Divide y Vencerás

Problema 6 - Vectores unimodales

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

15 de abril de 2015

Introdución

- En esta presentación se proporciona una solución para el problem 6.
- El código, los resultados de las ejecuciones, las gráficas y los pdf asociados se puede encontrar en GitHub.

Explicación del problema

Definición de vector unimodal

Un vector v de números con n componentes, todas distintas, se dice unimodal si existe un índice p (que no es ni el primero ni el último) tal que:

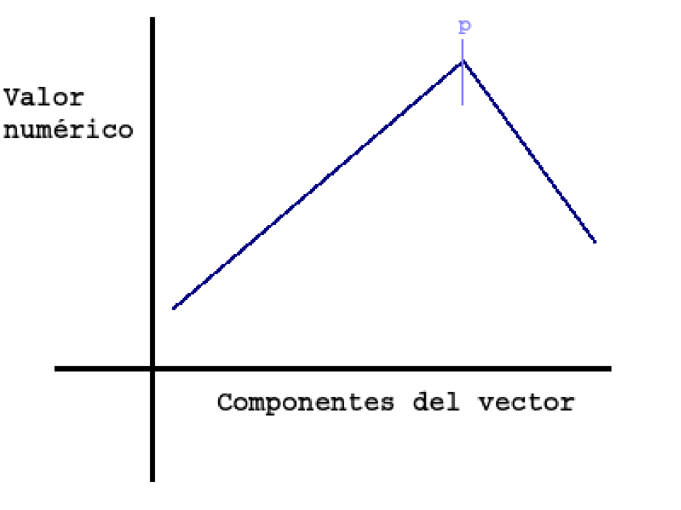
- A la izquierda de p los números están ordenados de forma creciente.
- A la derecha de p están ordenados de forma decreciente.

Matemáticamente:

- $\forall i, j \leq p$ con $i < j \Rightarrow v[i] < v[j]$
- $\forall i, j \geq p$ con $i < j \Rightarrow v[i] > v[j]$

Explicación del problema

Ejemplo de vector unimodal



Explicación del problema

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Otro ejemplo de vector unimodal

Un ejemplo numérico de vector unimodal es el siguiente:

$$\mathrm{v} = [1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 6\ 4]$$

En este caso $p = 4$ y $v[p] = 8$.

Explicación del problema

Problema

Diseñar un algoritmo que permita determinar p.

Algoritmos

Se proponen dos algoritmos:

- Algoritmo trivial de eficiencia $\theta(n)$.
- Algoritmo recursivo de eficiencia $\theta(\log n)$.

Observaciones

Proposición

La componente p es el máximo de v.

Demostración

Como v es unimodal:

- $v[p] \geq v[i] \; \forall i \leq p$
- $v[p] \geq v[i] \; \forall i \geq p$

Entonces: $v[p] \geq v[i] \; \forall i$

$\blacksquare$

Observaciones

Proposición

Un vector unimodal solo tiene un máximo local (en p)

Demostración

Sea $i \neq p$. Veamos que no es un máximo local:

- Si $i < p$, entonces $v[i] < v[i+1]$.
- Si $i > p$, entonces $v[i-1] > v[i]$.

$\blacksquare$

Observaciones

Proposición

Una componente i es p si, y solo si, $v[i-1] < v[i] > v[i+1]$.

Demostración

$i = p$ si, y solo si, i es un máximo local (solo hay uno que es p). Esto se cumple si, y solo si, $v[i-1] < v[i] > v[i+1]$.

$\blacksquare$

Algoritmo trivial

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Búsqueda lineal del máximo local.

```
# Pseudocódigo del algoritmo trivial.
# v es el vector unimodal con n componentes.
for i in range(1, n-1):
    if v[i] > v[i+1]:
        p = i
        break
```

Algoritmo trivial

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Ejemplo

v = [1 3 5 7 8 6 4]

Se empieza en $v[1] = 3$, que no es mímimo local:

v = [- - 5 7 8 6 4]

$v[2] = 5$ tampoco es máximo local...

v = [- - - 7 8 6 4]

$v[3] = 7$ tampoco es máximo local...

v = [- - - - 8 6 4]

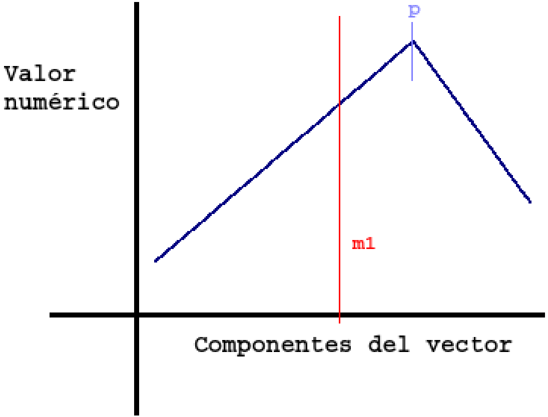
¡$v[4] = 8$ sí es máximo local! **Solución:** $p = 4$

Algoritmo recursivo

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

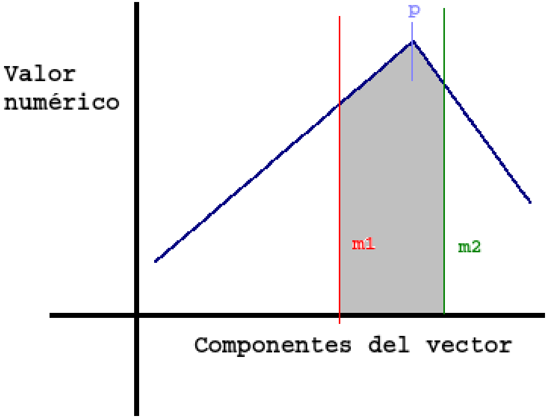
- Queremos deshacernos de la búsqueda lineal.
- Problema similar: Búsqueda en un vector. Si está ordenado: **Búsqueda binaria**.
- Empezamos por la componente mitad. Si es un máximo local hemos terminado. **¿Y si no es máximo local?**

Algoritmo recursivo



$$v[m1-1] < v[m1] < v[m1+1] \Rightarrow m2 < p$$

Algoritmo recursivo



$$v[m2-1] > v[m2] > v[m2+1] \Rightarrow p < m2$$

Algoritmo recursivo

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

```
# Parametros:
#  - v       : Vector unimodal.
#  - inicio : Posición de inicio.
#  - final  : Posición siguiente a la última.
def obtenerP(v, inicio, final):
  mitad = (inicio + final) / 2
  if mitad > inicio:
    if v[mitad-1] < v[mitad] and
       v[mitad] > v[mitad+1]:
      return mitad
    else if v[mitad-1] < v[mitad]:
      return obtenerP(v, mitad+1, final)
    else:
      return obtenerP(v, inicio, mitad)
  else:
    return inicio
```

Algoritmo recursivo

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Ejemplo

$$v = [1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 6\ 4]$$

Se empieza en $v[3] = 7$, que es menor que $v[4] = 8$.

$$v = [-\ -\ -\ -\ 8\ 6\ 4]$$

Se empieza en $v[5] = 6$, que es menor que $v[4] = 8$.

$$v = [-\ -\ -\ -\ 8\ -\ -]$$

¡$v[4] = 8$ es máximo local! **Solución:** $p = 4$

- **Menos iteraciones que el trivial.**

Algoritmo recursivo

Proposición

El algoritmo recursivo es $\theta(\log n)$ en el peor caso.

Demostración

En el peor caso, $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \theta(1)$. Tomando $n = 2^k$:

$$T(n) = T(2^k) = T(2^{k-1}) + \theta(1) = \ldots = T(1) + (k-1)\theta(1)$$

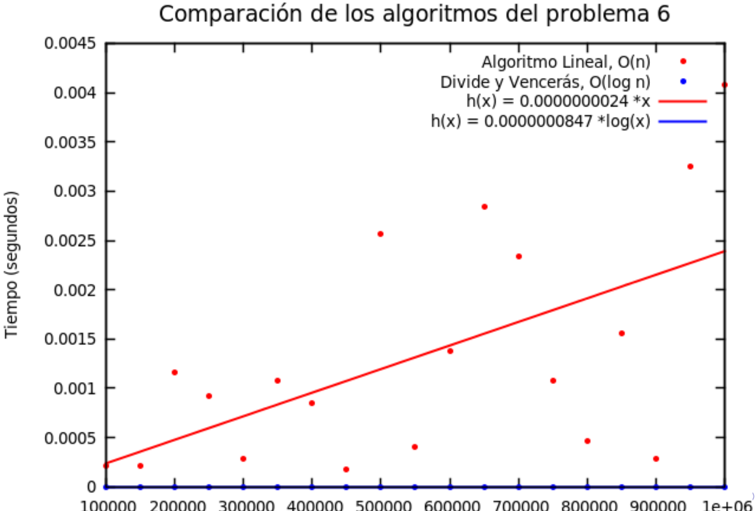
$$T(n) \in \theta(k) = \theta(\log_2 n)$$

$\blacksquare$

Análisis empírico. Eficiciencia híbrida

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

- Una única ejecución por tamaño del vector



Análisis empírico. Eficiciencia híbrida

Problema

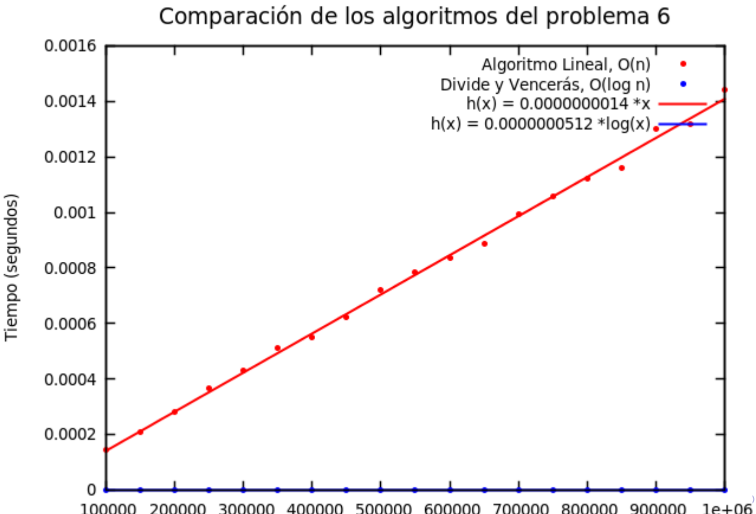
En el mejor caso ambos algoritmos son $\theta(1)$.

Solución

Hacer la media de varias ejecuciones.

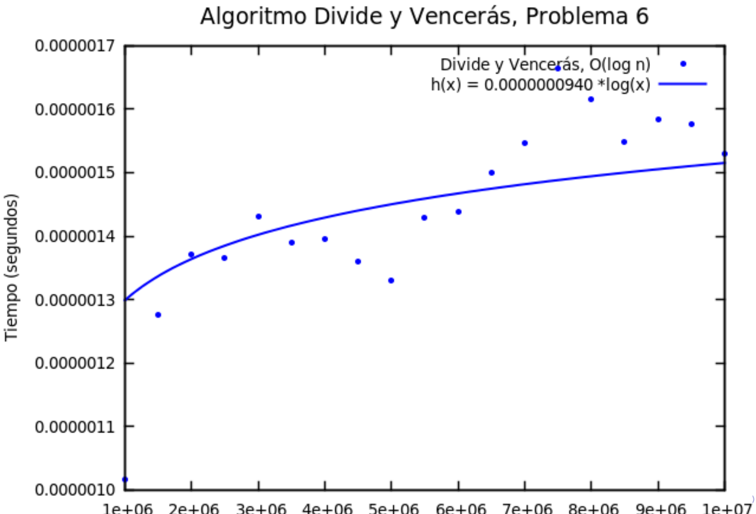
Análisis empírico. Eficiciencia híbrida

- Media de 1000 ejecuciones



Análisis empírico. Eficiciencia híbrida

- Media de 1000 ejecuciones



Fin de la presentación

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

¡Gracias por su atención!