Mapeamento Clássico-Quântico - Estudando o Emaranhamento Quântico simulando Modelos Clássicos para o Modelo de Ising

Alex Enrique Crispim

23 de agosto de 2018

Tópicos

- Conceitos preliminares de Termodinâmica e Mecânica Estatística
- O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising
- A ideia do mapeamento clássico-quântico
- Monte Carlo e Algoritmo de Metropolis
- Cadeias de Markov e Teoria Ergódicas
- Amostrando-se o espaço de fase e calculando-se médias
- Calculando-se observáveis clássicos
- Calculando-se observáveis quânticos via observáveis clássicos
- Transições quânticas de fase e o emaranhamento quântico

Termodinâmica e Mecânica Estatística - Dinâmica

- Dinâmica de sistemas $\rightarrow$ minimização da energia e maximização da entropia

- Dinâmica de sistemas $\rightarrow$ minimização da energia e maximização da entropia $\Leftrightarrow$ *Minimização da Energia livre F*

$$F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS$$

$$F = U - TS$$

F é uma função de estado.

F é uma função de estado.

$$F = U - TS$$

F é uma função de estado.

$$F = U - TS$$

Energia livre $\rightarrow$ Peso de Boltzmann

$$P(E) = e^{-\beta E}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Distribuição de Boltzmann

$$\mu_\beta(H(x)) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(x)}, \quad Z = \int e^{-\beta H(x)} dx$$

Calculo de observáveis macroscópicos por meio da medida μ_β

$$\langle M(x) \rangle_T = \int M(x) e^{-\beta H(x)} dx.$$

O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising

- 1940
- Wilhelm Lenz → Ernest Ising

Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus[1]).

Von **Ernst Ising** in Hamburg.

(Eingegangen am 9. Dezember 1924.)

Es wird im wesentlichen das thermische Verhalten eines linearen, aus Elementarmagneten bestehenden Körpers untersucht, wobei im Gegensatz zur Weissschen Theorie des Ferromagnetismus kein molekulares Feld, sondern nur eine (nicht magnetische) Wechselwirkung benachbarter Elementarmagnete angenommen wird. Es wird gezeigt, daß ein solches Modell noch keine ferromagnetischen Eigenschaften besitzt und diese Aussage auch auf das dreidimensionale Modell ausgedehnt.

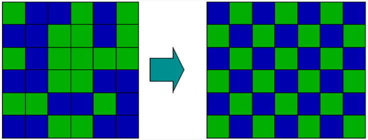
1. Annahmen. Die Erklärung, die P. Weiss[2]) für den Ferromagnetismus gegeben hat, ist zwar formal befriedigend, doch läßt sie besonders die Frage nach einer physikalischen Erklärung der Hypothese des molekularen Feldes offen. Nach dieser Theorie wirkt auf jeden Elementarmagneten, abgesehen von dem äußeren Magnetfeld, ein inneres Feld, das der jeweiligen Magnetisierungsintensität proportional ist. Es liegt nahe, für die Wirkungen der einzelnen Elemente (= Elementarmagnete) elektrische Dipolwirkungen anzusetzen. Dann ergäben sich aber durch

O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising

- Estudar o ferromagnetismo

fonte da figura: alunosonline.uol.com.br

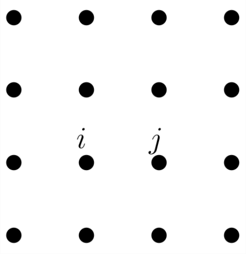
- Spins
- Transição de fase ordem−desordem.



Hamiltoniana (clássica) de Ising

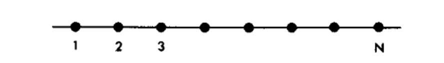
$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i B_i\sigma_i$$

Rede quadrada



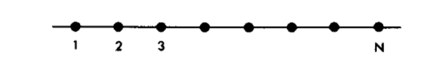
O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising

- Model 1D



$$M_0 = \lim_{H \to 0^+} M(H, T), \quad M(H, T) = \langle \sigma_j \rangle$$

- Model 1D



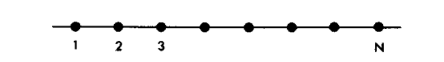
$$M(H,T) = \frac{e^{\beta J}\sinh(\beta H)}{e^{2\beta J}\sinh^2(\beta H) + e^{2-\beta J}}. \tag{1}$$

$$\lim_{H\to 0^+} M(H,T) = 0, \quad \forall T > 0.$$

O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising

Segundo Ising,

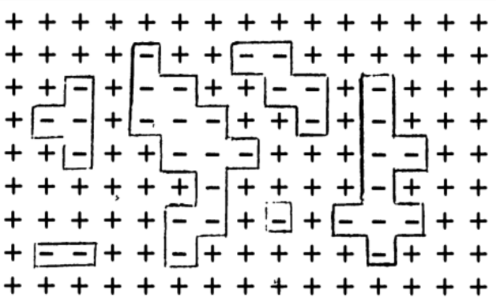
Model 1D sem transição $\Rightarrow$ Modelo de qualquer dimensão sem transição



$$\lim_{H \to 0^+} M(H, T) = 0, \quad \forall T > 0.$$

O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising

Peirls, 1936 - Transição de fase para 2D.



O Modelo de Ising Clássico e o Modelo Quântico de Ising

Onsager 1944 - Solução exata

$$\beta_c J = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2}$$

- Primeiro modelo a apresentar transições de fase
- Início de um novo marco no estudo de sistemas fortemente correlacionados

A ideia do mapeamento clássico-quântico

Hamiltoniana clássica bidimensional ($B = 0$).

$$H = -J_1 \sum_{i,j} \sigma_i^j \sigma_{i+1}^j - J_2 \sum_{i,j} \sigma_i^j \sigma_i^{j+1}$$

Hamiltoniana quântica unidimensional

$$\hat{H} = -J \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z + \lambda \hat{\sigma}_i^x$$

$$Z_q \mapsto Z_{cl}.$$

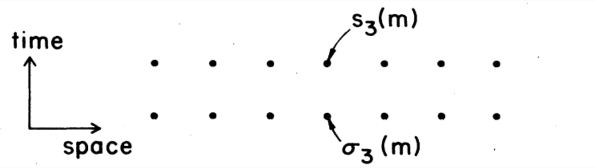
A ideia do mapeamento clássico-quântico

$$Z_q \mapsto Z_{cl}.$$

Observáveis quânticos $\mapsto$ observáveis clássicos.

A ideia do mapeamento clássico-quântico

direção $y \to$ tempo(*complexo*)



Espaço Euclidiano (2+0) $\mapsto$ Espaço de Minkowski (1+1)

A ideia do mapeamento clássico-quântico

$$Z_q \mapsto Z_{cl}.$$

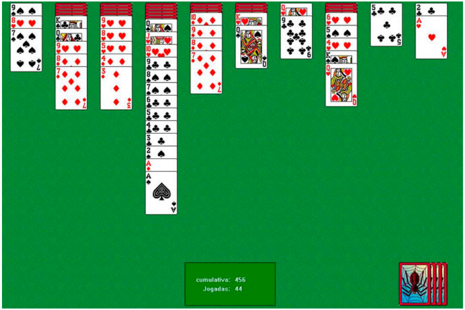
- Observáveis quânticos $\mapsto$ observáveis clássicos.
- Cálcular os observáveis clássicos e determinar o análogo quântico.

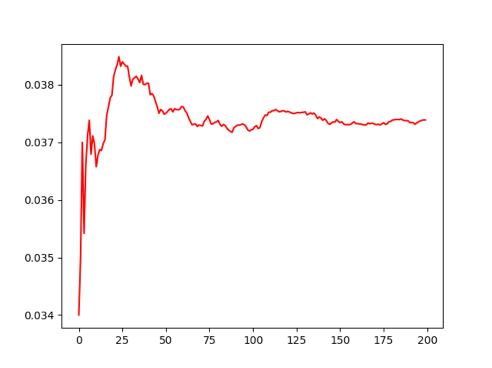
Monte Carlo e o Algoritmo de Metrópolis

- Cálculo de probabilidades usando estatística - Cálculo de quantidades estatísticas usando probabilidade

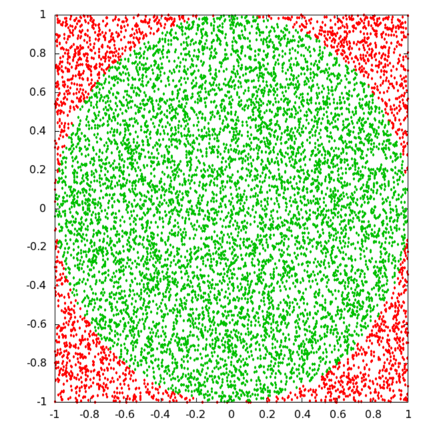
Monte Carlo e o Algoritmo de Metrópolis

- Cálculo de probabilidades usando estatística - Cálculo de quantidades estatísticas usando probabilidade




0.038
0.037
0.036
0.035
0.034
0
25
50
75
100
125
150
175
200

Cálculo do π



Monte Carlo e o Algoritmo de Metrópolis

- Uso do Monte Carlo para o cálculo dos observáveis clássicos
- Como?

Monte Carlo e o Algoritmo de Metrópolis

- Uso do Monte Carlo para o cálculo dos observáveis clássicos
- Como?

- Algoritmo de Metropolis

Cadeias de Markov

$\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2, ...$

$$\Gamma_k = \{\sigma_k\}$$

- Probabilidade de transição

$$\Gamma_i \xrightarrow{p_{ij}} \Gamma_j, \quad \forall (i,j)$$

Cadeias de Ergódicas

$$p_{ij}^{(n)} = \mu(\Gamma_{m+n} = \{\sigma_j\} | \Gamma_m = \{\sigma_i\}) > 0.$$

Teorema

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \text{ existe e independe de } i.$$

Cadeias de Ergódicas

$$p_{ij}^{(n)} = \mu(\Gamma_{m+n} = \{\sigma_j\}|\Gamma_m = \{\sigma_i\}) > 0.$$

Teorema

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \text{ existe e independe de } i.$$

- π_j independe do estado inicial!

Cadeias de Ergódicas

$$p_{ij}^{(n)} = \mu(\Gamma_{m+n} = \{\sigma_j\} | \Gamma_m = \{\sigma_i\}) > 0.$$

Teorema

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \text{ existe e independe de } i.$$

- π_j independe do estado inicial!
- Modelo de Ising

Teorema Ergódico

Theorem

Seja $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu, T)$ *um sistema dinâmico que preserva medida e* f *uma função* μ*-integrável. Então, as seguintes médias*

$$\textit{Média temporal: } \hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x),$$

$$\textit{Média espacial: } \bar{f}(x) = \frac{1}{\mu(\mathcal{X})} \int f \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

Se igualam.

Teorema Ergódico

Theorem

Seja $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu, T)$ *um sistema dinâmico que preserva medida e* f *uma função* μ*-integrável. Então, as seguintes médias*

$$\textit{Média temporal: } \hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x),$$

$$\textit{Média espacial: } \bar{f}(x) = \frac{1}{\mu(\mathcal{X})} \int f \,\mathrm{d}\mu \,,$$

Se igualam.

Amostrar no espaço de fase se iguala a amostrar no tempo!

Amostrando-se o espaço de fase e calculando-se médias

Pelo Teorema Ergódico.

$$\langle M \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} M(\{\sigma_i\}).$$

Amostrando-se o espaço de fase e calculando-se médias

Pelo Teorema Ergódico.

$$\langle M \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} M(\{\sigma_i\}).$$

Questão: $M(\{\sigma_i\})$...

Amostrando-se o espaço de fase e calculando-se médias

Pelo Teorema Ergódico.

$$\langle M \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} M(\{\sigma_i\}).$$

Questão: $M(\{\sigma_i\})$...
$\hookrightarrow$ Dinâmica da rede.

Amostrando-se o espaço de fase e calculando-se médias

Equação de balanceamento

$$\mu_\beta(\{\sigma_i\})\mathcal{A}(\{\sigma_i\} \to \{\sigma_j\}) = \mu_\beta(\{\sigma_j\})\mathcal{A}(\{\sigma_j\} \to \{\sigma_i\}).$$

Amostrando-se o espaço de fase e calculando-se médias

Equação de balanceamento

$$\mu_\beta(\{\sigma_i\})\mathcal{A}(\{\sigma_i\} \to \{\sigma_j\}) = \mu_\beta(\{\sigma_j\})\mathcal{A}(\{\sigma_j\} \to \{\sigma_i\}).$$

$$\mathcal{A} = \begin{cases} 1, & \delta H \leq 0, \\ e^{-\delta H}, & \delta H > 0. \end{cases}$$

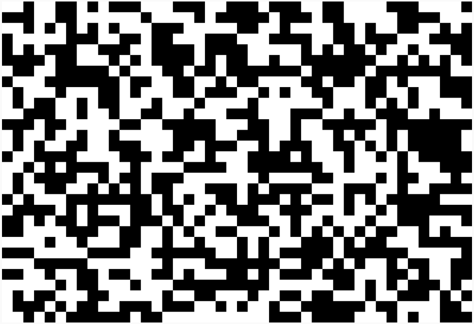
$\mathcal{A} \to$ Metropolis + Monte Carlo

Calculando-se observáveis clássicos

Método de Monte Carlo
  - Algoritmo de Metropolis

Algoritmo de Metropolis

Inicializa a rede.

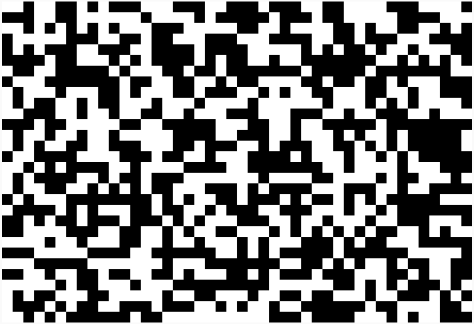


Calculando-se observáveis clássicos

Algoritmo de Metropolis

Inicializa a rede.

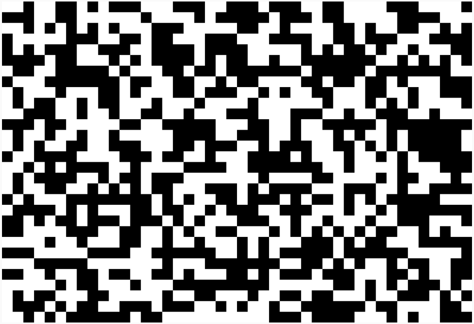
- Escolhe uma posição aleatória



Algoritmo de Metropolis

Inicializa a rede.

- Escolhe uma posição aleatória
- Se $\Delta H \leq 0$ ou $R < e^{-\beta \Delta H}$, flipa o spin (R $=$ `random()` $\in [0,1)$).



Modelo de Ising se liga a diversas outras áreas.

- Teoria de Campos.
  - Conformal Field Theory.
- Fermions de Majorana.

...