Prova scritta di Elementi di Analisi Matematica 2 del 25 giugno 2019

Parte A (Teoria)

[**T1**] Rispondere ad almeno una delle seguenti domande.

a) Sia data un'equazione differenziale lineare completa a coefficienti costanti $y'' + ay' + by = f(x)$, con f funzione continua in un intervallo (α, β). Quale delle seguenti affermazioni è l'unica corretta? **Giustificare la risposta**.

☐ L'equazione ha soluzioni solo se f è una funzione costante

☐ L'equazione ha una e una sola soluzione

☐ L'equazione ha infinite soluzioni

☐ L'equazione ha due soluzioni

b) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta e, in caso contrario, giustificare la risposta mediante un controesempio.

☐ Se $a_n \to +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge

☐ Se $a_n \to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge

☐ Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, $a_n \to +\infty$

☐ Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge, $a_n \to 0$

[**T2**] Enunciare e dimostrare almeno uno dei seguenti teoremi:

a) Proprietà di omogeneità per l'integrale indefinito

b) Formula fondamentale del calcolo integrale

Parte B (Esercizi)

[**E1**] Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Trovare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = 2x + x^2y + 4y^2$ nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

b) Data la funzione $f(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+y^2}$:

i) determinare $D_u f(1,2)$, essendo u il versore della retta di equazione $2x - y + 3 = 0$

ii) stabilire se f è prolungabile per continuità nel punto $(0,0)$ e, in caso affermativo, stabilire se il prolungamento è differenziabile nel punto $(0,0)$

iii) stabilire se f è differenziabile nel punto $(1,1)$.

[**E2**] Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Una soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 4y' = e^{2x}$ è:

- ☐ $y(x) = 1 + 2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$
- ☐ $y(x) = 1 + 2e^{4x} - \frac{1}{4}xe^{2x}$
- ☐ $y(x) = 1 + 2e^{4x} - \frac{1}{4}e^{2x}$
- ☐ $y(x) = 1 + 2e^{4x}$

b) La forma trigonometrica del numero complesso $z = \frac{(-i)^4}{(1+i)^2}$ è:

- ☐ $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
- ☐ $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
- ☐ $\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
- ☐ $\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$