座位号________ 线

专业班级________

学院________ (密 封 线 内 不 答 题) 封

学号________ 密

姓名________

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析（二）》B卷

2022-2023 学年第二学期

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 6 大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							

评阅教师请在试卷袋上评阅栏签名

得分

一、填空题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分.

1. 微分方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为 $C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$；

2. 函数 $u=2xy-z^2$ 在点 $(2,-1,-1)$ 处方向导数的最大值为 $2\sqrt{6}$（或 $\sqrt{24}$）；

3. 设 Γ 是圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的部分， 则第一类曲线积分

$\int_\Gamma (x+y)^2 ds =$ $\frac{\pi}{2}+1$；

4. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}$ 的和为 $\cos 1+2\sin 1$；

5. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi<x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)级数在 $x=-\pi$ 处收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$.

得分

二、选择题：共 5 题，每题 2 分，共 10 分.

1. 下列微分方程中，属于二阶线性常微分方程的是（ A ）

   A. $y''+x^3y'+(\ln x)y=\tan x$；　　B. $(x^2+y^2)dy+y^2dx=0$；

   C. $(y'')^2+x^2y=1$；　　D. $y''+2\ln y=2x$.

2. 已知函数 $f(x)$ 具有二阶连续导函数，且 $f(x)>0, f'(0)=0$（f在0处的导数为0）. 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ A ）

   A. $f(0)>1, f''(0)>0$；　　B. $f(0)>1, f''(0)<0$；

   C. $f(0)<1, f''(0)>0$；　　D. $f(0)<1, f''(0)<0$.

3. 函数 $f(x,y)=1+x+y$ 在区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值与最小值之积是（ A ）

   A. -1；　　B. 1；

   C. $3-\sqrt{2}$；　　D. $1+\sqrt{2}$.

4. 设 Γ 是以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ 为顶点的正方形边界，则第一类曲线积分

   $$\oint_\Gamma \frac{x+y+1}{|x|+|y|}ds=（ D ）$$

   A. 0；　　B. 8；

   C. $4\ln 2$；　　D. $8\ln 2$.

5. 设 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(an)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（ A ）

   A. 发散；　　B. 绝对收敛；

   C. 条件收敛；　　D. 敛散性与 a 的取值相关.

三、计算题：共 3 题，每题 10 分，共 30 分.

得分

1. 设 $g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，

且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$．计算二阶偏导数 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$．

解：因 $\frac{\partial g}{\partial x}=yf_1+xf_2$，$\frac{\partial g}{\partial y}=xf_1-yf_2$，故

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(f_{11}y+xf_{12})+f_2+x(yf_{21}+xf_{22})$$

$$=f_2+y^2f_{11}+2xyf_{12}+x^2f_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x(xf_{11}-yf_{12})-f_2-y(xf_{21}-yf_{22})$$

$$=-f_2+x^2f_{11}-2xyf_{12}+y^2f_{22}.$$

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}+f_{22})=x^2+y^2.$

2. 计算累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}dz$

解：原式 $=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_z^x \frac{\sin z}{(1-z^2)}dy$

$$=\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_z^x \frac{\sin z}{(1-z)^2}dy$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2}(x-z)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2} dz \int_z^1 (x-z)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin z}{2} dz$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos 1).$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, 其中 D 是由 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 与 $y=x$ 所围成的闭区域.

解：利用极坐标，可得

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{16-10\sqrt{2}}{9}$$

四、综合题：共 3 题，每题 10 分，共 30 分.

得分

1. 设 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧，计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy.$$

解：补面 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 1)$，方向取向下，则 Σ 与 Σ_1 形成封闭曲面，记围成的区域为 Ω，由高斯公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} (6x^2+6y^2+6z)dV = 2\pi.$$

而 $$\iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma_1} 3(z^2-1)dxdy = 3\pi.$$

因此，原式 $= 2\pi - 3\pi = -\pi$.

2. 计算曲线积分 $\oint_L yzdx + 3zxdy - xydz$，其中 L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ y-z=1 \end{cases}$，其方向从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向.

解：曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=1+\sin t \\ z=\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$.

于是 $$\oint_L zy\,dx + 3zx\,dy - xy\,dz = \int_0^{2\pi} -(1+\sin t)\sin^2 t\,dt + 3\sin t\cos^2 t\,dt - \cos^2 t(1+\sin t)dt$$

$$= -2\pi.$$

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛域.

解：
$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}$$
$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}+\frac{2}{1-(x-1)}$$
$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2-\frac{3}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n.$$

再由 $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ 以及 $|x-1|<1$ 可得级数的收敛域为 $(0,2)$.

得分

五、证明题：共 1 题，每题 10 分，共 10 分.

证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证明：利用不等式 $|\arctan x|\le|x|\ \forall x\in\mathbb{R}$，有

$$\left|\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}\right|\le\left|\frac{2x}{x^2+n^3}\right|\le\left|\frac{2x}{2\sqrt{x^2n^3}}\right|=\frac{1}{n^{3/2}}.$$

对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 都成立.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 内一致收敛.

得分

六、解答题：共 1 题，每题 10 分，共 10 分.

限制点 (x,y) 在圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 上变化时，求函数 $f(x,y)=xy$ 的最小值与最大值.

解：令 $\varphi(x,y)=(x-1)^2+y^2-1$.

作函数 $F(x,y)=xy+\lambda\varphi(x,y)$.

令 $\frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda(x-1)=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y=0$

则 $x^2+y^2=4\lambda^2[(x-1)^2+y^2]=4\lambda^2$,

而由 $\varphi=0$ 知 $x^2+y^2=2x$, 所以 $x=2\lambda^2$, $\lambda y=-\lambda^2$.

若 $\lambda=0$, 得出 $(x,y)=(0,0)$. 但这显然非极值点.

因此 $\lambda\neq0$. 此时, $y=-\lambda$. 从而 $x=2y^2$, 即有

$x^2=\frac{3}{2}x$, 从而 $x=\frac{3}{2}$.

考虑以下两点

$(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

所以 $f(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ 是最大值,

$f(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{4\sqrt{3}}$ 是最小值.