

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTÉ DES SCIENCES



MÉMOIRE

Un principe d'équivalence fort inspiré des théories de Yang-Mills

Auteur :

Alexandre DE SPIEGELEER

Promoteur :

Prof. J-M. GÉRARD

Lecteurs :

Prof. V. LEMAITRE

Prof. C. RINGEVAL

Juin 2015

Remerciements

Je voudrais tout particulièrement remercier mon promoteur, professeur Jean-Marc Gérard, pour m'avoir permis de travailler sur ce sujet qui est des plus intéressants. Je le remercie aussi d'avoir répondu à mes nombreuses questions, et, de manière générale, l'aide apportée durant l'élaboration de ce mémoire.

De plus, je tiens à remercier Bea ainsi que mon papa pour la relecture de mon mémoire. Ensuite, je voudrais remercier mes camarades physiciens pour toutes les discussions que nous avons pu avoir. C'est en effet lors de ces discussions que ma compréhension du sujet s'est accentuée.

Finalement, je remercie ma famille pour le soutien apporté lors de l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

| | |
|--|------------|
| Remerciements | iii |
| Contenu | iv |
| Introduction | 1 |
| 1 Les théories de Yang-Mills | 3 |
| 1.1 Les interactions électromagnétique, faible et forte | 3 |
| 1.2 Une théorie de Yang-Mills pour la gravitation | 6 |
| 1.2.1 Le lagrangien de la relativité générale | 6 |
| 1.2.2 Le lagrangien de type Yang-Mills pour la gravitation | 7 |
| 2 Les équations de champ | 9 |
| 2.1 Variation par rapport à la connexion | 10 |
| 2.2 Variation par rapport à la métrique | 11 |
| 3 Les principes d'équivalence | 15 |
| 3.1 Le principe d'équivalence faible | 16 |
| 3.2 Le principe d'équivalence fort | 18 |
| 4 Solutions aux équations de champ | 23 |
| 4.1 La théorie scalaire de Nordström | 23 |
| 4.1.1 Et la gravitation ? | 24 |
| 4.2 La théorie tensorielle d'Einstein | 25 |
| 4.2.1 La métrique de Schwarzschild-de Sitter | 26 |
| 4.2.2 La métrique de Nariai | 27 |
| 5 Solutions, principe d'équivalence et perspectives | 31 |
| 5.1 La théorie scalaire de Nordström | 31 |
| 5.2 La théorie tensorielle d'Einstein | 32 |
| 5.2.1 La métrique de Schwarzschild-de Sitter | 32 |
| 5.2.2 La métrique de Nariai | 35 |
| Conclusion | 37 |

| | |
|---|-----------|
| Annexes | 37 |
| A Méthode de Palatini pour le lagrangien de la relativité générale | 39 |
| A.1 Méthode de Palatini | 39 |
| A.1.1 Variation par rapport à la métrique | 40 |
| A.1.2 Variation par rapport à la connexion | 40 |
| B Méthode de Palatini pour le lagrangien de Yang-Mills | 43 |
| C Réécriture des équations de champ | 47 |
| D Les équations de champ pour les théories d'Einstein et de Nordström | 49 |
| E La théorie d'Einstein et solution en présence d'une constante cosmologique | 57 |
| F La métrique de Nariai comme une limite de celle de Schwarzschild-de Sitter | 59 |

Introduction

Le principe d'équivalence apparaît à plusieurs reprises dans l'histoire de la gravitation et ce, de Galilée jusqu'à nos jours. Dans sa version faible, celui-ci rend compte d'une propriété à priori étrange satisfaite par la gravitation dans le monde dans lequel nous vivons. En effet, nous constatons qu'au voisinage d'un corps massif, deux corps tests de masses différentes tombent avec la même accélération.

Il y a près d'un siècle, Einstein imposa, en l'absence d'un champ gravitationnel, de retrouver les propriétés établies dans le cadre de la relativité restreinte. Cette version, dite d'Einstein, du principe d'équivalence fût une étape importante dans l'élaboration de la relativité générale. Cependant, la théorie qu'il développa s'avère satisfaire une version encore plus forte du principe d'équivalence.

Les tests sur ces différentes versions du principe d'équivalence sont d'une importance capitale. En particulier, ils permettent de nous renseigner au sujet du principe d'équivalence fort. Si ce dernier est violé, cela nous indiquerait alors que la théorie de la relativité générale n'est pas correcte, ou du moins, pas complète. La violation du principe d'équivalence fort pourrait donc servir de guide pour le développement de nouvelles théories de la gravitation.

Dans ce travail, nous discuterons du principe d'équivalence fort. Pour ce faire, nous allons nous inspirer du lien entre les théories de Yang-Mills et le principe d'équivalence fort.

Nous commencerons par rappeler, dans le chapitre 1, la construction des théories de Yang-Mills pour ensuite l'étendre au cas de la gravitation.

Jusqu'à présent, la recherche sur le principe d'équivalence fort repose sur un critère permettant de vérifier si une théorie métrique satisfait au principe d'équivalence fort dans l'approximation de champ faible. En vue d'établir un critère plus général, nous introduirons dans le chapitre 2, deux équations *tensorielles* que nous conjecturerons comme étant l'expression mathématique *exacte* du principe d'équivalence fort. Dans le chapitre suivant, nous montrerons que ces équations tensorielles sont effectivement intimement liées au principe d'équivalence fort.

Nous aborderons finalement, dans les chapitres 4 et 5, les différentes solutions aux deux équations tensorielles et regarderons si elles satisfont bien au principe d'équivalence fort. Deux solutions déjà connues dans le cadre du principe d'équivalence fort se manifestent. En plus de celles-ci, nous montrerons que d'autres solutions apparaissent.

Chapitre 1

Les théories de Yang-Mills

L'importance des théories de Yang-Mills en physique fondamentale ne peut être sous-estimée. Les interactions forte, faible et électromagnétique sont construites de manière identique sur une intuition géométrique appelé *invariance de jauge*. L'unique différence entre chacune de ces théories vient du groupe considéré. La symétrie interne pour l'interaction forte est $SU(3)$, pour l'interaction faible le groupe en question est $SU(2)$ et $U(1)$ pour l'électromagnétisme. La gravitation quant à elle satisfait aussi à l'invariance de jauge, le groupe est dans ce cas celui des *difféomorphismes*. La construction de la gravitation, invariante sous les difféomorphismes, n'est cependant pas faite de manière similaire aux trois autres interactions mentionnées ci-dessus et sera donc le sujet de la section 1.2.

Explicitons l'intuition derrière l'invariance de jauge dans le cas particulier de l'interaction forte. Celle-ci implique que la théorie soit invariante *localement* sous les rotations dans un espace fictif de la base associée aux couleurs. Nous voulons en effet pouvoir changer, à notre guise, la couleur d'un quark. C'est pour cette exacte raison que nous devons introduire des connexions (les gluons).

Dans la première section de ce chapitre, nous regarderons comment construire un lagrangien pour une théorie quantique des champs pour le groupe $SU(n)$ et établirons ensuite la position de la gravitation et du groupe des difféomorphismes.

1.1 Les interactions électromagnétique, faible et forte

Rappelons comment construire un lagrangien dans le cadre d'une théorie quantique des champs pour le groupe $SU(n)$. Le terme cinétique du lagrangien pour le champ de

matière (fermions) de masse m prend la forme suivante [1] :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi. \quad (1.1)$$

avec Ψ une famille de fermions. Imposer l'invariance de jauge revient à demander que le lagrangien soit invariant sous la transformation $\Psi \rightarrow V(x)\Psi$ avec $V(x) = e^{i\alpha^a(x)\tau^a}$. Les matrices τ^a étant les générateurs infinitésimaux du groupe considéré. Celles-ci sont hermitiennes et de trace nulle. Cette transformation de jauge agit sur les composantes internes du spineur Ψ associé au groupe. La dépendance en x dans les fonctions α^a , et donc de V , rend notre théorie *localement* invariante de jauge.

Constatons directement que le lagrangien 1.1 n'est pas invariant de jauge car la dérivée agit sur la matrice $V(x)$. Pour lui donner cette propriété, nous introduisons des champs de jauge, en même nombre que les générateurs du groupe. Ceux-ci permettent de rendre le lagrangien 1.1 invariant sous de telles transformations. La dérivée agissant sur le spineur est alors substituée par la dérivée covariante :

$$D_\mu = \mathbb{I}_{n \times n} \partial_\mu - ig A_\mu^a \tau^a \quad (1.2)$$

avec g , la constante de couplage et A_μ^a , le champ de jauge que l'on appelle aussi connexion. Pour assurer l'invariance de jauge, les champs de jauge doivent se transformer comme :

$$A_\mu^a \tau^a \rightarrow A_\mu'^a \tau^a = V(x) A_\mu^a \tau^a V(x)^\dagger - \frac{i}{g} \partial_\mu V(x) V(x)^\dagger.$$

Le lagrangien, qui est maintenant invariant de jauge s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi. \quad (1.3)$$

L'apparition de la dérivée covariante et a fortiori des champs A_μ^a signifie alors l'existence d'un terme d'interaction entre les bosons de jauge et la matière (fermions) dont la « force » est contrôlée par la constante de couplage g (figure 1.1).

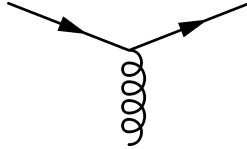


FIGURE 1.1: Interaction entre un fermion et un boson de jauge

Cependant, ce lagrangien n'est pas complet étant donné que les champs de jauge ont été introduits sans le terme cinétique leurs permettant de se propager. Construisons un

terme, invariant de jauge, et de Lorentz¹ qui, pour l'électromagnétisme doit pouvoir nous donner les équations de Maxwell. La dérivée covariante obtenue ci-dessus à été construite de sorte à se transformer de la façon suivante :

$$D_\mu \rightarrow V(x) D_\mu V^\dagger(x). \quad (1.4)$$

Nous définissons alors le tenseur :

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \tau^a \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (1.5)$$

qui, par construction, se transforme comme la dérivée covariante. Un calcul explicite nous donne son expression :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.6)$$

avec les f^{abc} les constantes de structure du groupe définis par la relation $[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc} \tau^c$. Pour obtenir une quantité scalaire et invariante de Lorentz, nous considérons le terme :

$$\text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^a \tau^a F^{\mu\nu b} \tau^b \right). \quad (1.7)$$

En utilisant les propriétés des générateurs de $SU(n)$ ainsi qu'une normalisation adaptée, nous obtenons :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (1.8)$$

D'une part, la variation de ce lagrangien par rapport au champ spinoriel nous donne l'équation de Dirac pour le fermion en présence du champ de jauge et d'autre part, la variation par rapport à la connexion, nous donne l'équation classique pour le champ de jauge :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu a} + g f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = -g j_\nu^a \quad (1.9)$$

Dans le cas particulier où $f^{abc} = 0$, nous retrouvons les équations de Maxwell de l'électrodynamique classique.

Le terme "cinétique" associé aux bosons de jauge est celui qui nous intéresse le plus. Effectivement, dans le cadre des théories non-abéliennes, des termes d'interactions entre bosons de jauge existent ! Un exemple de tels couplages à 3 ou 4 gluons apparaît pour les interactions fortes ($n = 3$) comme illustré sur la figure 1.2.

1. Une condition supplémentaire est la renormalisabilité de la théorie mais ce point ne sera pas discuté.



FIGURE 1.2: Interaction à 3 et 4 gluons

L'intensité des interactions entre bosons de jauge est donnée par g pour le vertex à 3 gluons et par g^2 pour le vertex à 4 gluons. Cette propriété apparaît naturellement et est nécessaire pour obtenir l'identité de Ward² et donc pour la conservation du courant. L'apparition de la constante g est en fait une conséquence de l'invariance de jauge initialement supposée.

1.2 Une théorie de Yang-Mills pour la gravitation

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que du cas de trois des quatre interactions fondamentales. Qu'en est-il de la gravitation ? Celle-ci se distingue des autres de plusieurs façons. Tout d'abord le groupe de symétrie associé à la gravitation est celui des difféomorphismes alors que le lagrangien de Yang-Mills 1.8 est construit pour le groupe $SU(n)$. D'autre part, la matière sur laquelle agit la gravitation est de type bosonique et non fermionique comme c'est le cas pour les trois autres interactions fondamentales discutées dans la section précédente. En effet les objets de tailles macroscopique n'ont pas de spin et sont donc soumis à la statistique de Bose-Einstein.

1.2.1 Le lagrangien de la relativité générale

La théorie relativiste de la gravitation est dictée par les équations d'Einstein qui, en présence de matière ($T_{\mu\nu} \neq 0$) et d'une constante cosmologique sont données par :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

avec $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, Λ : la constante cosmologique, $g_{\mu\nu}$: la métrique de signature $(+, -, -, -)$, $R_{\mu\nu}$: le tenseur de Ricci et R : le scalaire de courbure.

Ces équation sont tensorielles et de ce fait, contiennent l'invariance de jauge dans le cadre

2. Identité nous assurant que pour tout processus physique faisant intervenir des bosons de jauge externe, seules les polarisations physique de ceux-ci peuvent être produit.

de la relativité générale. En effet, le désir d'Einstein lorsqu'il construisit sa théorie relativiste de la gravitation était d'avoir des équations covariantes i.e. des équations gardant la même forme sous changement de coordonnées. Il est dès lors évident, puisque tout tenseur ayant les mêmes indices covariants et contravariants se transforme de la même manière sous changement de coordonnées, que les équations doivent être tensorielles. L'ensemble de ces changements de coordonnées constituent le groupe des *difféomorphismes*.

La construction d'un lagrangien invariant sous difféomorphisme est directe, il suffit de construire une quantité scalaire à partir de tenseurs covariants et contravariants. Ce procédé est commun en relativité générale. L'action considérée est le scalaire de courbure auquel nous ajoutons un terme pour la constante cosmologique ainsi qu'un terme de matière :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M^b \right\} \quad (1.11)$$

avec \mathcal{L}_M^b , le lagrangien de matière (bosons) qui dépend uniquement de la métrique. Il suffit alors de faire varier l'action associée par rapport à la métrique pour retrouver les équations d'Einstein.

À priori, le choix de ce lagrangien en particulier est "arbitraire". Il s'agit en fait de l'expression la plus simple qui nous permette d'obtenir les équations d'Einstein. Mais pourquoi devrions-nous considérer le scalaire de courbure plutôt que n'importe quelle autre expression invariante de jauge ? Pourquoi ne pas nous inspirer des autres interactions fondamentales ?

1.2.2 Le lagrangien de type Yang-Mills pour la gravitation

L'idée naturelle est alors de construire un lagrangien de type Yang-Mills mais cette fois, dans le cadre du groupe des difféomorphismes.

L'équivalent du terme 1.1 est alors de mettre un lagrangien de matière comme ce qui est fait pour le lagrangien usuel.

Pour nous simplifier la tâche, supposons que nous travaillons dans un espace sans torsion impliquant alors $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu$. Construisons à présent le terme cinétique des bosons de jauge dans le cas qui nous concerne ici. Nous définissons, de manière équivalente à ce qui a été fait précédemment, le tenseur de Riemann à l'aide de la dérivée covariante :

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma S^\mu = [D_\nu, D_\rho] S^\sigma \quad (1.12)$$

avec la dérivée covariante : $D_\mu S^\nu = \partial_\mu S^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu S^\alpha$ et S^α , un vecteur contravariant de l'espace. Le calcul explicite nous donne, pour le tenseur de Riemann :

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} \equiv \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma. \quad (1.13)$$

La construction d'un lagrangien de type Yang-Mills dans le cadre de la relativité générale est évidente à présent :

$$S_{YM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \alpha g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} R^\sigma{}_{\lambda\mu'\nu'} + \mathcal{L}_M^b \right\} \quad (1.14)$$

avec \mathcal{L}_M le lagrangien de matière bosonique et α un paramètre réel quelconque.

Notons dans un premier temps que le tenseur de Riemann est de dimension deux. Ainsi, la constante α est adimensionnel par contraste avec la constante κ introduite pour l'action habituellement considérée (éq. 1.11) qui est de dimension deux. Notons dans un second temps que nous n'introduisons pas de constante cosmologique directement dans le lagrangien.

Précédemment la variation de l'action par rapport à la *connexion* nous donnait la généralisation des équations de Maxwell pour des théories de Yang-Mills mais la construction de la relativité générale quant à elle est basée sur la variation de l'action par rapport à la *métrique*. Que devons-nous alors faire ? À priori la variation par rapport à la métrique est obligatoire, mais qu'en est-il de la variation par rapport à la connexion ? En effet cette dernière, pour un espace sans torsion, correspond aux symboles de Christoffel qui eux, ne sont pas des objets fondamentaux mais sont fonction de la métrique. Dans le chapitre suivant, au lieu de varier l'action uniquement en terme de la métrique, nous appliquerons la méthode de variation de Palatini. Ceci nous donnera alors deux équations de champ qui seront les équations centrale dans ce travail.

Chapitre 2

Les équations de champ

Le problème révélé par la construction d'une théorie de Yang-Mills pour la gravitation peut être résolu en appliquant la méthode variationnelle de Palatini. Cette méthode consiste à considérer la métrique ainsi que la connexion comme deux objets indépendants. Sous cette hypothèse, les variations de l'action peuvent être effectuées par rapport à soit la connexion, soit la métrique, comme cela est fait dans le cadre des théories de Yang-Mills et de la gravitation, respectivement.

Il est intéressant de vérifier d'abord ce que cette méthode de variation donne dans le cas du lagrangien utilisé en relativité générale. Les détails de calculs pourront être trouvés en annexe [A](#)¹. Le résultat obtenu est simple et se présente sous forme de deux équations tensorielles :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^b \quad (2.1)$$

$$D_\alpha g_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.2)$$

L'équation [2.1](#), obtenue en variant l'action par rapport à la métrique correspond exactement à l'équation d'Einstein. Nous pouvons dès lors nous dire que notre méthode de variation est cohérente. Une différence majeure est attendue lors de la variation par rapport à la connexion. La deuxième équation qui résulte de cette méthode de variation peut sembler évidente mais apparaît comme une *condition* lorsque l'on varie par rapport à la connexion étant donné que nous n'avons jamais supposé $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Celle-ci est très importante du point de vue physique. Le fait que la dérivée covariante de la métrique s'annule nous assure que la connexion est bien la connexion métrique. De plus, elle renferme une implication géométrique et physique considérable : les longueurs et les angles

1. Le calcul est effectué en présence de matière mais sans constante cosmologique.

sont conservés lors de transports parallèles sur une variété courbe. Ce fait nous permet de faire de la physique. En effet, celle-ci repose sur l'expérience et la reproductibilité des expériences, il est dès lors fondamentale de pouvoir effectuer et comparer des mesures lorsque l'on se trouve dans un espace courbe.

C'est là tout l'intérêt de cette méthode de variation.

Nous allons à présent faire de même dans le cas du lagrangien de type Yang-Mills en espérant pouvoir aussi donner une signification physique à la condition qui sera obtenue lors de la variation par rapport à la connexion.

2.1 Variation par rapport à la connexion

Commençons par regarder l'équivalent de la condition obtenue sur la métrique. En observant la façon dont l'équation 2.2 a été obtenue, nous nous attendons à ce que la condition soit à nouveau du type : dérivée covariante d'un tenseur s'annule. Ceci a été fait en annexe B et l'on trouve effectivement :

$$\boxed{D_\alpha R^\alpha_{\mu\nu\rho} = 0} . \quad (2.3)$$

Cette équation, ainsi que la condition (2.2) sont l'analogue des équations de Maxwell dans le vide. Constatons que dans cette équation, aucun terme de matière n'apparaît. En effet, le lagrangien pour la matière bosonique dépend de la métrique uniquement et non de la connexion. L'équation 2.2 a une signification physique considérable et il sera intéressant de voir ce qu'il en est dans le cas présent. Étant donné l'importance que prendra cette condition dans les chapitres suivants, nous allons la réécrire sous différentes formes équivalentes. Ceci nous simplifiera la tâche ultérieurement.

Une première réécriture est obtenue par l'intermédiaire des identités de Bianchi :

$$D_\epsilon R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + D_\gamma R^\alpha_{\beta\delta\epsilon} + D_\delta R^\alpha_{\beta\epsilon\gamma} = 0 . \quad (2.4)$$

En la contractant une fois, cela nous donne :

$$D_\alpha R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + D_\gamma R_{\beta\delta} - D_\delta R_{\beta\gamma} = 0$$

où nous avons utilisé l'antisymétrie du tenseur de Riemann. Nous avons directement l'équivalence entre l'équation 2.3 et

$$D_\gamma R_{\beta\delta} - D_\delta R_{\beta\gamma} = 0 . \quad (2.5)$$

Sous cette forme, il est alors direct de voir que les équations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

satisfont à 2.3.

Une seconde expression équivalente est possible. La démonstration se trouve en annexe C où l'on montre que la condition 2.3 est équivalente au couple d'équations ci-dessous :

$$D_\nu W_{\alpha\beta\gamma}{}^\nu = 0 \quad (2.7)$$

$$D_\nu R = 0. \quad (2.8)$$

Pour montrer ceci, nous devons utiliser les identités de Bianchi ainsi que la décomposition du tenseur de Riemann en terme du tenseur de Weyl, Ricci et du scalaire de courbure. Dans un espace-temps de dimension quatre, nous avons :

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\rho} &= W_{\lambda\mu\nu\rho} \\ &\quad - \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu} R_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho}) \\ &\quad - \frac{1}{6} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) R \end{aligned}$$

Regardons à présent ce qui nous donnera l'équivalent de l'équation d'Einstein.

2.2 Variation par rapport à la métrique

Au vu de l'expression plus complexe du lagrangien que l'on considère (équation 1.14), il semble peu probable de retrouver exactement l'équation d'Einstein.

Le calcul de la variation du lagrangien de type Yang-Mills pour la gravitation peut être trouvé en annexe B, nous donnons ici le résultat :

$$\boxed{R_{\alpha\mu\nu\rho} R^{\beta\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta_\alpha^\beta R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = T_\alpha^{\beta}{}^\beta}. \quad (2.9)$$

Cette expression semble compliquée mais il est possible de montrer que l'équation d'Einstein *sans matière* ($T_\alpha^{\beta}{}^\beta = 0$) mais avec *constante cosmologique* ($\Lambda \neq 0$) en est solution. Pour ce faire, il est utile de réécrire l'équation 2.9 sous une forme alternative. À nouveau, nous décomposons le tenseur de Riemann en terme du Weyl, du Ricci sans trace (${}^0R_{\alpha\beta}$) ainsi que du scalaire de courbure.

En faisant cette substitution dans l'équation 2.9 :

$$W_{\alpha\nu\lambda\sigma}W^{\beta\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha}^{\beta}W_{\lambda\sigma\mu\nu}W^{\lambda\sigma\mu\nu} - \left(W_{\alpha\nu}{}^{\beta}{}_{\sigma}{}^0R^{\nu\sigma} + W_{\alpha}{}^{\sigma\beta\nu}{}^0R_{\nu\sigma}\right) + \frac{1}{3}{}^0R_{\alpha}^{\beta}R = 0 . \quad (2.10)$$

En dimension quatre, il existe l'équivalent de l'identité 2.9 mais pour le tenseur de Weyl. En utilisant alors les propriétés de symétrie du tenseur de Weyl², nous obtenons finalement :

$$W_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}^0R^{\gamma\beta} = -\frac{1}{6}{}^0R_{\alpha}{}^{\delta}R . \quad (2.11)$$

Plusieurs solutions apparaissent alors de manière explicite. La première est de prendre ${}^0R^{\alpha\beta} = 0$. L'équation d'Einstein en présence d'une constante cosmologique fait justement partie de cette classe de solution ! L'équation 2.6 implique effectivement que :

$${}^0R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.12)$$

On constate alors que l'équation d'Einstein est solution non seulement de l'équation 2.3 mais aussi de 2.9 et devra donc apparaître lorsque l'on cherchera toutes les solutions des équations de champ.

Comme nous le verrons ultérieurement dans un calcul détaillé, la constante cosmologique apparaît comme une constante d'intégration et ne doit pas être ajoutée au lagrangien de manière *ad hoc*.

On observe d'autre part qu'une autre solution à l'équation 2.11 est possible :

$$W_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (2.13)$$

$$R = 0 . \quad (2.14)$$

Cette dernière est aussi solution de l'équation 2.9 et de 2.3.

Le lagrangien que l'on étudie ici en appliquant la méthode de variation de Palatini admet donc plusieurs solutions et pas seulement celle d'Einstein ! La seconde solution que nous avons donné ci-dessus correspond au cas de la théorie scalaire de Nordström.

Il est en fait possible de montrer l'**équivalence** entre les équations de champ sans matière ($T_{\alpha}^{\beta} = 0$) que l'on a obtenu avec l'équation d'Einstein et la théorie de Nordström [2]. Pour ce faire, nous avons fait l'hypothèse d'une métrique à symétrie sphérique qui prend la forme suivante :

$$c^2d\tau^2 = e^{2\mu}c^2dt^2 - e^{2\nu}dr^2 - \rho^2d\theta^2 - \rho^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.15)$$

2. qui sont les mêmes que celles du tenseur de Riemann

où les fonctions μ , ν et ρ sont des fonctions de r et t .

Pour inclure tous les cas possibles nous avons laissé la liberté au niveau de la partie radiale. En effet, prendre $\rho = r$ ne tiendrait pas compte du cas où ρ est une constante. Le calcul détaillé pour montrer l'équivalence entre les équations de champ et les deux solutions données ci-dessus peuvent être trouvés en annexe [D](#).

Dans ce chapitre, nous avons donc regardé plus en détails les équations de champ dérivées à l'aide de la méthode de variation de Palatini. De plus, nous avons montré l'équivalence entre ces équations avec deux théories bien connues que sont : la théorie de Nordström et celle d'Einstein avec une constante cosmologique non nulle.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons les différents principes d'équivalence et remarquerons le lien avec ce qui a été fait jusqu'à présent.

Chapitre 3

Les principes d'équivalence

À priori, ce que nous avons fait jusqu'à présent n'est en rien lié aux principes d'équivalence. Nous allons maintenant rappeler ce qu'est le principe d'équivalence faible, le principe d'équivalence d'Einstein et le principe d'équivalence fort, ainsi que l'importance qu'ont joué ceux-ci dans l'élaboration d'une théorie relativiste de la gravitation.

L'idée du principe d'équivalence n'est clairement pas nouvelle. En effet, il aurait été énoncé pour la première fois [3] au début du XVII^{ème} siècle par Galileo Galilei. Il expliquait alors que deux corps en chute libre dans un champ gravitationnel sont soumis à la même accélération, quelle que soit leur composition. Bien entendu, cette formulation fût modifiée au fur et à mesure des années par une meilleure compréhension de la gravitation.

Effectivement, ce principe est intégré dans la théorie de la gravitation développée par Newton lorsque l'on impose l'égalité entre la masse inertielle et gravitationnelle. L'énoncé du principe d'équivalence ne demandant plus alors l'accélération "universelle" mais devient l'exigence de l'égalité entre ces deux masses.

Des expériences ont vérifié qu'effectivement ce principe est satisfait. Nous pouvons par exemple mentionner l'expérience menée par la NASA lors de leur voyage sur la Lune par Apollo 15 en 1971. L'astronaute Dave Scott laissa tomber une plume ainsi qu'un marteau. Après quelques secondes, celui-ci s'exprima [4] :

Which proves that Mr. Galileo was correct in his findings.

Ceci ne fût qu'une des nombreuses expériences liées au principe d'équivalence. Il en existe d'ailleurs toujours spécialement conçues à cet effet. On peut par exemple mentionner le projet **STEP** [5] avec un satellite orbitant autour de la Terre. Celui-ci a pour objectif d'améliorer la résolution entre masse inertielle et gravitationnelle de 5 à 6 ordres de grandeur. Ce satellite contient quatre paires de masses tests de différentes compositions protégées par de nombreux mécanismes pour éviter des interactions avec, par exemple,

le vent solaire ou encore le champ magnétique de la Terre, de sorte à ne pas perturber la chute libre de celles-ci. La mesure vise à rechercher un quelconque décalage dans l'orbite des différentes masses.

3.1 Le principe d'équivalence faible

Le principe autrefois énoncé par Galileo Galilei et ensuite intégré dans la mécanique de Newton est maintenant connu sous le nom de principe d'équivalence faible. *Faible* car il existe des versions plus raffinées de ce principe. Celles-ci seront mentionnées ultérieurement.

Le principe d'équivalence faible se comprend de manière relativement simple dans le cadre de la théorie Newtonienne. Une particule soumise à différentes forces va ressentir une accélération décrite à l'aide de la seconde loi de Newton :

$$\vec{F} = m_{in.} \vec{a} \quad (3.1)$$

avec \vec{F} , la somme des forces qui s'appliquent sur la particule. \vec{a} est l'accélération ressentie par la particule et $m_{in.}$ est la masse inertielle. Dans notre cas, la seule force considérée sera la force de gravitation. Celle-ci, dans la théorie Newtonienne s'exprime comme étant

$$\vec{F}_{gr.} = m_{gr.} \vec{g} \quad (3.2)$$

faisant intervenir la masse gravitationnelle $m_{gr.}$ et \vec{g} l'accélération de pesanteur. D'un point de vue mathématique le principe d'équivalence faible stipule que :

$$m_{in.} = m_{gr.} \quad (3.3)$$

De sorte que les équations du mouvement se ramènent à : $\vec{a} = \vec{g}$ et ne dépendent pas de la masse de la particule test. L'accélération subie par un corps, dans un champ gravitationnel est donc indépendante de la structure de celui-ci comme l'avait énoncé Galileo.

Dans le cadre des théories métriques, ce principe d'équivalence faible peut s'exprimer en terme de paramètres post-Newtoniens (PPN) à l'aide d'un développement en champ faible lorsque la métrique est écrite sous forme tri-isotrope :

$$ds^2 = \left[1 + 2\alpha \frac{V}{c^2} + 2\beta \left(\frac{V}{c^2} \right)^2 + \dots \right] c^2 dt^2 - \left[1 - 2\gamma \frac{V}{c^2} + \dots \right] (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (3.4)$$

où nous appelons les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les paramètres post-Newtoniens¹ et $V(r) = -\frac{GM}{r}$ est le potentiel de Newton.

Considérons l'action suivante :

$$S = \int -m_{in} c \, ds \quad (3.5)$$

avec $ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Celle-ci correspond à l'action d'une particule élémentaire libre, où l'élément de longueur invariant est ds^2 . Nous trouvons alors l'équation des géodésiques :

$$m_{in} (\ddot{x}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = 0 \quad (3.6)$$

où $\dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}$.

Dans la limite non relativiste, seuls les symboles de Christoffel Γ_{00}^σ sont alors à considérer puisque la composante \dot{x}^0 ($\approx c$) domine.

L'équation des géodésiques pour la composante spatiale se ramène alors à

$$m_{in} \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i c^2 \right) \approx 0 . \quad (3.7)$$

Nous pouvons comparer cette équation à la gravitation Newtonienne :

$$m_{in} \left(\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right) = -m_{gr} \vec{\nabla} V . \quad (3.8)$$

Le principe d'équivalence faible est satisfait si la gravitation est en fait une force apparente induite par une courbure de l'espace-temps et si dans la limite non relativiste : $\Gamma_{00}^i \approx \frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial V}{\partial x^j}$. De ceci, nous pouvons tirer de l'information sur la métrique 3.4.

Les symboles de Christoffel étant donnés par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

nous avons que $\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{i\alpha} g_{00,\alpha}$. En développant en champ faible, cette relation se traduit par : $\Gamma_{00}^i \approx \frac{\alpha}{c^2} \delta^{ij} V_{,j}$ et revient à imposer $\boxed{\alpha = 1}$.

On voit à présent que le principe d'équivalence faible à lui seul implique que l'on ne soit plus dans un espace de type Minkowski mais dans un espace-temps courbe !

Les expériences actuelles ont atteints de grande précision et il semblerait que la masse inertielle et gravitationnelle sont effectivement identique :

$$\left| \frac{m_{in.} - m_{gr.}}{m_{gr.}} \right| < 10^{-13} . \quad (3.9)$$

C'est ce principe d'équivalence qui a mis Einstein sur la piste pour développer une théorie relativiste de la gravitation ! En effet, c'est lorsqu'il compris que toute personne

1. La paramétrisation utilisée ici est telle que la métrique de Schwarzschild satisfasse à $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

en chute libre dans un champ gravitationnel ne le ressent pas qu'il voulait imposer un principe plus contraignant : toute expérience électromagnétique effectuée dans un repère suffisamment petit en chute libre dans un champ gravitationnel devrait donner le même résultat qu'en l'absence de ce champ.

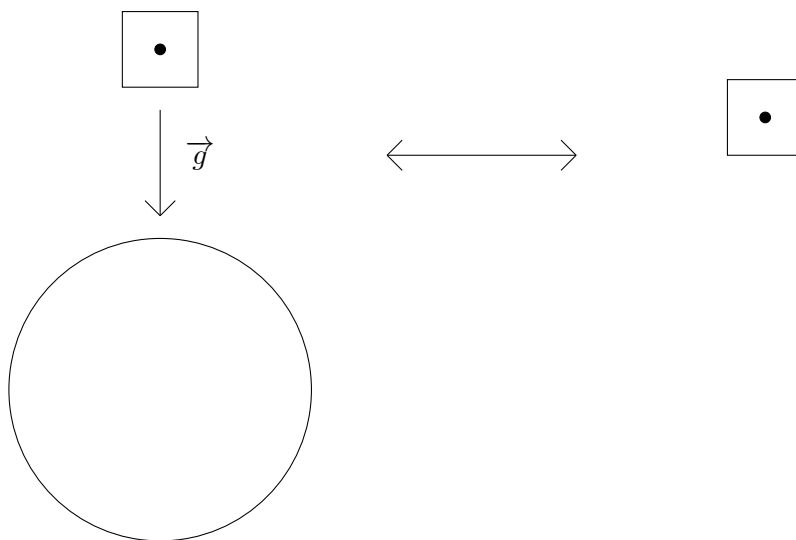


FIGURE 3.1: Équivalence entre la chute libre et l'impesanteur

Cette équivalence est en fait intimement liée à la covariance. D'un côté, l'observateur est extérieur et regarde l'expérience tomber dans le champ gravitationnel. De l'autre, l'observateur se trouve dans le repère en chute libre avec l'expérience. La covariance qui traduit l'équivalence entre ces deux référentiels.

Il faut cependant faire attention au laboratoire en chute libre que l'on décide de considérer. Celui-ci doit être local afin d'éviter tout effet de marée, qui pourrait être mesuré et nous permettrait de nous rendre compte que nous sommes dans un champ gravitationnel inhomogène tel que celui de la Terre, du Soleil,...

Cette extension du principe d'équivalence aux expériences électromagnétique reçoit le nom de principe d'équivalence d'Einstein. La précision de 10^{-13} (3.9) atteinte par les expériences est suffisante pour assurer qu'effectivement l'interaction électromagnétique contribue de manière identiques à la masse inertielle et gravitationnelle.

3.2 Le principe d'équivalence fort

L'extension du principe d'équivalence d'Einstein aux expériences de la gravitation est connue sous le nom de *principe d'équivalence fort*. Le résultat d'une expérience de la gravitation dans un repère en chute libre est-il le même qu'en l'absence du champ extérieur ?

C'est la question posée par le principe d'équivalence fort.

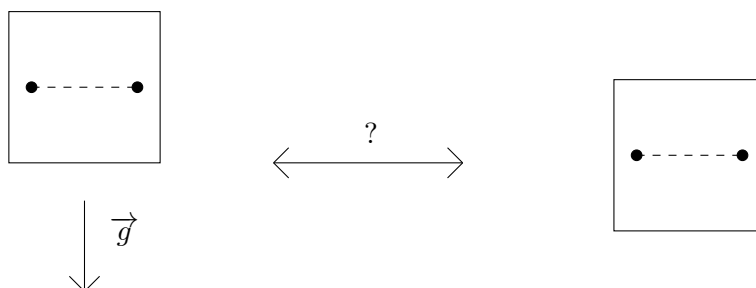
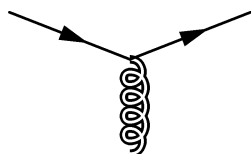


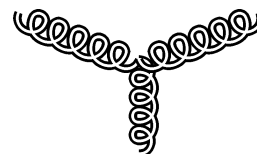
FIGURE 3.2: Y a-t-il équivalence entre le résultat d'une expérience de la gravitation en chute libre dans un champ gravitationnel externe et cette même expérience à l'absence du champ externe ?

Ceci revient à dire que toute expérience de type gravitationnelle ne serait pas affectée, localement, par l'existence du champ gravitationnel externe. Ce principe s'applique, comme dans le cas du principe d'équivalence d'Einstein, aux expériences tests. Celles-ci n'ayant en principe aucun effet sur la source du champ gravitationnel externe, les objets test doivent donc être significativement moins massif que la source externe.

Supposer que ceci soit correcte impliquerait que la gravitation agit avec la même force sur la matière que sur l'interaction gravitationnelle elle-même. Ce qui nous suggère d'interpréter le principe d'équivalence fort comme le fait que les constantes de couplage soient identiques :



(A) interaction boson-connexion



(B) interaction connexion-connexion

La gravitation agirait alors de manière identique sur la matière (boson) que sur l'interaction (connexion). Remarquons alors le lien direct avec le cas des théories quantiques des champs non-abéliennes construites par invariance de jauge dans le chapitre 1. Nous pouvons donc espérer que l'élaboration d'une théorie de type Yang-Mills appliquée à la gravitation fera uniquement apparaître des théories satisfaisant au principe d'équivalence fort.

D'autres interprétations du principe d'équivalence fort existent. Clifford M. Will propose [6] que si le principe d'équivalence est satisfait alors il ne doit exister qu'un unique champ gravitationnel dans l'univers, celui-ci étant la métrique $g_{\mu\nu}$. L'ajout d'un quelconque

autre champ impliquerai une violation du principe d'équivalence fort. Un exemple de théorie impliquant un champ auxiliaire est la théorie de Brans-Dicke. Dans cette théorie, l'interaction est transmise à l'aide d'un champ tensoriel (la métrique) ainsi qu'un champ scalaire. Ce dernier correspond à la constante gravitationnelle G qui est élevée au rang de champ [7] :

$$G(r) \equiv G \left(1 + \eta \frac{V}{c^2} \right). \quad (3.10)$$

Dès lors, l'annulation du paramètre η implique que la métrique est l'unique source gravitationnelle et $G(r)$ se réduit alors à nouveau à une constante. Cette théorie permet ainsi une extension minimal d'une théorie purement métrique (tenseur) satisfaisant au principe d'équivalence fort à une théorie (tenseur + scalaire) le violant. Le tout est donc d'obtenir expérimentalement ce paramètre η .

Les mesures expérimentales effectuées sur Terre ne sont pas assez précises pour confirmer une possible violation du principe d'équivalence fort. Quel type d'objet devons-nous alors étudier afin d'être sensible à l'énergie de liaison gravitationnelle ?

La masse d'une particule composite tel que le proton par exemple est principalement due à l'énergie d'interaction forte plus qu'à la masse des particules qui la compose. Le proton, composé de deux quarks up et un quark down, à une masse [8] de $m_p = 938.272 \frac{MeV}{c^2}$ alors que la masse du quark up est environ $m_u = 2.3_{-0.5}^{+0.7} \frac{MeV}{c^2}$ et celle du down : $m_d = 4.8_{-0.3}^{+0.5} \frac{MeV}{c^2}$. Si l'on passe aux échelles atomiques, l'énergie contribuant à la masse est surtout d'origine électromagnétique comme on le constate pour l'atome d'hydrogène par exemple. Souhaitant mesurer l'impact de l'énergie de liaison gravitationnelle sur la chute d'un corps, il est alors normal de considérer des objets ayant une grande énergie d'interaction gravitationnelle comme des planètes ou des étoiles.

Pour mettre un ordre de grandeur sur la valeur de l'énergie gravitationnelle [9], calculons celle-ci pour une sphère de rayon R et de densité ρ constante :

$$\begin{aligned} \Omega_l^{grav} &= - \int_0^R G \frac{(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho) (4\pi r^2 \rho)}{r} dr \\ &= - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la masse total $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Pour bien nous rendre compte qu'une mesure sur Terre est très peu probable, évaluons l'énergie d'interaction gravitationnelle d'un corps typique de masse $M = 2kg$ et de rayon $R = 0.1m$ par rapport à son énergie de masse :

$$\left| \frac{\Omega_l^{grav}}{Mc^2} \right| \approx 10^{-25}.$$

Une telle précision n'est actuellement pas atteignable alors que si nous considérons la Terre comme objet test, nous avons $M = 5,972 \times 10^{24}kg$ et un rayon de $R = 6371km$.

Le rapport entre l'énergie gravitationnelle et l'énergie de masse est alors de :

$$\left| \frac{\Omega_l^{grav}}{Mc^2} \right| \approx 10^{-10} .$$

L'expérience *Lunar Laser Ranging Experiment* est dédiée à une telle mesure. Celle-ci consiste à mesurer la distance entre la Terre et la Lune à l'aide d'un laser avec une précision de quelques millimètres [10]. Puisque l'énergie d'interaction gravitationnelle de la Lune et de la Terre diffèrent, nous nous attendons à ce que, s'il y a une violation du principe d'équivalence fort, une polarisation du système Terre-Lune apparaisse lors de la chute libre de ces deux corps vers le Soleil étant donné que l'une tombera plus rapidement que l'autre.

S'il y a une violation du principe d'équivalence fort, la correction entre la masse inertielle et gravitationnelle serait de l'ordre de grandeur de la fraction d'énergie gravitationnelle par rapport à l'énergie au repos [9]. On peut noter cette déviation entre la masse gravitationnelle et inertielle sous la forme suivante :

$$\frac{m_{gr}}{m_{in}} = 1 + \eta \frac{\Omega_l^{grav}}{m_{in}.c^2} \quad (3.11)$$

avec Ω_l^{grav} l'énergie de liaison gravitationnelle du corps considéré. Le paramètre η nous donne donc l'information sur l'importance de la violation du principe d'équivalence fort. Si $\eta = 0$ le principe d'équivalence fort n'est pas violé. L'expérience *Lunar Laser Ranging Experiment* nous donne une valeur compatible avec 0 pour le paramètre η [11]

$$|\eta_{exp}| = (4.0 \pm 4.3) 10^{-4} .$$

Mais que vaut ce paramètre d'un point de vue théorique ? Il est possible de montrer [12] qu'au second ordre, dans la limite de champ faible, pour $\alpha = 1$ et un potentiel en $\frac{1}{r}$:

$$\boxed{\eta = 4\beta - \gamma - 3} . \quad (3.12)$$

Et donc de manière équivalente au principe d'équivalence faible, les PPN contiennent l'information concernant le principe d'équivalence fort. Ceci nous donne alors un critère simple pour vérifier si au second ordre, une théorie satisfait au principe d'équivalence fort.

Il s'avère que ce terme peut être retrouvé [13] en développant $D_\sigma R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ au second ordre, dans l'approximation de champ faible statique avec $\Delta V = 0$ (ce qui est satisfait pour un potentiel en $\frac{1}{r}$). Nous avons alors :

$$D_i R^i_{00j} \approx -\frac{1}{2c^4} (4\beta - \alpha\gamma - 3\alpha^2) \partial_j (\partial_i V \partial^i V) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right) . \quad (3.13)$$

On constate ici de manière mathématique, après l'avoir fait de manière intuitive, le lien étroit entre le principe d'équivalence fort et les équations de champ dérivées précédemment. Nous pourrions alors nous demander si le principe d'équivalence fort et les conditions imposées par $D_\sigma R^\sigma_{\mu\nu\rho} = 0$ sont équivalents. On se rend cependant compte qu'il existe des solutions qui ne donnent pas la gravitation de Newton dans la limite non-relativiste ! La métrique proposée par Ni [14] fait partie de cette classe de solution. Celle-ci est donnée par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

où l'on voit directement que le PPN $\alpha = 0$.

Constatons cependant que l'application du principe de Palatini au lagrangien 1.14 nous donne une seconde équation de champ (2.9). Celle-ci restreindra donc l'ensemble des solutions. Un développement en champ faible de celle-ci nous permet d'exclure la métrique proposé par Ni de l'ensemble des solutions. En effet, dans la limite en champ faible, celle-ci nous donne au second ordre :

$$\begin{aligned} R_{0\nu\rho\alpha} R^{0\nu\rho\alpha} - \frac{1}{4} \delta_0^0 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{c^4} (-\alpha^2 + \gamma^2) (\partial_j \partial_i V)^2 + \frac{1}{c^4} \gamma^2 (\Delta V)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour un potentiel en $\frac{1}{r}$, les solutions des équations de champ doivent alors satisfaire la condition supplémentaire : $\alpha^2 = \gamma^2$ pour les PPN.

Dans ce chapitre, nous avons rappelé ce qu'est le principe d'équivalence faible ainsi qu'une généralisation de celui-ci imposé par Einstein en vue de recouvrer la théorie de la relativité restreinte lorsque l'on ignore le champ gravitationnel. Le principe d'équivalence fort quant à lui revient à ajouter au principe d'équivalence d'Einstein les expériences de type gravitationnelle. Comme nous le constaterons dans la suite, il est intéressant de mentionner que la théorie construite par Einstein satisfait le principe d'équivalence d'Einstein (qu'il a imposé) mais aussi le principe d'équivalence fort ! Celle-ci satisfait $\eta = 0$ et satisfait aussi le vision proposée par C.M. Will : la métrique est la seule source gravitationnelle.

Dans le prochain chapitre nous donnerons *toutes* les solutions aux équations de champ discuterons certaines de leurs propriétés.

Chapitre 4

Solutions aux équations de champ

Bien que nous ayons montré l'équivalence entre les équations de champ et l'équation d'Einstein et de Nordström, cela ne suffit pas. Nous sommes à la recherche des PPN et donc à fortiori, des différentes métriques solutions de ces équations. Nous regarderons ici les solutions et aborderons certaines de leurs propriétés.

4.1 La théorie scalaire de Nordström

Commençons par le cas de Nordström (équations 2.13 et 2.14). Nous avons deux équations à satisfaire, la première étant l'annulation du tenseur de Weyl. Il est connu [15] que ceci implique une métrique conformément plane que l'on écrit comme :

$$g_{\mu\nu} = e^{2\xi(x)} \eta_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

où $\xi(x)$ est à priori une fonction arbitraire de t , r , θ et ϕ . Pour fixer cette fonction ξ nous allons utiliser la seconde équation : l'annulation du scalaire de courbure. Pour une métrique conformément plane le scalaire de courbure prend la forme simple suivante :

$$R = -6e^{-2\xi} (\partial^\alpha \partial_\alpha \xi + \partial^\alpha \xi \partial_\alpha \xi) \quad (4.2)$$

$$= 0 \quad (4.3)$$

Nous cherchons les solutions à cette équation, désirant retomber sur la théorie de la gravitation, nous trouvons la classe de solutions suivante :

$$ds^2 = \left(1 + \epsilon \frac{V}{c^2}\right)^2 (c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2) \quad (4.4)$$

avec ϵ une constante d'intégration et $V = -\frac{GM}{r}$ le potentiel de Newton. Constatons que, pour cette classe de solutions, l'équation 4.2 se ramène à une équation d'onde pour le potentiel scalaire V :

$$\partial^\alpha \partial_\alpha V = 0 \quad (4.5)$$

Le choix de $\epsilon = 1$ correspond à la théorie de Nordström. Cette dernière est aussi connue sous le nom de théorie scalaire étant donné l'équation d'onde ci-dessus.

4.1.1 Et la gravitation ?

La théorie de Nordström fût, en 1913, une tentative à une théorie relativiste de la gravitation. Il s'agit de la première théorie métrique de la gravitation. On constate en effet que le premier ordre de la limite non relativiste de l'équation des géodésiques pour la métrique 4.4 nous donne bien la théorie de Newton :

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{00}^i c^2 \approx \ddot{q}^i + \partial^i V = 0 \quad (4.6)$$

Il était donc intéressant de regarder quelles étaient les différentes prédictions faites par cette théorie pour les comparer aux observations.

Nous pouvons par exemple mentionner le problème du périhélie de Mercure [6]. Il était observé, au milieu du XIX^{ème} siècle une avancée du périhélie de Mercure. Le Verrier, astronome et mathématicien de l'époque avait prédit l'existence d'un astre permettant d'expliquer le mouvement particulier de Mercure. Cet astre n'étant pas observé, une nouvelle explication au problème était nécessaire. La prédiction d'un avancement du périhélie de Mercure fût parmi les tests majeurs pour affirmer ou réfuter les théories relativistes de la gravitation.

Malheureusement, la théorie de Nordström prédit un retard du périhélie et non une avance. Un calcul explicite [7] au second ordre nous donne un déphasage donné par :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{Mercure}} &\propto \frac{4\alpha^2 + 4\alpha\gamma - 2\beta}{6} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

où, pour la théorie de Nordström, nous avons $(1 + \frac{V}{c^2})^2 \approx 1 + 2\frac{V}{c^2}$ et donc $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = -1$ qui prédisent alors un retard au lieu d'une avance. Nous pouvons aussi mentionner la prédiction concernant la déflexion de la lumière [7] :

$$\Delta\phi_{\text{deflexion}} \propto \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad (4.7)$$

et la théorie de Nordström ne prédit aucune déflexion de la lumière contrairement, à nouveau, à ce qui est observé.

Cette théorie, malgré qu'elle tend bien vers la théorie de Newton dans la limite non relativiste, n'est pas en accord avec les observations. Cette théorie est donc rejetée mais l'idée de construire une théorie géométrique de la gravitation portera finalement ses fruits avec la relativité générale d'Einstein.

4.2 La théorie tensorielle d'Einstein

Passons maintenant à la théorie d'Einstein en présence d'une constante cosmologique :

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

Nous allons chercher les solutions à cette équation en y introduisant directement la métrique à symétrie sphérique 2.15. Les équations obtenues peuvent être trouvées ci-dessous :

$$\frac{2}{\rho} (-\dot{\rho}' + \dot{\rho}\mu' + \rho'\dot{\nu}) = 0 \quad (4.9)$$

$$e^{-2\nu} (\mu'' + \mu'^2 - \mu'\nu') - e^{-2\mu} (\ddot{\nu} + \dot{\nu}^2 - \dot{\nu}\dot{\mu}) + \frac{2e^{-2\mu}}{\rho} (-\ddot{\rho} + \dot{\rho}\dot{\mu} + \rho'\mu'e^{-2(\nu-\mu)}) = -\Lambda \quad (4.10)$$

$$e^{-2\nu} (\mu'' + \mu'^2 - \mu'\nu') - e^{-2\mu} (\ddot{\nu} + \dot{\nu}^2 - \dot{\nu}\dot{\mu}) + \frac{2e^{-2\nu}}{\rho} (\rho'' - \rho'\nu' - \dot{\rho}\dot{\nu}e^{2(\nu-\mu)}) = -\Lambda \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2\mu}}{\rho} (-\ddot{\rho} + \dot{\rho}\dot{\mu} + \rho'\mu'e^{2(\mu-\nu)}) + \frac{e^{-2\nu}}{\rho} (\rho'' - \rho'\nu' - \dot{\rho}\dot{\nu}e^{2(\nu-\mu)}) - \\ \frac{1}{\rho^2} (1 + \dot{\rho}^2 e^{-2\mu} - \rho'^2 e^{-2\nu}) = -\Lambda \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nous avons dénoté par un $(\dot{})$ la dérivée temporelle et par un $(-)'$ la dérivée par rapport à r .

Regardons les différents cas possibles.

1. Si $\rho(r, t)$ dépend de r , la fonction ρ court sur tout ou une partie de l'espace, nous pouvons effectuer un changement de variable et prendre r comme fonction radiale.

2. Le second cas est celui où ρ est une constante. Ce cas est un peu particulier étant donné que la métrique est alors composée de deux parties bien distinctes, un espace à deux dimensions (1+1) que l'on compose avec une sphère de rayon constant.

Étudions ci-dessous ces deux possibilités.

4.2.1 La métrique de Schwarzschild-de Sitter

Le premier cas est celui habituellement considéré. Quelques détails de calcul sont donnés en annexe E où nous trouvons comme solution la métrique de Schwarzschild-de Sitter :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.13)$$

Quelques propriétés

Cette solution est la solution associée à l'univers dans lequel nous vivons. En effet, si l'on suppose $\Lambda = 0$, celle-ci se ramène à la solution de Schwarzschild qui nous permet d'étudier la gravitation autour d'un objet massif, statique à symétrie sphérique. Mais, nous savons que notre univers contient une constante cosmologique non-nulle, la solution que nous devrions étudier est donc celle de Schwarzschild-de Sitter et non le cas particulier où $\Lambda = 0$.

Si l'on suppose maintenant que nous travaillons sans matière, nous mettons alors $M = 0$ et la métrique dépend uniquement de la constante cosmologique. À l'aide du changement de variables suivant [7],

$$\tilde{r} = \frac{r}{\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{1/2}} e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}ct} \quad (4.14)$$

$$\tilde{ct} = ct + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \quad (4.15)$$

nous pouvons mettre la solution sous forme isotrope :

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c\tilde{t}} (\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2) \quad (4.16)$$

Sous cette forme, nous constatons que la métrique de de Sitter décrit un univers en expansion exponentielle. En effet, le facteur d'échelle introduit en cosmologie est ici $a(\tilde{t}) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c\tilde{t}}$.

Si l'on considère maintenant M et $\Lambda \neq 0$, nous devons nous attendre à avoir un comportement fort différent en fonction de l'endroit où nous nous situons par rapport à la source. En effet, si nous sommes relativement proches de cette source, nous serons attirés

vers celle-ci. Dans le cas où nous sommes relativement loin de la source, la constante cosmologique dominera et nous partirons vers l'horizon cosmologique¹.

Évaluons cette distance critique [16] à laquelle l'effet de la constante cosmologique prend le dessus sur l'attraction gravitationnelle. Nous trouvons, dans la limite Newtonienne, le potentiel :

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{\Lambda c^2}{6}r^2 \quad (4.17)$$

À grande distance, la force de répulsion due à la constante cosmologique domine mais pour des distances inférieures à la distance critique²

$$r_c = \sqrt[3]{\frac{3GM}{\Lambda c^2}} = \sqrt[3]{\frac{3M}{8\pi\rho_\Lambda}}$$

c'est le potentiel de Newton qui domine.

Nous pouvons alors regarder si cette constante cosmologique peut avoir un quelconque effet sur la structure des galaxies par exemple. Étant donné la valeur du rapport de la densité d'énergie de la constante cosmologique et la densité critique mesurée actuellement [17] : $\Omega_\Lambda = 0.6825$, notre galaxie ayant une masse totale (matière sombre incluse) [16] : $M \approx 10^{12}M_\odot$ on lui associe alors un rayon critique de l'ordre de 1 Mpc. Cependant, la taille de notre galaxie, est de l'ordre de 17 kpc [16] et est de taille moyenne. L'effet de la constante cosmologique n'est alors pas dominant pour une galaxie typique mais fixe une limite maximale sur la taille des plus grandes.

4.2.2 La métrique de Nariai

Nous venons de discuter la solution de Schwarzschild-de Sitter qui correspondait au cas $\rho(r, t) = r$. Nous allons maintenant considérer ce qu'il se passe lorsque la fonction radiale est une constante. Il s'agit de la solution de Nariai. Celle-ci se distingue des autres solutions de façon très étonnante car elle n'existe qu'en présence d'une constante cosmologique. De plus, il est clair que cette métrique ne représente pas notre univers puisqu'il s'agit de deux espace à deux dimensions que l'on compose.

Supposons donc que $\rho(r, t)$ soit une constante. Les équations d'Einstein se simplifient grandement. L'équation (4.12) fixe la valeur de cette constante à

$$\rho^2 = \frac{1}{\Lambda}$$

1. Il s'agit de la limite d'où aucun signal ne peut être reçu dû à la vitesse finie du transport de l'information et de l'expansion de l'univers.

2. Nous avons introduit la densité d'énergie de la constante cosmologique : $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$

avec $\Lambda > 0$. Il reste alors à résoudre l'équation (4.10) :

$$e^{-2\nu} (\mu'' + \mu'^2 - \mu'\nu') - e^{-2\mu} (\ddot{\nu} + \dot{\nu}^2 - \dot{\nu}\dot{\mu}) = -\Lambda . \quad (4.18)$$

Nous nous rendons alors compte que nous avons une seule équation pour deux inconnues ce qui implique une infinité de solutions qui sont en fait équivalentes. Ceci n'est en fait pas un problème car nous pouvons passer d'une solution à l'autre à l'aide d'un changement de coordonnées. La raison est que la métrique n'est pas totalement fixée comme cela est aussi le cas pour la solution de Schwarzschild extérieure. Par exemple, nous pouvons passer dans un autre système de coordonnées pour ne plus faire apparaître la singularité apparente se trouvant au rayon de Schwarzschild. Cette liberté est liée à la covariance de la théorie.

La fonction ν peut être choisie arbitrairement. Supposons donc que $\nu = -\mu$, la métrique suivante

$$ds^2 = (1 - \Lambda r^2) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \Lambda r^2} dr^2 - \frac{1}{\Lambda} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.19)$$

est une solution de l'équation d'Einstein avec constante cosmologique connue sous le nom de métrique de Nariai. Nous pouvons constater la forte ressemblance entre celle-ci et la métrique de Schwarzschild-de Sitter. Celles-ci sont en effet liées puisqu'elles satisfont toutes deux aux équations d'Einstein. À priori nous n'avons pas d'équations tensorielles pour distinguer ces deux solutions ! Il s'avère cependant que la métrique de Nariai satisfait à la condition

$$D_\mu R_{\nu\rho\sigma\zeta} = 0$$

plus forte que celle satisfaite par la métrique de Schwarzschild-de Sitter i.e. $D_\alpha R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma} = 0$.

Un point intéressant qui pourrait faire l'objet de futures recherches serait de regarder ce que donne cette métrique dans un espace à six dimensions. Passons-nous maintenant à quatre dimensions physique ainsi qu'une sphère de rayon constant ou la substitution d'une sphère \mathcal{S}_2 à \mathcal{S}_4 est-elle suffisante ? Les différentes méthodes pour obtenir cette métrique dans un espace de dimensions quatre redonnent-elles la même solution dans le cas d'un espace à six dimensions ? Telles sont quelques questions que nous pourrions aborder à son sujet.

Intuition de cette métrique

Il existe deux approches afin de visualiser la métrique de façon intuitive.

Dans le premier cas, il faut remarquer que la métrique de Nariai est une limite particulière de la solution de Schwarzschild-de Sitter. La solution de Schwarzschild-de Sitter a deux racines réelles, alors que celle de Nariai n'en possède qu'une seule. Il s'avère

que si l'on considère la solution de Schwarzschild-de Sitter dans la limite où les deux racines prennent la même valeur (voir annexe F), alors nous retrouvons la solution de Nariai [18]. Dès lors, nous pouvons interpréter cette solution comme décrivant ce qu'il se passerait dans un univers en présence d'une source gravitationnelle massive et d'une constante cosmologique. Nous serions dans le cas où la masse de la source tendrait vers la valeur particulière : $\frac{9G^2M^2}{c^4} \rightarrow \frac{1}{\Lambda}$. La métrique décrit alors ce qu'il se passe lorsque nous sommes "écrasés" entre le rayon de Schwarzschild et l'horizon cosmologique.

Une seconde approche est la suivante : la métrique se décompose en deux espaces distincts, de dimension deux. Le premier est ce que l'on appelle un espace de de Sitter et peut être représenté, comme on peut le voir sur la figure 4.1, par un hyperboloïde [19]

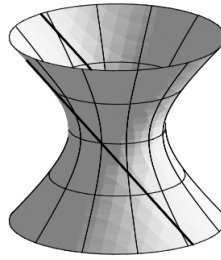


FIGURE 4.1: espace de de Sitter vu comme un hyperboloïde.

Le second espace correspond simplement à une sphère \mathcal{S}_2 de rayon $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$. On peut alors visualiser la métrique en associant à chaque point de l'hyperboloïde une sphère de rayon constant.

Maintenant que nous avons mentionné certaines propriétés de chacune des solutions des équations de champ, nous allons analyser le principe d'équivalence dans chacun des cas.

Chapitre 5

Solutions, principe d'équivalence et perspectives

Nous commencerons ce dernier chapitre en analysant la solution de Nordström et de Schwarzschild-de Sitter d'abord, pour ensuite discuter de la position de la solution de Nariai. Cette dernière occupe, dans notre travail, une place très particulière et ce, dû à une conjecture [20] concernant le principe d'équivalence fort. Celle-ci mentionne, en supposant une métrique statique, à symétrie sphérique et asymptotiquement minkowskienne, que les seules métriques satisfaisants au principe d'équivalence fort correspondent à la métrique de Schwarzschild et à celle de Nordström. Qu'en est-il alors de cette conjecture lorsque nous voyons apparaître cette troisième solution de Nariai ? La conjecture, basée sur des résultats obtenus dans l'approximation de champs faibles, est-elle fausse ? Ou bien devons-nous seulement considérer les métriques asymptotiquement minkowskiennes ? Faire ceci va cependant à l'encontre même de la construction que nous avons faite pour obtenir les équations de champ. Nous voudrions confirmer que celles-ci sont des conditions nécessaires et suffisantes pour le principe d'équivalence fort. En effet, le parallèle effectué pour construire cette théorie voudrait que toute théorie inspirée de Yang-Mills satisfasse à ce principe.

5.1 La théorie scalaire de Nordström

Commençons donc avec la solution qui ne pose aucun problème.

Regardons la solution 4.4 avec $\epsilon = 1$. La limite non relativiste de l'équation des géodésiques (eq. 3.7) pour les composantes spatiales donne :

$$0 \approx \ddot{q}^i + \delta^{ij} \partial_j V \quad (5.1)$$

et nous trouvons, comme mentionné précédemment, la gravitation de Newton. Le développement en champ faible, au second ordre, donne

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{V}{c^2} + \frac{V^2}{c^4} + \dots\right) (c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2) . \quad (5.2)$$

Nous en déduisons alors la valeur du paramètre post-Newtonien $\alpha = 1$ et satisfait le principe d'équivalence faible.

Qu'en est-il du principe d'équivalence fort ?

Observons les coefficients du développement en champ faible de 5.2 : $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ et $\gamma = -1$. En substituant la valeur de ceux-ci dans le paramètre dérivé par Nordvedt :

$$\begin{aligned} \eta &= 4\beta - \gamma - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La théorie de Nordström satisfait donc, au second ordre, au principe d'équivalence fort.

5.2 La théorie tensorielle d'Einstein

5.2.1 La métrique de Schwarzschild-de Sitter

Dans le cas où $\Lambda = 0$, la métrique de Schwarzschild-de Sitter se ramène simplement à la métrique de Schwarzschild qui peut s'écrire sous forme 3-isotrope [9, 21] :

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \frac{V}{2c^2}}{1 - \frac{V}{2c^2}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{V}{2c^2}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (5.3)$$

que l'on peut alors développer en champ faible pour trouver la valeur des paramètres post-Newtoniens : $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Regardons rapidement quelles sont les prédictions de cette métrique pour l'avancée du périhélie de Mercure ainsi que pour la déflexion de la lumière :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{Mercure}} &\propto \frac{4\alpha^2 + 4\alpha\gamma - 2}{6}\beta \\ &= 1 \\ \Delta\phi_{\text{deflexion}} &\propto \frac{\alpha + \gamma}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ceci prédit alors une avance du périhélie de Mercure et non un retard comme c'est le cas pour la théorie de Nordström. De plus elle prédit aussi une déflexion de la lumière !

Ceci est, jusqu'à preuve du contraire, compatible avec les mesures actuelles.

Cette métrique satisfait alors au principe d'équivalence faible puisque $\alpha = 1$ et nous retrouvons la théorie de Newton dans la limite non relativiste.

Le facteur dérivé par Nordvedt est

$$\eta = 4\beta - \gamma - 3 = 0$$

et la métrique de Schwarzschild satisfait ainsi au principe d'équivalence fort.

Ceci apparaît comme une propriété supplémentaire satisfaite par la relativité générale. En effet, Einstein, lors du développement d'une théorie relativiste de la gravitation, voulait unifier la relativité restreinte avec la gravitation. Il voulait en particulier retrouver l'électromagnétisme de Maxwell en l'absence (locale) de gravitation, soit ce qui est appelé aujourd'hui le principe d'équivalence d'Einstein. Le principe d'équivalence fort, satisfait par la théorie apparaît alors comme une propriété supplémentaire.

Supposons maintenant que $M = 0$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Nous sommes alors dans l'univers de de Sitter qui est un univers sans matière dans lequel toute particule test est envoyée vers l'horizon cosmologique.

L'interprétation faite dans le chapitre 3 du principe d'équivalence faible (i.e. l'équivalence entre la chute libre et l'impesanteur) n'est plus valide car nous travaillons maintenant dans un univers de de Sitter. Celui-ci consiste en un univers vide de matière, la seule chose que nous pouvons étudier dans celui-ci sont des particules de poussières. Précédemment, la source générait la métrique de Schwarzschild et nous devons regarder le mouvement de différents systèmes dans cette métrique. Ici nous sommes en présence d'un univers vide de matière et devons donc regarder comment évoluent des objets dans celui-ci. La question du principe d'équivalence faible ne peut alors plus être comprise comme étant l'équivalence entre la chute libre et l'impesanteur.

Une autre façon d'interpréter le principe d'équivalence fort serait alors le suivant.

Considérons un système de particules tests et regardons la position de son centre de masse. Ce système de particules tests évolue d'une façon ou d'une autre dans l'espace-temps impliquant (en général) une variation de la position du centre. Il serait maintenant logique que, si le principe d'équivalence fort est respecté, la trajectoire du centre de masse soit identique à celle d'une unique particule test initialement placée à la position du centre de masse. Nous pouvons voir cette interprétation sur la figure 5.1. De manière équivalente, ceci revient à se demander si le centre de masse reste le centre de masse lorsque le système évolue dans le temps.

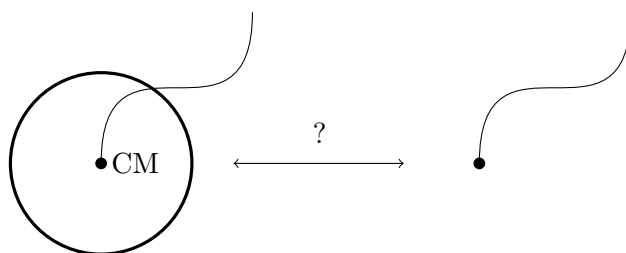


FIGURE 5.1: Équivalence entre évolution du centre de masse d'un objet composite pour lequel uniquement l'interaction gravitationnelle intervient et l'évolution d'une unique particule test se trouvant au dit centre de masse.

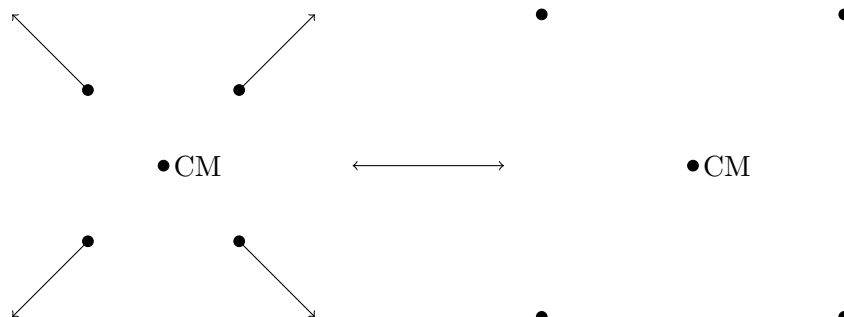


FIGURE 5.2: À gauche, nous avons un système de 4 poussières placées dans l'univers de de Sitter et en avons identifié le centre de masse. À droite, le temps a évolué et le centre de masse voit que les particules de poussières se sont éloignées.

Nous pourrions alors appliquer ceci dans le cadre de la métrique de de Sitter.

Dans un univers de de Sitter, il n'y a pas de point particulier, tous les points s'écartant les uns des autres. Dès lors, les particules de poussière que l'on place dans cet univers vont toutes s'écarter les unes des autres.

Considérons un système de particules tests ayant une symétrie sous rotation dans un univers de de Sitter et regardons si le "centre de masse" de ce système reste bien le "centre de masse". La situation décrite est représentée sur la figure 5.2. On constate que dans ce cas là, le principe d'équivalence fort est effectivement satisfait. Ici, cela apparaît de manière relativement simple car nous considérons la symétrie de rotation du système qui fait que le "centre de masse" est équidistant à chacune des particules de poussière du système. Dès lors chacune de ces particules s'écartera, en un temps t , de la même distance du centre de masse et celui-ci restera le "centre de masse".

Le principe d'équivalence fort semble être satisfait dans un univers de de Sitter mais encore faut-il pouvoir montrer que cela est le cas lorsque l'on considère un système n'ayant pas cette symétrie de rotation.

Bien qu'il semble qu'un espace de de Sitter satisfasse au principe d'équivalence fort, nous n'en avons pas de preuve rigoureuse. Et quand bien même celui-ci y satisferait, ce n'est pas pour autant que la métrique de Schwarzschild-de Sitter y satisfait. Il s'agit cependant d'une condition nécessaire.

5.2.2 La métrique de Nariai

Quand est-il de la solution de Nariai ? Tout comme la métrique de de Sitter, nous ne pouvons pas faire un développement en champ faible lorsque r tend vers l'infini puisque le terme diverge. Les métriques non asymptotiquement minkowskiennes peuvent-elles satisfaire au principe d'équivalence fort ?

Rappelons la forme de cette solution à l'équation d'Einstein :

$$ds^2 = (1 - \Lambda r^2) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \Lambda r^2} dr^2 - \frac{1}{\Lambda} d\Omega^2.$$

Trois possibilités sont envisageables pour étudier le principe d'équivalence fort dans ce cas-ci.

- 1) La première consiste simplement à constater que la métrique de Nariai correspond à de Sitter à deux dimensions composé avec une sphère : $dS \otimes \mathcal{S}_2$. Dès lors, ce que nous avons mentionné dans la section précédente s'applique tout aussi bien dans ce cas-ci. Nous avons ici pour notre espace de de Sitter uniquement une dimension d'espace et une dimension de temps. À priori, la sphère n'a aucune influence sur la dynamique d'une particule dans cet espace, dès lors la métrique de Nariai pourrait satisfaire au principe d'équivalence fort.
- 2) La seconde possibilité est de se rappeler que cette métrique est une limite de celle de Schwarzschild-de Sitter (lorsque $\frac{9G^2M^2}{c^4} \rightarrow \frac{1}{\Lambda}$). Dès lors, si nous trouvons une solution pour Schwarzschild-de Sitter, il nous suffit de prendre la limite vers Nariai. Il est vrai, à priori que les propriétés ne sont pas toujours conservées lorsque l'on prend une limite. Cependant, dans le cas présent, le passage à la limite n'amène aucune difficulté et il n'y a, à priori, aucune raison de perdre cette propriété.
- 3) La dernière serait de considérer la proposition de C.M. Will pour le principe d'équivalence fort (section 3.2). Nous pouvons regarder l'équation d'onde et voir si un champ supplémentaire à la métrique intervient dans la théorie. Étudier l'équation d'Einstein en présence d'une constante cosmologique [22] nous informe que seule la métrique intervient. Le principe d'équivalence fort pourrait donc être respecté.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié le principe d'équivalence fort et en particulier, deux équations *tensorielles* conjecturées comme étant l'expression mathématique *exactes* de celui-ci ! Ces équations se justifient à l'aide du parallèle effectué entre le principe d'équivalence fort et l'invariance de jauge dans le cadre des théories de Yang-Mills.

Ces équations tensorielles, très élégantes, font ressortir différentes solutions. Deux d'entre-elles (la métrique de Nordström ainsi que celle de Schwarzschild dans le vide) sont bien connues et satisfont le principe d'équivalence fort dans l'approximation de champ faible. Cependant d'autres solutions, jamais considérées auparavant dans le cadre du principe d'équivalence fort, apparaissent en présence d'une constante cosmologique.

Pour ces solutions (la métrique de Schwarzschild-de Sitter ainsi que celle de Nariai), la méthode usuelle pour vérifier au second ordre si une théorie satisfait ou non au principe d'équivalence fort, ne s'applique pas. Nous proposons dans ce cas là une autre façon d'interpréter le principe d'équivalence fort. Il semblerait alors que ces deux théories puissent y satisfaire mais une preuve rigoureuse est cependant encore nécessaire.

L'apparition, dans ce travail, de la métrique de Schwarzschild-de Sitter et non de Schwarzschild uniquement, devrait pousser les physiciens à se poser la question du principe d'équivalence fort dans le cas de théories non asymptotiquement minkowskiennes. Nous savons en effet que l'univers dans lequel nous vivons contient une constante cosmologique non nulle et étudier la métrique de Schwarzschild n'est alors pas suffisant. L'étude de la métrique de Schwarzschild-de Sitter devrait dès lors être investiguée plus en profondeur. Résoudre la question du principe d'équivalence fort pour cette métrique permettrait alors, comme montré dans le dernier chapitre, une réponse rapide concernant le statut de la métrique de Nariai. Finalement, ceci nous permettrait de confirmer ou d'infirmer, l'aspect fondamental des équations tensorielles présentées ici.

Annexe A

Méthode de Palatini pour le lagrangien de la relativité générale

A.1 Méthode de Palatini

Comme cela a été mentionné, la méthode de variation de Palatini consiste à considérer la métrique ainsi que la connexion comme deux objets indépendants. Nous pouvons alors faire varier l'action

$$S(g, \Gamma) = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_M^b \right) \quad (\text{A.1})$$

par rapport à la métrique ainsi que par rapport à la connexion. La variation de l'action s'écrit comme :

$$\delta S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \left\{ -\frac{1}{2\kappa} R \right\} + \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2\kappa} (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right\} + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b) \quad (\text{A.2})$$

que l'on peut alors réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-g} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta \right] \right) \right\} + \\ & \frac{1}{2\kappa} \left\{ -\sqrt{-g} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(D_\beta g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\nu - D_\alpha g^{\mu\nu} \right) \right\} + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Où nous avons utilisé le fait que :

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

ainsi que :

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)$$

Il est intéressant de noter qu'il n'est pas nécessaire de se mettre dans un référentiel localement inertiel dans lequel les symboles de Christoffel s'annulent. Nous pouvons simplement ajouter et retirer le terme $\delta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$.

Nous avons notamment utilisé que pour tout tenseur A^σ , la relation suivante est satisfaisante :

$$\sqrt{-g} D_\sigma A^\sigma = \partial_\sigma (\sqrt{-g} A^\sigma) .$$

Et finalement, nous avons introduit la métrique dans la dérivée covariante et rajouter (ou soustrait) le terme supplémentaire.

A.1.1 Variation par rapport à la métrique

Considérons d'abord la variation par rapport à la métrique. Puisque nous supposons la métrique et la connexion comme deux variables indépendantes, la variation du tenseur de Ricci par rapport à la métrique est nulle. Les seuls termes restant de l'équation A.3 étant alors les deux premiers et le dernier. Ce qui donne :

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(-R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$= 0 \quad (\text{A.5})$$

où nous avons défini $T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b)}{\delta g^{\mu\nu}}$.

Nous retrouvons bien les équations d'Einstein en présence de matière.

A.1.2 Variation par rapport à la connexion

Supposons un espace sans torsion, les symboles de Christoffel sont alors symétrique : $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu$. Calculons maintenant la variation par rapport à la connexion et réécrivons seulement le terme nous intéressant ($\delta R_{\mu\nu}$), on a :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} (-g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) + \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b) + \delta g^{\mu\nu} \dots \\ &= \int d^4x \left[-\partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \left\{ g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta \right\} \right) \right] - \sqrt{-g} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(D_\beta g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\nu - D_\alpha g^{\mu\nu} \right) + \\ &\quad \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b) + \delta g^{\mu\nu} \dots \end{aligned}$$

Le premier terme étant une dérivée totale nous n'avons pas à nous en soucier étant donné qu'il va simplement donner une constante. Le lagrangien de matière pour de la matière de type bosonique ne dépend que de la métrique et pas de la connexion, ce terme ne doit alors pas être pris en compte ici. Il nous reste alors le terme contenant la dérivée covariante de la métrique. Il est habituel, lors de la dérivation de l'équation d'Einstein de supposer que ce terme s'annule mais ce n'est plus le cas à présent.

Puisque l'on considère un espace sans torsion ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$), seule la partie symétrique en les indices μ et ν de l'expression faisant intervenir les dérivées covariantes de la métrique doivent s'annuler ¹

$$D_\beta g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\nu + D_\beta g^{\nu\beta} \delta_\alpha^\mu - 2D_\alpha g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.6})$$

En contractant cette équation avec δ_ν^α , on trouve alors la condition suivante : $D_\beta g^{\mu\beta} = 0$ que l'on peut réintroduire dans l'équation (A.6), on trouve alors

$$D_\alpha g^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.7})$$

qui apparait maintenant comme une condition et non une hypothèse !

Notons que cette condition est équivalente à demander que la connexion soit en fait la connexion métrique :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}).$$

Pour montrer ceci, il suffit de développer : $D_\mu g_{\lambda\nu} + D_\nu g_{\mu\lambda} - D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$.

On constate alors que l'hypothèse faite habituellement sur la dérivée covariante de la métrique, lorsque l'on dérive les équations d'Einstein à l'aide du principe variationnel usuel peut en fait apparaitre comme une condition supplémentaire en faisant varier l'action par rapport à la connexion !

1. En effet, la partie anti-symétrique s'annule automatiquement. Soit $S_{\mu\nu}$ et $A^{\mu\nu}$ un tenseur symétrique et anti-symétrique respectivement. Alors, $S_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = -S_{\nu\mu} A^{\nu\mu} = 0$

Annexe B

Méthode de Palatini pour le lagrangien de Yang-Mills

Reprenons l'action de Yang-Mills pour la gravitation :

$$S_{YM}(g, \Gamma) = \int d^4x \left\{ \alpha \sqrt{-g} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'} + \sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b \right\} \quad (\text{B.1})$$

et commençons par écrire la variation de cette action :

$$\begin{aligned} \delta S_{YM}(g, \Gamma) = \int d^4x \left\{ \alpha \left[\delta(\sqrt{-g}) R^\lambda_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} + g^{\mu\mu'} \delta g^{\nu\nu'}) R^\lambda_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{-g} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} (\delta R^\lambda_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'} + R^\lambda_{\sigma\mu\nu} \delta R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'}) \right] + \delta \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b \right) \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Variation par rapport à la métrique

Regardons ce que devient l'équivalent des équations d'Einstein dans le cas du Lagrangien de type Yang-Mills.

Le terme faisant intervenir $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ réapparaît à nouveau.

Nous pouvons par contre étudier le deuxième terme. En renommant les indices et en utilisant les symétries du tenseur de Riemann, on a :

$$\sqrt{-g} (\delta g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} + g^{\mu\mu'} \delta g^{\nu\nu'}) R^\lambda_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'} = 2\sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} R^\lambda_{\sigma\alpha\nu} R^\sigma_{\lambda\beta}{}^\nu \quad (\text{B.3})$$

On trouve alors que la variation de l'action est donnée par :

$$\delta S_{YM}(g, \Gamma) = \int d^4x \alpha \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu} + 2 R^\lambda_{\sigma\alpha\nu} R^\sigma_{\lambda\beta}{}^\nu \right\} \delta g^{\alpha\beta} + \delta \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M^b \right) + \dots \delta \Gamma \quad (\text{B.4})$$

En effet, par la définition du tenseur de Riemann :

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\lambda\rho} \quad (\text{B.5})$$

sa variation ne fait intervenir que des variations par rapport à la connexion. La variation du lagrangien de matière de type bosonique fait intervenir uniquement la métrique (ne dépend pas de la connexion), nous avons à nouveau : $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M^b)}{\delta g^{\mu\nu}}$.

L'équation (B.4) implique donc, pour la variation par rapport à la métrique, que :

$$\boxed{R_{\alpha\nu\lambda\sigma}R^{\beta\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{4}\delta_\alpha^\beta R_{\lambda\sigma\mu\nu}R^{\lambda\sigma\mu\nu} = \frac{1}{\alpha}T_\alpha^{\beta\beta}} \quad (\text{B.6})$$

qui représente alors notre première équation de champ. Celle-ci est l'équivalente de l'équation d'Einstein mais pour un lagrangien de type Yang-Mills.

Variation par rapport à la connexion

Étant donné l'expression pour la variation de l'action présentée précédemment (équation B.2), nous devons analyser comment varie le tenseur de Riemann. En renommant les indices du tenseur de Riemann, nous avons :

$$\sqrt{-g}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\left(\delta R^\lambda_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'} + R^\lambda_{\sigma\mu\nu}\delta R^\sigma_{\lambda\mu'\nu'}\right) = 2\sqrt{-g}\left(\delta R^\lambda_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\right) \quad (\text{B.7})$$

En utilisant la définition du Riemann, nous pouvons montrer que :

$$\delta R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = D_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\right) - D_\mu\left(\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\right)$$

Ceci nous permet alors de réécrire le terme (B.7) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-g}\left(\delta R^\lambda_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\right) &= 2\left\{\partial_\nu\left(\sqrt{-g}R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\right) - \partial_\mu\left(\sqrt{-g}R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-g}D_\nu\left(R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} + \sqrt{-g}D_\mu\left(R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\right\} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que pour tout tenseur A^σ , $\sqrt{-g}D_\sigma A^\sigma = \partial_\beta(\sqrt{-g}A^\beta)$.

La variation de l'action s'écrit maintenant, en ne gardant que les termes faisant intervenir la variation par rapport à la connexion et en omettant les deux premiers termes (qui sont des dérivées totales) de l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} \delta S_{YM} &= \int d^4x \, 2\sqrt{-g}\left\{D_\mu\left(R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\nu}\right) - D_\alpha\left(R^\sigma_{\lambda}{}^{\mu\alpha}\right)\delta^\nu_\mu\right\}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et puisque ceci doit être vrai pour tout $\delta\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda$, l'intégrant doit s'annuler. Nous supposons un espace sans torsion et donc une connexion symétrique en les indices covariants. Seule la partie symétrique de l'intégrant doit s'annuler.

Ceci implique alors que

$$-4D_\alpha R_{\lambda}^{\sigma\mu\alpha} + D_\alpha R_{\lambda}^{\mu\alpha\sigma} = 0$$

Nous pouvons alors utiliser la première identité de Bianchi¹ pour montrer que :

$$\boxed{D_\alpha R_{\sigma\mu\nu}^\alpha = 0} \tag{B.8}$$

qui est l'équivalent de la contrainte obtenue sur la dérivée covariante de la métrique lors de l'étude de l'action d'Einstein-Hilbert.

1. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$

Annexe C

Réécriture des équations de champ

Pour montrer l'équivalence entre

$$D_\alpha R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha = 0 \tag{C.1}$$

et les équations

$$D_\nu W_{\alpha\beta\gamma}{}^\nu = 0 \tag{C.2}$$

$$D_\nu R = 0 \tag{C.3}$$

Nous allons montrer l'implication dans un sens et puis dans l'autre. Commençons par montrer l'implication (C.1) \rightarrow (C.2) et (C.3).

On peut commencer par contracter les composantes du Riemann de l'équation (C.1) pour obtenir un Ricci :

$$D_\nu R_\beta{}^\nu = 0$$

Si on utilise maintenant la première équivalence démontrée 2.5 :

$$D_\alpha R_\beta{}^\gamma - D_\beta R_\alpha{}^\gamma = 0 \tag{C.4}$$

et qu'on contracte une fois les indices, on trouve :

$$D_\nu R_\beta{}^\nu = D_\beta R = 0$$

Ce qui nous donne alors l'équation (C.3). Pour montrer que cela implique aussi (C.2), il suffit de se rappeler que $D_\alpha g^{\beta\gamma} = 0$ et de réécrire l'équation (C.1) en terme du tenseur

de Ricci et du scalaire de courbure :

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho} &= W_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\delta_\lambda^\nu R_\mu^\rho - \delta_\lambda^\rho R_\mu^\nu + \delta_\mu^\rho R_\lambda^\nu - \delta_\mu^\nu R_\lambda^\rho) \\ &\quad + \frac{1}{6} (\delta_\lambda^\nu \delta_\mu^\rho - \delta_\lambda^\rho \delta_\mu^\nu) R \end{aligned}$$

On a alors immédiatement l'équation (C.2).

Montrons à présent l'implication inverse : \leftarrow .

La seconde identité de Bianchi que l'on contracte deux fois nous donne :

$$2D_\rho R_\nu^\rho - D_\nu R = 0$$

et comme $D_\nu R = 0$, on a $D_\rho R_\nu^\rho = 0$.

La dérivée covariante du Riemann devient alors, lorsqu'on exprime le Riemann en terme de Weyl, Ricci et scalaire de courbure :

$$D_\rho R_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho} = \frac{1}{2} (D_\lambda R_\mu{}^\nu - D_\mu R_\lambda{}^\nu)$$

Alors que contracter une fois la seconde identité de Bianchi nous donne :

$$D_\rho R_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho} = D_\lambda R_\mu{}^\nu - D_\mu R_\lambda{}^\nu$$

ce qui implique donc bien que

$$D_\rho R_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho} = 0$$

Annexe D

Les équations de champ pour les théories d'Einstein et de Nordström

Nous pouvons exprimer les équations de champ dérivées précédemment sous une forme qui nous est beaucoup plus familière :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} &= 0 \\ W_{\mu\nu\rho\sigma} &= 0 \quad \text{et} \quad R = 0 \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence entre les équations de champ et les équations ci-dessus, nous allons devoir introduire l'hypothèse que la solution est à symétrie sphérique.

Les théories d'Einstein et Nordström impliquent les équations de champ

Commençons par l'implication la plus facile : l'équation d'Einstein avec constante cosmologique et la théorie de Nordström implique chacune les équations

$$R_{\alpha\mu\nu\rho}R^{\beta\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha}^{\beta}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$D_{\alpha}R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = 0 \quad (\text{D.2})$$

Contracter l'équation d'Einstein nous dit que :

$$R = -4\Lambda$$

et donc

$${}^0R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} = 0$$

On voit directement que l'équation (2.11) est satisfaite.

Ensuite, comme $R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ et que $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ on a

$$D_\alpha R_\beta{}^\nu - D_\beta R_\alpha{}^\nu = 0$$

et, comme nous avons montré précédemment que cette dernière équation implique (D.2), la première partie de l'implication est terminée.

Pour montrer que la théorie de Nordström implique les équations de champ il faut constater que comme le tenseur de Weyl ainsi que le scalaire de courbure s'annulent, l'équation (D.1) est satisfaite en utilisant l'équivalence avec

$$W_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta{}^0 R^{\gamma\beta} = -\frac{1}{6}{}^0 R_\alpha{}^\delta R \quad (\text{D.3})$$

Ensuite, nous constatons que la dérivée covariante du Weyl ainsi que celle du scalaire de courbure est nulle or nous avons justement montré en annexe C que cela est équivalent à demander que :

$$D_\sigma R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = 0$$

Ce qui termine alors la première partie pour montrer l'équivalence.

Nous allons maintenant montrer que les équations de champ impliquent soit les équations d'Einstein soit celles de Nordström. Pour montrer cette équivalence nous allons faire le calcul de manière explicite en prenant la métrique à symétrie sphérique la plus générale possible.

Les équations de champ implique la théorie d'Einstein ou de Nordström

La métrique que nous prenons à la forme suivante :

$$ds^2 = e^{2\mu} c^2 dt^2 - e^{2\nu} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{D.4})$$

Le calcul des Riemann nous donne :

$$R_{trtr} = (-\nu'\mu' + \mu'^2 + \mu'') e^{2\mu} + (-\dot{\nu}^2 + \dot{\nu}\dot{\mu} - \ddot{\nu}) e^{2\nu} \quad (\text{D.5})$$

$$R_{t\theta t\theta} = r \left\{ r'\mu' e^{2(\mu-\nu)} + \dot{r}\dot{\mu} - \ddot{r} \right\} \quad (\text{D.6})$$

$$R_{t\phi t\phi} = r \sin^2 \theta \left\{ r'\mu' e^{2(\mu-\nu)} + \dot{r}\dot{\mu} - \ddot{r} \right\} \quad (\text{D.7})$$

$$R_{t\theta r\theta} = r \left\{ r'\dot{\nu} + \dot{r}\mu' - \dot{r}' \right\} \quad (\text{D.8})$$

$$R_{t\phi r\phi} = r \sin^2 \theta \left\{ r'\dot{\nu} + \dot{r}\mu' - \dot{r}' \right\} \quad (\text{D.9})$$

$$R_{r\theta r\theta} = r \left\{ r'\nu' + \dot{r}\dot{\nu} e^{2(\nu-\mu)} - r'' \right\} \quad (\text{D.10})$$

$$R_{r\phi r\phi} = r \sin^2 \theta \left\{ r'\nu' + \dot{r}\dot{\nu} e^{2(\nu-\mu)} - r'' \right\} \quad (\text{D.11})$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = r^2 \sin^2 \theta \left\{ 1 + \dot{r}^2 e^{-2\mu} - r'^2 e^{-2\nu} \right\} \quad (\text{D.12})$$

Auxquels nous devons évidemment ajouter les composantes non nulles du Riemann en utilisant ses symétries. Nous avons utilisé la notation ' pour la dérivée par rapport à r et $\dot{}$ pour la dérivée par rapport à t .

Nous avons aussi calculé le Ricci :

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -g^{rr} R_{trtr} - 2g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} \\ R_{rr} &= -g^{tt} R_{trtr} - 2g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} \\ R_{\theta\theta} &= -g^{tt} R_{t\theta t\theta} - g^{rr} R_{r\theta r\theta} - g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \\ R_{tr} &= -2g^{\theta\theta} R_{t\theta r\theta} \end{aligned}$$

le Ricci sans trace :

$$\begin{aligned} {}^0 R_{tt} &= \frac{1}{2} (g_{tt} g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} - g^{rr} R_{trtr}) + g_{tt} g^{rr} g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} - g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} \\ {}^0 R_{rr} &= \frac{1}{2} (g_{rr} g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} R_{\theta\phi\theta\phi} - g^{tt} R_{trtr}) + g_{rr} g^{tt} g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} - g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} \\ {}^0 R_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} (g_{\theta\theta} g^{tt} g^{rr} R_{trtr} - g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta}) \\ {}^0 R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta {}^0 R_{\theta\theta} \\ {}^0 R_{tr} &= R_{tr} \end{aligned}$$

le scalaire de courbure :

$$R = -2g^{tt} g^{rr} R_{trtr} - 4g^{tt} g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} - 4g^{rr} g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} - 2g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} \quad (\text{D.13})$$

ainsi que le tenseur de Weyl :

$$W^{tr}_{tr} = \frac{1}{3} \left(g^{tt} g^{rr} R_{trtr} + g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} R_{\theta\phi\theta\phi} - g^{rr} g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} - g^{tt} g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} \right) \quad (\text{D.14})$$

$$W^{\theta\phi}_{\theta\phi} = \frac{1}{3} \left(g^{tt} g^{rr} R_{trtr} + g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} R_{\theta\phi\theta\phi} - g^{tt} g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} - g^{rr} g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} \right) \quad (\text{D.15})$$

$$W^{t\theta}_{t\theta} = \frac{1}{6} \left(g^{tt} g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} + g^{rr} g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} - g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} R_{\theta\phi\theta\phi} - g^{tt} g^{rr} R_{trtr} \right) \quad (\text{D.16})$$

$$W^{t\phi}_{t\phi} = W^{t\theta}_{t\theta} \quad (\text{D.17})$$

$$W^{r\theta}_{r\theta} = W^{t\theta}_{t\theta} \quad (\text{D.18})$$

$$W^{r\phi}_{r\phi} = W^{r\theta}_{r\theta} \quad (\text{D.19})$$

Maintenant que nous avons tous les objets intéressants que l'on a calculés à partir de la métrique, il est temps de montrer que toutes les solutions à symétrie sphérique aux équations de champ sont soit solution de l'équation d'Einstein, soit solution de la théorie de Nordström.

Chacune des équations de champ nous donne 4 équations. L'équation (D.1) donne, en prenant les composantes $[tt]$, $[tr]$, $[rr]$ et $[\theta\theta]$:

$$R_{trtr} R^{trtr} + 2R_{t\theta t\theta} R^{t\theta t\theta} - 2R_{r\theta r\theta} R^{r\theta r\theta} - R_{\theta\phi\theta\phi} R^{\theta\phi\theta\phi} = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$4R^{r\theta t} (R_{t\theta t\theta} g_{rr} g^{tt} + R_{r\theta r\theta}) = 0 \quad (\text{D.21})$$

$$R_{trtr} R^{trtr} + 2R_{r\theta r\theta} R^{r\theta r\theta} - 2R_{t\theta t\theta} R^{t\theta t\theta} - R_{\theta\phi\theta\phi} R^{\theta\phi\theta\phi} = 0 \quad (\text{D.22})$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} R^{\theta\phi\theta\phi} - R_{trtr} R^{trtr} = 0 \quad (\text{D.23})$$

La seconde équation de champ (équation (D.2)) nous donne quant à elle :

$$D_\nu R_{tr}{}^{r\nu} = \partial_t R_{tr}{}^{rt} + 2\Gamma_{t\theta}^\theta R_{tr}{}^{rt} - 2\Gamma_{t\theta}^\theta R_{\theta r}{}^{r\theta} - \Gamma_{r\theta}^\theta R_{t\theta}{}^{r\theta} = 0 \quad (\text{D.24})$$

$$D_\nu R_{tr}{}^{t\nu} = \partial_r R_{tr}{}^{tr} + 2\Gamma_{r\theta}^\theta R_{tr}{}^{tr} - 2\Gamma_{t\theta}^\theta R_{\theta r}{}^{t\theta} - 2\Gamma_{r\phi}^\phi R_{t\theta}{}^{t\theta} = 0 \quad (\text{D.25})$$

$$\begin{aligned} D_\nu R_{t\theta}{}^{\theta\nu} &= \partial_t R_{t\theta}{}^{\theta t} + R_{t\theta}^{\theta t} \left(\Gamma_{tr}^r + \Gamma_{t\phi}^\phi \right) \\ &+ \partial_r R_{t\theta}{}^{\theta r} + R_{t\theta}{}^{\theta r} \left(\Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{tt}^r g^{tt} g_{rr} \right) \\ &- R_{r\theta}{}^{\theta r} \Gamma_{tr}^r - R_{\phi\theta}{}^{\theta\phi} \Gamma_{t\phi}^\phi = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

$$\begin{aligned} D_\nu R_{r\theta}{}^{\theta\nu} &= \partial_t R_{r\theta}{}^{\theta t} + R_{r\theta}{}^{\theta t} \left(\Gamma_{tt}^t + \Gamma_{t\theta}^\theta - \Gamma_{rr}^r g^{rr} g_{tt} \right) \\ &+ \partial_r R_{r\theta}{}^{\theta r} + R_{r\theta}{}^{\theta r} \left(\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta \right) \\ &- \Gamma_{rt}^t R_{t\theta}{}^{\theta t} - \Gamma_{r\phi}^\phi R_{\phi\theta}{}^{\theta\phi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

En plus de ces équations, nous avons la seconde identité de Bianchi qui nous donne aussi de l'information. Une fois de plus, nous avons 4 équations :

$$\partial_r R^{\theta\phi}_{\theta\phi} + 2R^{\theta\phi}_{\theta\phi} \Gamma^\theta_{\theta r} + 2R^{t\theta}_{\theta r} \Gamma^\theta_{t\theta} + 2R^{r\theta}_{\theta r} \Gamma^\theta_{r\theta} = 0 \quad (\text{D.28})$$

$$\partial_t R^{\theta\phi}_{\theta\phi} + 2R^{\theta\phi}_{\theta\phi} \Gamma^\theta_{\theta t} + 2R^{t\theta}_{\theta t} \Gamma^\theta_{t\theta} + 2R^{r\theta}_{\theta t} \Gamma^\theta_{r\theta} = 0 \quad (\text{D.29})$$

$$\begin{aligned} \partial_r R^{r\theta}_{t\theta} + R^{r\theta}_{t\theta} \left(\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} - \Gamma^{rr}_{tt} g^{tt} g_{rr} \right) \\ + \partial_t R^{r\theta}_{\theta r} + R^{r\theta}_{\theta r} \left(\Gamma^r_{rt} + \Gamma^\theta_{\theta t} \right) \\ + R^{t\theta}_{t\theta} \Gamma^r_{tr} + R^{rt}_{rt} \Gamma^\theta_{t\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

$$\begin{aligned} \partial_r R^{t\theta}_{t\theta} + R^{t\theta}_{t\theta} \left(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^\theta_{\theta r} \right) \\ + \partial_t R^{t\theta}_{\theta r} + R^{t\theta}_{\theta r} \left(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta t} - g^{rr} g_{tt} \Gamma^{tr}_{rr} \right) \\ + R^{r\theta}_{\theta r} \Gamma^t_{rt} + R^{tr}_{rt} \Gamma^\theta_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Commençons par voir quels sont les différents cas que nous donnent les équations (D.20) à (D.23). Nous devons ensuite utiliser les conditions D.20 à D.23 ainsi que D.24 à D.31 pour montrer que chacun des cas obtenus implique effectivement l'équation d'Einstein ou de Nordström !

(D.23) nous dit que :

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = \pm R_{trtr} g^{tt} g^{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi} \quad (\text{D.32})$$

En soustrayant (D.22) à (D.20) on trouve :

$$R_{t\theta t\theta} = \pm R_{r\theta r\theta} g_{tt} g^{rr} \quad (\text{D.33})$$

Et l'équation (D.21) nous donne

$$R^{r\theta\theta t} (R_{t\theta t\theta} g_{rr} g^{tt} + R_{r\theta r\theta}) = 0 \quad (\text{D.34})$$

Ce qui se ramène alors à 6 cas possibles que l'on va analyser un par un.

| | | |
|---|---|--------------------------------|
| $R_{\theta\phi\theta\phi} = - R_{trtr} g^{tt} g^{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}$ | $R_{\theta\phi\theta\phi} = + R_{trtr} g^{tt} g^{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}$ | $R_{\theta\phi\theta\phi} = 0$ |
| $R_{t\theta t\theta} = - R_{r\theta r\theta} g_{tt} g^{rr}$ | $R_{t\theta t\theta} = + R_{r\theta r\theta} g_{tt} g^{rr}$ | $R_{t\theta t\theta} = 0$ |
| $R_{r\theta r\theta} = 0$ | $R_{r\theta r\theta} = 0$ | $R_{r\theta r\theta} = 0$ |
| ① | ② | ③ |
| $R_{\theta\phi\theta\phi} = - R_{trtr} g^{tt} g^{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}$ | $R_{\theta\phi\theta\phi} = + R_{trtr} g^{tt} g^{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}$ | $R_{\theta\phi\theta\phi} = 0$ |
| $R_{t\theta t\theta} = - R_{r\theta r\theta} g_{tt} g^{rr}$ | $R_{t\theta t\theta} = + R_{r\theta r\theta} g_{tt} g^{rr}$ | $R_{t\theta t\theta} = 0$ |
| $R_{r\theta r\theta} = 0$ | $R_{r\theta r\theta} = 0$ | $R_{r\theta r\theta} = 0$ |
| ④ | ⑤ | ⑥ |

analyse des différents cas

cas ① : On constate que les deux conditions que nous impose le cas ① permettent d'annuler le tenseur de Weyl : équations (D.14) à (D.16). Mais ces conditions annulent aussi le scalaire de courbure (équation (D.13)) !

Le cas ① implique donc la théorie de Nordström.

cas ② : De la même manière, on constate que $W^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = 0$ ainsi que $R = 0$.

cas ③ : Si on somme l'équation (D.25) et (D.28) et que l'on utilise les conditions du cas ③, on trouve que $\Gamma_{r\theta}^\theta R_{r\theta r\theta} = 0$

D'autre part, on peut soustraire (D.24) à (D.29) qui nous donne alors que : $\Gamma_{t\theta}^\theta R_{r\theta r\theta} = 0$
On a donc deux cas possibles.

Soit $R_{r\theta r\theta} = 0$ et le cas ③ se ramène alors au cas ②.

Soit $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{t\theta}^\theta = 0$, mais ceci implique en fait que (en ré-exprimant simplement le Riemann en terme des Christoffel) $R_{r\theta r\theta} = 0$ et donc on se ramène une fois de plus au cas ②.

cas ④ : En faisant (D.26)+(D.30) on trouve : $\Gamma_{t\theta}^\theta R_{trtr} = 0$.

Si l'on fait maintenant (D.31) - (D.27) on trouve la condition : $\Gamma_{r\theta}^\theta R_{trtr} = 0$.

De nouveau, deux cas apparaissent.

Soit $R_{trtr} = 0$ et donc $R_{\theta\phi\theta\phi} = 0$ et on se ramène alors au cas ①.

Soit $\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = 0$ ce qui implique que (en écrivant le Riemann en terme des Christoffel) $R_{tt\theta\theta} = 0$ ce qui implique, par les conditions du cas ④ que $R_{r\theta r\theta} = 0$ et l'on se ramène alors au cas ⑤.

cas ⑤ : En faisant (D.28)-(D.25), on trouve : $\Gamma_{t\theta}^\theta R^{t\theta}_{\theta r} = 0$. D'un autre côté, si l'on fait : (D.29)+(D.24), on trouve $\Gamma_{r\theta}^\theta R_{t\theta}^{r\theta} = 0$. Une fois de plus, on constate que deux cas s'offrent à nous.

Soit $R_{t\theta r\theta} = 0$ et on se ramène alors au cas ⑥.

Soit $\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = 0$ ce qui impose alors que $R^{t\theta}_{tr\theta} = 0$ et on se ramène alors aussi au cas ⑥.

cas ⑥ : Nous avons montré précédemment que

$$D_\nu R_{\alpha\beta}^{\gamma\nu} = 0$$

est équivalent aux équations $D_\nu W_{\alpha\beta}^{\gamma\nu} = 0$ et $D_\nu R = \partial_\nu R = 0$.

R est donc une constante que l'on choisi : $R = -4\Lambda$.

Avec les conditions du cas ⑥, on voit que $\forall \alpha, \beta$ on a

$${}^0R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}Rg_{\alpha\beta} = 0$$

et on remarque alors que les équations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique sont satisfaites :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} &= \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On constate donc l'importance du choix de la constante $R = -4\Lambda$ qui apparait donc comme une constante d'intégration.

Résultats

Nous avons donc montré l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{ccc} R_{\alpha\nu\lambda\sigma}R^{\beta\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha}^{\beta}R_{\lambda\sigma\mu\nu}R^{\lambda\sigma\mu\nu} = 0 & & G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \\ \text{et} & \Leftrightarrow & \text{ou} \\ D_{\alpha}R_{\sigma\mu\nu}{}^{\alpha} = 0 & & W_{\mu\nu\rho\sigma} = 0; R = 0 \end{array}$$

Cependant, nous avons dû supposer la symétrie sphérique de la métrique pour montrer l'implication \rightarrow et l'équivalence montrée n'est donc malheureusement pas la plus forte probablement possible.

Annexe E

La théorie d'Einstein et solution en présence d'une constante cosmologique

Nous allons regarder ici l'équation d'Einstein pour le cas $\rho(r, t) = r$ du chapitre 4.

L'équation d'Einstein se ramènent alors à :

$$\frac{2}{\rho} \dot{\nu} = 0 \quad (\text{E.1})$$

$$e^{-2\nu} (\mu'' + \mu'^2 - \mu' \nu') - e^{-2\mu} (\ddot{\nu} + \dot{\nu}^2 - \dot{\nu} \dot{\mu}) + \frac{2}{r} (\mu' e^{-2\nu}) = -\Lambda \quad (\text{E.2})$$

$$e^{-2\nu} (\mu'' + \mu'^2 - \mu' \nu') - e^{-2\mu} (\ddot{\nu} + \dot{\nu}^2 - \dot{\nu} \dot{\mu}) + \frac{2}{r} (-\nu' e^{-2\nu}) = -\Lambda \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{e^{-2\mu}}{r} (\mu' e^{2(\mu-\nu)}) + \frac{e^{-2\nu}}{r} (-\nu') - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\nu}) = -\Lambda \quad (\text{E.4})$$

L'équation (E.1) nous dit que $\nu(t, r) = \nu(r)$. Ensuite les équations (E.2) et (E.3) nous permettent de prendre $\mu = -\nu$. Pour finir, nous pouvons résoudre l'équation (E.4) avec $\mu' = -\nu'$:

$$e^{-2\nu} (1 - 2r\nu') = 1 - \Lambda r^2 \quad (\text{E.5})$$

que l'on intègre facilement, ce qui nous donne :

$$e^{-2\nu} = 1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \quad (\text{E.6})$$

Désirant retrouver, dans la limite non relativiste, la théorie de Newton, nous fixons la constante $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ et nous trouvons la métrique de Schwarzschild-de Sitter :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Annexe F

La métrique de Nariai comme une limite de celle de Schwarzschild-de Sitter

La métrique de Schwarzschild-de Sitter prend la forme suivante :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Et par simplicité, nous définissons la fonction :

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2$$

En cherchant les racines de cette fonction, nous pouvons nous ramener à chercher les racines de :

$$-6GM\Lambda^2 q^3 - c^2 - \Lambda^3 c^2 q^6 = 0$$

où nous avons défini $r = p + q$ et $p = \frac{1}{\Lambda q}$.

Que l'on résout alors de manière usuelle pour un polynôme du second degré. Nous constatons que pour avoir deux racines purement réelles, il nous faut la condition :

$$0 \leq \frac{9G^2 M^2}{c^4} \Lambda < 1$$

Avec une limite supérieure stricte. On remarque cependant que dans la limite où : $\frac{9G^2 M^2}{c^4} \rightarrow \frac{1}{\Lambda}$ les racines tendent toutes deux vers la valeur : $R = \frac{1}{\Lambda^{1/2}}$. Mais a strictement parlé nous ne pouvons pas prendre le rayon de Schwarzschild et l'horizon cosmologique égaux. Il faut alors prendre la limite où les deux racines tendent vers cette valeur. En les faisant se rapprocher à la même vitesse de R , on peut écrire la fonction $f(r)$, en

introduisant le paramètre ϵ (qui exprime l'écart par rapport à R), sous la forme :

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{(r - (R + \epsilon))(r - (R - \epsilon))}{R^2} \\ &= -\frac{(r - R)^2 - \epsilon^2}{R^2} \end{aligned}$$

En faisant les changements de variables adaptés, nous pouvons réécrire l'élément de longueur :

$$ds^2 = (1 - \Lambda z^2) c^2 d\tau^2 - \frac{1}{1 - \Lambda z^2} dz^2 - \left(\frac{\epsilon z}{R} + R\right)^2 d\Omega^2$$

Et nous pouvons maintenant prendre la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$:

$$ds^2 = (1 - \Lambda z^2) c^2 d\tau^2 - \frac{1}{1 - \Lambda z^2} dz^2 - \frac{1}{\Lambda} d\Omega^2$$

qui est bien la métrique de Nariai.

Bibliographie

- [1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [2] Peter Baekler and Philip B. Yasskin. All torsion-free spherical vacuum solutions of the quadratic poincaré gauge theory of gravity. *General Relativity and Gravitation*, 16(12) :1135–1155, 1984. ISSN 0001-7701. doi : 10.1007/BF00760237. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00760237>.
- [3] Stillman Drake. *Galileo at Work : His Scientific Biography*. Dover Publications, 2003.
- [4] Eric M. Jones. The hammer and the feather, 1996. URL <http://history.nasa.gov/alsj/a15/a15.clsout3.html>.
- [5] Satellite test of the equivalence principle. <http://einstein.stanford.edu/STEP/>, 2008.
- [6] Clifford M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativity*, 17, 2014. URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4>.
- [7] J-M Gérard. Relativité générale et cosmologie. note de cours universitaire, 2012.
- [8] K.A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin.Phys.*, C38 :090001, 2014. doi : 10.1088/1674-1137/38/9/090001.
- [9] J.-M. Gerard. Mass Issues in Fundamental Interactions. *ArXiv e-prints*, November 2008.
- [10] T. W. Murphy, E. G. Adelberger, J. B. R. Battat, C. D. Hoyle, R. J. McMillan, E. L. Michelsen, R. L. Samad, C. W. Stubbs, and H. E. Swanson. Long-term degradation of optical devices on the moon. *icarus*, 208 :31–35, jul 2010. doi : 10.1016/j.icarus.2010.02.015.
- [11] Slava G. Turyshev. Experimental Tests of General Relativity. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 58 :207–248, 2008. doi : 10.1146/annurev.nucl.58.020807.111839.

- [12] Kenneth Nordtvedt. Equivalence principle for massive bodies. ii. theory. *Phys. Rev.*, 169 :1017–1025, May 1968. doi : 10.1103/PhysRev.169.1017. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.169.1017>.
- [13] Jean-Marc Gerard. The Strong equivalence principle from gravitational gauge structure. *Class.Quant.Grav.*, 24 :1867–1878, 2007. doi : 10.1088/0264-9381/24/7/012.
- [14] Wei-Tou Ni. Yang’s gravitational field equations. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :319–320, Aug 1975. doi : 10.1103/PhysRevLett.35.319. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.319>.
- [15] L.P. Eisenhart. *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, 1997.
- [16] C. M. Ho and S. D. H. Hsu. The Dark Force : Astrophysical Repulsion from Dark Energy. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [17] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron.Astrophys.*, 571 :A16, 2014. doi : 10.1051/0004-6361/201321591.
- [18] http://en.wikipedia.org/wiki/De_Sitter%E2%80%93Schwarzschild_metric#Nariai_solution, 2015.
- [19] Marcello Ortaggio. Impulsive waves in the Nariai universe. *Phys.Rev.*, D65 :084046, 2002. doi : 10.1103/PhysRevD.65.084046.
- [20] T Damour and G Esposito-Farese. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 9(9) :2093, 1992. URL <http://stacks.iop.org/0264-9381/9/i=9/a=015>.
- [21] T. Mei. On isotropic metric of Schwarzschild solution of Einstein equation. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, October 2006.
- [22] Jose Bernabeu, Domenec Espriu, and Daniel Puigdomenech. Gravitational waves in the presence of a cosmological constant. *Phys.Rev.*, D84 :063523, 2011. doi : 10.1103/PhysRevD.84.063523,10.1103/PhysRevD.86.069904.
- [23] Partha Ghose. Unification of Gravity and Electromagnetism I : Mach’s Principle and Cosmology. 2014.
- [24] Y. Yang and W. B. Yeung. A Yang-Mills Type Gauge Theory of Gravity and the Dark Matter and Dark Energy Problems. *ArXiv e-prints*, September 2012.
- [25] J.R. Ray. Palatini variational principle. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 25(2) : 706–710, 1975. ISSN 0369-3554. doi : 10.1007/BF02724746. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02724746>.

-
- [26] Eolo Di Casola, Stefano Liberati, and Sebastiano Sonego. Nonequivalence of equivalence principles. *Am.J.Phys.*, 83 :39, 2015. doi : 10.1119/1.4895342.
- [27] Kenneth Nordtvedt. Equivalence principle for massive bodies. i. phenomenology. *Phys. Rev.*, 169 :1014–1016, May 1968. doi : 10.1103/PhysRev.169.1014. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.169.1014>.
- [28] Edward E. Fairchild. Gauge theory of gravitation. *Phys. Rev. D*, 14 :384–391, Jul 1976. doi : 10.1103/PhysRevD.14.384. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.384>.
- [29] Oscar J.C. Dias and Jose P.S. Lemos. The extremal limits of the C metric : Nariai, Bertotti-robinson and anti-Nariai C metrics. *Phys.Rev.*, D68 :104010, 2003. doi : 10.1103/PhysRevD.68.104010.
- [30] J. Morrow-Jones and D.M. Witt. Inflationary initial data for generic spatial topology. *Phys.Rev.*, D48 :2516–2528, 1993. doi : 10.1103/PhysRevD.48.2516.
- [31] Kristin Schleich and Donald M. Witt. A simple proof of birkhoff’s theorem for cosmological constant. *J.Math.Phys.*, 51 :112502, 2010. doi : 10.1063/1.3503447.
- [32] Thibault Damour and David Vokrouhlicky. The Equivalence principle and the moon. *Phys.Rev.*, D53 :4177–4201, 1996. doi : 10.1103/PhysRevD.53.4177.
- [33] Thibault Damour. Questioning the equivalence principle. *C.R.Acad.Sci.IV Phys.Astrophys.*, 2 :1249, 2001. doi : 10.1016/S1296-2147(01)01272-0.
- [34] Thibault Damour. General Relativity Today. *Prog.Math.Phys.*, 52 :1–49, 2007. doi : 10.1007/978-3-7643-8524-8_1.

