Prova scritta di Elementi di Analisi Matematica 2 del 17 febbraio 2020

Parte A (Teoria)

[**T1**] Rispondere ad almeno una delle seguenti domande.

a) Siano a, b due funzioni reali continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e y_1, y_2 due soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Cosa vuol dire che y_1, y_2 sono indipendenti? Se y_1, y_2 sono indipendenti, qual è l'integrale generale dell'equazione differenziale ?

b) Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che

$$a_{n+1} = (n+1)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Qual è il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}?$$

[**T2**] Rispondere ad almeno uno dei seguenti quesiti:

a) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

b) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie.

Parte B (Esercizi)

[**E1**] Svolgere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Calcolare

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^3 x + 1}\, dx$$

b) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$$

i) determinarne gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0), (1,0)$ e $(1,1)$.

[**E2**] a) Studiare, al variare del parametro reale α il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \int_0^{1/n} \sin t\, dt.$$

b) Determinare l'integrale generale in $]1, +\infty[$ dell'equazione:

$$y' + \frac{y}{x \log x} = \frac{\log x}{x}$$