UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **6 CFU**

15 Settembre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia data la successione numerica reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove

$$a_n = n^3 + \arctan(n^5) - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{4}.$$

(a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Provare che $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = x^3 + \arctan(x^5) - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}$$

e considerato l'insieme numerico

$$E = \{ f(x) : x \in]-1, 1[\},$$

determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di E specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni reali di variabile reale definite dalle leggi

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - \log_{\frac{1}{2}}(|x| - 1)}{x^2 + 4x + 4}}, \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{2x+1}{3x+7}\right).$$

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = |x+2|\sqrt{1-x}.$$

Studiare f e tracciarne il grafico.

15 Settembre 2017

Svolgimento della prova scritta (6 CFU)

$\boxed{\textbf{1}}$ (a) Osservato che

$$a_n = n^3 + \arctan(n^5) + \left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{4},$$

si vede che la successione in esame è somma di successioni crescenti e quindi è crescente. In alternativa, se $h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è la funzione definita dalla legge

$$h(x) = x^3 + \arctan(x^5) - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4},$$

si trova che

$$h'(x) = 3x^2 + \frac{5x^4}{1+x^{10}} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x \in [1, +\infty[,$$

quindi f è crescente in $[1, +\infty[$ e, a fortiori, lo è la successione assegnata.

(b) Dal punto precedente segue che

$$a_n \geq a_1 = 1 + \arctan(1) - 1 - \frac{\pi}{4} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui la tesi.

(c) Poiché

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty,$$

si conclude che

$$\inf E = -\infty, \qquad \sup E = +\infty$$

e, in particolare, E non ammette né minimo né massimo.

$\boxed{\textbf{2}}$ Funzione f. Bisogna imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - \log_{\frac{1}{2}}(|x| - 1)}{x^2 + 4x + 4} \geq 0 \\ x^2 + 4x + 4 \neq 0 \\ |x| - 1 > 0 \end{cases}.$$

Si trova facilmente che $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2[\cup]-2, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$.

Funzione g. Bisogna richiedere

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3x+7} \leq 1.$$

Si trova facilmente che $\mathscr{D}_g =]-\infty, -6] \cup [-\frac{8}{5}, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{3}}$ **1.** Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $1 - x \geq 0$, quindi:

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 1].$$

2. Simmetrie notevoli

Chiaramente la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi e studio del segno

La funzione è non negativa per ogni $x \in \mathscr{D}_f$. Il grafico di f interseca gli assi nei punti $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$. Avendosi

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\sqrt{1-x} & \text{se } x \in [-2,1] \\ -(x+2)\sqrt{1-x} & \text{se } x \in]-\infty,-2[\end{cases},$$

conviene studiare la funzione $g(x) = (x+2)\sqrt{1-x}$ per ogni $x \in \mathscr{D}_f$. Al fine di realizzare il grafico di f, poi, si considererà il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del grafico di g in $]-\infty,-2[$.

5. Comportamento agli estremi di $\mathscr{D}_f$ e ricerca degli asintoti

La funzione è continua nella chiusura del suo insieme di definizione, quindi non ammette asintoti verticali.

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi il grafico di f non ammette asintoto orizzontale sinistro. Potrebbe esistere l'asintoto obliquo sinistro. Si vede facilmente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Ne viene che il grafico di f non ammette asintoti obliqui.

6. Studio della monotonia

Per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\}$ si ha

$$g'(x) = \frac{-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Quindi g è crescente in $]-\infty,0]$ ed è decrescente in $[0,+\infty[$. Pertanto, f è decrescente in $]-\infty,-2]$ e in $[0,1]$ ed è crescente in $[-2,0]$. Ne viene che in $x=0$ il grafico di f presenta un massimo locale (non assoluto) e nei punti di ascisse $x=-2$ e $x=1$ in cui f non è derivabile si localizzano due punti di minimo assoluto.

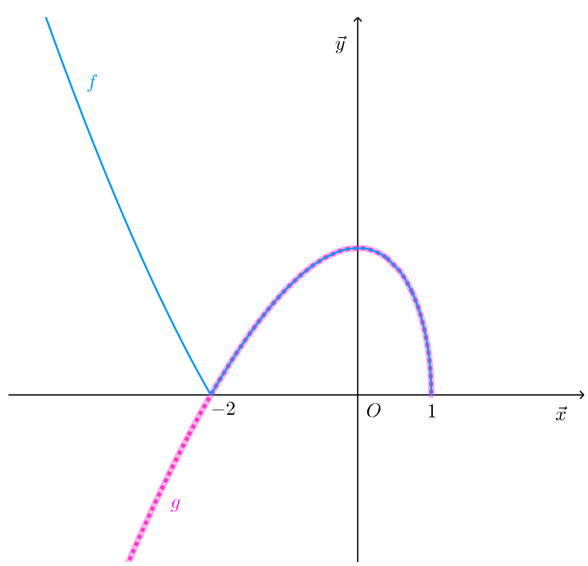
7. Studio della concavità

Per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\}$ si ha

$$g''(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Ne viene che g è concava nel suo insieme di definizione. Da ciò segue che f è convessa in $]-\infty,-2]$ e concava in $[-2,1]$.

8. Grafico della funzione



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **9 CFU**
15 Settembre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia data la successione numerica reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove

$$a_n = n^3 + \arctan(n^5) - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{4}.$$

(a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Provare che $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(c) Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = x^3 + \arctan(x^5) - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}$$

e considerato l'insieme numerico

$$E = \{ f(x) : x \in]-1,1[\},$$

determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di E specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = |x+2|\sqrt{1-x}.$$

Studiare f e tracciarne il grafico.

3 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{4x^3 + x^2 + x - 2}{4x^2 - 3x - 1} \mathrm{d}x$$

15 Settembre 2017

Svolgimento della prova scritta (9 CFU)

$\boxed{1}$ (a) Osservato che

$$a_n = n^3 + \arctan(n^5) + \left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{4},$$

si vede che la successione in esame è somma di successioni crescenti e quindi è crescente. In alternativa, se $h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è la funzione definita dalla legge

$$h(x) = x^3 + \arctan(x^5) - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4},$$

si trova che

$$h'(x) = 3x^2 + \frac{5x^4}{1+x^{10}} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x \in [1, +\infty[,$$

quindi f è crescente in $[1, +\infty[$ e, a fortiori, lo è la successione assegnata.

(b) Dal punto precedente segue che

$$a_n \geq a_1 = 1 + \arctan(1) - 1 - \frac{\pi}{4} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui la tesi.

(c) Poiché

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty,$$

si conclude che

$$\inf E = -\infty, \qquad \sup E = +\infty$$

e, in particolare, E non ammette né minimo né massimo.

$\boxed{2}$ **1.** Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $1 - x \geq 0$, quindi:

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 1].$$

2. Simmetrie notevoli

Chiaramente la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi e studio del segno

La funzione è non negativa per ogni $x \in \mathscr{D}_f$. Il grafico di f interseca gli assi nei punti $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$. Avendosi

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\sqrt{1-x} & \text{se } x \in [-2, 1] \\ -(x+2)\sqrt{1-x} & \text{se } x \in]-\infty, -2[\end{cases},$$

conviene studiare la funzione $g(x) = (x+2)\sqrt{1-x}$ per ogni $x \in \mathscr{D}_f$. Al fine di realizzare il grafico di f, poi, si considererà il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del grafico di g in $]-\infty, -2[$.

5. Comportamento agli estremi di $\mathscr{D}_f$ e ricerca degli asintoti

La funzione è continua nella chiusura del suo insieme di definizione, quindi non ammette asintoti verticali.

Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi il grafico di f non ammette asintoto orizzontale sinistro. Potrebbe esistere l'asintoto obliquo sinistro. Si vede facilmente che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Ne viene che il grafico di f non ammette asintoti obliqui.

6. Studio della monotonia

Per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\}$ si ha

$$g'(x) = \frac{-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Quindi g è crescente in $]-\infty, 0]$ ed è decrescente in $[0, +\infty[$. Pertanto, f è decrescente in $]-\infty, -2]$ e in $[0, 1]$ ed è crescente in $[-2, 0]$. Ne viene che in $x = 0$ il grafico di f presenta un massimo locale (non assoluto) e nei punti di ascisse $x = -2$ e $x = 1$ in cui f non è derivabile si localizzano due punti di minimo assoluto.

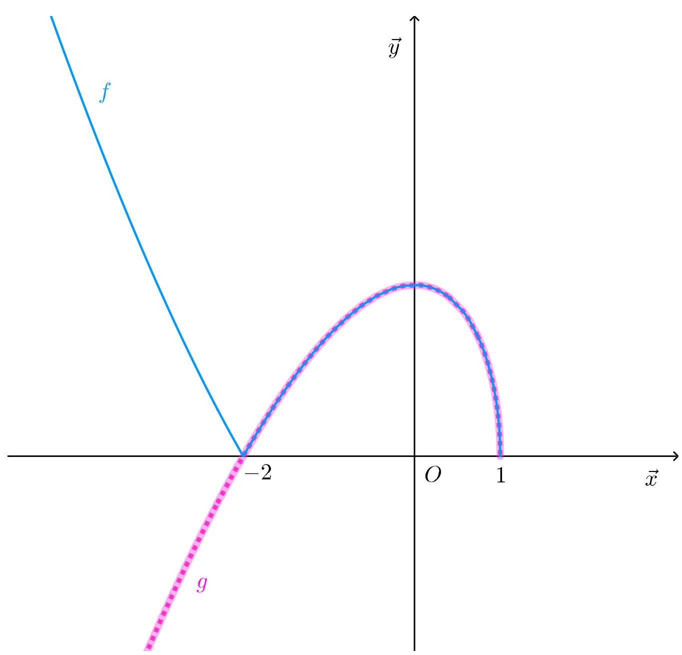
7. Studio della concavità

Per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\}$ si ha

$$g''(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Ne viene che g è concava nel suo insieme di definizione. Da ciò segue che f è convessa in $]-\infty, -2]$ e concava in $[-2, 1]$.

8. Grafico della funzione



$\boxed{3}$ Effettuando la divisione tra i polinomi $4x^3 + x^2 + x - 2$ e $4x^2 - 3x - 1$, si trova che

$$4x^3 + x^2 + x - 2 = (x+1)(4x^2 - 3x - 1) + 5x - 1.$$

Alla luce di ciò, denotato con I l'integrale assegnato, si ha

$$I = \int \left(x + 1 + \frac{5x-1}{4x^2-3x-1} \right) \mathrm{d}x.$$

Calcoliamo dunque l'integrale

$$J = \int \frac{5x-1}{4x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Procediamo decomponendo la funzione integranda in fratti semplici. Si ricercano due costanti A e B tali che

$$\frac{5x-1}{4x^2-3x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{4x+1}.$$

Svolgendo i conti al secondo membro, si ottiene:

$$\frac{5x-1}{4x^2-3x-1} = \frac{(4A+B)x + A - B}{(x-1)(4x+1)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini omologhi dei numeratori, si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} 4A + B = 5 \\ A - B = -1 \end{cases},$$

da cui

$$A = \frac{4}{5}, \quad B = \frac{9}{5}.$$

Da ciò segue subito che la decomposizione in fratti semplici è

$$\frac{5x-1}{4x^2-3x-1} = \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4x+1}.$$

Integrando ambo i membri e calcolando gli integrali elementari al secondo membro, si trova:

$$\int \frac{5x-1}{4x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\ln|x-1| + \frac{9}{5}\ln|4x+1| + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

In definitiva,

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{4}{5}\ln|x-1| + \frac{9}{20}\ln|4x+1| + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **12 CFU**
15 Settembre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia data la successione numerica reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove

$$a_n = n^3 + \arctan(n^5) - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{4}.$$

(a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Provare che $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(c) Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = x^3 + \arctan(x^5) - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}$$

e considerato l'insieme numerico

$$E = \{ f(x) \,:\, x \in]-1,1[\},$$

determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di E specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = |x+2|\sqrt{1-x}.$$

Studiare f e tracciarne il grafico.

3 Siano date le seguenti serie numeriche:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^6+2n+5}{7n^7+12n+1}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[12]{n} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \arctan\left(\frac{\sqrt[12]{n}}{\sqrt[3]{\sqrt{n}+1}}\right), \quad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

Stabilire il carattere delle serie assegnate e, nel caso di convergenza, specificare se essa è assoluta.

4 Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 3x^2 + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Determinare, se esiste, la primitiva di f che si annulla in $x_0 = -3$.

15 Settembre 2017

Svolgimento della prova scritta (12 CFU)

$\boxed{1}$ (a) Osservato che

$$a_n = n^3 + \arctan(n^5) + \left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{4},$$

si vede che la successione in esame è somma di successioni crescenti e quindi è crescente.
In alternativa, se $h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è la funzione definita dalla legge

$$h(x) = x^3 + \arctan(x^5) - \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4},$$

si trova che

$$h'(x) = 3x^2 + \frac{5x^4}{1+x^{10}} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x \in [1, +\infty[,$$

quindi f è crescente in $[1, +\infty[$ e, a fortiori, lo è la successione assegnata.

(b) Dal punto precedente segue che

$$a_n \geq a_1 = 1 + \arctan(1) - 1 - \frac{\pi}{4} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui la tesi.

(c) Poiché

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty,$$

si conclude che

$$\inf E = -\infty, \qquad \sup E = +\infty$$

e, in particolare, E non ammette né minimo né massimo.

$\boxed{2}$ **1.** Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $1 - x \geq 0$, quindi:

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 1].$$

2. Simmetrie notevoli

Chiaramente la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi e studio del segno

La funzione è non negativa per ogni $x \in \mathscr{D}_f$. Il grafico di f interseca gli assi nei punti $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$. Avendosi

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\sqrt{1-x} & \text{se } x \in [-2, 1] \\ -(x+2)\sqrt{1-x} & \text{se } x \in]-\infty, -2[\end{cases},$$

conviene studiare la funzione $g(x) = (x+2)\sqrt{1-x}$ per ogni $x \in \mathscr{D}_f$. Al fine di realizzare il grafico di f, poi, si considererà il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del grafico di g in $]-\infty, -2[$.

5. Comportamento agli estremi di $\mathscr{D}_f$ e ricerca degli asintoti

La funzione è continua nella chiusura del suo insieme di definizione, quindi non ammette asintoti verticali.

Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi il grafico di f non ammette asintoto orizzontale sinistro. Potrebbe esistere l'asintoto obliquo sinistro. Si vede facilmente che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Ne viene che il grafico di f non ammette asintoti obliqui.

6. Studio della monotonia

Per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\}$ si ha

$$g'(x) = \frac{-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Quindi g è crescente in $]-\infty, 0]$ ed è decrescente in $[0, +\infty[$. Pertanto, f è decrescente in $]-\infty, -2]$ e in $[0, 1]$ ed è crescente in $[-2, 0]$. Ne viene che in $x = 0$ il grafico di f presenta un massimo locale (non assoluto) e nei punti di ascisse $x = -2$ e $x = 1$ in cui f non è derivabile si localizzano due punti di minimo assoluto.

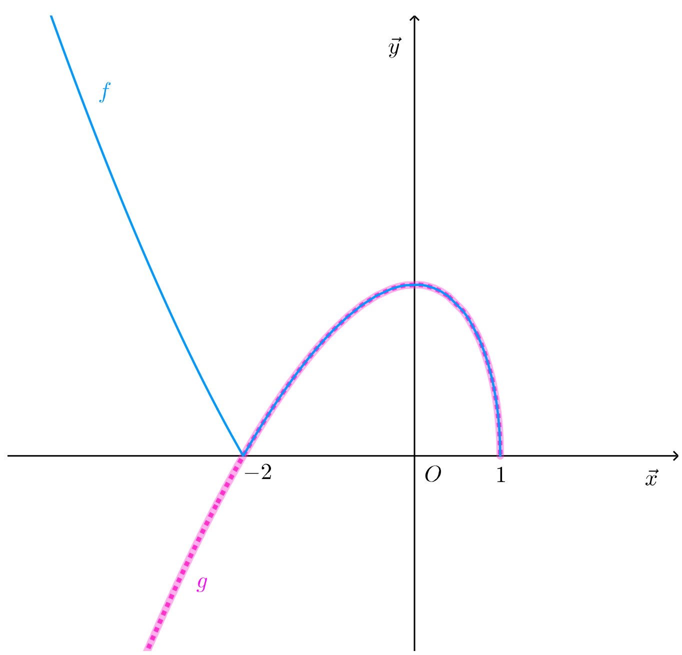
7. Studio della concavità

Per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\}$ si ha

$$g''(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Ne viene che g è concava nel suo insieme di definizione. Da ciò segue che f è convessa in $]-\infty, -2]$ e concava in $[-2, 1]$.

8. Grafico della funzione



3 Siano a_n, b_n, c_n i termini generali delle serie (a), (b), (c), rispettivamente.
Serie (a). La serie è a termini positivi. Si ha $a_n \asymp \frac{1}{n}$, quindi la serie diverge positivamente.
Serie (b). La serie è a termini di segno alterno. Si ha $|b_n| \asymp n^{\frac{1}{12}} \frac{1}{n^3} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge assolutamente e quindi semplicemente.
Serie (c). La serie è a termini positivi. Si applica il criterio del rapporto.

$$
\begin{aligned}
\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{e^{n+1}}{(n+1)!(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \cdot \frac{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{e^n} \\
&= \frac{e}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{e}{n+1} \cdot (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{e}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}
\end{aligned}
$$

e da ciò si vede subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0 < 1,$$

quindi la serie converge. Essendo a termini positivi, la convergenza semplice equivale a quella assoluta e quindi la serie converge anche assolutamente.

$\boxed{4}$ La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ visto che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$$

è tale che $F(-3) = 0$ e $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Cioè F è la primitiva di f verificante la condizione richiesta. Determiniamo esplicitamente l'espressione analitica di F. Si ha

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-3}^{x} (\cos t + 2)\, dt & \text{se } x \le 0 \\ \int_{-3}^{0} (\cos t + 2)\, dt + \int_{0}^{x} (3t^2 + 3)\, dt & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

quindi

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + 2x - \sin(-3) + 6 & \text{se } x \le 0 \\ x^3 + 3x + \sin 3 + 6 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per il corso di Formazione Analitica 2 (MAT/05) di **6 CFU**
15 Settembre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Siano date le seguenti serie numeriche:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^6+2n+5}{7n^7+12n+1}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[12]{n} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \arctan\left(\frac{\sqrt[12]{n}}{\sqrt[3]{\sqrt{n}+1}}\right), \quad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n!\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}.$$

Stabilire il carattere delle serie assegnate e, nel caso di convergenza, specificare se essa è assoluta.

2 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{4x^3+x^2+x-2}{4x^2-3x-1}\mathrm{d}x$$

3 Sia data la funzione reale di due variabili reali definita dalla legge

$$f(x,y) = (y-x^2)\ln(y-x^2) + y^3 - 3y.$$

- Determinare l'insieme di definizione $\mathscr{D}_f$ di f.
- Studiare la continuità di f in $\mathscr{D}_f$.
- Determinare l'espressione analitica delle derivate parziali prime nei punti in cui esse esistono.
- Studiare la differenziabilità di f in $\mathscr{D}_f$.
- Determinare, se esistono, i punti di minimo relativo e di massimo relativo nell'insieme

$$H = \left\{(x,y) \in \mathscr{D}_f \,:\, y^2 - x - \frac{1}{4} > 0,\ x < 0\right\}.$$

- Stabilire se la funzione f è limitata in H.

15 Settembre 2017

Svolgimento della prova scritta (9 CFU)

1 Siano a_n, b_n, c_n i termini generali delle serie (a), (b), (c), rispettivamente.

Serie (a). La serie è a termini positivi. Si ha $a_n \asymp \frac{1}{n}$, quindi la serie diverge positivamente.

Serie (b). La serie è a termini di segno alterno. Si ha $|b_n| \asymp n^{\frac{1}{12}} \frac{1}{n^3} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge assolutamente e quindi semplicemente.

Serie (c). La serie è a termini positivi. Si applica il criterio del rapporto.

$$
\begin{aligned}
\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{e^{n+1}}{(n+1)!(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \cdot \frac{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{e^n} \\
&= \frac{e}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{e}{n+1} \cdot (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{e}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}
\end{aligned}
$$

e da ciò si vede subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0 < 1,$$

quindi la serie converge. Essendo a termini positivi, la convergenza semplice equivale a quella assoluta e quindi la serie converge anche assolutamente.

2 Effettuando la divisione tra i polinomi $4x^3+x^2+x-2$ e $4x^2-3x-1$, si trova che

$$4x^3+x^2+x-2 = (x+1)(4x^2-3x-1)+5x-1.$$

Alla luce di ciò, denotato con I l'integrale assegnato, si ha

$$I = \int \left(x+1+\frac{5x-1}{4x^2-3x-1}\right) dx.$$

Calcoliamo dunque l'integrale

$$J = \int \frac{5x-1}{4x^2-3x-1}\, dx.$$

Procediamo decomponendo la funzione integranda in fratti semplici. Si ricercano due costanti A e B tali che

$$\frac{5x-1}{4x^2-3x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{4x+1}.$$

Svolgendo i conti al secondo membro, si ottiene:

$$\frac{5x-1}{4x^2-3x-1} = \frac{(4A+B)x+A-B}{(x-1)(4x+1)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini omologhi dei numeratori, si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} 4A+B=5 \\ A-B=-1 \end{cases},$$

da cui

$$A = \frac{4}{5}, \quad B = \frac{9}{5}.$$

Da ciò segue subito che la decomposizione in fratti semplici è

$$\frac{5x-1}{4x^2-3x-1} = \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4x+1}.$$

Integrando ambo i membri e calcolando gli integrali elementari al secondo membro, si trova:

$$\int \frac{5x-1}{4x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\ln|x-1| + \frac{9}{5}\ln|4x+1| + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

In definitiva,

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{4}{5}\ln|x-1| + \frac{9}{20}\ln|4x+1| + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{3}$

- $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$.
- $f \in C(\mathscr{D}_f)$ perché è somma, prodotto e composizione di funzioni continue su $\mathscr{D}_f$.
- Si ha

$$f_x(x,y) = -2x\left[\ln(y-x^2)+1\right], \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 2 + \ln(y-x^2), \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f.$$

- Poiché le derivate parziali prime f_x e f_x sono continue su $\mathscr{D}_f$, risulta $f \in C^1(\mathscr{D}_f)$. Pertanto, da una nota condizione sufficiente per la differenziabilità, f è differenziabile in $\mathscr{D}_f$.
- Ricerchiamo innanzitutto i punti stazionari di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Osservando che in H è sempre $x \neq 0$, dividendo la prima equazione per x e con facili manipolazioni algebriche, si trova il sistema equivalente:

$$\begin{cases} \ln(y-x^2)+1 = 0 \\ 3y^2 - 2 + \ln(y-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 = \mathrm{e}^{-1} \\ 3y^2 - 2 + \ln \mathrm{e}^{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 = \mathrm{e}^{-1} \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Le soluzioni del sistema sono quindi

$$P(-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}, 1), \qquad Q(\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}, 1).$$

Solo P appartiene ad H, quindi l'unico punto interno da esaminare è P.
Si ha:

$$f_{xx}(x,y) = -2\left[\ln(y-x^2)+1\right] + \frac{4x^2}{y-x^2}, \qquad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f,$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{2x}{y-x^2}, \qquad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f,$$

$$f_{yy}(x,y) = 6y + \frac{1}{y-x^2}, \qquad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f$$

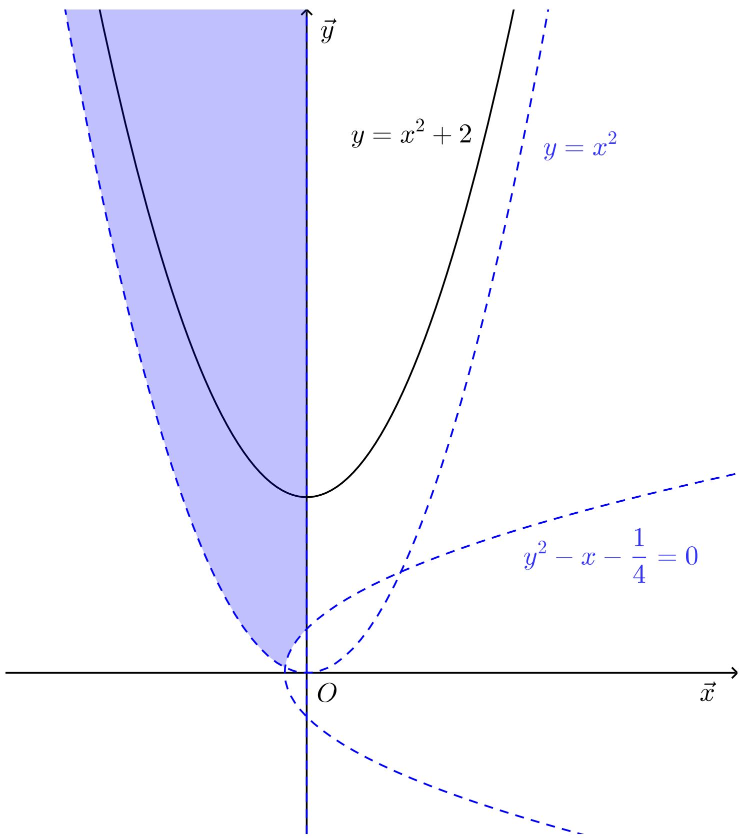
e risulta

$$H(P) = \det\begin{pmatrix} 4\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-1}) & 2\mathrm{e}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}} \\ 2\mathrm{e}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}} & 6+\mathrm{e} \end{pmatrix} = 24\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

Poiché $H(P) > 0$ e $f_{xx}(P) > 0$, il punto P è un punto di minimo locale per f. Non essendovi punti di non derivabilità da esaminare, concludiamo che non esistono punti di massimo locale in H e quindi in H la funzione non ha punti di massimo locale (e quindi neppure punti di massimo assoluto).
- In H la funzione f non è limitata poiché risulta

$$\sup_{(x,y)\in H} f(x,y) = +\infty.$$

Per rendersi conto di ciò, è sufficiente considerare una opportuna restrizione di f ad una curva contenuta in H. Ad esempio, sia $y = x^2 + 2$, come indicato in figura.



Risulta $f(x, x^2 + 2) = 2\ln 2 + (x^2 + 2)^3 - 3(x^2 + 2)$ e chiaramente si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, x^2 + 2) = +\infty.$$