

# Provas de Conhecimento Zero: Um Estudo sobre zk-SNARKs e sua Aplicação em Sistemas de Autenticação

Alex Davis Neuwiem da Silva

Ciências da Computação | INE | CTC



UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA

# Introdução

## 1. Estudo Teórico

- ▶ Foi realizada uma análise aprofundada dos principais protocolos zk-SNARKs: foco em **Pinocchio** e **Groth16**.

## 2. Aplicação Prática

- ▶ Foi desenvolvido um sistema de autenticação biométrica facial que utiliza um dos protocolos estudados: **Groth16**.

# O que é uma Prova de Conhecimento Zero?

É um protocolo computacional entre duas partes:

- ▶ **Prorador  $P$ :** A parte que alega conhecer uma informação.
- ▶ **Verificador  $V$ :** A parte que valida a alegação.

Satisfaz as seguintes propriedades:

- ▶ **Completeness:** Se  $P$  é honesto,  $V$  sempre aceitará a prova.
- ▶ **Solidez:** Se  $P$  é desonesto,  $V$  só aceitará a prova com uma probabilidade negligenciável.
- ▶ **Conhecimento Zero:** Garante que o verificador seja convencido sem revelar nenhuma informação adicional além da veracidade dessa afirmação.

# Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

Autenticação Biométrica

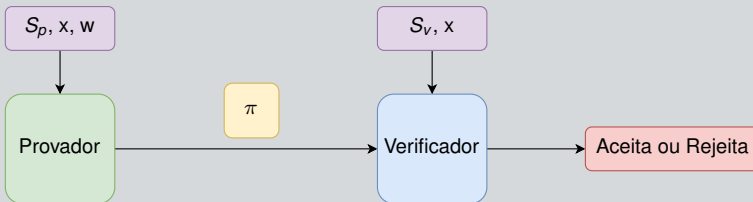
# O que é um zk-SNARK?

Uma classe especial de Prova de Conhecimento Zero:

- ▶ **Succinct** (Sucinto): O tamanho da prova e tempo de verificação são constantes.
- ▶ **Non-interactive** (Não-interativo): O Provedor envia uma única mensagem para o Verificador, geralmente requer uma cerimônia inicial.
- ▶ **AR**gument of **K**nowledge (Argumento de Conhecimento): A solidez é *computacional*, baseada na dificuldade de certos problemas, e não estatística.

# Processamento de uma prova

- ▶ Circuito  $C(x, w) = 0$
- ▶ Pré-Processamento  $S(C) \rightarrow (S_p, S_v)$



# Estrutura

zk-SNARKs

**Groth16**

Autenticação Biométrica

# Criptografia de Curvas Elípticas

Fundamentam o ambiente aritmético utilizado no protocolo:

- ▶  $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_T$  são grupos de pontos de curva elíptica
- ▶ Emparelhamento  $e : \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2 \rightarrow \mathbb{G}_T$
- ▶  $g_1$  e  $g_2$  são geradores de  $\mathbb{G}_1$  e  $\mathbb{G}_2$
- ▶  $e(g_1, g_2)$  é o gerador de  $\mathbb{G}_T$

Garantem propriedades:

- ▶ Logaritmo Discreto: Dado  $s \cdot g_1$  é difícil encontrar  $s$
- ▶ Coeficientes do emparelhamento podem ser reorganizados:  
$$e(s_1 \cdot g_1, s_2 \cdot g_2) = e(g_1, g_2)^{(s_1 \cdot s_2)}$$
- ▶ Permite que o protocolo funcione para múltiplos  $P$ s e  $V$ s



# Groth16: O Padrão de Eficiência

O Groth16 é uma otimização do protocolo Pinocchio, tornando-se o padrão da indústria.

Sua principal vantagem é a otimização:

- ▶ Reduz a prova a apenas **3 elementos**
- ▶ Reduz a verificação a apenas **3 emparelhamentos**

É dividido em 4 etapas:

- ▶ Aritmetização
- ▶ Cerimônia de confiança
- ▶ Geração da prova
- ▶ Verificação da prova

# Aritmetização

Transforma a computação em uma representação matemática verificável:

$$x^3 + x + 5 = y \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = x * x \\ v_2 = v_1 * x \\ y = (v_2 + x + 5) * 1 \end{array}}_{\text{Restrições}}, \quad \underbrace{w = [1, y, x, v_1, v_2]}_{\text{Vetor testemunha}}$$

Cada restrição  $i$  é reescrita na combinação  $w \cdot A_i \times w \cdot B_i = w \cdot C_i$ :

$$w \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1, 0 \\ 5, 0, 1, 0, 1 \end{bmatrix}}_A \times w \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}}_B = w \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1 \\ 0, 1, 0, 0, 0 \end{bmatrix}}_C$$

# Aritmetização

As matrizes que registram a progressão da computação são transformadas em matrizes de polinômios:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & y & x & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Interpolação dos pontos } (1, C_1) \dots (i, C_i)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2.5 & 0.5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ C \qquad \qquad \qquad O(x) \end{array}$$

Analogamente para as matrizes  $A$  e  $B$ , resultando em  $L(x)$  e  $R(x)$ , respectivamente.

# Aritmetização

Os polinômios resultantes:

$L(x)$

$$\begin{bmatrix} 5 & -7.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$R(x)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$O(x)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2.5 & 0.5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Obedecem à equação:

$$w \cdot L(x) \times w \cdot R(x) = w \cdot O(x)$$

# Aritmetização

A computação original foi rescrita como uma equação polinomial:

$$P(x) = w \cdot L(x) \times w \cdot R(x) - w \cdot O(x) = H(x) \times T(x)$$

Teorema Fundamental da Álgebra: Se  $P(x)$  possui raízes  $\{1, \dots, n\}$ , ele deve ser divisível por cada fator  $(x - 1) \dots (x - n)$ . Em nosso exemplo, temos:

$$T(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Note que  $L(x)$ ,  $R(x)$ ,  $O(x)$  e  $T(x)$  são públicos e apenas um provador honesto pode gerar  $P(x)$  e  $H(x)$ .

# A Otimização Chave do Groth16

A equação é reestruturada usando os valores aleatórios  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{aligned} &(\alpha + w \cdot L(x)) \times (\beta + w \cdot R(x)) = \\ &\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot w \cdot R(x) + \beta \cdot w \cdot L(x) + w \cdot O(\tau) + H(\tau) \cdot T(\tau) \end{aligned}$$

Verificação no ponto  $\tau$ , pelo lema de Schwartz-Zippel:

$$\begin{aligned} &\underbrace{e((\alpha + w \cdot L(\tau)) \cdot g_1)}_A, \underbrace{(\beta + w \cdot R(\tau)) \cdot g_2}_B = \\ &\underbrace{e(\alpha \cdot g_1, \beta \cdot g_2)}_D \cdot \\ &\underbrace{e((\alpha \cdot w \cdot R(\tau) + \beta \cdot w \cdot L(\tau) + w \cdot O(\tau) + H(\tau) \cdot T(\tau)), g_2)}_C \end{aligned}$$

# Cerimônia de Confiança

O Groth16 realiza uma cerimônia de confiança **específica do circuito** para gerar parâmetros públicos.

- ▶ Gera valores aleatórios secretos:  $\alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta$ .
- ▶ Estes valores devem ser descartados. Se guardados, podem criar provas falsas.
- ▶ A cerimônia gera a Chave de Prova ( $S_p$ ) e a Chave de Verificação ( $S_v$ ).

# Geração da Prova

Para garantir o **conhecimento zero**, o provador mascara os componentes da prova, gerando dois escalares aleatórios,  $r$  e  $s$ .

$$A = \alpha \cdot g_1 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot L_i(\tau) \cdot g_1 + r \cdot \delta \cdot g_1$$

$$B' = \beta \cdot g_1 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot R_i(\tau) \cdot g_1 + s \cdot \delta \cdot g_1$$

$$B = \beta \cdot g_2 + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot R_i(\tau) \cdot g_2 + s \cdot \delta \cdot g_2$$

$$C = \sum_{i=1}^{m-1} w_i \cdot \sigma_i + H(\tau) \cdot T(\tau) + s \cdot A + r \cdot B' - r \cdot s \cdot \delta \cdot g_1$$



# Verificação da Prova

Primeiramente, o verificador utiliza a parte pública da testemunha e  $\sigma_0, \dots, \sigma_{l-1}$  para calcular  $W$ :

$$W = \sum_{i=0}^{l-1} w_i \cdot \sigma_i$$

O verificador então insere a prova  $\pi$ , sua parte calculada  $W$ , e os elementos da chave de verificação na equação:

$$e(A, B) = e(\alpha \cdot g_1, \beta \cdot g_2) \cdot e(W, \gamma \cdot g_2) \cdot e(C, \delta \cdot g_2)$$

# Estrutura

zk-SNARKs

Groth16

**Autenticação Biométrica**

# Reconhecimento Facial com Similaridade de Cossenos

O reconhecimento facial pode ser modelado como uma tarefa de comparação entre vetores:

- ▶ Cada rosto é representado por um vetor de características (*embedding*)
- ▶ Vetores são gerados por redes neurais treinadas para extrair feições únicas

A comparação é feita utilizando a **similaridade de cossenos**.

# O que é a Similaridade de Cossenos?

A **similaridade de cossenos** mede o ângulo entre dois vetores:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$$

- ▶ Varia entre  $-1$  (opostos) e  $1$  (iguais)
- ▶ Se  $\cos(\theta) \approx 1$ , vetores são semelhantes  $\rightarrow$  rostos parecidos

# Autenticação com Similaridade de Cossenos

1. A imagem de entrada é convertida em vetor  $\vec{A}$
2. Vetor  $\vec{B}$  é previamente armazenado durante a etapa de registro
3. Se  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) > \tau$ , a autenticação é aceita

**Nota:**  $\tau$  é um limiar definido com base no modelo de IA (ex: 0.7)

# Problemas em Armazenar *Embeddings* Sem Proteção

*Embeddings* faciais são representações vetoriais únicas do rosto de uma pessoa. Armazená-las sem proteção apresenta riscos sérios:

- ▶ **Embeddings são identificadores biométricos:** um atacante pode usar *embeddings* roubadas para reconstruir um rosto e se autenticar como outra pessoa
- ▶ **Vazamentos são irreversíveis:** diferente de senhas, as representações vetoriais são insubstituíveis

# Problemas em Armazenar *Embeddings* Sem Proteção

*Embeddings* faciais são representações vetoriais únicas do rosto de uma pessoa. Armazená-las sem proteção apresenta riscos sérios:

- ▶ **Embeddings são identificadores biométricos:** um atacante pode usar *embeddings* roubadas para reconstruir um rosto e se autenticar como outra pessoa
- ▶ **Vazamentos são irreversíveis:** diferente de senhas, as representações vetoriais são insubstituíveis

**Solução:** usar **provas de conhecimento zero** para provar correspondência sem expor o vetor.

# Integração com Provas de Conhecimento Zero

O cálculo da similaridade de cosseno pode ser embutido no circuito de prova de conhecimento zero:

- ▶  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) > \tau$  é o circuito a ser verificado
- ▶ O limiar de similaridade  $\tau$  é o parâmetro público
- ▶ As *embeddings* faciais representam os valores privados

Isso permite autenticação facial **sem revelar** os vetores faciais.



# Vantagens do Método Proposto

O sistema de autenticação com provas de conhecimento zero traz benefícios significativos:

- ▶ **Privacidade Total:** o verificador não sabe quem é o usuário, apenas verifica se a prova é válida.
- ▶ **Resistência a Vazamentos:** nenhum dado biométrico é armazenado no sistema, por isso não há o que ser vazado ou roubado.

# Fase de registro

1. O Usuário  $U$  inicia o processo de registro enviando sua face  $f_{reg}$  para o Modelo de IA  $M$ :

$$M \xleftarrow{f_{reg}} U$$

2.  $M$  extrai a *embedding*  $e_{reg}$  de  $f_{reg}$  ao calcular:

$$e_{reg} := Emb(f_{reg})$$

3.  $M$  envia a *embedding*  $e_{reg}$  para  $U$ :

$$M \xrightarrow{e_{reg}} U$$

4.  $U$  gera uma chave simétrica  $k$  e criptografa sua *embedding*:

$$c_{reg} := Enc_k(e_{reg})$$

## Fase de registro

5.  $U$  envia a *embedding* criptografada  $c_{reg}$  para o Servidor  $S$ :

$$U \xrightarrow{c_{reg}} S$$

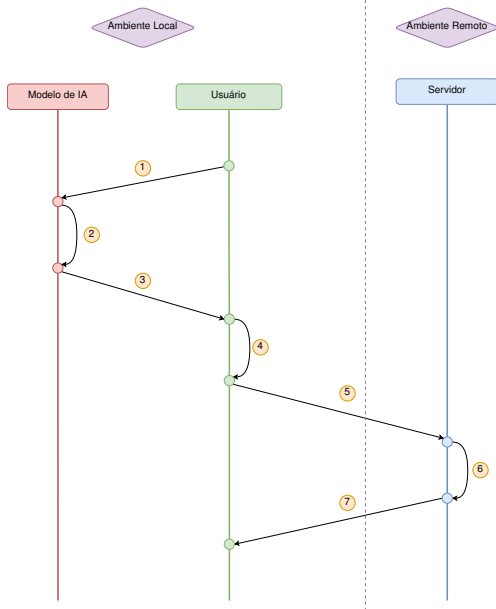
6.  $S$  armazena a *embedding* criptografada  $c_{reg}$  e gera um identificador único  $id$ :

$$id := GenId()$$

7.  $S$  envia o identificador  $id$  para  $U$ :

$$U \xleftarrow{id} S$$

# Fase de registro



# Fase de autenticação

1. O Usuário  $U$  inicia o processo de autenticação ao enviar o identificador  $id$  ao Servidor  $S$ :

$$U \xrightarrow{id} S$$

2.  $S$  envia a chave de prova  $S_p$  e uma cópia da *embedding* criptografada  $c_{reg}$ , que é correspondente ao  $id$  recebido, a  $U$ :

$$U \xleftarrow{S_p, c_{reg}} S$$

3.  $U$  descriptografa a *embedding*  $e_{reg}$  recebida ao calcular:

$$e_{reg} := Dec_k(c_{reg})$$

# Fase de autenticação

4.  $U$  solicita a prova do protocolo zk-SNARK ao enviar a chave de prova  $S_p$ , a *embedding* recém descriptografada  $e_{reg}$  e uma nova captura de sua face  $f_{cur}$  para o Modelo de IA  $M$ :

$$M \xleftarrow{S_p, e_{reg}, f_{cur}} U$$

5.  $M$  extrai a *embedding*  $e_{cur}$  a partir da face  $f_{cur}$  e gera a prova zk-SNARK  $\pi$  ao computar:

$$e_{cur} := Emb(f_{cur})$$

$$\pi := Prove(S_p, x = \tau, w = (e_{cur}, e_{reg}))$$

6.  $M$  envia a prova zk-SNARK  $\pi$  a  $U$ :

$$M \xrightarrow{\pi} U$$

# Fase de autenticação

7.  $U$  envia a prova zk-SNARK  $\pi$  a  $S$ :

$$U \xrightarrow{\pi} S$$

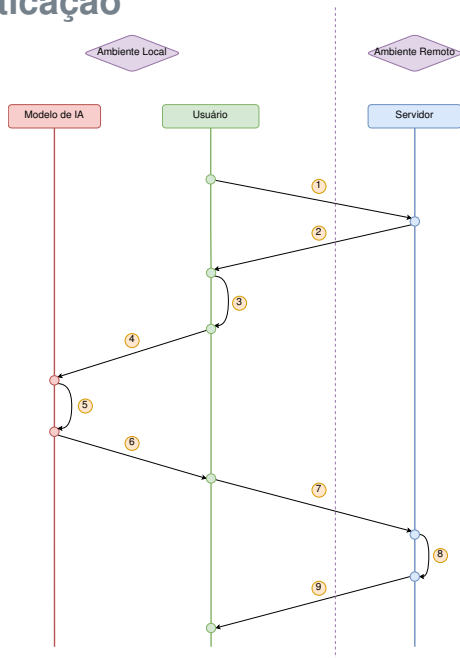
8.  $S$  verifica a validade da prova  $\pi$  ao calcular:

$$r := \text{Verify}(S_v, x = \tau, \pi)$$

9.  $S$  envia o veredito da autenticação  $r$  para  $U$ :

$$U \xleftarrow{r} S$$

# Fase de autenticação





# Tempo médio das operações do sistema

Métrica	Tempo Médio (s)	Responsável
Geração de <i>embeddings</i>	0.31	Modelo de IA
Geração da FRC	19.74	Servidor
Geração da prova	1.42	Modelo de IA
Verificação da prova	0.52	Servidor
Etapa de registro	0.39	Usuário
Etapa de autenticação	2.27	Usuário

**Muito obrigado!**



UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA