

# Algorítmica - Practica 4: Backtracking

*A. Herrera, A. Moya, I. Sevillano, J.L. Suarez*

*19 de mayo de 2015*

## Contents

<b>1</b>	<b>Organización de la práctica</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Problema 5: Estación de ITV</b>	<b>3</b>
2.1	Enunciado del problema . . . . .	3
2.2	Solución teórica . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Análisis Empírico</b>	<b>7</b>
3.1	Primeras conclusiones . . . . .	7
3.2	Enfocar los tres últimos algoritmos . . . . .	8
3.3	Dos últimos algoritmos . . . . .	9

# 1 Organización de la práctica

La práctica 4 trata sobre el desarrollo de algoritmos basados en backtracking que consigan la solución óptima de los problemas propuestos. Usualmente las soluciones obtenidas serán exponenciales ya que intentaremos resolver problemas NP. La poda nos permitirá conseguir en la práctica resultados aceptables.

Nuestro grupo debe resolver el problema 5.

Para cada problema resuelto se sigue la siguiente estructura:

- Enunciado del problema
- Resolución teórica del problema (con una subsección por algoritmo)
- Análisis empírico. Análisis de la eficiencia híbrida

En este último apartado se proporcionan gráficas con los resultados de los algoritmos y un análisis de la eficiencia híbrida para los mismos.

Los algoritmos se han ejecutado sobre un ordenador con las siguientes características:

- **Marca:** Toshiba
- **RAM:** 8 GB
- **Procesador:** Intel(R) Core(TM) i5-3210M CPU @ 2.50GHz

El código, los resultados de las ejecuciones, las gráficas y los pdf asociados se pueden encontrar en [GitHub](#).

## 2 Problema 5: Estación de ITV

### 2.1 Enunciado del problema

Una estación de ITV consta de  $m$  líneas de inspección de vehículos iguales. Hay un total de  $n$  vehículos que necesitan inspección. En función de sus características, cada vehículo tardará en ser inspeccionado un tiempo  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se desea encontrar la manera de atender a los  $n$  vehículos y acabar en el menor tiempo posible. Diseñar e implementar un algoritmo vuelta atrás que determine cómo asignar los vehículos a las líneas. Mejorarlo usando alguna técnica de poda. Realizar un estudio empírico de la eficiencia de los algoritmos.

### 2.2 Solución teórica

La formulación del problema recuerda al problema 5 de la práctica de algoritmos voraces. Tenemos varias máquinas que realizan trabajos que requieren un tiempo predeterminado. Este tipo de problemas suelen clasificarse como **scheduling problems**. Sin embargo, la función objetivo a optimizar es diferente. En el problema de la práctica anterior se pedía optimizar el tiempo medio de espera de los clientes mientras que en este caso debemos realizar todos los trabajos en el menor tiempo posible.

El problema a resolver es NP Hard <sup>1</sup>. Por tanto, queremos conseguir la mejor solución exponencial posible. Antes de nada, si  $n \leq m$  es fácil darse cuenta de que la solución será el máximo de los  $t_i$  pues basta asignar un trabajo a cada máquina. Podemos suponer entonces que  $n > m$ .

Hacemos la siguiente observación, no nos importa el orden en el que una máquina realice sus trabajos asignados ya que en cualquier caso el tiempo en el que la máquina está trabajando es el mismo. Esto da lugar a la siguiente proposición:

#### Proposición 1.

El número de formas en las que se pueden asignar los trabajos a las máquinas es  $m^n$ .

**Demostración.** Cada posible asignación podemos verla como que a cada trabajo se le asigna una máquina, pudiendo asignar una máquina a varios trabajos. Esto es, para cada trabajo elegimos entre  $m$  posibilidades disponibles. En total,  $m^n$  asignaciones. ■

A raíz de esta proposición aparece un algoritmo de backtracking directo que consiste en recorrer todas las asignaciones posibles.

§ **Algoritmo 1.** Primer algoritmo de backtracking con eficiencia  $\theta(m^n)$ . §

```
# Parametros:
# - k : índice del trabajo a asignar.
# - tiempos : vector con los tiempos de los m trabajos.
# - solucion_actual : vector con el tiempo de trabajo
#   asignado a cada máquina.
# - max_tiempo : Máximo de solucion_actual
def algoritmo1(k,tiempos, solucion_actual, max_tiempo):
    if k < len(tiempos):
        sol = Inf
        for i in range(0,len(solucion_actual)):
            solucion_actual[i] += tiempos[k]
            sol = min(sol, algoritmo1(k+1,tiempos, solucion_actual, \
                max(max_tiempo, solucion_actual[i])))
```

---

<sup>1</sup>[Scheduling Job Problem](#)

```

    solucion_actual[i] -= tiempos[k]
    return sol
else:
    return max_tiempo

```

Basta llamar al algoritmo de la siguiente forma: `algoritmo1(0,tiempos,[0 for i in range(0, m)], 0)`. Realiza una búsqueda en profundidad del árbol con todas las soluciones posibles. Cada nodo consta de  $m$  hijos, uno por máquina a la cual se puede asignar el trabajo. Su eficiencia es claramente  $\theta(m^n)$ . Sin embargo, también es manifiestamente mejorable. Será nuestro punto de partida pero iremos mejorándolo reduciendo el espacio de soluciones a comprobar y aplicando criterios de poda.

Debemos observar que no nos importa cuál sea la máquina que realiza un determinado conjunto de trabajo. Por ejemplo, si tuviésemos dos máquinas,  $A$  y  $B$ , y dos trabajos, 1 y 2, da igual que la máquina  $A$  haga el trabajo 1 y la máquina  $B$  haga el trabajo 2 a que  $A$  realice el 2 y  $B$  el 1. Las máquinas son igual de eficientes por lo que el tiempo en el que se habrán terminado todos los trabajos será el mismo en ambos casos.

Por ejemplo, si cada máquina hace un conjunto de trabajos no vacío podemos aplicar las  $m!$  permutaciones posibles obteniendo soluciones que terminan en el mismo tiempo pero que son calculadas por separado en el Algoritmo 1. Tratamos de evitar de la siguiente forma. Si quedan máquinas sin una tarea por asignar no llamamos al algoritmo recursivamente para cada una de estas máquinas sino solo para la primera de ella pues los otros estados son equivalentes. Este razonamiento conduce al Algoritmo 2.

**Algoritmo 2.** Mejora sobre el Algoritmo 1 que evita soluciones equivalentes.

```

# Parametros:
# - k : índice del trabajo a asignar.
# - tiempos : vector con los tiempos de los m trabajos.
# - solucion_actual : vector con el tiempo de trabajo
#   asignado a cada máquina.
# - max_tiempo : Máximo de solucion_actual
def algoritmo2(k, tiempos, solucion_actual, max_tiempo):
    if k < len(tiempos):
        sol = Inf
        for i in range(0,len(solucion_actual)):
            # Si la máquina anterior no tiene asignado entonces no se asigna
            # trabajo a la actual (sería la misma rama que la anterior).
            if i == 0 or solucion_actual[i-1] > 0:
                solucion_actual[i] += tiempos[k]
                sol = min(sol, algoritmo2(k+1,tiempos, solucion_actual, \
                    max(max_tiempo, solucion_actual[i])))
                solucion_actual[i] -= tiempos[k]
        return sol
    else:
        return max_tiempo

```

Un detalle importante es que no queremos que una máquina esté sin realizar trabajo alguno ya que estaríamos perdiendo tiempo de trabajo. Cada máquina debe tener asignado al menos un trabajo. Esto nos da una condición de poda para el algoritmo anterior. Si hay  $k$  máquinas libres y solo quedan por asignar  $k$  trabajos, un trabajo va a cada máquina libre (recordemos que nos da igual el orden). Podemos aplicarlo obteniendo el Algoritmo 3.

**Algoritmo 3.** Mejora sobre el Algoritmo 2 que evita soluciones con máquinas libres.

```

# Parametros:
# - k : índice del trabajo a asignar.
# - tiempos : vector con los tiempos de los m trabajos.
# - solucion_actual : vector con el tiempo de trabajo
#   asignado a cada máquina.
# - max_tiempo : Máximo de solucion_actual
# - maquinas_libres : Número de máquinas que no tienen asignado un trabajo.
def algoritmo2(k, tiempos, solucion_actual, max_tiempo, maquinas_libres):
    if k < len(tiempos):
        # Comprobamos que hay más trabajos libres que máquinas libres
        if maquinas_libres < len(tiempos)-k:
            sol = Inf
            for i in range(0,len(solucion_actual)):
                if i == 0 or solucion_actual[i-1] > 0:
                    solucion_actual[i] += tiempos[k]
                    sol = min(sol, algoritmo2(k+1,tiempos, solucion_actual, \
                        max(max_tiempo, solucion_actual[i]), maquinas_libres + \
                            0 if solucion_actual[i] != 0 else 1))
                    solucion_actual[i] -= tiempos[k]
            return sol
        # Si la comprobación devuelve falso a cada máquina se le asigna un trabajo
        else:
            return max(max_tiempo, max(tiempos[k:]))
    else:
        return max_tiempo

```

En este punto cabe preguntarse cuántas soluciones el espacio de soluciones (denotémoslo  $S$ ) debe recorrer el Algoritmo 3. Nótese que obvia las equivalentes o aquellas que dejan alguna máquina libre. El espacio de soluciones consta de  $m^n$  elementos, todos ellos recorridos por el Algoritmo 1. Por tanto, para saber este número en primer lugar tenemos que restarle a  $m^n$  las soluciones que dejan alguna máquina libre. Llamamos  $a_m$  a este resultado. Podemos abstraer la definición para denotar  $a_i$  al número de soluciones con todas las máquinas ocupadas para  $i$  máquinas en lugar de  $m$  con  $i = 1, \dots, m$ .

En esta situación podemos observar que para  $i \in \{1, \dots, m\}$  el número de soluciones de  $S$  que deja exactamente  $i$  máquinas ocupadas es

$$\binom{m}{i} a_i$$

Por tanto, se tiene que:

$$i^n = \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} a_j \quad \forall i = 1, \dots, m$$

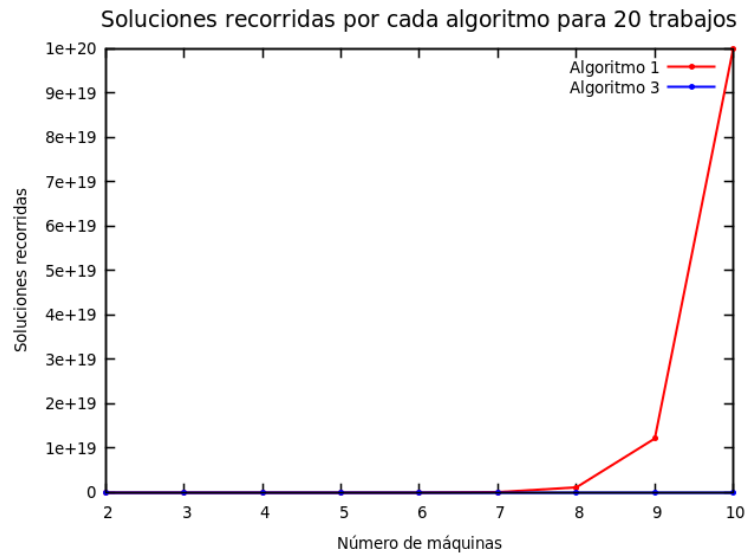
Esta relación permite calcular  $a_m$  de la siguiente forma:

- $a_1 = 1$
- $a_i = i^n - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} a_j \quad \forall i = 1, \dots, m$

Podemos calcular  $a_2$ , después  $a_3$  y así sucesivamente.

Una vez hemos calculado  $a_m$  tenemos que tener en cuenta que las soluciones equivalentes (aquellas que son una permutación de la actual) no nos interesan. Dividimos pues  $a_m$  entre  $m!$  para quedarnos con un único representante de las clases de equivalencia.

La Imagen 1 muestra para 20 trabajos el número de soluciones que tienen que considerar los algoritmos 1 y 3 en función del número de máquinas. La diferencia es abismal. Se ha conseguido una reducción enorme del número de soluciones a comprobar. Además, la Imagen 1 prueba que el Algoritmo 1 no es viable para  $m > 8$  y  $n = 20$ .



**Imagen 1.** Número de soluciones recorridas por cada algoritmo.

Por último, utilizamos el criterio de poda habitual en backtracking: una vez se ha conseguido una solución se comprueba en cada momento si la rama actual puede conseguir una solución mejor que la mejor que has obtenido o no. En caso negativo se deja la rama sin terminar de visitar. Esta idea da lugar al Algoritmo 4.

**Algoritmo 4.** Mejora sobre el Algoritmo 3 podando ramas no viables.

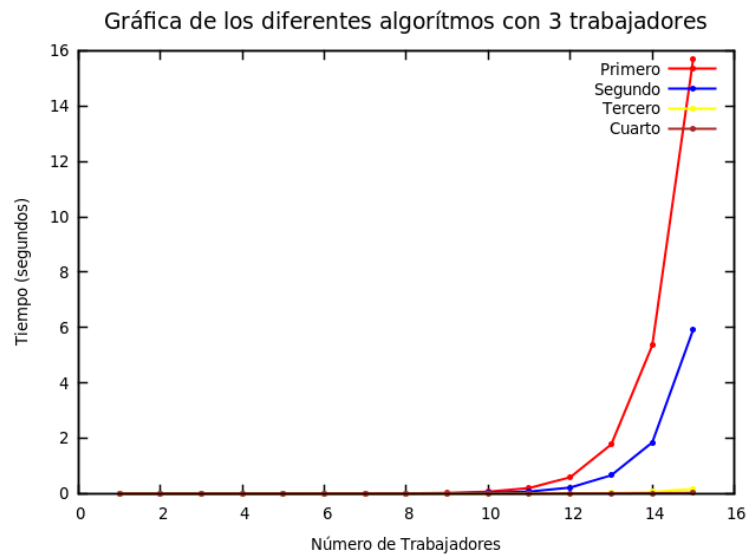
```
# Parametros:
# - k : índice del trabajo a asignar.
# - tiempos : vector con los tiempos de los m trabajos.
# - solucion_actual : vector con el tiempo de trabajo
#   asignado a cada máquina.
# - max_tiempo : Máximo de solucion_actual
# - maquinas_libres : Número de máquinas que no tienen asignado un trabajo.
# - tiempo_maximo : Máximo tiempo permitido para una solución.
def algoritmo2(k, tiempos, solucion_actual, max_tiempo, maquinas_libres, mejor_solucion):
    if k < len(tiempos) and max_tiempo < mejor_solucion:
        # Comprobamos que hay más trabajos libres que máquinas libres
        if maquinas_libres < len(tiempos)-k:
            for i in range(0, len(solucion_actual)):
                if i == 0 or solucion_actual[i-1] > 0:
                    solucion_actual[i] += tiempos[k]
                    mejor_solucion = min(mejor_solucion, algoritmo2(k+1, tiempos, solucion_actual, \
                        max(max_tiempo, solucion_actual[i]), maquinas_libres + \
                        0 if solucion_actual[i] != 0 else 1, mejor_solucion))
                    solucion_actual[i] -= tiempos[k]
            return mejor_solucion
        # Si la comprobación devuelve falso a cada máquina se le asigna un trabajo
    else:
        return max(max_tiempo, max(tiempos[k:]))
    else:
        return mejor_solucion
```

En este último algoritmo se pone en evidencia la potencialidad del backtracking con una búsqueda en profundidad. Si se lleva la cuenta de la mejor solución hasta el momento tenemos un genial criterio de poda que reducirá mucho el tiempo de ejecución.

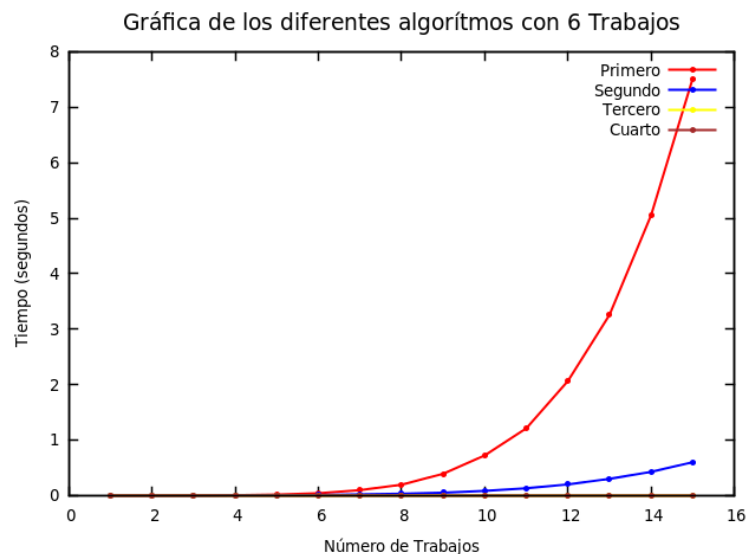
### 3 Análisis Empírico

#### 3.1 Primeras conclusiones

Para empezar mostraremos en una gráfica los tiempos que requieren todos los algoritmos para encontrar la mejor solución, tanto con respecto al número de trabajos con trabajadores constantes, como con respecto al número de trabajadores con trabajos constantes:



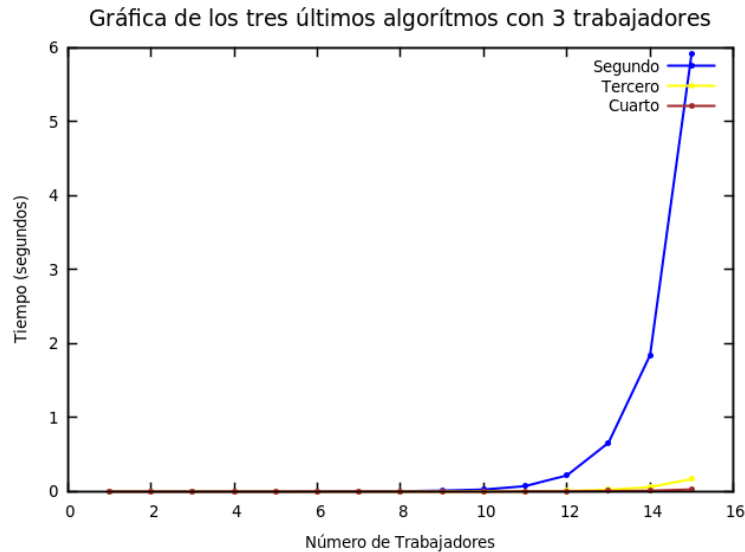
En este primer gráfico se ve claramente que el primer algoritmo comienza a diverger de manera factorial, como presuponíamos de la tería. El segundo parece que tambien tiene este comportamiento, pero parece que ha sido mejorado en este aspecto. Los otros dos algoritmos parecen inmutables con respecto al número de trabajos que se le encarguen.



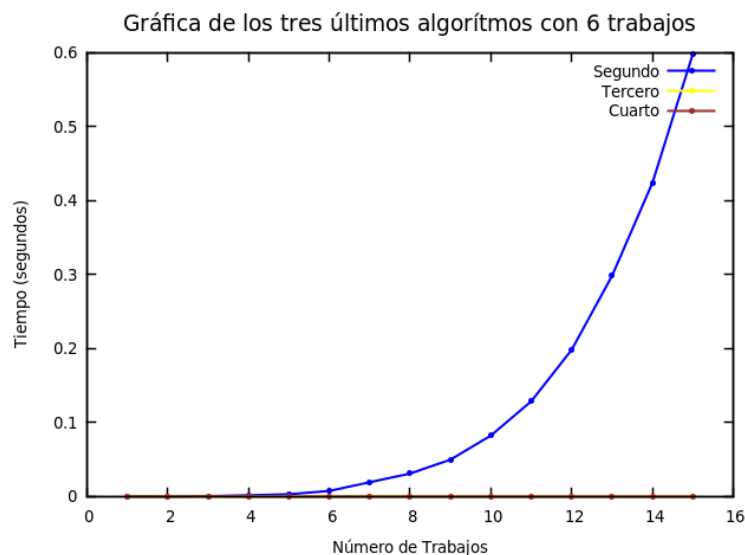
En esta gráfica notamos que, teniendo un número de trabajos fijos, el tiempo con el que se le es asignada de la mejor forma a los trabajadores crece indefinidamente de forma exponencial. Observamos de nuevo que ocurre lo mismo para el segundo algoritmo, y otra vez ocurre lo mismo para los otros dos algoritmos, casi inmutables de nuevo.

### 3.2 Enfocar los tres últimos algoritmos

Por lo mal algoritmo que era el primero con respecto a los demás, hemos decidido hacer una gráfica sin incluir este.



Si observamos el último quiebro de la línea amarilla, parece que comienza a crecer. Si no fuese por esto, se pueden sacar las mismas conclusiones que en la gráfica anterior.

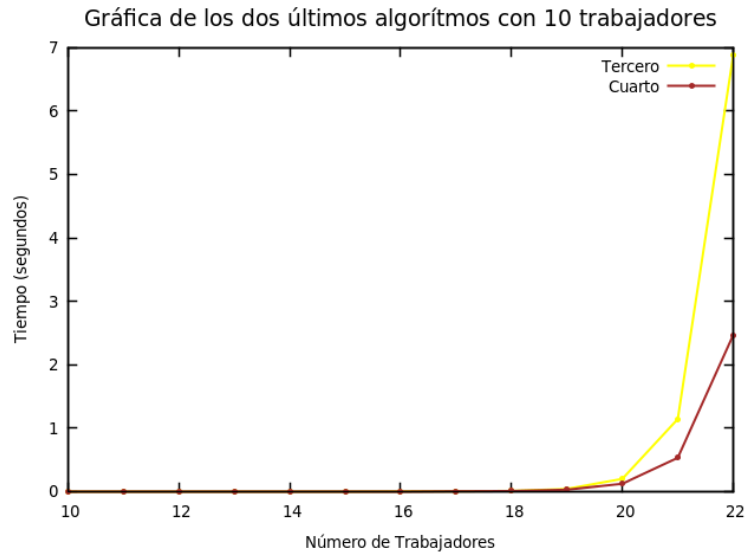


Se obtienen, sin modificación, las mismas conclusiones que en la gráfica anterior sobre trabajos constantes. Segundo algoritmo divergente y tercer y cuarto inmutables.

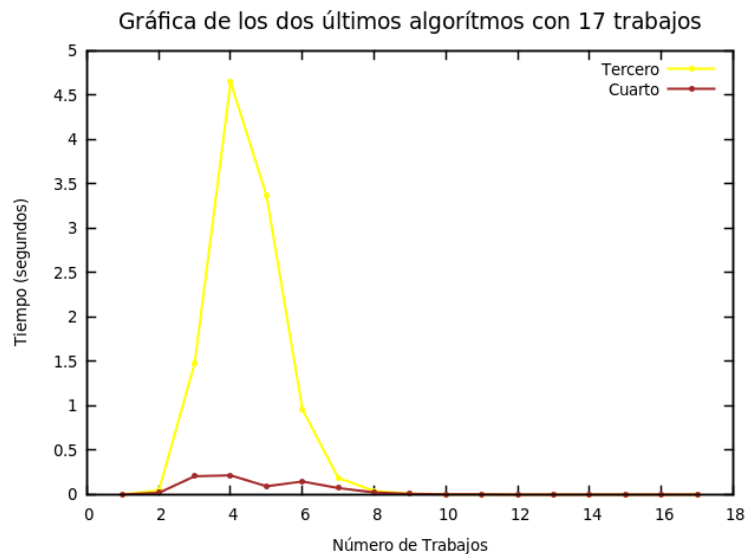


### 3.3 Dos últimos algoritmos

Tras los anteriores resultados, decidimos modificar el número de trabajos y trabajadores para las pruebas, teniendo en cuenta los resultados teóricos. Así decidimos cambiar el número de trabajadores constantes con respecto al numero de trabajos a la mínima iteración y el número de trabajos constante al máximo trabajadores usados para las iteraciones. Estos son los resultados:



Pese a lo buenos que parecían a priori los últimos algoritmos, vemos que ya empiezan a comportarse como lo que son, algoritmos factoriales con respecto al número de trabajos que se le asignan.



Esta gráfica refleja la filosofía de ambos algoritmos a la perfección. Digamos que lo sorprendente de este problema es que aunque los algoritmos lo que trataban era de acotar por los extremos (numero de trabajadores proximos a uno o al número de trabajos) por en medio la forma de organización se nos va de las manos.