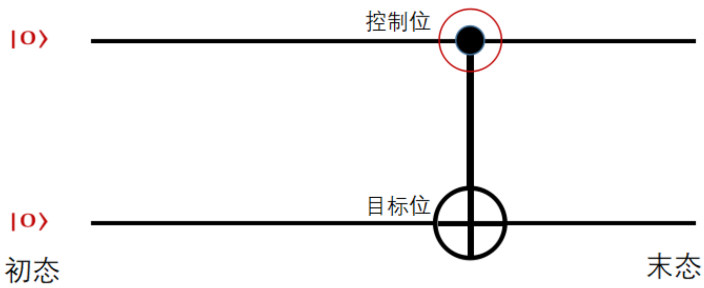
2.5 多量子比特门及应用

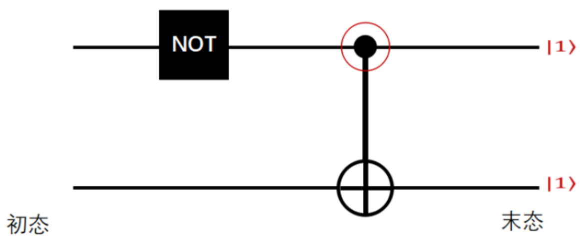
这一小节主要讨论**量子纠缠**，量子纠缠是量子科学里最不可思议的现象之一，爱因斯坦曾把这个现象称之为：**鬼魅般的超距作用**，接下来我们一起去感受吧！

本节主要包括了两个部分：**1.量子门对多量子比特的操作**；**2.量子纠缠态的制备及测量**。

首先，从量子门对多量子比特的操作开始，制备量子纠缠态的主角，是双比特 CNOT 门。这里我们先简单的介绍一下什么是 CNOT 门，中文名也称为控制非门。它作用在两量子比特上，如图：

其中包含黑点的量子比特位是控制位，与黑点有连线并带有逻辑门的是目标位。CNOT 门的规则是这样的：当控制位为|0>的时候，目标位不执行任何操作；但是当控制位为|1>的时候，目标位则执行对应位置上的逻辑门。





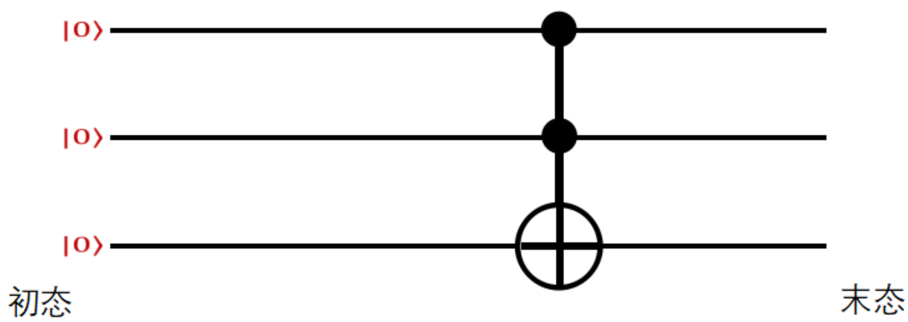
现在来演示一下 CNOT 门的作用效果，分别初始化两个|0>态，经过 CNOT 门的时候，由于控制位是|0>，所以目标位不发生变化。当我们在控制位上添加一个翻转操作时，控制态经过 NOT 门时，发生了翻转，此时控制位从|0>变成了|1>，目标位将执行翻转操作，因此最终的输出为|1>，|1>。

CNOT 门对应的矩阵表示如图：

$$\mathbf{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

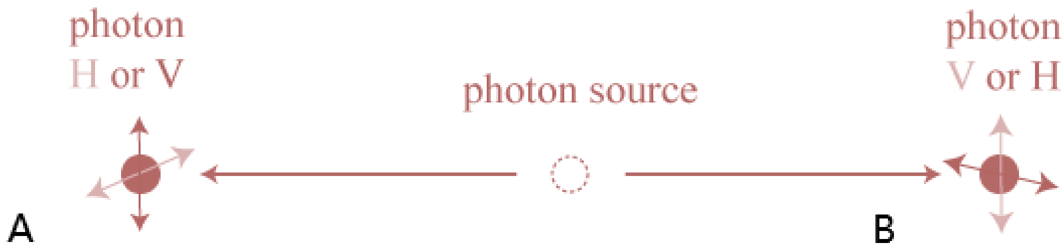
接着继续讲解另外一个常用的 3 量子逻辑门-toffoli 门，它和 CNOT 门的共性是它具备了两个控制位。

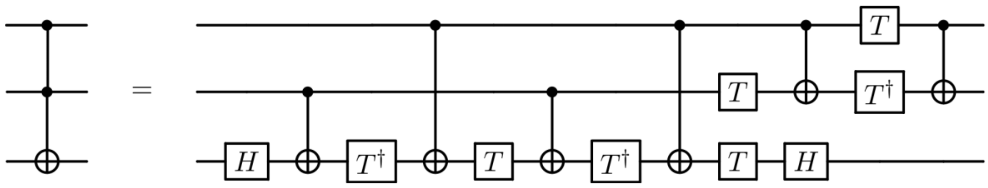
也就是说，当两个控制比特都是|1>的时候，目标位才会发生翻转。右边是 Toffoli 门的矩阵表示：



$$\begin{array}{c} \\ 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Toffoli 门可以用多个单量子比特门和多个 CNOT 门构造而得到，接下来了解纠缠态的制备和测量，**纠缠态是量子信息研究的重要资源，您可以简单的理解为 A 和 B 之间发生了某种关联。**





Toffoli门可以用单门和CNOT门构造得到！

通常提及量子纠缠态也会提到 **Bell 基**，如下就是 Bell 基的 4 个基态数学表达式：

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)$$

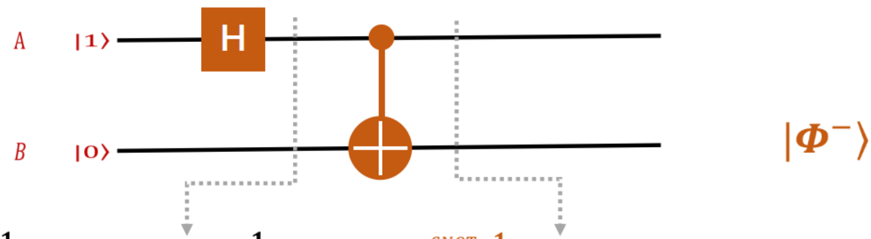
$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B).$$

对于纠缠态的定义，简单的定义为：对于复合系统的状态或多自由度体系的叠加态，不能将其表示成状态的张量积形式，则该状态就是量子纠缠态。

下面分别演示 Bell 基的制备，Bell 基总共有四个，我们一一展示。首先，初始化两个量子比特|0>，|0>。第一个量子比特经过 H 门之后，当前系统状态的结果为 1/√2（|00>+|10>），在经过 CNOT 门之后，得到最终状态：1/√2（|00>+|11>）。因为|10>上的 1 是控制位，所以目标位|0>发生了翻转，变成|1>，于是我们就得到了 bell 基中的第一个|φ+>；

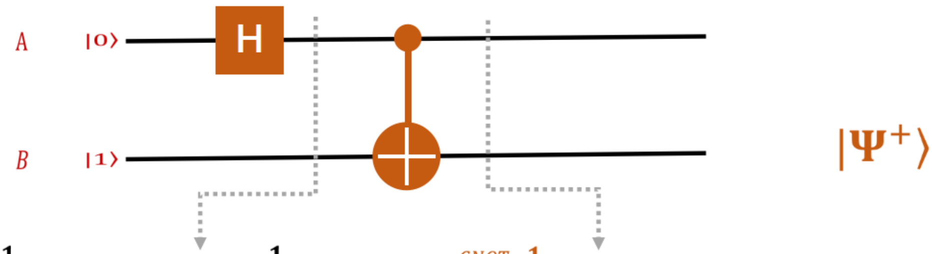
$$|\Phi_{AB}\rangle \neq |\Phi_A\rangle \otimes |\Phi_B\rangle$$



$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

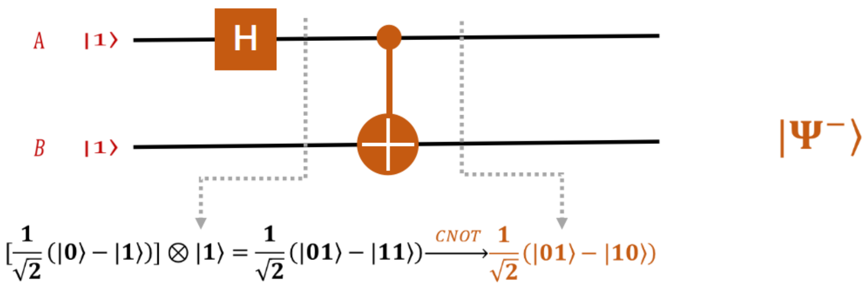
下面初始化状态 |1>，|0>。和上面的步骤一样。经过 H 门之后，得到 1/√2（|00>—|10>）。因为我们初始化了不同的状态，在经过 CNOT 门，就得到了第二个 Bell 基态；

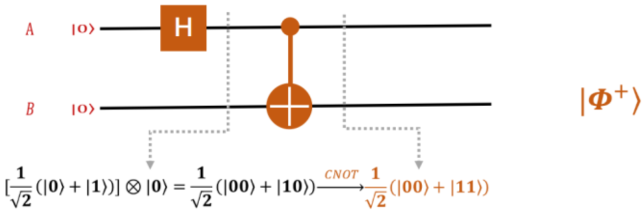
继续初始化|0>，|1>，使用相同的步骤得到第三个 bell 基态 1/√2（|01>+|10>）；



$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

最后初始化|1>，|1> 就得到最后一个 bell 基态 1/√2（|01>-|10>）。





下面了解一下多比特的 GHZ 纠缠态，对于 N 个量子比特的系统，GHZ 状态可以写成这样的形式:

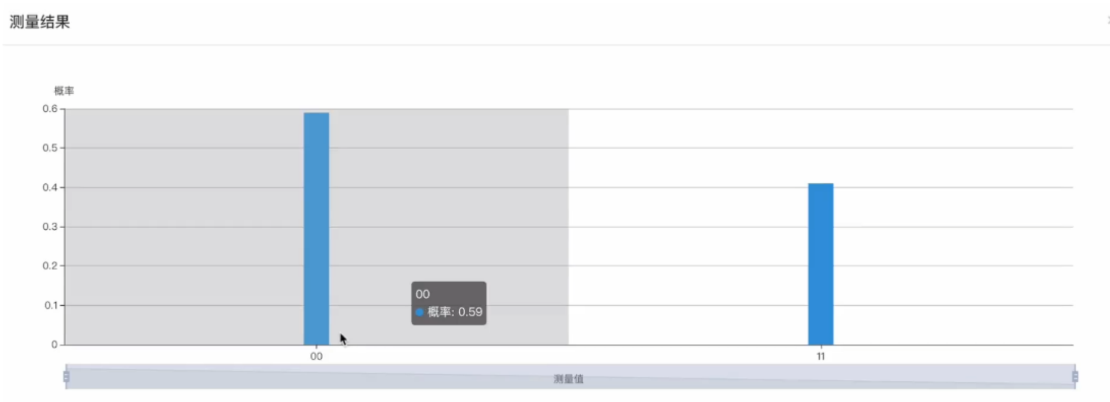
GHZ 状态是 N> 2 个子系统特定类型的纠缠量子态，涉及到至少三个子系统。其中最简单的形式如下，包含了 3 个量子比特。

$$|GHZ\rangle=\frac{|0\rangle^{\otimes N}+|1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}$$

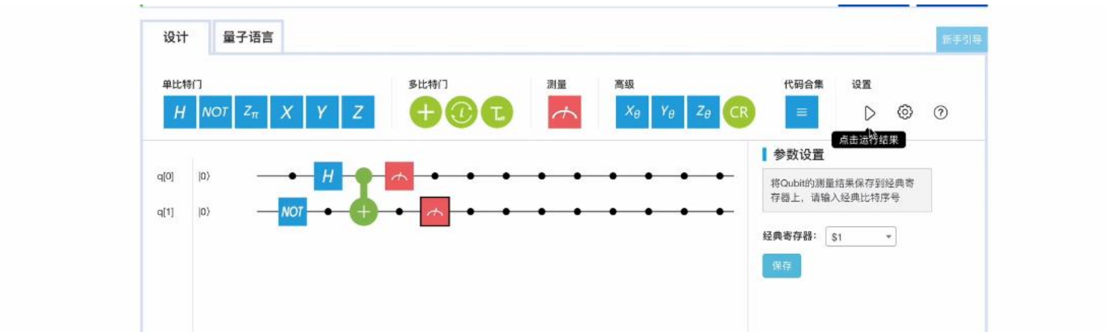
$$|GHZ\rangle=\frac{|000\rangle+|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

现在我们可以开始在云平台上去实施，首先从 Bell 基的|φ+>开始。现在，新建初始化两个量子比特和两个经典比特位，添加 H 门和 CNOT 门，然后对两个量子比特都执行测量操作，运行。

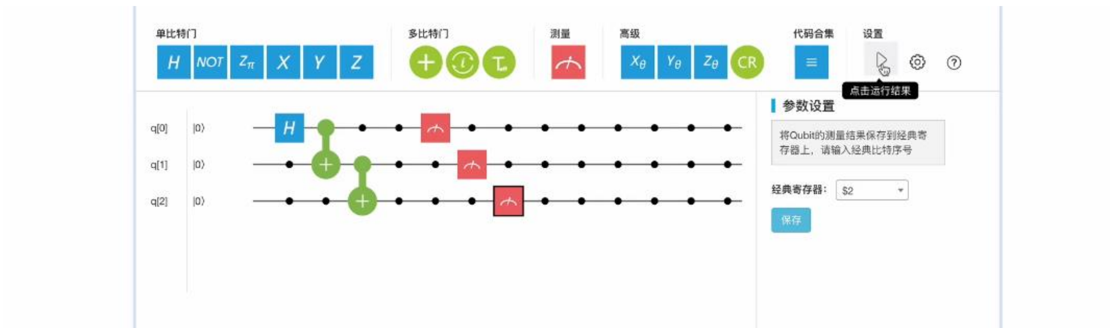
可以看到结果和预期一样，得到了|00>和|11>。



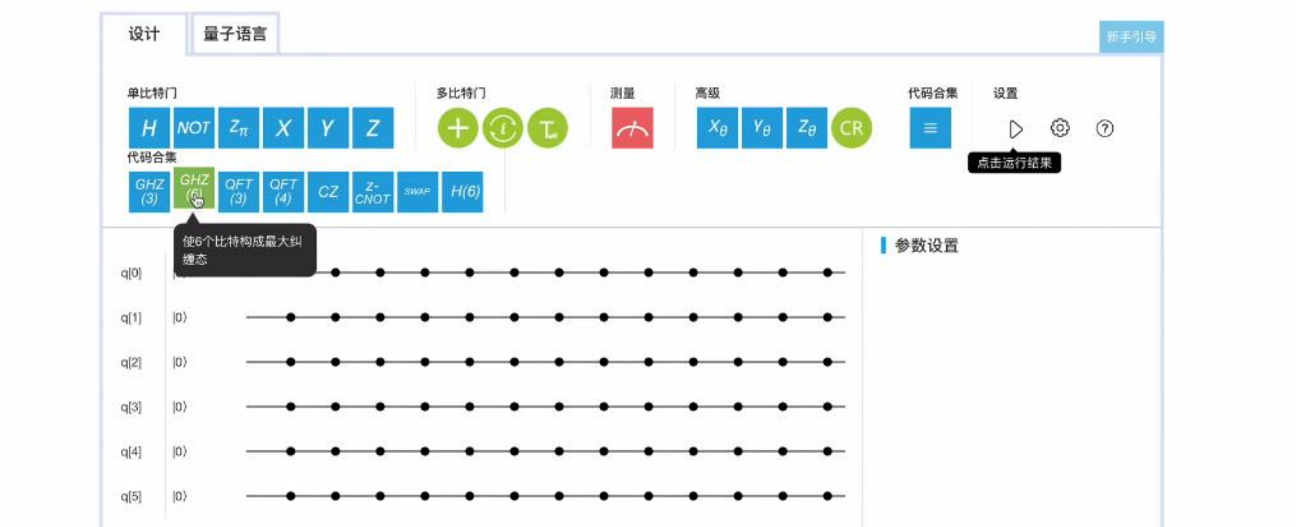
我们再以第三个为例，初始化的状态为|01>，因为云平台上默认初始化为|00>。所以我们要在第二个量子比特上添加 NOT 门，然后 H 门，CNOT 门对每一个量子比特都执行测量操作，运行，结果是 |01> 和|10>。



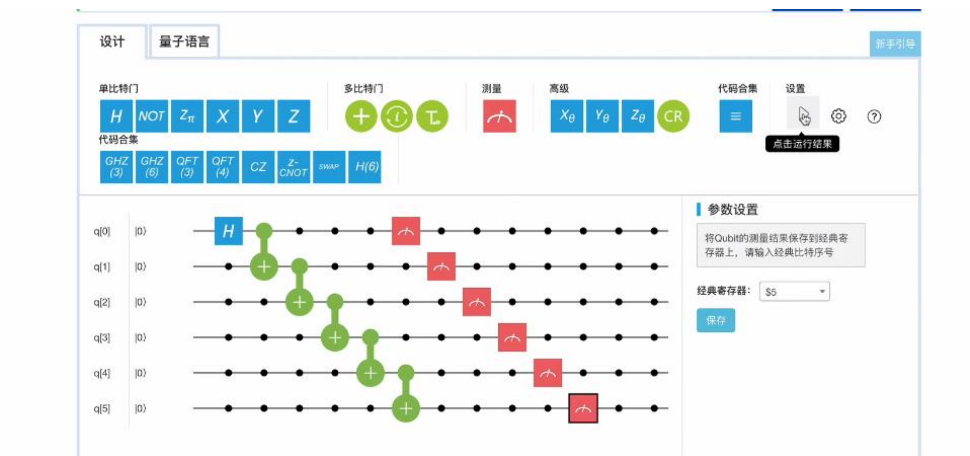
下面我们测试一下最简单的 GHZ 量子纠缠态，需要初始化 3 个量子比特。我们来构建一下 H 门，两个 CNOT 门，测量，运行结果显示|000>和|111> 差不多各占一半。



这里，您也可以使用代码合集里的一键构造功能，比如我们创建 6 个量子比特的 GHZ 纠缠态初始化 6 个量子比特，然后使用 GHZ（6），就可以生成了。



现在分别加上测量，运行查看结果



量子模拟 | 量子芯片 | 量子算法 | 量子教育 | 量子机器学习

官 网：www.originqc.com.cn
邮 件：edu@originqc.com
电 话：0551-63836039

长按关注本源量子

本源量子研究
OriginQ Research Group