# Mapeamento Clássico-Quântico: Um Estudo do Modelo de Ising em Duas Dimensões

UFABC

USCS
Universidade Municipal de São Caetano do Sul

***Alex Enrique Crispim***
Centro de Ciências Naturais e Humanas - UFABC
Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP
*alex.enrique@ufabc.edu.br*

**Resumo:** Neste trabalho, estudou-se a técnica do *mapeamento clássico-quântico*, aplicado ao Modelo de Ising. O objetivo final do projeto era extrair informações da versão quântica do modelo unidimensão usando este formalismo. Isso se deu calculando computacionalmente observávais quântico, utilizando o modelo clássico bidimensional.

**Palavras-chave:** Modelo de Ising, Mecânica Quântica, Mecânica Estatística, Transição Quântica de Fase, Sistemas Quânticos de Muitos Corpos. Sistemas Fortemente Correlacionados.

## Introdução

O Modelo de Ising surgiu na década de 1920 como um modelo clássico simplificado para se estudar sistemas ferromagnéticos. Este modelo foi o primeiro a apresentar uma transição de fase, fato mostrado pela solução exata encontrada por L. Onsager (Onsager, 1944).

De forma geral, acredita-se que a função de partição de um modelo quântico de dimensão $D$ pode ser mapeada exatamente na função de partição de um modelo clássico de dimensão $D+1$. Este mapeamento tem sido fundamental para o estudo de teorias fortemente correlacionadas. Em especial, a aplicação deste formalismo ao Modelo de Ising leva à formulação de um modelo quântico de fundamental importância para o estudo de transições quânticas de fase e o entendimento de transições de fase de segunda ordem.

## O Modelo de Ising

O Modelo Clássico de Ising em duas dimensões corresponde a uma rede de variáveis clássicas $\sigma_i$ que assumem valores $\pm 1$. Essas se encontram arranjados em uma rede bidimensional, normalmente quadrada e tem Hamiltoniana

$$H_{cl.} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \tag{1}$$

com $\langle i, j \rangle$ representando os $j$ primeiros vizinhos de $i$.

A função de partição desta Hamiltoniana clássica, pode ser mapeada exatamente na função de partição da Hamiltoniana

$$\hat{H}_\Delta = -J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \Delta \sigma_i^x \tag{2}$$

chamada *Hamiltoniana Quântica de Ising Unidimensional*, com $\sigma^x$ e $\sigma^z$ representandos as matrizes $x$ e $z$ de Pauli.

A solução de Onsager mostra que o modelo clássico apresenta uma transição de fase à temperatura $T_c$ dada por

$$\beta_c J = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2}, \quad \beta_c = \frac{1}{kT_c}, \tag{3}$$

onde $k$ é a constante de Boltzman. Para o modelo quântico, a transição de fase se manifesta como $\Delta = 1$.

Utilizando a técnica do mapeamento clássico-quântico, é possível estudar o modelo quântico de Ising na transição de fase, por meio do modelo clássico. As vantagens se dão em termos de menor complexidade computacional e no uso de uma teoria clássica (mecânica estatística clássica), costumeiramente mais simples de se trabalhar.

## Desigualdades de Bell e Correlações Quânticas

Na década de 60, John Bell Derivou uma desigualdade sobre o valor esperado de variáveis aleatórias, sob as hipóteses do paradoxo EPR (paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen) (Bell, 1964). De forma reformulada e mais geral, a desigualdade afirma que o valor esperado da quantidade $QS + RS + RT - QT$, onde $Q, R, S, T$ são variáveis aleatórias que assumem valores $\pm 1$, é tal que

$$\langle QS + RS + RT - QT \rangle \leq 2. \tag{4}$$

Esta desigualdade se funda nos argumentos de Einstein, Podolsky e Rosen acerca de uma possível incompleteza da Mecânica Quântica (Einstein *et al*, 1935). O interesse nesta desigualdade foi a verificação de que a mesma é incorreta; o mundo comporta-se conforme a Mecânica Quântica.

Em especial, para o estado

$$|s\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

o valor esperado na forma de (4) para os observáveis

$$Q = \sigma_1^z, \quad R = \sigma_1^x, \quad S = \frac{-\sigma_2^z - \sigma_2^x}{\sqrt{2}}, \quad T = \frac{\sigma_2^z - \sigma_2^x}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

é igual a $2\sqrt{2} > 2$.

Supondo que primeiros vizinhos da cadeia unidimensional quântica pudesse estar emaranhados no estado $|s\rangle$, uma simulação do valor esperado (4) para estes observáveis deveria, em algum momento, violar a desigualdade de Bell. Para tal, simulou-se uma rede de spins clássios com a Hamiltoniana (1), calculando os observáveis $\sigma_i^x$, $\sigma_i^z$, $\sigma_{i+1}^x$ e $\sigma_{i+1}^z$ por meio do mapeamento entre os sistemas. Com estes observáveis e os observáveis definidos em (5), pode-se fazer o estudo requerido da desigualdade (4), indicando a presença do estado $|s\rangle$.

## Resultados

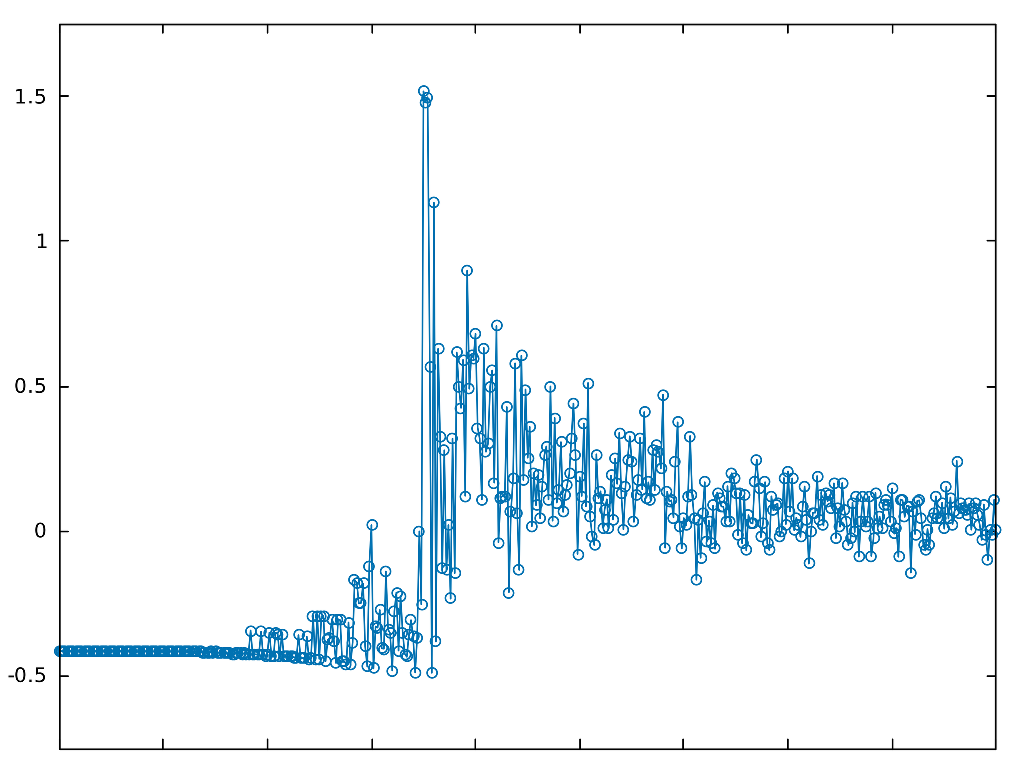


**Figura 1:**

## Conclusão

## Referências

Onsager, L. (1944). "Discussion", Nuovo Cimento (suppl.) 6 , 261.

Bell, John. (1964). "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox". Physics. 1 (3): 195–200.

Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. (1935). "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?". Physical Review. 47 (10): 777–780

## Agradecimentos

Os alunos devem incluir em seus pôsteres uma seção de agradecimento com dizeres do tipo: Este trabalho foi financiado pelo Programa de Iniciação Científica da UFABC (PIC/UFABC) ou pelo CNPq (para bolsistas CNPq).

Apoio
CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
UFABC

VIII Encontro de Iniciação Científica
XI Simpósio de Iniciação Científica da UFABC
13º Congresso de Iniciação Científica da USCS