Provas de Conhecimento Zero: Um Estudo sobre zk-SNARKs e sua Aplicação em Sistemas de Autenticação

Alex Davis Neuwiem da Silva

Ciências da Computação | INE | CTC

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Introdução

1. **Estudo Teórico**
   - Foi realizada uma análise aprofundada dos principais protocolos zk-SNARKs: foco em **Pinocchio** e **Groth16**.

2. **Aplicação Prática**
   - Foi desenvolvido um sistema de autenticação biométrica facial que utiliza um dos protocolos estudados: **Groth16**.

O que é uma Prova de Conhecimento Zero?

É um protocolo computacional entre duas partes:

- **Provador** P**:** A parte que alega conhecer uma informação.
- **Verificador** V**:** A parte que valida a alegação.

Satisfaz as seguintes propriedades:

- **Completude:** Se P é honesto, V sempre aceitará a prova.
- **Solidez:** Se P é desonesto, V só aceitará a prova com uma probabilidade negligenciável.
- **Conhecimento Zero:** Garante que o verificador seja convencido sem revelar nenhuma informação adicional além da veracidade dessa afirmação.

Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

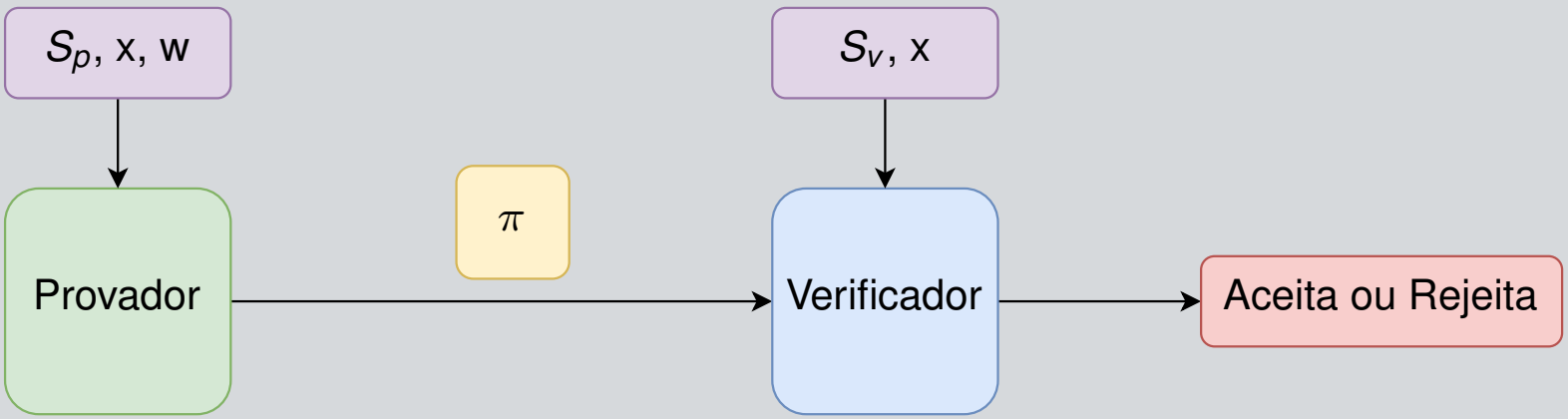
O que é um zk-SNARK?

Uma classe especial de Prova de Conhecimento Zero:

- **S**uccinct (Sucinto): O tamanho da prova e tempo de verificação são constantes.
- **N**on-interactive (Não-interativo): O Provador envia uma única mensagem para o Verificador, geralmente requer uma cerimônia inicial.
- **AR**gument of **K**nowledge (Argumento de Conhecimento): A solidez é *computacional*, baseada na dificuldade de certos problemas, e não estatística.

Processamento de uma prova

- Circuito $C(x, w) = 0$
- Pré-Processamento $S(C) \rightarrow (S_p, S_v)$



Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

Criptografia Homomórfica

Fundamenta o ambiente aritmético utilizado no protocolo.

- $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_T$ são grupos de pontos de curva elíptica.
- Emparelhamento $e : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \rightarrow \mathbb{G}_T$
- g_1 é gerador para $\mathbb{G}_1$
- g_2 é gerador para $\mathbb{G}_2$
- $e(g_1, g_2)$ é o gerador de $\mathbb{G}_T$

Propriedades:

- Dado $s \cdot g_1$ é difícil encontrar s
- $e(s_1 \cdot g_1, s_2 \cdot g_2) = e(g_1, g_2)^{(s_1 \cdot s_2)}$
- Permite que o protocolo funcione para múltiplos Ps e Vs.

Groth16: O Padrão de Eficiência

O Groth16 é uma otimização do protocolo Pinocchio, tornando-se o padrão da indústria.

Sua principal vantagem é a otimização:

- Reduz a prova a apenas **3 elementos**
- Reduz a verificação a apenas **3 emparelhamentos**

É dividido em 4 etapas:

- Aritmetização
- Cerimônia de confiança
- Geração da prova
- Verificação da prova

Aritmetização (Circuito Aritmético)

Transforma a computação em uma representação matemática verificável

- Exemplo $x^3 + x + 5 = y$

$$x^3 + x + 5 = y \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{aligned} v_1 &= x * x \\ v_2 &= v_1 * x \\ y &= (v_2 + x + 5) * 1 \end{aligned}}_{\text{Restrições}} , \quad \underbrace{w = [1, y, x, v_1, v_2]}_{\text{Vetor testemunha}}$$

Aritmetização (R1CS)

Cada restrição i é representada na forma $w \cdot A_i \times w \cdot B_i = w \cdot C_i$

$$
\begin{aligned}
& & w \cdot A_1 &= [1, y, x, v_1, v_2] \cdot [0, 0, 1, 0, 0] = x \\
v_1 = x * x \quad & \rightarrow & w \cdot B_1 &= [1, y, x, v_1, v_2] \cdot [0, 0, 1, 0, 0] = x \\
& & w \cdot C_1 &= [1, y, x, v_1, v_2] \cdot [0, 0, 0, 1, 0] = v_1
\end{aligned}
$$

Resultado:

$$
\begin{array}{ccc}
[0,0,1,0,0] & [0,0,1,0,0] & [0,0,0,1,0] \\
[0,0,0,1,0] & [0,0,1,0,0] & [0,0,0,0,1] \\
[5,0,1,0,1] & [1,0,0,0,0] & [0,1,0,0,0] \\
A & B & C \\
\text{(entrada esq.)} & \text{(entrada dir.)} & \text{(saída)}
\end{array}
$$

Aritmetização (QAP)

Programa Aritmético Quadrático (QAP): Cada coluna das matrizes é transformada em um polinômio.

$$
\begin{array}{c}
[1, y, x, v_1, v_2] \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
C
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
O_1(x) &= 0 \\
O_y(x) &= 0.5x^2 - 1.5x + 1 \\
O_x(x) &= 0 \\
O_{v_1}(x) &= 0.5x^2 - 2.5x + 3 \\
O_{v_2}(x) &= -x^2 + 4x - 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2.5 & 0.5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\
O(x)
\end{array}
$$

Aritmetização (QAP)

Polinômios resultantes do QAP:

$$L(x) \qquad R(x) \qquad O(x)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -7.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2.5 & 0.5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Aritmetização

Finalmente chegamos a uma fórmula simples:

$$w \cdot L(x) \times w \cdot R(x) = w \cdot O(x)$$

Para uma entrada w válida, a equação se sustenta:

$$P(x) = w \cdot L(x) \times w \cdot R(x) - w \cdot O(x) = H(x) \times T(x)$$

Em nosso exemplo, temos:

$$T(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Note que L(x), R(x), O(x) e T(x) são públicos e apenas um provador honesto pode gerar P(x) e H(x).

A Otimização Chave do Groth16

A equação é reestruturada usando os valores aleatórios α e β:

$$(\alpha + w \cdot L(x)) \times (\beta + w \cdot R(x)) =$$
$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot w \cdot R(x) + \beta \cdot w \cdot L(x) + w \cdot O(\tau) + H(\tau) \cdot T(\tau)$$

Verificação no ponto τ, pelo lema de Schwartz-Zippel:

$$e(\underbrace{(\alpha + w \cdot L(\tau)) \cdot g_1}_{A}, \underbrace{(\beta + w \cdot R(\tau)) \cdot g_2}_{B}) =$$
$$\underbrace{e(\alpha \cdot g_1, \beta \cdot g_2)}_{D} \cdot$$
$$e(\underbrace{(\alpha \cdot w \cdot R(\tau) + \beta \cdot w \cdot L(\tau) + w \cdot O(\tau) + H(\tau) \cdot T(\tau))}_{C}, g_2)$$

Cerimônia de Confiança

O Groth16 usa uma cerimônia de confiança **específica do circuito** para gerar parâmetros públicos.

- Baseia-se em valores aleatórios secretos (“lixo tóxico”): $\alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta$.
- Estes valores devem ser descartados. Se guardados, podem criar provas falsas.
- A cerimônia gera a Chave de Prova (S_p) e a Chave de Verificação (S_v).

Geração da Prova

Para garantir o **conhecimento zero**, o provador mascara os componentes da prova, gerando dois escalares aleatórios, r e s.

$$A = \alpha \cdot g_1 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot L_i(\tau) \cdot g_1 + r \cdot \delta \cdot g_1$$

$$B' = \beta \cdot g_1 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot R_i(\tau) \cdot g_1 + s \cdot \delta \cdot g_1$$

$$B = \beta \cdot g_2 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot R_i(\tau) \cdot g_2 + s \cdot \delta \cdot g_2$$

$$C = \sum_{i=l}^{m-1} w_i \cdot \sigma_i + H(\tau) \cdot T(\tau) + s \cdot A + r \cdot B' - r \cdot s \cdot \delta \cdot g_1$$

Verificação da Prova

Primeiramente, o verificador utiliza a parte pública da testemunha e $\sigma_0, \ldots, \sigma_{l-1}$ para calcular W:

$$W = \sum_{i=0}^{l-1} w_i \cdot \sigma_i$$

O verificador então insere a prova π, sua parte calculada W, e os elementos da chave de verificação na equação:

$$e(A, B) = e(\alpha \cdot g_1, \beta \cdot g_2) \cdot e(W, \gamma \cdot g_2) \cdot e(C, \delta \cdot g_2)$$

Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

Reconhecimento Facial com Similaridade de Cossenos

O reconhecimento facial pode ser modelado como uma tarefa de comparação entre vetores:

- Cada rosto é representado por um vetor de características (*embedding*)
- Vetores são gerados por redes neurais treinadas para extrair feições únicas

A comparação é feita utilizando a **similaridade de cossenos**.

O que é a Similaridade de Cossenos?

A **similaridade de cossenos** mede o ângulo entre dois vetores:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$$

- Varia entre -1 (opostos) e 1 (iguais)
- Se $\cos(\theta) \approx 1$, vetores são semelhantes $\rightarrow$ rostos parecidos

Autenticação com Similaridade de Cossenos

1. A imagem de entrada é convertida em vetor $\vec{A}$
2. Vetor $\vec{B}$ é previamente armazenado durante a etapa de registro
3. Se $\cos(\vec{A}, \vec{B}) > \tau$, a autenticação é aceita

Nota: τ é um limiar definido com base no modelo de IA (ex: 0.7)

Problemas em Armazenar *Embeddings* Sem Proteção

Embeddings faciais são representações vetoriais únicas do rosto de uma pessoa. Armazená-las sem proteção apresenta riscos sérios:

- **Embeddings são identificadores biométricos:** um atacante pode usar *embeddings* roubadas para reconstruir um rosto e se autenticar como outra pessoa
- **Vazamentos são irreversíveis:** diferente de senhas, as representações vetoriais são insubstituíveis

Problemas em Armazenar *Embeddings* Sem Proteção

Embeddings faciais são representações vetoriais únicas do rosto de uma pessoa. Armazená-las sem proteção apresenta riscos sérios:

- **Embeddings são identificadores biométricos:** um atacante pode usar *embeddings* roubadas para reconstruir um rosto e se autenticar como outra pessoa
- **Vazamentos são irreversíveis:** diferente de senhas, as representações vetoriais são insubstituíveis

Solução: usar **provas de conhecimento zero** para provar correspondência sem expor o vetor.

Integração com Provas de Conhecimento Zero

O cálculo da similaridade de cosseno pode ser embutido no circuito de prova de conhecimento zero:

- $\cos(\vec{A}, \vec{B}) > \tau$ é o circuito a ser verificado
- O limiar de similaridade τ é o parâmetro público
- As *embeddings* faciais representam os valores privados

Isso permite autenticação facial **sem revelar** os vetores faciais.

Vantagens do Método Proposto

O sistema de autenticação com provas de conhecimento zero traz benefícios significativos:

- **Privacidade Total:** o verificador não sabe quem é o usuário, apenas verifica se a prova é válida.
- **Resistência a Vazamentos:** nenhum dado biométrico é armazenado no sistema, por isso não há o que ser vazado ou roubado.

Fase de registro

1. O Usuário U inicia o processo de registro enviando sua face f_{reg} para o Modelo de IA M:

$$M \xleftarrow{f_{reg}} U$$

2. M extrai a *embedding* e_{reg} de f_{reg} ao calcular:

$$e_{reg} := Emb(f_{reg})$$

3. M envia a *embedding* e_{reg} para U:

$$M \xrightarrow{e_{reg}} U$$

4. U gera uma chave simétrica k e criptografa sua *embedding*:

$$c_{reg} := Enc_k(e_{reg})$$

Fase de registro

5. *U* envia a *embedding* criptografada c_{reg} para o Servidor *S*:

$$U \xrightarrow{c_{reg}} S$$

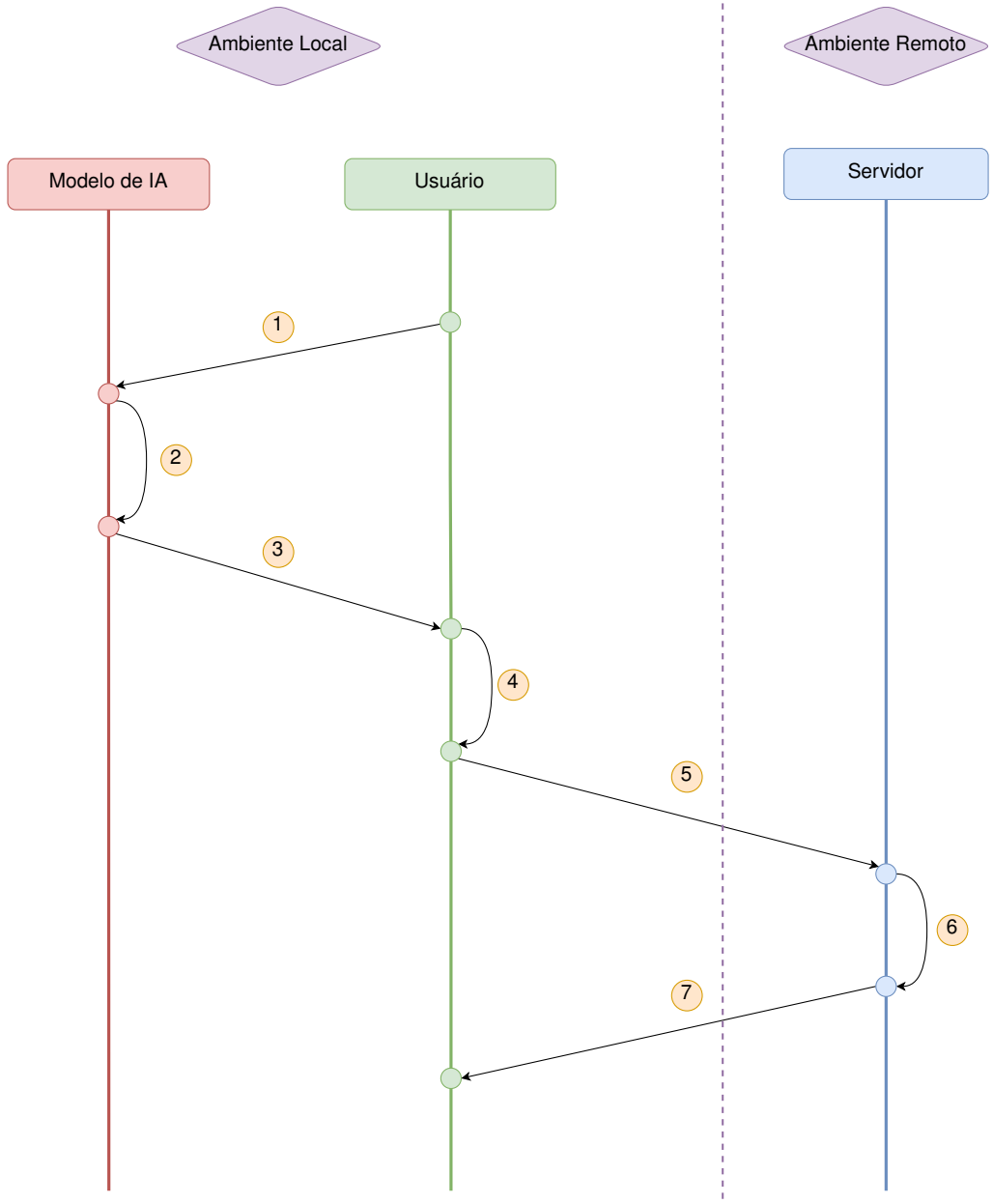
6. *S* armazena a *embedding* criptografada c_{reg} e gera um identificador único *id*:

$$id := GenId()$$

7. *S* envia o identificador *id* para *U*:

$$U \xleftarrow{id} S$$

Fase de registro



Fase de autenticação

1. O Usuário U inicia o processo de autenticação ao enviar o identificador id ao Servidor S:

$$U \xrightarrow{id} S$$

2. S envia a chave de prova S_p e uma cópia da *embedding* criptografada c_{reg}, que é correspondente ao id recebido, a U:

$$U \xleftarrow{S_p, c_{reg}} S$$

3. U descriptografa a *embedding* e_{reg} recebida ao calcular:

$$e_{reg} := Dec_k(c_{reg})$$

Fase de autenticação

4. U solicita a prova do protocolo zk-SNARK ao enviar a chave de prova S_p, a *embedding* recém descriptografada e_{reg} e uma nova captura de sua face f_{cur} para o Modelo de IA M:

$$M \xleftarrow{S_p, e_{reg}, f_{cur}} U$$

5. M extrai a *embedding* e_{cur} a partir da face f_{cur} e gera a prova zk-SNARK π ao computar:

$$e_{cur} := Emb(f_{cur})$$

$$\pi := Prove(S_p, x = \tau, w = (e_{cur}, e_{reg}))$$

6. M envia a prova zk-SNARK π a U:

$$M \xrightarrow{\pi} U$$

Fase de autenticação

7. U envia a prova zk-SNARK π a S:

$$U \xrightarrow{\pi} S$$

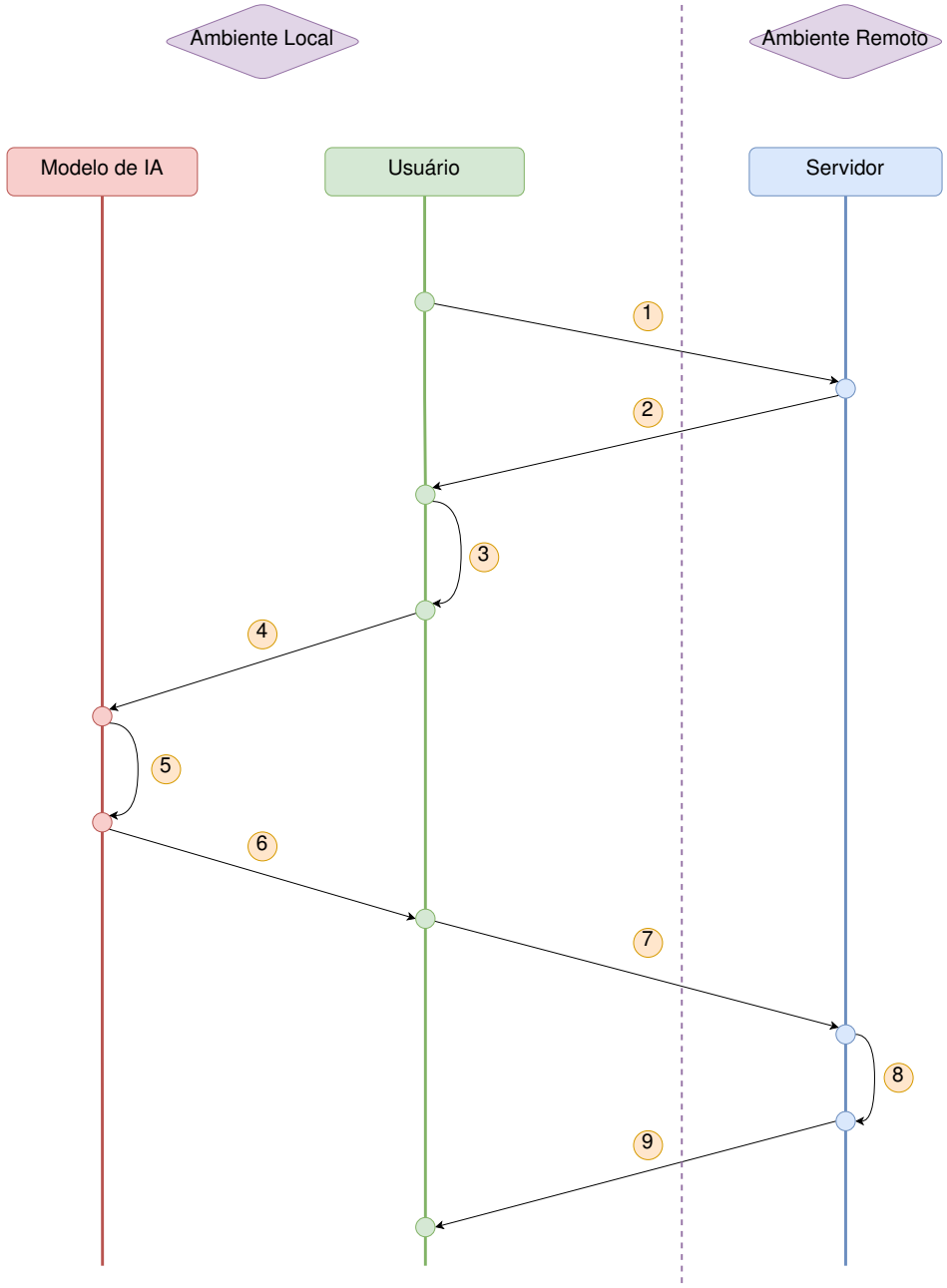
8. S verifica a validade da prova π ao calcular:

$$r := \mathit{Verify}(S_v, x = \tau, \pi)$$

9. S envia o veredito da autenticação r para U:

$$U \xleftarrow{r} S$$

Fase de autenticação



Muito obrigado!

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA