1. Решить уравнение

1. $y' - y = 2x - 3$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' + p(x)y = f(x)$, где $p(x) = -1$, а $f(x) = 2x - 3$.

- Для решения этого уравнения используем метод нахождения общего решения через интегрирующий множитель. Интегрирующий множитель $\mu(x)$ находится по формуле:

$$\mu(x) = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}.$$

- Умножим уравнение на $\mu(x) = e^{-x}$:

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}(2x - 3).$$

- Левую часть уравнения можно переписать как производную произведения:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}(2x - 3).$$

- Теперь интегрируем обе части уравнения:

$$e^{-x}y = \int e^{-x}(2x - 3)\, dx.$$

- Для интегрирования правой части используем метод интегрирования по частям. Возьмем $u = 2x - 3$, тогда $du = 2dx$, и $dv = e^{-x}dx$, тогда $v = -e^{-x}$.

  Интегрируем:

$$\int e^{-x}(2x - 3)\, dx = -e^{-x}(2x - 3) + \int 2e^{-x}\, dx = -e^{-x}(2x - 3) - 2e^{-x}.$$

- Подставляем результат:

$$e^{-x}y = -e^{-x}(2x - 3) - 2e^{-x} + C.$$

- Умножим обе стороны на e^x для избавления от множителя:

$$y = -(2x - 3) - 2 + Ce^x.$$

$$y = Ce^x - 2x + 1.$$

Это и есть общее решение уравнения:

$$y = Ce^x - 2x + 1.$$

2. $x^2y' + xy + 1 = 0$

Решим его методом разделения переменных.

1. Запишем уравнение в форме:

$$y' + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

2. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Его можно решить, используя интегрирующий множитель.

Интегрирующий множитель для уравнения вида $y' + p(x)y = q(x)$ находится по формуле:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

В нашем случае $p(x) = \frac{1}{x}$, поэтому:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x|$$

3. Умножим уравнение на интегрирующий множитель $|x|$:

$$x \cdot y' + y + \frac{1}{x} = 0$$

4. Теперь левая часть уравнения является производной произведения $y \cdot x$:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y) = -\frac{1}{x}$$

5. Проинтегрируем обе части:

$$x \cdot y = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C$$

6. Разделим на x, чтобы найти решение для y:

$$y = \frac{-\ln|x| + C}{x}$$

Это общее решение уравнения $x^2y' + xy + 1 = 0$.

2. Исследовать ряд на сходимость:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

Рассмотрим шаги для исследования сходимости этого ряда:

1. **Исследование общего члена ряда**:

$$a_n = \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

   Для определения поведения a_n при $n \to \infty$, рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{n+1+\frac{1}{n}} = 0$$

   Это говорит о том, что общий член ряда стремится к нулю, что является необходимым, но недостаточным условием сходимости ряда.

2. **Применим признак сравнения**: Для этого рассмотрим упрощённую форму общего члена при больших n. Для больших n можно приблизительно считать:

$$a_n \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

   Таким образом, мы можем сравнить наш ряд с гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

   Гармонический ряд расходится. Однако это не является доказательством того, что данный ряд расходится, так как общий член нашего ряда убывает быстрее, чем $\frac{1}{n}$.

3. **Признак предельного сравнения**: Применим признак предельного сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+n+1} = 1$$

   Поскольку предел конечен и отличен от нуля, то данный ряд ведет себя так же, как гармонический ряд. Следовательно, он **расходится**.

Итак, данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

расходится, так как он сравним с гармоническим рядом, который расходится.

$$\textbf{2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Этот ряд выглядит достаточно сложным, но для его исследования на сходимость можно использовать **признак Д'Аламбера**.

Признак Д'Аламбера заключается в исследовании следующего предела:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $L < 1$, ряд сходится; если $L > 1$, ряд расходится; если $L = 1$, нужно применять другие методы.

Обозначим $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

Найдём отношение членов ряда $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

Упростим это выражение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Теперь найдём предел этого выражения при $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Таким образом, получили:

$$L = e$$

Так как $L = e > 1$, ряд **расходится** по признаку Д'Аламбера.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ **расходится**.

$$\textbf{3.}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,(1-\frac{1}{n})^{n^2}$$

Исследуем сходимость этого ряда:

1. **Анализ поведения выражения внутри суммы**:

$$(1-\frac{1}{n})^{n^2}$$

   Для больших n, $(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ можно приблизить с использованием предельного перехода. Заметим, что:

$$(1-\frac{1}{n})^{n} \approx \frac{1}{e}$$

   Однако в нашем выражении степень — это n^2, поэтому для больших n:

$$(1-\frac{1}{n})^{n^2} \approx 0$$

   Это говорит о том, что выражение внутри суммы стремится к нулю довольно быстро по мере увеличения n.

2. **Признак сравнения**: Мы можем сравнить данный ряд с каким-либо известным рядом. Для этого обратим внимание, что при больших n:

$$n\,(1-\frac{1}{n})^{n^2} \approx 0$$

   Это указывает на возможность применения признака сравнения с рядом, который стремится к нулю быстрее, например, с рядом вида $\sum \frac{1}{n^2}$, который сходится.

3. **Признак Д'Аламбера**: Для исследования сходимости можно также применить признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

   где $a_n = n\,(1-\frac{1}{n})^{n^2}$. Рассмотрим этот предел:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\,(1-\frac{1}{n+1})^{(n+1)^2}}{n\,(1-\frac{1}{n})^{n^2}}$$

   Из оценки поведения выражения $(1-\frac{1}{n})^{n^2} \approx 0$ видно, что предел будет меньше единицы, что указывает на сходимость ряда.

Таким образом, ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(1-\frac{1}{n})^{n^2}$$

сходится.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \ln n}$

Исследуем сходимость этого ряда:

1. **Знакочередующийся характер ряда:**

Поскольку в числителе присутствует $(-1)^{n+1}$, ряд является знакочередующимся. Для таких рядов можно использовать **признак Лейбница** для исследования сходимости. Этот признак утверждает, что знакочередующийся ряд сходится, если:

- последовательность положительных членов $a_n = \frac{1}{2n - \ln n}$ убывает;
- $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

2. **Убывание последовательности a_n:**

Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{1}{2n - \ln n}$. Для того чтобы показать, что эта последовательность убывает, нужно доказать, что выражение $2n - \ln n$ растет при увеличении n.

- Производная от $2n - \ln n$:

$$\frac{d}{dn}(2n - \ln n) = 2 - \frac{1}{n}$$

При $n > 1$, эта производная положительна, что означает, что $2n - \ln n$ возрастает при $n > 1$. Следовательно, $a_n = \frac{1}{2n - \ln n}$ убывает при $n > 1$.

3. **Предел a_n при $n \to \infty$:**

Рассчитаем предел a_n при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n - \ln n} = 0$$

Так как $2n$ растет гораздо быстрее, чем $\ln n$, то $2n - \ln n \to \infty$, и следовательно, $a_n \to 0$.

4. **Вывод:**

Все условия признака Лейбница выполнены:

- последовательность a_n убывает;
- $a_n \to 0$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \ln n}$ **сходится** по признаку Лейбница.

$$\mathbf{5.}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}.$$

Для исследования сходимости этого ряда, воспользуемся общими методами проверки сходимости рядов, такими как признак сравнения, признак Д'Аламбера (признак отношения) и другие.

1. **Признак Д'Аламбера (отношения):**

Пусть $a_n = \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$. Применим признак отношения, то есть найдём предел:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

В нашем случае:

$$a_n = \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)},$$

$$a_{n+1} = \frac{(x-2)^{(n+1)+1}}{3^{n+1}((n+1)+2)} = \frac{(x-2)^{n+2}}{3^{n+1}(n+3)}.$$

Теперь найдём отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x-2)^{n+2}}{3^{n+1}(n+3)}}{\frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}} = \frac{(x-2)^{n+2}}{(x-2)^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+3}.$$

Упрощаем выражение:

$$= \frac{x-2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+3}.$$

Найдём предел этого отношения при $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+3} \right| = \frac{|x-2|}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = \frac{|x-2|}{3}.$$

2. **Условие сходимости:**

Ряд сходится, если $L < 1$. Это даёт нам условие:

$$\frac{|x-2|}{3} < 1,$$

$$|x-2| < 3,$$

$$-3 < x-2 < 3,$$

$$-1 < x < 5.$$

Таким образом, ряд сходится при $x \in (-1, 5)$.

3. **Граничные значения:**

Нужно дополнительно проверить сходимость на концах интервала $x = -1$ и $x = 5$.

- Для $x = -1$, подставляем в ряд:

$$a_n = \frac{(-1-2)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \frac{(-3)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \frac{(-3)(-3)^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-3)}{n+2}.$$

Ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{n+2}$, который является гармоническим рядом, и он расходится.

- Для $x = 5$, подставляем в ряд:

$$a_n = \frac{(5-2)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \frac{3^{n+1}}{3^n(n+2)} = \frac{3}{n+2}.$$

Это снова гармонический ряд, который также расходится.

Вывод:

Ряд сходится при $x \in (-1, 5)$, исключая граничные точки $x = -1$ и $x = 5$.