

Provas de Conhecimento Zero: Um Estudo sobre zk-SNARKs e sua Aplicação em Sistemas de Autenticação

Alex Davis Neuwiem da Silva

Ciências da Computação | INE | CTC



Introdução

1. Estudo Teórico

- ▶ Realizar uma análise aprofundada dos principais protocolos zk-SNARKs.
- ▶ Foco em **Pinocchio** e **Groth16**.

2. Aplicação Prática

- ▶ Desenvolver de um sistema de autenticação biométrica facial que preserva a privacidade.
- ▶ Utiliza **Groth16**.

O que é uma Prova de Conhecimento Zero?

É um protocolo computacional entre duas partes:

- ▶ **Provador P :** A parte que alega conhecer uma informação.
- ▶ **Verificador V :** A parte que valida a alegação.

Satisfazendo as seguintes propriedades:

- ▶ **Completude:** Se P é honesto, V sempre aceitará a prova.
- ▶ **Solidez:** Se P é desonesto, V só aceitará a prova com uma probabilidade negligenciável.
- ▶ **Conhecimento Zero:** Garante que o verificador seja convencido sem revelar nenhuma informação adicional além da veracidade dessa afirmação.

Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

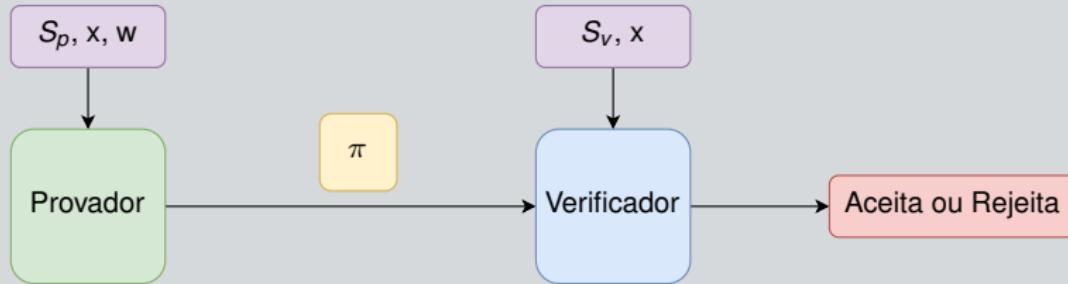
O que é um zk-SNARK?

Uma classe especial de Prova de Conhecimento Zero:

- ▶ **Succinct** (Sucinto):
 - ▶ O tamanho da prova e tempo de verificação são constantes.
- ▶ **Non-interactive** (Não-interativo):
 - ▶ O Provador envia uma única mensagem para o Verificador.
 - ▶ Geralmente requer uma cerimônia inicial.
- ▶ **ARgument of Knowledge** (Argumento de Conhecimento):
 - ▶ A solidez é *computacional* (baseada em problemas difíceis, ex: logaritmo discreto) e não estatística.

Processamento de uma prova

- ▶ Circuito $C(x, w) = 0$
- ▶ Pré-Processamento $S(C) \rightarrow (S_p, S_v)$



Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

Criptografia Homomórfica

Fundamenta o ambiente aritmético utilizado no protocolo.

- ▶ $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_T$ são grupos de pontos de curva elíptica.
- ▶ Emparelhamento $e : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \rightarrow \mathbb{G}_T$
- ▶ g_1 é gerador para \mathbb{G}_1
- ▶ g_2 é gerador para \mathbb{G}_2
- ▶ $e(g_1, g_2)$ é o gerador de \mathbb{G}_T

Propriedades:

- ▶ Dado $s \cdot g_1$ é difícil encontrar s
- ▶ $e(s_1 \cdot g_1, s_2 \cdot g_2) = e(g_1, g_2)^{(s_1 \cdot s_2)}$
- ▶ Permite que o protocolo funcione para múltiplos P_s e V_s .

Groth16: O Padrão de Eficiência

O Groth16 é uma otimização do protocolo Pinocchio, tornando-se o padrão da indústria.

Sua principal vantagem é a otimização:

- ▶ Reduz a prova a apenas **3 elementos**
- ▶ Reduz a verificação a apenas **3 emparelhamentos**

É dividido em 4 etapas:

- ▶ Aritmetização
- ▶ Cerimônia de confiança
- ▶ Geração da prova
- ▶ Verificação da prova

Aritmetização (Círculo Aritmético)

Transforma a computação em uma representação matemática verificável

- ▶ Exemplo $x^3 + x + 5 = y$

$$x^3 + x + 5 = y \rightarrow v_1 = x * x, \quad v_2 = v_1 * x, \quad y = (v_2 + x + 5) * 1, \quad w = [1, y, x, v_1, v_2]$$

$\underbrace{(v_2 + x + 5) * 1}_{\text{Restrições}}$

Vetor testemunha

Aritmetização (R1CS)

Cada restrição i é representada na forma $w \cdot A_i \times w \cdot B_i = w \cdot C_i$

$$w \cdot A_1 = [1, y, x, v_1, v_2] \cdot [0, 0, 1, 0, 0] = x$$

$$v_1 = x * x \quad \rightarrow \quad w \cdot B_1 = [1, y, x, v_1, v_2] \cdot [0, 0, 1, 0, 0] = x$$

$$w \cdot C_1 = [1, y, x, v_1, v_2] \cdot [0, 0, 0, 1, 0] = v_1$$

Resultado:

$$\begin{matrix} [0, 0, 1, 0, 0] & [0, 0, 1, 0, 0] & [0, 0, 0, 1, 0] \\ [0, 0, 0, 1, 0] & [0, 0, 1, 0, 0] & [0, 0, 0, 0, 1] \\ [5, 0, 1, 0, 1] & [1, 0, 0, 0, 0] & [0, 1, 0, 0, 0] \end{matrix}$$

A

B

C

(entrada esq.) (entrada dir.) (saída)

Aritmetização (QAP)

Programa Aritmético Quadrático (QAP): Cada coluna das matrizes é transformada em um polinômio.

$$\begin{bmatrix} [1, y, x, v_1, v_2] \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} O_1(x) &= 0 \\ O_y(x) &= 0.5x^2 - 1.5x + 1 \\ O_x(x) &= 0 \\ O_{v_1}(x) &= 0.5x^2 - 2.5x + 3 \\ O_{v_2}(x) &= -x^2 + 4x - 3 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2.5 & 0.5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad O(x)$$

Aritmetização (QAP)

Polinômios resultantes do QAP:

$$L(x)$$

$$R(x)$$

$$O(x)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -7.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2.5 & 0.5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Aritmetização

Finalmente chegamos a uma fórmula simples:

$$w \cdot L(x) \times w \cdot R(x) = w \cdot O(x)$$

Para uma entrada w válida, a equação se sustenta:

$$P(x) = w \cdot L(x) \times w \cdot R(x) - w \cdot O(x) = H(x) \times T(x)$$

Em nosso exemplo, temos:

$$T(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Note que $L(x)$, $R(x)$, $O(x)$ e $T(x)$ são públicos e apenas um provador honesto pode gerar $P(x)$ e $H(x)$.

A Otimização Chave do Groth16

A equação é reestruturada usando os valores aleatórios α e β :

$$(\alpha + w \cdot L(x)) \times (\beta + w \cdot R(x)) = \\ \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot w \cdot R(x) + \beta \cdot w \cdot L(x) + w \cdot O(\tau) + H(\tau) \cdot T(\tau)$$

Verificação no ponto τ , pelo lema de Schwartz-Zippel:

$$\underbrace{e((\alpha + w \cdot L(\tau)) \cdot g_1, (\beta + w \cdot R(\tau)) \cdot g_2)}_{A} = \\ \underbrace{e(\alpha \cdot g_1, \beta \cdot g_2)}_{D} \cdot \\ \underbrace{e((\alpha \cdot w \cdot R(\tau) + \beta \cdot w \cdot L(\tau) + w \cdot O(\tau) + H(\tau) \cdot T(\tau)), g_2)}_{C}$$

Cerimônia de Confiança

O Groth16 usa uma cerimônia de confiança **específica do circuito** para gerar parâmetros públicos.

- ▶ Baseia-se em valores aleatórios secretos (“lixo tóxico”): $\alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta$.
- ▶ Estes valores devem ser descartados. Se guardados, podem criar provas falsas.
- ▶ A cerimônia gera a Chave de Prova (S_p) e a Chave de Verificação (S_v).

Geração da Prova

Para garantir o **conhecimento zero**, o provador mascara os componentes da prova, gerando dois escalares aleatórios, r e s .

$$A = \alpha \cdot g_1 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot L_i(\tau) \cdot g_1 + r \cdot \delta \cdot g_1$$

$$B' = \beta \cdot g_1 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot R_i(\tau) \cdot g_1 + s \cdot \delta \cdot g_1$$

$$B = \beta \cdot g_2 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot R_i(\tau) \cdot g_2 + s \cdot \delta \cdot g_2$$

$$C = \sum_{i=l}^{m-1} w_i \cdot \sigma_i + H(\tau) \cdot T(\tau) + s \cdot A + r \cdot B' - r \cdot s \cdot \delta \cdot g_1$$

Verificação da Prova

Primeiramente, o verificador utiliza a parte pública da testemunha e $\sigma_0, \dots, \sigma_{I-1}$ para calcular W :

$$W = \sum_{i=0}^{I-1} w_i \cdot \sigma_i$$

O verificador então insere a prova π , sua parte calculada W , e os elementos da chave de verificação na equação:

$$e(A, B) = e(\alpha \cdot g_1, \beta \cdot g_2) \cdot e(W, \gamma \cdot g_2) \cdot e(C, \delta \cdot g_2)$$

Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

Reconhecimento Facial com Similaridade de Cossenos

O reconhecimento facial pode ser modelado como uma tarefa de comparação entre vetores:

- ▶ Cada rosto é representado por um vetor de características (*embedding*)
- ▶ Vetores são gerados por redes neurais treinadas para extrair feições únicas

A comparação é feita utilizando a **similaridade de cossenos**.

O que é a Similaridade de Cossenos?

A **similaridade de cossenos** mede o ângulo entre dois vetores:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$$

- ▶ Varia entre -1 (opostos) e 1 (iguais)
- ▶ Se $\cos(\theta) \approx 1$, vetores são semelhantes \rightarrow rostos parecidos

Autenticação com Similaridade de Cossenos

1. A imagem de entrada é convertida em vetor \vec{A}
2. Vetor \vec{B} é previamente armazenado durante a etapa de registro
3. Se $\cos(\vec{A}, \vec{B}) > \tau$, a autenticação é aceita

Nota: τ é um limiar definido com base no modelo de IA (ex: 0.7)

Problemas em Armazenar *Embeddings* Sem Proteção

Embeddings faciais são representações vetoriais únicas do rosto de uma pessoa. Armazená-las sem proteção apresenta riscos sérios:

- ▶ **Embeddings são identificadores biométricos:** um atacante pode usar *embeddings* roubadas para reconstruir um rosto e se autenticar como outra pessoa
- ▶ **Vazamentos são irreversíveis:** diferente de senhas, as representações vetoriais são insubstituíveis

Problemas em Armazenar *Embeddings* Sem Proteção

Embeddings faciais são representações vetoriais únicas do rosto de uma pessoa. Armazená-las sem proteção apresenta riscos sérios:

- ▶ **Embeddings são identificadores biométricos:** um atacante pode usar *embeddings* roubadas para reconstruir um rosto e se autenticar como outra pessoa
- ▶ **Vazamentos são irreversíveis:** diferente de senhas, as representações vetoriais são insubstituíveis

Solução: usar **provas de conhecimento zero** para provar correspondência sem expor o vetor.

Integração com Provas de Conhecimento Zero

O cálculo da similaridade de coseno pode ser embutido no circuito de prova de conhecimento zero:

- ▶ $\cos(\vec{A}, \vec{B}) > \tau$ é o circuito a ser verificado
- ▶ O limiar de similaridade τ é o parâmetro público
- ▶ As *embeddings* faciais representam os valores privados

Isso permite autenticação facial **sem revelar** os vetores faciais.

Vantagens do Método Proposto

O sistema de autenticação com provas de conhecimento zero traz benefícios significativos:

- ▶ **Privacidade Total:** o verificador não sabe quem é o usuário, apenas verifica se a prova é válida.
- ▶ **Resistência a Vazamentos:** nenhum dado biométrico é armazenado no sistema, por isso não há o que ser vazado ou roubado.

Fase de registro

- O Usuário U inicia o processo de registro enviando sua face f_{reg} para o Modelo de IA M :

$$M \xleftarrow{f_{reg}} U$$

- M extrai a *embedding* e_{reg} de f_{reg} ao calcular:

$$e_{reg} := Emb(f_{reg})$$

- M envia a *embedding* e_{reg} para U :

$$M \xrightarrow{e_{reg}} U$$

- U gera uma chave simétrica k e criptografa sua *embedding*:

$$c_{reg} := Enc_k(e_{reg})$$

Fase de registro

5. U envia a *embedding* criptografada c_{reg} para o Servidor S :

$$U \xrightarrow{c_{reg}} S$$

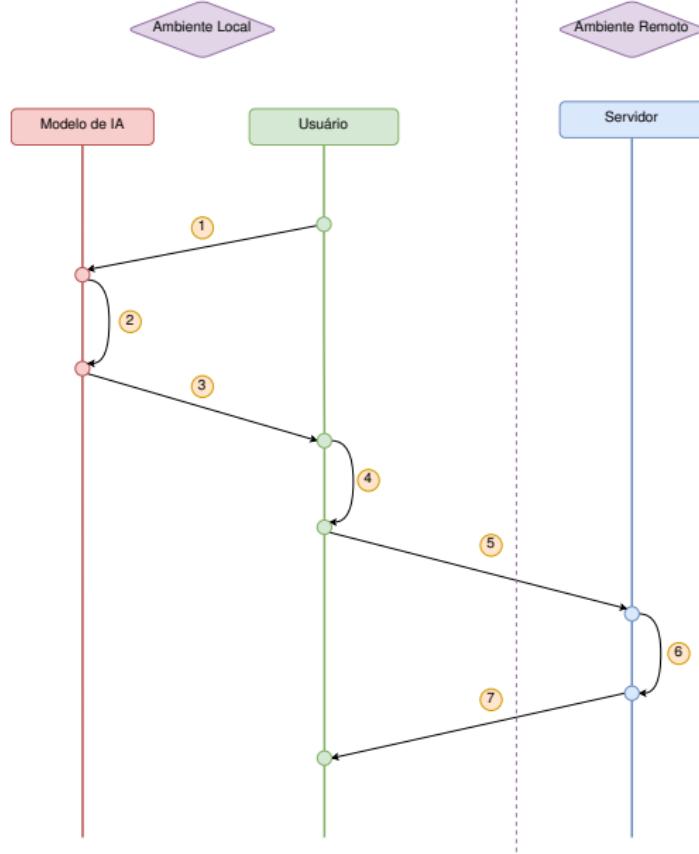
6. S armazena a *embedding* criptografada c_{reg} e gera um identificador único id :

$$id := GenId()$$

7. S envia o identificador id para U :

$$U \xleftarrow{id} S$$

Fase de registro



Fase de autenticação

- O Usuário U inicia o processo de autenticação ao enviar o identificador id ao Servidor S :

$$U \xrightarrow{id} S$$

- S envia a chave de prova S_p e uma cópia da *embedding* criptografada c_{reg} , que é correspondente ao id recebido, a U :

$$U \xleftarrow{S_p, c_{reg}} S$$

- U descriptografa a *embedding* e_{reg} recebida ao calcular:

$$e_{reg} := Dec_k(c_{reg})$$

Fase de autenticação

4. U solicita a prova do protocolo zk-SNARK ao enviar a chave de prova S_p , a *embedding* recém descriptografada e_{reg} e uma nova captura de sua face f_{cur} para o Modelo de IA M :

$$M \xleftarrow{S_p, e_{reg}, f_{cur}} U$$

5. M extrai a *embedding* e_{cur} a partir da face f_{cur} e gera a prova zk-SNARK π ao computar:

$$e_{cur} := Emb(f_{cur})$$

$$\pi := Prove(S_p, x = \tau, w = (e_{cur}, e_{reg}))$$

6. M envia a prova zk-SNARK π a U :

$$M \xrightarrow{\pi} U$$

Fase de autenticação

7. U envia a prova zk-SNARK π a S :

$$U \xrightarrow{\pi} S$$

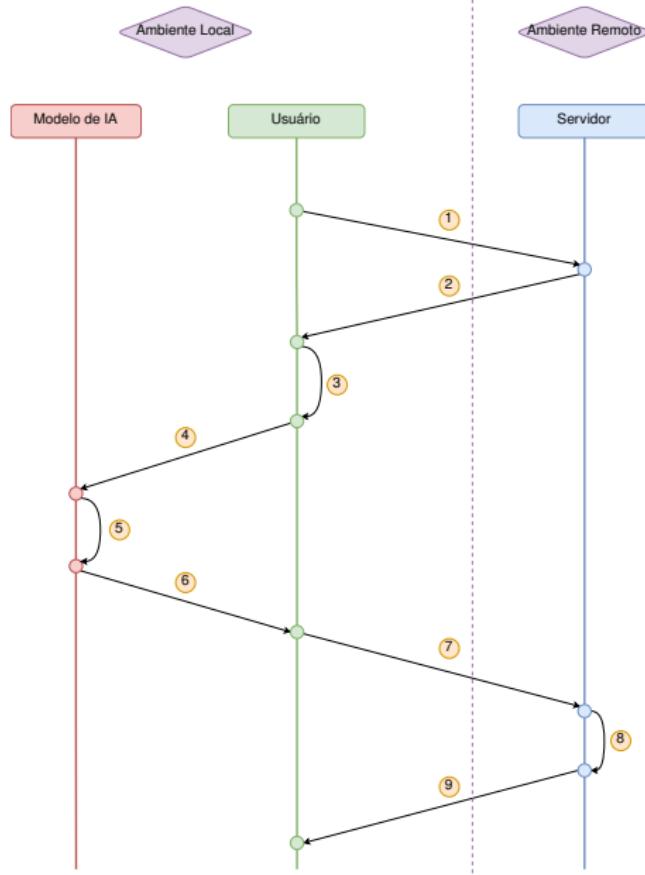
8. S verifica a validade da prova π ao calcular:

$$r := \text{Verify}(S_v, x = \tau, \pi)$$

9. S envia o veredito da autenticação r para U :

$$U \xleftarrow{r} S$$

Fase de autenticação



Muito obrigado!

