致考研
路上的你

考研很难的
只有
遇到困难的时候
才能看出来
你是不是真正
有上进心的人
考研要想成功
你一定会遇到困难
一定会吃苦
苦到大家想放弃

前　言

数学概念、公式、定理是数学的基础，也是考研数学考试最重要的考核内容，只有把它们牢记、理解透彻，才能达到熟练应用，乃至巧用的程度。

许多考生反映考研数学涉及的概念、定理、公式太多，复习后容易遗忘，为了帮助广大考生方便查阅，轻松记忆，我们根据近几年考试大纲规定的考试内容和考试要求，结合考生实际，特意编写了这本携带方便、查阅快捷的公式手册。

本手册内容全面，不仅包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计中考研常考的概念、性质、公式、定理及广泛使用的结论及方法等，还包括考研可能会用到的一些初等数学公式，方便考生在复习过程中随时翻阅查看。希望本书给有志于考研的人士提供较大的帮助。

如果本书有不足之处，希望大家给予批评指正。欢迎使用本手册的广大考生提出宝贵意见。

编　者

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

附录　初等数学

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

一、函数

1. 函数的定义

设在某个过程中有两个变量 x 和 y，对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某一确定的法则总有相应的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$.

2. 函数的性质

(1)奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义区间 I 关于原点对称，如果对于 I 内任意一点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为区间 I 内的**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为区间 I 内的**奇函数**.

(2)有界性

设函数 $f(x)$在 I 上有定义，如果存在常数 M，当 $x\in I$ 时，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 上有**上界**；设函数 $f(x)$在 I 上有定义，如果存在常数 m，当 $x\in I$ 时，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$在 I 上有**下界**；设函数

$f(x)$在I上有定义，如果存在常数$M>0$，当$x\in I$时，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在I上**有界**.

(3)周期性

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若存在$T>0$，对任意的$x\in I$，必有$x\pm T\in I$，并且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为**周期函数**. 使得上述关系式成立的最小正数T称为$f(x)$的**最小正周期**，简称为函数$f(x)$的**周期**.

(4)单调性

设函数$f(x)$在区间I内有定义，如果对于该区间内的任意两点$x_1<x_2$，恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$在区间I内**单调增加**(或**单调减少**).

3. 反函数、复合函数、初等函数、分段函数、隐函数

(1)反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为R. 若对任意$y\in R$，有唯一确定的$x\in D$，使得$y=f(x)$，则记为$x=f^{-1}(y)$，称其为$y=f(x)$的**反函数**.

(2)复合函数

若函数$u=\varphi(x)$在x_0处有定义，函数$y=f(u)$在$u_0=\varphi(x_0)$处有定义，则函数$y=f[\varphi(x)]$在x_0处有定义，称$y=f[\varphi(x)]$是由函数$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，u为中间变量.

(3)初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限

次复合运算得到的，并能用一个数学表达式表示的函数，称为**初等函数**.

注 六类基本初等函数为：

$y=C$ （常数）；

$y=x^{\alpha}$；

$y=a^{x}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

$y=\log_{a}x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

$y=\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$；

$y=\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

(4)分段函数

在定义域内的不同范围用不同表达式表示的函数称为**分段函数**.

注 常见的分段函数有：

①绝对值函数 $|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

②符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

③取整函数 $[x]$表示不超过 x 的最大整数.

(5)隐函数

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这一方程的唯一的 y 值存在，

那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个**隐函数** $y=y(x)$.

二、极限

1. 极限的定义

(1)数列的极限

若对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为**当 $n\to\infty$ 时数列 x_n 的极限**，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

(2)当 $x\to\infty$时函数的极限

设函数 $f(x)$在 $|x|$ 充分大时都有定义，若对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为**当 $x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限**，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(3)当 $x\to x_0$ 时函数的极限

设函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域内有定义，若对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为**当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限**，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2. 极限的性质

(1)唯一性

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

(2)局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在 $\delta>0$，使 $f(x)$在 $U=\{x|0\leqslant|x-x_0|<\delta\}$内有界.

(3)局部保号性

①若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则存在 x_0 的一个去心邻域，在该邻域内恒有 $f(x)>0$.

②若存在 x_0 的一个去心邻域，在该邻域内 $f(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant 0$.

3. 极限存在准则

(1)夹逼准则

设在 x_0 的某个去心邻域内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

同理，若存在 $M>0$，使得$|x|>M$时，恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2)单调有界准则

单调有界数列(函数)必有极限.

4. 两个重要的极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的运算法则

(1)极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \xlongequal{\text{存在}} A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \xlongequal{\text{存在}} B$，则

①$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$.

②$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)g(x)] = A \cdot B$.

③$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

(2)一些特殊情形下的运算结论

①若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = +\infty.$$

②若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = -\infty.$$

③若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，$g(x)$在 x_0 的某个去心邻域内有界，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)g(x)] = 0.$$

④若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$g(x)$在 x_0 的某个去心邻域内有界，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \infty.$$

⑤若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \xlongequal{\text{存在}} A \neq 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$，则

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

三、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量的定义

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$,则称函数 $f(x)$是 $x \to x_0$ 时的**无穷小量**.

2. 无穷小量的性质

①有限多个无穷小量的和、差、积仍然是无穷小量.

②有界函数与无穷小量的乘积还是无穷小量.

3. 无穷小量与极限的关系

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件为 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)=0$.

4. 无穷小量的比较

设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$是同一自变量变化过程中的无穷小量,$\beta(x) \neq 0$,且$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也是此变化过程中的极限,则

①若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$($C$ 为常数,且 $C \neq 0$),则称 $\alpha(x)$与$\beta(x)$为**同阶无穷小量**;

②若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为**等价无穷小量**,记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$**高阶的无穷小量**，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

④若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$**低阶的无穷小量**.

5. 等价无穷小量的替换定理

设 $\alpha(x),\beta(x),\tilde{\alpha}(x),\tilde{\beta}(x)$都是同一自变量变化过程中的无穷小量，且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x),\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$，则

$$\lim\frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\beta(x)g(x)}=\lim\frac{\alpha(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}.$$

6. 无穷小量的阶

设 α,β 都是同一自变量变化过程中的无穷小量，若存在 $k>0$，使得 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C$（$C$ 为非零的常数），则称在同一自变量变化过程中 α 是 β 的 **k 阶无穷小量.**

7. 无穷大量的定义

任给 $M>0$，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$是**无穷大量**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

8. 无穷大量与无穷小量的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

四、连续

1. 函数的连续性

(1)连续的定义

①设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

②设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

(2)左、右连续的定义

设 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧(或右侧)某邻域(包括点 x_0)有定义，并且

$$\lim_{\substack{x\to x_0^-\\(\text{或}x\to x_0^+)}} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**(或**右连续**).

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点

x_0 处既左连续又右连续.

2. 连续函数的运算性质

(1)连续函数的四则运算性质

若函数 $f(x)$,$g(x)$在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在点 x_0 处也连续.

(2)复合函数的连续性

若函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续,函数 $y=f(u)$在点 $u_0=\varphi(x_0)$处连续,则函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续.

(3)反函数的连续性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内为单调的连续函数,其值域为(m,n),则其反函数 $x=f^{-1}(y)$在区间(m,n)内也是连续的.

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

3. 间断点及其分类

(1)间断点的定义

若函数 $f(x)$在点 x_0 的任何邻域内总有异于 x_0 而属于函数 $f(x)$定义域内的点,且函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续,则称 x_0 是 $f(x)$的一个**间断点**.

(2)间断点的分类

左、右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**. 其

中，左、右极限都存在且相等的间断点称为**可去间断点**；左、右极限都存在且不相等的间断点称为**跳跃间断点**.

左、右极限至少有一个不存在的间断点称为**第二类间断点**. 若 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时，$f(x) \to \infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1)最值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上至少存在两点 x_1, x_2，使得对于任意的 $x \in [a,b]$，恒有 $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.

(2)介值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m, M 是 $f(x)$ 在该区间上的最小值与最大值，则对任意的 $\mu \in [m,M]$，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，满足 $f(\xi)=\mu$.

(3)零点定理

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

第二章　一元函数微分学

一、导数与微分

1. 导数的定义式

$$f'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. 微分的定义式

若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

3. 可微的充要条件

可导$\Leftrightarrow$可微，$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

4. 可导与连续的关系

$f(x)$在 x_0 点可导$\Rightarrow f(x)$在 x_0 点处连续.

5. 可导、可微、连续等的关系

可微$\Leftrightarrow$可导$\Rightarrow$函数连续$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Rightarrow f(x)$在 x_0 点的某邻域内有界.

二、导数的计算

1. 基本初等函数的导数公式

①$(C)'=0$ （C 为常数）；

②$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 为实数）；

③$(a^{x})'=a^{x}\ln a$ （$a>0, a\neq 1$）；

④$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$；

⑤$(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ （$a>0, a\neq 1$）；

⑥$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

⑦$(\sin x)'=\cos x$；

⑧$(\cos x)'=-\sin x$；

⑨$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$；

⑩$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$；

⑪$(\sec x)'=\sec x\tan x$；

⑫$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

⑬$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$；

⑭$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$；

⑮$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

⑯$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 导数的四则运算法则

设 $u(x)$，$v(x)$都可导，则

①$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

②$(uv)'=u'v+uv'$，特别地，有$(cu)'=cu'$（c 为常数）；

③$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$.

3. 复合函数的导数

设 $u=\varphi(x)$在 x 处可导，$y=f(u)$在对应的 $u=\varphi(x)$处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x 处可导，且

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x)，即\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

4. 反函数的导数

若 $x=\varphi(y)$在某区间内单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$在对应的区间内也可导，且$f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

5. 隐函数的导数

设 $y=y(x)$是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数，方程两端同时对 x 求导，遇到 y 的函数则视为复合

函数，y 为中间变量，可得到一个含 y' 的方程，从中解出 y' 即可.

6. 高阶导数

(1)高阶导数的定义

如果 $y'=f'(x)$ 作为 x 的函数在点 x 可导，则 y' 的导数称为 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记为 y''，或 $f''(x)$，或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数为 $y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$，也可写作 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$.

(2)高阶导数的运算法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ n 阶可导，则

①$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$；

②$(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$　(C 为常数)；

③$(uv)^{(n)}=\mathrm{C}_n^0u^{(n)}v+\mathrm{C}_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^nuv^{(n)}$(**莱布尼茨公式**).

(3)几个常见初等函数的 n 阶导数公式

①$(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^na$；

②$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$；

③$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$；

④$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$;

⑤$[\ln(ax+b)]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}\quad(n\geqslant 1)$.

7. 由参数方程确定的函数的导数

设 $y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha<t<\beta)$确定的函数.则

①若 $\varphi(t)$,$\psi(t)$都可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

②若 $\varphi(t)$,$\psi(t)$二阶可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

三、微分中值定理

1. 罗尔定理

设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,若 $f(a)=f(b)$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=0.$$

2. 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

3. 柯西中值定理

设 $f(x)$,$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $g'(x)\neq 0$,$x\in(a,b)$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

4. 泰勒定理

(1)带拉格朗日余项的泰勒定理

设 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有直到 $n+1$ 阶的导数,则对该邻域内的任意点 x,都有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间.

(2)带皮亚诺余项的泰勒定理

设 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有直到 n 阶的导数,则对该邻域内的任意点 x,都有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n.$$

(3)几个常用函数的带皮亚诺余项的麦克劳林展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

四、洛必达法则

1. 求“$\frac{0}{0}$”型未定式极限的洛必达法则

设①$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

②$f(x)$，$g(x)$在x_0的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq0$；

③$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$或为$\infty$，

则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. 求“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式极限的洛必达法则

设①$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$；

②$f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$；

③$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或为∞，

则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

五、函数及其性态的研究

1. 单调的判定定理

设 $f(x)$在区间 I 上满足$f'(x) \geqslant 0$（或$f'(x) \leqslant 0$），且不在任意子区间上恒取等号，则 $f(x)$在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

2. 极值

（1）定义

设函数 $y = f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义. 如果对于该邻域内任何异于 x_0 的点 x，恒有 $f(x) < f(x_0)$（或 $f(x) > f(x_0)$），则称 x_0 为 $f(x)$的一个**极大值点**（或**极小值点**），称 $f(x_0)$为 $f(x)$的**极大值**（或**极小值**）.

(2)可导点处极值的必要条件

设 $f(x)$在 x_0 点取极值,且$f'(x_0)$存在,则$f'(x_0)=0$.

(3)极值的充分条件

①极值的第一充分条件

设 $f(x)$在 x_0 处连续,在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导,则

(a)若在 x_0 的左侧邻域内$f'(x)>0$,右侧邻域内$f'(x)<0$,则 $f(x_0)$为极大值.

(b)若在 x_0 的左侧邻域内$f'(x)<0$,右侧邻域内$f'(x)>0$,则 $f(x_0)$为极小值.

(c)若在 $x=x_0$ 的左、右邻域内 $f'(x)$同号,则$f(x_0)$不是极值.

②极值的第二充分条件

设 $f(x)$在 x_0 处有二阶导数,$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则

(a)当$f''(x_0)>0$时,函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值.

(b)当$f''(x_0)<0$时,函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值.

3. 函数图形的凹凸性

(1)定义

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导,x_0 是(a,b)内任一点.若曲线弧上点$(x_0,f(x_0))$处的切线总位于

曲线弧的下方，则称此曲线弧在(a,b)内是**凹**的；若曲线弧上点$(x_0, f(x_0))$处的切线总位于曲线弧的上方，则称此曲线弧在(a,b)内是**凸**的.

(2)凹凸性的判定定理

设 $f(x)$在区间 I 上满足$f''(x)\geqslant 0$(或$f''(x)\leqslant 0$)，且不在任一子区间上恒取等号，则曲线 $y=f(x)$在区间 I 上是凹(或凸)的.

4. 拐点

(1)定义

连续曲线弧上凹、凸部分的分界点称为曲线弧的**拐点**.

(2)二阶可导点处拐点的必要条件

设点$(x_0, f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点，且$f''(x_0)$存在，则$f''(x_0)=0$.

(3)拐点的充分条件

设 $f(x)$在 x_0 点的某邻域内二阶可导，并且在 x_0 的左、右邻域内$f''(x)$反号，则点$(x_0, f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

5. 渐近线

①若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=C$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$)，则直线 $y=C$ 叫做曲线 $y=f(x)$的一条**水平渐近线**.

②若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$)，则直线 $x=$

x_0 叫做曲线 $y=f(x)$ 的一条**垂直渐近线**.

③若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$）$(a\neq 0)$，则直线 $y=ax+b$ 叫做曲线 $y=f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

六、曲率、曲率半径、曲率圆

1. 弧微分

设 $y=f(x)$ 是平面内的光滑曲线，则弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x;$$

若曲线方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ 则弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. 曲率的计算公式

曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x,f(x))$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}};$$

曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 上任一点处的曲率为

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

3. 曲率半径

$$R=\frac{1}{K}\ (K\neq 0).$$

第三章　一元函数积分学

一、不定积分

1. 原函数和不定积分的基本概念

(1)原函数的定义

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在函数$F(x)$，使得在区间 I 上处处有 $F'(x)=f(x)$，若 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的一个**原函数**.

(2)不定积分的定义

函数 $f(x)$在区间 I 上的原函数的全体，称为 $f(x)$在区间 I 上的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

2. 不定积分的基本性质

①$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$；

②$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$，或$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$；

③$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$　(k 为常数，且 $k\neq 0$)；

④$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

3. 不定积分的基本积分公式

① $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + C \quad (\alpha \neq -1)$；

② $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

③ $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$，$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$；

④ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

⑤ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

⑥ $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x = \tan x + C$；

⑦ $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

⑧ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

⑨ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

⑩ $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

⑪ $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

⑫ $\int \frac{1}{a^{2}+x^{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$，

$\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

⑬$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$，

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$；

⑭$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$；

⑮$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

4. 不定积分的计算方法

(1)第一换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则有

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\\ &= \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C\\ &= F[\varphi(x)]+C.\end{aligned}$$

(2)第二换元积分法

设函数 $x=\varphi(t)$具有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数 $\Phi(t)$，则有

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t)+C\\ &= \Phi[\varphi^{-1}(x)]+C.\end{aligned}$$

(3)分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$具有连续导数，则有

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

二、定积分

1. 定义式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ ,$$

其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$.

2. 可积的充分条件

①$f(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上可积;

②$f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上可积;

③$f(x)$在$[a,b]$上单调有界$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上可积.

3. 定积分的性质

设 $f(x)$,$g(x)$在区间$[a,b]$上可积,则

① $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

② $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

③ $\int_a^b 1\cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$

④若 $f(x)$在由 a,b,c 构成的最大的区间上可积,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

⑤若在区间$[a,b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

⑥如果 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值分别为 M,m,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

此性质称为定积分的**估值定理**.

⑦(**积分中值定理**)如果 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

称 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ **在区间$[a,b]$上的平均值.**

4. 重要的定理、公式、关系

(1)变上限函数的求导定理

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则变上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间$[a,b]$上可导,且 $F'(x)=f(x)$.

(2)牛顿—莱布尼茨公式

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$是它的任一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(3)定积分和不定积分之间的关系

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C.$$

5. 定积分的几种求法

(1)用牛顿—莱布尼茨公式计算定积分

如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续，并且容易求出它的一个原函数 $F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(2)分部积分法

定积分的分部积分法，其公式与方法和不定积分类似，只是多了个上、下限而已.

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

(3)换元积分法

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，函数 $x=\varphi(t)$满足条件：

①$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b.$

②$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上为单值、有连续导数的函

数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

6. 有关定积分的重要结论

①设 $f(x)$是在区间$[-a,a](a>0)$上连续的偶函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

②设 $f(x)$是在区间$[-a,a](a>0)$上连续的奇函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

③设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是以 T 为周期的连续的周期函数，则对任意常数 a 和任意正整数 n，都有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

④设 $f(x)$在$[-1,1]$上连续，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x .$$

⑤华里士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\mathrm{d}x$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

7. 定积分的应用

(1)求平面图形的面积

①由曲线 $y=f(x)$,$x=a$,$x=b(a<b)$及 x 轴所围成封闭平面图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$$

②由曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)$及直线 $x=a$,$x=b\,(a<b)$所围成封闭平面图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x.$$

③要求由曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$所围成的封闭平面图形的面积,需先求出两条曲线的交点,即求解方

程组$\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x) \end{cases}$得出解中 x 的最小值记为 a,解中 x 的最大值记为 b,则

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

④在极坐标系下,如果曲线 $r=r(\theta)$,$\theta=\alpha$,$\theta=\beta(\alpha<\beta)$围成的平面封闭图形面积为 S,则

$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

如果曲线 $r=r_1(\theta)$,$r=r_2(\theta)$,$\theta=\alpha$,$\theta=\beta(\alpha<\beta)$围成的平面封闭图形面积为 S,则

$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)\right|\mathrm{d}\theta.$$

⑤曲边由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$给出的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b y\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

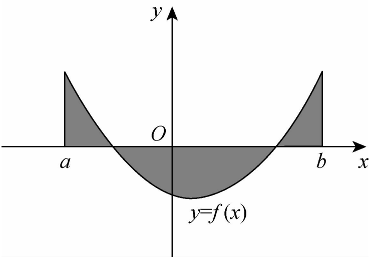
(2)求平行截面面积已知的立体体积

若垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得截面积是 x 的连续函数 $A(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x,\text{其中 } a<b.$$

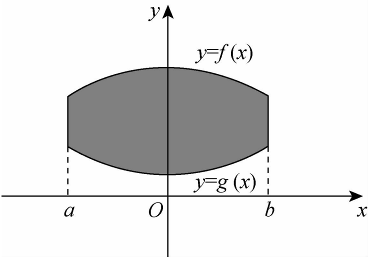
(3)求旋转体的体积

①如下图所示的平面图形绕 x 轴旋转所得立体的体积为



$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x,\text{其中 } a<b.$$

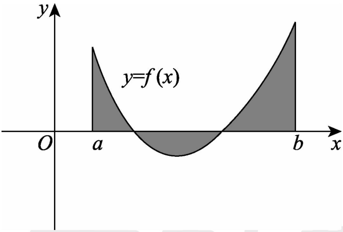
②如下图所示的平面图形绕 x 轴旋转所得立体的体积为



$$V=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x,$$

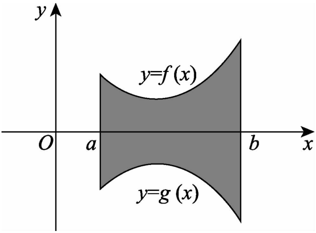
其中 $a<b, f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$.

③如下图所示的平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积为



$$V=2\pi\int_a^b x\mid f(x)\mid \mathrm{d}x,\text{其中 } 0\leqslant a\leqslant b.$$

④如下图所示的平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积为

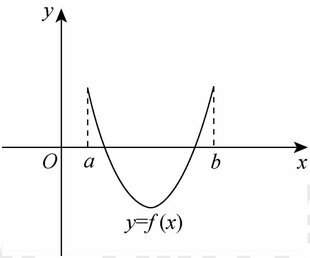


$$V=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

其中 $0\leqslant a<b, f(x)\geqslant g(x)$.

(4)求旋转曲面的表面积

①如下图所示的曲线弧绕 x 轴旋转所得旋转曲面的表面积为



$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $a<b$.

②如上图所示的曲线弧绕 y 轴旋转所得旋转曲面的表面积为

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $0\leqslant a<b$.

(5)求平面曲线段的弧长

①曲线段 $y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$, 设 $f(x)$ 有连续导

数，则所给平面曲线段的弧长为

$$S=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

②如果曲线弧段$\overset{\frown}{AB}$的方程可表示为 $x=x(t)$，$y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，且 $x=x(t)$，$y=y(t)$在区间(α,β)内有连续导数，则曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长度为

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

③如果曲线弧$\overset{\frown}{AB}$可以用极坐标表示为 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，则曲线弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

三、反常积分

1. 无穷区间上的反常积分

①设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，称

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$**在**$[a,+\infty)$**上的反常积分**. 若上式右边的极限存在，称此反常积分**收敛**；若极限不存在，称此反常积分**发散**.

②设 $f(x)$在$(-\infty,b]$上连续，称

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$**在$(-\infty,b)$上的反常积分**. 若上式右边的极限存在，称此反常积分**收敛**；若极限不存在，称此反常积分**发散**.

③设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，称

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$**在$(-\infty,+\infty)$内的反常积分**. 如果反常积分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

2. 无界函数的反常积分

①设 $f(x)$在$[a,b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则称

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上的**反常积分**. 若上式右边的极限存在，称此反常积分**收敛**；若极限不存在，称此反常积分**发散**. 使 $f(x)\to\infty$ 的点 b 称为 $f(x)$ 的**奇点**（也称**瑕点**）.

②设 $f(x)$在$(a,b]$上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则称

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$**在$(a,b]$上的反常积分**. 若上式右边的极限存

在，称此反常积分**收敛**；若极限不存在，称此反常积分**发散**.

③设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}y$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都**收敛**，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

第四章　向量代数和空间解析几何

一、向量代数

1. 向量的数量积、向量积与混合积

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\boldsymbol{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$, 则

(1)数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

(2)向量积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

(3)混合积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2. 两向量的夹角

(1)两向量夹角的余弦

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

(2)两非零向量平行与垂直的条件

①垂直

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

②平行

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

(3)方向余弦

①计算公式

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

②关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

二、空间平面与直线

1. 平面的方程

(1)点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

(2)平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

(3)平面的截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

2. 点到平面的距离公式

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. 直线的方程

(1)直线的标准式(对称式)方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

(2)直线的一般式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

(3)直线的参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases}$$

(4)直线的两点式方程

过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. 点到直线的距离公式

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到直线$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$的垂直距离为

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

三、空间曲面与曲线

1. 空间曲面的方程

(1)一般式方程

$$F(x,y,z)=0.$$

(2)参数式方程

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v). \end{cases}$$

2. 空间曲线的方程

(1)空间曲线的一般式方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

(2)空间曲线的参数式方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

(3)空间曲线在坐标面上投影曲线的方程

空间曲线 Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影曲线,可以采取以下方法来求:

从方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中消去 z,得方程

$$H(x,y)=0,$$

于是 Γ 在 xOy 坐标面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

3. 常见曲面与曲线

(1)球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

(2)椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(3)单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(4)双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(5)椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\text{ 同号}).$$

(6)双曲抛物面

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\text{ 同号}).$$

(7)锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

第五章　多元函数微分学

一、偏导数与全微分

1. 偏导数的定义

函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

存在，则称这两个极限值为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 x,y 的偏导数**.

2. 全微分的定义

若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，则称 $z=f(x,y)$ **在点 (x,y) 处可微**，且 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

3. 复合函数微分法

设函数 $z=f(u,v)$ 可微，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 具有一阶偏导数，并且它们可以构成 z 关于 (x,y) 在某区域 D 内的复合函数，则在 D 内复合函数的求导法则为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

4. 多元函数几个概念间的关系

$$\text{偏导数连续}\Rightarrow\text{函数可微}\Rightarrow\begin{cases}\text{函数连续}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)\text{存在}.\\ \\ \text{偏导数存在}.\end{cases}$$

二、隐函数求导法

(二元隐函数存在定理) 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有连续偏导数,并且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0, F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能确定唯一的连续函数 $z=f(x,y)$,且满足:

①$z_0=f(x_0,y_0)$;

②$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$;

③$z=f(x,y)$具有连续偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

三、方向导数

1. 定义

设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义,$\boldsymbol{l}=\{m,n\}$是一给定的向量,过 P_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 作射线 L,在射线 L 上 P_0 点的邻域内取一点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$,当点 P 沿射线 L 趋向 P_0 点时,如果极限

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{|PP_0|}$$

存在,则此极限值称为函数 $z=f(x,y)$在 P_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**,记为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$.

2. 计算方式

设函数 $u=F(x,y,z)$在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处可微,$\boldsymbol{l}=\{m,n,p\}$是任一给定的向量,则

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}=\mathbf{grad}F|_{M_0}\cdot\boldsymbol{l}^0.$$

四、偏导数在几何中的应用

(1)空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=w(t)\end{cases}$在 $t=t_0$ 处的切线与法平

面方程

①切线方程

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{w'(t_0)}.$$

②法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+w'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2)曲面 $F(x,y,z)=0$ 的切平面与法线方程

①切平面方程

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

②法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

五、多元函数的极值

1. 必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在**偏导数**，则必有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0.$$

2. 充分条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有连续二阶偏导数，并设 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的驻点，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则

①当 $AC-B^2>0$，$A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$为极小值；

②当 $AC-B^2>0$，$A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$为极大值；

③当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$不是极值；

④当 $AC-B^2=0$ 时，不能确定 $f(x_0,y_0)$是否为极值.

3. 条件极值

求 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值. 一般方法为：

①构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

②将 $F(x,y,\lambda)$分别对 x,y,λ 求偏导数，构造下列方程组：

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

解出(x,y)，这是可能极值点的坐标.

③判定上述点是否为极值点，如果是，求出该点的函数值 $f(x,y)$.

第六章　多元函数积分学

一、重积分的计算

1. 二重积分的计算法

(1)利用直角坐标系计算二重积分

若积分区域 D 是 X 型域,其不等式表示为

$$D:\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b, \\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x), \end{cases}$$

则

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若积分区域 D 是 Y 型域,其不等式表示为

$$D:\begin{cases} c\leqslant y\leqslant d, \\ \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant \varphi_2(y), \end{cases}$$

则

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2)利用极坐标计算二重积分

①如果极点 O 在区域 D 内,此时 D 可用不等式

$\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta) \end{cases}$ 表示，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r.$$

②如果极点 O 在区域 D 的边界上，此时 D 可用不等式 $\begin{cases} \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \\ 0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta) \end{cases}$ 表示，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$
$$=\int_\alpha^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r.$$

③如果极点 O 在区域 D 外，此时 D 可用不等式 $\begin{cases} \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \\ \varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta) \end{cases}$ 来表示，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$
$$=\int_\alpha^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r.$$

2. 三重积分的计算法

(1)利用直角坐标系计算三重积分

①“先一后二”，即将三重积分化为：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}\iint_{D_{xOy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.\\ \iint_{D_{yOz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x.\\ \iint_{D_{xOz}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}y.\end{cases}$$

②“先二后一”，即将三重积分化为：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_c^d \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ \int_a^b \mathrm{d}x\iint_{D(x)} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ \int_m^n \mathrm{d}y\iint_{D(y)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.\end{cases}$$

(2)利用柱坐标计算三重积分

①柱坐标系下的体积元素

$$\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

②柱坐标系下的三次积分的先后次序一般为

$$I=\int\mathrm{d}\theta\int r\mathrm{d}r\int f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

③若空间区域 Ω 可以用不等式

$$\begin{cases}z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta),\\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}$$

表示，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z.$$

(3)利用球坐标计算三重积分

①球坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi. \end{cases}$$

②球坐标系下的体积元素

$$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

③球坐标系下三次积分的先后次序一般为

$$I=\int\mathrm{d}\theta\int\mathrm{d}\varphi\int f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

二、重积分的应用(数学二不作要求)

(1)几何应用

①曲面面积的计算公式

$$A=\iint_{D}\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\mathrm{d}\sigma.$$

②体积

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

③平面图形 D 的形心$(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

④空间立体 Ω 的形心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}.$$

(2)物理应用

①平面薄片的质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D}y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

②立体的质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

③平面薄片绕轴的转动惯量

绕 x 轴的转动惯量：$I_x=\iint\limits_{D} y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

绕 y 轴的转动惯量：$I_y=\iint\limits_{D} x^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

④立体绕轴的转动惯量

绕 x 轴的转动惯量：$I_x=\iint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

绕 y 轴的转动惯量：$I_y=\iint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

绕 z 轴的转动惯量：$I_z=\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

⑤平面薄片对质点的引力 $\boldsymbol{F}=\{F_x,F_y\}$为：

$$F_x=\iint\limits_{D}\frac{Gm\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$F_y=\iint\limits_{D}\frac{Gm\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

⑥立体对质点的引力 $\boldsymbol{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$为

$$F_x=\iiint_{\Omega}\frac{Gm\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v,$$

$$F_y=\iiint_{\Omega}\frac{Gm\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v,$$

$$F_z=\iiint_{\Omega}\frac{Gm\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v.$$

三、曲线、曲面积分

1. 曲线积分的计算公式

(1)化成定积分

曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=w(t),\end{cases}$

$$\int_{\Gamma}f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+w'^2(t)}\mathrm{d}t\quad(\alpha\leqslant\beta),$$

$$\int_{\Gamma}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),w(t)]w'(t)\}\mathrm{d}t,$$

其中 α 为 Γ 的起点参数 t 的值,β 为 Γ 的终点参数 t 的值.

(2)格林公式

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 L 为正向闭曲线.

(3)与路径无关的积分

$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件是$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(4)斯托克斯公式

$$\int_P P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 所指定侧法线方向的方向余弦.

2. 全微分求积

①若函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则在 G 内存在二元函数 $u(x,y)$，使得

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

②求积公式

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C.$$

3. 曲面积分的计算公式

(1)化为二重积分

①对面积的曲面积分

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy,$$

其中 D_{xy} 是曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影.

②对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz\xlongequal{\Sigma\text{ 为单值函数 }x=x(y,z)}$$

$$\pm\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]dydz,(\text{前“}+\text{”后“}-\text{”})$$

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx\xlongequal{\Sigma\text{ 为单值函数 }y=y(x,z)}$$

$$\pm\iint_{D_{xz}}Q[x,y(x,z),z]dzdx,(\text{右“}+\text{”左“}-\text{”})$$

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\Sigma\text{为单值函数} z=z(x,y)} \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\text{(上“+”下“-”)}$$

(2)高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

其中 Σ 为闭曲面的外侧,Ω 是 Σ 所围立体.

4. 两类曲线、曲面积分的关系

(1)曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 上点 (x,y) 处的切线向量的方向角.

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z)$ 是有向曲线弧 Γ 上点 (x,y,z) 处的切线向量的方向角.

(2)曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是有向曲面上点(x,y,z)处法向量的方向余弦.

5. 梯度、散度、旋度的计算公式

(1)梯度

$$\mathbf{grad}\,f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j},$$
$$\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

(2)散度和旋度

若 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,则

①散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z};$$

②旋度

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

第七章 级 数

一、数项级数

1. 数项级数的定义与性质

(1)定义

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$,

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ 称为级数的**部分和**.

②若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**,极限值$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$ 称为**此级数的和**,并写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = A$. 当$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在时,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

(2)级数的基本性质及收敛的必要条件

①设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,其和分别为 A,B,则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = A \pm B$;

②设 k 为非零常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 有相同的敛散性;

③改变级数的前有限项,不影响级数的敛散性;

④级数收敛的必要条件:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;

⑤收敛的级数在不改变各项次序的前提下任意加括号得到的新级数仍然收敛,且和不变.

2. 正项级数及其敛散性判别法

(1)正项级数收敛的基本定理

设 $\{S_n\}$ 是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列,则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是数列 $\{S_n\}$ 有界.

(2)正项级数的比较判别法

(正项级数比较判别法的非极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数,并设 $u_n \leqslant v_n (n \geqslant N_0)$,则

①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

②若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

（正项级数比较判别法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，并设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho$ 或为 $+\infty$，则

①当 ρ 为非零常数时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性；

②当 $\rho=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

③当 $\rho=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3)正项级数的比值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 或为 $+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有

①当 $\rho<1$ 时，收敛；

②当 $\rho>1$ 或 ∞ 时，发散；

③当 $\rho=1$ 时，敛散性不确定.

(4)正项级数的根值判别法

将比值判别法中的$\frac{u_{n+1}}{u_n}$改成$\sqrt[n]{u_n}$,其他文字叙述、结论均不改动,即为根值判别法.

3. 交错级数及其敛散性判别法

(1)定义

形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)\text{ 或 }\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n(u_n>0)$$

的级数,称为**交错级数**.

(2)莱布尼茨判别法

若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$满足条件:

①$u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$;

②$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$收敛,其和$S\leqslant u_1$,其余项$S-S_n$满足$|S-S_n|\leqslant u_{n+1}$.

4. 任意项级数及其绝对收敛

(1)条件收敛、绝对收敛

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**;若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则称级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛.**

(2)任意项级数的敛散性判别法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,即绝对收敛的级数一定收敛.

二、幂级数

1. 幂级数的定义

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为 x_0 处的**幂级数.**

2. 幂级数的收敛半径

(阿贝尔定理) 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 有如下的结论:

①如果该幂级数在点 x_1 收敛,则对满足 $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ 的一切 x 所对应的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 都绝对收敛.

②如果该幂级数在点 x_2 发散,则对满足 $|x-x_0|>|x_2-x_0|$ 的一切 x 所对应的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 都发散.

3. 幂级数收敛半径的求法

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 R 的方法有：

(1)①求极限

$$\rho(x-x_0)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right|.$$

②令 $\rho(x-x_0)<1\Rightarrow|x-x_0|<m$，则收敛半径为 $R=m$.

(2)若 a_n 满足 $a_n\neq0$，则

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

(3)①求极限

$$\rho(x-x_0)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n(x-x_0)^n}.$$

②令 $\rho(x-x_0)<1\Rightarrow|x-x_0|<m$，则收敛半径为 $R=m$.

4. 幂级数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R_2，则

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R\geqslant\min\{R_1,R_2\}$.

②$\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)(x-x_0)^n$，收敛半径 $R\geqslant\min\{R_1,R_2\}$.

③幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

④幂级数在其收敛区间内可以逐项求导，且求导后所得到的幂级数的收敛半径仍为 R. 即有

$$S'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(x-x_0)^n\right]'$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

⑤幂级数在其收敛区间内可以逐项积分，且积分后所得到的幂级数的收敛半径仍为 R. 即有

$$\int_{x_0}^{x}S(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\left[a_n(x-x_0)^n\right]\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n(x-x_0)^{n+1}.$$

5. 函数展开成幂级数

(1)函数展开成幂级数的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$x_0\in I$，若存在幂

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$,使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, x\in I,$$

则称 $f(x)$在区间 I 上能展开成 x_0 处的幂级数.

(2)展开形式的唯一性

若函数 $f(x)$在区间 I 上能展开成 x_0 处的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, x\in I,$$

则其展开式是唯一的,且 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

(3)泰勒级数与麦克劳林级数

如果 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内具有任意阶导数,则称幂级数

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\ &=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\\ &\quad\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\end{aligned}$$

为函数 $f(x)$在 x_0 点的**泰勒级数**.

当 $x_0=0$ 时,称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

为函数 $f(x)$的**麦克劳林级数**.

（**函数展开成泰勒级数的充要条件**）函数 $f(x)$在 $x_0 \in I$ 处的泰勒级数在 I 上收敛到 $f(x)$的充要条件是：$f(x)$在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

的余项 $R_n(x)$在 I 上收敛到零，即对任意的 $x \in I$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

(4)幂级数常用的七个展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, -1 < x \leqslant 1,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$x \in (-1, 1);$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1);$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1).$$

三、傅里叶级数

1. 周期为 2π 的傅里叶级数

(1)傅里叶级数的定义

设函数 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，且在区间$[-\pi,\pi]$上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**，称三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的**傅里叶级数**，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

(2)傅里叶级数的收敛定理

(**狄利克雷收敛定理**)设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，在区间$[-\pi,\pi]$上满足：

①只有有限个第一类间断点；

②只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其收敛域为$(-\infty,+\infty)$，和函数 $S(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在其一个周期上的表达式为

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\in(-\pi,\pi),\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

2. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，且在区间$[-l,l]$上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**，称三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

为 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期的**傅里叶级数**.

3. 只在[0,l]上有定义的函数的傅里叶级数展开

(1)对称区间上奇、偶函数的傅里叶级数

①若 $f(x)$是以 $2l$ 为周期的可积偶函数,则其以 $2l$ 为周期的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos \frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

②若 $f(x)$为以 $2l$ 为周期的可积奇函数,则其以 $2l$ 为周期的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\sin \frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

(2)在[0,l]上有定义的函数的傅里叶级数展开

定义在[0,l]上的函数可以有多种方式展开成三角级数,但常用的方式只有三种,即周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓,三种延拓得到的三角级数展开式分别为:

①正弦级数展开:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

②余弦级数展开：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

③三角级数展开：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{l}\right),$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

第八章　常微分方程及差分方程

一、一阶微分方程的类型及其解法

1. 变量可分离的一阶微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

或

$$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x+M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0$$

的一阶微分方程，称为**变量可分离的一阶微分方程**.

求通解方法：当 $g(y)\neq 0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x,$$

则有

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

将左、右两边的不定积分求出，整理可得方程通解.

2. 一阶齐次微分方程

形如

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的一阶微分方程,叫**一阶齐次微分方程**.

求通解方法:设 $u=\frac{y}{x}$,将此方程化为关于未知函数 u 的可分离变量的一阶微分方程,求出此一阶微分方程的通解,然后将通解中的 u 用 $\frac{y}{x}$ 替换,即得原微分方程的通解.

3. 一阶线性微分方程

形如

$$A(x)y'+B(x)y=C(x)$$

的一阶微分方程,叫**一阶线性微分方程**,其标准形式为

$$y'+p(x)y=q(x).$$

当右端的 $q(x)$ 恒为零时,称其为**一阶线性齐次微分方程**,否则称为**一阶线性非齐次微分方程**.

求通解方法:通解由公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

给出.

4. 伯努利方程

形如

$$y'+p(x)y=q(x)y^{n}\quad(n\neq0,1)$$

的方程叫做**伯努利方程**.

求通解方法:令 $z=y^{1-n}$,将此方程化为 z 的一阶

线性微分方程，求出此一阶微分方程的通解，然后将通解中的 z 用 y^{1-n} 替换，即得原微分方程的通解.

5. 全微分方程

如果存在可微函数 $u(x,y)$，使得

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

则称一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

为**全微分方程**.

二、可降阶的高阶微分方程

1. 形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的可降阶方程

这类微分方程只要积分 n 次就得到方程的通解.

2. 不显含函数 y 的二阶可降阶的方程 $y''=f(x,y')$

这类方程特点是不显含 y，若令 $y'=p$，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=p',$$

于是所给方程可降为一阶方程，再按一阶微分方程的方法求解.

3. 不显含自变量 x 的二阶可降阶的方程 $y''=f(y,y')$

这类方程特点是不显含 x，若令 $y'=p$，则

$$y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

于是所给方程可降为一阶方程，再按一阶微分方程的方法求解.

三、线性微分方程解的结构定理

①设 y_1, y_2 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=0$$

的两个解，则

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

也是该方程的解，其中 C_1, C_2 是任意常数.

②设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=0$$

的 n 个线性无关的解，则

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

是该方程的通解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数.

③如果 y_1 是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f_1(x)$$

的解，y_2 是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f_2(x)$$

的解，则 y_1+y_2 是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的解.

④设 y^* 是非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f(x)$$

的一个特解，$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是该非齐次微分方程对应的齐次线性微分方程的通解，则该非齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+y^*.$$

四、常系数齐次线性微分方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程的形式为：

$$y''+py'+qy=0,$$

其中 p,q 为常数，其特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0.$$

方程的通解为：

①特征方程有两个相异的实根 λ_1,λ_2 时，通解形式为

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}.$$

②特征方程有两个相同的实根 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，通解形式为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_2x}.$$

③特征方程有一对共轭复根 $\alpha\pm\beta i$ 时，通解形式为

$$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

2. n 阶常系数齐次线性微分方程

此种方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0,$$

其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$为常数,相应的特征方程为

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0.$$

特征方程的根与通解的关系为:

①若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个互异实根,则方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\cdots+C_ne^{\lambda_nx}.$$

②若 $\lambda=\lambda_0$ 为特征方程的 $k(k\leqslant n)$重实根,则方程的通解中含有

$$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda_0x}.$$

③若 $\alpha\pm\beta i$ 为特征方程的 k 重共轭复根,则方程的通解中含有

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x].$$

五、二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x),$$

其中 p,q 是常数.

求特解 y^* 的待定系数法:

①若

$$f(x)=P_m(x)e^{\alpha x},$$

其中 $P_m(x)$为 x 的 m 次多项式,则待定特解 y^* 的形式为

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x},$$

其中 $Q_m(x)$是与 $P_m(x)$同次的多项式,调节系数

$$k=\begin{cases}0, & \alpha\text{ 不是特征方程的特征根,}\\ 1, & \alpha\text{ 是特征方程的单特征根,}\\ 2, & \alpha\text{ 是特征方程的二重特征根,}\end{cases}$$

将 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$代入方程

$$y''+py'+qy=f(x),$$

就可以求出 $Q_m(x)$.

②若

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x],$$

其中 $P_n(x)$,$Q_m(x)$分别为 x 的 n 次,m 次多项式,则待定特解 y^* 的形式为

$$y^*=x^ke^{\alpha x}[M_l(x)\cos\beta x+N_l(x)\sin\beta x],$$

其中 $l=\max\{m,n\}$,$M_l(x)$,$N_l(x)$是两个待定的 l 次多项式,调节系数

$$k=\begin{cases}0, & \alpha+\beta i\text{ 不是特征方程的特征根,}\\ 1, & \alpha+\beta i\text{ 是特征方程的特征根.}\end{cases}$$

六、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)}+p_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+p_2 x^{n-2} y^{(n-2)}+\cdots+ p_{n-1} x y'+p_n y=f(x)$$

的方程称为欧拉方程.

这个方程可以通过变换 $x=\mathrm{e}^t$ 化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程,求解后代回原来的变量即得欧拉方程的解.

七、差分方程

1. 差分的定义

(1)一阶差分

$$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t.$$

(2)二阶差分

$$\Delta^2 y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t.$$

2. 一阶线性齐次差分方程的解法

(1)方程形式

$$y_{t+1}-a y_t=0.$$

(2)特征方程

$$r-a=0.$$

(3)通解

$$\tilde{y}_t = Ca^t.$$

3. 一阶线性非齐次差分方程的解法

(1)方程形式

$$y_{t+1} - ay_t = f(t).$$

(2)通解形式

$$y_t = \tilde{y}_t + y_t^*.$$

(3)特解形式

①$f(t)=P_m(t)$,其中 $P_m(t)$是 t 的 m 次多项式.

$y_t^* = Q_m(t)$,其中 $Q_m(t)$是特定的 m 次多项式.

②若 $f(t)=b^t P_m(t)$,$y_t^* = t^k b^t Q_m(t)$.

当 b 不是特征方程的根时,取 $k=0$;

当 b 是特征方程的根时,取 $k=1$.

第二部分

线性代数

第一章 行列式

一、行列式的定义与性质

1. 行列式的定义

n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

式中 $\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 表示对所有 n 级排列$(j_1 j_2 \cdots j_n)$求和.

2. 行列式的性质

①行列互换,行列式的值不变,也即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

②任意两行(列)互换位置后,行列式改变符号.

推论 1 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则行列式的值为 0.

③将行列式的某一行(列)乘以一个常数 k 后,行列式的值变为原来的 k 倍.

推论 2 如果行列式的某一行(列)全为 0,则行列式的值等于 0.

推论 3 行列式的某两行(列)元素对应成比例,则行列式的值等于 0.

④如果行列式某一行(列)的所有元素都可以写成两个元素的和,则该行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)分别为对应两个加数,其余行(列)与原行列式相等,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

⑤将行列式的某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式的值不变.

二、行列式的展开定理

1. 余子式及代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，划掉元素 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列的所有元素后，余下 $(n-1)^2$ 个元素按照原有次序构成一个 $(n-1)$ 阶行列式，称之为元素 a_{ij} 在 D 中的**余子式**，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称作元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

2. 行列式按一行(列)展开

n 阶行列式 D 等于其任一行(列)各元素与其代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开}) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n)(\text{按第 } j \text{ 列展开}).$$

推论:行列式 D 的某一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad (i \neq k)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = 0. \quad (i \neq k)$$

三、几种特殊的行列式

1. 上三角形、下三角形、对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 次对角线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\cdots a_{n1}.$$

3. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

4. 拉普拉斯展开式

$$
① \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & & & & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & & \boldsymbol{O}_{k\times l} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & & & & \\
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lk} & b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll}
\end{vmatrix};
$$

$$
② \begin{vmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lk} & b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & & & & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & & \boldsymbol{O}_{k\times l} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & & & &
\end{vmatrix}
$$

$$=(-1)^{kl}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1l}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{l1}&b_{l2}&\cdots&b_{ll}\end{vmatrix}.$$

四、有关行列式的若干个重要公式

为便于考生综合复习及掌握概念间的联系，现将以后各章所涉及的有关行列式的几个重要公式罗列于下.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，k 为常数，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵：

①$|k\boldsymbol{A}|=k^n\cdot|\boldsymbol{A}|$.

②若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则有 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

③$|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

④$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

⑤$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{E}$.

⑥$|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$　（$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值）.

⑦$|\boldsymbol{A}|\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，即 $r(\boldsymbol{A})=n$.

第二章 矩 阵

一、矩阵的定义与运算

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵,记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素.

①当 $n=m$ 时,$\boldsymbol{A}$ 也称为 n 阶方阵,$|\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

②两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times k}$,如果 $m=s,n=k$,则称它们为同型矩阵.

③如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$对应的元素相等,也即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

常见的特殊矩阵有：

①零矩阵：所有元素均为 0 的矩阵称之为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$.

②对角矩阵：主对角线以外的元素均为 0 的矩阵称之为对角矩阵，记作 $\mathbf{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，即

$$\mathbf{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

两个对角矩阵的乘积仍为对角矩阵.

③单位矩阵：主对角线上的元素均为 1，其余元素均为 0 的矩阵称之为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}$. 单位矩阵与任何矩阵相乘都可交换，即

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}.$$

④上（下）三角矩阵：主对角线以下的元素全为 0 的矩阵称之为上三角矩阵；主对角线以上的元素全为 0 的矩阵称之为下三角矩阵.

⑤对称矩阵：满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵. 即

$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵$\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$.

⑥反对称矩阵：满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$

称为反对称矩阵. 即

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为反对称矩阵$\Leftrightarrow a_{ij}=-a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$

⑦正交矩阵：设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，如果$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称$\boldsymbol{A}$是正交矩阵.

2. 矩阵的运算

(1)矩阵的加法

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是两个$m\times n$矩阵，定义矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$为矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$的和，记作$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

注 两个相加的矩阵必须是同型的.

加法的运算性质：

①$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ （交换律）；

②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ （结合律）；

③$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$ （其中$\boldsymbol{O}=(0)_{m\times n}$）；

④$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ （其中$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$）.

(2)矩阵的数乘

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是一个$m\times n$矩阵，k为任意实数，则定义

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

为矩阵的数乘.

数乘的运算性质：

①$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}=l(k\boldsymbol{A})$ （k，l为数）；

②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

④$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

(3)矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times k}$（注意 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等），定义矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times k},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

数乘的运算性质：

①$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$　（结合律）；

②$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$　（分配律）；

③$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$　（数与乘积的结合律）.

注　①不是任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都能相乘的，必须有 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等.

②矩阵乘法一般来说不满足交换律. 即一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

③矩阵的运算也不满足消去律. 即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，得不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

④零因子定律不成立，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 并不能得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(4)方阵的乘幂运算

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，则定义 $\boldsymbol{A}^n=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{n\text{个}\boldsymbol{A}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂. 规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$(单位矩阵).

乘幂的运算性质：

①$\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

②$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

注 一般情况下，$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^k\neq\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{B}^k$.

(5)矩阵的转置

设 $A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m},$$

即转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素等于原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列元素.

转置的运算规则：

①$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

③$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

④$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(6)方阵的行列式

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

且 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

(7)矩阵的求逆运算

①逆矩阵的定义及定理

若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**，又称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(a)若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是唯一的.

(b)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(c)若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，其中

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵(其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式).

由 $\boldsymbol{A}^*$ 的构成,可得到以下重要的公式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

②求逆运算的运算规则

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则

(a)$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(b)若 $k\neq 0$ 为常数,则$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(c)$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(d)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆,且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(e)$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

二、矩阵的秩

1. k 阶子式的定义

在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中,任取 k 行、k 列,在这 k 行 k 列的交错处有 k^2 个元素,这 k^2 个元素按原有的次序构成一个 k 阶行列式,称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 **k 阶子式.**

2. 矩阵的秩的定义

在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中,至少有一个 r 阶子式不为零,而所有 $r+1$阶子式全为零,则称 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**为 r,记作 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$,简记为 $r(\boldsymbol{A})=r$ 或 $R(\boldsymbol{A})=r$.

3. 矩阵经过运算后秩的变化规律

①$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$;

②$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m,n\}$；

③$r(\boldsymbol{A})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

④$r(k\boldsymbol{A})=\begin{cases}r(\boldsymbol{A}), & k\neq 0,\\ 0, & k=0;\end{cases}$

⑤$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

⑥$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$；

⑦若有矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times s}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$；

⑧若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为满秩方阵，则

$$r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})；$$

⑨初等变换不改变矩阵的秩. 若 $\boldsymbol{B}$ 是阶梯形矩阵，则 $r(\boldsymbol{B})$等于 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的个数；

⑩关于伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩：

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2.\end{cases}$$

三、分块矩阵

1. 分块矩阵的定义

用贯穿矩阵的横线和纵线(称为分划线)把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的**子块**，一般记作 $\boldsymbol{A}_{ij}$，分为子块的矩阵叫做**分块矩阵**. 由于不同的需要，同一矩阵可以有不同的分块方法. 例如：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$=(\boldsymbol{A}_{ij})_{2\times 2},$$

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)_{1\times 4}.$$

2. 分块矩阵的运算

(1)加法

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_{m,n}$，且有相同的分块划分方法：$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$，则

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$(每个对应子块可加).

(2)数乘

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}\in M_{m,n}$，则

$$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}.$$

(3)转置

若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}\in M_{m,n},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

即分块矩阵先转置后,再将每个子矩阵分别单独转置,即为原矩阵的转置矩阵.

(4)乘法

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}\in M_{m,n},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \boldsymbol{B}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}_{jk})_{t\times r}\in M_{m,n},$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \boldsymbol{C}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ik}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1k}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2k}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tk}=\sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{B}_{jk}$ $(i=1,\cdots,s;k=1,\cdots,r)$.

3. 分块对角形(对角块)矩阵

一般地,分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{bmatrix}$,

简记为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{ss}\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 均为小方阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角块矩阵**或**分块对角形矩阵**. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为对角块矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 也为对角块矩阵,如:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1} & & & \\ & \boldsymbol{B}_{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_{s}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1}+\boldsymbol{B}_{1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{2}+\boldsymbol{B}_{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{s}+\boldsymbol{B}_{s}\end{bmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{A}_i$,$\boldsymbol{B}_i$ 为同阶子矩阵.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_s\end{bmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{A}_i$,$\boldsymbol{B}_i$ 为同阶子矩阵.

对角块矩阵的逆矩阵公式(设 $\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2$,$\boldsymbol{A}_3$ 均可逆):

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \\ & & \boldsymbol{A}_3^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} & & \boldsymbol{A}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ \boldsymbol{A}_3 & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & \boldsymbol{A}_3^{-1} \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \end{bmatrix}.$$

四、矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的初等行(列)变换

矩阵的初等变换指的是对矩阵施行以下三种行(列)变换:

①交换变换:互换矩阵中的某两行(列);

②倍乘变换:用一个非零常数 k 乘矩阵的某行(列);

③倍加变换:将矩阵的某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上.

2. 阶梯形矩阵

形如

$$\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&-1&2&5\\0&0&0&1&0\\0&0&0&4&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}$$

的矩阵称为**阶梯形矩阵.**

阶梯形矩阵有以下特征:

①全零行位于矩阵的最下方.

②每个非零行的第一个非零元素 c_{ij}(亦称主元)的列标 j 随着行标 i 的递增而严格增大.

③任一个矩阵经过若干次初等行(列)变换都可以化成阶梯形矩阵.

3. 初等矩阵

将单位矩阵作了一次初等行(列)变换的矩阵称作**初等矩阵.**

三种初等行(列)变换矩阵:

(1)初等行交换矩阵

将单位矩阵的第 i 行、第 j 行交换后所得到的矩阵,记作

$$
\boldsymbol{P}((i)\leftrightarrow(j))=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\leftarrow i\text{ 行}\\\\\leftarrow j\text{ 行}\\\\\\\end{array}.
$$

作用:将初等行交换矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$,即若

$$
\boldsymbol{P}((i)\leftrightarrow(j))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1,
$$

则 $\boldsymbol{A}_1$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 行交换后的结果.

(2)初等行倍乘矩阵

将单位矩阵的第 i 行乘以不为零的常数 k 后所得到的矩阵,记作

$$
\boldsymbol{P}((k(i))=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\\leftarrow i\text{ 行}.\\\\\\\end{array}
$$

作用:若 $\boldsymbol{P}(k(i))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_2$,则 $\boldsymbol{A}_2$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘上 k 倍后的结果.

(3)初等行倍加矩阵

将单位矩阵第 i 行的 k 倍加到第 j 行后所得到的矩阵,记作

$$\boldsymbol{P}(k(i)+(j))=\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow i\text{ 行}\\ \\ \leftarrow j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

作用:若 $\boldsymbol{P}(k(i)+(j))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_3$,则 $\boldsymbol{A}_3$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上的结果.

(4)初等列交换矩阵

将单位矩阵第 i 列与第 j 列交换后所得到的矩阵,记作

$$\boldsymbol{Q}((i)\leftrightarrow(j))=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccc}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&\cdots&1&\\&&\vdots&&\vdots&\\&&1&\cdots&0&\\&&&&&\ddots\\&&&&&&1\end{array}\right]\\ \begin{array}{ccccccc}&&\uparrow&&\uparrow&&\\&&i\text{ 列}&&j\text{ 列}&&\end{array}\end{array}$$

作用:将初等列交换矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$,即若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}((i)\leftrightarrow(j))=\boldsymbol{A}_4$,则 $\boldsymbol{A}_4$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列交换后的结果.

（5）初等列倍乘矩阵

将单位矩阵的第 i 列乘以一个不等于零的常数 k 后得到的矩阵，记作

$$\boldsymbol{Q}(k(i))=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}&&\uparrow&&\\&&i\text{ 列}&&\end{array}\end{array}.$$

作用：若 $\boldsymbol{AQ}(k(i))=\boldsymbol{A}_5$，则 $\boldsymbol{A}_5$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘上 k 倍后的结果.

（6）初等列倍加矩阵

将单位矩阵第 i 列的 k 倍加到第 j 列后所得到的矩阵，记作

$$\boldsymbol{Q}(k(i)+(j))=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccccc}&&\uparrow&&\uparrow&&\\&&i\text{ 列}&&j\text{ 列}&&\end{array}\end{array}.$$

作用：若 $\boldsymbol{AQ}(k(i)+(j))=\boldsymbol{A}_6$，则 $\boldsymbol{A}_6$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上的结果.

4. 初等行变换矩阵与初等列变换矩阵的关系

①$\boldsymbol{P}((i)\leftrightarrow(j))=\boldsymbol{Q}((i)\leftrightarrow(j))=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}((i)\leftrightarrow(j))$；

②$\boldsymbol{P}(k(i))=\boldsymbol{Q}(k(i))=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(k(i))$；

③$\boldsymbol{P}(k(i)+(j))=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(k(i)+(j))$.

即：初等行变换矩阵与同类型的初等列变换矩阵之间为转置关系(事实上前两类是相等的对称矩阵).

5. 有关定理

①初等矩阵都是可逆矩阵.

②初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵.

③任一个可逆矩阵经过有限次的初等行变换都可化成单位矩阵.

④一个可逆矩阵可分解为一系列初等矩阵的乘积.

6. 用初等行(列)变换法求矩阵的秩

初等行(列)变换不改变矩阵的秩.

矩阵的初等行(列)变换前后，矩阵的秩是相等的，而阶梯形矩阵的秩等于阶梯形矩阵中非零行的个数，由任一个矩阵都可经过若干次初等行(列)变换化成阶梯形矩阵，因此任一个矩阵的秩都可通过初等行(列)变换化成阶梯形矩阵后方便地求得.

7. 矩阵的几种关系

(1)等价

①定义

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过一系列初等行变换和列变换后化成矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是等价的,记作 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.

②性质

(a)$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$;

(b)$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$;

(c)$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$;

(d)同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(2)相似

①定义

对于同阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$,若存在 $|\boldsymbol{P}| \neq 0$,使 $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

②性质

(a)$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

(b)$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;

(c)$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$;

(d)若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \sim \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(e)若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$;

(f)$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{n} \sim \boldsymbol{B}^{n}$,$n$ 为正整数;

(g)相似矩阵有相同的特征值;

(h)相似矩阵的行列式、秩相等;

(i)同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们有相同的特征值(包括重数).

(3)合同

①定义

对于同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,若存在 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,记为 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

②性质

(a)$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{A}$;

(b)若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$;

(c)若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$;

(d)同阶实对称矩阵合同的充要条件是秩相等且正惯性指数相等.

8. 矩阵等价、相似、合同的关系

①相似⇒等价;

②合同⇒等价;

③若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似⇔$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

9. 矩阵的特征值与特征向量

(1)定义

若存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,使 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,则称 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

(2)性质

①若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值.

②若 $\lambda \neq 0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

③若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} \quad (\boldsymbol{A}\text{ 的迹}),$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|.$$

④$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

⑤矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于不同特征值的特征向量必线性无关.

⑥实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必正交.

10. 矩阵可逆的充要条件

$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$，其中 $\boldsymbol{P}_i \quad (i=1, 2, \cdots, l)$ 为初等矩阵

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E} \quad (\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵).

11. 矩阵等价的充要条件

$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

第三章　向　量

一、n 维向量的定义及其运算

1. 向量的定义及其线性运算

(1)向量的定义

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成一个有次序的数组,称为一个 **n 维向量**,用 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$(称为**行向量**)或 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$(称为**列向量**)来表示.称 a_i 为第 i 个**分量**.若干个同维列向量(或同维行向量)组成的集合称为**向量组**.

(2)向量的加法

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)\\&=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).\end{aligned}$$

(3)数乘向量

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

2. 线性组合与线性表出

(1)向量组的线性组合

有一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**.

(2)线性表出

若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合,即有 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 存在,使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

成立,则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**(或**线性表示**). 否则称 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

①一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,等价于以 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为未知量的线性方程组 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 是有解还是无解.

②若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,其表现形式(即表出系数)是唯一的还是无穷多种形式,等价于线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$ 在有解时只有唯一解还是无穷多组解.

3. 向量组的等价

若向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,s)$均可由向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,则称向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)**线性表出**.

若向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出,向量组(Ⅱ)也可由向量组(Ⅰ)线性表出,则称向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)为**等价向量组**,记作:(Ⅰ)≅(Ⅱ).

向量组的等价有以下性质：

(1)自反性

任一个向量组(Ⅰ)与自身必等价,即(Ⅰ)$\cong$(Ⅰ).

(2)对称性

若向量组(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ),则(Ⅱ)$\cong$(Ⅰ).

(3)传递性

若向量组(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ),向量组(Ⅱ)$\cong$(Ⅲ),则(Ⅰ)$\cong$(Ⅲ).

二、向量组的线性相(无)关性

1. 线性相关性的定义

①现有 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,若存在着一组不全为零的数组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

成立,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **是线性相关的向量组.**

②现有 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,若使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

成立,只有

$$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0,$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **是线性无关的向量组.**

2. 线性相关性的判定定理

①(**判定定理 1**)s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(或线性无关)的充要条件是对应的齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有非零解(或只有零解).

推论 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关(或线性无关)的充要条件是行列式 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$ (或 $\neq 0$).

②(**判定定理 2**)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(或线性无关)的充要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表出(或没有一个向量可由其余向量线性表出).

3. 一些重要的定理与结论

①包含零向量的向量组必定线性相关.

②包含两个相等向量的向量组必定线性相关.

③若一个向量组线性相关,则加上任意多个向量后,新加向量组仍线性相关.(部分相关,全体必相关)

④一个向量组线性无关,取出其中任何一部分也必线性无关.(全体无关,部分必无关)

⑤任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.(个数大于维数的向量组必线性相关)

⑥一个向量组线性无关,则在相同位置处增加一个分量后得到的新向量组(可称为加长组)仍线性无关.

⑦一个向量组线性相关,则在相同位置处去掉一个分量后得到的新向量组(可称为缩短组)仍线性相关.

⑧若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一地线性表出.

⑨设有向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 中每个向量都可由向量组(Ⅰ)线性表出,且 $t>s$,则向量组(Ⅱ)必线性相关.

⑩若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关,则 $t\leqslant s$.

三、极大无关组与向量组的秩

1. 极大无关组的定义

若向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 是向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组,且向量组(Ⅰ)满足以下两个条件:①向量组(Ⅰ)是线性无关的;②从向量组(Ⅱ)中任取一个向量加到向量组(Ⅰ)中都线性相关,则称向量组(Ⅰ)是向量组(Ⅱ)的一个极大线性无关组,简称为极大无关组.

2. 极大无关组的性质

①一个向量组与它的任一个极大无关组之间可以互相线性表出(即等价).

②一个向量组的任两个极大无关组之间也等价.

③一个向量组的任两个极大无关组所包含向量的个数必相等.

④设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

⑤两个等价(即可以互相线性表出)的向量组,其秩必相等.

3. 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

(**三秩相等定理**)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩.

四、内积与施密特正交化

1. 向量的内积

(1)内积的定义

已知 n 维实向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}},$$

称

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

内积具有以下的性质:

①对称性

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}).$$

②线性性

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),$$
$$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

③正定性

对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，均有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，且

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

(2)向量的长度

实数 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度(或模). 若 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为**单位向量**. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是单位向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$.

(3)两向量的夹角

非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角的余弦为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|}.$$

若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0\left(\text{即 }\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0\text{ 或 }(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\frac{\pi}{2}\right)$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**，记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

2. 标准正交向量组

(1)定义

有 s 个 n 维向量：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\leqslant n)$. 若每一个向量都是非零向量，且每两个向量都正交，则称向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一个**正交向量组**.

正交向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 用内积表示为：

$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0(i,j=1,2,\cdots s;i\neq j)$且$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$.

注 正交向量组必线性无关.

每个向量都是单位向量的正交向量组称为**标准正交向量组(或规范正交向量组)**,即

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq j \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } i=j \text{ 时}\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,s).$$

(2)施密特正交化方法

用施密特正交化方法可将任意一组线性无关的向量组改造成为标准正交向量组(先正交化再单位化).若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组线性无关的向量组,令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,$$

$$\boldsymbol{\beta}_n=\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是一组两两正交的向量组.

再令

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\frac{\boldsymbol{\beta}_i}{|\boldsymbol{\beta}_i|}(i=1,2,\cdots,n),\quad 其中|\boldsymbol{\beta}_i|=\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)},$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 就是一组由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 改造成的标准正交向量组.

(3)正交矩阵

若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**(即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$).

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充要条件是:$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列(行)向量两两正交,且每个列(行)向量都是单位向量(即 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组为 $\mathbf{R}^n$ 中的一组标准正交向量组).

正交矩阵的行列式不是 1 就是 -1. 两个正交矩阵的乘积仍是正交矩阵.

五、n 维向量空间(数学二不作要求)

1. 向量空间及子空间

(1)向量空间

设 V 是 n 维向量的非空集合,且 V 对向量的加法与数乘这两种运算都封闭,则称 V 为**向量空间**.

(2)子空间

设 W 是向量空间 V 的一个非空子集,且 W 中的向量对向量加法与数乘这两种运算也封闭,则称 W 为

V 的一个**子向量空间**,简称为**子空间**.

2. 基与坐标

(1)基与维数

设 V 是向量空间,若 V 中有一组线性无关的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,且 V 中任一个向量都可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出,则称 V 为 $\boldsymbol{n}$ **维的向量空间**,记作 V^n,又称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V^n 中的一组**基**.

(2)坐标

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V^n 中的一组基,则对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V^n$,$\boldsymbol{\alpha}$ 均可由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 唯一地线性表出:

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

称其表出系数 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的**坐标**.坐标往往用列向量来表示:

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}$.

3. 基变换与坐标变换

(1)基变换与两组基间的过渡矩阵

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的两组基,且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \boldsymbol{\eta}_2=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \qquad\qquad\cdots\\ \boldsymbol{\eta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\end{cases}$$

此式称为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的**基变换公式**,称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为由旧基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到新基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的**过渡矩阵**.

过渡矩阵必是可逆矩阵,上面的基变换公式用矩阵及向量符号可表示为

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},$$

其中过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列是 $\boldsymbol{\eta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标列向量.

(2)坐标变换

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一个向量,$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,则有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

此式即为坐标变换公式,式中的 $\boldsymbol{A}$ 即为基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵.

（3）两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V^n 中的一组基，且 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=1$，$(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$，则称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V^n 中的一组**标准正交基（或规范正交基）**.

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基，且有 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 必是一个正交矩阵.

第四章　线性方程组

一、线性方程组的 4 种表示形式

1. 一般表示式

(1)非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

(2)齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

2. ∑记号表示式

(1)非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

(2)齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

3. 矩阵表示式

(1)非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b},$$

式中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$.

(2)齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0},$$

式中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}$ 同上, $\boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

4. 向量表示式

(1)非齐次线性方程组

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b},$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$.

(2)齐次线性方程组

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0},$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 同上, $\boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 是一个 m 维的零向量.

二、线性方程组有解的判别条件

1. 克拉默法则

①若非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，

则方程组有唯一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}=(j=1,2,\cdots,n)$，其中 D_j 是把 D 中第 j 列元素 $(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$ 换成常数项 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 而得到的新行列式.

②若已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，

则该齐次线性方程组只有零解：$x_j=0(j=1,2,\cdots,n)$.

推论　若已知上述齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

2. 非齐次线性方程组有解的判别条件

对于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵）有解的充要条件是：增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的秩与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等，即 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$，且

①当 $r(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n$（未知量的个数）时，方程组有唯一解.

②当 $r(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<n$（未知量的个数）时，方程组有无穷多个解.

3. 齐次线性方程组有非零解的判别条件

对于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵），当 $r(\boldsymbol{A})=n$（未知量的个数）时，方程组只有零解：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$；当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，方程组必有非零解（即有无穷多个解）.

三、齐次线性方程组的解的结构

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的性质

①若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

②对于任意 $k\in\mathbf{R}$，若 $\boldsymbol{X}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $k\boldsymbol{X}_1$ 也都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

2. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一组

解（$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})<n$），且

①$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关；

②$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任一个解都可由它线性表出，则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

3. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的结构

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})<n$，则其通解（即全部解）为：$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\eta}_{n-r(\boldsymbol{A})}$，其中 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 为任意常数.

四、非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构

1. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的性质

①若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，则其差 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 必是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

②若 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一个解，$\boldsymbol{\eta}_1$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1$ 也是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.

2. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构

当 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$ 时，其通解（即全部解）为

$$\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\eta}_{n-r(\boldsymbol{A})},$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一个特解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 为导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 为任意常数.

第五章　矩阵的特征值和特征向量

一、特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值和特征向量的定义

对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,若存在一个数 λ 与一个非零的 n 维向量 $\boldsymbol{X}$,使 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 成立,则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**,称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的**特征向量**.

称行列式

$$f_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**,称

$$f_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**,称 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**.

2. 特征值与特征向量的性质

设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值,则有

① $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$($\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹,记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$),$\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

②$\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量必线性无关，这个性质包含两层内容：

(a)若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两两不等的特征值，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的特征向量，则向量组 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$ 必线性无关.

(b)若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两两不等的特征值，$\boldsymbol{X}_{11},\boldsymbol{X}_{12},\cdots,\boldsymbol{X}_{1m_1};\boldsymbol{X}_{21},\boldsymbol{X}_{22},\cdots,\boldsymbol{X}_{2m_2};\cdots;\boldsymbol{X}_{s1},\boldsymbol{X}_{s2},\cdots,\boldsymbol{X}_{sm_s}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的且各自线性无关的特征向量，则向量组：$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1m_1},X_{21},X_{22},\cdots,X_{2m_2},\cdots,X_{s1},X_{s2},\cdots,X_{sm_s}$ 必线性无关.

3. 可以进一步延伸的公式

设 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\lambda_0\boldsymbol{X}_0$，则以下公式也都成立：

①$(k\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}_0=(k\lambda_0+t)\boldsymbol{X}_0$，$k,t$ 为常数.

②$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}_0=\lambda_0^k\boldsymbol{X}_0$.

③$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_0=f(\lambda_0)\boldsymbol{X}_0$，式中 $f(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式，$f(\lambda_0)$是 λ_0 的同一多项式.

④若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_0=\dfrac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{X}_0$.

⑤$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}_0=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{X}_0$.

⑥$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{\lambda}_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}_0)$.

⑦$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值.

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,则有 $f(\lambda)=0$.

二、矩阵的对角化问题

1. 矩阵可对角化的定义

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,若存在一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}\text{ 为对角矩阵})$$

成立,则称 $\boldsymbol{A}$ **可相似对角化**,简称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**,否则就称 $\boldsymbol{A}$ **不可对角化**.

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化,则对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 n 个主对角线元素必是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值:$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(包括重根),其相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 是$\boldsymbol{A}$ 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量,且 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 线性无关. 即有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$为可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_j=\lambda_j\boldsymbol{X}_j(j=1,2,\cdots,n)$.

2. 矩阵可对角化的有关定理

①n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个

线性无关的特征向量.

②若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个两两不等的特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化.

③设 λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值,其代数重数为 n_i(即 λ_i 是 n_i 重特征值),其几何重数为 m_i(即属于 λ_i 的线性无关的特征向量的最大个数,也是齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中的向量个数,$m_i=n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$),则恒有 $m_i\leqslant n_i$.

④设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两两不等的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s(1\leqslant s\leqslant n)$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是对 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i,都有 $m_i=n_i(i=1,2,\cdots,s)$.

第六章　二次型

一、二次型及其表示法

1. 二次型的定义

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
& f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\
= & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& \qquad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& \qquad\qquad + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\
& \qquad\qquad\qquad + \cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为一个关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**二次型**.

2. 二次型的矩阵表示式

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型对应的矩阵.

3. 二次型的标准形与规范形

(1)实二次型的标准形

若 $$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}$$
$$=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$
$$=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\cdot\boldsymbol{Y},$$

则称平方和

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

为二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的一个**标准形**.

任一个实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过适当的可逆线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 总可化成标准形(即平方和),即实对称矩阵总可与一个对角矩阵合同:

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}=\mathbf{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

(2)实二次型的规范形

形如

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}}z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2$$
$$-\cdots-z_{p+q}^2+0\cdot z_{p+q+1}^2+\cdots+0\cdot z_n^2$$

的标准形称为 $f(\boldsymbol{X})$ 的**规范形**,其中 p 称为**正惯性指数**,q 称为**负惯性指数**.

4. 惯性定理

任意一个实系数的二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 总可经过一个适当的可逆线性替换化成规范形,其规范形是

唯一的,与所选的坐标变换无关,即正平方项个数 p,负平方项个数 q 由原二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 唯一确定.用矩阵的语言来讲:实对称矩阵总可与对角阵

$$\mathbf{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$$

合同,且 $p+q=r(\boldsymbol{A})$,其中 p,q 是不变的量.

5. 用配方法化二次型为标准形

任一个实二次型总可用配方的方法通过一个适当的可逆线性替换化为标准形.

6. 用正交变换法化实二次型为标准形

设 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,由实对称矩阵必可通过正交变换化为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,其主对角线元素必为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值,而正交变换($\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$)中包含了合同变换,因此当作变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 后,二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 即变为

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{Y})&=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y}\\&=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.\end{aligned}$$

任一个实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 总可通过变量间的正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形(平方和),其平方项前的系数必是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

二、正定二次型及其判定

1. 正定二次型

设 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是一个实二次型,若对于任意

$\boldsymbol{X}_0 \neq \boldsymbol{0}, f(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0>0$ 恒成立，则称

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

为**正定二次型**，称对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**.

2. 二次型正定的判定

(1)判定正定性的充分必要条件

①实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定$\Leftrightarrow$正惯性指数 $p=n$.

②实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$ 成立.

③实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

④实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 0.

⑤实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全部大于 0，即

$$|a_{11}|>0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

⑥实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与一个正定矩阵合同.

(2)实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的必要条件

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定$\Rightarrow |\boldsymbol{A}|>0$;$a_{ii}>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

第三部分

概率论与数理统计

第一章　随机事件和概率

一、随机事件的关系及其运算

1. 事件的关系

(1)包含与相等

①包含：若 B 发生必然导致 A 发生，称为 A 包含 B，记作 $A \supset B$.

②相等：若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，则称 $A = B$.

(2)互不相容

若 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 互不相容.

(3)对立

若 $AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称 A 与 B 为对立事件，记为$B = \overline{A}$.

(4)相互独立

①若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立.

②若$\left.\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}\right\}$称 A, B, C 相

互独立.

③性质：A,B；$\overline{A},B$；$A,\overline{B}$；$\overline{A},\overline{B}$ 中任一对相互独立，则其余各对相互独立.

2. 事件的运算

(1)和事件

A 发生或者 B 发生，记为 $A\cup B$.

(2)积事件

A 发生且 B 发生，记为 AB.

(3)差事件

A 发生且 B 不发生，记为 $A-B=A\overline{B}$.

3. 事件运算的规律

(1)交换律

$$A\cup B=B\cup A;$$
$$AB=BA.$$

(2)结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$
$$(AB)C=A(BC).$$

(3)分配律

$$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC);$$
$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C).$$

(4)对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B};$$
$$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{\overline{A}}=A.$$

4. 特殊事件

(1)必然事件

样本空间 Ω 在每次试验中都会发生,故称其为必然事件.

(2)不可能事件

空集($\varnothing$)在每次试验中都不会发生,故称其为不可能事件.

(3)基本事件

由单个样本点构成的单点集$\{w\}$称之为基本事件.

(4)互不相容事件

若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为互不相容事件.

(5)对立事件

若 $AB=\varnothing$,$A\cup B=\Omega$,则称事件 A 与 B 为对立事件.

二、概率及其基本性质

1. 概率

概率是从所有事件构成的集合到实数集的一个映射 P,它必须满足下列条件:

(1)规范性

$$P(\Omega)=1.$$

(2)非负性

对任意事件 A,都有

$$P(A)\geqslant 0.$$

(3)可列可加性

设 $A_k, k=1,2,\cdots$为互不相容事件,则映射 P 满足

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

2. 概率的基本性质

(1)$P(\varnothing)=0$.

(2)有限可加性

设 $A_k, k=1,2,\cdots,n$ 为互不相容事件,则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

(3)对立事件的概率

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

(4)单调性

若事件 $A\subset B$,则

$$P(A)\leqslant P(B).$$

(5)加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

(6)减法公式

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

三、概型、条件概率公式

1. 古典概型

古典概型中，Ω 包含样本点的个数有限，且每个基本事件的概率相等. 即设 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，则有

$$P\{w_i\}=P\{w_j\} \quad (\text{任意 } i,j).$$

若 $A=\{w_{i1},w_{i2},\cdots,w_{ik}\}$，则

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

2. 几何概型

设 Ω 为一区域，其中的分布是均匀的，则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

其中 $m(\cdot)$ 为该区域的测度，如长度、面积、体积等.

3. 条件概率

设 $P(A)>0$，定义条件概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

4. 完备事件组

设 $A_k,k=1,2,\cdots$ 为互不相容事件，且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\Omega$，则称 $A_k,k=1,2,\cdots$ 为**完备事件组**（也可称之为样本空间的一个**可列分割**. 若其中的事件个数为有限个，则此时分割称为**有限分割**）.

5. 全概率公式

设 $A_k, k=1,2,\cdots$为样本空间的一个完备事件组，则

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)P(B\mid A_k).$$

6. 贝叶斯公式

设 $A_k, k=1,2,\cdots$为样本空间的一个完备事件组，则

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)P(B\mid A_k)}$$

7. *n* 重伯努利试验

每次试验中只有事件 A 或 $\overline{A}$ 发生，并对此试验独立地重复 n 次，则称此试验为 ***n* 重伯努利试验**. 在 n 次独立试验中 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n).$$

第二章 一维随机变量及其分布

一、分布函数

1. 定义

设 X 为一随机变量,令

$$F(x)=P(X\leqslant x), x\in\mathbf{R},$$

称此函数为随机变量 X 的**分布函数**.

2. 性质

①单调不减.

②值域:$[0,1]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

③在任意点右连续.

④对任意 $a\in\mathbf{R}$,有

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0),$$

其中 $F(a-0)$为 $F(x)$在 a 点的左极限.

二、离散型随机变量

1. 定义

若随机变量 X 取有限个或可列多个不同的值,则称 X 为**离散型随机变量**.

2. 分布律

(1)分布律的定义

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots.$$

(2)分布律的性质

$$p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots;\ \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1.$$

3. 分布函数的求法

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}P\{x=x_k\}.$$

三、连续型随机变量

1. 定义

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$,存在非负可积函数 $f(x)$,使对任意 x,有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 为**连续型随机变量**,其中函数 $f(x)$称为 X 的概率密度函数,简称概率密度.

2. 概率密度的性质

①$f(x)\geqslant 0$;

②$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$;

③对于任意实数 $x_1,x_2(x_1\leqslant x_2)$，

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x;$$

④若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$.

四、常见随机变量的概率分布

类　型	定　义
0-1 分布	$P(X=1)=p$， $P(X=0)=1-p$ $(0<p<1)$
二项分布 $B(n,P)$	$P\{X=k\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ $(0<p<1,k=0,1,2,\cdots,n)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ $(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$
超几何分布	$P\{X=m\}=\dfrac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ $(N,M,m$ 均为正整数，$0\leqslant n\leqslant N,0\leqslant m\leqslant M,0\leqslant n-m\leqslant N-M)$

续表

类　型	定　义
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,0<p<1)$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(\lambda>0)$
正态分布 $N(\mu,\delta^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(\sigma>0,-\infty<x<+\infty)$

五、随机变量的函数的分布

1. 离散型

$$Y=g(x),P\{Y=y_j\}=\sum_{y_i=g(x_i)}P\{X=x_i\}.$$

2. 连续型

①$Y=g(X)$为单调可导的函数时，设 $X=h(Y)$为其反函数，则

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty))$,

$\beta=\max(g(-\infty),g(+\infty))$.

②对任意函数 $Y=g(X)$,

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}$$

$$=\int_{g(x)\leqslant y} f_X(x)\mathrm{d}x,$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y).$$

第三章　二维随机变量及其分布

一、二维随机变量的联合分布函数

1. 定义

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}.$$

2. 性质

①$F(x,y)$是变量 x 和 y 的单调不减函数；

②$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，$F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；

③$F(x,y)$关于变量 x 和 y 都右连续；

④对任意(x_1,y_1)，$(x_2,y_2)(x_1<x_2,y_1<y_2)$，

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0.$$

二、二维离散型随机变量

1. 定义

若随机变量(X,Y)的取值为有限多对或可列无穷多对时，则称(X,Y)为二维离散型随机变量.

2. 联合分布律

(1)定义

$$P_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}.$$

(2) 性质

$$0\leqslant P_{ij}\leqslant 1;\ \sum_i\sum_j P_{ij}=1.$$

(3) 边缘分布律

$$P_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij};$$

$$P_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}.$$

三、二维连续型随机变量

1. 定义

若存在非负可积函数 $f(x,y)$，使对任意的 x,y，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量，称 $f(x,y)$为(X,Y)的联合概率密度函数.

2. 联合概率密度函数的性质

① $f(x,y)\geqslant 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

③若 $f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

④ $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

四、条件分布

1. 二维离散型随机变量的条件分布律

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\cdots;$$

$$P=(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},j=1,2,\cdots.$$

2. 二维连续型随机变量的条件密度函数

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.\quad (f_X(x)>0)$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.\quad (f_Y(y)>0)$$

五、随机变量的独立性

1. 定义

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数和边缘分布函数，若对所有 x,y，

有

$$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\},$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立.

2. 判别法

(1)用定义

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y).$$

(2)离散型

$$P_{ij}=P_{i}.\,P_{\cdot j}.$$

(3)连续型

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

六、二维常见分布

1. 二维均匀分布

若二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(D)}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $m(D)$表示区域 D 的面积,则称(X,Y)服从区域 D 上的均匀分布,并记为 $X\sim U(D)$.

2. 二维正态分布

①若二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\right.$$

$$\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\Bigg\},$$

其中参数 $\mu_1\in\mathbf{R},\mu_2\in\mathbf{R},\sigma_1>0,\sigma_2>0,\rho\in[-1,1]$，则称二维随机变量$(X,Y)$服从**二维正态分布**，并记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$.

②二维正态分布的边缘密度

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\delta_1^2}},-\infty<x<+\infty.$$

$$f_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\delta_2^2}},-\infty<y<+\infty.$$

七、函数的分布

1. $Z=X+Y$ 的分布

(1)一般公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y,$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

(2)卷积公式

当 x 和 y 相互独立时，设(X,Y)关于 X,Y 的边缘密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y,$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

2. $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设X,Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则

$$F_{\max}(z)=F_X(z)f_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

第四章 随机变量的数字特征

一、数学期望与函数期望

1. 数学期望定义

①若离散型随机变量

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

且级数 $\sum\limits_k x_k p_k$ 绝对收敛，称随机变量 X 的数学期望存在，并称

$$EX = \sum_k x_k p_k$$

为其**数学期望**.

②若连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且积分 $\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，称随机变量 X 的数学期望存在，并称

$$EX = \int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x$$

为其**数学期望**.

2. 函数期望公式

①若随机变量 $X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$，$Y=g(X)$，则

$$EY=\sum_k g(x_k)p_k.$$

②若随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，$Y=g(X)$，则

$$EY=\int_{\mathbf{R}} g(x)f_X(x)\mathrm{d}x.$$

③若随机变量 $(X,Y)\sim p_{ij}$，$Z=g(X,Y)$，则

$$EZ=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

④若随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$，$Z=g(X,Y)$，则

$$EZ=\iint_{\mathbf{R}^2} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

⑤若随机变量 $X\sim\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ p & q \end{pmatrix}$，则

$$EX=pE\xi+qE\eta.$$

3. 性质

①线性性：对任意 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 及随机变量 X,Y，若 EX,EY 存在，则

$$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c.$$

②若随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX, EY 存在，则

$$E(XY)=EX\cdot EY.$$

二、方差、协方差和矩

1. 方差定义

若数学期望 $E(X-EX)^2$ 存在，则称其为随机变量 X 的**方差**，并记为 DX. 同时称 $\sqrt{DX}$ 为随机变量 X 的**标准差**.

2. 协方差

若数学期望 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 存在，则称其为随机变量 X 与 Y 的**协方差**，并记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

3. 性质

①对任意随机变量 X，$DX\geqslant 0$.

②若 C 为固定常数，则 $DC=0$.

③常数 $a\in\mathbf{R}$，则 $D(aX)=a^2DX$.

④$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

⑤若随机变量 X 与 Y 相互独立，则

$$D(X\pm Y)=DX+DY.$$

⑥$DX=EX^2-(EX)^2$.

⑦$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.

⑧$\mathrm{Cov}(aX,Y)=a\mathrm{Cov}(X,Y)$.

⑨$\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$.

⑩若随机变量 X 与 Y 相互独立,则

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0.$$

⑪$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$.

⑫$\mathrm{Cov}(aX+bY,c\xi+d\eta)=ac\mathrm{Cov}(X,\xi)+ad\mathrm{Cov}(X,\eta)+bc\mathrm{Cov}(Y,\xi)+bd\mathrm{Cov}(Y,\eta)$,

其中 a,b,c,d 为常数,X,Y,ξ,η 为随机变量.

4. 常见分布的数字特征

(1)0-1 分布

若 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ q & p\end{pmatrix}$,则

$$EX=p,DX=pq.$$

(2)几何分布

若 $P(X=n)=pq^{n-1}(n=1,2,\cdots)$,则

$$EX=\frac{1}{p},DX=\frac{q}{p^2}.$$

(3)二项分布

若 $Y\sim B(n,p)$,则 $EY=np,DY=npq$.

(4)超几何分布

若 $P(Y=k)=\dfrac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}$,其中 $\max\{0,n-N+M\}\leqslant k\leqslant\min\{M,n\}$,$k$ 为整数,$n-k\leqslant N-M$. 记 $p=\dfrac{M}{N}$,$q=1-p$,则

$$EY=np, DY=npq\frac{N-n}{N-1}.$$

(5)泊松分布

若 $X\sim P(\lambda)$,则

$$EX=\lambda, DX=\lambda.$$

(6)均匀分布

$X\sim U(a,b)$,则

$$EX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

(7)指数分布

若 $X\sim E(\lambda)$,则

$$EX=\frac{1}{\lambda}, DX=\frac{1}{\lambda^2}.$$

(8)正态分布

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$EX=\mu, DX=\sigma^2.$$

三、相关系数

1. 定义

若 $DX>0, DY>0$,则称 $\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$ 为随机变量 X 与 Y 的**相关系数**,并记为 ρ_{XY}. 若 $\rho_{XY}=1$,则称 X 与 Y 正相关;若 $\rho_{XY}=-1$,则称 X 与 Y 负相关;若 $\rho_{XY}=0$,则称

X 与 Y 不相关.

2. 性质

①$|\rho_{XY}|\leqslant 1$.

②$\mathrm{Cov}^2(X,Y)\leqslant DX\cdot DY$.

③$|E(XY)|\leqslant\sqrt{EX^2\cdot EY^2}$.

④若随机变量 X 与 Y 相互独立,则 $\rho_{XY}=0$.

⑤若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,则其中的参数 ρ 为其相关系数,且 X 与 Y 相互独立的充分必要条件为 $\rho=0$.

⑥若 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ q_1 & p_1\end{pmatrix}$, $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ q_2 & p_2\end{pmatrix}$, $p_k+q_k=1(k=1,2)$,则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件为 $\rho_{XY}=0$.

第五章　大数定律和中心极限定理

一、切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望与方差存在，则对任意实数 $\varepsilon>0$，下面的不等式成立：

$$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}, \text{或}$$

$$P(|X-EX|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2},$$

并称之为**切比雪夫不等式**.

二、大数定律

1. 切比雪夫大数定律

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为相互独立的随机变量序列，其数学期望和方差都存在并且相等，分别记为 μ 和 σ^2，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

2. 辛钦大数定律

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为相互独立同分布的随机变

量序列，且其数学期望存在，记为 μ，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

3. 伯努利大数定律

设随机变量 $n_A \sim B(n,p)$，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

三、中心极限定理

1. 列维—林德伯格定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为相互独立同分布的随机变量序列，且其数学期望和方差都存在，分别记为 μ 和 σ^2. 则对任意的 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\ \delta} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

2. 棣莫弗—拉普拉斯定理

设随机变量 $\eta_n (n=1,2,\cdots) \sim B(n,p)$，则对任意的 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

第六章　数理统计的基本概念

一、统计量的样本数字特征及极限

1. 样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k .$$

2. 样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2 .$$

3. r 阶样本原点矩

$$A_r=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^r .$$

4. r 阶样本中心矩

$$B_r=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^r .$$

二、统计分布与抽样分布定理

1. χ^2 分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从 $N(0,1)$，令

$Y=\sum_{k=1}^{n}X_k^2$，称随机变量 Y 的分布为**自由度为 n 的 χ^2**

分布,并记为 $Y\sim\chi^2(n)$. 其数字特征 $EY=n, DY=2n$.

2. t 分布

设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$ 且相互独立,令 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$,称随机变量 T 的分布为**自由度为 n 的 t 分布**,并记为 $T\sim t(n)$. 记随机变量 T 的密度函数为 $f_n(x)$,则 $f_n(x)$满足:

①偶函数;

②$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. F 分布

设随机变量 $X\sim\chi^2(m), Y\sim\chi^2(n)$ 且相互独立. 令 $F=\dfrac{X/m}{Y/n}$,称其分布为**自由度为(m,n)的 F 分布**,记为 $F\sim F(m,n)$,由定义易知$\dfrac{1}{F}\sim F(n,m)$.

4. 正态总体的几种常见统计量的分布

(1)一维正态总体情形

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $X\sim N(\mu,\delta^2)$的容量为 n 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,S^2 为样本方差,则

①$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\delta/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

②$Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\delta^2}\sim\chi^2(n-1)$.

③随机变量 Y 与 Z 相互独立,即 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

④$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

(2)二维正态总体情形

设 $X_1,X_2,\cdots X_m$ 为来自正态总体 $X\sim N(\mu_1,\delta_1^2)$ 的容量为 m 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,S_1^2 为样本方差;$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自正态总体 $Y\sim N(\mu_2,\delta_2^2)$ 的容量为 n 的简单随机样本,$\overline{Y}$ 为样本均值,S_2^2 为样本方差,且两总体相互独立,则:

①$Z=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\delta_1^2}{m}+\dfrac{\delta_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$.

②$\dfrac{(m-1)S_1^2}{\delta_1^2}+\dfrac{(n-1)S_2^2}{\delta_2^2}\sim\chi^2(m+n-2)$.

③$F=\dfrac{S_1^2\cdot\delta_2^2}{S_2^2\cdot\delta_1^2}\sim F(m-1,n-1)$.

④当 $\delta_1^2=\delta_2^2=\delta^2$ 时,有

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

其中　$S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$.

第七章 参数估计

一、矩估计法

估计公式：

$$\hat{\mu}_k = A_k,$$

其中 μ_k 为总体的 k 阶原点矩，A_k 为样本 k 阶原点矩.

二、最大似然估计法

1. 样本似然函数

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta).$$

2. 最大似然估计值与最大似然估计量

若 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max L\{(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)\}$，则称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为参数 θ 的最大似然估计值，而称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为参数 θ 的最大似然估计量.

3. 由矩法和最大似然估计法得到的正态总体参数的估计量

$$\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

4. 评价估计量的标准

(1)无偏性

①定义:若 $E(\hat{\theta})=\theta$,称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计量**.

②结论:因为 $E(\overline{X})=\mu$,$E(S^2)=\delta^2$,所以 $\overline{X}$ 是样本均值 μ 的无偏估计量,样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计量.

(2)有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$都是 θ 的无偏估计量,若对任意 $\theta\in\Theta$,有 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$,且至少对于某一个 $\theta\in\Theta$,上式中不等号成立,则称 **$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ 较 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ 有效.**

(3)一致性

若对于任意 $\theta\in\Theta$ 都满足:对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**一致估计量.**

三、置信区间

设总体 X 的分布律中含有未知参数 θ,来自该总体的几个样本为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,$0<\alpha<1$.若存在统计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$,使得 $P(\hat{\theta}_1\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2)=1-\alpha$,则称 $1-\alpha$ 为**置信度**,$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为 θ 的**置信区间.**

四、常用单个正态总体参数的置信区间表

参数	μ		δ^2
条件	已知 δ^2	未知 δ^2	μ 未知
置信区间	$\left(\overline{X}-\frac{\delta}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\delta}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

附 录

初等数学

初等代数

1. 乘法公式与因式分解

①$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

②$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$；

③$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$；

④$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

⑤$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$；

⑥$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 为正整数）.

2. 一元二次方程

（1）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

（2）根与系数之间的关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

3. 不等式

①$a^2+b^2\geqslant 2ab$；

②$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$　$(a, b \in \mathbf{R}^+)$；

③$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$　$(a>0, b>0, c>0)$；

④柯西不等式$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$；

⑤$|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$；

⑥$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$　$(a_i>0, i=1, 2, \cdots, n)$.

4. 指数

①$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

②$a^m \div a^n = a^{m-n}$；

③$(a^m)^n = a^{mn}$；

④$(ab)^m = a^m b^m$；

⑤$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$；

⑥$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$；

⑦$a^0 = 1 (a>0)$.

5. 对数($\log_a N, a>0, a \neq 1$)

①$N = a^{\log_a N}$；

②$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$；

③$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$；

④$\log_a (M^n) = n \log_a M$；

⑤$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$;

⑥换底公式：$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$;

⑦$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$.

6. 数列

(1)等差数列

①通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

②前 n 项的和

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d.$$

(2)等比数列

①通项公式

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

②前 n 项的和

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1, \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1. \end{cases}$$

(3)常用数列前 n 项的和

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2;$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. 排列、组合与二项式公式

(1)排列数

①$A_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$(元素不可重复的排列)

②n^k(元素可以重复的排列)

③$n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$(全排列)

(2)组合数

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!}.$$

(3)二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k,n\in\mathbf{N}.$$

初等几何

1. 三角形的面积

①$S=\frac{1}{2}ab\sin C$.（若 $C=\frac{\pi}{2}$，即直角三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ab$）

②$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 a,b,c 为其三边长，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

2. 梯形的面积

$S=\frac{1}{2}(a+b)h$，其中 a,b 为上下底，高为 h.

3. 圆（半径为 r）

①圆周长

$$l=2\pi r;$$

②圆弧长

$$l=r\theta,$$

其中 θ 为圆弧所对的圆心角（单位为弧度）.

③扇形面积

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta,$$

其中 θ 为圆心角.

4. 旋转体

(1)圆柱(底面圆半径为 r,柱高为 h)

①侧面积 $=2\pi rh$;

②全面积 $=2\pi r(r+h)$;

③体积 $=\pi r^2 h$.

(2)圆锥(底面圆半径为 r,高为 h,母线长为 $l=\sqrt{r^2+h^2}$)

①侧面积 $=\pi rl$;

②全面积 $=\pi r(l+r)$;

③体积 $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(3)圆台(上、下底面圆半径为 r_1,r_2,高为 h,母线长为 $l=\sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2}$)

①侧面积 $=\pi(r_1+r_2)l$;

②全面积 $=\pi r_1(l+r_1)+\pi r_2(l+r_2)$.

③体积 $=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$.

(4)球(半径为 r)

①全面积 $=4\pi r^2$.

②体积 $=\frac{4}{3}\pi r^3$.

三角函数

1. 和差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta};$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

2. 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

3. 倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha};$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2 \alpha-1}{2\cot \alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin \alpha-4\sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3 \alpha-3\cos \alpha;$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan \alpha-\tan^3 \alpha}{1-3\tan^2 \alpha}.$$

4. 半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}};$$

$$\tan \frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}=\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}=\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha};$$

$$\cot \frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}}=\frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}=\frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha}.$$

5. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

6. 余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

7. 反三角函数性质

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x;$$

$$\arctan x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot} x.$$

平面解析几何

1. 两点间的距离公式

设坐标平面内任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，则这两点的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

特别地，点 $P(x, y)$ 到原点距离为 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. 直线

(1)方程表示式

①一般式

$$Ax + By + C = 0.$$

②点斜式

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

③两点式

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

④斜截式

$$y = kx + b.$$

⑤截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(2)点到直线的距离公式

设坐标平面内点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 l:$Ax+By+C=0$,点 P 到直线 l 的距离为 d,则有

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. 二次曲线

(1)圆

①圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

其中 (a,b) 为圆心坐标,r 为半径.

②圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

其中 $D^2+E^2-4F>0$,圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,半径为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

(2)椭圆

①标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,a>b>0.$$

②焦点坐标

$$F(\pm c,0),$$

其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

③准线方程

$$x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

(3)双曲线

①标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

②焦点坐标

$$F(\pm c,0),$$

其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

③渐近线方程

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

④准线方程

$$x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

(4)抛物线

①标准方程

$$y^2=2px(p>0).$$

②焦点坐标

$$F\left(\frac{p}{2},0\right).$$

③切线

$$y_1y=p(x+x_1)，切点(x_1,y_1).$$

4. 极坐标与直角坐标

① $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases}$

② $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0). \end{cases}$