

Mapeamento Clássico-Quântico: Um Estudo do Modelo de Ising em Duas Dimensões



Alex Enrique Crispim

Centro de Ciências Naturais e Humanas - UFABC
Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP
alex.enrique@ufabc.edu.br

Resumo: Neste trabalho, estudou-se a técnica do *mapeamento clássico-quântico*, aplicada ao Modelo de Ising. O objetivo final do projeto era extrair informações da versão quântica do modelo unidimensional usando este formalismo. Isso se deu calculando computacionalmente observáveis quânticos, utilizando o modelo clássico em duas dimensões.

Palavras-chave: Modelo de Ising, Mecânica Quântica, Mecânica Estatística, Transição Quântica de Fase, Sistemas Quânticos de Muitos Corpos. Sistemas Fortemente Correlacionados.

Introdução

De forma geral, acredita-se, que a função de partição de um modelo quântico de dimensão D pode ser mapeada exatamente na função de partição de um modelo clássico de dimensão $D + 1$. Este mapeamento tem sido fundamental para o estudo de teorias fortemente correlacionadas. Em especial, a aplicação deste formalismo ao Modelo de Ising leva à formulação de um modelo quântico de fundamental importância para o estudo de transições quânticas de fase e o entendimento de transições de fase de segunda ordem.

O Modelo de Ising

O Modelo Clássico de Ising em duas dimensões corresponde a uma rede de variáveis clássicas σ_i que assumem valores ± 1 (spin para cima ou para baixo). Essas se encontram arranjadas em uma rede bidimensional, normalmente quadrada (Figura 1). O modelo apresenta uma transição de fase à temperatura T_c finita e tem a Hamiltoniana H_{Ising} , apresentadas em (1) (Ising, 1925; Onsager, 1944).

$$H_{Ising} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad \frac{J}{k_b T_c} = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2} \quad (1)$$

com $\langle i, j \rangle$ representando os j primeiros vizinhos de i e k_b sendo a constante de Boltzmann.

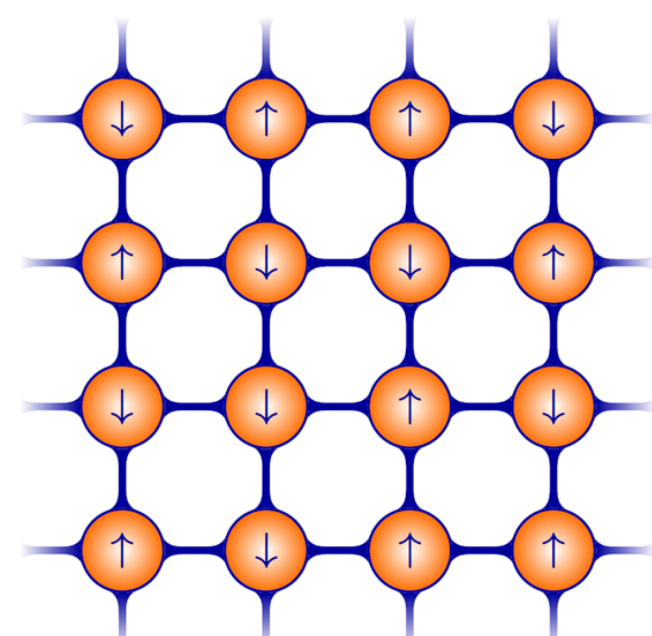


Figura 1: Exemplo de uma rede quadrada de spins. Fonte: <https://quantumoptics.at/>

A função de partição desta Hamiltoniana clássica, pode ser mapeada exatamente na função de partição da *Hamiltoniana Quântica de Ising Unidimensional* (Figura 2), \hat{H}_Δ , da forma

$$\hat{H}_\Delta = -J \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z + \Delta \hat{\sigma}_i^x. \quad (2)$$

Para este modelo quântico, a transição de fase ocorre quando $\Delta = 1$.

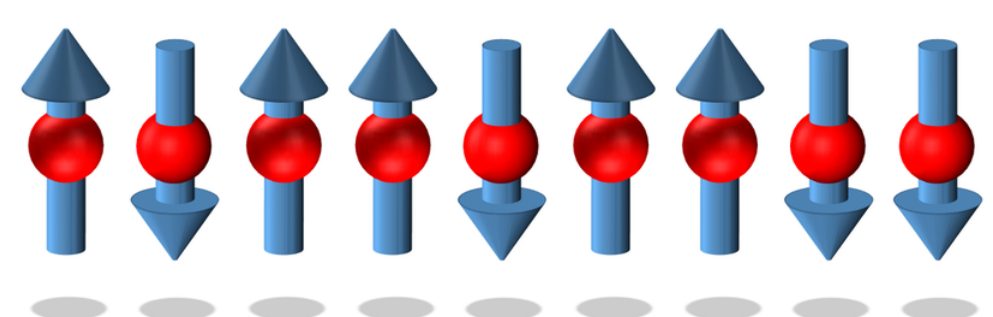


Figura 2: Cadeia de spins quânticos unidimensional. Fonte: (Veltman, 2016)

Utilizando a técnica do mapeamento clássico-quântico, é possível estudar este modelo quântico na transição de fase, por meio do modelo clássico bidimensional. As vantagens se dão em termos de menor complexidade computacional e no uso de uma teoria clássica (mecânica estatística clássica), costumeiramente mais simples de se trabalhar e mais intuitiva.

Desigualdades de Bell e Correlações Quânticas

Na década de 60, John Bell derivou uma desigualdade acerca do valor esperado de variáveis aleatórias Q, R, S, T que assumem valores ± 1 , sob as hipóteses do paradoxo EPR (paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen) (Einstein *et al*, 1935; Bell, 1964). A desigualdade afirma que o valor esperado da quantidade $QS + RS + RT - QT$ é tal que

$$\langle QS + RS + RT - QT \rangle \leq 2. \quad (3)$$

O interesse nesta desigualdade foi a verificação de que a mesma se faz incompatível com experimentos, mostrando que a natureza comporta-se conforme a Mecânica Quântica prevê.

Em especial, para o estados emaranhados

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Phi^+\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

com os observáveis

$$Q = Q' = \sigma_1^z, \quad R = R' = \sigma_1^x, \quad S = -S' = \frac{-\sigma_2^z - \sigma_2^x}{\sqrt{2}}, \quad T = -T' = \frac{\sigma_2^z - \sigma_2^x}{\sqrt{2}}$$

tem-se os valores esperados

$$\langle \Psi^- | (QS + RS + RT - QT) | \Psi^- \rangle = \langle \Phi^+ | (Q'S' + R'S' + R'T' - Q'T') | \Phi^+ \rangle = 2\sqrt{2} > 2. \quad (4)$$

Para este trabalho, avaliou-se os valores esperados em (4) para primeiros vizinhos de uma cadeia quântica de Ising. Se, para alguma temperatura, o sistema se encontrasse nos estados $|\Psi^-\rangle$ ou $|\Phi^+\rangle$, a desigualdade de Bell deveria ser violada.

Resultados

A Figura 3 mostra o gráfico em função da temperatura (unidades arbitrárias, definindo $k_b = 1$). A transição de fase ocorre para a temperatura aproximada de 2,27. Dos gráficos, é possível perceber um aumento das correlações próximo à transição de fase. Além disso, nota-se que a desigualdade de Bell é violada apenas para o estado $|\Phi^+\rangle$, como esperado de um sistema ferromagnético, pois nesse, os spins tendem a serem encontrados alinhados.

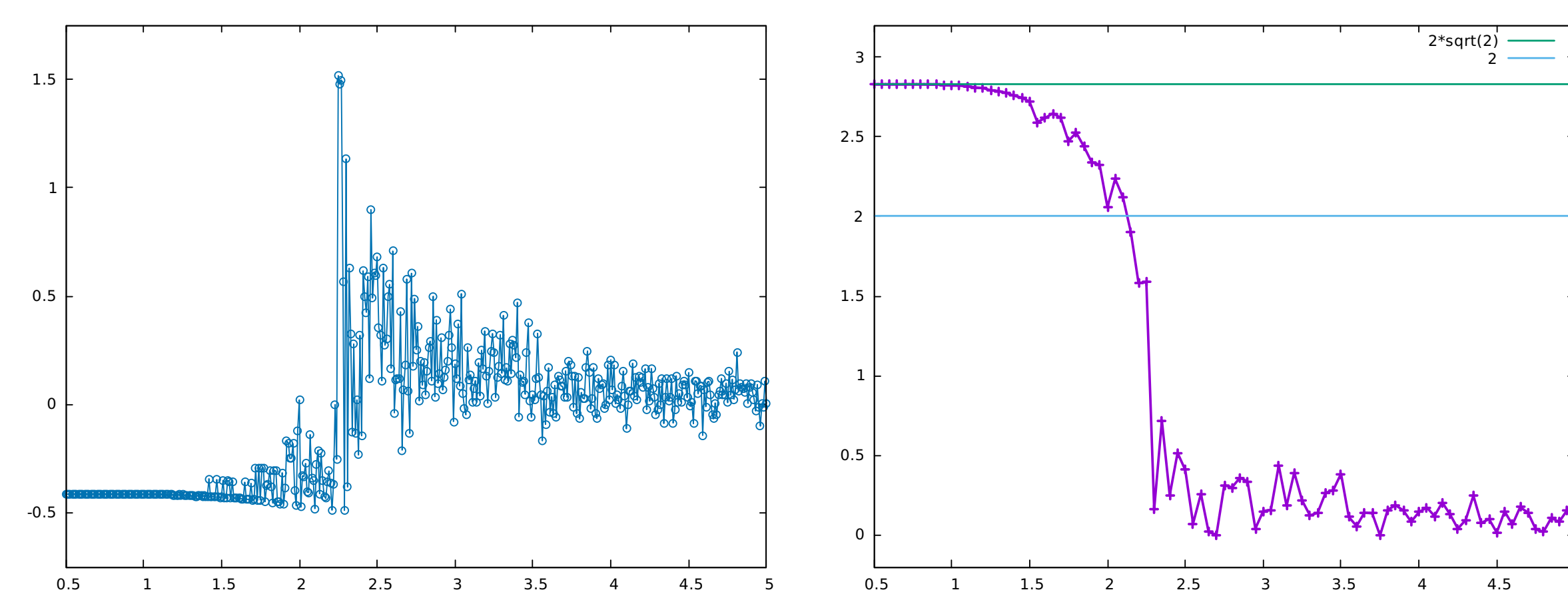


Figura 3: Valores esperados $\langle \Psi^- | (QS + RS + RT - QT) | \Psi^- \rangle$ (gráfico em azul) e $\langle \Phi^+ | (Q'S' + R'S' + R'T' - Q'T') | \Phi^+ \rangle$ (gráfico em roxo) em função da temperatura (unidades dadas definindo-se a constante de Boltzmann igual a 1).

Conclusão

Este trabalho mostrou que na transição de fase do Modelo Quântico de Ising unidimensional as correlações entre os spins aumentam. Por meio do estudo de dois funcionais de Bell, mostrou-se que não ocorre a formação dos estados $|\Psi^-\rangle$, na média temporal, e que os primeiros vizinhos encontram-se emaranhados no estado $|\Phi^+\rangle$ para $T < T_c$. Por fim, o resultado obtido mostra a violação da Desigualdade de Bell, verificando que a cadeia de spins se comporta como previsto pela Mecânica Quântica.

Referências

- Ising, E. (1925). Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Zeitschrift für Physik, 31:253–258.
- Onsager, L. (1944). “Discussion”, Nuovo Cimento (suppl.) 6 , 261.
- Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. (1935). “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”. Physical Review. 47 (10): 777–780.
- Bell, John. (1964). “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”. Physics. 1 (3): 195–200.
- Veltman, T. (2016). Heisenberg Spin Chains with Boundaries and Quantum Groups. Master Thesis, University of Amsterdam.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Eduardo Peres Novais de Sá, por me apresentar aos vários temas estudados durante este projeto e pelo acompanhamento ao longo da minha jornada acadêmica na UFABC, estando sempre disposto a ajudar de alguma forma.

Agradeço de forma geral a cada uma das pessoas que me ajudaram das mais diversas formas, ao longo do projeto e na jornada até o presente.

Em especial, reservo um agradecimento ao Programa de Iniciação Científica PIBIC do CNPq, o qual financiou este trabalho.