UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica

Anno Accademico 2016-2017

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **6 CFU**

4 Ottobre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia data la successione numerica reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dove

$$a_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

(a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme $E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni reali di variabile reale definite dalle leggi

$$f(x) = \log_{x^2-2x}(3x^2 - 4x + 1), \qquad g(x) = \left(\cos\frac{\ln x}{\sqrt{3^x - 9}}\right) \cdot 3^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \arctan\frac{|x^2 - 2x|}{x - 1}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione di f, studiare il segno, la continuità e la derivabilità di f, determinare le equazioni degli eventuali asintoti per il grafico di f, studiare la monotonia di f ricercando gli eventuali punti estremanti e, infine, utilizzando le informazioni ottenute, tracciare un grafico qualitativo di f.

(b) Sia g la funzione reale di variabile reale definita dalla legge $g(x) = |f(x)|$.
- Dedurre dal grafico di f il grafico di g.
- Dire, giustificando la risposta, se g è prolungabile per continuità in $x = 1$ e, in caso affermativo, determinare l'espressione analitica del prolungamento $\tilde{g}$ di g in $x = 1$.

4 Ottobre 2017

Svolgimento della prova scritta (6 CFU)

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a) Si prova facilmente che la successione in esame è strettamente decrescente. Infatti

$$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}}{(n+3)!} < \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^n \cdot 2}{(n+3)(n+2)!} < \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+3} < 1$$

e questa ultima relazione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Dal punto precedente segue che

$$\max E = a_0 = \frac{1}{2}, \qquad \inf E = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Quindi E ammette massimo ma non ammette minimo.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Funzione f.* Bisogna imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 2x \neq 1 \end{cases}.$$

Si trova facilmente che $\mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\setminus \{1 \pm \sqrt{2}\}$.

Funzione g. Bisogna imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - 9 > 0 \\ -1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \end{cases}.$$

Si trova facilmente che $\mathscr{D}_f =]2, +\infty[$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (a) L'insieme di definizione di f è $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Inoltre, $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $x = 2$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < 1$. I limiti agli estremi dell'insieme di definizione sono:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to1^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Ne viene che la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sia destro che sinistro per il grafico di f. Inoltre, il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di tipo salto per f con salto pari a π.

Avendosi

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -\arctan \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{se } 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \end{cases},$$

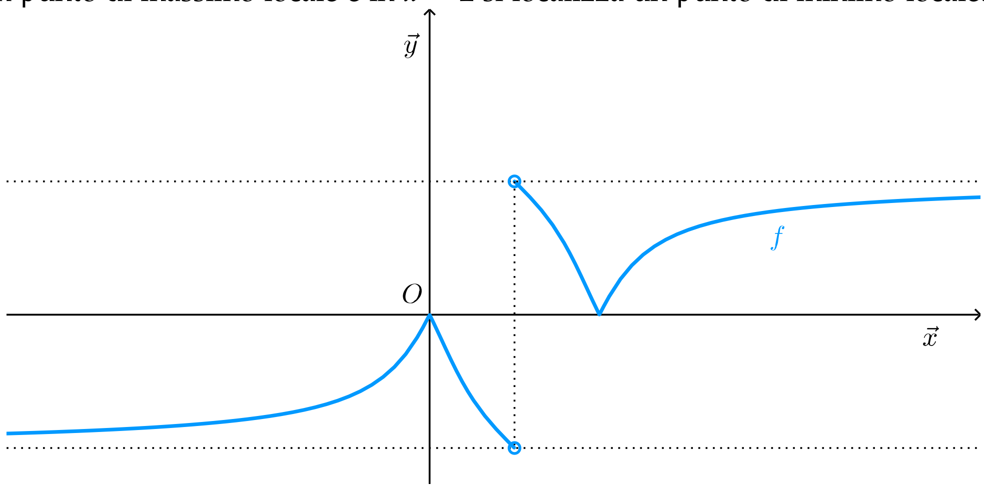
per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0, 2\}$, risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \vee x > 2 \\ -\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{se } 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \end{cases}.$$

Studiamo la derivabilità di f in $x = 0$ e in $x = 2$. Essendo f continua in tali punti, applichiamo il teorema sul limite della derivata. Con facili conti si vede che

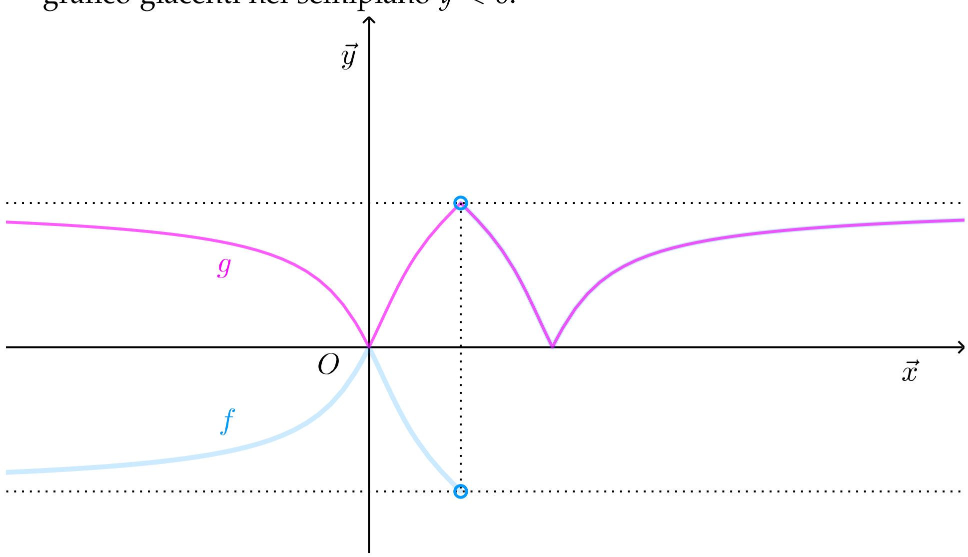
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2 \neq \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -2 = f'_+(0),$$
$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = -2 \neq \lim_{x \to 2^+} f'(x) = 2 = f'_+(2),$$

quindi f non è derivabile né in $x = 0$ né in $x = 2$ ed essi sono punti angolosi per il grafico di f. Inoltre, dallo studio del segno di f' si deduce subito che f è crescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$ e f è decrescente in $[0, 1[$ e in $]1, 2]$. Da quanto visto segue che in $x = 0$ si localizza un punto di massimo locale e in $x = 2$ si localizza un punto di minimo locale.



(b)

- Il grafico di g si ottiene a partire dal grafico di f ribaltando rispetto all'asse le parti di grafico giacenti nel semipiano $y < 0$.



- Risulta
$$\lim_{x \to 1^\pm} g(x) = \frac{\pi}{2},$$
quindi f è prolungabile per continuità in $x = 1$ e il prolungamento $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definito da
$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **9 CFU**
4 Ottobre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia data la successione numerica reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dove

$$a_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

(a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
(b) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme $E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \arctan\frac{|x^2-2x|}{x-1}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione di f, studiare il segno, la continuità e la derivabilità di f, determinare le equazioni degli eventuali asintoti per il grafico di f, studiare la monotonia di f ricercando gli eventuali punti estremanti e, infine, utilizzando le informazioni ottenute, tracciare un grafico qualitativo di f.
(b) Sia g la funzione reale di variabile reale definita dalla legge $g(x) = |f(x)|$.
- Dedurre dal grafico di f il grafico di g.
- Dire, giustificando la risposta, se g è prolungabile per continuità in $x = 1$ e, in caso affermativo, determinare l'espressione analitica del prolungamento $\tilde{g}$ di g in $x = 1$.

3 (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{x^6+9}\mathrm{e}^{2\arctan\frac{x^3}{3}}\,\mathrm{d}x$$

(b) Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + \sin x - \mathrm{e}^x & \text{se } x \geq 0 \\ x\sin x - \cos 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dire, giustificando la risposta, se f ammette primitive in $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, determinare l'espressione analitica di una generica primitiva di f in $\mathbb{R}$.

4 Ottobre 2017

Svolgimento della prova scritta (9 CFU)

1 (a) Si prova facilmente che la successione in esame è strettamente decrescente. Infatti

$$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}}{(n+3)!} < \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^n \cdot 2}{(n+3)(n+2)!} < \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+3} < 1$$

e questa ultima relazione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Dal punto precedente segue che

$$\max E = a_0 = \frac{1}{2}, \qquad \inf E = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Quindi E ammette massimo ma non ammette minimo.

2 (a) L'insieme di definizione di f è $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Inoltre, $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $x = 2$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < 1$. I limiti agli estremi dell'insieme di definizione sono:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Ne viene che la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sia destro che sinistro per il grafico di f. Inoltre, il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di tipo salto per f con salto pari a π.

Avendosi

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{se } x \le 0 \vee x \ge 2 \\ -\arctan \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{se } 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \end{cases},$$

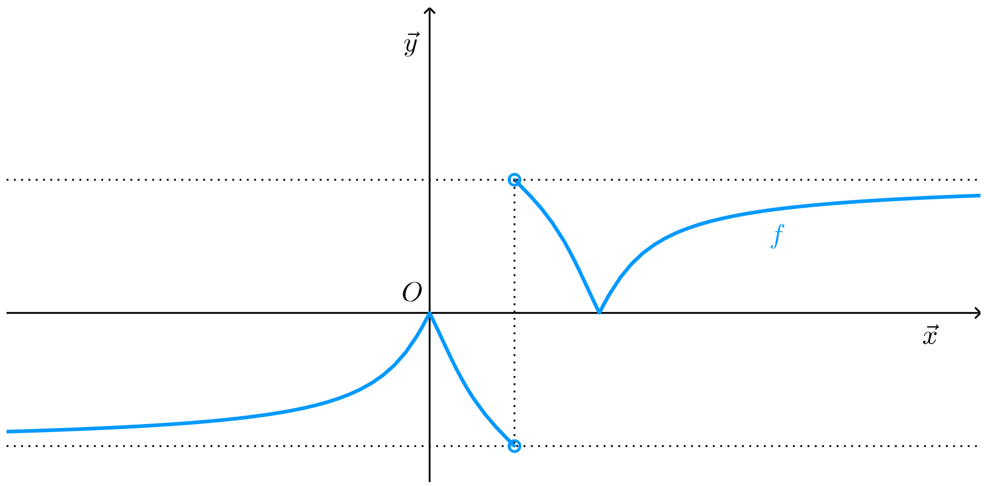
per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0, 2\}$, risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \vee x > 2 \\ -\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{se } 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \end{cases}.$$

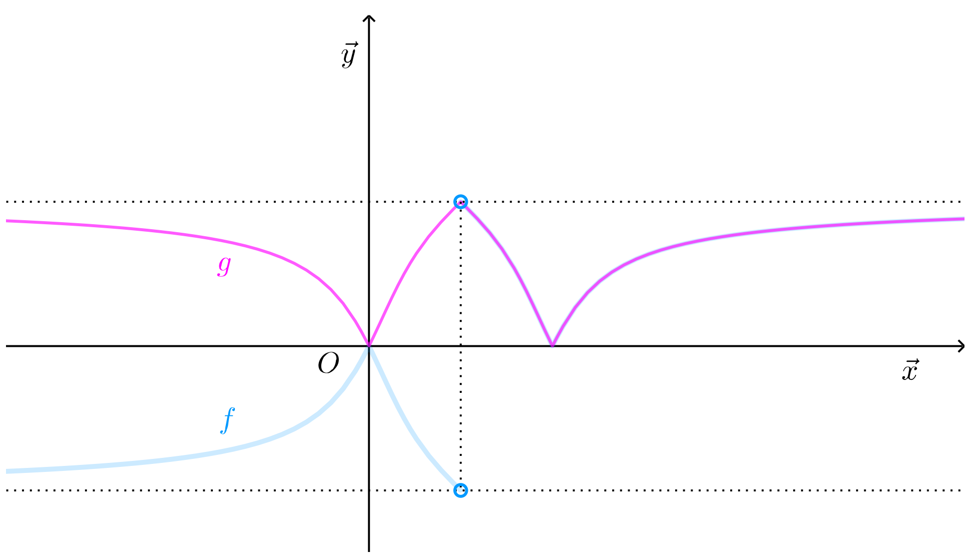
Studiamo la derivabilità di f in $x = 0$ e in $x = 2$. Essendo f continua in tali punti, applichiamo il teorema sul limite della derivata. Con facili conti si vede che

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -2 = f'_+(0),$$
$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -2 \neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 2 = f'_+(2),$$

quindi f non è derivabile né in $x = 0$ né in $x = 2$ ed essi sono punti angolosi per il grafico di f. Inoltre, dallo studio del segno di f' si deduce subito che f è crescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$ e f è decrescente in $[0, 1[$ e in $]1, 2]$. Da quanto visto segue che in $x = 0$ si localizza un punto di massimo locale e in $x = 2$ si localizza un punto di minimo locale.



(b) • Il grafico di g si ottiene a partire dal grafico di f ribaltando rispetto all'asse le parti di grafico giacenti nel semipiano $y < 0$.



• Risulta

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} g(x) = \frac{\pi}{2},$$

quindi f è prolungabile per continuità in $x = 1$ e il prolungamento $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definito da

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

$\boxed{3}$ (a) Si ponga $t = 2\arctan\frac{x^3}{3}$. Risulta $\mathrm{d}t = \frac{18x^2}{x^6+9}\,\mathrm{d}x$. Inoltre, se $x = 0$ si ha $t = 0$ e se $x = \sqrt[3]{3}$ si ha $t = \frac{\pi}{2}$. Alla luce di ciò, denotato con I l'integrale assegnato, per il teorema sul cambiamento di variabile, si ha:

$$I = \frac{1}{18}\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{18x^2}{x^6+9}\mathrm{e}^{2\arctan\frac{x^3}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1}{18}.$$

(b) Avendosi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,$$

la funzione f è continua in $x = 0$. Dalla legge di definizione di f si deduce, pertanto, che $f \in C^0(\mathbb{R})$. Ne viene che f ammette primitive in $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\int \left(x\sqrt{x} + \sin x - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + \mathrm{e}^x + c_1, \qquad \forall c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}\int (x\sin x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x &= -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_2, \qquad \forall c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pertanto, una generica primitiva F di f in $\mathbb{R}$ è la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + \mathrm{e}^x + c_1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

dove le costanti c_1 e c_2 sono tali che F e continua e quindi deve verificarsi che

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x),$$

da cui

$$c_2 = c_1 - 2.$$

Posto $c := c_1$, ne viene che una generica primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + \mathrm{e}^x + c & \text{se } x \geq 0 \\ -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **12 CFU**
4 Ottobre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia data la successione numerica reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dove

$$a_n = \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

(a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
(b) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme $E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.
(c) Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin((-1)^n a_n).$$

2 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \arctan\frac{|x^2-2x|}{x-1}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione di f, studiare il segno, la continuità e la derivabilità di f, determinare le equazioni degli eventuali asintoti per il grafico di f, studiare la monotonia di f ricercando gli eventuali punti estremanti e, infine, utilizzando le informazioni ottenute, tracciare un grafico qualitativo di f.
(b) Sia g la funzione reale di variabile reale definita dalla legge $g(x) = |f(x)|$.
- Dedurre dal grafico di f il grafico di g.
- Dire, giustificando la risposta, se g è prolungabile per continuità in $x = 1$ e, in caso affermativo, determinare l'espressione analitica del prolungamento $\tilde{g}$ di g in $x = 1$.

3 (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{x^6+9} e^{2\arctan\frac{x^3}{3}}\,dx.$$

(b) Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + \sin x - e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x\sin x - \cos 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dire, giustificando la risposta, se f ammette primitive in $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, determinare l'espressione analitica di una generica primitiva di f in $\mathbb{R}$.

4 Ottobre 2017

Svolgimento della prova scritta (12 CFU)

$\boxed{1}$ (a) Si prova facilmente che la successione in esame è strettamente decrescente. Infatti

$$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}}{(n+3)!} < \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^n \cdot 2}{(n+3)(n+2)!} < \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+3} < 1$$

e questa ultima relazione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Dal punto precedente segue che

$$\max E = a_0 = \frac{1}{2}, \qquad \inf E = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Quindi E ammette massimo ma non ammette minimo.

(c) *Serie (a)*. La serie è a termini positivi. Avendosi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+3} = 0 < 1,$$

per il criterio del rapporto, la serie converge.

Serie (b). Per la disparità della funzione $\sin(\cdot)$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin((-1)^n a_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{2^n}{(n+2)!}.$$

Avendosi

$$\left| (-1)^n \sin \frac{2^n}{(n+2)!} \right| \leq \frac{2^n}{(n+2)!}$$

e tenendo conto della convergenza della serie (a), si conclude che la serie (b) converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

$\boxed{2}$ (a) L'insieme di definizione di f è $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Inoltre, $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $x = 2$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < 1$. I limiti agli estremi dell'insieme di definizione sono:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Ne viene che la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sia destro che sinistro per il grafico di f. Inoltre, il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di tipo salto per f con salto pari a π.

Avendosi

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -\arctan \frac{x^2-2x}{x-1} & \text{se } 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \end{cases},$$

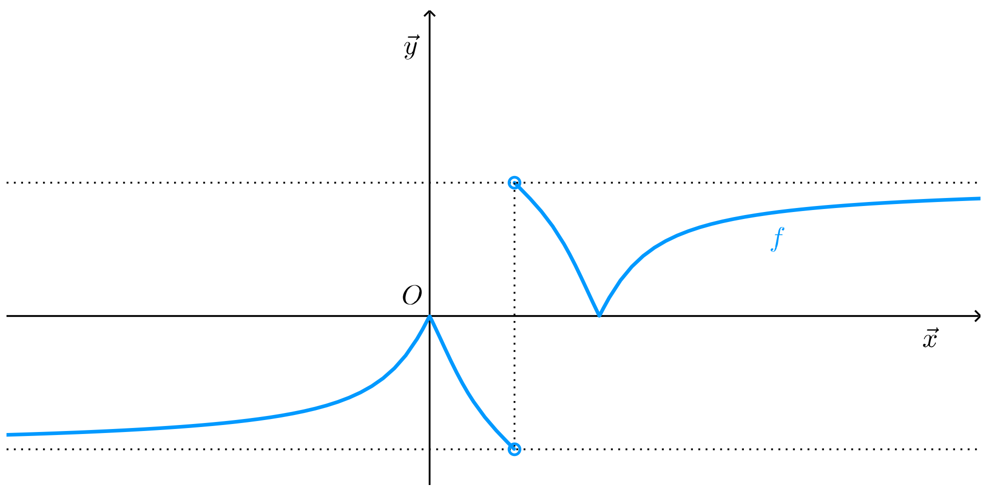
per ogni $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0, 2\}$, risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \vee x > 2 \\ -\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{se } 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \end{cases}.$$

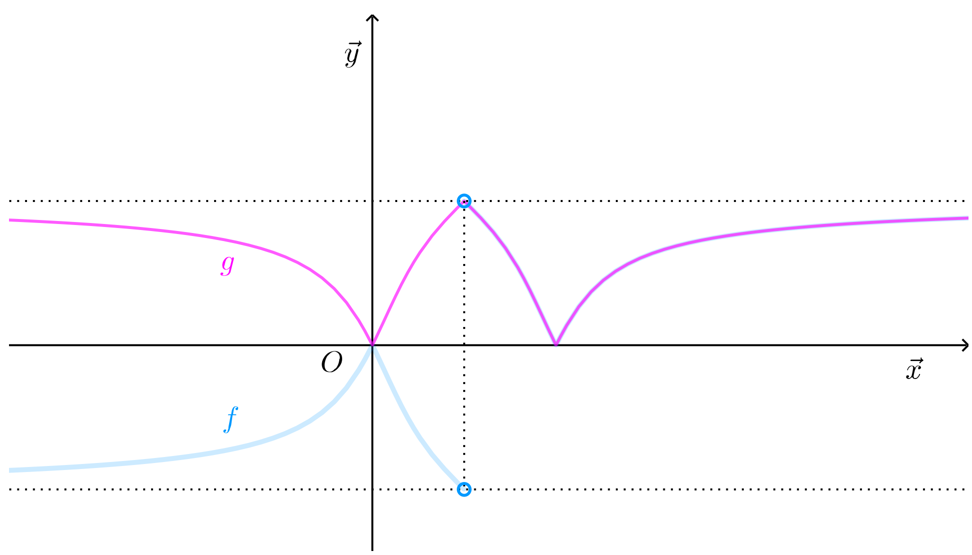
Studiamo la derivabilità di f in $x = 0$ e in $x = 2$. Essendo f continua in tali punti, applichiamo il teorema sul limite della derivata. Con facili conti si vede che

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -2 = f'_+(0),$$
$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -2 \neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 2 = f'_+(2),$$

quindi f non è derivabile né in $x = 0$ né in $x = 2$ ed essi sono punti angolosi per il grafico di f. Inoltre, dallo studio del segno di f' si deduce subito che f è crescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$ e f è decrescente in $[0, 1[$ e in $]1, 2]$. Da quanto visto segue che in $x = 0$ si localizza un punto di massimo locale e in $x = 2$ si localizza un punto di minimo locale.



(b) • Il grafico di g si ottiene a partire dal grafico di f ribaltando rispetto all'asse le parti di grafico giacenti nel semipiano $y < 0$.



- Risulta
$$\lim_{x\to 1^{\pm}} g(x) = \frac{\pi}{2},$$
quindi f è prolungabile per continuità in $x = 1$ e il prolungamento $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definito da
$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

$\boxed{3}$ (a) Si ponga $t = 2\arctan\frac{x^3}{3}$. Risulta $\mathrm{d}t = \frac{18x^2}{x^6+9}\,\mathrm{d}x$. Inoltre, se $x = 0$ si ha $t = 0$ e se $x = \sqrt[3]{3}$ si ha $t = \frac{\pi}{2}$. Alla luce di ciò, denotato con I l'integrale assegnato, per il teorema sul cambiamento di variabile, si ha:
$$I = \frac{1}{18}\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{18x^2}{x^6+9} \mathrm{e}^{2\arctan\frac{x^3}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1}{18}.$$

(b) Avendosi
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,$$
la funzione f è continua in $x = 0$. Dalla legge di definizione di f si deduce, pertanto, che $f \in C^0(\mathbb{R})$. Ne viene che f ammette primitive in $\mathbb{R}$. Si ha:
$$\int \left(x\sqrt{x} + \sin x - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + \mathrm{e}^x + c_1, \qquad \forall c_1 \in \mathbb{R},$$
$$\begin{aligned} \int (x\sin x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x &= -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_2, \qquad \forall c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Pertanto, una generica primitiva F di f in $\mathbb{R}$ è la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge
$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + \mathrm{e}^x + c_1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$
dove le costanti c_1 e c_2 sono tali che F e continua e quindi deve verificarsi che
$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x),$$
da cui
$$c_2 = c_1 - 2.$$
Posto $c := c_1$, ne viene che una generica primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge
$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + \mathrm{e}^x + c & \text{se } x \geq 0 \\ -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per il corso di Formazione Analitica 2 (MAT/05) di **6 CFU**
4 Ottobre 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 (a) Stabilire il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n - \sin\frac{1}{n}}{n^2+1}$$

e, in caso di convergenza, specificare se essa è assoluta.

(b) Studiare, al variare del parametro reale x, il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3+2n+1}(x-1)^{2n}.$$

2 (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{x^6+9} e^{2\arctan\frac{x^3}{3}}\, dx.$$

(b) Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + \sin x - e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x\sin x - \cos 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dire, giustificando la risposta, se f ammette primitive in $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, determinare l'espressione analitica di una generica primitiva di f in $\mathbb{R}$.

3 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to R$ definita dalla legge

$$f(x,y) = \arctan(3x^2 + 3y^2 - 6x).$$

- Determinare gli eventuali estremi relativi di f in $\mathbb{R}^2$.
- Dire, giustificando la risposta, se f ammette estremi assoluti in $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, determinarli.
- Determinare, se esistono, i punti di minimo e di massimo assoluto di f sull'insieme

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}.$$

4 Ottobre 2017

Svolgimento della prova scritta (6 CFU)

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a) Studiamo dapprima la convergenza della serie

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n}{n^2+1}.$$

Con facili conti si vede che (1) converge per il Criterio di Leibniz. Per quanto riguarda la serie

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1} \sin \frac{1}{n},$$

visto che

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n^2+1} \sin \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2+1},$$

e visto che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge, anche (2) converge.
In conclusione, la serie assegnata converge semplicemente in quanto è somma algebrica di serie convergenti.
Si vede subito che la convergenza non è assoluta poiché

$$\left| (-1)^n \frac{3n - \sin \frac{1}{n}}{n^2+1} \right| \geq \frac{3n-1}{n^2+1} \asymp \frac{1}{n}$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente. Dunque, per il criterio del confronto, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{3n - \sin \frac{1}{n}}{n^2+1} \right|$$

diverge positivamente e quindi la serie assegnata non converge assolutamente.

(b) Osserviamo preliminarmente che la serie è a termini non negativi per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, essa è sempre a termini positivi, tranne nel caso in cui $(x-1)^2 = 0$, cioè per $x = 1$. In tal caso, infatti, il termine generale della serie è identicamente nullo, la serie è convergente e la sua somma vale 0.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, posto $a_n = \frac{n+2}{n^3+2n+1}(x-1)^{2n}$, si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = (x-1)^2.$$

Quindi, se $(x-1)^2 > 1$, cioè se $x < 0 \vee x > 2$, per il criterio del rapporto per le serie numeriche, la serie diverge positivamente; se $(x-1)^2 < 1$, cioè se $0 < x < 2$, per il criterio del rapporto per le serie numeriche, la serie converge. Infine, se $x = 0$ oppure $x = 2$, avendosi

$$a_n \asymp \frac{1}{n^2},$$

la serie converge. In conclusione:

- Se $x < 0 \vee x > 2$, la serie diverge positivamente;
- se $0 \leq x \leq 2$, la serie converge.

2 (a) Si ponga $t = 2\arctan \frac{x^3}{3}$. Risulta $\mathrm{d}t = \frac{18x^2}{x^6+9}\,\mathrm{d}x$. Inoltre, se $x = 0$ si ha $t = 0$ e se $x = \sqrt[3]{3}$ si ha $t = \frac{\pi}{2}$. Alla luce di ciò, denotato con I l'integrale assegnato, per il teorema sul cambiamento di variabile, si ha:

$$I = \frac{1}{18}\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{18x^2}{x^6+9} e^{2\arctan \frac{x^3}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \mathrm{d}t = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{18}.$$

(b) Avendosi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,$$

la funzione f è continua in $x = 0$. Dalla legge di definizione di f si deduce, pertanto, che $f \in C^0(\mathbb{R})$. Ne viene che f ammette primitive in $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\int \left(x\sqrt{x} + \sin x - e^x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + e^x + c_1, \qquad \forall c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}\int (x\sin x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x &= -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_2, \qquad \forall c_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pertanto, una generica primitiva F di f in $\mathbb{R}$ è la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + e^x + c_1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

dove le costanti c_1 e c_2 sono tali che F e continua e quindi deve verificarsi che

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x),$$

da cui

$$c_2 = c_1 - 2.$$

Posto $c := c_1$, ne viene che una generica primitiva di f in $\mathbb{R}$ è la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \cos x + e^x + c & \text{se } x \geq 0 \\ -x\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

3 La funzione f è parzialmente derivabile rispetto a x e rispetto a y per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e si ha

$$f_x(x,y) = \frac{6(x-1)}{1 + (3x^2 + 3y^2 - 6x)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{6y}{1 + (3x^2 + 3y^2 - 6x)^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

I punti stazionari di f sono tutte e sole le eventuali soluzioni di $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, cioè tutti gli eventuali punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}.$$

L'unica soluzione del suddetto sistema è il punto $(1, 0)$ e quindi esso è l'unico punto candidato ad essere estremante relativo per f in $\mathbb{R}^2$. Risulta $f(1, 0) = \arctan(-3)$. Senza ricorrere al test della derivata seconda, si vede subito che $(1, 0)$ è un punto di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}^2$ (e quindi anche punto di minimo relativo). Infatti:

$$f(x,y) \geq f(1,0) \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(3x^2+3y^2-6x) \geq \arctan(-3) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+3y^2-6x \geq -3$$
$$\Leftrightarrow \qquad x^2+y^2-2x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2 \geq 0$$

e questa ultima disuguaglianza, equivalente alla prima, è vera per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Da quanto visto, non esistono quindi punti di massimo relativo per f in $\mathbb{R}^2$ e quindi non esistono quindi punti di massimo assoluto per f in $\mathbb{R}^2$.

Poiché f è continua in K e K è il cerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1, per il Teorema di Weierstrass f ammette in K sia minimo che massimo assoluto. Poiché $(1,0) \in K$, da quanto provato prima, si deduce che $(1,0)$ è punto di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}^2$. Da ciò segue che tutti i punti della frontiera di K sono candidati ad essere punti di massimo assoluto per f in K. Ora, visto che per ogni $P \in \partial K$ si ha $f(P)=0$, se ne deduce che tutti i punti della frontiera di K sono punti di massimo assoluto per f in K.