Algoritmos Voraces

Problema 5 - Problema del electricista

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

19 de mayo de 2015

Introducción

- En esta presentación se proporciona una solución para el ejercicio 5.
- El código, los resultados de las ejecuciones, las gráficas y los pdf asociados se puede encontrar en GitHub.

Explicación del problema

Resumen del enunciado

Una estación de ITV consta de m líneas de inspección de vehículos iguales. Hay un total de n vehículos que necesitan inspección. En función de sus características, cada vehículo tardará en ser inspeccionado un tiempo t_i, $i = 1, \ldots, n$. Se desea encontrar la manera de atender a los n vehículos y acabar en el menor tiempo posible. Diseñar e implementar un algoritmo vuelta atrás que determine cómo asignar los vehículos a las líneas. Mejoradlo usando alguna técnica de poda. Realizar un estudio empírico de la eficiencia de los algoritmos.

Análisis del problema

Información sobre el problema

- Estructura similar al **problema de los electricistas**. Conocido como **scheduling problem**.
- Cambia la función objetivo a optimizar: tiempo medio de espera vs tiempo total de los trabajos.
- Es un problema NP-Completo.

Análisis del problema

Observaciones previas

- Aspiramos a una buena **solución exponencial**.
- Si $n \leq m$, podemos asignar un trabajo a cada máquina. El tiempo es el máximo de los t_i.
- Podemos suponer entonces $n > m$.
- **No importa el orden** en el que una máquina realice sus trabajos asignados.

Análisis del problema

Proposición 1: El número de formas en las que se pueden asignar los trabajos a las máquinas es m^n.

Demostración.

- A cada trabajo se asigna una máquina, pudiendo repetirse.
- Para cada trabajo tenemos m posibilidades disponibles. Total: m^n.

Análisis del problema

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Primer algoritmo ($\theta(m^n)$)

- Recorrer todas las soluciones posibles con backtracking.

```
def algoritmo1(k,tiempos, solucion_actual,
max_tiempo):
  if k < len(tiempos):
    sol = Inf
    for i in range(0,len(solucion_actual)):
```

Análisis del problema

Primer algoritmo ($\theta(m^n)$)

```
      solucion_actual[i] += tiempos[k]
      sol = min(sol, algoritmo1(k+1,tiempos,\
      solucion_actual, max(max_tiempo, \
      solucion_actual[i])))
      solucion_actual[i] -= tiempos[k]
    return sol
  else:
    return max_tiempo
```

Análisis del problema

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Mejorando el primer algoritmo

- No nos importa cuál sea la máquina que realiza un determinado conjunto de trabajos. Todas son igual de eficientes.
- **Problema**: el algoritmo anterior calcula varias veces soluciones equivalentes, una vez por cada permutación posible para las máquinas.
- **Solución**: si quedan máquinas sin tareas asignadas solo llamamos al algoritmo recursivo para la primera.

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Análisis del problema

Segundo algoritmo

```
def algoritmo2(k, tiempos, solucion_actual,
max_tiempo):
  if k < len(tiempos):
    sol = Inf
    for i in range(0,len(solucion_actual)):
      # Si la máquina anterior no tiene
      # asignado entonces no se asigna
      # trabajo a la actual (sería la
      # misma rama que la anterior).
```

Análisis del problema

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Segundo algoritmo

```
        if i == 0 or solucion_actual[i-1] > 0:
          solucion_actual[i] += tiempos[k]
          sol = min(sol, algoritmo2(k+1,tiempos, soluci
              max(max_tiempo, solucion_actual[i])))
          solucion_actual[i] -= tiempos[k]
        else:
          break
    return sol
  else:
    return max_tiempo
```

Análisis del problema

Mejorando el segundo algoritmo

- No queremos que una máquina esté sin realizar trabajo alguno ya que estaríamos perdiendo tiempo de trabajo.
- **Condición de poda:** si hay k máquinas libres y solo quedan por asignar k trabajos, un trabajo va a cada máquina libre.

Análisis del problema

Tercer algoritmo

```
def algoritmo3(k, tiempos, solucion_actual,
 max_tiempo, maquinas_libres):
  if k < len(tiempos):
    # Comprobamos que hay más trabajos
    # libres que máquinas libres
    if maquinas_libres < len(tiempos)-k:
      sol = Inf
```

Análisis del problema

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Tercer algoritmo

```
for i in range(0,len(solucion_actual)):
  if i == 0 or solucion_actual[i-1] > 0:
    solucion_actual[i] += tiempos[k]
    sol = min(sol, algoritmo2(k+1,tiempos, \
        solucion_actual, max(max_tiempo, \
        solucion_actual[i]), maquinas_libres +
        0 if solucion_actual[i] != 0 else 1))
    solucion_actual[i] -= tiempos[k]
```

Análisis del problema

Tercer algoritmo

```
        else:
          break
      return sol
    # Si la comprobación devuelve falso a cada
    # máquina se le asigna un trabajo
    else:
      return max(max_tiempo, max(tiempos[k:]))
  else:
    return max_tiempo
```

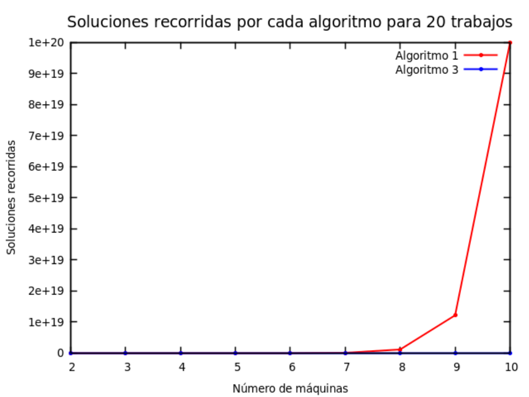
Análisis del problema

Cálculo teórico de las soluciones recorridas por el tercer algoritmo

- $a_i :=$ número de soluciones con todas las máquinas ocupadas para i máquinas con $i = 1, \ldots, m$.
- $a_1 = 1$
- $a_i = i^n - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} a_j \; \forall i = 1, \ldots, m$

Análisis del problema

Comparación del número de soluciones recorridas



Análisis del problema

Mejorando el tercer algoritmo

Criterio de poda habitual en backtracking: una vez se ha conseguido una solución se comprueba en cada momento si la rama actual puede conseguir una solución mejor que la mejor obtenida o no. En caso negativo se deja la rama sin terminar de visitar.

Análisis del problema

Algoritmo final

```
def algoritmo4(k, tiempos, solucion_actual,
 max_tiempo, maquinas_libres, mejor_solucion):

  if k < len(tiempos) and
    max_tiempo < mejor_solucion:
      # Comprobamos que hay más trabajos
      # libres que máquinas libres
      if maquinas_libres < len(tiempos)-k:
```

Análisis del problema

A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez

Algoritmo final

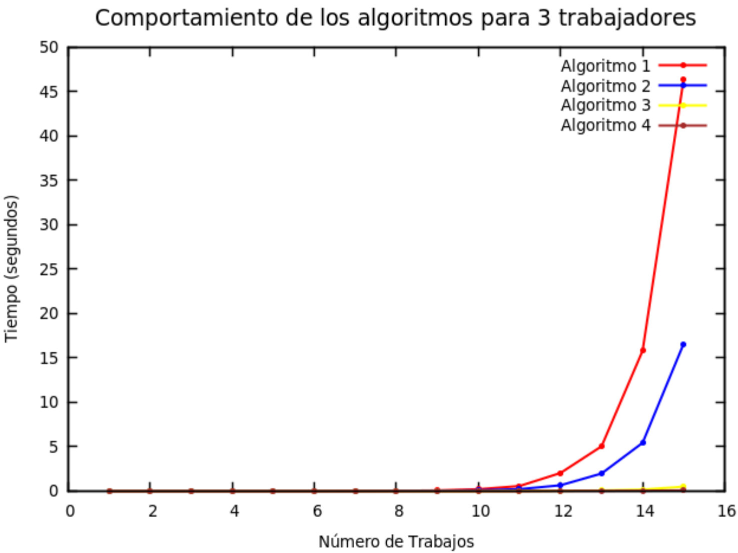
```
    for i in range(0,len(solucion_actual)):
      if i == 0 or solucion_actual[i-1] > 0:
        solucion_actual[i] += tiempos[k]
        mejor_solucion = min(mejor_solucion,
          algoritmo2(k+1,tiempos, solucion_actual
          max(max_tiempo, solucion_actual[i]),
          maquinas_libres + \
          0 if solucion_actual[i] != 0 else 1,\
          mejor_solucion))
        solucion_actual[i] -= tiempos[k]
      else:
        break
    return mejor_solucion
```

Análisis del problema

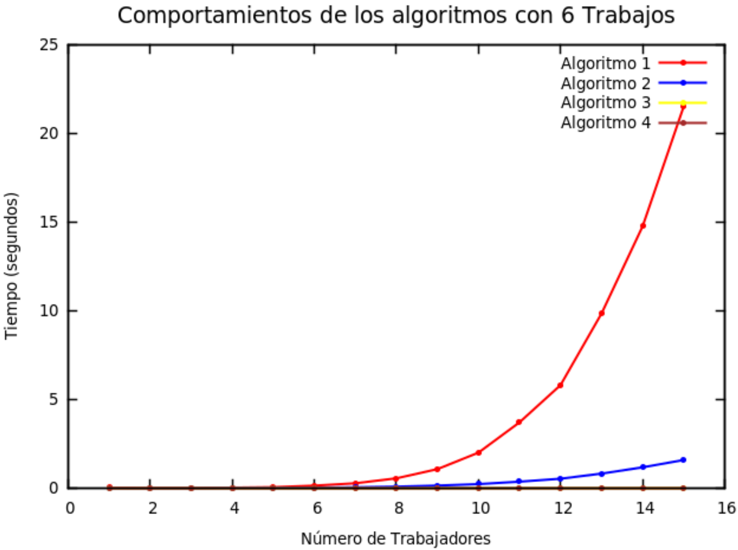
Algoritmo final

```
    # Si la comprobación devuelve falso a cada
    # máquina se le asigna un trabajo
    else:
      return max(max_tiempo, max(tiempos[k:]))
  else:
    return mejor_solucion
```

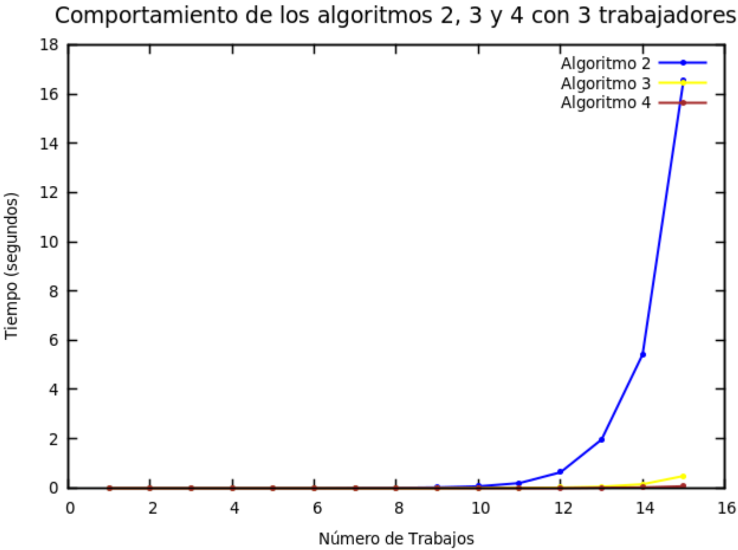
Análisis empírico



Análisis empírico

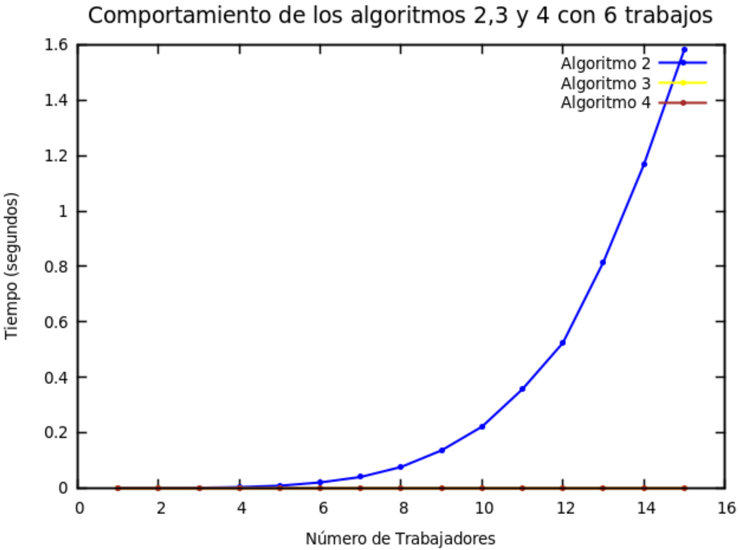


Análisis empírico

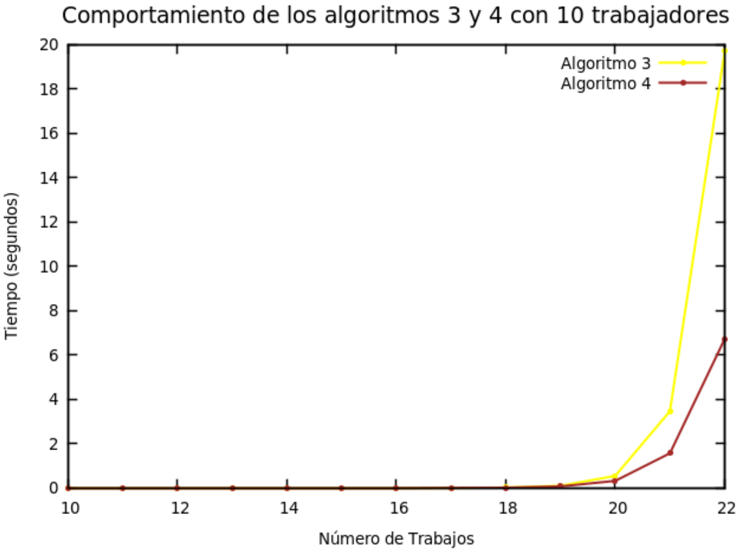


Análisis empírico

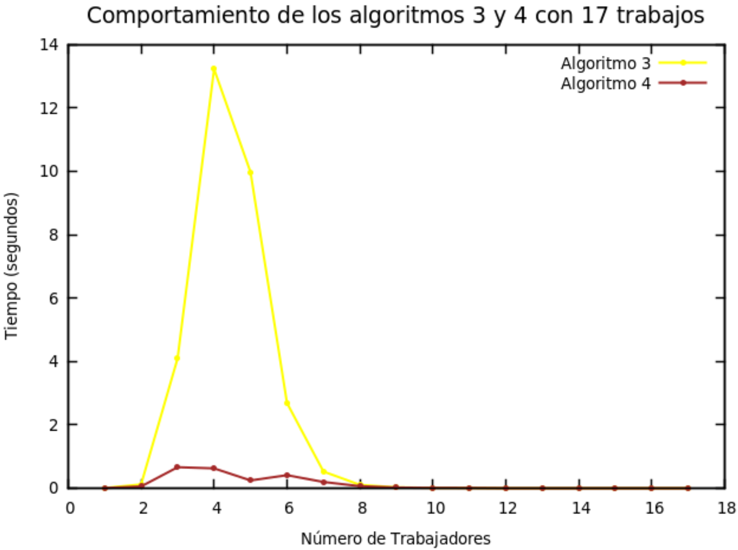
A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez



Análisis empírico



Análisis empírico



Fin de la presentación

¡Gracias por su atención!