Estructura de Datos: Práctica 1

Andrés Herrera Poyatos

Características del ordenador

La práctica ha sido realizada en un ordenador portátil con procesador Intel i5 a 2.5 Ghz y 8GB de memoria RAM. El sistema operativo utilizado es Ubuntu 14.04.1 LTS mientras que el compilador es g++.

Organización de la práctica

Se adjunta un fichero comprimido con una carpeta para cada ejercicio. Cada ejercicio se organiza como sigue:

- Código **.cpp** del algoritmo en cuestión.
- Script de bash **ejecuciones.sh** que ejecuta un programa dado un número de veces indicado en el script. Además, genera un archivo .dat con los datos obtenidos en la ejecución.
- Carpeta **Datos** donde se almacenan los archivos .dat generados. Contiene una subcarpeta Trabajo con los datos utilizados en el trabajo.
- Script de bash **plot.sh** con el que se crea una imagen para los datos obtenidos utilizando gnuplot.
- Carpeta **Imagenes** donde se almacenan las imágenes .png generados por plot.sh. Contiene una subcarpeta Trabajo con las imágenes utilizadas en el trabajo.
- Script de bash **ejecutar_ejercicio_i.sh** desde el cual se genera el ejecutable con el algoritmo, llama a ejecuciones.sh para su correspondiente ejecución y creación del fichero .dat y posteriormente llama a plot.sh para generar la imagen correspondiente.

Cada ejercicio tiene su apartado en el pdf con su corresponiente enunciado y solución.

Nota: Se ha utilizado el shell bash en lugar de C-shell.

Ejercicio 1: Ordenación de la burbuja

El siguiente código realiza la ordenación mediante el algoritmo de la burbuja:

```
void ordenar(int *v, int n) {
    for (int i=0; i<n-1; i++)
        for (int j=0; j<n-i-1; j++)
            if (v[j]>v[j+1]) {
                int aux = v[j];
                v[j] = v[j+1];
                v[j+1] = aux;
            }
}
```

Calcule la eficiencia teórica de este algoritmo. A continuación replique el experimento que se ha hecho antes (búsqueda lineal) con este nuevo código. Debe:

- Crear un fichero ordenacion.cpp con el programa completo para realizar una ejecución del algoritmo.
- Crear un script ejecuciones_ordenacion.csh en C-Shell que permite ejecutar varias veces el programa anterior y generar un fichero con los datos obtenidos.
- Usar gnuplot para dibujar los datos obtenidos en el apartado previo.

Los datos deben contener tiempos de ejecución para tamaños del vector 100, 600, 1100, . . . , 30000. Pruebe a dibujar superpuestas la función con la eficiencia teórica y la empírica. ¿Qué sucede?

Cálculo de la eficiencia teórica:

El algoritmo de la burbuja es un algoritmo de ordenación sencillo, luego calcularemos exactamente el número de operaciones realizadas para su posterior exposición en una gráfica. En primer lugar, es claro que el siguiente código se realiza en tiempo constante:

```
if (v[j]>v[j+1]) { // Comparación y acceso a los elementos v[j] y v[j+1]. 3 operaciones.
    int aux = v[j]; // Asignación y acceso al elemento v[j]. 2 operaciones
    v[j] = v[j+1]; // Asignación y acceso a los elementos v[j] y v[j+1]. 3 operaciones.
    v[j+1] = aux; // Asignación y acceso al elemento v[j+1]. 2 operaciones
}
```

En total, 10 operaciones. Por cada iteración del bucle interno se realizan las 10 operaciones anteriores (en el peor de los casos) más la comparación, el acceso a un vector y el incremento correspondientes, 13 operaciones en total. Por otro lado, por cada iteración del bucle externo se realizan anlálogamente las 3 operaciones mencionadas más la asignación j=0 junto con la ejecución del bucle interno. Se debe sumar la asignación inicial i=0 al resultado de aunar lo anterior. Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función que dado el número de datos nos proporciona el número de operaciones realizadas, utilizando lo anterior podemos calcularla como sigue:

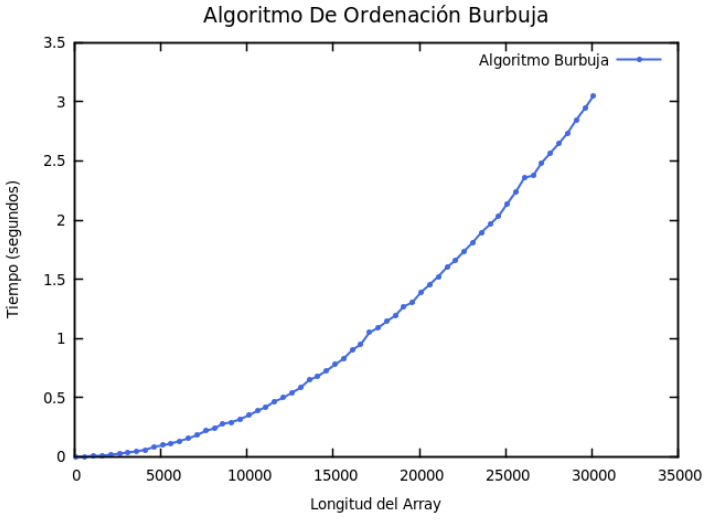
$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 4 \sum_{j=0}^{n-i-1} 13 = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}(4 + 13(n-i)) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 4 + 13\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) =$$

$$1+4n+13\left(\sum_{i=0}^{n-1} n - \sum_{i=0}^{n-1} i\right) = 1+4n+13(n^2-\frac{n(n-1)}{2}) = 1+4n+13\frac{2n^2-n^2+n}{2} = 1+13\frac{n^2+105n}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

De donde es claro que $T \in O(n^2)$ y **el algoritmo de la burbuja es cuadrático**.

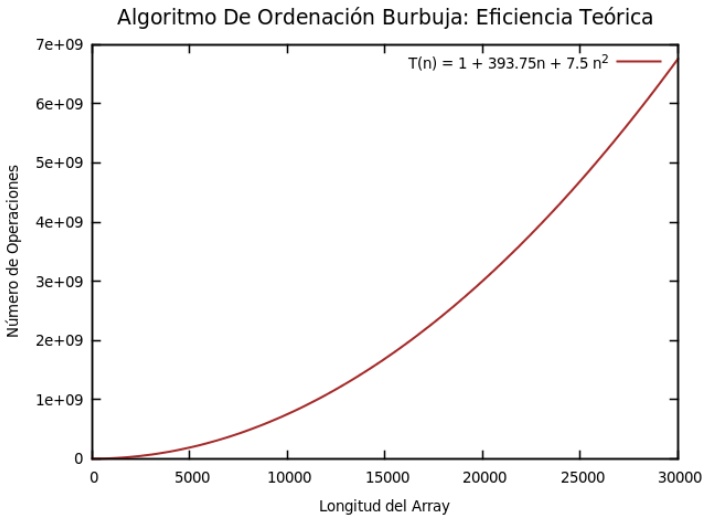
Resultados empíricos:

Se muestra a continuación una gráfica con los resultados obtenidos. Es claro que la evolución del tiempo en función del número de datos se rige bajo una ley cuadrática aunque la pendiente de la misma es suave dada la velocidad del ordenador al ejecutar una operación.



Si dibujamos la función obtenida para la eficiencia teórica con gnuplot se ve claramente la parábola característica de un algoritmo cuadrático. La forma de las dos imágenes presentadas es prácticamente equivalente. La

única diferencia es el factor de conversión de operaciones a segundos más el tiempo utilizado por el sistema operativo en aspectos que no tienen que ver con la ejecución del algoritmo.

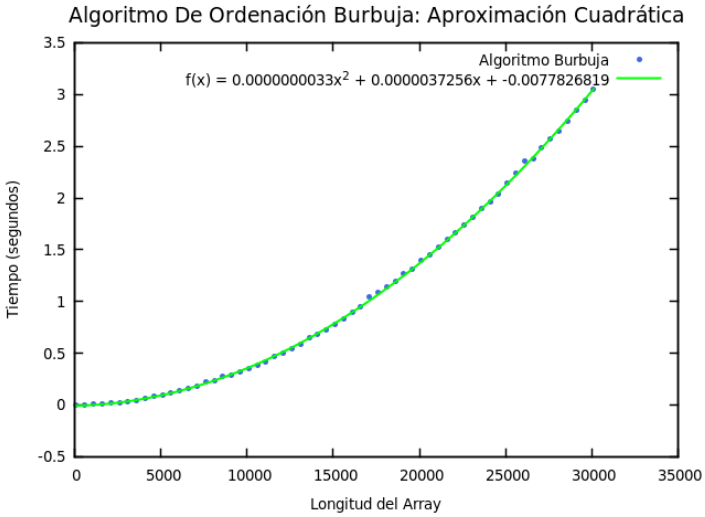


Ejercicio 2: Ajuste en la ordenación de la burbuja

Replique el experimento de ajuste por regresión a los resultados obtenidos en el ejercicio 1 que calculaba la eficiencia del algoritmo de ordenación de la burbuja. Para ello considere que $f(x)$ es de la forma $ax^2 + bx + c$.

Resultados:

A continuación se muestra la regresión cuadrática calculada frente a los datos obtenidos.



La **desviación media** del ajuste cuadrático responde a:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2}{n}} = 0.0138602$$

Como vemos esta es mínima en relación con los valores de tiempo presentados en la ejecución. El algoritmo burbuja implementado presenta un comportamiento prácticamente constante pues la única posible variación en el número de operaciones realizadas consiste en el número de veces que se entre en el if, en cuyo caso se realiza un intercambio entre dos componentes del vector. Por ello en la gráfica el ajuste prácticamente coincide con casi todos los puntos.

Ejercicio 3: Problemas de precisión

Junto con este guión se le ha suministrado un fichero ejercicio_desc.cpp. En él se ha implementado un algoritmo. Se pide que:

- Explique qué hace este algoritmo.
- Calcule su eficiencia teórica.
- Calcule su eficiencia empírica.

Si visualiza la eficiencia empírica debería notar algo anormal. Explíquelo y proponga una solución. Compruebe que su solución es correcta. Una vez resuelto el problema realice la regresión para ajustar la curva teórica a la empírica.

Explicación del algoritmo

El algoritmo proporcionado consiste en una **busqueda binaria** implementada de forma iterativa. La busqueda binaria permite encontrar un elemento en un vector verificando que las componentes del mismo mantengan una relación de orden total y que se encuentre ordenado a través de dicha relación. En este caso se implementa el algoritmo para un vector de enteros.

ALGORITMO: Búsqueda Binaria

Para cada iteración *inf* representa la posición donde empieza el subvector en el que se realiza la búsqueda y *sup* la posición donde finaliza. El proceso para cada iteración es el siguiente:

1. Se toma el elemento que se encuentra en la mitad del subvector $\{inf, \ldots, sup\}$.
2. Si dicho elemento es el buscado se devuelve su posición, $\frac{inf+sup}{2}$. En caso contrario:
   a) Si es menor que el elemento buscado, se busca en el subvector $\{\frac{inf+sup}{2}+1, \ldots, sup\}$.
   b) Si es mayor que el elemento buscado, se busca en el subvector $\{inf, \ldots, \frac{inf+sup}{2}-1\}$.
3. Se repite el proceso hasta encontrar el valor pedido o bien cuando inf > sup, en cuyo caso el elemento a buscar no se encuentra en el vector y se devuelve -1.

Cálculo de la eficiencia teórica

El peor de los casos para la búsqueda binaria es aquel en el que nunca encuentra el elemento deseado. Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función tal que dado el número de elementos del vector nos proporciona la eficiencia del algoritmo en el caso de que no se encuentre un elemento dado. Es claro que $T(1) = O(1)$ pues solo se comprueba dicho elemento. Para $n > 1$ podemos expresar T de forma recursiva:

$$T(n) = 1 + T(n/2)$$

La explicación es sencilla, para un vector de tamaño n se realiza una comprobación y se aplica el algoritmo en un subvector de tamaño la mitad. Por tanto, basta resolver la anterior ecuación recurrente para obtener

la eficiencia teórica. Tomando $m = log_2 n$ se tiene que $T(n) = T(2^m) = 1 + T(2^{m-1})\ \forall n > 1$. Denotando $x_m = T(2^m)\ \forall m \in \mathbb{N}$, basta resolver la siguiente sucesión recurrente:

$$x_m = 1 + x_{m-1}\ \forall m > 0,\ x_0 = 1$$

El resultado de la misma es evidente:

$$x_m = m\ \forall m \in \mathbb{N}$$

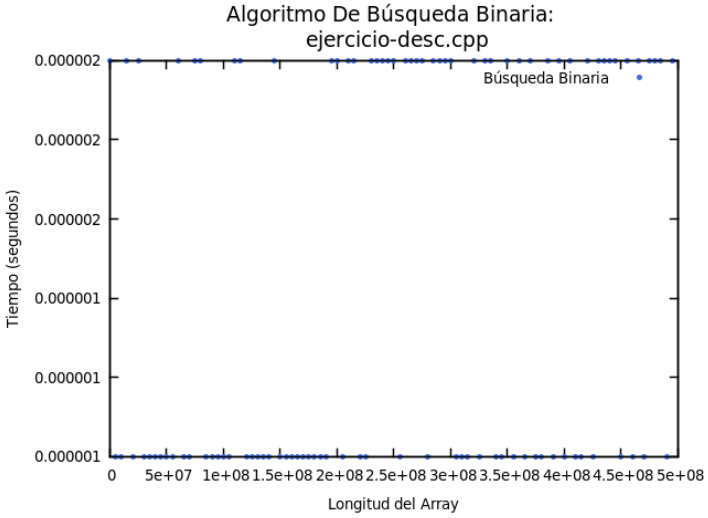
Este hecho se prueba de forma sencilla por inducción. Para $m = 0$ se tiene que $x_0 = T(2^0) = T(1) = 1$. Supesto cierto el resultado para $m \in \mathbb{N}$ se tiene $x_{m+1} = 1 + x_m = 1 + m$ como se quería. Volviendo a la función T:

$$T(n) = T(2^m) = x_m = m = log_2 n\ \forall n \in \mathbb{N}$$

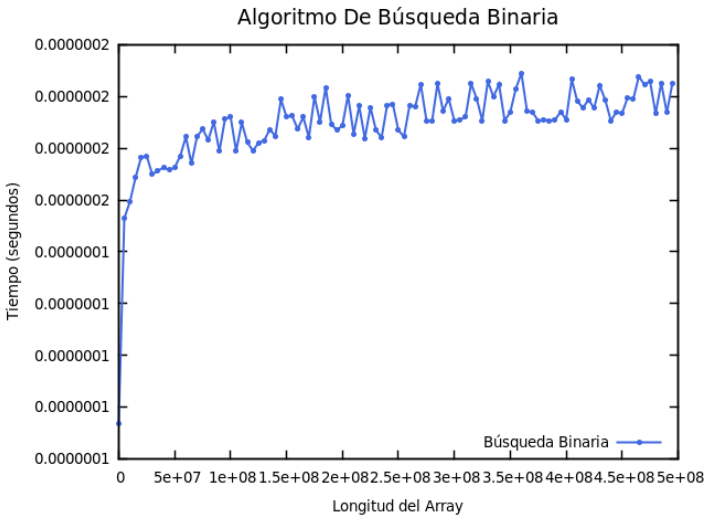
Por tanto, **la búsqueda binaria es un algoritmo logarítmico**.

Cálculo de la eficiencia empírica

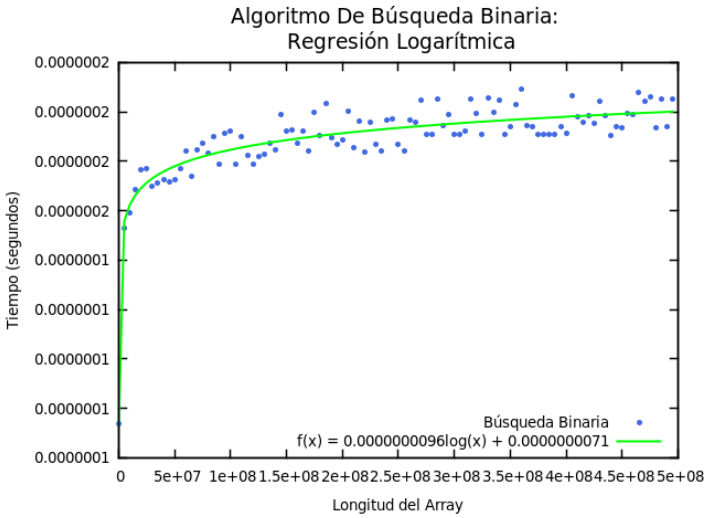
Tomamos como tamaño inicial del vector 1000. Se realizan ejecuciones desde este tamaño hasta 500000000 aumentando de 5000000 en 5000000. Si realizamos el proceso de cálculo de la eficiencia empírica para el código ejercicio_desc.cpp con la búsqueda binaria se obtiene el siguiente resultado:



Se puede observar un valor casi nulo con una variación de 10^{-6}. La razón es bien sencilla: la precisión del clock de c++ es muy limitada. Puesto que la búsqueda binaria es muy rápida por ser logarítmica, el tiempo tomado tiende a 0 y clock no es capaz de medirlo. Para resolver este problema he creado un nuevo código **busqueda_binaria.cpp** que contiene el algoritmo dado y lo ejecuta 10000 veces, calculando el tiempo como la media de las 10000 reiteraciones. De esta forma sí se consigue medir el tiempo con clock para las 10000 ejecuciones. Se muestran los resultados en la siguiente imagen:



La tendencia logarítmica es clara. Si aplicamos una regresión logarítmica a los datos se obtiene el siguiente resultado:



En este caso la **desviación media** del ajuste logarítmico responde a:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2}{n}} = 5.747610^{-9}$$

Siendo un valor en cierta medida importante en comparación con el valor de los datos tomados. Esta desviación se debe al poco tiempo de ejecución de la búsqueda binaria, lo que produce que cualquier operación del sistema operativo afecte gravemente a los resultados.

Ejercicio 4: Mejor y peor caso

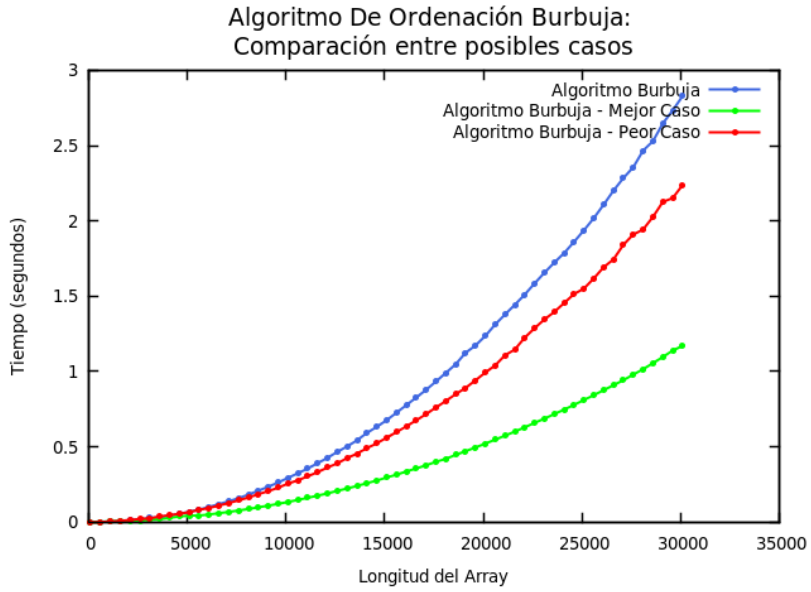
Retome el ejercicio de ordenación mediante el algoritmo de la burbuja. Debe modificar el código que genera los datos de entrada para situarnos en dos escenarios diferentes:

- El mejor caso posible. Para este algoritmo, si la entrada es un vector que ya está ordenado el tiempo de cómputo es menor ya que no tiene que intercambiar ningún elemento.
- El peor caso posible. Si la entrada es un vector ordenado en orden inverso estaremos en la peor situación posible ya que en cada iteración del bucle interno hay que hacer un intercambio.

Calcule la eficiencia empírica en ambos escenarios y compárela con el resultado del ejercicio 1.

Cálculo de la eficiencia empírica

Nótese que de forma teórica el algoritmo sigue siendo $O(n^2)$ en cualquier caso. La única variación entre los posibles casos es el hecho de entrar o no al condicional que intercambia dos componentes del vector. Por ello, la diferencia entre los casos no es excesiva. Se muestra en la siguiente imagen los resultados obtenidos:



Es sorprendente que el supuesto peor caso obtenga mejores resultados que un caso arbitrario. La razón es la siguiente: en el peor caso siempre se ejecutan las mismas instrucciones pues el algoritmo siempre entra en el bloque condicional para intercambiar dos componentes. Por tanto, durante la ejecución del algoritmo las instrucciones que se ejecutan con el condicional pasan a la memoria caché por su uso asiduo, librándose del acceso a memoria ralentizaría el proceso. El caso arbitrario no sufre de esta optimización al no ejecutarse siempre el bloque condicional. Debido a este hecho realiza más accesos a memoria que el peor caso, obteniendo como consecuencia los peores resultados.

Ejercicio 5: Dependencia de la implementación

Considere esta otra implementación del algoritmo de la burbuja:

```
void ordenar(int *v, int n) {
    bool cambio=true;
    for (int i=0; i<n-1 && cambio; i++) {
        cambio=false;
        for (int j=0; j<n-i-1; j++)
            if (v[j]>v[j+1]) {
                cambio=true;
                int aux = v[j];
                v[j] = v[j+1];
                v[j+1] = aux;
            }
    }
}
```

En ella se ha introducido una variable que permite saber si, en una de las iteraciones del bucle externo no se ha modificado el vector. Si esto ocurre significa que ya está ordenado y no hay que continuar. Considere ahora la situación del mejor caso posible en la que el vector de entrada ya está ordenado. ¿Cuál sería la eficiencia teórica en ese mejor caso? Muestre la gráfica con la eficiencia empírica y compruebe si se ajusta a la previsión.

Cálculo de la eficiencia teórica

Si el vector está ordenado de menor a mayor se tiene que el algoritmo de ordenación por burbuja no realiza ningún intercambio. Por tanto, la variable *cambio* permanece siempre con el valor *false* y a la primera iteración se finaliza el algoritmo. Consecuentemente, es claro que el algoritmo se comporta de forma lineal en el mejor caso. Matemáticamente, realizando el mismo proceso que en el ejercicio 1, sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función que nos proporciona para un número de datos ordenados, n, el número de operaciones que realiza el algoritmo burbuja, $T(n)$. Podemos expresar $T(n)$ como:

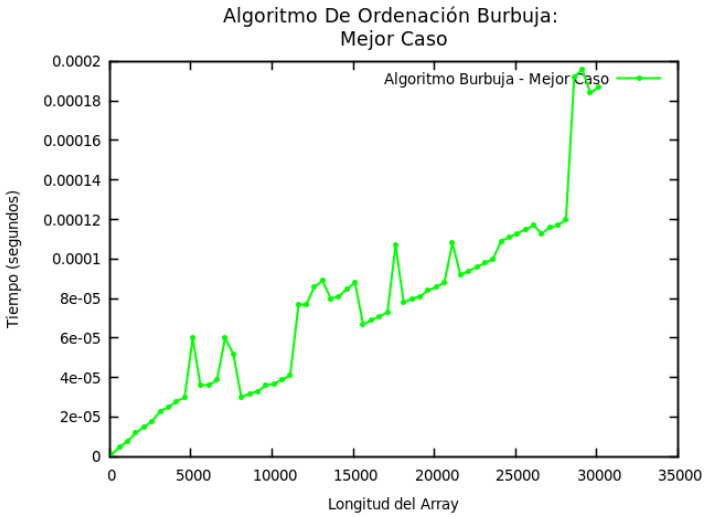
$$T(n) = 1 + 5 + 1 + \sum_{j=0}^{n} 3 = 3n + 7$$

De donde $T \in O(n)$.

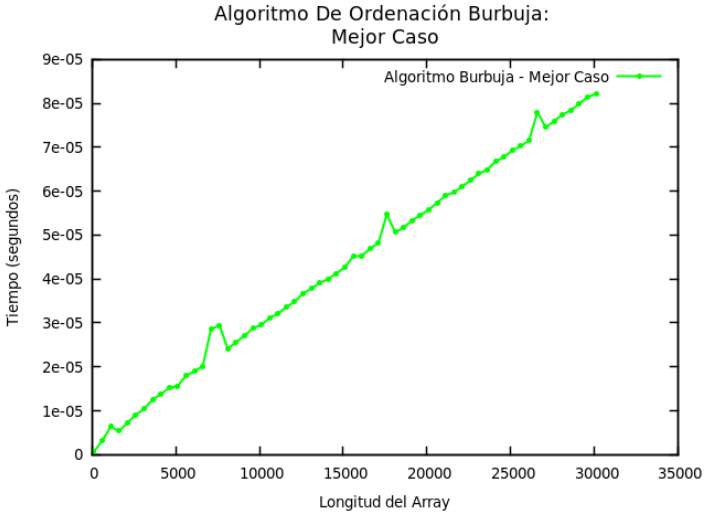
Resultados empíricos

Repitiendo los experimentos con este nuevo código solo se nota una mejoría en el mejor caso. Se adjunta un **.cpp** por cada caso posible con los otros archivos eplicados al inicio.

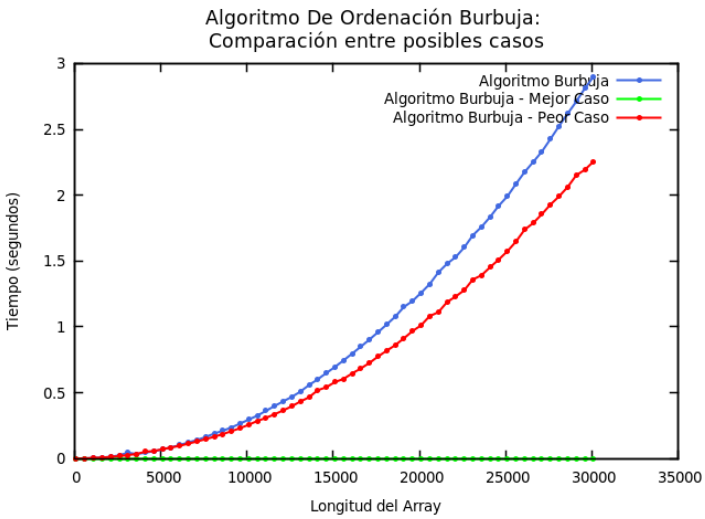
En primer lugar se muestran los resultados empíricos obtenidos al ejecutar el nuevo algoritmo para el mejor caso. Los resultados indican una enorme mejoría en cuanto al tiempo. Además, hay severas variaciones en la imagen tal y como pasaba con la búsqueda binaria pero de forma menos drástica.



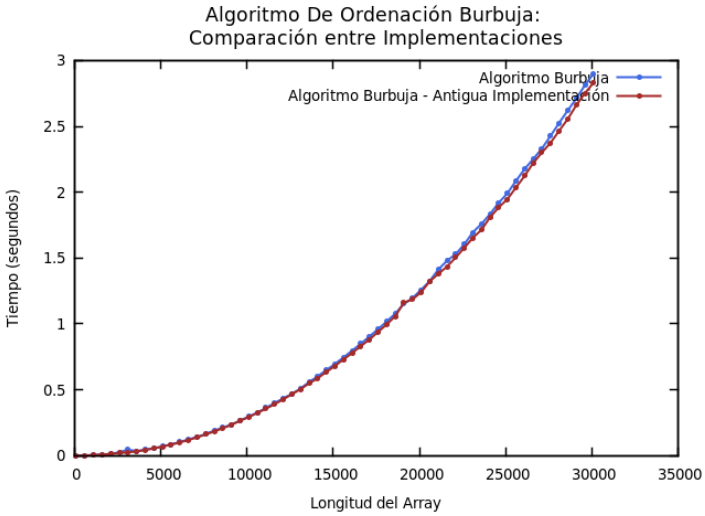
Para obtener unos datos más limpios se aplica el criterio utilizado en la búsqueda binaria que consiste en repetir una ejecución una serie de veces y proporcionar el tiempo medio de la misma:



El orden lineal ya es claro. Se ha reducido la varianza de los datos como se pretendía. Con estos nuevos datos se compara el algoritmo con peor caso y caso promedio en la siguiente imagen:



Como se ve el tiempo del mejor caso se vuelve prácticamente nulo en comparación. El peor caso sigue ganando a un caso promedio a pesar de la optimización del algoritmo por las razones expuestas en el apartado anterior. Cabe preguntarse si el nuevo algoritmo es mejor que el antiguo en un caso arbitrario. El resultado de su comparación se muestra en la siguiente imagen en la que vemos un comportamiento prácticamente similar en ambos. El tiempo que el nuevo algoritmo gana en caso que que en determinado momento el vector ya esté ordenado lo pierde por las comparaciones y asignaciones extras del código.



Ejercicio 6: Influencia del proceso de compilación

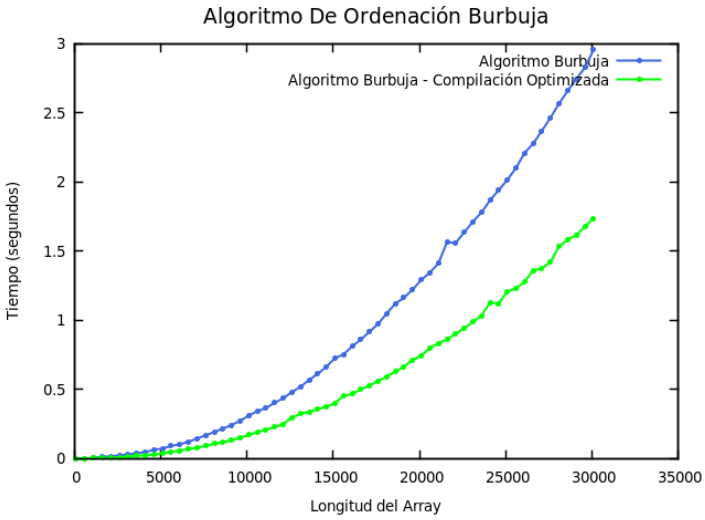
Retome el ejercicio de ordenación mediante el algoritmo de la burbuja. Ahora replique dicho ejercicio pero previamente deberá compilar el programa indicándole al compilador que optimice el código. Esto se consigue así:

```
g++ -O3 ordenacion.cpp -o ordenacion_optimizado
```

Compare las curvas de eficiencia empírica para ver cómo mejora esto la eficiencia del programa.

Resultados Empíricos

Se utiliza el código del **ejercicio 5** para el algoritmo de ordenación burbuja. Los resultados obtenidos son los siguientes:



Es clara la amplia mejora que proporciona la optimización del código por parte del compilador. Se obtienen tiempos que son casi la mitad con respecto a los iniciales. Sin embargo, la optimización del código solo afecta a la eficiencia del mismo desde el punto de vista de operaciones por segundo, el algoritmo sigue siendo cuadrático.

Ejercicio 7: Multiplicación matricial

Implemente un programa que realice la multiplicación de dos matrices bidimensionales. Realice un análisis completo de la eficiencia tal y como ha hecho en ejercicios anteriores de este guión.

He implementado dos algoritmos para este apartado:

- Algoritmo Clásico para el producto de matrices
- Algoritmo de Strassen

Algoritmo Clásico para el producto de matrices

Sea $n, m, k \in \mathbb{N}$, y sean $A \in \mathbb{M}_{nxk}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{kxm}(\mathbb{R})$ dos matrices. Entonces, se define el producto de A y B como:

$$c_{ij} = (A.B)_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}.b_{rj} \ \forall i, j \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq n \ y \ 1 \leq j \leq m$$

Nótese que la matriz resultante C pertenece a $\mathbb{M}_{nxm}(\mathbb{R})$.

La implementación clásica del producto de matrices consiste en respetar la definición del mismo. El código de dicha implementación se muestra a continuación:

```
Matriz productoMatrices(Matriz A, Matriz B, int n, int k, int m){
    Matriz C(n,m);

    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0; j < m; j++){
            for (int r = 0; r < k; r++){
                C[i][j] += A[i][r] * B[r][j]; // Tiempo constante, O(1)
            }
        }
    }
    return C;
}
```

La eficiencia del mismo es evidente. Se realizan tres bucles encadenados con una operación constante al final del mismo. Sea $T : \mathbb{N}x\mathbb{N}x\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función que nos proporciona para una terna de dimensiones de las matrices A y B, (n, k, m), la eficiencia del algoritmo, $T(n, k, m)$. Podemos expresar $T(n, k, m)$ como:

$$T(n, k, m) = \sum_{i=0} n - 1 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{r=0} k - 1O(1) = O(nmk)$$

Por tanto , $T \in O(nmk)$. En la práctica se aplicará el algoritmo para matrices cuadradas para poder así ver la evolución del tiempo de cómputo en fución de su dimensión. En este caso particular es evidente que el algoritmo resulta ser **cúbico** y por tanto su ejecución será potencialmente inabordable para matrices de grandes dimensiones.

Algoritmo de Strassen

El algoritmo de Strassen es un algoritmo recursivo para el producto de matrices cuadradas. Fue el primer algoritmo en bajar la eficiencia teórica del producto matricial a un orden menor que O(n^3), en particular, O($n^{log_2 7}$). No solo supuso una mejoría en el cálculo de producto de matrices de gran dimensión sino que

además inicio una investigación en torno a la búsqueda de algoritmos que mejorasen la eficiencia obtenida a la vista de que esto era factible. Esto permitió el descubrimiento de algoritmos como el de Coppersmith-Winograd que hacen que el producto de matrices sea una operación abordable.

El algoritmo de Strassen se basa en la siguiente obserración:

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $n = 2^m$ una potencia de 2. Sean $A, B \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ dos matrices cuadradas. Se puede denotar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Con $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{M}_{2^{m-1}x2^{m-1}}(\mathbb{R})$. Definimos las matrices $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \in \mathbb{M}_{2^{m-1}x2^{m-1}}(\mathbb{R})$ como sigue:

- $P1 = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$
- $P2 = (a_{21} + a_{22})b_{11}$
- $P3 = a_{11}(b_{12} - b_{22})$
- $P4 = a_{22}(b_{21} - b_{12})$
- $P5 = (a_{11} + a_{12})b_{22}$
- $P6 = (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12})$
- $P7 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})$

Entonces se tiene que:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} P_1 + P_4 + P_7 - P_5 & P_3 + P_5 \\ \\ P_2 + P_4 & P_3 + P_1 + P_6 - P_2 \end{pmatrix}$$

Nótese que las matrices P_i también tienen dimenión potencia de 2. Puesto que estas matrices se calculan mediante un producto, la misma idea puede aplicarse a las mismas. Por tanto, el algoritmo de Strassen sustituye productos por sumas hasta llegar a matrices con una dimensión umbral (32 en este caso) cuyo producto sí se calcula mediante el algoritmo clásico.

El análisis teórico del algoritmo se basa en la siguiente recurrencia:

$$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + O(n^2)$$

Su obtención es sencilla. Para una matriz de dimensión n se calculan las matrices P_i como el producto de sumas y restas de matrices de dimensión la mitad. La operación de producto tendrá una eficiencia de $T(\frac{n}{2})$ pues se llama recurrentemente al algoritmo. El número 7 proviene de la realización de 7 productos matriciales, uno por cada P_i. Las sumas y restas realizadas en el proceso así como las que tienen lugar durante el cálculo de C son operaciones de orden de eficiencia $O(n^2)$ y el número de operaciones es siempre constante. La suma de ambas eficiencias nos proporciona la ecuación anterior. Para su resolución se acude al Master Theorem obteniendo:

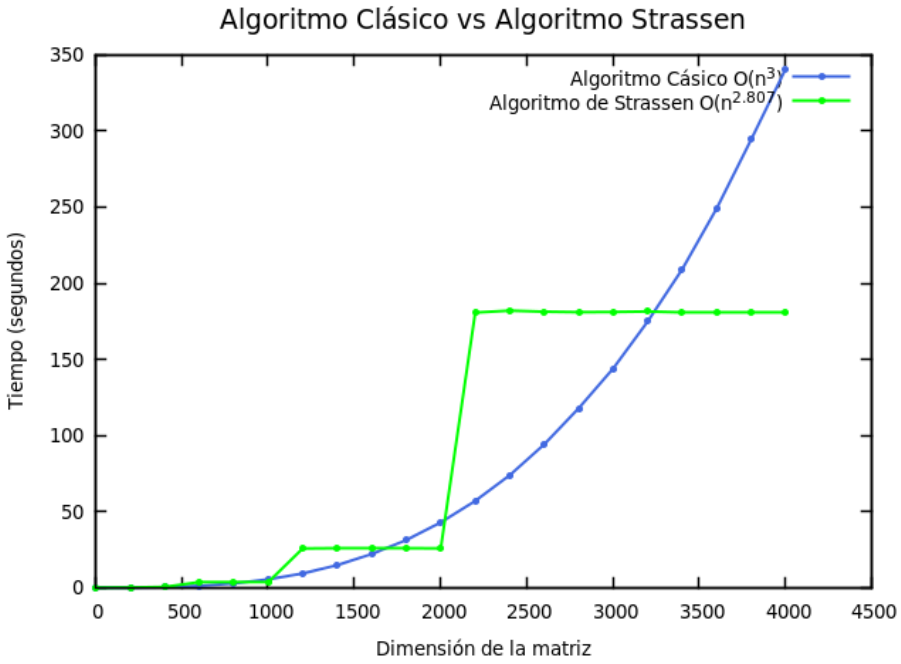
$$T(n) = n^{log_2 7} = n^{2.8074} \; \forall n \; tal \; que \; n = 2^m \; con \; m \in \mathbb{N}$$

El algoritmo expuesto requiere como entrada una matriz de dimensión potencia de 2. Para poder aplicarlo a cualquier matriz, la idea más sencilla es ampliar la misma con columnas y filas de ceros hasta obtener como dimensión la siguiente potencia de 2 a la actual lo que empeora su comportamiento y da lugar al comportamiento dado en la imagen de la siguiente seccción.

Resultados Empíricos

Aunque el algoritmo de Strassen tenga una mejor eficiencia, el factor de la misma es grande. Esto se debe a la recursividad utilizada así como a la creación de numerosas matrices en el proceso, lo que conlleva reserva de memoria, sumas y restas matriciales y diversas asignaciones entre matrices. Además, el hecho de que se deba ampliar la dimensión a una potencia de 2 produce que en realidad se multipliquen matrices de mayor dimensión, obteniendo a veces por esta razón peores resultados que el algoritmo clásico. Existen diversas propuestas para evitar este hecho aunque todas conllevan un gran trabajo de programación.

El algoritmo clásico obtiene mejores resultados en matrices de dimensión pequeña por las razones expuestas anteriormente. Cuando la dimensión aumenta, el algoritmo de Strassen sí obtiene mejores resultados gracias a su eficiencia teórica. Se muestra a continuación una comparativa entre ambos algoritmos en la se aprecia todo lo explicado anteriormente:



Ejercicio 8: Ordenación por Mezcla

Estudie el código del algoritmo recursivo disponible en el fichero mergesort.cpp. En él, se integran dos algoritmos de ordenación: inserción y mezcla (o mergesort). El parámetro UMBRAL_MS condiciona el tamaño mínimo del vector para utilizar el algoritmo de inserción en vez de seguir aplicando de forma recursiva el mergesort. Como ya habrá estudiado, la eficiencia teórica del mergesort es n log(n). Realice un análisis de la eficiencia empírica y haga el ajuste de ambas curvas. Incluya también, para este caso, un pequeño estudio de cómo afecta el parámetro UMBRAL_MS a la eficiencia del algoritmo. Para ello, pruebe distintos valores del mismo y analice los resultados obtenidos.

Se divide el ejercico en diferentes comparativas entre los algoritmos:

- Algoritmo de Inserción vs Algoritmo Burbuja.
- Estudio sobre UMBRAL_MS del Mergesort.
- Comparación de mergesort con otros algoritmos de ordenación O(nlog_2 n).
- Ajuste para Mergesort e Inserción.

Se proporciona un código para cada algoritmo. Debido a las subsecciones planteadas, en este caso se proporcionan 3 scripts **ejecutar_ejercico_8_i.sh**, uno para cada una de las 3 primeras secciones junto con un **plot_i.sh** por script.

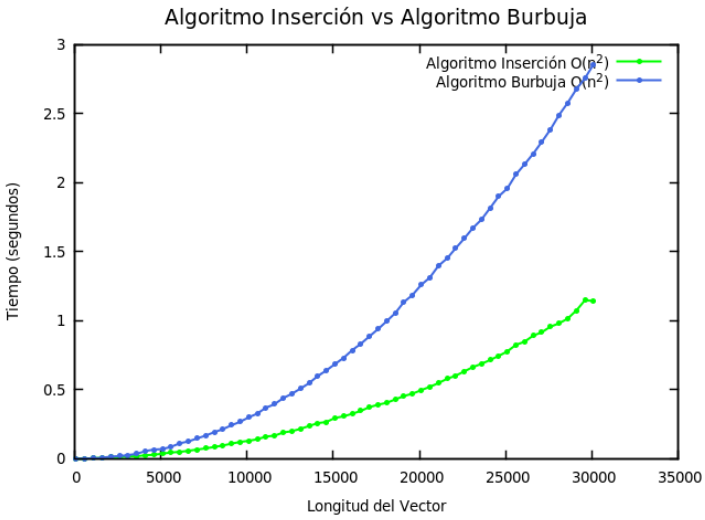
Algoritmo de Inserción vs Algoritmo Burbuja

El algoritmo de inserción utilizado en el código es un algoritmo de ordenación de eficiencia O(n^2) y que suele ser de los mejores con esa eficiencia. El cálculo teórico de la misma es sencillo.

Su funcionamito se basa en el siguiente proceso:

1. Se realiza una iteración por cada elemento del vector.
2. Para la iteración m-ésima se presupone que se ha ordenado el subvector $\{1, ..., m-1\}$. Se toma el elemento en la posición m y se inserta en el subvector anterior manteniéndose este ordenado y con un elemento más.

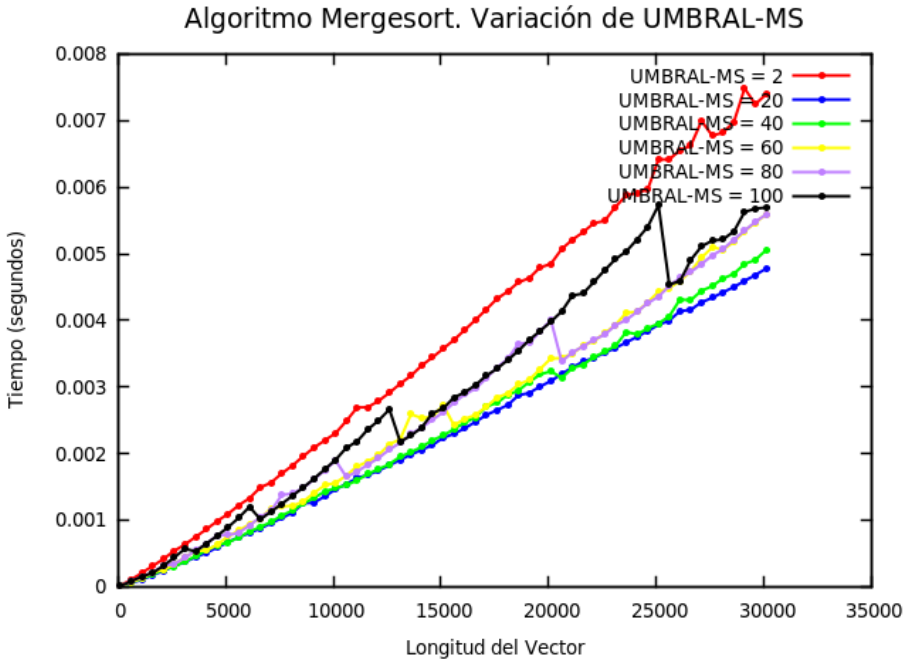
Es claro que cuando finalice el proceso se habrá ordenado el vector al completo. Se muestra en la siguiente gráfica una comparativa entre este algoritmo y el burbuja con el código del **ejercicio 5**:



El mejor factor del algoritmo de inserción con respecto al brubuja es claro. Se debe a que el burbuja recorre todo el subvector en cada iteración mientras que el de insercción puede parar la iteración sin recorrer el bucle entero pues solo tiene que insertar el elemento.

Estudio sobre UMBRAL_MS del Mergesort

Se muestra en esta sección el estudio pedido sobre el parámetro UMBRAL_MS del mergesort. En el estudio el parámetro toma el valor 2, 20, 40, 60, 80 y 100. Se realiza la media de 1000 ejecuciones para cada dato. Los resultados se resumen en la siguiente imagen:



Se puede observar que el mejor resultado viene dado por UMBRAL_MS=20. Nótese que para umbrales mayores se produce un desnivel importante en algunos puntos de la gráfica. La razón es la siguiente. Por ejemplo, para el caso UMBRAL_MS = 100, es claro que el algoritmo funcionará mejor cuando las particiones del vector resulten en subvectores de tamaño menor que 100 puesto que se aplicará inserción a vectores más pequeños, simulando un umbral menor con su correspondiente mejoa. Supongamos que para determinado tamaño, todas las particiones previas a las finales tienen tamaño 101. En consecuencia, se realizará otra partición, aplicando inserción a vectores de tamaño 50 o 51 posteriormente. En este caso se obtiene el mejor resultado posible en términos de tiempo. Por tanto, cuando la longitud del vector está en torno a 1012^n se producirá este fenómeno, mejorando radicalmente el tiempo del algoritmo.

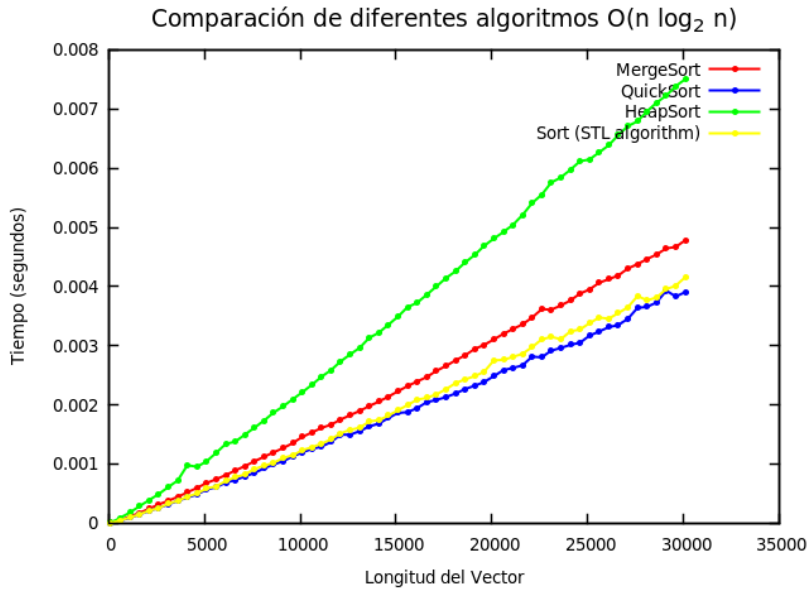
Para los siguentes estudios se toma UMBRAL_MS = 20.

Comparación de mergesort con otros algoritmos de ordenación O(nlog_2 n)

Se compara el mergesort con otros algoritmos de orden de eficiencia O(nlog_2 n). A priori, el mergesort no se suele utilizar debido a que necesita de una segunda copia en memoria del vector para su funcionamiento. Se comparan los resultados con:

- **Quicksort:** Algoritmo ampliamente utilizado y considerado uno de los mejores algoritmos de ordenación.
- **Heapsort:** Algoritmo basado en la estructura de datos Heap.
- **Sort:** Algoritmo de ordenación que proporciona c++ en el include *algorithm*.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

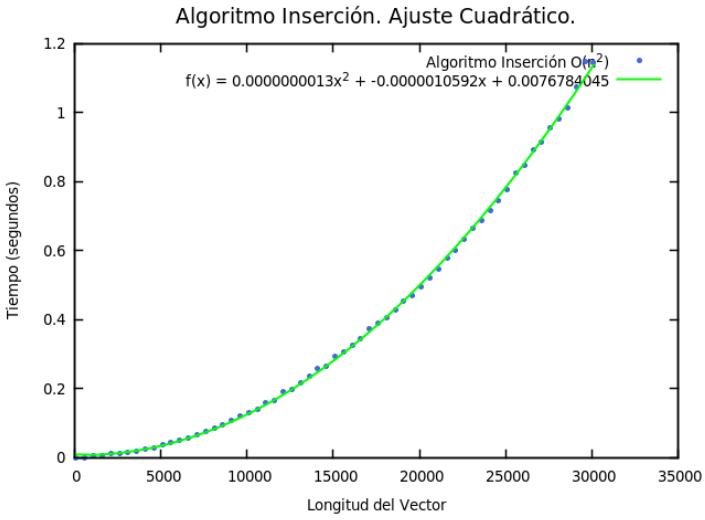


Se puede apreciar que el mejor algoritmo en la práctica es el Quicksort (recordemos que en teoría su peor caso es **cuadrático**). Obtiene resultados similares al sort de la STL, luego presupongo que puede estar implementado también como quicksort. Mergesort no consigue los resultados de los dos algoritmos anteriores pero no se queda atrás. Sí lo hace Heapsort pues a pesar de ser O($nlog_2n$), en primer lugar crea el heap y en segundo lugar lo ordena. Por ello obtiene tiempos dos veces más lento.

Ajustes para Inserción y Mergesort

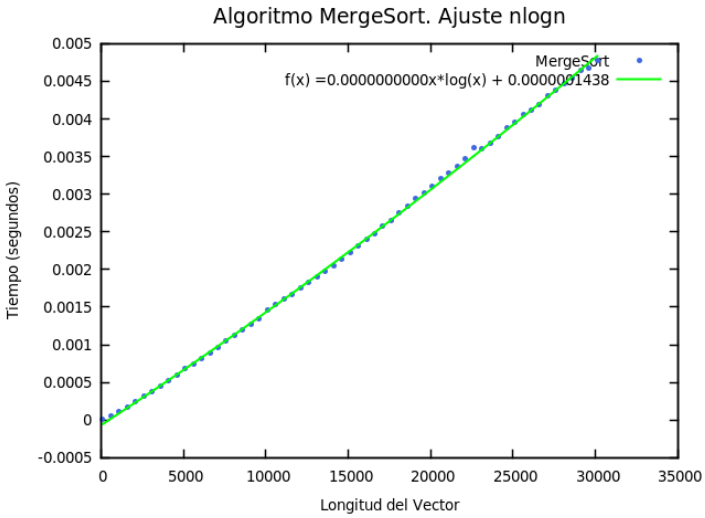
En esta sección se proporcionan los ajustes pedidos para los algoritmos inserción y mergesort. La primera gráfica responde al primero de ellos. Nótese la poca variación del mismo, lo que permite que el ajuste cuadrático sea casi exacto. En este caso la **desviación media** del ajuste cuadrático responde a:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2}{n}} = 0.00877017$$



La siguiente imagen responde al ajuste realizado para el mergesort. Al ser calculados los puntos como la media de 1000 ejecuciones el ajuste tiene una **desviación media** del orden del 1%:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2}{n}} = 2.86917/10^{-05}$$



En cambio, para una única ejecución se tiene una mayor dispersión de los puntos. Esto se debe a que el ruido introducido por el sistema operativo es significativo en relación con el tiempo que tarda el algoritmo: