

## 2.7 D-J 算法

在理解量子逻辑门以及如何使用量子云的基础上本节我们来理解量子算法,量子算法是量子计算落地实用的最大驱动力。好的量子算法设计将更快速推动量子计算的发展。现在从一个知名的量子算法——Deutsch-Jozsa 算法开始

Deutsch-Jozsa 量子算法也简称 D-J 算法,首先我们来简单了解一下 D-J 算法; David Deutsch 和 Richard Jozsa 早在 1992 年提出了该算法,这是第一个展示了量子计算和经典计算之间在解决具体问题时具有明显差异性的一个典型算法。



D-J 算法是这样描述的: 给定两个不同类型的函数,通过计算,判断该函数是属于哪一类型的函数? 其目的可用来演示说明量子计算如何在计算能力上远超经典计算。现在,我们来定义一下 D-J 算法所阐述的问题: 考虑一个函数 $f(x)$ , 它将  $n$  个字符串  $x$  作为输入并返回 0 或 1。注意,  $n$  个字符串也是由 0 和 1 组成, 函数形式如图:

$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

我们把这个函数称为常数函数。如果对任意 $f(x)$  都等于 0 或者 $f(x)$  都等于 1:

$$f(x) = 0 \quad \text{or} \quad f(x) = 1$$

而如果 $f(x) = 0$ 的个数等于 $f(x) = 1$ 的个数, 则称这个函数为平衡函数:

$$f(x) = 0 \text{ 的个数等于 } f(x) = 1$$

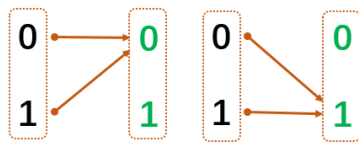


为了方便理解，下面考虑一下最简单的情况。当  $n=1$  的时候，常数函数的类型是这样的： $f(0), f(1)$ 都指向 0；或者 $f(0), f(1)$ 都指向 1，而平衡函数则是这样的，各占一半。

回顾问题，我们要解决的问题是：给定输入和输出

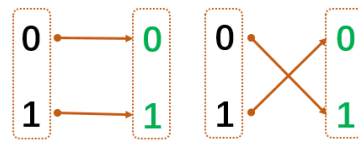
考虑 $n=1$ 的情况：

$$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$



常数函数

$$f(x) = 0 \text{ or } f(x) = 1$$



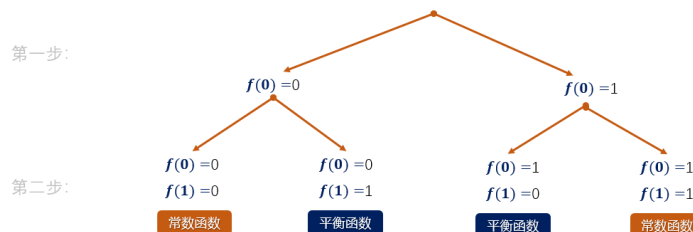
平衡函数

$$f(x) = 0 \text{ 的个数等于 } f(x) = 1$$

如何快捷的判断  $f(x)$ 是属于常数函数，或是平衡函数。下面从经典算法来分析一下。我们给定了输入之后，第一步是需要判断 $f(0)$ 。 $f(0)$ 有两种情况， $f(0) = 0$ 或者 $f(0) = 1$ ，当确定 $f(0)$ 之后，再判断 $f(1)$ 。确定了 $f(1)$ 的值之后，就可以确定该函数的类型。整个过程需要两次，才可以判断函数的类型。

按照这样的方式，对于经典算法 $n$ 个输入，在最糟糕的情况下  $f$  必须要 $2^n - 1$ 次才能判断出函数属于哪一类，而如果使用量子算法，仅需 1 次就可以判断出结果。

经典算法解决该问题的情况：

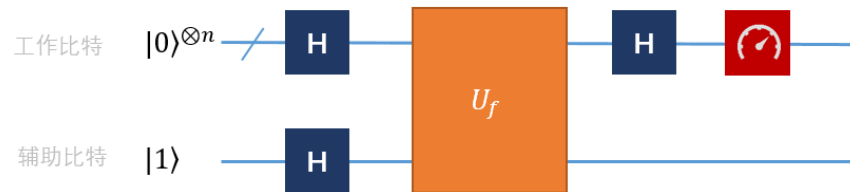


对于 $n$ 个输入，使用经典计算机，最糟糕情况下  $f$  必须  $2^n - 1$ 次才能判断出属于哪一类！

而使用量子算法，仅需1次就可判断出结果！



下面我们通过量子线路图来理解该算法是如何解决问题的。首先，对所有的比特都执行 Hadamard 门操作，然后经过黑盒子  $U_f$ ，再对工作比特添加 Hadamard 门，然后测量。



D-J量子算法的线路图。图中H代表Hadamard门， $U_f$ 是Oracle黑盒子

接下来我们按照实施步骤，再回顾一遍：

1. 初始化

$$|0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$$

2.使用 Hadamard 门来构建叠加态

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

3.使用  $U_f$  来计算函数  $f$

$$\rightarrow \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

4.在工作位上添加 Hadamard 门

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_z \sum_x (-1)^{x \cdot z + f(x)} |z\rangle \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

5.测量工作位，输出结果，一次性就可以判断出结果

$$\rightarrow z$$



对于 D-J 算法详细的知识，建议您参考本源量子云上提供的教程或者阅读相关的论文，更能深入的理解该算法。

下面我们去云平台上测试一下，这里仅测试一个简单的例子。一个工作量子比特加一个辅助位总共需要初始化两个量子比特，由于辅助位初始化的状态为 1，所以我们需要给第二个量子比特添加一个翻转操作，NOT 门之后，对所有的量子比特执行 H 门操作。下面是 Uf 部分，这里实际就是一个 CNOT 门，然后给工作位的量子比特再执行 H 门操作，测量该比特，运行。



我们知道，如果测量的结果是 1，则表明函数是常数函数；反之，则是平衡函数。

测量的结果为 1，由此可以判断该黑盒子是一个常数函数。

量子模拟 | 量子芯片 | 量子算法 | 量子教育 | 量子机器学习

官 网: [www.originqc.com.cn](http://www.originqc.com.cn)

邮 件: [edu@originqc.com](mailto:edu@originqc.com)

电 话: 0551-63836039



长按关注本源量子



本源量子研究  
OriginQ Research Group