Università degli Studi di Catania
Anno Accademico 2020-2021
Corso di Laurea in Informatica
Esercizi di **Elementi di Analisi Matematica 2**

Equazioni differenziali

1 Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$y' = e^x\ (y-2)$$
$$y' - 2xy = x$$
$$y'' - y' - 2y = e^{2x}\ (x+3)$$
$$y'' + 3y' - 4y = 2x\ e^{3x}$$
$$y'' - 8y' + 16y = e^{-x}$$
$$y'' - 2y' + y = e^x\ (x+3)$$
$$y'' - 9y = x + 1$$
$$y'' + 2y' - 8y = e^x\ (x^2+1)$$
$$y'' + 2y' - 15y = (2x+1)\ e^x$$
$$y'' + 3y' - 4y = x^2\ e^x$$
$$y'' + y' = x - 6$$
$$y'' + 4y = \cos 2x - \sin 2x$$
$$y'' + 2y = 4 \sin \sqrt{2}\ x$$
$$y'' - 2y' - 3y = e^x\ (\cos x - 3 \sin x)$$

2 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = xe^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 3y' = 3x + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = \cos x \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - xy = 3x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

3 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

(a) $y' = \dfrac{1}{xy}$

(b) $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

(c) $y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}y + \dfrac{1}{x(1+x^2)}$

4 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

(a) $y'' + y - 1 = x \sin x$

(b) $y'' - 2y' + 2y = -2(\sin x - \cos x)e^x$

(c) $y'' - 4y = 4xe^{2x}$

5 Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

verificante le condizioni

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad \int_0^\pi y(x)\,dx = 2$$

6 Risolvere l' equazione differenziale

$$y' + y \tan x = -\frac{1}{\cos x}$$

7 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = yx \sin x + e^{-x\cos x} \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + \frac{6x}{1+3x^2} y = \arctan x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8 Determinare le eventuali soluzioni del seguente problema:

$$\begin{cases} (1+x^2)y' - 2y = \mathrm{e}^{2\arctan x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 \end{cases} .$$

9 Senza integrarla esplicitamente, dimostrare che ogni soluzione positiva dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{1+y}$$

è limitata in ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

10 Dare la definizione di soluzione del seguente problema Cauchy

$$\begin{cases} y'' + [\log(1-x) + 1]\, y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

È possibile stabilire il valore di $y''(0)$?