Università degli Studi di Catania

Anno Accademico 2020-2021

Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di **Elementi di Analisi Matematica 2**

Esercizi sulle funzioni reali di due variabili reali

INSIEMI DI DEFINIZIONE

Determinare il dominio A di ciascuna delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y)=\sqrt{xy}$
(2) $f(x,y)=\sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$
(3) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$
(4) $f(x,y)=\log_2(x^2+y^2-4)$
(5) $f(x,y)=\sqrt{3y-x}-\sqrt[4]{x-2y^2}$
(6) $f(x,y)=\arccos(x^2+y^2-4)$.

Determinare poi l'interno, la frontiera e il derivato dell'insieme A.

LIMITI

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$
(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$
(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x\log y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$
(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin x\sin y\log(x^4+y^4)$
(6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{y}\log(1+x)$
(7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy^2}-1}{x^4+y^2}$
(8) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x+3y}{x^2-y^2}$
(9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^2(xy)}{3x^2+2y^2}$

CALCOLO DIFFERENZIALE

(1) Sia f la funzione reale di due variabili reali definita dalla legge $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ e sia $(x_0,y_0)=(2,-1)$. Calcolare $\nabla f(x_0,y_0)$. Determinare, poi, ∇f precisandone l'insieme di definizione.
(2) Dire se le funzioni

$$a)\ u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2},\qquad b)\ u(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\cos y-e^{-y}\cos x,\qquad c)\ u(x,y)=x^3+3xy^2$$

soddisfano l'equazione $u_{xx}+u_{yy}=0$, nota come *equazione di Laplace*
(3) Verificare che la funzione $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin kx$ soddisfa l'equazione $u_t=\frac{1}{k^2}u_{xx}$, nota come *equazione del calore*

(4) Verificare che le funzioni

$$a)\ u(x,t) = \sin x \sin t, \qquad b)\ u(x,t) = \sin(x-t) + \log(x+t)$$

soddisfano l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$, nota come *equazione delle onde*

(5) Verificare che la funzione $f(x,y) = |y|\log(1+x)$ è differenziabile in $(0,0)$

(6) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = x\sqrt{y-3}$$

nel punto $(2,12)$ e lungo il vettore $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(7) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = y^2\sqrt{2x-3}$$

nel punto $(2,1)$ e lungo il vettore $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(8) Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = x\sqrt{y-3}$$

e calcolarne, se esiste, la derivata direzionale nel punto $(1,4)$ lungo la direzione della retta di equazione $4x + 3y - 7 = 0$.

(9) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(|x|+|y|) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$).

(10) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{2x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità e l'esistenza delle derivate parziali prime nel punto $(0,0)$.

(11) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) stabilire se è continua nel suo insieme di definizione;

(b) stabilire se è differenziabile nel suo insieme di definizione.

(12) Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità in $(0,0)$ delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{y^2+|x|} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

(1) Determinare e classificare gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni reali di due variabili reali:
   (a) $f(x,y) = xe^{y-x} - y$
   (b) $f(x,y) = 2x^3 + 3y^3 + 3x^2 - 36y$
   (c) $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 2xy$
   (d) $f(x,y) = 4xy^2 + 4x^2y - 6xy + 5$
   (e) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 1 + (x+y)^2$

(2) Data la funzione definita dalla legge
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$
i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(0,2)e(2,0)$.

(3) Data la funzione definita dalla legge
$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$$
i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(1,0)$ e $(1,1)$.

(4) Data la funzione definita dalla legge
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$
i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(0,2)e(2,0)$.

(5) Determinare gli eventuali estremi relativi della funzione e precisare se sono anche estremi assoluti.
$$f(x,y) = x(\log^2 x + y^2)$$
e precisare se sono anche estremi assoluti.

(6) Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = \log \frac{x}{x^2+y^2}$ nell'insieme $X = [1,5] \times [-1,4]$

(7) Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione
$$f(x,y) = xy(x - y^2 + 1)$$
nell'insieme $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \leq x \leq 1\right\}$.