Física Computacional

Tarefa 7 - Questão 2

Alex Enrique Crispim

Buscamos, agora, resolver a mesma EDO

$$x'(t) = f(t, x), x(0) = x_0,$$

por meio do *Método de Runge-Kutta.* O método consiste em tomar o ponto médio do intervalo para o qual fizemos diferenças finitas, quando usamos Euler, para determinar um ponto intermediário de tal forma que possamos reduzir a ordem do erro.

Quando utilizamos o método de Euler, de modo implicito, utilizamos uma aproximação via Polinômio de Taylo (série de Taylor truncada) de primeira ordem. De outra forma, tomamos a série

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + ...,$$

até o termo linear em h resultando em $x(t+h) = x(t) + hx'(t)$. O método de Runge-Kutta busca seguir a mesma ideia de aproximação por Taylor, porém truncando a série no termo de ordem quadrátrica em h, de tal forma que o erro passa a ser $\mathcal{O}(h^3)$.

O termo de primeira ordem reproduz o método de Euler; é simplesmente hf (omitiremos os argumentos daqui para frente e as derivadas parciais para f serão denotadas com subscritos como $f_t,\ f_{txx}$). O termo de segunda ordem pode ser obtido da seguinte forma:

$$x''(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_t + f_x f,$$

produzindo

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_x f) + \mathcal{O}(h^3), \\ &= x + hf + \frac{1}{2}h^2 f_t + \frac{1}{2}h^2 f f_x + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Podemos agora expandir $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ em Taylor para que os termos da forma $f_t + ff_x$ sejam escritos em termos de f, usando a aproximação de Euler ($x(t+h) = x + hf$).

$$f(t+\alpha h, x+\beta hf) = f + \alpha h f_t + \beta h f f_x + \frac{1}{2}\left(\alpha h\frac{\partial}{\partial t} + \beta h\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(\bar{t}, \bar{x}).$$

Utilizamos dois parâmetros (α e β) a serem ajustados de forma a produzir a aproximação desejada por Taylor (melhor aproximação). O erro da aproximação em primeira ordem é guardado no termo final (quadrático em h).

Se escrevemos nossa expansão para $x(t+h)$ como

$$x(t+h) = x + w_1 hf + w_2 hf(t+\alpha h, x+\beta hf),$$

podemos utilizar a expansão anterior no termo à direita de w_2 e comparar com a expansão em Taylor original para ajustar os parâmetros inserido.

$$x(t+h) = x + (w_1 + w_2)hf + \alpha w_2 h^2 f_t + \beta w_2 f f_x + \mathcal{O}\big(h^3\big). \tag{1}$$

Por comparação da expressão de Taylor obtida com (1), temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&w_1 + w_2 = 1, \quad \alpha w_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta w_2 = \frac{1}{2}, \\
&\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \tag{2}$$

$$\begin{cases}
K_1 = hf(t,x), \\
K_2 = hf(t+h, x+K_1).
\end{cases}$$

Abaixo apresentamos o algoritmo, de forma mais direta, para o método de Runge-Kutta.

The End.