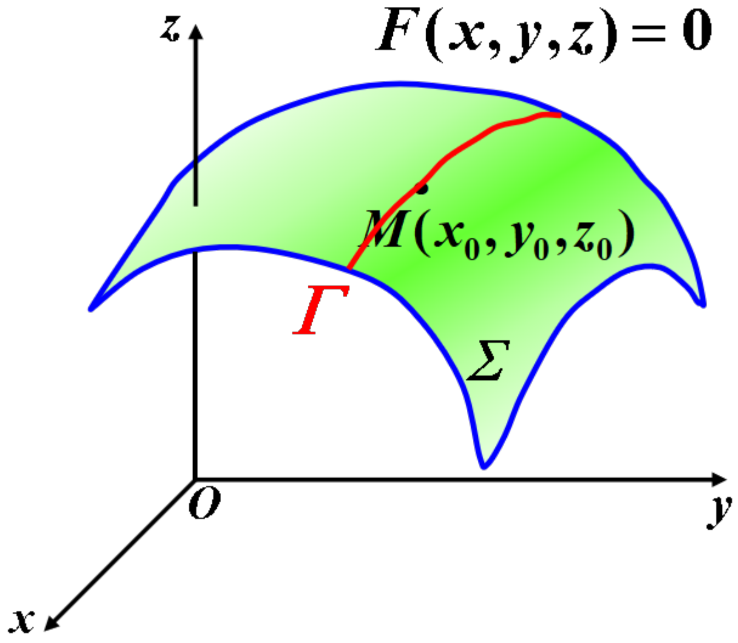
曲面的切平面与法线

设曲面Σ的方程为 $F(x,y,z)=0$, $M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 函数F关于x,y,z的偏导数在该点处连续且不同时为0. 在曲面 Σ上任意取一条过M的曲线Γ, 设其参数方程为

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),$$

点M对应于参数$t=t_0$,
且$x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$不同时为0.
由于曲线Γ在曲面Σ上，所以

$$F[x(t),y(t),z(t)]\equiv 0.$$



曲面的切平面与法线

$$F[x(t), y(t), z(t)] = 0.$$

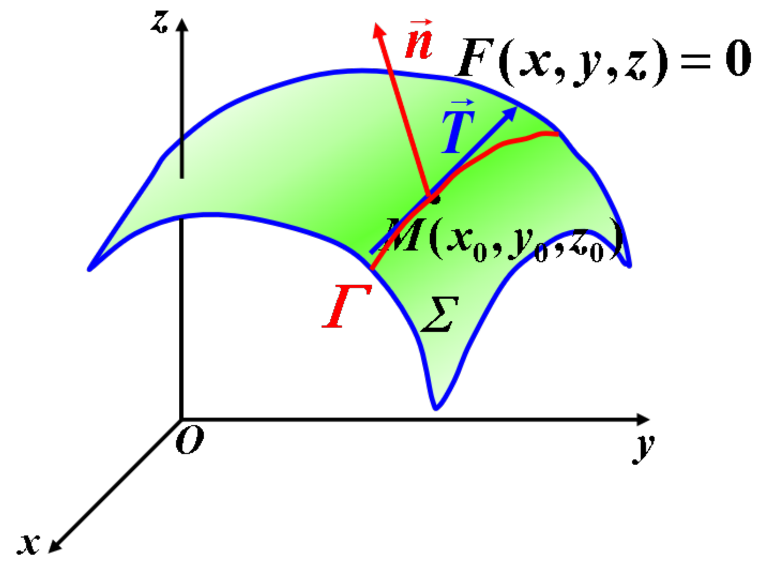
两端同时对t求导，并令$t = t_0$得

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

由此向量 $\vec{n} := \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ (即$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$) 与曲线$\Gamma$在$M$处的切向量$\vec{T} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 满足

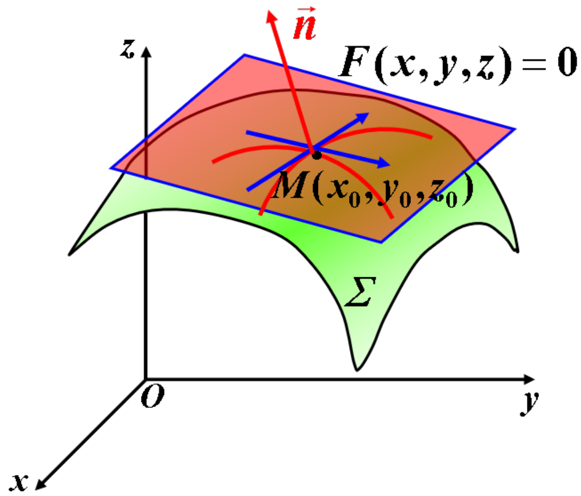
$$\vec{n} \cdot \vec{T} = 0.$$

等价地，向量$\vec{n}$与$\vec{T}$相互垂直.



曲面的切平面与法线

因为曲线Γ是曲面Σ上过点M的任意一条曲线, 所有这些曲线在点M的切线都与同一向量$\vec{n}$垂直,因此这些切线必共面,由切线形成的这一面,称为曲面Σ在点M处的切平面，该切平面方程为



$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

过点M且垂直于切平面的直线称为曲面Σ在点M的法线, 该直线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

向量$\vec{n}$为曲面Σ在点M的法向量, 又是法线的方向向量.

曲面方程形为$z=f(x,y)$的情形

令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$,则有

$$F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1.$$

故$\vec{n}=(f_x,f_y,-1)$, 此时曲面在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

即

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

曲面在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例

求曲面$z = \arctan\frac{y}{x}$在点$P_0(1, 1, \frac{\pi}{4})$处的切平面和法线方程.

解: 所求切平面的法向量 $\vec{n} = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)|_{P_0}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$$

故所求切平面为 $-\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - 1\cdot(z - \frac{\pi}{4}) = 0$

即 $-x + y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0$

所求法线为 $\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$

例

求曲面 $z = x^2 + y^2$与平面$2x + 4y - z = 0$平行的切平面方程.

解：设所求切平面为曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面

于是，该切平面的法向量为 $\vec{n} = (2x_0, 2y_0, -1)$

由题意知： $\vec{n} \parallel (2, 4, -1)$，即有 $t \in \mathbb{R}$ s.t

$$(2x_0, 2y_0, -1) = (2t, 4t, -t) \Rightarrow t = 1$$

此时 $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow z_0 = x_0^2 + y_0^2 = 5$

于是所求切平面经过 $(1, 2, 5)$ 且法向量为 $\vec{n} = (2, 4, -1)$

$\Rightarrow$ 所求切平面方程为 $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$

即 $2x + 4y - z = 5$

例

求过直线L $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面$3x^2+y^2-z^2=\cancel{0}\ 1$相切的平面方程.

解: 过直线L的平面方程一般形式为 (λ, μ不全为0)

$$\lambda(10x+2y-2z-27)+\mu(x+y-z)=0 \quad ①$$

设所求切平面为曲面$3x^2+y^2-z^2=1$在(x_0, y_0, z_0)处的切平面

此时, 该切平面的法向量$\vec{n}=\nabla F(x_0, y_0, z_0)=(6x_0, 2y_0, -2z_0)$.

($F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2$), 于是, 该切平面方程可表为

$u^2=\frac{u^2}{4}+-$

③ $\boxed{3x_0^2+y_0^2-z_0^2=1}$ $6x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0$

$\xrightarrow{\text{化简}}$ $6x_0x+2y_0y-2z_0z-2=0 \quad ②$

$6x_0=\mu$ $x_0=\frac{\mu}{6}$

$2y_0=\mu$ $y_0=\frac{\mu}{2}$

$-2z_0=-\mu$ $z_0=\mu$

对比①. ②

$$\begin{cases} -27\lambda=-2 \\ 10\lambda+\mu=6x_0 \\ 2\lambda+\mu=2y_0 \\ -2\lambda-\mu=-2z_0 \end{cases} \Rightarrow y_0=-z_0 \xrightarrow{\text{代入③}} x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mu=\pm 2\sqrt{3}-\frac{20}{27}$$

解出 $y_0=-z_0=\pm 2\sqrt{3}-\frac{16}{27}$ 代入②即可得所求方程.

例

证明：曲面$z = xe^{\frac{y}{x}}$上所有点处的切平面都过一定点.

证明： 设$P(x_0, y_0, z_0)$在曲面$z = xe^{\frac{y}{x}}$上，则该曲面在点(x_0, y_0, z_0)处切平面的法向量

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)\Big|_P = \left(e^{\frac{y_0}{x_0}} - \frac{y_0}{x_0}e^{\frac{y_0}{x_0}}, x_0 \cdot \frac{1}{x_0}e^{\frac{y_0}{x_0}}, -1\right)$$

$$= \left(e^{\frac{y_0}{x_0}}\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right), e^{\frac{y_0}{x_0}}, -1\right)$$

故对应的切平面方程为

$$e^{\frac{y_0}{x_0}}\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right)\cdot(x-x_0) + e^{\frac{y_0}{x_0}}(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

又$z_0 = x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}}$，代入得

$$e^{\frac{y_0}{x_0}}\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right)(x-x_0) + e^{\frac{y_0}{x_0}}(y-y_0) - \left(z - x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}}\right) = 0 \quad ①$$

$\boxed{\text{观察 } (0,0,0)}$ 将$(x, y, z) = (0, 0, 0)$代入上式左端

$$e^{\frac{y_0}{x_0}}\left(1-\frac{y_0}{x_0}\right)(-x_0) + e^{\frac{y_0}{x_0}}(-y_0) + x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}} = 0$$

即$(x, y, z) = (0, 0, 0)$均满足方程①. 即$(0, 0, 0)$即为所求定点.

全微分的几何意义

- 令 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, 则$f$在$(x_0, y_0)$处的全微分可表示为

$$\mathrm{d}z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

- 曲面$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)处的全微分恰好等于曲面$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面上的点的竖坐标的增量.

法向量的方向

我们知道曲面$z = f(x, y)$的法向量可以表示为

$$\vec{n} = (f_x, f_y, -1) \text{ 或 } \vec{n} = (-f_x, -f_y, 1).$$

若用α, β, γ表示曲面的法向量的方向角, 并假定法向量的方向是向上的,即使得它与z 轴的正向所成的角γ成锐角, 则法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

作业

- 习题 7.9 (A)
  - 2. (1) (3)
  - 3.
  - 4.
  - 6. (1) (2)
  - 7. 偶数题
- 习题 7.9 (B)
  - 3

谢谢大家!