In [3]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

# Teoría de Juegos ¶

## Función de densidad y de probabilidad

Una función $f(x)$ es llamada densidad de probabilidad si:

$$1. \int_{Dom_x} f(x)\,dx = 1$$

donde $Dom_x$ es el dominio de la variable aleatoria (VA).

$$2. f(x) > 0$$

La función $F(x)$, llamada función de distribución, se define como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = P(X \leq x)$$

Estas funciones cumplen:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

### Verificación

Verifica si $f(x) = x, x \in [0, 1]$ es una función de probabilidad:

a. Como $f(x) = x > 0$ en $[0, 1]$, se cumple la segunda definición.

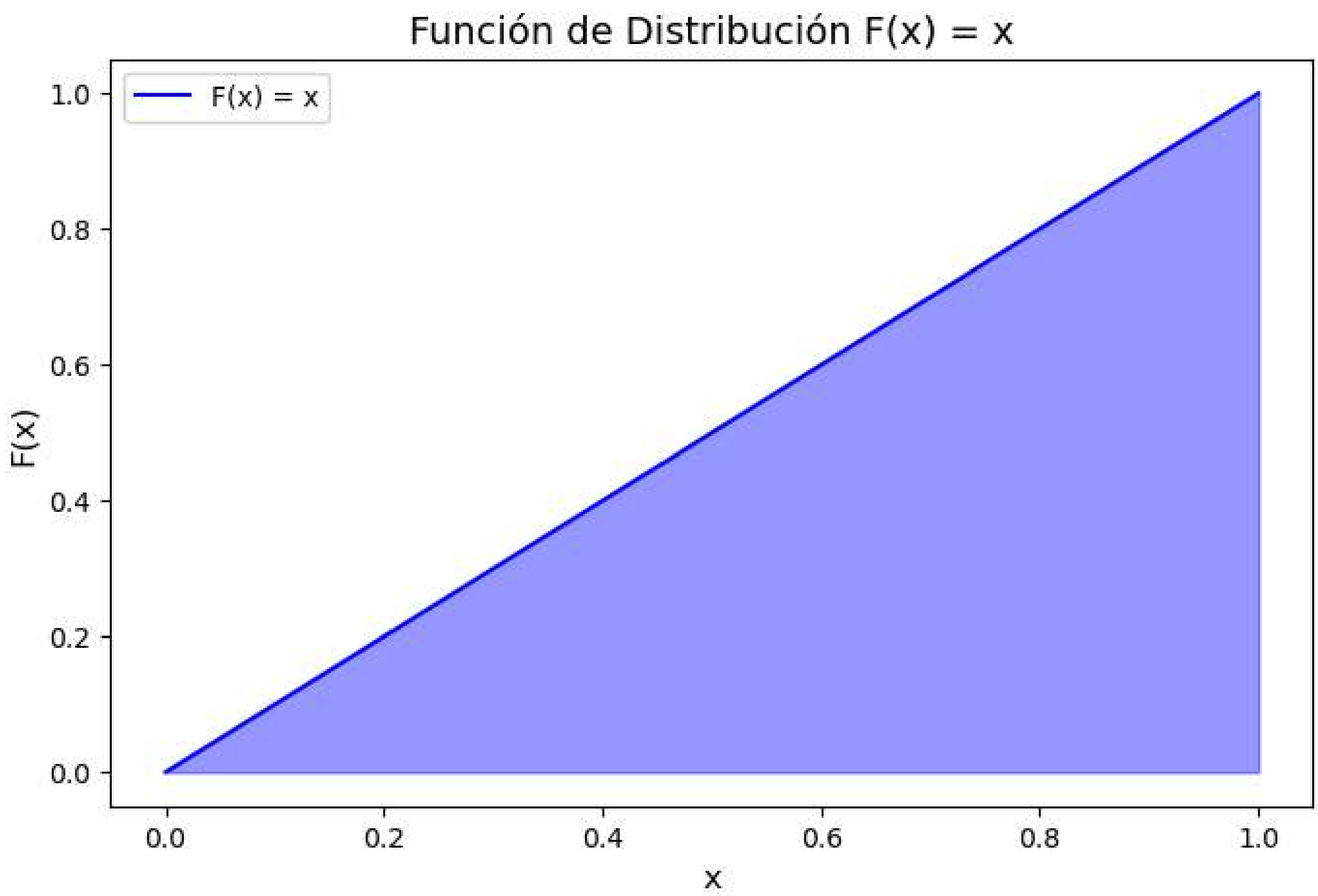
b.

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, **no es** una función de densidad de probabilidad (fdp).

In [5]:
```
x = np.linspace(0, 1, 500)
F = x

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x, F, label=r'F(x) = x', color='blue')
plt.fill_between(x, F, color='blue', alpha=0.4)
plt.title('Función de Distribución F(x) = x', fontsize=14)
plt.xlabel('x', fontsize=12)
plt.ylabel('F(x)', fontsize=12)
plt.legend()
plt.show()
```



## Sugerencia

Sugerimos $f(x) = kx$ en $[0, 1]$:

$$\int_0^1 kx\,dx$$

$$k\int_0^1 x\,dx$$

$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$k \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Resolviendo para ( k ):

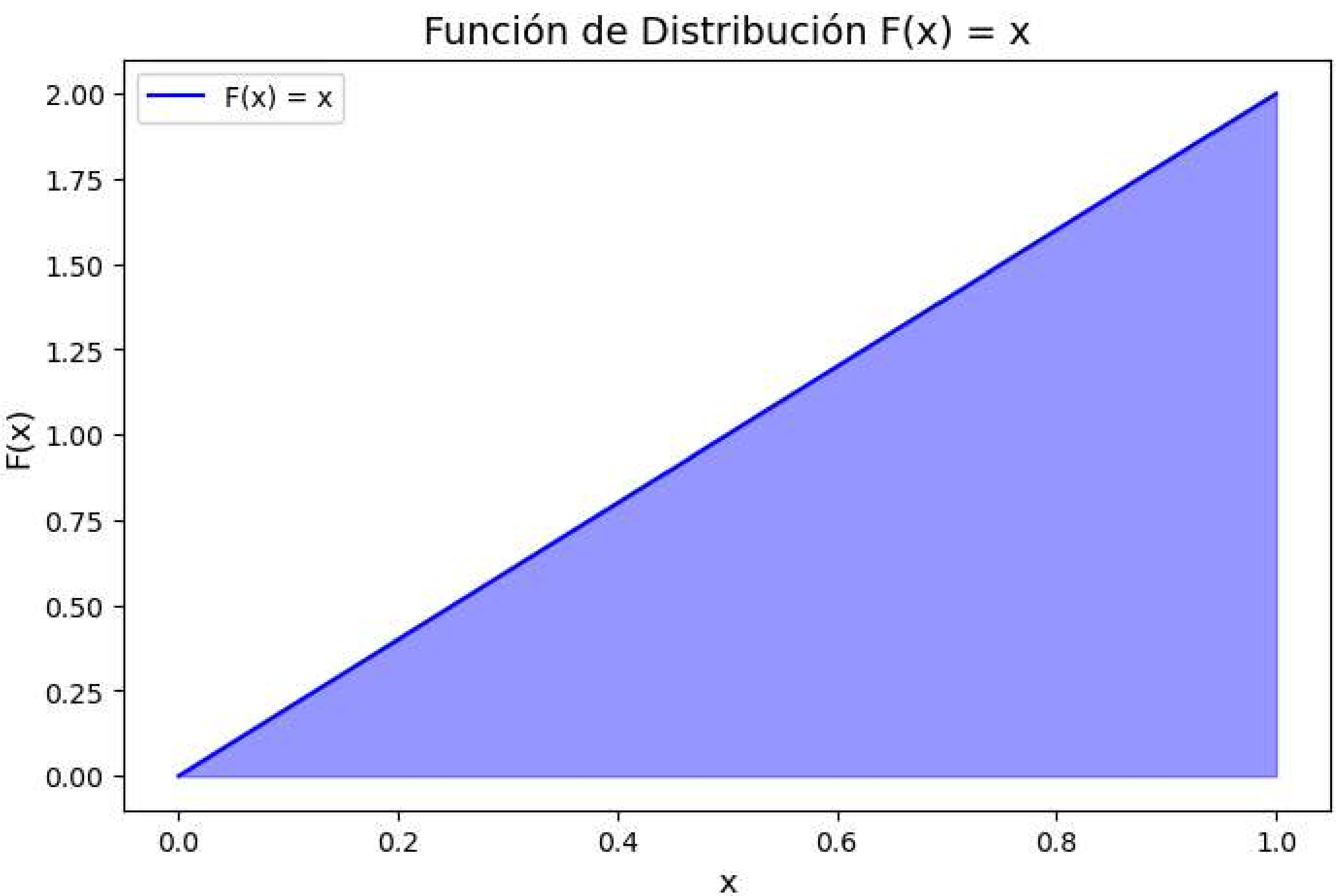
$$k = 2$$

Entonces:

$$f(x) = 2x$$

In [6]:
```
x = np.linspace(0, 1, 500)
F = 2*x

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x, F, label=r'F(x) = x', color='blue')
plt.fill_between(x, F, color='blue', alpha=0.4)
plt.title('Función de Distribución F(x) = x', fontsize=14)
plt.xlabel('x', fontsize=12)
plt.ylabel('F(x)', fontsize=12)
plt.legend()
plt.show()
```



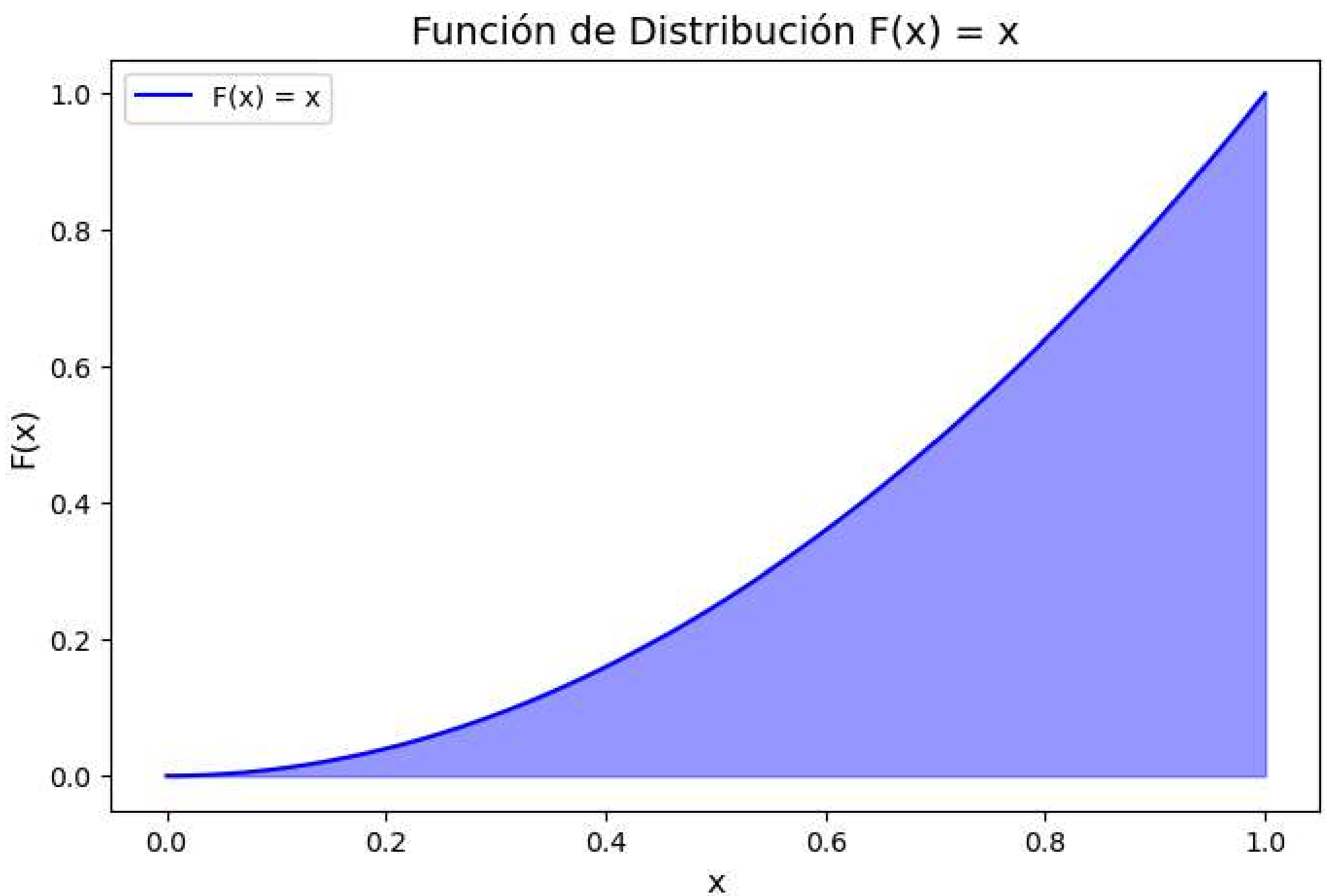

La función de densidad de probabilidad (FDP) es:

$$F(x) = \int_0^x 2t\,dt$$

$$= \left[t^2\right]_0^x = x^2$$

In [7]:
```
x = np.linspace(0, 1, 500)
F = x*x

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x, F, label=r'F(x) = x', color='blue')
plt.fill_between(x, F, color='blue', alpha=0.4)
plt.title('Función de Distribución F(x) = x', fontsize=14)
plt.xlabel('x', fontsize=12)
plt.ylabel('F(x)', fontsize=12)
plt.legend()
plt.show()
```




La probabilidad:

$$P\left(\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$$

Esto equivale a:

$$F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)$$

**Primer Momento Respecto al Origen**

El primer momento respecto al origen es:

$$\mu_1' = \mathbb{E}[x] = \int_{\text{Dom\_x}} x f(x)\,dx \quad \text{(media)}$$

**Segundo Momento**

$$\mu_2' = \mathbb{E}[x^2] = \int_{\text{Dom\_x}} x^2 f(x)\,dx$$

El segundo momento respecto a la media es:

$$\mu_2 = \mathbb{E}[(x-\mu)^2] = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \sigma^2 \quad \text{(varianza)}$$

**Cálculos para Nuestro Ejemplo**

La media:

$$\mu = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

El segundo momento:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

La varianza:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

**Función Generadora de Momentos**

La función generadora de momentos es:

$$M(t) = \int_{\text{Dom\_x}} e^{tx} f(x)\, dx$$

Para este caso:

$$M(t) = \int_0^1 e^{tx} 2x\, dx$$

$$= \frac{2x}{t} e^{tx} - \frac{2}{t^2} e^{tx} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{t} e^t - \frac{2}{t^2} e^t - (0 - \frac{2}{t^2})$$

$$= \frac{2e^t}{t} - \frac{2e^t}{t^2} + \frac{2}{t^2}$$

**Nota**

$$M'(0) = \mu$$

$$M''(0) = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2$$

**Función de Densidad de Probabilidad Conjunta**

La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $X$ e $Y$ es una función $f(x, y)$ que cumple:

$$1. f(x, y) >= 0$$

$$2. \int \int_R f(x, y) dA$$

Donde:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Si el rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}$, la función de distribución es:

$$F(x, y) = \int^{x} \int^{y} f(s, t)\, ds\, dt$$

La función está definida como:

$$f(x, y) = k(x + 2y), \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$$

**Condición de normalización**

Para encontrar el valor de $k$, usamos la condición de normalización:

$$\int_0^1 \int_0^2 k(x + 2y)\, dy\, dx$$

Resolviendo paso a paso:

$$k \int_0^1 xy + y^2 \Big|_0^2$$

$$k \int_0^1 2x + 4\, dx$$

$$k(x^2 + 4x)\Big|_0^1$$

Por lo tanto:

$$k(5) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

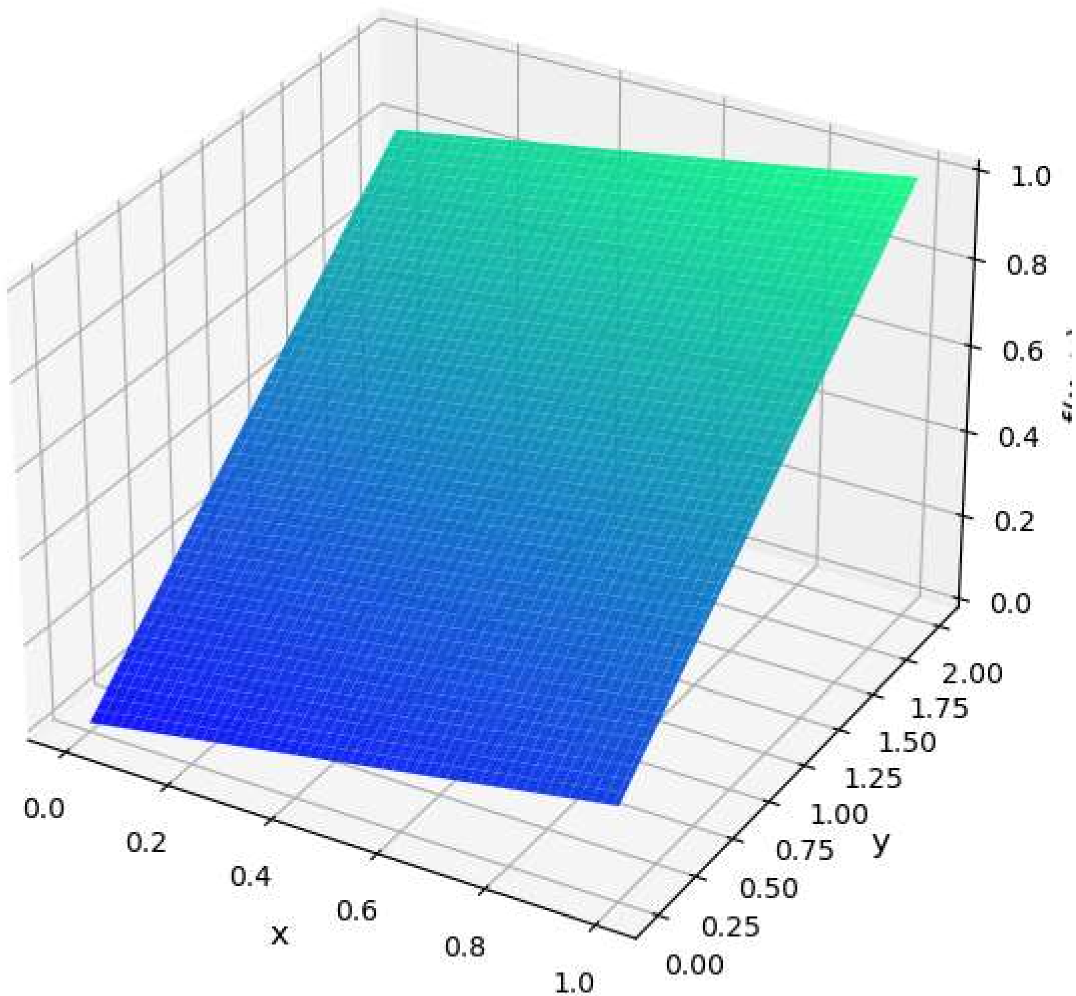
In [16]:

```
x = np.linspace(0, 1, 100)
y = np.linspace(0, 2, 100)
x, y = np.meshgrid(x, y)
f = (1/5) * (x + 2 * y)

fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

surf = ax.plot_surface(x, y, f, cmap='winter', edgecolor='none', alpha=0.9)  # Sin edgecolor para evitar líne

ax.set_xlabel('x', fontsize=12)
ax.set_ylabel('y', fontsize=12)
ax.set_zlabel('f(x, y)', fontsize=12)
plt.show()
```




**Función de densidad marginal**

La función marginal de $x$ está definida como:

$$g(x) = \int_{\text{Dom\_y}} f(x, y)\, dy$$

$$h(y) = \int_{\text{Dom\_x}} f(x, y)\, dx$$

**Ejemplo de cálculo**

Sea $g(x)$:

$$g(x) = \int_0^2 \frac{1}{5}(x + 2y)\, dy$$

$$\frac{1}{5}(xy + y^2)\Big|_0^2$$

$$\frac{1}{5}(2x + 4),\ 0 <= x <= 1$$

Sea $h(y)$:

$$g(x) = \int_0^1 \frac{1}{5}(x + 2y)\, dx$$

$$\frac{1}{5}(\frac{x^2}{2} + 2xy)\Big|_0^1$$

$$\frac{1}{5}(\frac{1}{2} + 2y),\ 0 <= y <= 2$$

Calcular k:

$$\int\int_R k dA$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{-2}{3}x+2} k\, dy\, dx$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{-3}{2}y-2} k\, dx\, dy$$

Resolviendo:

$$k \int_0^3 y\Big|_0^{\frac{-2}{3}x+2} dx$$

$$k \int_0^3 2 - \frac{-2}{3}x \, dx$$

$$k(2x - \frac{x^2}{3})\Big|_0^3$$

$$k(2x - \frac{x^2}{3})\Big|_0^3$$

$$k(6 - 3)$$

$$3k = 1$$

$$k = 1$$

## Tarea

$$a) P(x \leq 2, y \geq 1)$$

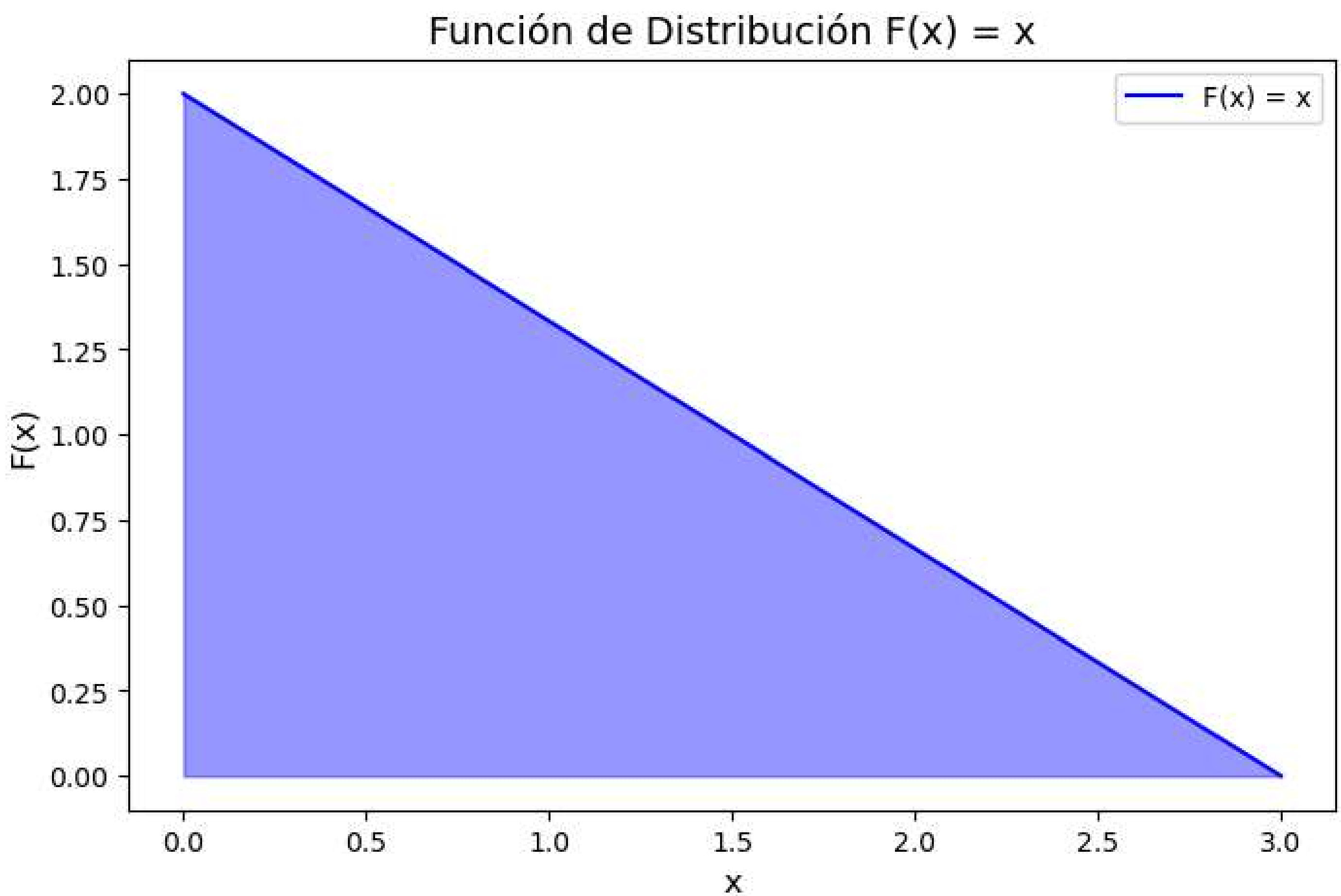
$$b) g(x)$$

$$c) h(y)$$

$$d) \mathbb{E}[xy] = \int \int_R xyf(xy)dA$$

In [17]:
```
x = np.linspace(0, 3, 500)
F = -2/3*x + 2

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x, F, label=r'F(x) = x', color='blue')
plt.fill_between(x, F, color='blue', alpha=0.4)
plt.title('Función de Distribución F(x) = x', fontsize=14)
plt.xlabel('x', fontsize=12)
plt.ylabel('F(x)', fontsize=12)
plt.legend()
plt.show()
```



$$y - 2 = \frac{-2}{3}(x - 0)$$

$$\rightarrow y = \frac{-2}{3}x + 2$$

$$y = 1$$

Igualamos la función con y y despejamos x

$$\rightarrow \frac{-2}{3}x + 2 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2}$$

**a)**

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{-2}{3}x+2} \frac{1}{5}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^{\frac{3}{2}} (xy + y^2)\Big|_1^{\frac{-2}{3}x+2} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-2}{3}x^3 + 2x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4x - x - 1\right) dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-2}{9}x^2 + \frac{5}{3}x + 3\right) dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}(\frac{-2}{27}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 3x)\Big|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4} - \frac{15}{8} + \frac{9}{2}\right)$$

$$= \frac{19}{40}$$

**b)**

$$g(x) = \int_0^{\frac{-2}{3}x+2} \frac{1}{5}(x+2y)\,dy$$

$$\to \frac{1}{5}(xy+y^2)\Big|_0^{\frac{-2}{3}x+2}$$

$$\to \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4 - x - 1\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{3}x + 3\right)$$

$$= -\frac{2}{45}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{5}$$

**c)**

$$h(y) = \int_0^2 \frac{1}{5}(x+2y)\,dx$$

$$\to \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Big|_0^2$$

$$\to \frac{1}{5}(2+4y)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{5}y$$

**d)**

$$E[xy] = \int_0^2 \int_0^{\frac{-2}{3}x+2} \frac{1}{5}(x+2y)xy\,dy\,dx$$

$$\to \frac{1}{5}\int_0^2 \int_0^{\frac{-2}{3}x+2} x^2y + 2xy^2\ dy\,dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^2 (x^2\frac{y^2}{2} + 2x\frac{y^3}{3})\Big|_0^{\frac{2}{3}x+2} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^2 \left(\left(\frac{1}{2}x^2\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4\right)\right) + \left(\frac{2}{3}x\left(\frac{-8}{27}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - 8x + 8\right)\right)\right) dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^2 \left(\frac{4}{81}x^4 - \frac{8}{6}x^3 - 2x^2 - \frac{16}{81}x^4 + \frac{16}{9}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{16}{3}x\right) dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\int_0^2 \left(\frac{2}{81}x^4 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{16}{3}x\right) dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{2}{405}x^5 + \frac{4}{36}x^4 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{16}{6}x^2\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{64}{405} + \frac{16}{9} - \frac{80}{9} + \frac{32}{3}\right)$$

$$= \frac{1504}{2025}$$

In [ ]: