

Física Computacional

Tarefa 7 - Questão 2

Alex Enrique Crispim

Buscamos, agora, resolver a mesma EDO

$$x'(t) = f(t, x), x(0) = x_0,$$

por meio do *Método de Runge-Kutta*. O método consiste em tomar o ponto médio do intervalo para o qual fizemos diferenças finitas, quando usamos Euler, para determinar um ponto intermediário de tal forma que possamos reduzir a ordem do erro.

Quando utilizamos o método de Euler, de modo implícito, utilizamos uma aproximação via Polinômio de Taylo (série de Taylor truncada) de primeira ordem. De outra forma, tomamos a série

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \dots,$$

até o termo linear em h resultando em $x(t+h) = x(t) + hx'(t)$. O método de Runge-Kutta busca seguir a mesma ideia de aproximação por Taylor, porém truncando a série no termo de ordem quadrática em h , de tal forma que o erro passa a ser $\mathcal{O}(h^3)$.

O termo de primeira ordem reproduz o método de Euler; é simplesmente hf (omitiremos os argumentos daqui para frente e as derivadas parciais para f serão denotadas com subscritos como f_t, f_{txx}). O termo de segunda ordem pode ser obtido da seguinte forma:

$$x''(t) = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = f_t + f_x f,$$

produzindo

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_x f) + \mathcal{O}(h^3), \\ &= x + hf + \frac{1}{2}h^2 f_t + \frac{1}{2}h^2 f f_x + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Podemos agora expandir df/dt em Taylor para que os termos da forma $f_t + f f_x$ sejam escritos em termos de f , usando a aproximação de Euler ($x(t+h) = x + hf$).

$$f(t+\alpha h, x+\beta hf) = f + \alpha h f_t + \beta h f f_x + \frac{1}{2} \left(\alpha h \frac{\partial}{\partial t} + \beta h \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f(\bar{t}, \bar{x}).$$

Utilizamos dois parâmetros (α e β) a serem ajustados de forma a produzir a aproximação desejada por Taylor (melhor aproximação). O erro da aproximação em primeira ordem é guardado no termo final (quadrático em h).

Se escrevemos nossa expansão para $x(t+h)$ como

$$x(t+h) = x + w_1 hf + w_2 hf(t+\alpha h, x+\beta hf),$$

podemos utilizar a expansão anterior no termo à direita de w_2 e comparar com a expansão em Taylor original para ajustar os parâmetros inserido.

$$x(t+h) = x + (w_1 + w_2)hf + \alpha w_2 h^2 f_t + \beta w_2 h f f_x + \mathcal{O}(h^3). \quad (1)$$

Por comparação da expressão de Taylor obtida com (1), temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1, & \alpha w_2 &= \frac{1}{2}, & \beta w_2 &= \frac{1}{2}, \\ \alpha &= 1, & \beta &= 1, & w_1 &= w_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad (2)$$

$$\begin{cases} K_1 = hf(t, x), \\ K_2 = hf(t+h, x+K_1). \end{cases} \quad (3)$$

Abaixo apresentamos o algoritmo, de forma mais direta, para o método de Runge-Kutta.

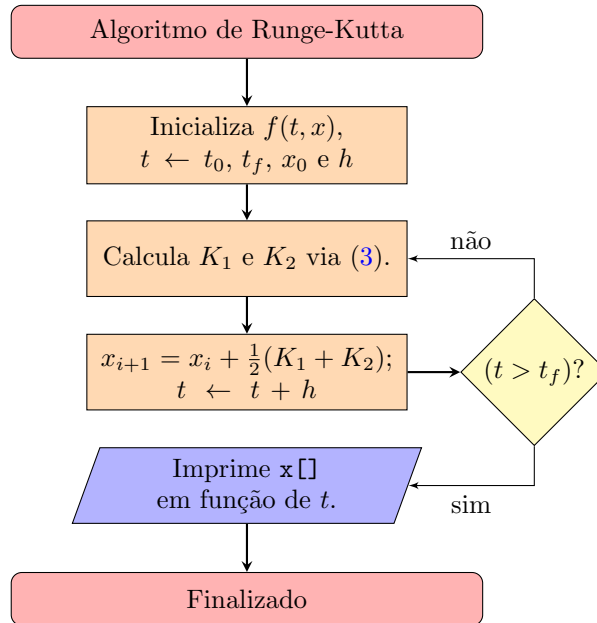


Figura 1: Algoritmo de Runge-Kutta para a solução de EDO's

Uma implementação do algoritmo descrito acima pode ser encontrado na pasta *question 2* do endereço: <https://github.com/AlexEnrique/comp-physics-practice7>.