Cryptographie

Cryptographie asymétrique

Alexander Schaub[1]

schaub.alexander@free.fr

11/12/2024

[1]DGA-MI, Bruz

Dans l'épisode précédent…

- On a vu comment protéger **la confidentialité** d'un message…
- … si l'émetteur et le destinataire partagent la **même** clé

Mais alors :

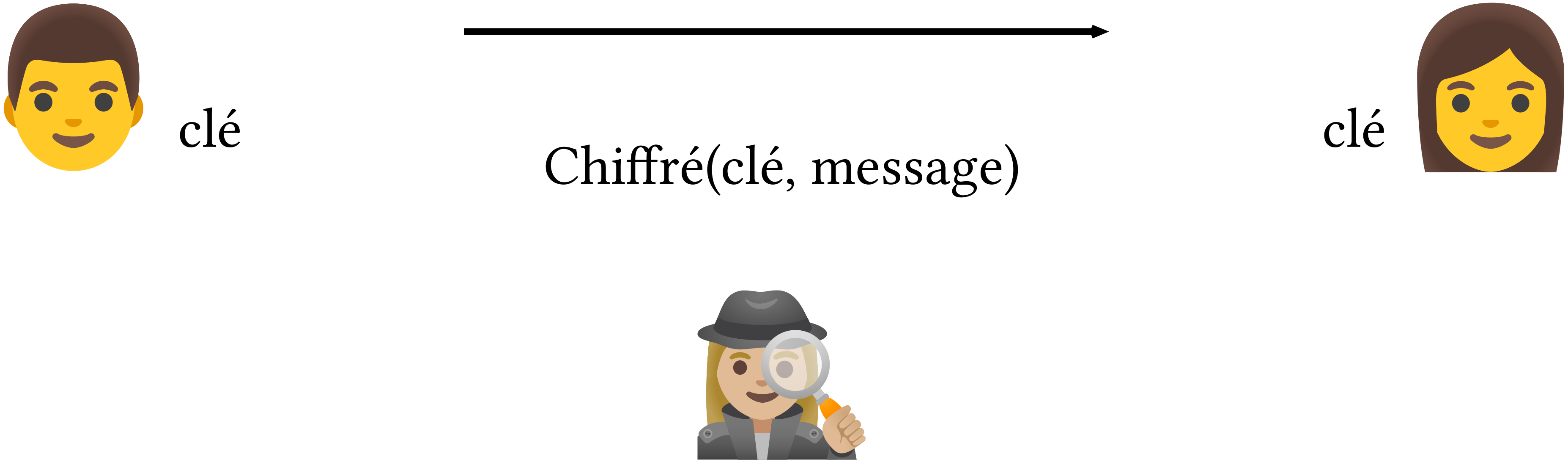
Dans l'épisode précédent…

- On a vu comment protéger **la confidentialité** d'un message…
- … si l'émetteur et le destinataire partagent la **même** clé

Mais alors :

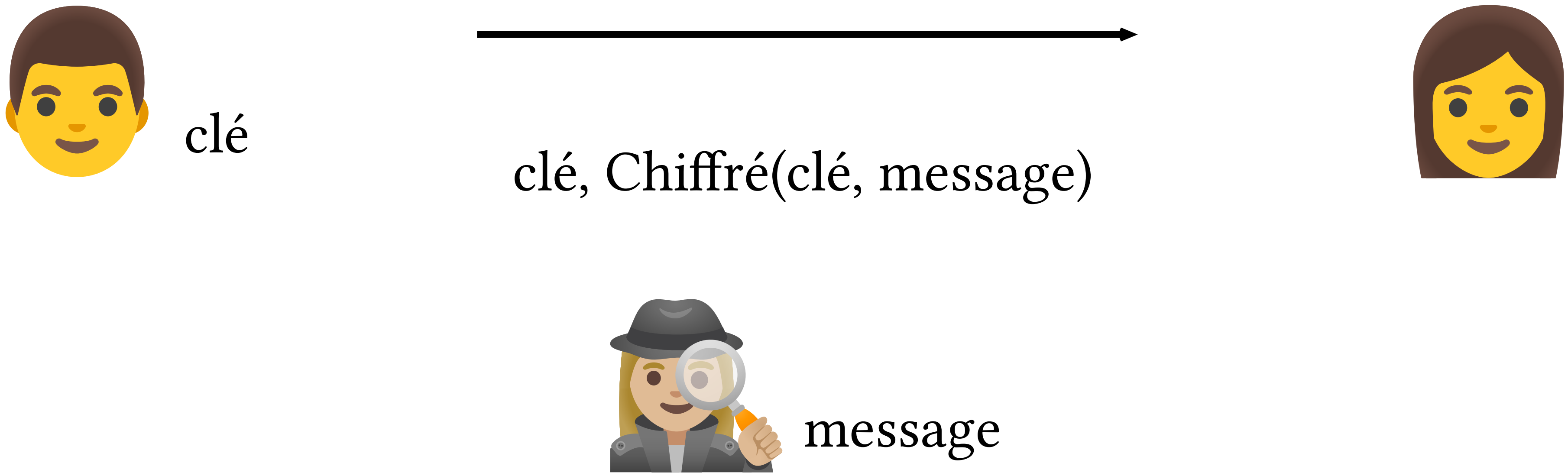
- comment partager la clé si on ne s'est **jamais vu** ?
- comment garantir que le message n'a pas été **modifié** ?
- comment garantir **l'origine** du message ?

Parlons un peu d'Alice et de Bob…



Et s’ils ne se sont jamais vus ?

Et s’ils ne se sont jamais vus ?



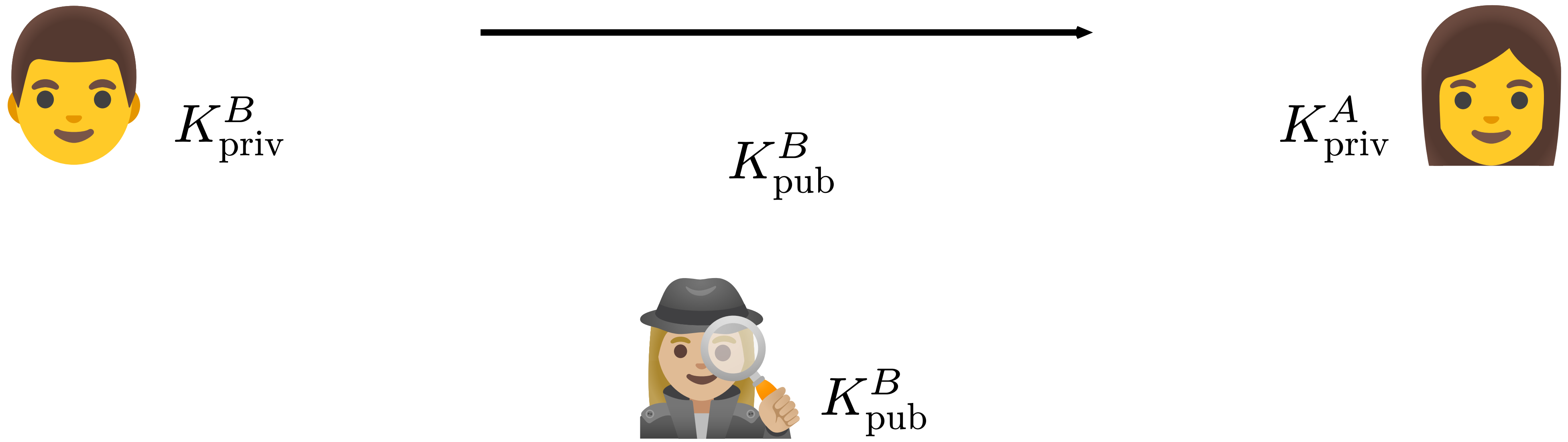
Trois services de la cryptographie asymétrique :

l’échange de clés,

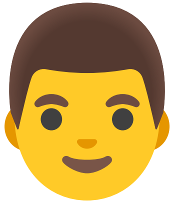
le chiffrement asymétrique,

l’authenticité

Service n°1 : échange de clé



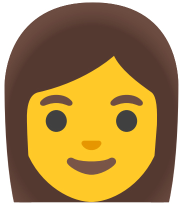
Service n°1 : échange de clé



K^B_{priv}

K^A_{pub}

$K^A_{\text{priv}}, K^B_{\text{pub}}$



$K^B_{\text{pub}}, K^A_{\text{pub}}$

Service n°1 : échange de clé

👨 $K^B_{\text{priv}}, K^A_{\text{pub}}$

$K^A_{\text{priv}}, K^B_{\text{pub}}$ 👩

$$f\left(K^B_{\text{priv}}, K^A_{\text{pub}}\right) = K$$

🕵️‍♀️ $K^B_{\text{pub}}, K^A_{\text{pub}}$

$$K = f\left(K^A_{\text{priv}}, K^B_{\text{pub}}\right)$$

Echange de clés de Diffie-Hellman

Comment trouver f, K_{priv} et K_{pub} pour que cela fonctionne ?

1976: Schéma de Diffie-Hellman.

- Données partagées : p premier, $g \in [1, p-1]$.
- Clés privées : $a, b \in [1, p-1]$
- Clés publiques : $g^a[p], g^b[p]$
- Secret partagé : $K = g^{ab}[p]$

Pourquoi ça marche ? $(g^a)^b[p] = g^{ab}[p] = \left(g^b\right)^a[p]$

Echangeons les clés avec Diffie-Hellman

👨 b

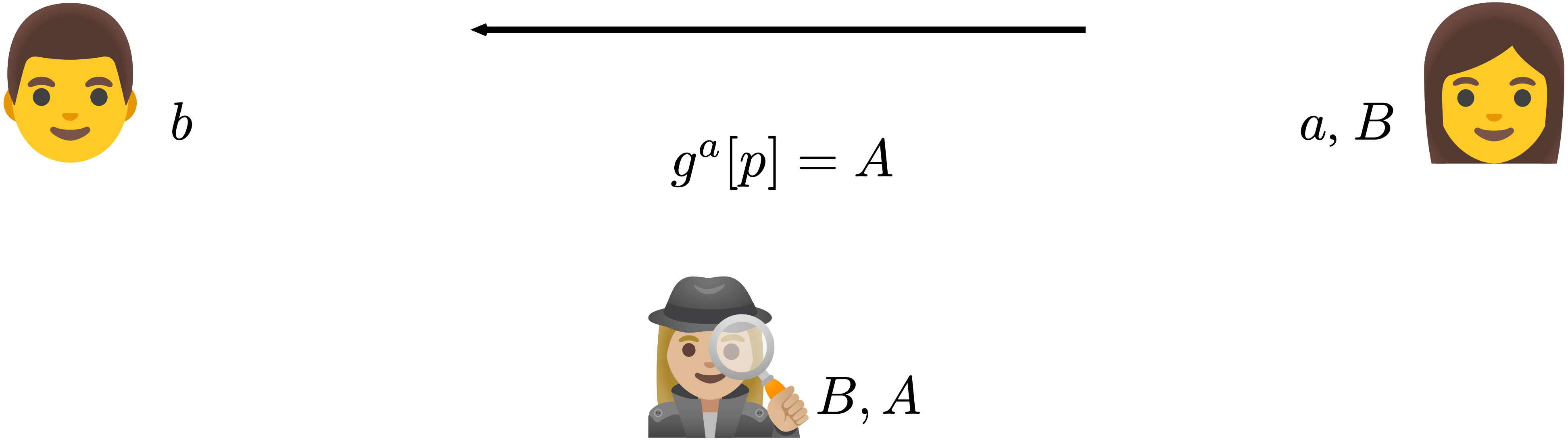
$\longrightarrow$

$$B = g^B[p]$$

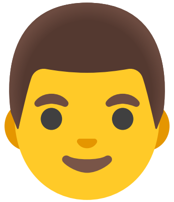
a 👩

🕵️‍♀️ B

Echangeons les clés avec Diffie-Hellman

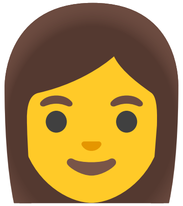


Echangeons les clés avec Diffie-Hellman

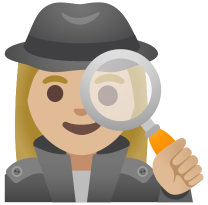


$b,\ A$

$a,\ B$



$A^b = K$



$B,\ A$

$K = B^a$

Et Eve dans tout ça ? 🕵️‍♀️

Eve connaît :

- p, g
- $A = g^a[p], B = g^b[p]$
- Doit calculer $g^{ab}[p]$

Facile si elle pouvait calculer a à partir de $g^a[p]$ $\longrightarrow$ problème du **logarithme discret** supposé difficile.

Diffie-Hellman en pratique

- Dans le corps des entiers *modulo* p : $p \approx 2048$ bits $\longrightarrow$ c'est beaucoup !
- On peut faire du Diffie-Hellman dans d'autres corps : les **courbes elliptiques** (on parle de ECDH - *Elliptic Curve Diffie-Hellman*)
  - il faut bien choisir ses courbes, son implémentation, etc…
  - mais la taille du corps est plus petite : entre 256 et ≈ 500 bits !
    - courbes elliptiques : solutions d'une équation de type $y^2 = x^3 + ax + b$ dans un corps fini…

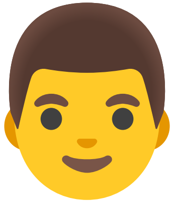
Service n°2 : le chiffrement asymétrique

Ou encapsulation de clé

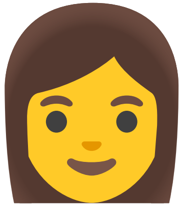
Problème de Diffie-Hellman : protocole **interactif**

- Alice et Bob doivent **tous deux** échanger des messages avant d'établir la clé
- Parfois, ce n'est pas possible, on aimerait pouvoir utiliser un protocole **plus simple**

Le chiffrement asymétrique

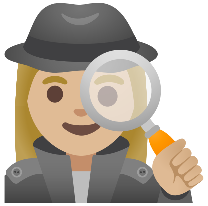


K^B_{priv}



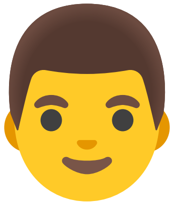
K^B_{pub}, K

$$\text{C} = \text{Chif}(K^B_{\text{pub}}, K)$$



K^B_{pub}

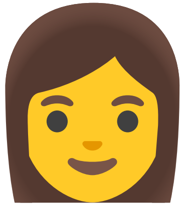
Le chiffrement asymétrique



K^B_{priv}

$$K = \text{Déchif}(K^B_{\text{priv}}, \text{C})$$

K^B_{pub}, K



K^B_{pub}

Chiffrement asymétrique : pour résumer

Dans un système de chiffrement asymétrique :

- la clé privée est **secrète**, la clé publique est **connue de tous**
- on **chiffre** avec la **clé publiqué**, on **déchiffre** avec la clé **privée**
- on peut facilement retrouver la clé **publique** à partir de la clé **privée** (mais l'inverse n'est pas possible !)

Chiffrement asymétrique : notation

Un système de chiffrement **asymétrique** se compose de:

- Quatre ensembles $E, F, K(\text{clés privées}), K'(\text{clés publiques})$
- D'une fonction **à sens unique** $h : K \mapsto K'$
- De deux fonctions, $f : E \times K \mapsto F, g : F \times K' \mapsto E$ telles que
  - $\forall x \in E, k \in K, g(f(x, h(k)), k) = x$
  - On ne doit pas pouvoir retrouver x à partir de $f(x, h(k))$ sans connaître k

Le 1er algorithme de chiffrement asymétrique : RSA

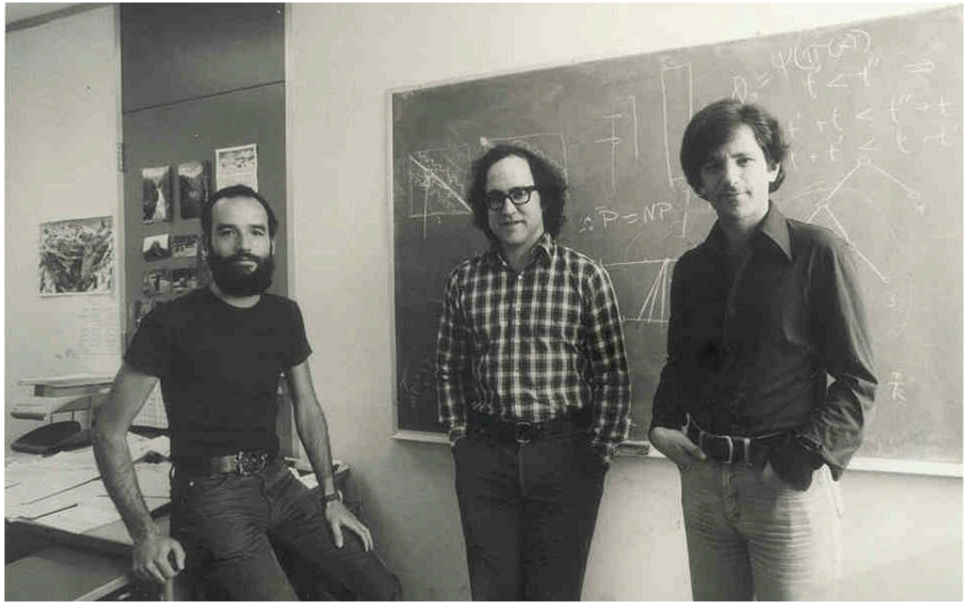


Image 1: Rivest, Shamir, Adleman

RSA : définitions

Publié en 1977.

- Clé publique :
  - n produit de deux grands nombre premiers p et q
  - e, un nombre quelconque premier avec $(p-1)(q-1)$
- Clé privée :
  - n comme précédemment
  - d inverse de e modulo $(p-1)(q-1)$

RSA : chiffrons et déchiffrons !

Rappels:

$n = p \cdot q$
$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
$\mathrm{pgcd}(e, \varphi(n)) = 1$

$e \cdot d \equiv 1[\varphi(n)]$

Pour chiffrer $m < n$:

- $C = m^e[n]$

Pour déchiffrer :

- $m = C^d[n]$

Pourquoi ça marche ?

$m^{e \cdot d} = m[n]$???

RSA : chiffrons et déchiffrons !

Rappels:

$n = p \cdot q$
$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
$\mathrm{pgcd}(e, \varphi(n)) = 1$

$e \cdot d \equiv 1[\varphi(n)]$

Pour chiffrer $m < n$:

- $C = m^e[n]$

Pour déchiffrer :

- $m = C^d[n]$

Pourquoi ça marche ?

$m^{e \cdot d} = m[n]$???

En fait, $\forall m$, $m^{\varphi(n)} = 1[n]$

Du coup, comme $e \cdot d = 1 + k \cdot \varphi(n)$,

$$\begin{aligned} m^{e \cdot d}[n] &= m^{1+k \cdot \varphi(n)}[n] \\ &= m \cdot m^{k \cdot \varphi(n)}[n] \\ &= m \cdot \left(m^{\varphi(n)}\right)^k[n] = m[n] \end{aligned}$$

Pourquoi c'est sûr ?

Un attaquant doit pouvoir retrouver $(p-1)(q-1)$ à partir de $n \longrightarrow$ cela revient à trouver p et q, donc de **factoriser** n.

Il existe peut-être des méthodes plus efficaces mais elle ne sont pas connues.

On considère que $n \approx 2048$ bits confère une bonne sécurité aujourd'hui, et $n \approx 4096$ bits confère suffisamment de sécurité pour toutes les applications usuelles.

Envoyons des clés !

m : clé AES $=$ entre 128 bits et 256 bits

e : historiquement la valeur 3 était beaucoup utilisée et elle est valide

Il suffit de générer p, q, calculer n et envoyer $m^3[n]$!

Envoyons des clés !

m : clé AES = entre 128 bits et 256 bits
e : historiquement la valeur 3 était beaucoup utilisée et elle est valide

Il suffit de générer p, q, calculer n et envoyer $m^3[n]$!

NE FAITES JAMAIS ÇA

m^3 est plus petit que n, il suffit de prendre la racine troisième pour décrypter

Quand est-ce que RSA est sûr ?

La sécurité de RSA n'est effective **uniquement pour** m **généré uniformément dans** $[1; n-1]$. Pour simuler cela :

Le retour des paddings !

- PKCS#1 v1.5 : `PS` est une chaîne aléatoire (d'octets non nuls) de longueur suffisante, et on chiffre :

  ```
  0x00 || 0x02 || PS || 0x00 || m
  ```
- OAEP : mieux, plus moderne, plus sûr et plus compliqué

Choix de e

Choix historique $e = 3$ déconseillé (certaines attaques sont plus faciles avec e petit)

Tout le monde ou presque utilise $e = 65537 = 2^{16} + 1$

Chiffrer avec Diffie-Hellman ?

Cryptosystème de ElGamal (1985) :

On choisit p premier, $g \in [1, p-1]$ comme paramètres plublics.

La clé privée est $x \in [1, p-1]$ choisie uniformément.
La clé publique est $h = g^x$.

Le chiffré est $(c_1, c_2) = (g^y[p], m \cdot h^y[p])$ (y choisi uniformémént)

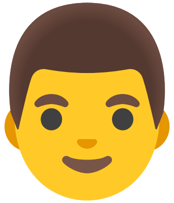
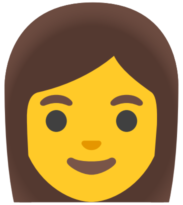
Pour déchiffrer : $s = c_1^x = h^y[p]$ puis $m = c_2 \cdot s^{-1}[p]$

Algorithme général marche aussi sur des courbes elliptiques

Interlude : le projet !

- Groupes de 2 ou 3
- Proposition de sujet d'ici la prochaine séance
- Noté sur des présentations de 30 (?) min

Service n°3 : l’authenticité

 $\xrightarrow{K_{\text{pub}}^{B}}$  $\longrightarrow$ 

$K_{\text{priv}}^{B}, K_{\text{pub}}^{B}$

$K_{\text{priv}}^{E}, K_{\text{pub}}^{E}, K_{\text{pub}}^{B}$

K

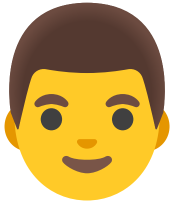
Service n°3 : l’authenticité

$K_{\text{priv}}^{B}, K_{\text{pub}}^{B}$

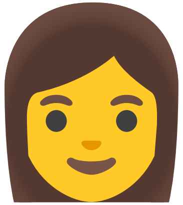
$K_{\text{priv}}^{E}, K_{\text{pub}}^{E}, K_{\text{pub}}^{B}$

K

Service n°3 : l'authenticité



$\longleftarrow$ C=Chif(K_{pub}^{E}, K)

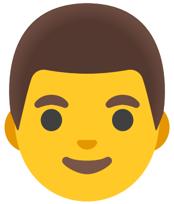


K_{priv}^{B}, K_{pub}^{B}

K_{priv}^{E}, K_{pub}^{E},K_{pub}^{B}

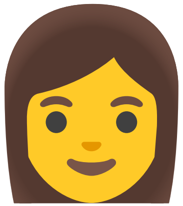
K, K_{pub}^{E}

Service n°3 : l'authenticité



$\xleftarrow{\text{Chif}(K^B_{\text{pub}}, K)}$

$\xleftarrow{\qquad}$



$K^B_{\text{priv}}, K^B_{\text{pub}}$

$K^E_{\text{priv}}, K^E_{\text{pub}}, K^B_{\text{pub}},$
$K = \text{Déchif}(K^E_{\text{priv}}, \text{C})$

$K, K^{\color{red}E}_{\text{pub}}$

L’attaque de l’homme-du-milieu (*man-in-the-middle*)

Comme on a pu le voir :

- un attaquant **actif** peut intercepter **et modifier** des messages entre correspondants
- en cas de réussite, les correspondants **ne se doutent de rien** mais la **confidentialité** de leurs échanges va être **compromise**
- possible car rien ne garantit **l’origine** des messages reçus (ici, principalement K^B_{pub})

Les signatures électroniques

Permet de garantir **l'origine** du message.

Seul le détenteur de la **clé de génération de signature** peut authentifier des messages, tous les détenteurs de la **clé de vérification de signature** peuvent vérifier leur authenticité.

Signature électronique : notation

- Quatre ensembles E (messages), F(signatures), K (clés de génération), K' (clés de vérification)
- D'une fonction **à sens unique** $h : K \mapsto K'$
- De deux fonctions, $f : E \times K \mapsto F, g : F \times E \times K' \mapsto \{\text{true}, \text{false}\}$ telles que
  - $\forall x \in E, k \in K, g(f(x, k), x, h(k)) = \text{true}$
  - Trouver $y \in F$ tel que $g(y, x, h(k)) = \text{true}$ revient à connaître k

Un exemple de signature électronique : RSA !

- Clé de vérification :
  - n produit de deux grands nombre premiers p et q
  - e, un nombre quelconque premier avec $(p-1)(q-1)$
- Clé de génération :
  - n comme précédemment
  - d inverse de e modulo $(p-1)(q-1)$

RSA : signons et vérifions !

Rappels:

$n = p \cdot q$
$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
$\text{pgcd}(e, \varphi(n)) = 1$

$e \cdot d \equiv 1[\varphi(n)]$

Pour signer $m < n$:

$S = m^d[n]$

Pour vérifier :

$S^e[n] = m \longrightarrow$ true sinon false

Pourquoi ça marche ?

$m^{e \cdot d} = m[n] \longrightarrow$ ah oui on vient de le voir

Signons des clés !

m : clé AES $=$ entre 128 bits et 256 bits
On envoie $m^d[n]$, et c'est bon cette fois non ?

Signons des clés !

m : clé AES = entre 128 bits et 256 bits
On envoie $m^d[n]$, et c'est bon cette fois non ?

NE FAITES JAMAIS ÇA

On peut trivialement générer des signatures pour tous les messages de type $r^e[n]$, r quelconque par exemple.

En plus : on aimerait pouvoir signer des messages plus long que 4096 bits. Comment peut-on faire ?

Aparté : les fonctions de hachage

On ne peut signer que des éléments relativement *courts*

Aparté : les fonctions de hachage

On ne peut signer que des éléments relativement *courts*

Il faut donc **réduire** les messages avant de les signer

Aparté : les fonctions de hachage

On ne peut signer que des éléments relativement *courts*

Il faut donc **réduire** les messages avant de les signer

Mais attention ! pas n'importe comment !
Il ne faut pas réduire **deux messages** de la **même façon**

Fonctions de hachage : les attendus

Une **fonction de hachage** est une fonction $f : \{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^n$:

- résistante aux collisions : on ne doit pas pouvoir trouver $m_1 \neq m_2$ tels que

$$f(m_1) = f(m_2)$$

- résistante à l'inversion : étant donné $y \in \{0,1\}^n$, on ne doit pas pouvoir trouver m tel que

$$f(m) = y$$

Fonctions de hachage : les bonus

En général, on peut aussi s'attendre aux propriétés suviantes :

- Indistinguable de l'aléa : une fonction de hachage f est idéalement **indistinguable** d'une fonction choisie au hasard
- Propriété *d'avalanche* : en changeant **1** bit de l'entrée, chaque bit de sortie a **une chance sur deux** d'être inversé
  - (c'est impliqué par la propriété précédente, voyez-vous pourquoi ?)

Les fonctions de hachage modernes

- ~~MD4, MD5, SHA1~~ : on oublie, c'est cassé
- SHA2 : existe en plusieurs versions, en fonction de la taille de sortie :
  - SHA256, SHA384, SHA512, SHA512-256, SHA512-384
- SHA3 (*alias* Keccak) : une famille de fonctions
  - Existe en version à tailles standardisées (256, 384, 512 bits)
  - Existe aussi en version à taille arbitraire

Signatures : le retour

- On ne signe pas les clés, on signe **le haché** des clés
- On ne les signe pas non plus **directement**, c'est le retour du **padding** :
  - PKCS#1 v1.5 (Signature) : déterministe

```
0x00 || 0x01 || FFFFF...FFFF || 0x00 || Type de hash ||  m
```

  - PSS : probabiliste et plus moderne
    - et également plus compliqué à décrire

C'est tout pour aujourd'hui !

La séance prochaine, nous verrons :

- quelques services de plus : intégrité, dérivation de clés
- comment assembler les services en des **protocoles** de la vraie vie : TLS, SSH
- en bonus : un peu de temps pour le projet