一、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分

1．函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ 的 G-δ 定义是

$\forall G>0,\exists\delta>0,\forall x:-\delta<x-x_0<0$,有 $f(x)<-G$；

2．设 $a>b>0$， 则 $\arctan a-\arctan b,\dfrac{a-b}{1+a^2}$，$\dfrac{a-b}{1+b^2}$ 的从小到大的严格不等式的顺序是

$\dfrac{a-b}{1+a^2}<\arctan a-\arctan b<\dfrac{a-b}{1+b^2}$；

3．设 $y=x^2e^{2x}$，则 $d^{(n)}y=\left[x^2+nx+\dfrac{n(n-1)}{4}\right]\cdot 2^n\cdot e^{2x}(dx)^n$；

4．设 $f(x)$=$e^{-x^2}\sin x+\cos^4 x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$,则 $f(x)=e^{-x^2}\sin x+\cos^4 x+\dfrac{3\pi}{8(1\text{-}\pi)}$；

5．反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=-\ln 2$.

得分

二、计算下列各题（共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}{\arcsin^4 x}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $f(0)=0,f'(0)=1$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt}{\arcsin^4 x}\xlongequal{x^2-t^2=u}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f\left(u\right)du}{x^4}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2} f\left(u\right)du}{x^4} \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^2\right)\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^2\right)-f\left(0\right)}{x^2} \quad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{4}f'\left(0\right)=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

2. 求不定积分$\int\sqrt{x^2-1}dx$.

解：$I=\int\sqrt{x^2-1}dx=x\sqrt{x^2-1}-\int x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}dx \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-I-\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\sqrt{x^2-1}-I-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \quad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

所以，$I=\int\sqrt{x^2-1}dx=\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ ……8 分

另解：令 $x=\sec t, t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$I=\int\sqrt{x^2-1}dx=\int\tan t d\sec t \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=\tan t\cdot\sec t-\int\sec^3 t dt=\tan t\cdot\sec t-\int\sec t\cdot\left(\tan^2 t+1\right)dt$$

$$=\tan t\cdot\sec t-\mathrm{I}-\int\sec t dt=\tan t\cdot\sec t-\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\mathrm{I} \quad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

所以，$\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\left[\tan t\cdot\sec t-\ln\left|\sec t+\tan t\right|\right]+C$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C \quad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

3. 计算定积分$\int_{-2a}^{-a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$.

解：令$x=a\sec t$， ……**2 分**

则

$$\int_{-2a}^{-a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{-a^2\tan^2 t\cdot\sec t}{a^4\sec^4 t}dt=-\frac{1}{a^2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sin^2 t\cdot\cos t dt \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\sin^3 t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2} \quad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

得分

三、**解答下列各题**（共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1. 设$x_1=2$，且$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n},(n=2,3,\cdots)$.证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：（1） 由$x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n},(n=2,3,\cdots)$，易知：$\forall n,x_n>0$，

即数列$\{x_n\}$有下界，且 $x_2=\frac{9}{5}$，$x_2-x_1<0$ ……3 分

（2）$\forall n,x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}=\frac{6(x_n-x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}<\frac{2}{3}(x_n-x_{n-1})$ ……6 分

又$x_2-x_1<0$，所以，利用归纳法，可证明：$\forall n,x_{n+1}-x_n<0$，即数列$\{x_n\}$单调减少。

结合（1），利用单调有界性收敛定理，可知道，数列$\{x_n\}$收敛。

（3）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则在方程$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$两边令$n\to\infty$，取极限，得到$A=\frac{3(1+A)}{3+A}$，

解得 $A=\sqrt{3}$，（$A=-\sqrt{3}$舍去），故，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$ ……8 分

2. 设曲线$y=y(x)$由方程$y=1-xe^y$所确定，求它在点$(0,1)$处的切线方程，并求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：（1）在方程$y=1-xe^y$两边同时对x求导，则

$y'=-e^y-xe^y\cdot y'$，解得 $y'=-\frac{e^y}{xe^y+1}$ ， ……2 分

从而$y'\big|_{(0,1)}=-\frac{e^y}{xe^y+1}\Big|_{(0,1)}=-e$

则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为：$ex+y-1=0$ ……5 分

（2） $y''=\dfrac{(xe^{y}+2)e^{2y}}{(xe^{y}+1)^{3}}=-\dfrac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^{3}}$ ……8 分

3．求函数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^{2}-1}$ 的单调区间，极值以及凹凸区间和拐点（要求列表）．

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为： $x\neq\pm1$

（2） $f'(x)=\dfrac{x^{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^{2}-1)^{2}}$， $f''(x)=\dfrac{2x(x^{2}+3)}{(x^{2}-1)^{3}}$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=0,x_2=\sqrt{3},x_3=-\sqrt{3}$

令 $f''(x)=0$，得到 $x_4=0$ ……2 分

（3）列表如下

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	+	0	−	+	+	+
$f(x)$		极　大　值 $f(-\sqrt{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$			拐点 $(0,0)$			极　小　值 $f(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	

……6 分

(4) 函数的单调增区间是: $(-\infty,-\sqrt{3}],[\sqrt{3},+\infty)$,单调减区间是: $[-\sqrt{3},-1),(-1,1),(1,\sqrt{3}]$;

函数的极大值为 $f(-\sqrt{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;极小值为 $f(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

函数的凹区间为：$(-\infty,-1),[0,1)$，凸区间为：$(-1,0],(1,+\infty)$

函数的拐点为: $(0,0)$,. ……8 分

4. 求双纽线$r^2 = a^2\cos(2\theta)$所围成图形的面积.

解：根据对称性，所求的面积为第一象限部分的 4 倍，则所求面积

$$A=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos(2\theta)d\theta \qquad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

$$=a^2 \qquad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

得分

四、**证明题**（共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足条件：$|f(x)|\le a,|f''(x)|\le b,\forall x\in[0,1]$，其中$a,b$为非负常数. 证明：$|f'(x)|\le 2a+\frac{b}{2},\forall x\in[0,1]$.

证明：（1）将$f(0)$，$f(1)$在$\forall x\in[0,1]$处作二阶 Taylor 展开，则

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2, 0<\xi_1<x$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2, x<\xi_2<1 \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

上两式相减，得到

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2 \qquad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

结合已知$|f(x)|\le a,|f''(x)|\le b,\forall x\in[0,1]$，及三角不等式，有，对$\forall x\in[0,1]$，

$$|f'(x)|\le|f(1)|+|f(0)|+\frac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2+\frac{|f''(\xi_2)|}{2}(1-x)^2 \qquad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

$$\le 2a+\frac{b}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right]\le 2a+\frac{b}{2} \qquad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

2. 证明：函数$f(x)=\ln(1+x)$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证明：（1）$\forall\varepsilon>0,\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$

（2）利用 Lagrange 中值定理，有

$$f(x_1)-f(x_2)=\ln(1+x_1)-\ln(1+x_2)=\frac{x_1-x_2}{1+\xi}, \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

ξ 介于 x_1，x_2 之间，则 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\dfrac{\left|x_1-x_2\right|}{1+\xi}\le\left|x_1-x_2\right|$ ……6 分

（3）取 $\delta=\varepsilon>0$，则，对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$：$\left|x_1-x_2\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\frac{\left|x_1-x_2\right|}{1+\xi}\le\left|x_1-x_2\right|<\varepsilon \quad ……9\text{ 分}$$

故，函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。 ……10 分

得分

五、应用题（本题 9 分）

设由 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=0,x=1,x=2$ 所围成的曲边梯形被直线 $x=t\left(1<t<2\right)$ 分成 A，B 两部分，将 A，B 分别绕直线 $x=t$ 旋转一周，所得旋转体体积分别为 V_A 和 V_B，问 t 为何值时，V_A+V_B 最小？.

解：（1）$V_A=2\pi\int_1^t\left(t-x\right)\cdot\dfrac{1}{x}dx=2\pi\left(t\ln t-t+1\right)$

$V_B=2\pi\int_t^2\left(x-t\right)\cdot\dfrac{1}{x}dx=2\pi\left(t\ln t-t-t\ln 2+2\right)$

（2）记 $f\left(t\right)=V_A+V_B=2\pi\left[2t\ln t-\left(2+\ln 2\right)t+3\right]$ ……4 分

令 $f'\left(t\right)=2\pi\left[2\ln t-\ln 2\right]=0$，得到 $t=\sqrt{2}$（唯一） ……8 分

又根据实际意义，所求的 V_A+V_B 的最小值存在

（或者因为 $f''\left(\sqrt{2}\right)>0$，所以 $f\left(\sqrt{2}\right)$ 最小），

所以 $t=\sqrt{2}$ 时，V_A+V_B 最小。 ……9 分