NHZ3053-15 – Teoria Clássica dos Campos **2019/1**

Lista de Exercícios 01

Todos os exercícios desta lista serão avaliados; **entrega em 01/03.**

1. Demonstre, fazendo as simplificações necessárias, que a equação de Newton para um dos N osciladores transversais discutidos em aula é dada por

$$\ddot{q}_i = \frac{T}{md}\left(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}\right) .$$

Mostre também que a energia potencial do sistema é

$$U = \frac{T}{2d}\sum_{i=1}^{N+1}\left(q_{i-1} - q_i\right)^2 .$$

2. Determine as frequências naturais de oscilação, bem como esboce o perfil espacial dos correspondentes modos, para o problema de três osciladores acoplados, utilizando-se de qualquer um dos dois métodos mostrados em aula.

3. A solução da corda vibrante pode ser escrita como

$$q\left(x,t\right) = \sum_{\ell}\eta_\ell\left(t\right)\sin\frac{\ell\pi x}{L}$$

onde

$$\eta_\ell\left(t\right) = a_\ell e^{i\omega_\ell t}$$

são chamadas de *coordenadas normais* da corda. Mostre que a energia cinética e potencial totais da corda são dadas por

$$K = \frac{L\rho}{4}\sum_{\ell}\dot{\eta}_\ell^2 \quad \text{e} \quad U = \frac{L\rho}{4}\sum_{\ell}\omega_\ell^2\eta_\ell^2 .$$

Mostre que a energia total da corda $K + U$ é constante no tempo.

4. **Sistema de Unidades Naturais**. O sistema de unidades SI adota padrões de medida completamente arbitrários, como por exemplo

   a) o metro foi definido como aproximadamente $1/10^7$ da distância do Equador ao Pólo Norte, pelo hemisfério que passa por Paris

   b) o segundo é aproximadamente $1/86.400$ do tempo médio que a Terra leva para fazer uma rotação completa em torno do seu eixo.

   Um sistema mais lógico de unidades é baseado na existência de *constantes universais* da física, que são

   - a *constante gravitacional de Newton* $G \sim 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2}$

- a *constante de Planck* $\hbar \sim 1.05 \times 10^{-34} \frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$
- a *velocidade da luz* $c \sim 3 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(i) Mostre que, combinando G, $\hbar$ e c, pode-se definir

- uma grandeza com dimensões de comprimento, chamada de *comprimento de Planck* $\ell_P \sim 1.6 \times 10^{-35} m$
- uma grandeza com dimensões de tempo, chamada de *tempo de Planck* $t_P \sim 5.4 \times 10^{-44} s$
- uma grandeza com dimensões de massa, chamada de *massa de Planck* $m_P \sim 2.2 \times 10^{-8} Kg$

(ii) Mostre que, se adotarmos ℓ_P como unidade de comprimento, t_P como unidade de tempo e m_P como unidade de massa, os valores numéricos de G, $\hbar$ e c tornam-se unitários, embora eles ainda possuam dimensões.

Considere agora um sistema de unidades em que o tempo tem dimensão de comprimento, definindo $\tau = ct$.

(iii) Mostre que a velocidade da luz, neste sistema de unidades, reduz-se à unidade (adimensional). **Mostre** também que não se pode escolher as dimensões de massa de tal forma que tanto G quanto $\hbar$ tornem-se adimensionais.

(iv) Defina finalmente um sistema de unidades em que $\hbar = 1$, que é conhecido como *sistema natural de unidades*. Qual a dimensão de massa neste sistema de unidades? Quanto vale G?

(v) Faça uma tabela de conversão, especificando o correspondente, em unidades naturais, das unidades do SI: ou seja, quanto vale um metro, um segundo e um Joule em unidades naturais.

(vi) Considere a equação $E^2 = p^2 + m^2$, válida em unidades naturais. Mostre que é possível determinar univocamente a forma desta equação em unidades do SI, acrescentando potências apropriadas de c, $\hbar$ e G a cada termo da equação.