

Soluções de Exercícios: EUF

De Nerdyard

Olá! Esse artigo está sendo escrito no sentido de auxiliar qualquer estudante de graduação que queira se preparar para um exame de pós-graduação. Eu tentei usar outras ferramentas baseadas no Latex, mas elas se provaram menos eficientes para o meu propósito.

Apenas para avisar: se for encontrado algum erro, notifiquem-me na página de discussão ou editem a correção, por favor.

Então vamos ao que interessa.

Tabela de conteúdo

- 1 EUF - 2008/1
 - 1.1 Questão 9
- 2 EUF - 2008/2
 - 2.1 Questão 2
 - 2.2 Questão 4
 - 2.3 Questão 6
- 3 EUF - 2009/2
 - 3.1 Questão 1
 - 3.2 Questão 2
 - 3.3 Questão 3
 - 3.4 Questão 4
 - 3.5 Questão 5
 - 3.6 Questão 7
 - 3.7 Questão 8
- 4 EUF - 2010/1
 - 4.1 Questão 2
 - 4.2 Questão 4
 - 4.3 Questão 5
 - 4.4 Questão 7
- 5 EUF - 2010/2
 - 5.1 Questão 1
 - 5.2 Questão 3
 - 5.3 Questão 8
- 6 EUF - 2011/1
 - 6.1 Questão 3
 - 6.2 Questão 6
 - 6.3 Questão 8
 - 6.4 Questão 9
 - 6.5 Questão 10
- 7 EUF - 2011/2
 - 7.1 Questão 8
 - 7.2 Questão 9
 - 7.3 Questão 10
- 8 EUF 2012/1
 - 8.1 Questão 1
 - 8.2 Questão 4
- 9 Formulário
 - 9.1 Constantes Físicas
 - 9.2 Constantes Numéricas
 - 9.3 Mecânica Clássica
 - 9.4 Eletromagnetismo

EUF - 2008/1

Questão 9

O modelo de Einstein para a capacidade térmica de sólidos equivale a um conjunto de $3N$ osciladores quânticos unidimensionais localizados de mesma frequência angular ω . As possíveis energias de um oscilador são dadas por:

$$E = \hbar\omega(n + 1/2) \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

a) Compute a função de partição Z e a energia interna U do sistema de $3N$ osciladores como funções da temperatura.

b) Calcule a entropia S e a capacidade térmica C do sistema como funções da temperatura.

Determine os limites de C para baixas e altas temperaturas e esboce o gráfico dessa grandeza como função da temperatura.

Solução:

a) A função de partição é dada por:

$$Z = \frac{z_0^{3N}}{(3N)!}$$

Sendo z_0 a função de partição de um único oscilador. Assim:

$$z_0 = \sum_r e^{-\beta E_r} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

Logo:

$$Z = \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right)^{3N} = \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{e^{-\hbar \omega / 2kT}}{1 - e^{-\hbar \omega / kT}} \right)^{3N}$$

$$\text{já que } \beta = \frac{1}{kT}.$$

Já a energia média, U , é dada por:

$$U = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -3N \frac{\partial \ln(z_0)}{\partial \beta} - \frac{\partial \ln((3N)!)}{\partial \beta} = 3N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} + \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) = 3N \frac{\hbar \omega}{2} + 3N \frac{\hbar \omega e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = 3N \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right) = 3N \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right)$$

b) Para obtermos a entropia basta calcular:

$$\begin{aligned} S &= k(\ln(Z) + \beta U) = 3Nk\beta \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right) - \frac{3Nk\beta \hbar \omega}{2} - 3Nk \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) - k \ln((3N)!) \approx 3Nk \left(\frac{\beta \hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} - \ln(3N) + 1 - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) \\ &= 3Nk \left(\frac{\beta \hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} + 1 - \ln(3N(1 - e^{-\beta \hbar \omega})) \right) = 3N \left(\frac{\hbar \omega}{T(e^{\hbar \omega / kT} - 1)} - k \ln(3N(1 - e^{-\hbar \omega / kT})) + k \right) \end{aligned}$$

Já a capacidade térmica é dada por:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right) \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{3Nk(\beta \hbar \omega)^2 e^{\beta \hbar \omega}}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^2} = 3Nk \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^2 \frac{e^{\hbar \omega / kT}}{(e^{\hbar \omega / kT} - 1)^2}$$

c) Vou fazer primeiro o gráfico para β pois possui uma análise mais simples. Depois faço o gráfico para T :

Para $\beta \rightarrow 0$ (ou $T \rightarrow \infty$) podemos realizar a seguinte aproximação:

$$C \approx 3Nk \frac{(\beta \hbar \omega)^2}{(1 + \beta \hbar \omega - 1)^2} = 3Nk$$

Para $\beta \rightarrow \infty$ (ou $T \rightarrow 0^+$) podemos realizar a seguinte aproximação:

$$C \approx 3Nk(\beta \hbar \omega)^2 e^{-\beta \hbar \omega}$$

Para visualizar, veja o gráfico ao lado.

Considere um pêndulo plano formado por uma haste inextensível de comprimento l e massa desprezível tendo na sua extremidade uma partícula pontual de massa m .

a) Escreva as equações de movimento da partícula em coordenadas polares r e θ .

b) Suponha que o pêndulo seja lançado de $\theta(0) = \theta_0$ com $\dot{\theta}(0) = 0$. Calcule o valor máximo que a tensão na haste atinge durante o movimento.

c) Encontre $\theta(t)$ na aproximação de pequenas oscilações supondo $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$.

d) Esboce um gráfico mostrando como o período do movimento da partícula varia com a sua energia.

Solução:

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}; V = mgr(1 - \cos(\theta))$$

Logo:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - mgr(1 - \cos(\theta))$$

Suporei que a partícula possui massa constante.

a) As equações de movimento são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr^2\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos(\theta))$$

Temos a equação de movimento em relação a r :

$$m\ddot{r} - mr^2\dot{\theta}^2 + mg(1 - \cos(\theta)) = 0 \Rightarrow \ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2 + g(1 - \cos(\theta)) = 0$$

E como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgr\sin(\theta)$$

Temos a equação de movimento em relação a θ :

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin(\theta) = 0 \Rightarrow r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + g\sin(\theta) = 0$$

Como $r = l$; $\dot{r} = 0$, temos:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

b)

c) Utilizando os vínculos ($r = l$; $\dot{r} = 0$) nas equações de movimento, vemos que uma delas se torna familiar no caso de pequenas oscilações:

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + g\sin(\theta) = 0 \xrightarrow{\text{Vínculos}} l^2\ddot{\theta} + gl\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Para $\theta \ll 1$ vale a aproximação:

$$\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + (\dots) \approx \theta$$

Logo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Que é a equação do oscilador harmônico, cuja frequência é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

A solução da equação diferencial:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

É dada por:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Com A e φ constantes fixadas pelas condições iniciais. Para demonstrar que esta é a solução, basta testarmos:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{d^2}{dt^2}A\cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega \frac{d}{dt}A\sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Portanto a função dada é solução da equação acima.

Quanto às constantes, fixemo-las a partir das condições iniciais e tomando $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\theta(0) = A\cos(\varphi) = \theta_0 \Rightarrow A = \frac{\theta_0}{\cos(\varphi)}; \dot{\theta}(0) = -\omega A\sin(\varphi) = -\frac{\omega\theta_0}{\cos(\varphi)}\sin(\varphi) = -\theta_0\omega\tan(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow A = \theta_0$$

Sic:

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$$

d) Como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

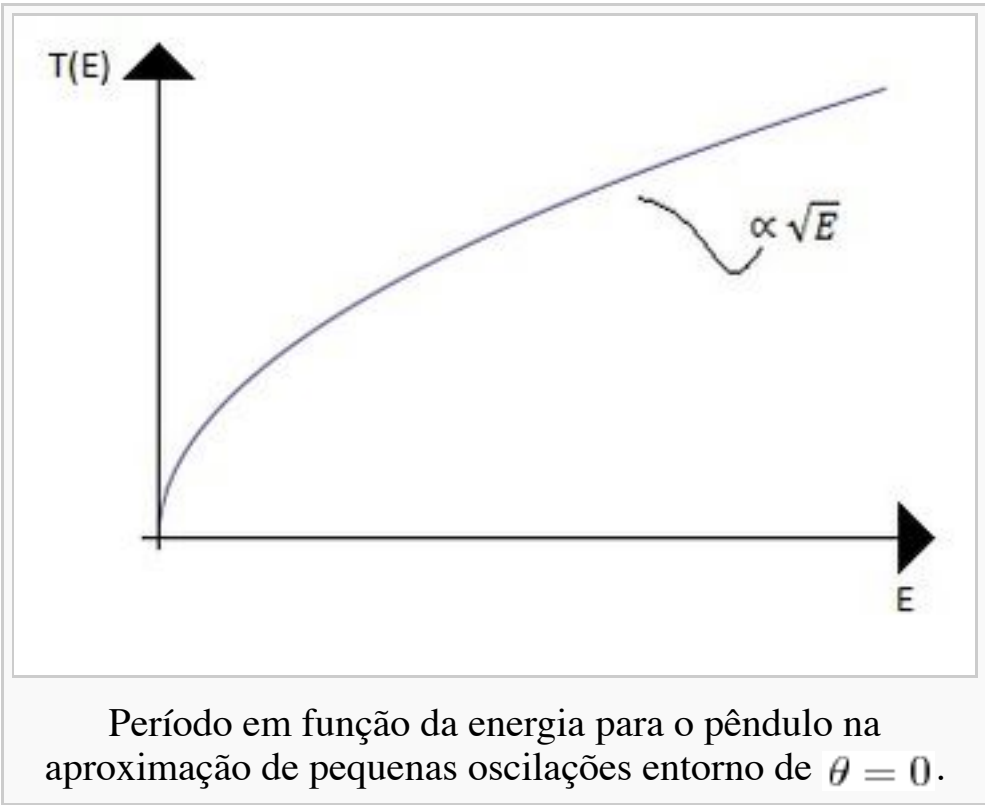
A energia total do sistema é dada por - se expressar esta em termos das variáveis especificadas nas condições iniciais:

$$E = mgl(1 - \cos(\theta_0)) \Rightarrow l = \frac{E}{mg(1 - \cos(\theta_0))}$$

Logo, como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, temos como esprestar o período como função da energia E :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{E}{g^2m(1-\cos(\theta_0))}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{2E}{g^2m\theta_0^2}}$$

Que nos fornece o gráfico abaixo:



Questão 4

O Hamiltoniano:

$$H = \frac{\omega}{\hbar}(L_x^2 - L_y^2)$$

oferece uma boa aproximação para descrever os estados quânticos de um sistema com momento angular $l = 1$ colocado num gradiente de campo elétrico. Na expressão do Hamiltoniano, L_x e L_y são as componentes x e y do operador momento angular orbital \vec{L} e ω é uma constante real. Os autoestados $| - 1 \rangle$, $| 0 \rangle$ e $| 1 \rangle$ e L_x com autovalores $-\hbar$, 0 , \hbar formam uma base do espaço de estados desse sistema.

- Escreva a matriz que representa H na base de L_z citada acima.
- Encontre os autovalores de H e os correspondentes autovetores na base de L_z , citada acima.
- Suponha que no instante $t = 0$ o sistema se encontre no estado

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{|1\rangle - | - 1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Qual é a probabilidade de se encontrar \hbar numa medida de L_z num instante de tempo posterior t ?

Solução:

a) Sabemos que:

$$L_+ = L_x + iL_y; \; L_- = L_x - iL_y$$

$$\text{Portanto } L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}; \; L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$$

Sabemos, também, que:

$$L_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle$$

$$L_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle$$

Logo, como para $l = 1$, os estados possíveis são:

$$|1,1\rangle \; ; \; |1,0\rangle \; \text{ e } \; |1,-1\rangle$$

Dessa forma:

$$L_+|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-1(1+1)}|1,2\rangle = 0|1,2\rangle$$

$$L_+|1,0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-0(0+1)}|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,1\rangle$$

$$L_+|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-(-1)(-1+1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle$$

Portanto os elementos de matriz não nulos são:

$$\langle 1,1|L_+|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle 1,1|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 1,0|L_+|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle 1,0|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}$$

Sendo todos os outros elementos de matriz nulos, incluindo:

$$\langle 1, 1 | L_+ | 1, 1 \rangle = 0 \langle 1, 1 | 1, 2 \rangle = 0$$

Dessa forma fazemos a identificação:

$$L_+ \rightarrow \begin{bmatrix} \langle 1, 1 | L_+ | 1, 1 \rangle & \langle 1, 1 | L_+ | 1, 0 \rangle & \langle 1, 1 | L_+ | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, 0 | L_+ | 1, 1 \rangle & \langle 1, 0 | L_+ | 1, 0 \rangle & \langle 1, 0 | L_+ | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, -1 | L_+ | 1, 1 \rangle & \langle 1, -1 | L_+ | 1, 0 \rangle & \langle 1, -1 | L_+ | 1, -1 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente:

$$L_- |1, 1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle$$

$$L_- |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 0(0-1)} |1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, -1\rangle$$

$$L_- |1, -1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - (-1)(-1-1)} |1, -2\rangle = 0 |1, -2\rangle$$

Portanto os elementos de matriz não nulos são:

$$\langle 1, 0 | L_- | 1, 1 \rangle = \hbar\sqrt{2} \langle 1, 0 | 1, 0 \rangle = \hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 1, -1 | L_- | 1, 0 \rangle = \hbar\sqrt{2} \langle 1, -1 | 1, -1 \rangle = \hbar\sqrt{2}$$

Sendo todos os outros elementos de matriz nulos, incluindo:

$$\langle 1, -1 | L_- | 1, -1 \rangle = 0 \langle 1, -1 | 1, -2 \rangle = 0$$

Dessa forma fazemos a identificação:

$$L_- \rightarrow \begin{bmatrix} \langle 1, 1 | L_- | 1, 1 \rangle & \langle 1, 1 | L_- | 1, 0 \rangle & \langle 1, 1 | L_- | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, 0 | L_- | 1, 1 \rangle & \langle 1, 0 | L_- | 1, 0 \rangle & \langle 1, 0 | L_- | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, -1 | L_- | 1, 1 \rangle & \langle 1, -1 | L_- | 1, 0 \rangle & \langle 1, -1 | L_- | 1, -1 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E:

$$L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ -\hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & -\hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$H = \frac{\omega}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \hbar\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Para calcular os autovalores de H basta efetuar:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \hbar\omega \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \hbar\omega & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 = (-\lambda)^3 + \lambda (\hbar\omega)^2 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda (\hbar\omega)^2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - \hbar\omega)(\lambda + \hbar\omega) = 0$$

Portanto os autovalores dessa matriz são:

$$\lambda_+ = \hbar\omega; \lambda_0 = 0; \lambda_- = -\hbar\omega$$

Quanto aos autovetores para calculá-los basta efetuar:

$$H|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \rightarrow \hbar\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \hbar\omega \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \therefore \frac{\lambda}{\hbar\omega} a = c; \frac{\lambda}{\hbar\omega} c = a; \frac{\lambda}{\hbar\omega} b = 0$$

Se $\lambda = \hbar\omega \therefore a = c; c = a; b = 0$, de forma que o autovetor é dado por:

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalizando}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \equiv |+_H\rangle$$

Se $\lambda = 0 \therefore 0 = c; 0 = a; b \text{ é arbitrário}$, de forma que o autovetor é dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{normalizando} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv |0_H\rangle$$

Se $\lambda = -\hbar\omega$ \therefore $-a = c$; $-c = a$; $-b = 0$, de forma que o autovetor é dado por:

$$\begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \xrightarrow{normalizando} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \equiv |-_H\rangle$$

c) Como:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{|1\rangle - |-1\rangle}{\sqrt{2}} = |-_H\rangle$$

é autoestado de H , logo sua evolução temporal será:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\omega t} |-_H\rangle$$

Logo, a probabilidade de se encontrar \hbar numa medida de L_z - que na realidade é obter $|1\rangle$ - será:

$$\mathcal{P}(t) = |\langle 1|\Psi(t)\rangle|^2 = |e^{i\omega t}\langle 1|-_H\rangle|^2 = |\langle 1|-_H\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Questão 6

Um cilindro muito longo de raio R fabricado com um material isolante cuja constante dielétrico é $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ e que possui uma densidade de carga livre cilíndricamente simétrica, mas não uniforme $\rho(r)$.

a) Determine $\rho(r)$ tal que o campo elétrico dentro do cilindro seja radial apontando para fora do mesmo e com módulo constante E_0 .

b) Para a densidade de carga determinada em a), calcule o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ fora do cilindro.

c) Se o cilindro for então envolvido por uma casca cilíndrica condutora neutra, concêntrica com relação ao cilindro, de raio interno a - com $a > R$ - e raio externo b - com $b > a$ -, determine as densidades de carga induzidas nas superfícies da casca condutora.

d) Para a situação do item c), esboce um gráfico do módulo do campo elétrico $E(r)$ em função da distância ao eixo do cilindro, em todo o espaço.

Solução:

a) Usando como superfície um cilindro concêntrico de raio r - tal que este seja menor que R - e altura h , temos, pela lei de Gauss, ignorando o caráter finito do cilindro:

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon}$$

Utilizando $d\vec{S} = dA\hat{r}$.

Logo:

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon} = 2\pi r h |\vec{E}(\vec{r})| = \frac{1}{K\epsilon_0} \int_0^r \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho(r') d^3r' = \frac{1}{K\epsilon_0} \int_0^r \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho(r') r' d\theta' dz' dr' = \frac{2\pi h}{K\epsilon_0} \int_0^r \rho(r') r' dr'$$

Portanto:

$$|\vec{E}(\vec{r})| = \frac{1}{K\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r' dr'$$

Como desejamos que $\rho(r') \Big| |\vec{E}| = E_0, \forall r \in [0, R]$, temos:

$$|\vec{E}(\vec{r})| = E_0 = \frac{1}{K\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r' dr' \Rightarrow E_0 K\epsilon_0 r = \alpha r = \int_0^r \rho(r') r' dr'$$

Sabemos que:

$$\int_0^r \alpha dr' = \alpha r' \Big|_0^r = \alpha r$$

Logo:

$$\rho(r') r' = \alpha \Rightarrow \rho(r') = \frac{\alpha}{r'} = \frac{E_0 K\epsilon_0}{r'}$$

b) Como a carga interna é:

$$q_{int} = \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho(r) r d\theta dz dr = 2\pi h \int_0^R E_0 K\epsilon_0 dr' = 2\pi h E_0 K\epsilon_0 r \Big|_0^R = 2\pi h E_0 K\epsilon_0 R$$

Usando como superfície um cilindro concêntrico de raio r - tal que este seja maior que R - e altura h , temos, pela lei de Gauss:

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Logo:

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 2\pi h E_0 K R = 2\pi r h |\vec{E}(\vec{r})|$$

Portanto, usando a simetria (adotando o sinal 'positivo' para a cargas positivas), sendo \hat{r} o versor radial do cilindro, que aponta 'para fora' deste:

$$|\vec{E}(\vec{r})| = \frac{E_0 K R}{r} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{E_0 K R}{r} \hat{r}$$

c) Como os metais são condutores, o campo elétrico dentro deles deve ser nulo. Logo, ao efetuar uma lei de Gauss no interior do metal, sabemos que $\forall r \in (a,b)$ deve valer:

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{int} = 0$$

Para que isso ocorra só há uma alternativa: deve haver uma carga de valor $-q_{int}$ na superfície interna do metal, distribuída uniformemente ao longo da superfície interna do cilindro. Supondo que o metal seja eletricamente neutro, se efetuarmos outra lei de Gauss para $r > b$, notamos que a superfície externa do metal deve possuir carga q_{int} também uniformemente distribuída, na superfície externa do cilindro.

As densidades de carga serão, se h for a altura do cilindro, com $\lambda = \frac{q_{int}}{h}$,
, $\sigma_a = \frac{\lambda}{2\pi a}$ e $\sigma_b = \frac{\lambda}{2\pi b}$:

- Se por densidade de carga entendermos densidade linear de carga, a superfície interna possui densidade de carga $-\lambda$ e a superfície externa possui densidade de carga λ .
- Se por densidade de carga entendermos densidade superficial de carga, a superfície interna possui densidade de carga $-\sigma_a$ e a superfície externa possui densidade de carga σ_b .

d) Vide figura à direita.

EUf - 2009/2

Questão 1

Um disco uniforme, de seção circular de raio R , massa M e momento de inércia I (com relação ao eixo perpendicular ao plano do disco e que passa pelo seu centro), encontra-se preso a uma mola de constante k , massa desprezível e um certo comprimento de repouso, como é mostrado na figura ao lado. O disco rola sobre a suprefície sem deslizar e seu movimento está confinado ao plano da figura.

- Escreva a equação para a energia mecânica do sistema em função da velocidade do centro de massa e da distensão da mola.
- Obtenha a equação de movimento para o centro de massa do disco.
- Determine a frequência angular de oscilação do centro de massa do disco.

Solução:

Note que há um vínculo: $\theta = \frac{x}{R} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$.

$$T = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M\dot{x}^2}{2}; V = \frac{kx^2}{2}$$

Como a densidade é uniforme:

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

Apenas para fazer uma observação adicional, calcularei o momento de inércia do cilindro, cujo raio é R e cuja distribuição de massa é uniforme. A distância do eixo do cilindro a um ponto arbitrário será batizada de r . O eixo de rotação desse cilindro se encontra no centro deste, de forma que temos a seguinte integral:

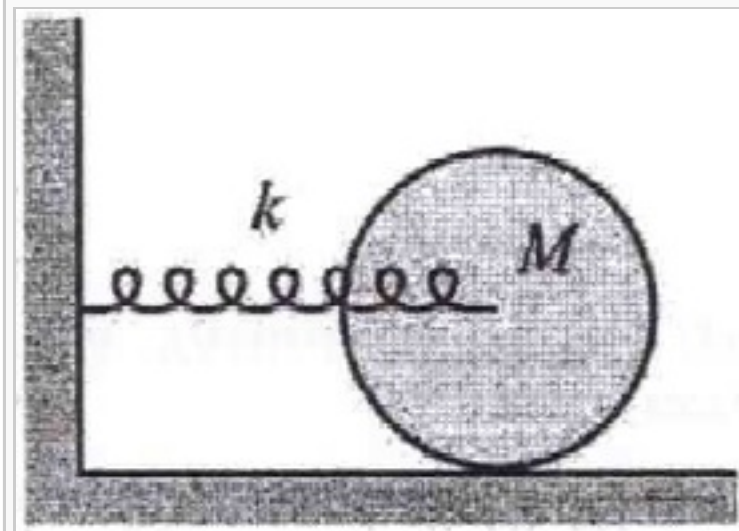
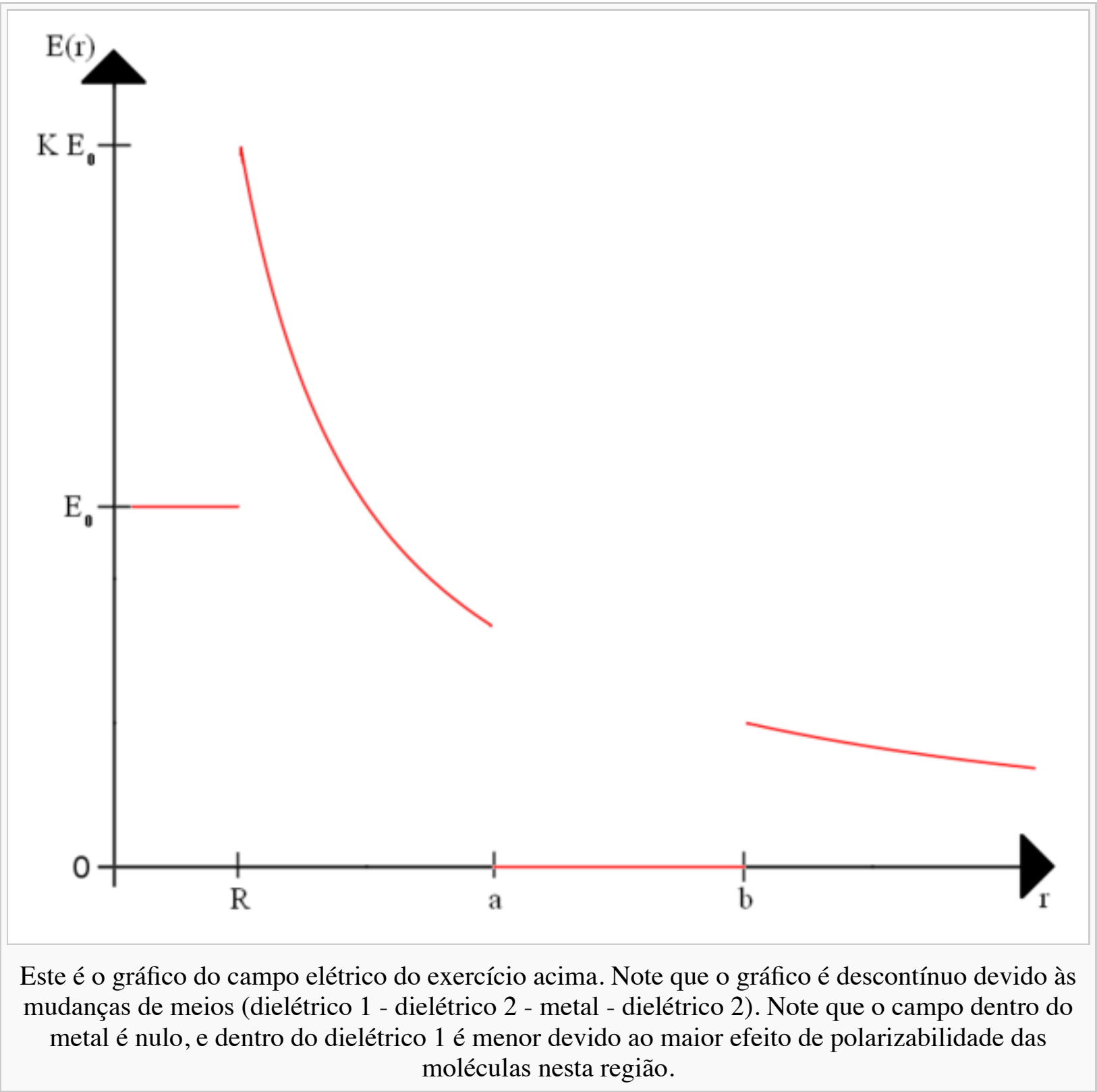
$$I = \iiint r^2 \mathrm{d}m = \iiint r^2 \sigma(r) \mathrm{d}^2r = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \mathrm{d}m = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{Mr^3}{\pi R^2} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{2MR^4}{4R^2} = \frac{MR^2}{2}$$

1) Vê-se que:

$$E = T + V = \frac{kx^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M\dot{x}^2}{2}$$

Apenas vou utilizar o vínculo para expressar tudo em termos da coordenada x :

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) = \frac{kx^2}{2} + \frac{3M\dot{x}^2}{4}$$



Sistema massa mola do exercício.

3) Sabemos que:

$$L = T - V = \frac{\dot{x}^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) - \frac{kx^2}{2} = \frac{3M\dot{x}^2}{4} - \frac{kx^2}{2}$$

A equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) \dot{x} = \frac{3M}{2} \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{x} = \frac{3M}{2} \ddot{x}$$

Logo, a equação de movimento do centro de massa é:

$$\left(M + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{M + I/R^2} \right) x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{3M} x = 0$$

3) Através da equação de movimento, vemos que a frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{M + I/R^2} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

Questão 2

Uma partícula de massa m move-se em um potencial $V(r)$, dado por:

$$V(r) = -\frac{C}{3r^3}$$

sendo C uma constante positiva. Considere que a partícula possua momento angular L diferente de zero.

1. Escreva a equação para a energia mecânica da partícula em termos da distância r à origem, da sua derivada temporal \dot{r} , do momento angular L , da massa m e da constante C .
2. Considerando os termos que só dependem de r na energia mecânica como um potencial efetivo $V_{ef}(r)$, esboce o gráfico de $V_{ef}(r)$.
3. Existem órbitas circulares para essa partícula? Em caso afirmativo, determine o raio de cada uma dessas possíveis órbitas e discuta a estabilidade das mesmas.
4. Calcule a energia mecânica mínima, E_{min} , acima da qual a partícula vinda do infinito é capturada pelo potencial, ou seja, não retorna mais para o infinito.

Solução:

A energia cinética de um potencial tipo central é:

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Sendo:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

1) Para um potencial central vale a expressão:

$$E = T + V = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{C}{3r^3} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3}$$

2) Utilizando a sugestão do enunciado:

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3}$$

Veja o gráfico ao lado.

3) De fato, existem órbitas circulares para a partícula, pois:

$$\left. \frac{\partial V_{ef}(r)}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 = \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} \right) \right|_{r_0} = \left. \left(\frac{C}{r^4} - \frac{L^2}{mr^3} \right) \right|_{r_0} \Rightarrow \frac{C}{r_0^4} = \frac{L^2}{mr_0^3} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 0 \\ r_0 = \frac{Cm}{L^2} \end{cases}$$

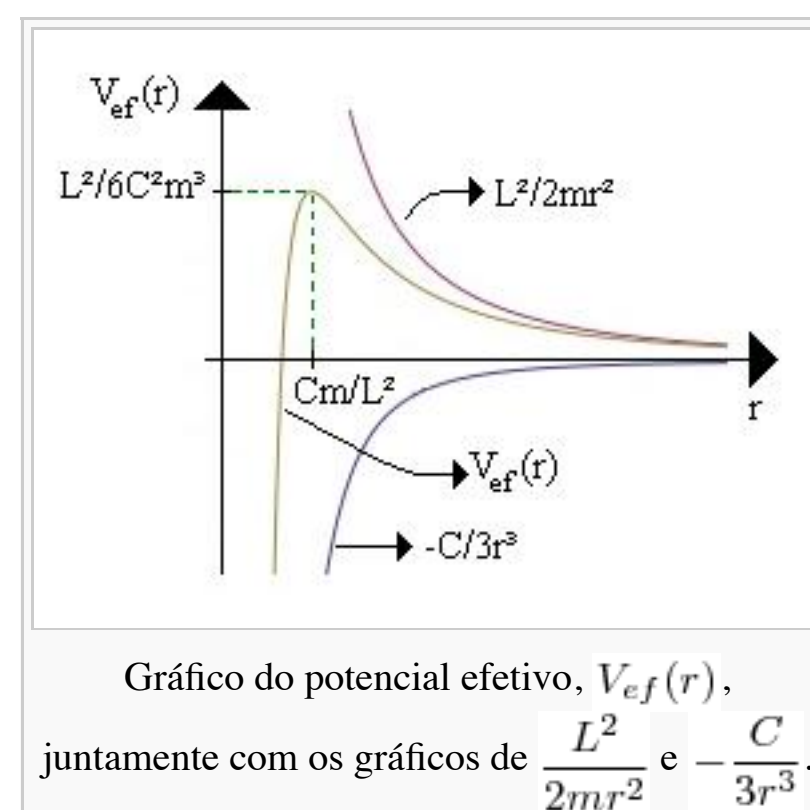
A primeira solução não é válida (as funções não são definidas em zero).

Portanto, é possível a ocorrência de órbita para:

$$r_0 = \frac{Cm}{L^2}$$

Sobre a estabilidade da órbita, devemos analisar a derivada segunda:

$$\left. \frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_0} = \left. \left(\frac{3L^2}{mr^4} - \frac{4C}{r^5} \right) \right|_{r_0} = \frac{3L^{10}}{C^4m^5} - \frac{4L^{10}}{C^4m^5} = -\frac{L^{10}}{C^4m^5} < 0 \therefore \text{a órbita é instável.}$$



Essa informação poderia ser retirada do gráfico, se notarmos que pequenas perturbações do sistema **não** levam-no de volta ao ponto de equilíbrio.

4) Se $E > V_{ef}(r_0)$, ocorre a 'captura' da partícula:

$$V_{ef}(r_0) = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{C}{3r_0^3} = \frac{L^6}{2C^2m^3} - \frac{L^6}{3C^2m^3} = \frac{L^6}{6C^2m^3}$$

Essa é a energia mecânica mínima necessária para que uma partícula vinda do infinito seja 'capturada'.

Questão 3

a) As seguintes afirmações se referem ao efeito fotoelétrico. Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) e justifique brevemente a sua resposta (máximo de três linhas). Respostas sem justificativas ou com justificativas erradas não serão consideradas.

1. Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de elétrons. Para que ocorra a emissão de elétrons no mesmo material basta que se aumente suficientemente a intensidade da luz incidente.
2. Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de elétrons. Para que ocorra a emissão de elétrons no mesmo material basta que se aumente suficientemente a frequência da luz incidente.
3. No contexto do efeito fotoelétrico, o potencial de corte é a tensão necessária para deter os elétrons que escapam do metal com a **menor** velocidade possível.
4. Quando luz azul incide sobre uma placa de zinco, ela não produz efeito fotoelétrico, mas quando iluminada com luz vermelha ocorre emissão de elétrons.
5. Quanto maior for a frequência da luz incidente, maior será a energia cinética dos elétrons emitidos.

b) Considere o efeito fotoelétrico inverso, ou seja, a emissão de fótons em consequência do bombardeio de um material com elétrons de alta velocidade. calcule a frequência máxima que podem ter os fótons emitidos se a superfície é bombardeada com elétrons com velocidade $c/2$, onde c é a velocidade da luz.

Solução:

a)

1. F. O efeito fotoelétrico associa-se à emissão de elétrons devido à incidência de fótons. A energia cinética máxima desses elétrons é $K_{max} = hf - w$, sendo w a função trabalho do material que emite os elétrons. Não há relação imediata entre intensidade incidente e emissão de elétrons.
2. V. O efeito fotoelétrico associa-se diretamente com a frequência do fóton incidente e só ocorre emissão eletrônica a partir de uma frequência dada por $f_0 = w/h$. Assim que essa frequência for ultrapassada, ocorre emissão eletrônica de forma significativa.
3. F. O potencial de corte é a tensão necessária para deter os elétrons que escapam do metal com a **maior** velocidade (ou energia cinética) possível.
4. F. Quando a frequência diminui, se antes não se produzia efeito fotoelétrico, este **não** deve passar a ocorrer.
5. V. Sim, estatisticamente falando, de acordo com a relação $K_{max} = hf - w$.

b)

Questão 4

A energia da radiação de corpo negro, por unidade de volume e por unidade de intervalo de frequência, é dada por:

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

onde ν representa a frequência do fóton e T a temperatura da radiação.

1. Deduza a expressão para a energia total E de um gás de fótons em um volume V . Qual é a dependência de E com a temperatura.
2. Esboce gráficos de $u_\nu(\nu)$ para duas temperaturas T_1 e T_2 , sendo $T_1 < T_2$.
3. Escreva as formas assintóticas de $u_\nu(\nu)$ no caso de frequências muito altas (lei de radiação de Wien) e no caso de frequências muito baixas (lei de radiação de Rayleigh-Jeans).
4. Imagine que o universo seja uma cavidade esférica de paredes impenetráveis e raio $10^{26}m$, contendo um gás de fótons em equilíbrio térmico. Se a temperatura dentro da cavidade for de $3K$, estime a quantidade de energia contida nessa cavidade.
5. Supondo que o Universo se expanda adiabaticamente, calcule a temperatura que ele terá quando o seu volume for o dobro do valor atual (a entropia do gás de fótons é $S \propto VT^3$).

IMPORTANTE: originalmente eu havia feito a questão utilizando $k = k_B$ - a constante de Boltzmann, **não se trata do número de onda(!)**. Infelizmente fiz meus gráficos nessa notação, então vou refazê-los assim que possível.

Solução:

1) Conforme informa o enunciado:

$$\frac{E}{V} = \int_0^\infty u_\nu(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

Utilizando a mudança de variável:

$$\nu = \frac{k_B T w}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dw$$

Consequentemente:

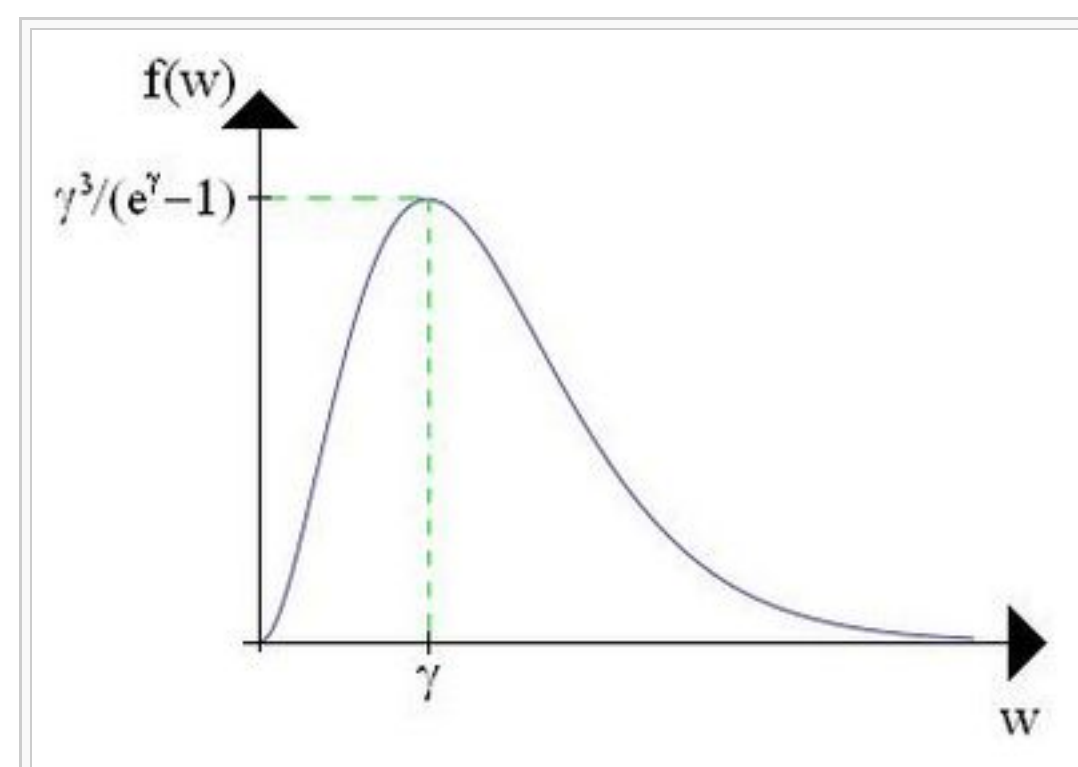
$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi(k_B T)^4}{(ch)^3} \int_0^\infty \frac{w^3}{e^w - 1} dw$$

Da igualdade acima já é possível concluir que $E \propto T^4$. Mas vamos continuar o problema...

Como sabemos:

$$\int_0^\infty \frac{w^3}{e^w - 1} dw = \frac{\pi^4}{15}$$

De forma que:



$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi(k_B T)^4}{(ch)^3} \frac{\pi^4}{15}$$

Se soubermos que:

$$\frac{8\pi^5 k_B^4}{15(ch)^3} = \frac{4\sigma}{c}$$

Sendo σ a constante de Stefan-Boltzmann, temos:

$$\frac{E}{V} = \frac{4\sigma T^4}{c} \Rightarrow E = \frac{4V\sigma T^4}{c} \propto T^4$$

OBS.: obviamente, nessa questão, não é necessário saber o valor da integral, basta saber que ela converge e fornece um número como resultado, já que este item só pede qual é a dependência de E com T . Pela mesma razão não é necessário saber quanto vale a constante de Boltzmann.

Nota:

2) Quando $\nu \rightarrow \infty$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu(\nu) \rightarrow 0$. Quando $\nu \rightarrow 0$, $\lim_{\nu \rightarrow 0} u_\nu(\nu) \rightarrow 0$.

(Observe que é mais fácil notar que as afirmações acima estão corretas se usarmos as aproximações:

$\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu(\nu) \sim \lim_{\nu \rightarrow \infty} A\nu^3 e^{-h\nu/kT} \rightarrow 0$; $\lim_{\nu \rightarrow 0} u_\nu(\nu) \sim \lim_{\nu \rightarrow 0} B\nu^2 \rightarrow 0$, com A e B constantes adequadas.)

Para $\alpha > 0$ e $T_2 > T_1 > 0$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} T_2 > T_1 &\Rightarrow \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1} \Rightarrow \frac{\alpha}{T_2} < \frac{\alpha}{T_1} \Rightarrow e^{\alpha/T_1} > e^{\alpha/T_2} \Rightarrow e^{\alpha/T_1} - 1 > e^{\alpha/T_2} - 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha/T_1} - 1} < \frac{1}{e^{\alpha/T_2} - 1} \Rightarrow u_\nu(\nu, T_2) > u_\nu(\nu, T_1), \forall \nu \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

O máximo de $u_\nu(\nu)$ segue a lei de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{max}} = \frac{b}{T} \Rightarrow \nu_{max} = \frac{cT}{b}$$

Com b é a constante do deslocamento de Wien e c é a velocidade da luz.

Para perceber a diferença na emissão espectral, vide o gráfico ao lado:

3) Para frequências muito altas, a forma assintótica para $\nu \rightarrow \infty$ é dada por:

$$u_\nu(\nu \gg \nu_{max}) \approx \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/k_B T}$$

Essa é a lei de radiação de Wien.

Para frequências muito baixas, a forma assintótica para $\nu \rightarrow 0$ é dada por:

$$u_\nu(\nu \ll \nu_{max}) \approx \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2$$

Essa é a lei de radiação de Rayleigh-Jeans.

4) Como:

$$E = \frac{4\sigma}{c} T^4 V$$

Para uma esfera:

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Assim, como:

$$\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4, \; c \approx 3 \cdot 10^8 m/s, \; T = 3K \; \text{e} \; V \approx 4,19 \cdot 10^{78} m^3$$

Temos:

$$E \approx 2,57 \cdot 10^{65} J$$

5) Numa expansão adiabática:

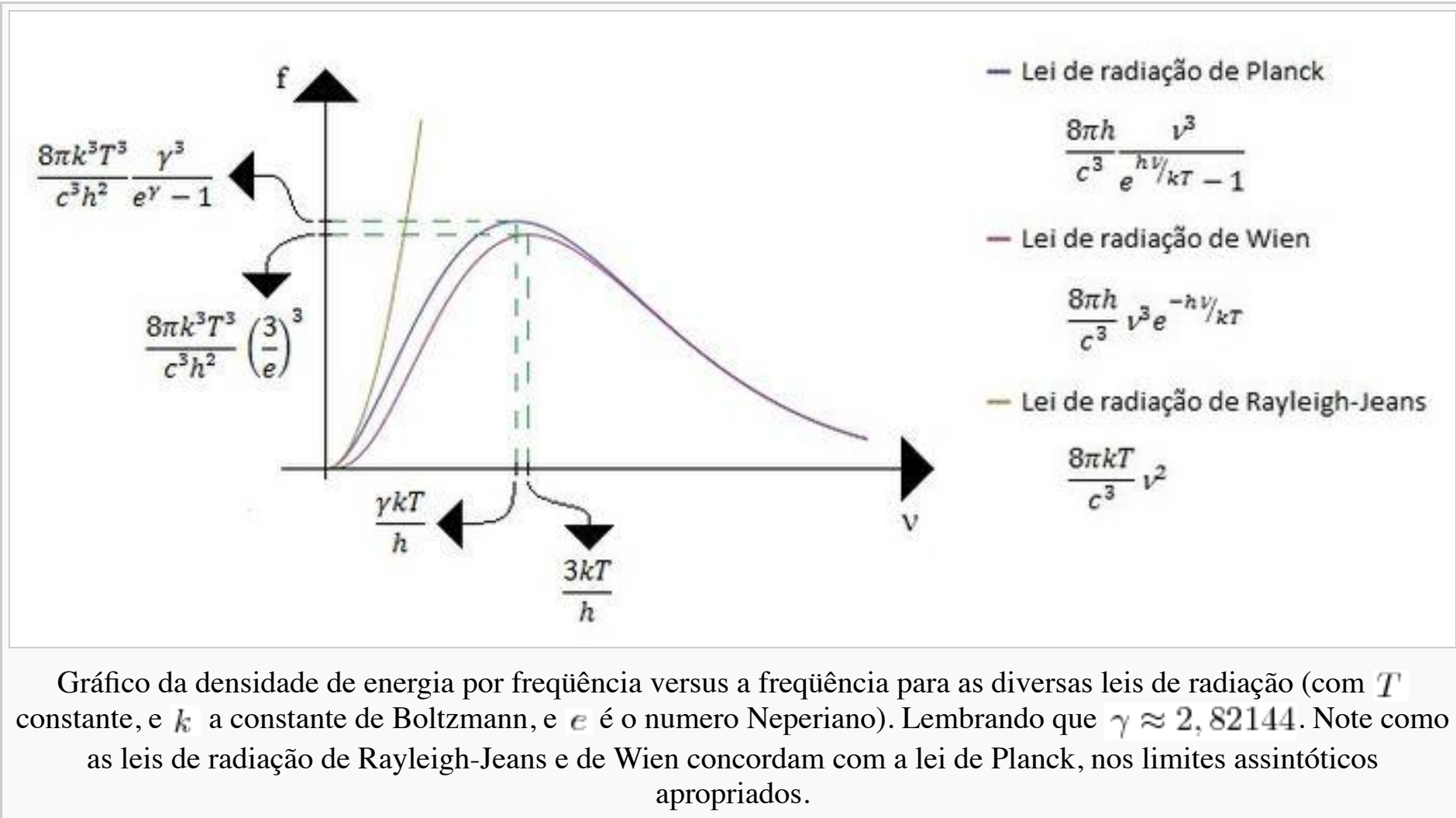
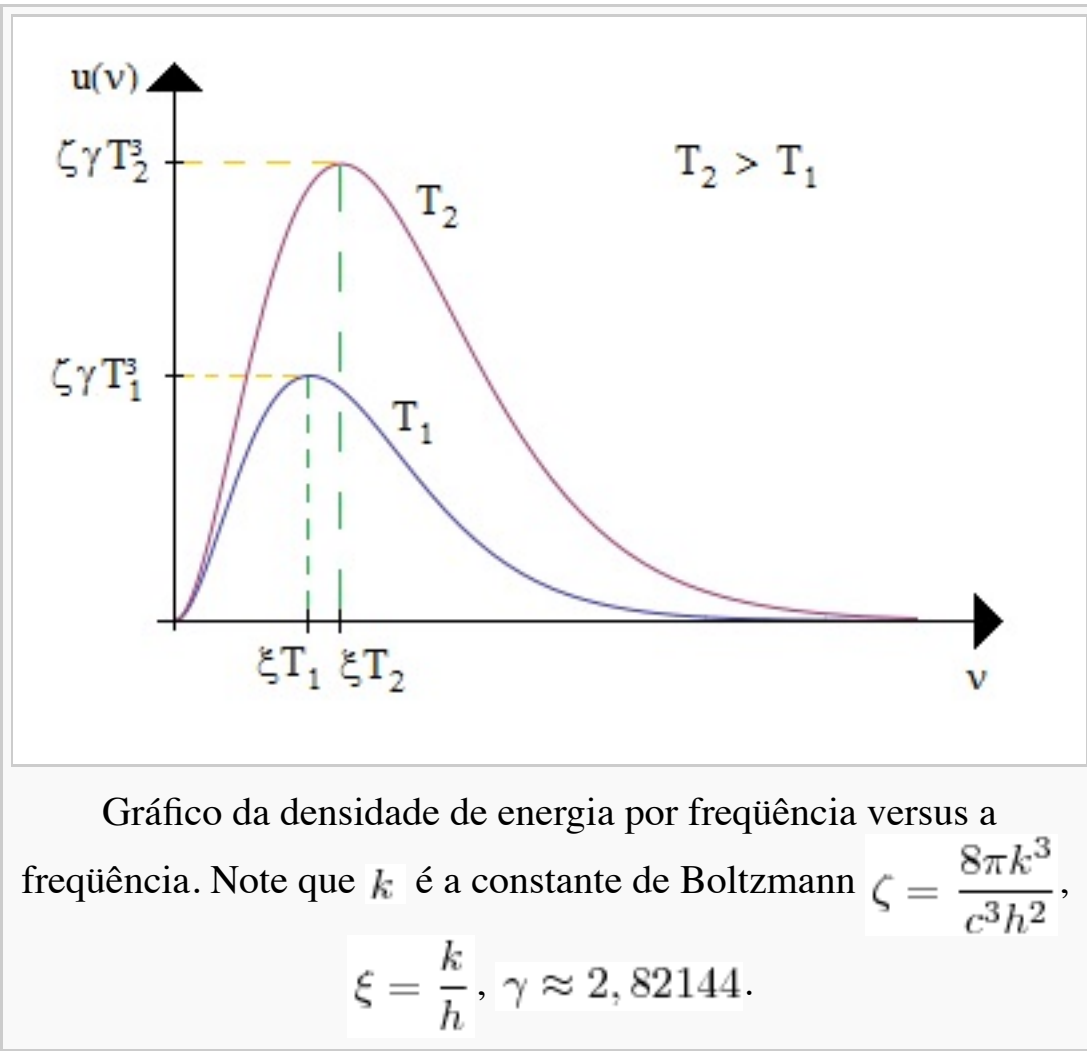
$$\delta Q = TdS = 0 \Rightarrow dS = 0$$

Mas, se C e G são constantes adequadas:

$$S = CVT^3 \Rightarrow dS = CT^3 dV + 3CT^2 V dT = 0 \Rightarrow CT^3 dV = -3CT^2 V dT \Rightarrow \frac{dV}{V} = -3 \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln V = -3 \ln T + \ln G \Rightarrow V = GT^{-3}$$

Assim:

Gráfico da função $f(w) = \frac{w^3}{e^w - 1}$, com $\gamma \approx 2,82144$ sendo o ponto de máximo. A área sob esta curva quando integrada de 0 até ∞ é $\frac{\pi^4}{15}$.



$$T_0 = \left(\frac{G}{V_0}\right)^{1/3}$$

De forma que:

$$T_f = \left(\frac{G}{2V_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} T_0 \approx 2,38K \, .$$

Questão 5

Considere um sistema de N átomos localizados e não interagentes. Cada átomo pode estar em um dos três estados rotulados pelo número quântico k , com $k = -1, 0, 1$. Um átomo tem a mesma energia $\epsilon_1 > 0$ no estado $k = 1$ ou no estado $k = -1$. Um átomo no estado $k = 0$ tem energia $\epsilon_0 = 0$. Determine:

- A função de partição do sistema.
- A probabilidade p_0 de um átomo se encontrar no estado com energia 0 . Determine o comportamento de p_0 nos limites de altas e baixas temperaturas e esboce o gráfico de p_0 versus T .
- As expressões para a energia interna e para a entropia como função da temperatura T . Determine os valores assintóticos da energia e da entropia nos limites de altas e baixas temperaturas. A terceira lei da termodinâmica é observada?
- Esboce o gráfico da entropia como função da temperatura.

Solução:

Estamos no ensemble canônico (temperatura definida), num caso no qual as partículas são distinguíveis, portanto, se z_0 é a função de partição de uma partícula, a função de partição do sistema será:

$$Z = (z_0)^N$$

1) Sabemos que:

$$z_0 = \sum_r e^{-\beta E_r}, \forall r$$

Os estados são $k = -1, 0, 1$, logo:

$$z_0 = \sum_{k=-1}^1 e^{-\beta \epsilon_k} = e^{-\beta \epsilon_{-1}} + e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-\beta \epsilon_1} = 1 + 2e^{-\beta \epsilon_1} \Rightarrow Z = (z_0)^N = (1 + 2e^{-\beta \epsilon_1})^N$$

2) Sabe-se que:

$$p_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \Rightarrow p_0 = \frac{e^{-\beta \epsilon_0}}{z_0} = \frac{1}{1 + 2e^{-\beta \epsilon_1}}$$

Para $\beta \rightarrow \infty$ (ou $T \rightarrow 0^+$) $\Rightarrow e^{-\beta \epsilon_1} \rightarrow 0 \Rightarrow p_0 \rightarrow 1$.

Para $\beta \rightarrow 0$ (ou $T \rightarrow \infty$) $\Rightarrow e^{-\beta \epsilon_1} \rightarrow 1 \Rightarrow p_0 \rightarrow 1/3$.

(sobre o limite assintótico...)

Veja os gráficos ao lado.

3) Sabemos que:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(N \ln (1 + 2e^{-\beta \epsilon_1}) \right) = \frac{2N\epsilon_1 e^{-\beta \epsilon_1}}{1 + 2e^{-\beta \epsilon_1}} = \frac{2N\epsilon_1}{2 + e^{\beta \epsilon_1}}$$

Assim, se $\beta \rightarrow \infty$ (ou $T \rightarrow 0^+$), $\Rightarrow \bar{E} \sim 2N\epsilon_1 e^{-\beta \epsilon_1} \rightarrow 0$.

Assim, se $\beta \rightarrow 0$ (ou $T \rightarrow \infty$), $\Rightarrow \bar{E} \rightarrow \frac{2N\epsilon_1}{3}$.

4) A entropia é dada por:

$$S = k(\ln Z + \beta \bar{E}) = k \left(N \ln (1 + 2e^{-\beta \epsilon_1}) + \frac{2N\beta \epsilon_1}{2 + e^{\beta \epsilon_1}} \right)$$

Assim, se $\beta \rightarrow \infty$ (ou $T \rightarrow 0^+$), $\Rightarrow S \rightarrow 0$.

Assim, se $\beta \rightarrow 0$ (ou $T \rightarrow \infty$), $\Rightarrow S \rightarrow kN \ln 3$.

Questão 7

Durante uma tempestade, uma nuvem cobre a cidade de São Paulo a uma altura $h = 500m$ em relação ao solo. Vamos supor que a largura da nuvem seja bem maior que essa altura h . Um balão meteorológico equipado com um sensor de campo elétrico é então lançado verticalemnte a partir do solo. Os dados coletados pelo sensor estão ilustrados na figura abaixo, onde $E(z)$ é o **módulo** do campo elétrico em função da altitude ($z = 0$ no solo). A espessura da nuvem na direção vertical é igual a $1200m$ e sabe-se que a densidade de carga elétrica é sempre negativa no seu interior.

- Indique, em um diagrama, a direção e sentido do campo elétrico nas regiões abaixo, dentro e acima da nuvem.
- Calcule a densidade volumétrica de carga na atmosfera em função da altitude, $\rho(z)$, e esboce o seu gráfico.
- Para quais valores de z o potencial elétrico é máximo ou mínimo? Calcule o potencial elétrico nesses pontos. Tome $V = 0$ no solo.

Questão 8

Responda as questões abaixo o mais detalhadamente possível. Não deixe nada indicado. Conclua.

Considere um operador hermitiano H e mostre que:

- 1) Os autovalores de H são necessariamente reais;
- 2) Os autovalores de H correspondentes a autovetores diferentes são ortogonais.

Um operador A , que corresponde ao observável a , tem dois autoestados normalizados, $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$, com autovalores a_1 e a_2 , respectivamente, e $a_1 \neq a_2$. Um outro operador B , que corresponde ao observável b , tem dois autoestados normalizados, $|\chi_1\rangle$ e $|\chi_2\rangle$, com autovalores b_1 e b_2 , respectivamente, e $b_1 \neq b_2$. Os dois conjuntos de autoestados (ou bases) estão relacionados por:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|\chi_1\rangle + 3|\chi_2\rangle) \text{ e } |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle).$$

- 3) Encontre a relação inversa entre as bases, ou seja, os $|\chi\rangle$ s em termos dos $|\varphi\rangle$ s.

Sobre esse sistema, podem ser feitas medidas em seqüência. Calcule as probabilidades pedidas nos casos abaixo:

- 4) a é medido e é encontrado o autovalor a_1 . Imediatamente após, b é medido e é encontrado o autovalor b_1 . Em seguida, a é medido novamente. Qual é a probabilidade de se obter novamente o autovalor a_1 nessa última medida?

- 5) a é medido e é encontrado o autovalor a_1 . Após essa medida de a , mede-se b e novamente a , nessa ordem. Qual é a probabilidade de se obter nessa seqüência de medidas os autovalores b_1 (na medida de b) e a_1 (na medida de a)?

Solução:

- 1) Dado H um operador hermitiano cujos autoestados constituem uma base $|\psi_i\rangle$, sendo que os autovalores de H quando atua nessa base são λ_i , ou seja:

$$H|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle$$

Como o operador é hermitiano:

$$\langle\psi_i|H^\dagger = \lambda_i^* \langle\psi_i|$$

Portanto, por ser hermitiano, o operador possui a seguinte propriedade:

$$\langle\psi_i|H|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|H^\dagger|\psi_i\rangle \Rightarrow \langle\psi_i|H|\psi_i\rangle - \langle\psi_i|H^\dagger|\psi_i\rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle - \lambda_i^* \langle\psi_i|\psi_i\rangle = (\lambda_i - \lambda_i^*) \langle\psi_i|\psi_i\rangle = (\lambda_i - \lambda_i^*) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^* \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Observação: essa demonstração vale inclusive no caso degenerado.

- 2) Dada uma situação na qual:

$$H|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle$$

Com todas autovalores diferentes entre si, inclusive:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Logo:

$$H(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$$

Assim:

$$\langle\psi_1|H(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \lambda_1 \langle\psi_1|(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \lambda_1 [\langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|\psi_2\rangle] = \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

Mas:

$$\langle\psi_1|H(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \langle\psi_1|(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

Portanto:

$$\lambda_1 \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle \Rightarrow \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$$

Como, por hipótese $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos que:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0 \therefore |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \text{ são ortogonais.}$$

Observação: essa demonstração **não** vale para o caso degenerado, pois nesse caso não é válido afirmar que todos os autovalores que correspondem aos autovetores são diferentes entre si.

- 3) Sabemos que:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|\chi_1\rangle + 3|\chi_2\rangle); |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle)$$

Logo:

$$|\varphi_1\rangle + 3|\varphi_2\rangle = \frac{10}{\sqrt{10}}|\chi_1\rangle = \sqrt{10}|\chi_1\rangle \Rightarrow |\chi_1\rangle = \frac{|\varphi_1\rangle + 3|\varphi_2\rangle}{\sqrt{10}}$$

Também temos que:

$$|\varphi_2\rangle - 3|\varphi_1\rangle = \frac{-10}{\sqrt{10}}|\chi_2\rangle = -\sqrt{10}|\chi_2\rangle \Rightarrow |\chi_2\rangle = \frac{3|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle}{\sqrt{10}}$$

4) De acordo com o enunciado:

$$\begin{cases} A|\varphi_1\rangle = a_1|\varphi_1\rangle \\ A|\varphi_2\rangle = a_2|\varphi_2\rangle \end{cases}$$

E:

$$\begin{cases} B|\chi_1\rangle = b_1|\chi_1\rangle \\ B|\chi_2\rangle = b_2|\chi_2\rangle \end{cases}$$

O enunciado informa que na primeira medida de a encontra-se a_1 , portanto o autoestado incidente é $|\varphi_1\rangle$.

Após isso, mede-se b e encontra-se b_1 , portanto:

$$B|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (B|\chi_1\rangle + 3B|\chi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{10}} (b_1|\chi_1\rangle + 3b_2|\chi_2\rangle)$$

Observação: a importância desse passo é meramente a de verificar que o estado $|\varphi_1\rangle$ possui alguma componente do estado $|\chi_1\rangle$

Ou seja, há um autoestado de B cujo autovalor corresponde a b_1 compondo o estado $|\varphi_1\rangle$, portanto o autoestado incidente passa a ser $|\chi_1\rangle$.

Finalmente, mede-se a novamente e encontra-se a_1 , portanto:

$$A|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (A|\varphi_1\rangle + 3A|\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{10}} (a_1|\varphi_1\rangle + 3a_2|\varphi_2\rangle)$$

Observação: a importância desse passo é meramente a de verificar que o estado $|\chi_1\rangle$ possui alguma componente do estado $|\varphi_1\rangle$

Ou seja, há um autoestado de A cujo autovalor corresponde a a_1 compondo o estado $|\chi_1\rangle$, portanto o autoestado medido passa a ser $|\varphi_1\rangle$.

Logo:

$$\mathcal{P}_{a_1} = |\langle\varphi_1|\chi_1\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

5) O enunciado informa que na primeira medida de a encontra-se a_1 , portanto o autoestado incidente é $|\varphi_1\rangle$.

Após isso, mede-se b , de forma que:

$$B|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (B|\chi_1\rangle + 3B|\chi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{10}} (b_1|\chi_1\rangle + 3b_2|\chi_2\rangle)$$

Ou seja, há um autoestado de B cujo autovalor corresponde a b_1 compondo o estado $|\varphi_1\rangle$, portanto o autoestado medido passa a ser $|\chi_1\rangle$.

Logo:

$$\mathcal{P}_{b_1} = |\langle\chi_1|\varphi_1\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10} = 0,1$$

Incidindo o estado $|\chi_1\rangle$ na próxima medida, teremos:

$$A|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (A|\varphi_1\rangle + 3A|\varphi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{10}} (a_1|\varphi_1\rangle + 3a_2|\varphi_2\rangle)$$

Ou seja, há um autoestado de A cujo autovalor corresponde a a_1 compondo o estado $|\chi_1\rangle$, portanto o autoestado medido passa a ser $|\varphi_1\rangle$.

Logo:

$$\mathcal{P}_{a_1} = |\langle\varphi_1|\chi_1\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10} = 0,1$$

Assim, a probabilidade de se medir b_1 e depois medir a_1 será:

$$\mathcal{P}_{b_1,a_1} = \mathcal{P}_{b_1} \cdot \mathcal{P}_{a_1} = \left(\frac{1}{10} \right)^2 = \frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$$

EUF - 2010/1

Questão 2

Uma partícula de massa m pode se mover sem atrito num aro de raio R , como mostrado na figura abaixo. O aro gira com velocidade angular constante ω em torno do eixo vertical, conforme mostrado na figura. Considere a aceleração da gravidade valendo g .

a) Determine a energia cinética da partícula em função de θ , $\dot{\theta}$, R , m e ω .

b) Determine a lagrangiana da partícula, adotando energia potencial nula no ponto correspondente a $\theta = 0$.

c) Determine a equação de movimento da partícula.

d) Determine os pontos de equilíbrio.

Observação: Vamos tomar $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Solução:

Usaremos como origem do sistema de coordenadas o ponto central do aro.

$$T = \frac{m\omega^2 R^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{m\dot{\theta}^2 R^2}{2}; V = mgR(1 - \cos(\theta))$$

a) $T = \frac{m\omega^2 R^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{m\dot{\theta}^2 R^2}{2}$

b) O potencial que escolhi no começo do exercício já cumpre a condição dada acima, logo já podemos escrever a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m\omega^2 R^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{m\dot{\theta}^2 R^2}{2} - mgR(1 - \cos(\theta))$$

Observação: se você escolheu um potencial a menos de uma constante, ou seja:

$$V(\theta) = C - mgR\cos(\theta)$$

Logo, para cumprir a exigência do exercício:

$$V(\theta)|_0 = V(0) = 0 = C - mgR \Rightarrow C = mgR$$

Portanto $V = mgR(1 - \cos(\theta))$.

c) Equação do movimento pode ser obtida através da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Com:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - mgR\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mR^2\ddot{\theta}$$

Daí, a equação de movimento fica:

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta) + mgR\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta) \right) \sin(\theta) = 0$$

d) Um ponto de equilíbrio se caracteriza por ser um ponto no qual a força total que atua neste ponto ser nula, ou seja, no ponto, $\vec{F} = \vec{0}$, ou $\vec{\nabla} V_{ef} = \vec{0}$.

Antes de encontrar os pontos de equilíbrio, vamos notar duas coisas:

- $H = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + mgR(1 - \cos(\theta)) - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2}$

- Pelas equações de Hamilton $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$

Como \mathcal{L} não depende explicitamente do tempo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Assim, vê-se que H é uma constante do movimento. Diga-se de passagem:

$$H = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + mgR(1 - \cos(\theta)) - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2} \neq E = T + V = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + mgR(1 - \cos(\theta)) + \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2}$$

Vamos definir o potencial efetivo a partir de H :

$$H = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + mgR(1 - \cos(\theta)) - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2} = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + V_{ef}(\theta) \Rightarrow V_{ef}(\theta) = mgR(1 - \cos(\theta)) - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2}$$

Assim, os pontos de equilíbrio são tais que:

$$\left(\frac{\partial V_{ef}(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_0} = 0 = mgR\sin(\theta_0) - mR^2\omega^2 \sin(\theta_0)\cos(\theta_0)$$

Que nos fornece:

$$\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_0) \right) \sin(\theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta_0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \text{ ou } \theta_0 = \pm\pi \\ \frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \pm \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) \end{cases}$$

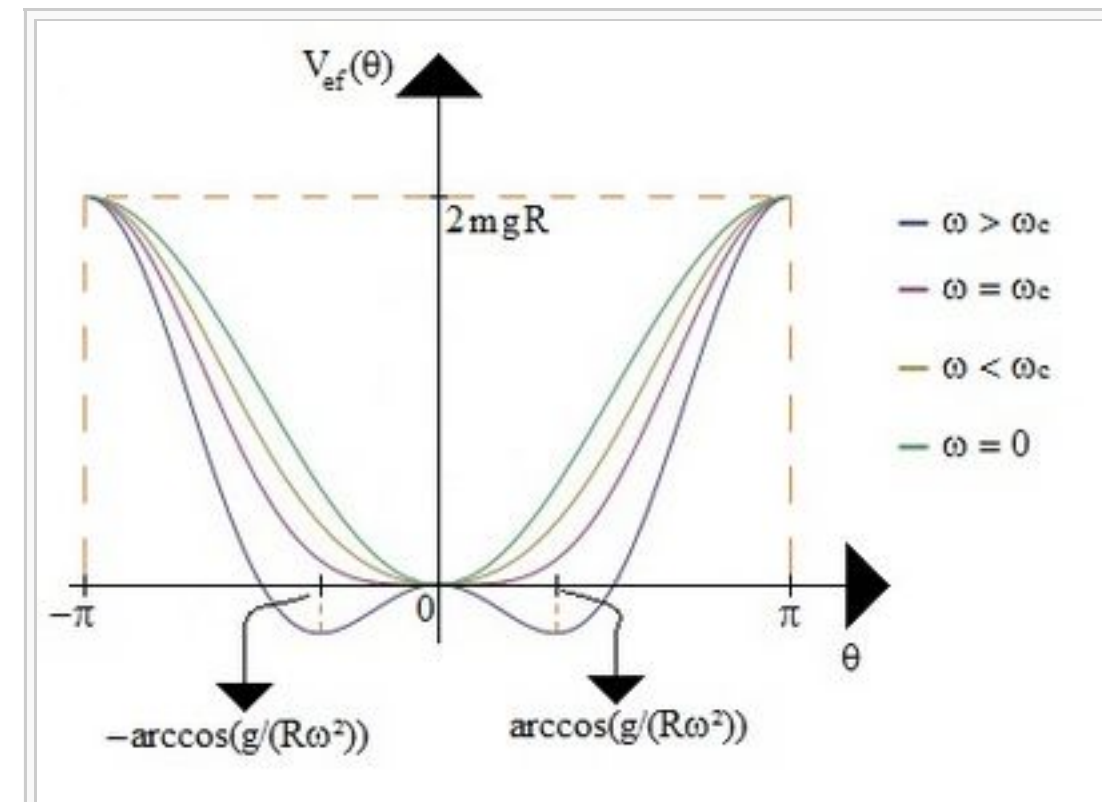
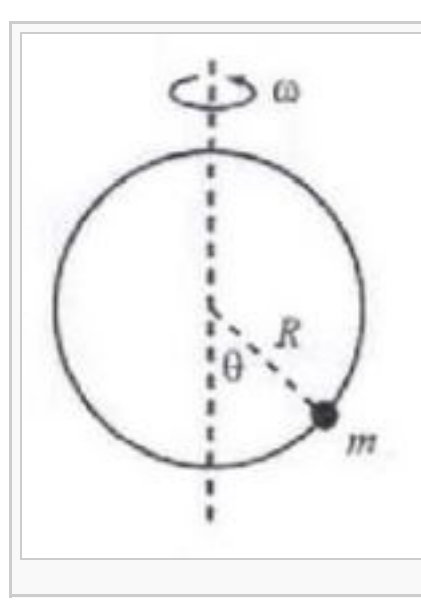


Gráfico do potencial efetivo,

$$V_{ef}(\theta) = mgR(1 - \cos(\theta)) - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2} \text{ versus } \theta$$

nos regimes de $\omega > \omega_c$, $\omega = \omega_c$ e $\omega < \omega_c$ e $\omega = 0$. Nesse gráfico reside a explicação física para o porquê do aparecimento da quebra de simetria: simplesmente deve-se à 'competição' entre o potencial gravitacional e o 'potencial girante'. De $\omega = 0$ até $\omega = \omega_c$ temos em $\theta_0 = 0$ um ponto de equilíbrio estável. A partir de uma certa frequência (ω_c), o 'potencial girante' passa a superar o potencial gravitacional, para ângulos nas vizinhanças do ângulo zero, criando um ponto de equilíbrio instável em $\theta_0 = 0$, conforme evidenciado na figura. Daí, pequenas perturbações no sistema o obrigam a 'optar' por um dos dois pontos de equilíbrio

disponíveis ao sistema: $\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ e

$\theta_0 = -\arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$, o que origina a quebra de simetria.

Definindo:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Vemos que $\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ só possui solução se $\omega \geq \omega_c$, sendo que $\theta_0 = 0$, se $\omega = \omega_c$.

Para obter uma informação mais visual, vide o gráfico ao lado.

Apenas como informação adicional, esse é um exercício que ilustra quebra de simetria.

Questão 4

Utilizando o Modelo de Bohr:

a) Deduza a expressão para os níveis de energia do íon He^+ , ($Z = 2, M_{He^+} \gg m_e$) e calcule os valores das energias até $n = 5$.

Com os resultados desse item, determine:

b) a energia de ionização do He^+ ,

c) o comprimento de onda de uma linha de emissão do He^+ na região do espectro visível,

d) Dois íons de He^+ no estado fundamental e com mesma energia cinética colidem frontalmente. Cada qual emite um fóton de comprimento de onda de 120 nm e fica com energia cinética final nula, no estado fundamental. Qual é a velocidade dos íons antes da colisão?

Solução:

Dados úteis:

$$m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} Kg = 9,11 \cdot 10^{-28} g$$

$$M_{He} \approx 4M_H \approx 4 \cdot 1836 \cdot m_e$$

Ou, como M_α é a massa da partícula alfa:

$$M_{He} \approx M_\alpha \approx 6,6 \cdot 10^{-27} Kg$$

$$h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

$$\hbar \approx 1,1 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$c \approx 3 \cdot 10^8 m/s = 3 \cdot 10^{10} cm/s$$

a) O módulo da força exercida por uma partícula de carga Ze sobre o elétron é dada por (CGS):

$$F = \frac{Ze^2}{r^2} = \mu a$$

Com:

$$\mu = \frac{(M_{He^+}) \cdot m_e}{(M_{He^+}) + m_e} \approx m_e$$

Já que:

$$M_{He^+} \gg m_e$$

Para um movimento circular uniformemente acelerado, vale a relação:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Daí:

$$\frac{Ze^2}{m_e r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m_e v^2}{Ze^2}$$

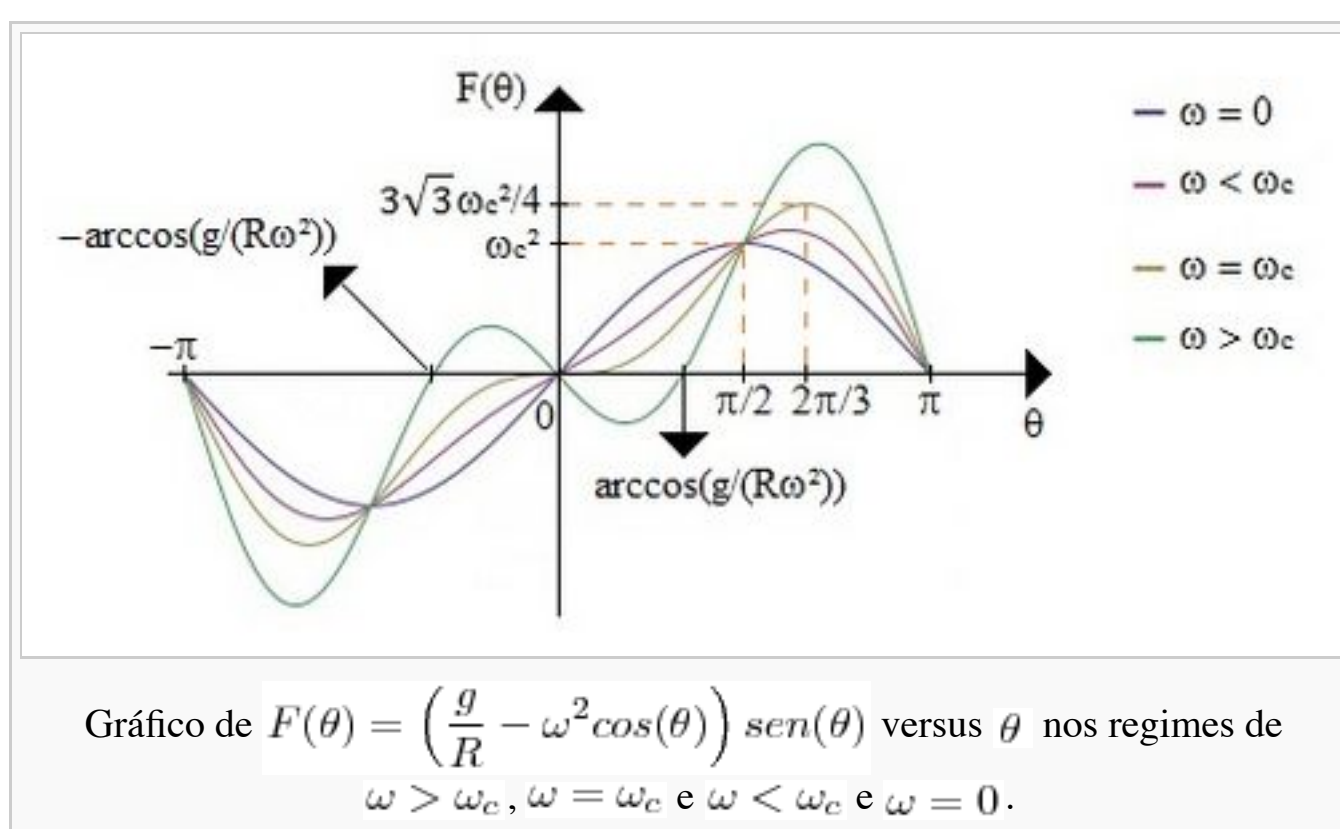
As órbitas de Bohr obedecem à condição:

$$L = m_e v r = n\hbar \Rightarrow v = \frac{n\hbar}{m_e r}$$

Com isso:

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{Ze^2 m_e}$$

Consequentemente:



$$v = \frac{Ze^2}{n\hbar}$$

Para o átomo hidrogenóide a energia é dada por:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} \approx \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = \frac{m_e Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2} - \frac{m_e Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2} = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2}$$

Sabe-se que o estado fundamental do átomo de Hidrogênio possui energia:

$$E_{1H} \approx -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -13,6 eV$$

Portanto:

$$E_{1He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -54,4 eV$$

$$E_{2He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{8\hbar^2} = -13,6 eV$$

$$E_{3He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{18\hbar^2} \approx -6,0 eV$$

$$E_{4He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{32\hbar^2} = -3,4 eV$$

$$E_{5He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{50\hbar^2} \approx -2,2 eV$$

b) A energia de ionização resulta da transição entre os estados $n = 0$ e ' $n = \infty$ ', de forma que:

$$E_{ionização} = E_{1He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -54,4 eV$$

c) O espectro visível está, aproximadamente, no intervalo de:

$$(400 \sim 700)nm = (4 \sim 7) \cdot 10^{-7}m$$

Como:

$$\Delta E = h\Delta\nu = \frac{hc}{\Delta\lambda} = \frac{(4,95 \sim 2,83) \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} eV = (3,09 \sim 1,77) eV$$

Como:

$$E_{6He^+} \approx -4\frac{m_e e^4}{72\hbar^2} \approx -1,5 eV$$

A energia do estado cujo número quântico $n = 6$ está fora da região do visível.

Dessa forma apenas $n = 5$ possui energia no intervalo do visível.

Nota: esse exercício depende de como se define a faixa do visível, mas o resultado deve ser o mesmo se você escolheu um intervalo razoável para os comprimentos de onda. Eu apenas fiz a escolha que achei mais conveniente.

d) Por conservação de energia:

$$h\nu = \frac{(M_{He^+})v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2h\nu}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{(M_{He^+})\lambda}} \approx 2,2 \cdot 10^4 m/s$$

Questão 5

Um gás ideal de moléculas diatômicas polares, cada uma com momento de dipolo elétrico $\vec{\mu}$, encontra-se a uma temperatura T e está sujeito a um campo elétrico $\vec{\epsilon}$. As orientações dos dipolos são definidas pelos ângulos $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ de um sistema de coordenadas esféricas cujo eixo-z é paralelo ao campo elétrico. A probabilidade de encontrar uma molécula com orientação do dipolo dentro do elemento $d\theta d\varphi$ vale $\rho(\theta, \varphi)d\theta d\varphi$ onde a densidade de probabilidade $\rho(\theta, \varphi)$ é dada por:

$$\rho(\theta, \varphi) = \frac{1}{A} \sin(\theta) e^{-\beta E(\theta)}$$

e está normalizada de acordo com:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = 1$$

A constante A é um fator de normalização, $\beta = 1/kT$, sendo k a constante de Boltzmann e E é a energia de interação do momento de dipolo com o campo, dada por:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon} = -\mu \varphi \cos(\theta)$$

a) Determine A como função de T , ϵ e μ .

b) O momento de dipolo médio por molécula é definido pela média:

$$P = \mu \langle \cos(\theta) \rangle$$

Determinar P como função de T e ε .

c) Esboce o gráfico de P versus ε para T constante.

d) A susceptibilidade elétrica é definida por:

$$\chi = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon}$$

Determine χ a campo nulo e mostre que ela é inversamente proporcional à temperatura T . Notar que para pequenos valores de x vale a relação:

$$\cotgh(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

Solução:

a) Vejamos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{A} \sin(\theta) e^{\beta \mu \varepsilon \cos(\theta)} d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{A} \int_0^\pi \sin(\theta) e^{\beta \mu \varepsilon \cos(\theta)} d\theta$$

Usando a mudança de variável:

$$u = \cos(\theta) \Rightarrow du = -\sin(\theta) d\theta$$

Vamos definir, também, $\alpha = \beta \mu \varepsilon$.

Temos, então:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{A} \int_0^\pi \sin(\theta) e^{\beta \mu \varepsilon \cos(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{A} \int_{-1}^1 e^{\alpha u} du = \frac{2\pi}{A} \left(\frac{e^{\alpha u}}{\alpha} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{A\alpha} (e^\alpha - e^{-\alpha}) = \frac{4\pi \sinh(\alpha)}{A\alpha} = \frac{4\pi \sinh(\beta \mu \varepsilon)}{A \beta \mu \varepsilon} = 1$$

Dessa forma:

$$A = \frac{4\pi \sinh(\beta \mu \varepsilon)}{\beta \mu \varepsilon}$$

b) Por definição:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin(\theta) e^{\alpha \cos(\theta)} d\theta d\varphi$$

Usando a mesma mudança de variável anterior:

$$\frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin(\theta) e^{\alpha \cos(\theta)} d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{A} \int_{-1}^1 u e^{\alpha u} du$$

Existem duas maneiras para realizar a integral:

Método 1 (integração por partes)

Se:

$$U(u) = u \Rightarrow U'(u) = 1; V(u) = \frac{e^{\alpha u}}{\alpha} \Rightarrow V'(u) = e^{\alpha u}$$

Portanto:

$$\int_{-1}^1 u e^{\alpha u} du = \frac{u e^{\alpha u}}{\alpha} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{\alpha u}}{\alpha} du = 2 \frac{\cosh(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha u} \Big|_{-1}^1 = 2 \left[\frac{\cosh(\alpha)}{\alpha} - \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha^2} \right]$$

Método 2 (derivada em relação à variável $a = \alpha$)

$$\int_{-1}^1 u e^{\alpha u} du = \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial a} e^{a u} du \right) \Big|_{a=\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial a} \left[\int_{-1}^1 e^{a u} du \right] \right) \Big|_{a=\alpha} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{\sinh(a)}{a} \right) \Big|_{a=\alpha} = 2 \left[\frac{\cosh(\alpha)}{\alpha} - \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha^2} \right]$$

Assim:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin(\theta) e^{\alpha \cos(\theta)} d\theta d\varphi = \frac{4\pi\alpha}{4\pi \sinh(\alpha)} \left[\frac{\cosh(\alpha)}{\alpha} - \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha^2} \right] = \cotgh(\alpha) - \alpha^{-1}$$

De forma que finalmente obtemos:

$$P = \mu (\cotgh(\beta \mu \varepsilon) - (\beta \mu \varepsilon)^{-1})$$

c) Basta, em princípio, plotar a função encontrada no exercício acima.

Se $\alpha \gg 1 \Rightarrow \varepsilon \gg \frac{1}{\mu\beta} = \frac{kT}{\mu}$, $\alpha^{-1} \approx 0$ e $e^{-\alpha} \approx 0$, portanto:

$$P = \mu (\cotgh(\alpha) - (\alpha)^{-1}) \approx \mu \cotgh(\alpha) = \mu \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)}$$

$$= \mu \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \approx \mu \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}} = \mu$$

Observe que se $\alpha \ll 1 \Rightarrow \varepsilon \ll \frac{kT}{\mu}$:

$$P = \mu(cotgh(\alpha) - (\alpha)^{-1}) \approx \mu \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{\alpha} \right) = \mu \frac{\alpha}{3} = \frac{\beta \mu^2 \varepsilon}{3}$$

Daí, plotando $P(\varepsilon)$, a assíntota e a reta, nos dá o gráfico ao lado:

d) Como informa o enunciado:

$$\chi = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \alpha}$$

É muito conveniente trabalhar com α , pois torna as contas mais curtas...

Como:

$$\alpha = \beta \mu \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} = \beta \mu$$

Agora resta calcular:

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mu(cotgh(\alpha) - (\alpha)^{-1}) \right) = \mu \left(\frac{\partial cotgh(\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (\alpha)^{-1}}{\partial \alpha} \right) = \frac{1}{\alpha^2} + 1 - cotgh^2(\alpha)$$

Lembrando que se $\alpha \ll 1$:

$$\frac{1}{\alpha^2} + 1 - cotgh^2(\alpha) \approx 1 + \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{9}$$

De forma que:

$$\chi = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \beta \mu^2 \left(\frac{1}{(\beta \mu \varepsilon)^2} + 1 - cotgh^2(\beta \mu \varepsilon) \right)$$

Se $\alpha \ll 1$:

$$\chi \approx \mu^2 \beta \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right)$$

De forma que a campo nulo, como $\alpha = \beta \mu \varepsilon \Rightarrow \textit{se} \; \varepsilon = 0 \; .\therefore \; \alpha = 0$, a susceptibilidade elétrica será:

$$\chi = \frac{\mu^2 \beta}{3} = \frac{\mu^2}{3kT} \propto T^{-1}$$

Conforme pedido pelo enunciado.

Questão 7

Um condutor esférico maciço, de raio a e carregado com carga $Q > 0$, está envolto por um material dielétrico esférico, de constante dielétrica $K = \epsilon/\epsilon_0$ e raio externo b - conforme a figura.

a) Determine o campo elétricoem todo o espaço e esboce um gráfico de seu módulo $E(r)$.

b) Determine o potencial no centro das esferas, tomando-se como nulo o ptencial no infinito.

c) Encontre as distribuições de carga livre e ligada (de polarização) nas esferas condutora e dielétrica. Faça uma figura mostrando onde as densidades de carga se localizam, indicando se são positivas ou negativas.

d) Calcule a energia eletrostática do sistema.

Solução:

EUf - 2010/2

Questão 1

A interação entre dois átomos de massas m_1 e m_2 , que formam uma molécula, pode ser descrita pelo potencial de Lennard-Jones, dado por:

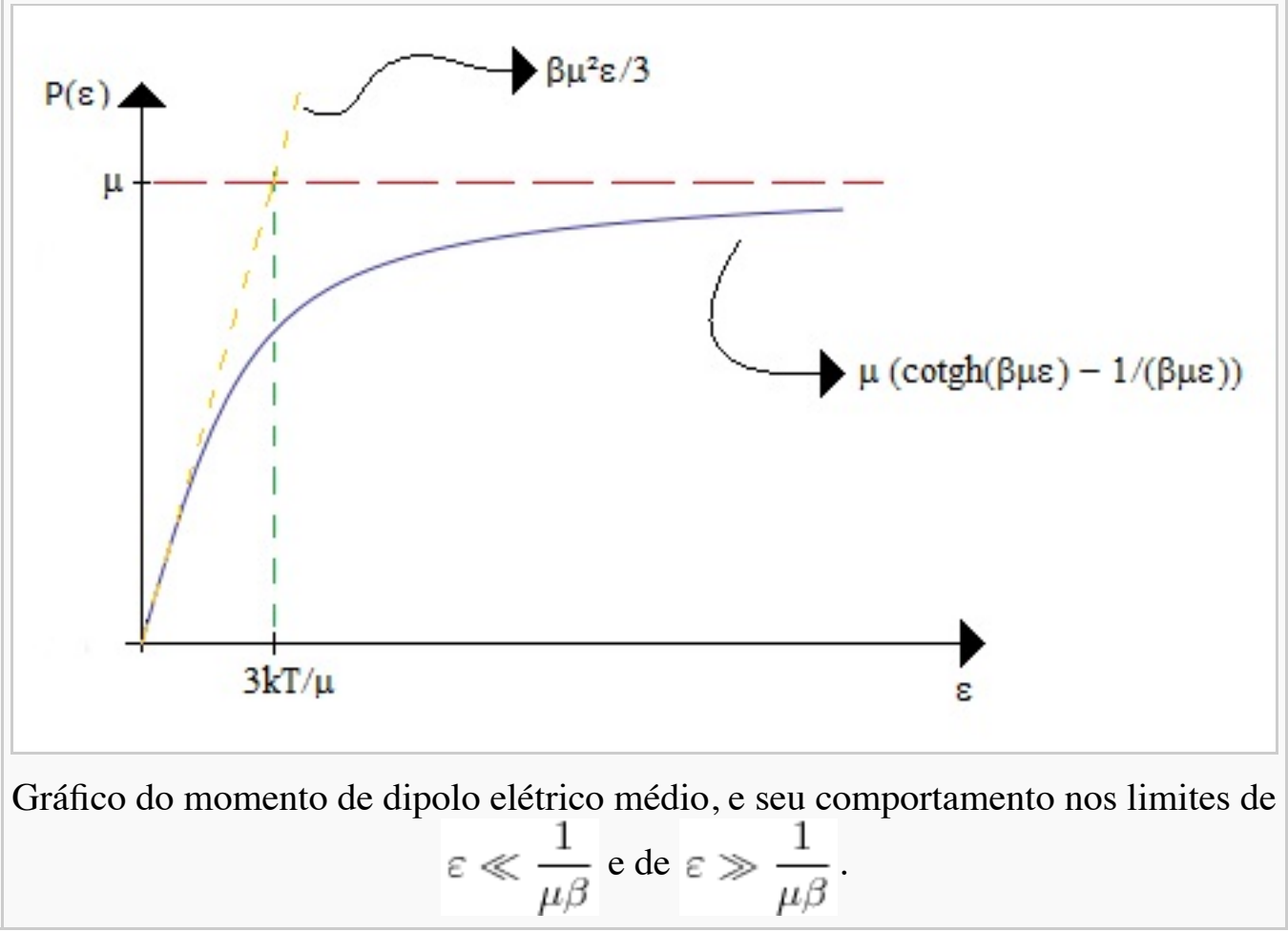
$$V(x) = A \left[\left(\frac{b}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{b}{x} \right)^6 \right]$$

no qual A e b são parâmetros positivos e x a separação interatômica. Trate o problema classicamente e despreze qualquer tipo de rotação da molécula.

a) Determine a posição de equilíbrio em função de A e b .

b) Calcule a menor energia para dissociar a molécula.

c) Mostre que o equilíbrio é estável e calcule a frequência de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.



Desenhe um gráfico do potencial de Lennard-Jones, indicando os parâmetros obtidos no item a) e b).

Solução:

a) Temos um ponto de equilíbrio quando:

$$\left. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{x_0} = 0$$

Logo:

$$\left. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{x_0} = A \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{b}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{b}{x} \right)^6 \right] \Big|_{x_0} = \frac{12b^6 A}{x_0^7} \left(1 - \left(\frac{b}{x_0} \right)^6 \right) = 0 \Rightarrow x_0 = b$$

Assim, temos um ponto de equilíbrio em $x_0 = b$.

Como o próximo item pergunta sobre energia de dissociação, é importante saber se esse ponto de equilíbrio é estável ou não - poderíamos ver isso graficamente de maneira imediata, mas façamos essa conta, apenas para tornar a resolução mais completa.

Para que um ponto de equilíbrio seja estável, é necessário que:

$$\left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} > 0$$

Mas:

$$\left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} = A \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{b}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{b}{x} \right)^6 \right] \right\} = 12Ab^6 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^7} - \frac{b^6}{x^{13}} \right) = \frac{12b^6 A}{x^8} \left(\frac{13b^6}{x^6} - 7 \right) \therefore \left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0=b} = \frac{12b^6 A}{b^8} \left(\frac{13b^6}{b^6} - 7 \right) = \frac{60A}{b^2} > 0$$

Pois A e b são parâmetros positivos. Logo temos um ponto de mínimo, ou seja, de equilíbrio estável. Essa verificação é explicitamente pedida no item c), mas já foi feita neste item.

b) Para que a molécula se dissocie é necessário fornecer energia suficiente para que ele vá a $x \rightarrow \infty$. se olharmos o gráfico do item d), vemos que para que isto ocorra é necessário dar uma energia equivalente à diferença entre o potencial no ponto de mínimo e o potencial para $x \rightarrow \infty$, ou seja:

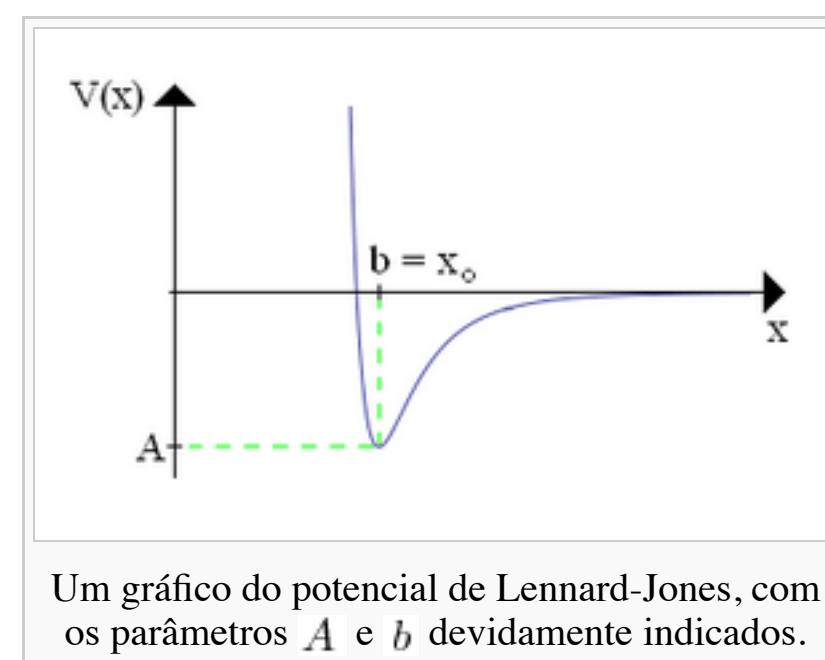
$$\Delta E = V(x \rightarrow \infty) - V(x_0 = b) = 0 - V(b) = - \left\{ A \left[\left(\frac{b}{b} \right)^{12} - 2 \left(\frac{b}{b} \right)^6 \right] \right\} = A$$

Logo, para que a molécula se dissocie é necessário fornecermos uma energia $\Delta E = A$.

c) No item a) já verificou-se que x_0 trata-se de um ponto de equilíbrio estável. Resta calcularmos a frequência para pequenas oscilações. Nesse regime sabemos que, se chamarmos a massa reduzida de μ e a frequência angular de ω , vale a relação:

$$\left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} = \mu \omega^2 = \frac{60A}{b^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{60A}{\mu b^2}} = \sqrt{\frac{60A(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 b^2}}$$

d) Vide gráfico ao lado.



Questão 3

Uma fonte produz um feixe de nêutrons com energia cinética média de $0,0133 \text{ eV}$ e incerteza relativa na velocidade, $\Delta v/v$, de 10^{-4} . Num determinado instante, a função de onda unidimensional de um nêutron é descrita por um pacote de ondas dado por:

$$\Psi(x) = A e^{-x^2/2(\Delta x)^2} e^{ik_0 x}$$

Nessa expressão, A é uma constante, Δx é a incerteza padrão na posição, e $\hbar k_0$ é o momento linear médio

a) Estime o comprimento de onda de de Broglie do nêutron e identifique a região do espectro eletromagnético correspondente a esse comprimento de onda.

b) Estime a temperatura associada a essa fonte de nêutrons.

c) Determine a constante A , expressando-a em termos de Δx nesse caso.

d) Com um pacote de ondas desse tipo, o produto das incertezas na posição e no momento é o mínimo permitido pelo princípio da incerteza. Estime Δx neste caso.

Solução:

NOTA: Nesse exercício utilizei, por comodidade, a mesma notação 'implícita' - e, na minha opinião, até um pouco confusa - do exercício, na qual:

$$E = \bar{E} = \langle E \rangle = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$$

$$v = \langle v \rangle; p = \langle p \rangle; \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}; \Delta v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}; \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \beta = \frac{v}{c}$$

Apenas para estabelecer um critério para saber se o sistema é relativístico ou não, vou estabelecer que a partir de $\gamma = 1,02$ o sistema é relativístico - isso significa que para β a partir de aproximadamente $0,2$ o sistema passa a ser relativístico. Como:

$$E = mc^2(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{E}{mc^2} + 1 = \gamma$$

Basta calcular $\frac{E}{mc^2}$ por esse critério e comparar com 0,02. Como $0,0133\text{ eV} \approx 2,131 \cdot 10^{-21}\text{ J}$, temos:

$$\frac{E}{mc^2} \approx \frac{2,131 \cdot 10^{-21}\text{ J}}{1,5074 \cdot 10^{-10}\text{ J}} \approx 1,414 \cdot 10^{-11} \ll 0,02$$

O que caracteriza um regime clássico, de acordo com nosso critério, de forma que podemos utilizar $E = \frac{mv^2}{2}$ tranquilamente.

OBSERVAÇÃO: É um pouco mais prático efetuar a conta em eV , que ficaria assim...

$$\frac{E}{mc^2} \approx \frac{0,0133\text{ eV}}{940 \cdot 10^6\text{ eV}} \approx 1,415 \cdot 10^{-11} \ll 0,02$$

a) Como:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$$

Como $0,0133\text{ eV} \approx 2,131 \cdot 10^{-21}\text{ J}$, logo:

$$\lambda \approx 9,322 \cdot 10^{-5}\text{ m}$$

Este comprimento de onda se encontra na faixa do infravermelho (de 740 nm até $300\text{ }\mu\text{m}$).

b) Para associarmos à energia uma temperatura, podemos usar o teorema da equipartição, de forma que, para um sistema unidimensional, devemos ter a seguinte igualdade:

$$\bar{E} = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2} \Rightarrow T = \frac{2\bar{E}}{k}$$

Assim:

$$T \approx 308,68\text{ K} = 35,53^\circ\text{C}$$

c) Para determinar a constante A basta utilizarmos a condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \Psi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \, dx = 1 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(\Delta x)^2} \, dx = A^2 \sqrt{\pi} \Delta x \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\Delta x}}$$

d) Como o enunciado informa que o pacote de ondas desse tipo é caracterizado por possuir incerteza mínima, e, como sabemos que:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Logo, nosso pacote possui a propriedade de que:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x = \frac{\hbar}{2 \Delta p} = \frac{\hbar}{2m \Delta v} = \frac{\hbar v}{2p \Delta v}$$

Logo, já que o enunciado informa que $p = \hbar k_0$:

$$\Delta x = \frac{\hbar v}{2p \Delta v} = 5 \cdot 10^3 k_0^{-1}$$

OBSERVAÇÃO: Não está claro para mim se 'estimar' significa encontrar um valor numérico, ou se basta deixar tudo em função de k_0 .

Podemos determinar k_0 utilizando a energia cinética média, que se expressa pelo hamiltoniano:

$$H = E = \frac{p^2}{2m}$$

Logo:

$$E = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \, dx$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 (A e^{ik_0 x} e^{-x^2/2(\Delta x)^2})}{\partial x^2} = \frac{\partial (A e^{ik_0 x} e^{-x^2/2(\Delta x)^2} [ik_0 - x/(\Delta x)^2])}{\partial x} \\ &= A e^{ik_0 x} e^{-x^2/2(\Delta x)^2} \left[ik_0 \left(ik_0 - \frac{x}{(\Delta x)^2} \right) - \frac{x}{(\Delta x)^2} \left(ik_0 - \frac{x}{(\Delta x)^2} \right) - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2 A^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(\Delta x)^2} \left[ik_0 \left(ik_0 - \frac{x}{(\Delta x)^2} \right) - \frac{x}{(\Delta x)^2} \left(ik_0 - \frac{x}{(\Delta x)^2} \right) - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \, dx \\ &= -\frac{\hbar^2 A^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(\Delta x)^2} \left[-k_0^2 - \frac{2ixk_0}{(\Delta x)^2} + \frac{x^2}{(\Delta x)^4} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \, dx \end{aligned}$$

O termo ímpar possui integral nula e assim temos:

$$E = -\frac{\hbar^2 A^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(\Delta x)^2} \left[\frac{x^2}{(\Delta x)^4} - k_0^2 - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \mathrm{d}x$$

Usando a mudança de variável abaixo:

$$y = \frac{x}{\Delta x}; \; \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\Delta x}$$

Ficamos com:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2 A^2 \Delta x}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left[\frac{y^2}{(\Delta x)^2} - k_0^2 - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \mathrm{d}y = \frac{\hbar^2 A^2 \Delta x \sqrt{\pi}}{2m} \left[k_0^2 + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] - \frac{\hbar^2 A^2 \Delta x}{2m (\Delta x)^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[k_0^2 + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] - \frac{\hbar^2}{4m (\Delta x)^2} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[k_0^2 + \frac{1}{2(\Delta x)^2} \right] = 1,0001 \cdot \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \approx 2,131 \cdot 10^{-21} \, J \end{aligned}$$

Logo, usando os valores de \hbar e de m - massa do nêutron -, temos:

$$k_0 = 2,5337 \cdot 10^{10} \, m^{-1}$$

Finalmente, temos que, usando o valor de k_0 :

$$\Delta x = 1,9735 \cdot 10^{-7} \, m$$

Questão 8

Uma partícula de massa m encontra-se inicialmente em um poço de potencial unidimensional dado por:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq -L/2 \\ 0, & -L/2 < x < L/2 \\ \infty, & x \geq L/2 \end{cases}$$

a) Calcule as autofunções e as autoenergias do estado fundamental e do primeiro estado excitado.

b) Considere agora que o potencial expande-se instantaneamente para:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq -L \\ 0, & -L < x < L \\ \infty, & x \geq L \end{cases}$$

Calcule a probabilidade da partícula realizar uma transição do estado fundamental do primeiro potencial para o primeiro estado excitado do segundo potencial.

c) Calcule a probabilidade da partícula continuar no estado fundamental após a expansão.

d) Considere que a partícula se encontre no estado fundamental após a expansão. Calcule a probabilidade da partícula ser encontrada fora da região $-L/2 < x < L/2$.

Solução:

a) Como o potencial é par, existem soluções pares e ímpares. Independentemente da paridade das soluções, na região fora do poço ($|x| > L/2$) a função de onda é nula. Para $|x| \leq L/2$ vale a equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) = E \psi(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

Sendo:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Cuja solução é:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}(kx) + B \cos(kx)$$

Sendo A e B finitos, claramente.

Com as condições de contorno:

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = A \operatorname{sen}\left(-\frac{kL}{2}\right) + B \cos\left(-\frac{kL}{2}\right) = 0$$

$$\psi\left(\frac{L}{2}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{kL}{2}\right) + B \cos\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$$

Logo, com o sistema acima, que pode ser escrito pela matriz:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(-\frac{kL}{2}\right) & \cos\left(-\frac{kL}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{kL}{2}\right) & \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que possui soluções não triviais se:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{kL}{2}\right)\cos\left(\frac{kL}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{kL}{2}\right)\cos\left(-\frac{kL}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{kL}{2}-\frac{kL}{2}\right)=\operatorname{sen}(-kL)=-\operatorname{sen}(kL)=0\Rightarrow kL=n\pi\Rightarrow k=\frac{n\pi}{L}$$

Com $n\in\mathbb{Z}$.

Logo:

$$\psi\left(\pm\frac{L}{2}\right)=A\operatorname{sen}\left(\pm\frac{n\pi}{2}\right)+B\cos\left(\pm\frac{n\pi}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases} A=0\text{ se }n\text{ é ímpar} \\ B=0\text{ se }n\text{ é par} \end{cases}$$

Logo, para n ímpar:

$$\psi(x)=B\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

E para n par:

$$\psi(x)=A\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Nota: para $n=0$ a função de onda é nula devido à condição de contorno, portanto considere que $n\neq 0$ na normalização das funções de onda que será feita a seguir.

Para n par (com a mudança de variável $w=n\pi x/L$):

$$A^2\int_{-L/2}^{L/2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=1=2A^2\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi/2}\operatorname{sen}^2(w)\mathrm{d}w=2A^2\frac{L}{n\pi}\left(\frac{w}{2}-\frac{\operatorname{sen}(w)\cos(w)}{2}\right)\Big|_0^{n\pi/2}=2A^2\frac{L}{n\pi}\frac{n\pi}{4}=A^2\frac{L}{2}=1\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

Para n ímpar (com a mudança de variável $w=n\pi x/L$):

$$A^2\int_{-L/2}^{L/2}\cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=1=2A^2\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi/2}\cos^2(w)\mathrm{d}w=2A^2\frac{L}{n\pi}\left(\frac{w}{2}+\frac{\operatorname{sen}(w)\cos(w)}{2}\right)\Big|_0^{n\pi/2}=2A^2\frac{L}{n\pi}\frac{n\pi}{4}=A^2\frac{L}{2}=1\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

Logo as autofunções ficam:

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \text{ para }n\text{ par} \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \text{ para }n\text{ ímpar} \end{cases}$$

Cujas autoenergias são dadas por:

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

b) A resolução para esse problema é idêntica a feita no item a), exceto que devemos realizar a troca $L\rightarrow 2L$

Logo as autofunções serão:

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right); \text{ para }n\text{ par} \\ \sqrt{\frac{1}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right); \text{ para }n\text{ ímpar} \end{cases}$$

As autoenergias passaram a ser:

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$$

Vou denotar os estados do potencial antigo por $|n_v\rangle$, e os estados do potencial novo por $|n_n\rangle$ com $n\in\mathbb{N}^*$ nos dois casos.

Logo a probabilidade de obtermos uma transição entre o estado fundamental do potencial antigo ($|1_v\rangle$) e o estado primeiro estado excitado do potencial novo ($|2_n\rangle$) é dada por:

$$P_{|1_v\rangle\rightarrow|2_n\rangle}=|\langle 2_n|1_v\rangle|^2=\langle 2_n|1_v\rangle(\langle 2_n|1_v\rangle)^*$$

Logo só temos que calcular $\langle 2_n|1_v\rangle$ - lembre-se que a função de onda antiga é nula para $|x|>L/2$ e que a função de onda nova é nula para $|x|>L$:

$$\langle 2_n|1_v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\langle 2_n|x\rangle\langle x|1_v\rangle\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=0$$

Por ser a integral de uma função ímpar num intervalo par.

Logo:

$$\mathcal{P}_{|1_v\rangle\rightarrow|2_n\rangle}=0$$

c) Logo a probabilidade de obtermos uma transição entre o estado fundamental do potencial antigo ($|1_v\rangle$) e o estado fundamental do potencial novo ($|1_n\rangle$) é dada por:

$$P_{|1_v\rangle\rightarrow|1_n\rangle} = |\langle 1_n|1_v\rangle|^2 = \langle 1_n|1_v\rangle (\langle 1_n|1_v\rangle)^*$$

Logo só temos que calcular $\langle 1_n|1_v\rangle$ - lembre-se que a função de onda antiga é nula para $|x| > L/2$ e que a função de onda nova é nula para $|x| > L$:

$$\langle 1_n|1_v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle 1_n|x\rangle \langle x|1_v\rangle \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

Realizando a troca de variável $w = \frac{\pi x}{2L}$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(w) \cos(2w) \mathrm{d}w = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{3\textit{sen}(w) + \textit{sen}(3w)}{6} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3\pi}$$

Logo:

$$P_{|1_v\rangle\rightarrow|1_n\rangle} = \frac{64}{9\pi^2} \approx 0,7205 = 72,05\%$$

d) A probabilidade de se encontrar a partícula fora da região $-L/2 < x < L/2$ é dada por - com a mudança de variável $w = \frac{\pi x}{2L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_{-L}^{-L/2} \psi(x)^* \psi(x) \mathrm{d}x + \int_{L/2}^L \psi(x)^* \psi(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \int_{-L}^{-L/2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{L} \int_{L/2}^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2(w) \mathrm{d}w = \frac{2}{\pi} (w + \textit{sen}(w) \cos(w)) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi - 2}{2\pi} \approx 0,1817 = 18,17\% \end{aligned}$$

EUF - 2011/1

Questão 3

Para os itens a), b) e c), admita que no modelo de Bohr para uma partícula de massa m se movendo numa órbita circular de raio r e velocidade v , a força Coulombiana fosse substituída por uma força central do atrativa de intensidade kr (sendo k uma constante). Admita que os postulados de Bohr sejam válidos para este sistema. Para esta situação:

a) Deduza a expressão para os raios r_n das órbitas de Bohr permitidas neste modelo em função do número quântico n e das constantes k , \hbar e m . Diga quais os valores possíveis de n neste caso.

b) Lembrando que para o caso desta força central, a energia potencial correspondente é $V(r) = kr^2/2$, deduza a expressão para as energias E_n das órbitas permitidas em função do número quântico n e das constantes k , \hbar e m . Determine a frequência irradiada quando a partícula faz uma transição de uma órbita para outra adjacente.

c) Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado à partícula em um estado de energia correspondente ao número quântico $n = 2$ em função de k , \hbar e m .

Para o item d), considere um feixe de raios-X, contendo radiação de dois comprimentos de onda distintos, difratados por um cristal cuja distância interplanar é $1nm$ (ou $10^{-9}m$). A figura abaixo apresenta o espectro de intensidade na região de pequenos ângulos (medidos em relação à direção do feixe incidente).

Determine os comprimentos de onda dos raios-X presentes no feixe. Utilize $\pi \approx 3,14152 \approx 3$.

Solução:

Questão 6

Coloca-se uma esfera metálica descarregada, de raio R , numa região do espaço inicialmente preenchida por um campo elétrico dado por $\vec{E}_i = E_0 \hat{k}$. Escolha a origem do sistema de coordenadasno centro da esfera.

a) Esboce as linhas do campo em toda a região do espaço. Justifique o esboço utilizando argumentos físicos.

b) Determine o campo elétrico $\vec{E}_f(\vec{r})$ em toda a região do espaço. Em particular, encontre os campos para os pontos em que $|\vec{r}| \gg R$ e $|\vec{r}| \approx R$ e verifique se eles são consistentes com o esboço do item a).

c) Ache a densidade de carga na esfera. Se $R = 10cm$ e $E_0 = 100N/C$, calcule as cargas acumuladas nos hemisférios norte e sul da esfera.

d) Suponha que a esfera metálica seja substituída por uma esfera dielétrica. Discuta qualitativamente o que ocorre neste caso e esboce as linhas de campo em toda a região do espaço.

Solução:

Questão 8

Considere uma partícula de massa m na presença de um potencial harmônico $V(x) = m\omega^2x^2/2$, onde ω é a frequência onglar do oscilador e x é a coordenada da partícula (este é um problema unidimensional...).

a) São dadas as funções de onda estacionárias correspondentes ao estado fundamental ψ_0 e ao primeiro estado excitado ψ_1 :

$$\psi_0(x) = Ae^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$\psi_1(x) = Bxe^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

nas quais A e B são constantes de normalização. Calcule A e B supondo que as funções de onda sejam reais.

b) Seja E_0 a energia do estado fundamental. Sabemos que $E_1 = E_0 + \hbar\omega$ para o primeiro estado excitado, já que o quantum de energia do oscilador é $\hbar\omega$. Usando a equação de Schrödinger, encontre a energia E_0 .

c) Para os estados estacionários, o valor médio da posição $\langle x \rangle$ é sempre nulo. Construa uma função de onda não estacionária como combinação linear de ψ_0 e ψ_1 com coeficientes reais tais que o valor médio $\langle x \rangle$ seja o maior possível. Em outras palavras, considere o estado normalizado:

$$\psi(x) = \sqrt{1 - \beta^2} \psi_0(x) + \beta \psi_1(x)$$

com $0 \leq \beta^2 \leq 1$ e determine o coeficiente β que maximiza o valor de $\langle x \rangle$.

d) Suponha que a função de onda construída no item anterior descreva o estado do oscilador harmônico no tempo $t = 0$. Escreva a função de onda do estado para um tempo $t > 0$ arbitrário, supondo que nenhuma medição foi feita sobre o sistema. Para esse estado avalie o valor médio da posição $\langle x \rangle(t)$ em função do tempo.

Solução:

a) Como as funções de onda são reais $|\psi_i(x)|^2 = (\psi_i(x))^2$, logo a condição de normalização se torna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_i(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_i(x))^2 dx = 1$$

Logo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_0(x))^2 dx = 1 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar} dx = A^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

Também temos - com $\alpha = m\omega/\hbar$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_1(x))^2 dx = 1 = B^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -B^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) = -B^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{B^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{B^2}{2} \sqrt{\frac{\pi\hbar^3}{m^3\omega^3}} = 1 \Rightarrow B = \sqrt[4]{\frac{4m^3\omega^3}{\pi\hbar^3}}$$

Na resolução dos próximos itens, vamos utilizar A e B por conveniência.

b) A equação de Schrödinger é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_0(x) + V(x) \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x)$$

Logo, ao aplicá-la a $\psi_0(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_0(x) + V(x) \psi_0(x) &= E_0 \psi_0(x) \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} \frac{d}{dx} \left(x e^{-m\omega x^2/2\hbar} \right) + V(x) e^{-m\omega x^2/2\hbar} = E_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} \\ \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} e^{-m\omega x^2/2\hbar} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} e^{-m\omega x^2/2\hbar} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} e^{-m\omega x^2/2\hbar} &= E_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

Que é o resultado esperado se lembrarmos que a energia de um oscilador harmônico quântico é dada por:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

c) Por definição:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\sqrt{1 - \beta^2} \right)^* \psi_0^*(x) + \beta^* \psi_1^*(x) \right] x \left[\sqrt{1 - \beta^2} \psi_0(x) + \beta \psi_1(x) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[|\sqrt{1 - \beta^2}|^2 |\psi_0(x)|^2 + |\beta|^2 |\psi_1(x)|^2 + \beta^* \psi_1^*(x) \sqrt{1 - \beta^2} \psi_0(x) + \beta \psi_1(x) \sqrt{1 - \beta^2}^* \psi_0^*(x) \right] dx \end{aligned}$$

Os termos não mistos são funções ímpares, logo suas respectivas integrais são nulas. Assim:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\beta^* \psi_1^*(x) \sqrt{1 - \beta^2} \psi_0(x) + \beta \psi_1(x) \sqrt{1 - \beta^2}^* \psi_0^*(x) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \beta^* B^* A e^{-\alpha x^2} \sqrt{1 - \beta^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 A^* B \beta e^{-\alpha x^2} \sqrt{1 - \beta^2}^* dx \end{aligned}$$

Como $A = A^*$, $B = B^*$, $\beta = \beta^*$ e $\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \beta^2}^*$, temos:

$$\langle x \rangle = AB(\beta^* \sqrt{1 - \beta^2} + \beta \sqrt{1 - \beta^2}^*) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \beta \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma \beta \sqrt{1 - \beta^2}$$

Com:

$$\gamma = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Para extremizar esse valor basta tomarmos a derivada e igualarmos a zero:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\langle x \rangle}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \left(\gamma \beta \sqrt{1-\beta^2} \right) \Big|_{\beta_0} = \gamma \sqrt{1-\beta^2} - \gamma \beta^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Big|_{\beta_0} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-\beta_0^2} - \beta_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = 0 \Rightarrow 1 - 2\beta_0^2 = 0 \Rightarrow \beta_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Portanto temos como raízes:

$$\beta_{0+} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \beta_{0-} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Agora vamos ver que tipo de extremos as soluções constituem:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\langle x \rangle}{\mathrm{d}\beta^2}\right|_{\beta_{0\pm}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \left(\gamma \sqrt{1-\beta^2} - \gamma \beta^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \Big|_{\beta_{0\pm}} = -\gamma \beta^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2\gamma \beta \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \gamma \beta^3 \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \Big|_{\beta_{0\pm}}$$

Como:

$$-\gamma \beta^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2\gamma \beta \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \gamma \beta^3 \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \Big|_{\beta_{0+}} = -\gamma \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\gamma - \gamma = -\gamma \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) < 0$$

Portanto β_{0+} constitui ponto de máximo.

Como:

$$-\gamma \beta^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2\gamma \beta \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \gamma \beta^3 \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \Big|_{\beta_{0-}} = -\gamma \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\gamma + \gamma = \gamma \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0$$

Portanto β_{0-} constitui ponto de mínimo.

Logo o valor de β que maximiza o valor médio da posição para a função de onda proposta é $\beta = \beta_{0+} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

d) A função de onda de acordo com o item anterior, é dada por:

$$\psi(x) = \sqrt{1-\beta_{0+}^2} \psi_0(x) + \beta_{0+} \psi_1(x)$$

De forma que:

$$\psi(x, t) = \sqrt{1-\beta_{0+}^2} \psi_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar} + \beta_{0+} \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} = \sqrt{1-\beta_{0+}^2} \psi_0(x, t) + \beta_{0+} \psi_1(x, t)$$

Logo, por definição:

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) x \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[|\sqrt{1-\beta^2}|^2 |\psi_0(x, t)|^2 + |\beta|^2 |\psi_1(x, t)|^2 + \beta^* \psi_1^*(x, t) \sqrt{1-\beta^2} \psi_0(x, t) + \beta \psi_1(x, t) \sqrt{1-\beta^2}^* \psi_0^*(x, t) \right] dx$$

Os termos não mistos são funções ímpares, logo suas respectivas integrais são nulas. Assim:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x [\psi_1^*(x, t) \psi_0(x, t) + \psi_1(x, t) \psi_0^*(x, t)] dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[B^* x e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{iE_1 t/\hbar} A e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{-iE_0 t/\hbar} + B x e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{-iE_1 t/\hbar} A^* e^{-m\omega x^2/2\hbar} e^{iE_0 t/\hbar} \right] dx$$

Como $A = A^*$ e $B = B^*$:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \frac{1}{2} AB \left[e^{i(E_1-E_0)t/\hbar} + e^{-i(E_1-E_0)t/\hbar} \right] \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m\omega}{\hbar} \cos \left(\frac{(E_1-E_0)t}{\hbar} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) = -\frac{m\omega}{\hbar} \cos \left(\frac{(E_1-E_0)t}{\hbar} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ &= \frac{m\omega}{\sqrt{2}\hbar} \cos \left(\frac{(E_1-E_0)t}{\hbar} \right) \sqrt{\frac{1}{\alpha^3}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos \left(\frac{(E_1-E_0)t}{\hbar} \right) \end{aligned}$$

Questão 9

Seja uma partícula com momento angular $l = 1$.

a) Na representação onde as matrizes L^2 e L_z são diagonais, obtenha a matriz da compoenete L_x . Lembre que a matriz de L_x deve representar um operador hermitiano. Sugere-se que se utilize os operadores escada L_+ e L_- .

b) Calcule os autovalores de L_x .

c) Encontre o autovetor de L_x com o maior autovalor.

d) Suponha agora que você encontrou o maior autovalor numa medição de L_x . Calcule as probabilidades de medir, respectivamente, $+\hbar$, 0 e $-\hbar$ numa medição posterior de L_z .

Solução:

a) Sabemos que:

$$L_+ = L_x + iL_y; L_- = L_x - iL_y$$

$$\text{Portanto } L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}.$$

Sabemos, também, que:

$$L_+|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle$$

$$L_-|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l, m-1\rangle$$

Logo, como para $l = 1$, os estados possíveis são:

$$|1, 1\rangle ; |1, 0\rangle \text{ e } |1, -1\rangle$$

Dessa forma:

$$L_+|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1+1)}|1, 2\rangle = 0|1, 2\rangle$$

$$L_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 0(0+1)}|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 1\rangle$$

$$L_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - (-1)(-1+1)}|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle$$

Portanto os elementos de matriz não nulos são:

$$\langle 1, 1|L_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle 1, 1|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 1, 0|L_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle 1, 0|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}$$

Sendo todos os outros elementos de matriz nulos, incluindo:

$$\langle 1, 1|L_+|1, 1\rangle = 0\langle 1, 1|1, 2\rangle = 0$$

Dessa forma fazemos a identificação:

$$L_+ \rightarrow \begin{bmatrix} \langle 1, 1|L_+|1, 1\rangle & \langle 1, 1|L_+|1, 0\rangle & \langle 1, 1|L_+|1, -1\rangle \\ \langle 1, 0|L_+|1, 1\rangle & \langle 1, 0|L_+|1, 0\rangle & \langle 1, 0|L_+|1, -1\rangle \\ \langle 1, -1|L_+|1, 1\rangle & \langle 1, -1|L_+|1, 0\rangle & \langle 1, -1|L_+|1, -1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente:

$$L_-|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle$$

$$L_-|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 0(0-1)}|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, -1\rangle$$

$$L_-|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - (-1)(-1-1)}|1, -2\rangle = 0|1, -2\rangle$$

Portanto os elementos de matriz não nulos são:

$$\langle 1, 0|L_-|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle 1, 0|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 1, -1|L_-|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle 1, -1|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}$$

Sendo todos os outros elementos de matriz nulos, incluindo:

$$\langle 1, -1|L_-|1, -1\rangle = 0\langle 1, -1|1, -2\rangle = 0$$

Dessa forma fazemos a identificação:

$$L_- \rightarrow \begin{bmatrix} \langle 1, 1|L_-|1, 1\rangle & \langle 1, 1|L_-|1, 0\rangle & \langle 1, 1|L_-|1, -1\rangle \\ \langle 1, 0|L_-|1, 1\rangle & \langle 1, 0|L_-|1, 0\rangle & \langle 1, 0|L_-|1, -1\rangle \\ \langle 1, -1|L_-|1, 1\rangle & \langle 1, -1|L_-|1, 0\rangle & \langle 1, -1|L_-|1, -1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que é claramente hermitiano.

Nota: Como $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$, e sabemos as propriedades dos operadores L_+ e L_- , ou seja, sabemos que a única ação que os operadores fazem sobre a função de onda na base $|l, m\rangle$ são (respectivamente) de 'adicionar' ao número quântico m uma unidade e de 'subtrair' ao número quântico m uma unidade; poder-se-ia utilizar tal fato para notar que ao calcular a matriz de L_x só podemos obter termos nas diagonais imediatamente acima e imediatamente abaixo da diagonal principal da matriz, diminuindo o número de elementos de matriz necessários a se calcular. É possível utilizar tal argumento para justificar o cálculo de apenas elementos não-nulos de L_+ e de L_- .

b) Para calcular os autovalores de L_x basta efetuar:

$$L_x|l, m\rangle = \lambda|l, m\rangle$$

Obteremos três autovalores que batizaremos de λ_+ , λ_0 e λ_- .

Logo:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{pmatrix} = 0 = (-\lambda)^3 + \lambda \hbar^2 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda \hbar^2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - \hbar)(\lambda + \hbar) = 0$$

Portanto os autovalores dessa matriz são:

$$\lambda_+ = \hbar ; \lambda_0 = 0 ; \lambda_- = -\hbar$$

c) O maior autovalor de L_x é $\lambda_+ = \hbar$. Para calcular o autovetor correspondente a este autovalor, basta notar que, por definição, autovetor é um vetor que segue a propriedade:

$$L_x|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

Sic:

$$L_x|+_x\rangle = \lambda_+|+_x\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\hbar \begin{bmatrix} \frac{b}{\sqrt{2}} \\ \frac{a+c}{\sqrt{2}} \\ \frac{b}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{b}{\sqrt{2}} = c \therefore \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{\sqrt{2}} \\ b \\ \frac{b}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Como sabemos que a função de onda é normalizada, ou seja, $\langle+_x|+_x\rangle = 1$ temos que:

$$\begin{bmatrix} \frac{b^*}{\sqrt{2}} & b^* & \frac{b^*}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b}{\sqrt{2}} \\ b \\ \frac{b}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = |b|^2 \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right) = 2|b|^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}$$

Com φ sendo uma fase arbitrária, que nesse caso pode ser escolhida de forma que o número b seja real.

Assim o autovetor será:

$$|+_x\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d) Conforme dito no enunciado, não há evolução temporal, logo, temos inicialmente:

$$|+_x\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sabemos que, L_z é representado por uma matriz diagonal, cujos autovalores são \hbar , 0 , $-\hbar$ e cujos respectivos autovetores são:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv |+\rangle ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv |0\rangle ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv |-\rangle$$

Assim para calcular a probabilidade de se obter, numa determinada medição na direção z , o valor \hbar , devemos efetuar:

$$\mathcal{P}_+ = |\langle+|+_x\rangle|^2 = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Assim para calcular a probabilidade de se obter, numa determinada medição na direção z , o valor 0 , devemos efetuar:

$$\mathcal{P}_0 = |\langle 0|+_x\rangle|^2 = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 0,50 = 50\%$$

Assim para calcular a probabilidade de se obter, numa determinada medição na direção z , o valor $-\hbar$, devemos efetuar:

$$\mathcal{P}_- = |\langle-|+_x\rangle|^2 = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Note que, conforme esperado:

$$\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_- = 1$$

Observação adicional: tanto $|+_x\rangle$ quanto $|+\rangle$, $|0\rangle$ e $|-\rangle$ podem ter fases arbitrárias, que não vão alterar os resultados obtidos mesmo se levadas em conta. Lembre-se que

as fases de $|+\rangle$, $|0\rangle$ e $|-\rangle$ devem ser as mesmas, pois nossa definição de L_z não afeta as fases.

Questão 10

Um mol de um gás ideal monoatômico se encontra a temperatura T e ocupa um volume V . A energia interna por mol de um gás ideal é dada por $u = c_V T$, com c_V sendo o calor específico molar, que é considerado constante. Responda as questões abaixo:

a) Considere a situação na qual o gás se encontra a uma temperatura T e sofre uma expansão quase-estática reversível na qual o seu volume passa de V para $2V$. Calcule o trabalho realizado pelo gás durante a sua expansão.

b) Ainda com relação ao processo físico descrito no item a), determine o calor trocado pelo gás com o reservatório térmico.

c) Determine a variação de entropia do gás e do reservatório térmico no processo descrito no item a).

d) Considere agora a situação em que o gás está isolado e sofre uma expansão livre na qual o seu volume passa de V para $2V$. Determine as variações de entropia do gás e do universo durante o processo de expansão livre.

Solução:

a) Sabemos que para o gás ideal, valem as expressões:

$$u = c_V T; PV = NkT \Rightarrow P = \frac{NkT}{V}; \delta Q = \delta W + dU; \text{ sendo, para processos reversíveis: } \delta W = PdV$$

Como o gás está em constante contato com o reservatório, sua temperatura é constante durante todo processo, assim, sendo n o número de mols do gás:

$$dT = 0 \Rightarrow dU = 0 \text{ já que } U = nc_V T = C_V T \Rightarrow dU = C_V dT$$

Portanto, neste processo:

$$\delta Q = \delta W = PdV = \frac{NkT}{V} dV$$

Logo:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{V \rightarrow 2V} = \int_A^B \delta W = \int_V^{2V} \frac{NkT}{V} dV = NkT \ln(2)$$

b) Como $\delta Q = \delta W$, temos que:

$$Q_{A \rightarrow B} = \int_A^B \delta Q = \int_A^B \delta W = \int_V^{2V} \frac{NkT}{V} dV = NkT \ln(2) \therefore Q_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}$$

c) Sabemos que vale a relação, já que T é constante:

$$TdS = \delta Q \Rightarrow \Delta S_g = \int_{S_A}^{S_B} dS = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B \delta Q = \frac{Q_{A \rightarrow B}}{T} = \frac{W_{A \rightarrow B}}{T} = Nk \ln(2)$$

Esta é a variação de entropia do gás.

Para o reservatório, se chamarmos de $Q'_{A' \rightarrow B'}$ o calor cedido pelo reservatório, temos que:

$$Q_{A \rightarrow B} + Q'_{A' \rightarrow B'} = 0 \Rightarrow -Q_{A \rightarrow B} = Q'_{A' \rightarrow B'}$$

Logo, a variação de entropia do reservatório é:

$$\Delta S_r = \int_{S'_A}^{S'_B} dS = \int_{A'}^{B'} \frac{\delta Q'}{T} = \frac{Q'_{A' \rightarrow B'}}{T} = -\frac{Q_{A \rightarrow B}}{T} = -\frac{W_{A \rightarrow B}}{T} = -Nk \ln(2)$$

Portanto, conforme esperado, para tal processo:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_g + \Delta S_r = 0$$

Já que o processo é reversível - em processos reversíveis a entropia total, também chamada de entropia do Universo, é nula.

d) Primeiro devo fazer um aviso: **cuidado!**, nesta questão não podemos utilizar que $\delta Q = \delta W + dU$ para encontrar a entropia, pois o processo **não** é reversível - a primeira lei sempre vale, mas o problema é que $TdS \neq \delta Q$. Seria necessário, nesse caso levar em conta a entropia decorrente do processo irreversível para a igualdade se manter; como no exercício não cita-se nada referente a isso, vamos proceder de outra maneira.

A expansão livre é, por definição, feita num recipiente no qual parte deste 'contém' vácuo. Como não há força contra a qual atuar, o trabalho realizado pelo gás é nulo - já que, por definição, o trabalho é dado pelo produto da força pelo deslocamento, logo $\delta W = 0$. Como nesse caso se realiza a expansão livre num recipiente isolado, $\delta Q = 0$.

Devido à conservação da energia, a energia interna não pode variar, assim $dU = 0 \Rightarrow dT = 0$.

Entretanto, como S é função de estado, que só depende dos estados inicial e final do sistema - sendo que, neste caso, ambos processos, tanto o do item a) quanto este, possuem estados termodinâmicos iniciais e finais exatamente iguais, já que T é fixo e os volumes inicial e final são os mesmos em ambos casos - podemos usar um processo reversível para calculá-la. Logo, temos que:

$$\Delta S_{exp\,livre\,g} = \Delta S_g = \int_{S_A}^{S_B} dS = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B \delta Q = \frac{Q_{A \rightarrow B}}{T} = \frac{W_{A \rightarrow B}}{T} = Nk \ln(2)$$

Como o sistema está isolado: $\Delta S_r = 0$

Logo:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_r + \Delta S_g = Nk \ln(2)$$

Que não é nulo, conforme esperado para processos irreversíveis.

EUF - 2011/2

Questão 8

Seja a função de onda de uma partícula em uma dimensão dada por $\Psi(x,t)$. A densidade de probabilidade $\rho(x,t)$ é definida por $\rho(x,t) \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$. O valor de $\rho(x,t)$ pode mudar no tempo devido ao fluxo de probabilidade saindo ou entrando na região, que se pode expressar como uma equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

onde $j(x,t)$ é a densidade de corrente de probabilidade.

a) Dada a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi$$

escreva a derivada temporal de $\rho(x,t)$ em termos de $\Psi(x,t)$ e $\Psi^*(x,t)$ e suas derivadas espaciais.

b) Obtenha a forma explícita de $j(x,t)$.

c) Ache a equação relacionando a derivada do valor esperado da posição, $\frac{d\langle x \rangle}{dt}$, com o valor esperado do momento, $\langle p \rangle$. Dica: use integração por partes e assuma que as funções Ψ e sua derivada, $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, vão ao infinito mais rápido do que $\frac{1}{x}$.

Solução:

Antes de começar, vamos tomar nota de algumas coisas:

$$\rho(x,t) \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$

E:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)] = \frac{\partial \Psi^*(x,t)}{\partial t} \Psi(x,t) + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \Psi^*(x,t); i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi^*$$

Também é bom já saber que:

$$\langle x|P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Logo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \langle x|V = \langle x|\frac{P^2}{2m} + \langle x|V = \langle x|H \Rightarrow H = \frac{P^2}{2m} + V$$

a) Das expressões acima segue que:

$$\begin{cases} i\hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi \\ -i\hbar \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \Psi \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi^* \end{cases}$$

Como já explicitado (exceto pelo fator $i\hbar$):

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = i\hbar \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi^* \right]$$

Logo:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Psi \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right) \Psi^* + \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi = \Psi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)$$

b) Notando que:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = -\frac{\partial j}{\partial x} \therefore j(x,t) = \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

c) Por definição:

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} x \Psi dx \right) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \right] dx$$

Fazendo integração por partes, com:

$$U(x) = x \Rightarrow U'(x) = 1$$

$$V'(x) = \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} \Rightarrow V(x) = j(x,t) = \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

Daí:

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx - \left[x \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

Como o último termo da integração por partes é da ordem $\propto 1/x$ (já que $x \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \propto x \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ e o mesmo vale para o complexo conjugado), sua contribuição é nula.

Daí sobra apenas:

$$\frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx = \frac{1}{2m} \left(\langle P \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} dx \right)$$

Vamos agora efetuar outra integração por partes, no segundo termo:

$$W(x) = \Psi \Rightarrow W'(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$Z'(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Rightarrow Z(x) = \frac{\hbar}{i} \Psi^*$$

Daí, lembrando que termos do tipo $\Psi \Psi^* \propto \frac{1}{x^2}$:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx - \frac{\hbar}{i} \Psi \Psi^* \Big|_{-\infty}^{\infty} = \langle P \rangle$$

já que o segundo termo da integral por partes imediatamente acima é nulo.

Logo:

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = \frac{1}{2m} \left(\langle P \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} dx \right) = \frac{\langle P \rangle}{m}$$

Conforme a física clássica!

Podemos fazer o item c) usando o teorema de Ehrenfest, que relaciona a derivada temporal do valor esperado de um operador quântico A com o comutador desse operador com relação ao hamiltoniano do sistema:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Se o operador A é independente do tempo, o último termo é nulo.

Aplicando o teorema de Ehrenfest para o operador X , temos:

$$\frac{d}{dt} \langle X \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [X, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial t} \right\rangle$$

Já que o segundo termo é nulo (pois X é independente do tempo), e, como já explicitado anteriormente, $H = \frac{P^2}{2m} + V$ temos:

$$\frac{d}{dt} \langle X \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [X, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[X, \frac{P^2}{2m} + V \right] \right\rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[X, \frac{P^2}{2m} \right] \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [X, V] \rangle$$

Novamente, o segundo termo é nulo - afinal o potencial depende apenas de x , de acordo com o enunciado. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle X \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[X, \frac{P^2}{2m} \right] \right\rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle [X, P^2] \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle X P^2 - P^2 X \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle X P P - P P X \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle (i\hbar + P X) P - P P X \rangle \\ &= \frac{1}{2im\hbar} \langle (i\hbar + P X) P - P P X \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle i\hbar P + P(X P - P X) \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle i\hbar P + P[X, P] \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle i\hbar P + P i\hbar \rangle = \frac{1}{2im\hbar} \langle 2i\hbar P \rangle = \frac{\langle P \rangle}{m} \end{aligned}$$

Já que $[X, P] = i\hbar = X P - P X \Rightarrow X P = i\hbar + P X$. Note que o resultado coincide com o obtido anteriormente.

Questão 9

Seja o seguinte hamiltoniano representativo de um sistema físico:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$$

Os autoestados desse hamiltoniano são denominados $|n\rangle$, são não degenerados e satisfazem a relação $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, onde n é um número inteiro e $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

a) Assuma que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem à relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de \hat{N} , usando as relações de comutação. Determine os autovalores correspondentes a estes estados, n' e n'' , respectivamente.

b) Dado que todos estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre estes os estados $\hat{a}|n\rangle$ e os estados $|n'\rangle$ encontrados no item a).

Dica: lembre que todos os estados são normalizados. Assuma que o valor esperado do hamiltoniano em quaisqueis de seus autoestados seja positivo, $\langle H \rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$.

O que se pode concluir sobre o número de estados $|n\rangle$: ele é finito ou infinito?

c) Assuma agora que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem à relação de anticomutação $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de \hat{N} , usando as relações de anticomutação, e determine os valores de n' e n'' correspondentes a estes estados. Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e esses estados $|n'\rangle$. Dica: lembre que todos estados são normalizados.

d) Assumindo, como no item c), que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem à relação de anticomutação, que o valor esperado do hamiltoniano em quaisqueis de seus autoestados seja positivo, $\langle H \rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$, isto implica que o número de estados $|n\rangle$ é finito. Quais são estes únicos estados $|n\rangle$ não nulos nesse caso?

Solução:

a) Como $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ e:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1$$

Logo:

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{N}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = n\hat{a}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

Portanto $\hat{a}|n\rangle$ é autoestado de \hat{N} , com autovalor $n' = (n-1)$.

Como:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

Logo:

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{N}|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle = n\hat{a}^\dagger|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

Portanto $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ é autoestado de \hat{N} , com autovalor $n'' = (n+1)$.

b) Conforme o enunciado:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = c_+|n'\rangle \Rightarrow (c_+|n'\rangle)^\dagger = c_+^*|n'\rangle^\dagger = (\hat{a}^\dagger|n\rangle)^\dagger = \langle n|\hat{a}$$

Logo:

$$|c_+|^2 = |c_+|^2 \langle n'|n' \rangle = \langle n'|c_+^*c_+|n' \rangle = (c_+^*|n'\rangle^\dagger)c_+|n' \rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n \rangle = \langle n|1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}|n \rangle = \langle n|1 + \hat{N}|n \rangle = (n+1) \Rightarrow c_+ = \sqrt{n+1}e^{i\varphi}$$

Se escolhermos uma fase nula:

$$c_+ = \sqrt{n+1}$$

Note que como $|c_+|^2 \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 0 \Rightarrow n \geq -1$.

Também temos:

$$\hat{a}|n\rangle = c_-|n''\rangle \Rightarrow (c_-|n''\rangle)^\dagger = c_-^*|n''\rangle^\dagger = (\hat{a}|n\rangle)^\dagger = \langle n|\hat{a}^\dagger$$

Logo:

$$|c_-|^2 = |c_-|^2 \langle n''|n'' \rangle = \langle n''|c_-^*c_-|n'' \rangle = (c_-^*|n''\rangle^\dagger)c_-|n'' \rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n \rangle = \langle n|\hat{N}|n \rangle = n \Rightarrow c_- = \sqrt{n}e^{i\varphi}$$

Se escolhermos uma fase nula:

$$c_- = \sqrt{n}$$

Note que como $|c_-|^2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$.

Como n é inteiro e não há nenhum limite superior para n temos infinitos estados (um para cada $n \in \mathbb{N}$).

OBSERVAÇÃO: Obtivemos até agora os seguintes resultados:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n'\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n''\rangle$$

Não sabemos qual é o valor de n' ou de n'' .

Mas sabemos que:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle = \sqrt{n}\hat{a}^\dagger|n''\rangle = \sqrt{(n''+1)n}|n'''\rangle \Rightarrow n''' = n; n = \sqrt{(n''+1)n} \Rightarrow n'' = n-1$$

Logo:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})|n\rangle = (n+1)|n\rangle = \sqrt{n+1}\hat{a}|n'\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n'}|n'''\rangle \Rightarrow n'''' = n; \sqrt{n+1}\sqrt{n'} = n+1 \Rightarrow n' = n+1$$

Portanto:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Que são os chamados operadores de criação e destruição (ou operadores escada).

Note que, conforme dito no enunciado do exercício:

$$\hat{a}|0\rangle = \sqrt{0}|0-1\rangle = 0$$

Note também que, conforme o enunciado:

$$\langle H \rangle = \langle n | \hat{H} | n \rangle = \hbar\omega_0 \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) | n \rangle = \hbar\omega_0 \langle n | (n+1/2) | n \rangle = \hbar\omega_0 (n+1/2) \geq 0$$

Já que $n \geq 0$.

c) Conforme o enunciado $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1 = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Logo:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 - \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 - \hat{a}\hat{a}^\dagger$$

Vamos mostrar que, nesse caso, $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ e $\hat{a}|n\rangle$ são autoestados de \hat{N} :

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger(1 - \hat{a}^\dagger\hat{a})|n\rangle = \hat{a}^\dagger(1 - \hat{N})|n\rangle = (1 - n)\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (1 - \hat{a}\hat{a}^\dagger)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}|n\rangle - n\hat{a}|n\rangle = (1 - n)\hat{a}|n\rangle$$

Logo $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ e $\hat{a}|n\rangle$ são autoestados de \hat{N} , com $n' = n'' = (1 - n)$.

Conforme o enunciado:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = c_1|n'\rangle \Rightarrow c_1^*|n'\rangle^\dagger = \langle n|\hat{a}$$

Logo:

$$|c_1|^2 = |c_1|^2 \langle n'|n'\rangle = \langle n'|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n'\rangle = \langle n'|1 - \hat{a}^\dagger\hat{a}|n'\rangle = \langle n'|1 - \hat{N}|n'\rangle = (1 - n) \Rightarrow c_1 = \sqrt{1 - n}$$

Também temos:

$$\hat{a}|n\rangle = c_2|n'\rangle \Rightarrow c_2^*|n'\rangle^\dagger = \langle n|\hat{a}^\dagger$$

Logo:

$$|c_2|^2 = |c_2|^2 \langle n'|n'\rangle = \langle n'|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n'\rangle = \langle n'|\hat{N}|n'\rangle = n \Rightarrow c_2 = \sqrt{n}$$

d) Note que como $|c_1|^2 \geq 0 \Rightarrow (1 - n) \geq 0 \Rightarrow n \leq 1$.

Note que como $|c_2|^2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$.

Portanto $n \in \mathbb{N} | n = 0; n = 1$.

OBSERVAÇÃO: Como nota final, sabemos apenas que:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = c_1|n'\rangle = \sqrt{1 - n}|n'\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = c_2|n''\rangle = \sqrt{n}|n''\rangle$$

Mas:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle = \sqrt{n}\hat{a}^\dagger|n''\rangle = \sqrt{n}\sqrt{1 - n''}|n'''\rangle \Rightarrow n''' = n; 1 - n'' = n \Rightarrow n'' = 1 - n$$

E:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (1 - \hat{a}^\dagger\hat{a})|n\rangle = (1 - n)|n\rangle = \sqrt{1 - n}\hat{a}|n'\rangle = \sqrt{1 - n}\sqrt{n'}|n''''\rangle \Rightarrow n'''' = n; 1 - n' = n \Rightarrow n' = 1 - n$$

Logo:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{1 - n}|1 - n\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|1 - n\rangle$$

Veja que, conforme o enunciado:

$$\langle H \rangle = \langle n | \hat{H} | n \rangle = \hbar\omega_0 \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) | n \rangle = \hbar\omega_0 \langle n | (n+1/2) | n \rangle = \hbar\omega_0 (n+1/2) \geq 0$$

Já que $n \geq 0$.

Como $n = 0$ ou $n = 1$, temos que:

$$\hat{a}^\dagger|1\rangle = 0|0\rangle; \hat{a}^\dagger|0\rangle = 1|1\rangle; \hat{a}|1\rangle = 1|0\rangle; \hat{a}|0\rangle = 0|1\rangle$$

Questão 10

A lei de Stefan-Boltzmann diz que a densidade de energia total do campo eletromagnético dentro de uma cavidade em equilíbrio térmico é dado por:

$$u(T) = aT^4$$

onde a é uma constante.

a) Podemos derivar a lei de Stefan-Boltzmann usando argumentos termodinâmicos. Sabendo que, em equilíbrio termoidinâmico, a densidade de energia da radiação independe do material que forma as paredes, podemos concluir que qualquer variável extensiva da radiação em uma cavidade deverá ser proporcional ao volume da cavidade e depender apenas da temperatura. Em particular, a energia interna e a entropia da radiação serão $U = u(T)V$ e $S = s(T)V$, respectivamente. Podemos usar o eletromagnetismo clássico para calcular a pressão de radiação nas paredes da cavidade. Ela tem a forma de $P = \frac{u(T)}{3}$. Usando essas informações e a primeira da termodinâmica, demonstre lei de Stefan-Boltzmann.

b) Agora obtenha esse resultado usando física estatística, assumindo que a radiação eletromagnética é um gás de fótons.

1. Calcule a função de partição, Z , e mostre que o número médio de fótons com energia ϵ_j é e $\beta = \frac{1}{k_B T}$:

$$\bar{n}_j = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \epsilon_j} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1}$$

2. Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann. Você pode usar que o número total de fótons por unidade de volume e frequência entre $[\omega, \omega + d\omega]$ é dado por:

$$g(\omega) d\omega = \frac{\kappa \omega^2 d\omega}{e^{\beta \epsilon_\omega} - 1}$$

com κ uma constante de unidade apropriada e $\epsilon_\omega = \hbar \omega$ é a energia de um fóton.

Solução:

a) Pela primeira lei da termodinâmica - supondo um processo reversível - e como $U = Vu(T)$; $P = \frac{u(T)}{3}$:

$$\delta Q = T dS = dU + P dV = u dV + V du + \frac{u}{3} dV = \frac{4u}{3} dV + V du$$

Como u é só função de T :

$$du = \frac{du}{dT} dT$$

Logo:

$$dS = \frac{4u}{3T} dV + \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT$$

Portanto:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4u}{3T}; \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT}$$

Através das relações de Maxwell, obtemos a seguinte igualdade:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \right) = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} \right) \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3T} \frac{du}{dT} - \frac{4u}{3T^2} \Rightarrow \frac{1}{3T} \frac{du}{dT} = \frac{4u}{3T^2} \Rightarrow \frac{du}{dT} = \frac{4u}{T} \Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

Logo:

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = 4 \int \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln u = 4 \ln T + \ln a = \ln(aT^4) \Rightarrow u = aT^4$$

Conforme o enunciado.

b)

2. Apenas para fazer uma observação, essa questão é muito parecida com uma questão mais antiga do EUF - a da prova de 2009/2 (http://nerdyard.com/wiki/Solu%C3%A7%C3%B5es_de_Exerc%C3%ADcios:_EUF#Quest.C3.A3o_4_2l). Na questão mais antiga, as constantes aparecem todas no problema e κ é um valor numérico dado - naquela ocasião $\kappa = \frac{8\pi h}{c^3} Js^4/m^3$. No fim da questão mais antiga não se obtém a lei de Stefan-Boltzmann exatamente por causa da constante - Stefan-Boltzmann se refere à distribuição de potência de radiação numa certa área e não à distribuição de energia num certo volume (densidade de energia), como ocorre ao fim da questão da prova 2009/2.

Logo, existem duas maneiras de se resolver a questão e abaixo vem a primeira.

Primeiro, devemos ter ciência que vamos escolher a unidade de uma segunda constante α de forma tal que nosso resultado tenha unidades compatíveis com uma potência por área (W/m^2).

Logo, como possuímos uma 'densidade de fótons' podemos multiplicar o número de fótons num volume pela energia de cada um deles e obter uma densidade de energia. Vamos multiplicar tudo por α , apenas para compatibilizar as unidades - portanto a unidade de α deve ser de velocidade (m/s):

$$u = \alpha \int_0^\infty \hbar \omega g(\omega) d\omega = \alpha \kappa \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Usando a mudança de variável:

$$\omega = \frac{x}{\beta \hbar} \Rightarrow \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}x}{\beta \hbar}$$

Logo:

$$u = \frac{\alpha \kappa}{\beta^4 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x \, ; \, \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

Assim:

$$u = \frac{\alpha \kappa \pi^4}{15 \beta^4 \hbar^3} = \frac{\alpha \kappa (\pi k T)^4}{15 \hbar^3} = \sigma T^4$$

Se soubéssemos os valores de $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 \hbar^3}$ e $\kappa = \frac{8\pi}{c^3}$, poderíamos encontrar o valor de alpha:

$$\sigma = \frac{\alpha \kappa (\pi k)^4}{15 \hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 \hbar^3} \Rightarrow \alpha \kappa = \frac{1}{(2\pi c)^2} \Rightarrow \alpha = 2^5 \pi^3 c = 32 \pi^3 c$$

Logo a unidade de α é de velocidade, como já havíamos dito.

EUF 2012/1

Questão 1

Duas esferas ocas, ambas de massa M e raio R , que estão girando em torno do centro de massa (CM) do sistema com período T_0 são mantidas a uma distância $d_0 = 8R$ uma da outra por um fio ideal que passa pelos respectivos centros, conforme ilustra a figura. Num dado instante um motor, colocado dentro de uma das esferas, começa a enrolar o fio lentamente, aproximando as duas esferas. Considere que o momento de inércia do motor seja desprezível frente o das esferas. Desconsidere os efeitos da gravidade e expresse todos os resultados em termos de M , R e T_0 . Dado: o momento de inércia da casca esférica em relação a um eixo que passa pelo seu centro é $I_0 = 2MR^2/3$.

a) Determine o módulo do momento angular desse sistema em relação ao seu centro de massa, antes do motor ser ligado.

b) Calcule a velocidade angular de rotação, ω_f , no instante em que a esfera encosta-se à outra.

c) Calcule a variação de energia cinética do sistema até esse instante.

d) Qual foi o trabalho realizado pelo motor para fazer com que as esferas encostem?

Solução:

a) Como (claramente) o centro de massa será exatamente na metade da distância entre as massas, temos que o momento de inércia de cada uma das esferas em relação ao centro de massa será, pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I = M \left(\frac{d_0}{2} \right)^2 + I_0 = 8MR^2 + \frac{2MR^2}{3} = \frac{26MR^2}{3} \Rightarrow I_{tot} = 2I$$

Lembrando que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

Logo temos um momento angular total de:

$$L = 2I\omega = \frac{4\pi I}{T_0} = \frac{104\pi MR^2}{3T_0}$$

b) Como o motor não dá momento angular para as esferas (já que tal motor só atua na direção do centro de massa), o momento angular se conserva, de forma que:

$$L_0 = \frac{104\pi MR^2}{3T_0} = \frac{4\pi I}{T_0} = \frac{4\pi I_{novo}}{T} \Rightarrow T = \frac{I_{novo}T_0}{I}$$

O centro de massa será exatamente na metade da distância entre as massas, temos que o 'momento de inércia novo' de cada uma das esferas em relação ao centro de massa será, pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I_{novo} = MR^2 + I_0 = MR^2 + \frac{2MR^2}{3} = \frac{5MR^2}{3} \Rightarrow I_{totnovo} = 2I_{novo}$$

De forma que:

$$T = \frac{I_{novo}T_0}{I} = \frac{5}{26}T_0 \Rightarrow \omega_f = \frac{2\pi}{T} = \frac{52\pi}{5T_0}$$

Questão 4

Considere um elétron que se encontra confinado dentro de um poço de potencial unidimensional $V(x)$ dado por:

$$V(x) = \begin{cases} \infty; & x < 0 \\ 0; & 0 \leq x \leq d \\ \infty; & x > d \end{cases}$$

a) Escreva a equação de Schrödinger para este elétron e as condições de contorno que devem ser satisfeitas pelas funções de onda.

b) Obtenha as funções de onda normalizadas e determine os valores das energias permitidas para este elétron.

Admita agora que este elétron se encontre no estado quântico cuja função de onda dentro do poço é dada por:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{d}\right)$$

c) Determine o número quântico n do estado ocupado por este elétron e seu comprimento de onda nesse estado.

d) Determine a probabilidade de encontrar este elétron entre $x = 0$ e $x = d/6$.

Solução:

a) Como o potencial é infinito fora da região confinada (sendo a região confinada definida por x tal que $x \in [0, d]$), não há função de onda. Logo:

$$\psi(x) = 0 \text{ para } x < 0 \text{ e para } x > d$$

Para a região confinada ($x \in [0, d]$) vale a 'equação de Schrödinger independente do tempo':

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

Já vou definir k para destacar a semelhança dessa equação com a equação do oscilador harmônico:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0; \text{ com } k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Sendo que $\psi(x)$ deve cumprir às condições de contorno $\psi(0) = 0$ e $\psi(d) = 0$ nessa região.

b) Ansatz:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}(kx)$$

De fato:

$$-k^2 A \operatorname{sen}(kx) + k^2 A \operatorname{sen}(kx) = 0$$

Note que $\psi(0) = A \operatorname{sen}(k0) = 0$, cumprindo a primeira condição de contorno. Para cumprir a segunda condição de contorno:

$$\psi(d) = A \operatorname{sen}(kd) = 0$$

os valores de k devem ser tais que:

$$k = \frac{n\pi}{d} \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

Assim:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

Aplicando a condição de normalização:

$$\int_0^d |\psi(x)|^2 dx = 1 = \int_0^d A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{d}\right) dx = A^2 \left(\frac{x}{2} \Big|_0^d - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{d}\right)}{\frac{4n\pi}{d}} \Big|_0^d \right) = A^2 \frac{d}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{d}}$$

Logo:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

$$\text{Sendo } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2md^2}$$

c) Como:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Vemos que:

$$\lambda = \frac{2\pi d}{3\pi} = \frac{2d}{3}$$

Por inspeção, vê-se que $n = 3$.

d) Batizando essa probabilidade de $P_{0-d/6}$, temos:

$$P_{0-d/6}=\int_0^{d/6}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{d}\int_0^{d/6}sen^2\left(\frac{3\pi x}{d}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x=\frac{2}{d}\left(\frac{x}{2}\Big|_0^{d/6}-\frac{sen\left(\frac{6\pi x}{d}\right)}{\frac{12\pi}{d}}\Big|_0^{d/6}\right)=\frac{2}{d}\left(\frac{d}{6}-0\right)=\frac{1}{3}\approx 0,333\%$$

Formulário

Toda prova vem com um formulário. É *muito* importante consultá-lo, pois ele é o melhor caminho - caso você não se lembre de tudo - de abreviar as contas. Vou escrever o formulário da forma na qual ele se encontra na prova - exceto pelas observações entre chaves.

Constantes Físicas

Velocidade da luz no vácuo:	$c \approx 3,0 \cdot 10^8 \, m/s$
Constante de Planck:	$h \approx 6,63 \cdot 10^{-34} \, J \, s \approx 4,14 \cdot 10^{-15} \, eV \, s$
'h c':	$hc \approx 1240 eV \, nm$
Constante de Wien:	$W \approx 2,898 \cdot 10^{-3} \, K \, m$
Permeabilidade Magnética do vácuo:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, N/A^2 \approx 12,6 \cdot 10^{-7} \, N/A^2$
Permissividade Elétrica do vácuo:	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \, F/m$
Constante Elétrica:	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,89 \cdot 10^9 \, N \, m^2/C^2$
Constante Gravitacional:	$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \, N \, m^2/Kg^2$
Carga Elétrica:	$e \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \, C$
Massa do Elétron:	$m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \, Kg \approx 511 \, KeV/c^2$
Comprimento de Onda Compton:	$\lambda_C \approx 2,43 \cdot 10^{-12} \, m$
Massa do Próton:	$m_p \approx 1,673 \cdot 10^{-27} \, Kg \approx 938 \, MeV/c^2$
Massa do Nêutron:	$m_n \approx 1,675 \cdot 10^{-27} \, Kg \approx 940 \, MeV/c^2$
Massa do Deuteron:	$m_d \approx 3,344 \cdot 10^{-27} \, Kg \approx 1876 \, MeV/c^2$
Massa da Partícula α :	$m_\alpha \approx 6,645 \cdot 10^{-27} \, Kg \approx 3727 \, MeV/c^2$
Constante de Rydberg:	$R_H \approx 1,10 \cdot 10^7 \, m^{-1}$
'Rhc':	$R_H hc \approx 13,6 \, eV$
Raio de Bohr:	$a_0 \approx 5,29 \cdot 10^{-11} \, m$
Constante de Avogrado:	$N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \, mol^{-1}$
Constante de Boltzmann:	$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \, J/K \approx 8,62 \cdot 10^{-5} \, eV/K$
Constante Molar dos Gases:	$R \approx 8,31 \cdot \, J \, mol^{-1} \, K^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann:	$\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \, W \, m^{-2} \, K^{-4}$
Raio do Sol:	$R_\odot \approx 6,96 \cdot 10^8 \, m$
Massa do Sol:	$m_\odot \approx 1,99 \cdot 10^{30} \, Kg$
Raio da Terra:	$R_\oplus \approx 6,37 \cdot 10^6 \, m$
Massa da Terra:	$m_\oplus \approx 5,98 \cdot 10^{24} \, Kg$
Distância Sol-Terra:	$1 \, UA \approx 1,50 \cdot 10^{11} \, m$
Conversão de Joule para erg:	$1 \, J = 10^7 \, erg$
Conversão de elétron-volts para Joule:	$1 \, eV \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \, J$

Constantes Numéricas

$\pi \approx 3,142$	$\ln(3) \approx 1,099$
$e \approx 2,718$	$\ln(5) \approx 1,609$
$1/e \approx 0,368$	$\ln(10) \approx 2,303$
$\log_{10}e \approx 0,434$	$\cos(30^\circ) = \cos(\pi/6) = \sqrt{(3)}/2 \approx 0,866$
$\ln(2) \approx 0,693$	$\sen(30^\circ) = \sen(\pi/6) = 1/2$

Mecânica Clássica

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$	$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$	$T_R = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j$	$I = \int r^2 \mathrm{d}m$
$\vec{r} = r \hat{e}_r$	$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$	$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2\right) \hat{e}_r + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}\right) \hat{e}_\theta$		
$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$	$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z$	$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2\right) \hat{e}_\rho + \left(\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}\right) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{e}_z$		
$\vec{r} = r \hat{e}_r$	$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sen(\theta) \hat{e}_\varphi$	$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sen^2(\theta)\right) \hat{e}_r + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sen(\theta) \cos(\theta)\right) \hat{e}_\theta + \left(r \ddot{\varphi} \sen(\theta) + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sen(\theta) + 2 r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta)\right) \hat{e}_\varphi$		
$E = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$	$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$	$V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') \mathrm{d}r'$	$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$	

$$\int_{R_0}^R \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E-V(r)-\frac{L^2}{2mr^2}}}=\sqrt{2}m(t-t_0) \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\frac{m}{L^2u^2}F(1/u) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=\frac{2m}{L^2}[E-V(1/u)]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \qquad Q_k=\sum_{i=1}^NF_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k=\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad L=T-V$$

$$H=\sum_{k=1}^fp_k\dot{q}_k-L \qquad \dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

Lei de Newton no sistema girante de coordenadas:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{rot}=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{fixo}-2\vec{\omega}\times\vec{v'}-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-\ddot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

Eletromagnetismo

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \oint \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=Q=\int \rho\mathrm{d}V \qquad \oint \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=I=\int \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}$$

Obtida de "http://nerdyard.com/wiki/Solu%C3%A7%C3%B5es_de_Exerc%C3%ADcios:_EUF"