

一) (10 分) 用 $\varepsilon - N$ 定义证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

二) (10 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \left(\frac{t}{t+1}\right)^t dt}{x}$.

三) (10 分) 完成下面两题:

(1). 令 $f(x) = x^2 e^{5x}$, 求 $f^{(n)}(x), n \geq 3$.

(2). 计算积分 $\int \sqrt{1+x^2} dx$.

四) (10 分) 计算以下两题:

(1). $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

(2). 设旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0, t \in [0, 2\pi]).$$

求旋轮线的全长。

五) (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(1) = 3 \int_0^{1/3} xf(x)dx$. 证明: 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$.

六) (10 分) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$.

(1). 求椭圆上斜率为 1 的切线;

(2). 求椭圆的面积。

七) (10 分) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 若 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

八) (10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

九) (10 分) 设 $0 < p, q < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b > 0$. 证明:

(1). $f(x) = -\ln x$ 在 $x > 0$ 时是凸函数;

$$(2). \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

十) (10 分) 已知

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

试给出 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处带皮亚诺余项的 n 阶 Taylor 展开。