Домашнее задание по теме «Производные функций нескольких переменных».

1. Найти область определения функции.

$$z=\sqrt{1-x^3}+\ln\left(y^2-1\right)$$

Для выполнения первого задания — нахождения области определения функции $z=\sqrt{1-x^3}+\ln(y^2-1)$ — нам нужно учитывать условия, при которых обе части функции существуют:

1. **Квадратный корень** $\sqrt{1-x^3}$:
   - Выражение под корнем должно быть неотрицательным: $1-x^3\geq 0$.
   - Решаем это неравенство:
     $$x^3\leq 1 \implies x\leq 1.$$
2. **Логарифм** $\ln(y^2-1)$:
   - Аргумент логарифма должен быть положительным: $y^2-1>0$.
   - Решаем это неравенство:
     $$y^2>1 \implies |y|>1.$$
     Это означает, что $y<-1$ или $y>1$.

Таким образом, область определения функции:

$$D(z)=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid x\leq 1 \text{ и } (y<-1 \text{ или } y>1)\}.$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.)

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

Для выполнения второго задания — нахождения производных первого порядка для функции $z = (1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3$ — вычислим частные производные функции по x и y.

Частная производная по x:

Используем правило цепочки для производной сложной функции. Пусть:

$$u = 1 + \frac{\ln x}{\ln y},$$

тогда $z = u^3$, и по x имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Теперь находим производную u по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x \ln y}.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x \ln y}.$$

Частная производная по y:

Опять используем правило цепочки. Пусть:

$$u = 1 + \frac{\ln x}{\ln y},$$

и по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теперь находим производную u по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y(\ln y)^2}.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\ln x}{y(\ln y)^2}\right).$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}$$

Для выполнения третьего задания — нахождения полного дифференциала функции в точке $(1, 1)$ — используем следующую функцию:

$$z = \sqrt{2xy + \cos\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Полный дифференциал dz функции двух переменных $z(x, y)$ вычисляется как:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Шаг 1: Найдём частные производные

1. **Частная производная по x**: Используем правило цепочки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\left(\frac{x}{y}\right)}} \cdot \left(2y - \frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

2. **Частная производная по y**: Также используем правило цепочки:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\left(\frac{x}{y}\right)}} \cdot \left(2x + \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Шаг 2: Подставляем $x = 1$ и $y = 1$ в производные

1. Для $\frac{\partial z}{\partial x}$ при $x = 1$ и $y = 1$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2+1}} \cdot (2 - \sin(1)) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (2 - \sin(1))$$

2. Для $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = 1$ и $y = 1$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2+1}} \cdot (2 + \sin(1)) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (2 + \sin(1))$$

Шаг 3: Полный дифференциал

Теперь можем записать полный дифференциал функции в точке $(1, 1)$:

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (2 - \sin(1))\,dx + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (2 + \sin(1))\,dy$$

$$(1, 1).$$

4. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

Для четвертого задания — исследования функции на экстремум — нам дана функция:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Шаг 1: Найдём частные производные первого порядка

1. **Частная производная по** x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6$$

2. **Частная производная по** y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9$$

Шаг 2: Найдём критические точки

Для нахождения критических точек приравняем обе частные производные к нулю:

1. $2x + y - 6 = 0$
2. $x + 2y - 9 = 0$

Решим систему этих уравнений:

1. Из первого уравнения выразим y:

$$y = 6 - 2x$$

2. Подставим $y = 6 - 2x$ во второе уравнение:

$$x + 2(6 - 2x) - 9 = 0$$

   Раскроем скобки:

$$x + 12 - 4x - 9 = 0 \implies -3x + 3 = 0 \implies x = 1$$

3. Подставим $x = 1$ в выражение для y:

$$y = 6 - 2(1) = 4$$

Таким образом, критическая точка — $(x, y) = (1, 4)$.

Шаг 3: Найдём вторые частные производные

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$

Шаг 4: Применим критерий второго порядка (Дискриминант)

Дискриминант для функции двух переменных вычисляется как:

$$D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Подставляем значения:

$$D = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Так как $D > 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$, в точке $(1, 4)$ функция имеет **локальный минимум**.

Шаг 5: Значение функции в критической точке

Подставляем $x = 1$ и $y = 4$ в исходную функцию:

$$z = 1^2 + 1 \cdot 4 + 4^2 - 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 = 1 + 4 + 16 - 6 - 36 = -21$$

Таким образом, функция имеет локальный минимум в точке $(1, 4)$, и значение функции в этой точке равно $z = -21$.