SOMMA GEOMETRICA

Dimostrazione

Sia $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$

portando 1 al primo membro

$$S_n - 1 = a + a^2 + \dots + a^n$$

$$S_n - 1 = a \underbrace{(1 + a + \dots + a^{n-1})}_{S_n - a^n}$$

Quindi

$$S_n - 1 = a(S_n - a^n)$$

$$S_n - 1 = a S_n - a^{n+1}$$

$$S_n - a S_n = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n(1 - a) = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Funzione Logaritmica

$d, b > 1 \quad , \quad a, c > 0$

1. $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$

Dimostrazione

Sia $x = \log_b a$ e $y = \log_b c \Rightarrow$

$b^x = a$ e $b^y = c$

Dunque $b^{x+y} = a \cdot c$

Calcolando il log (in base b) di entrambi i membri

$$\log_b b^{(x+y)} = \log_b a \cdot c$$

$$(x+y) \underbrace{\log_b b}_{1} = \log_b a \cdot c$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b a \cdot c$$

2. $\log_b a^c = c \log_b a$

$y = \log_b a \Rightarrow b^y = a \Rightarrow b^{yc} = a^c$

$yc = \log_b a^c \Rightarrow c \cdot \log_b a = \log_b a^c$

Sommatorie

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n \\
n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 1
\end{array}$$

$$n+1$$

Se calcoliamo $(n+1)n$ otterremmo
il doppio della somma richiesta
Il valore che ci serve è dunque

$$\frac{(n+1)n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Proviamolo per induzione

$n=1$ $$\frac{1\cdot(2)\cdot(3)}{6} = 1 \quad \text{ok}$$

Sia la tesi vera per $n=k-1$

Proviamo il caso $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} i^2 + k^2 =$$

$$= \frac{(k-1)\,k\,(2(k-1)+1)}{6} + k^2 =$$

$$= \frac{(k-1)k(2(k-1)+1) + 6k^2}{6} =$$

$$= \frac{k\left[(k-1)(2(k-1)+1)+6k\right]}{6} =$$

$$= \frac{k\left[(k-1)(2k-2+1)+6k\right]}{6} =$$

$$= \frac{k\left[(k-1)(2k-1)+6k\right]}{6} =$$

$$= \frac{k\left(2k^2-2k-k+1+6k\right)}{6} =$$

$$= \frac{k\left(2k^2+6k+1\right)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ESERCIZIO

Determinare il numero di passi del seguente algoritmo

```
for (i=1; i≤n; i++)
    for (j=1; j≤i; j++)
        for (k=1; k≤j; k++)
            { do something }
```

Assumiamo che il costo del corpo (t_k) sia costante $t_k = t$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} t =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \underbrace{jt}_{} =$$

perché l'ultima sommatoria costa jt

$$= t \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j \right) = t \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} =$$

$$= \frac{t}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \right) =$$

$$= \frac{t}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \simeq n^{3}$$

Notazione Asintotica - Esempi

1. $8n - 2 \in O(n)$

Ponendo $c = 8$ $\quad n_0 = 1$

$$8n - 2 \leq 8n \quad \forall n \geq 1$$

— * —

2. $5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n + 7 \in O(n^4)$

Ponendo $c = 5+3+2+4+7 = 21$, $n_0 = 1$

$$5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n + 7 \leq 21 n^4 \quad \forall n \geq 1$$

— * —

3. $6n^2 + 3n \log n + 2n + 5 \in O(n^2)$

$c = 6+3+2+5 = 16$ $\quad n_0 = 1$

4 $6n^2 + 2^{\log n} + 4 \in O(n^2)$

$$\Downarrow$$

$6n^2 + n + 4 \in O(n^2)$

5. $3n^2 + 6n \in O(n^2)$

$C = 4$ $\quad n_0 = 6$

SEGMENTI DI SOMMA MASSIMA

Complessità della prima soluzione

Il ciclo for più interno viene eseguito al massimo

$$j-i+1 \text{ volte}$$

Num. totale di passi dell'algoritmo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=i}^{j} t = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} j-i+1 =$$

costante che possiamo porre 1

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} j = \qquad \boxed{\sum_{j=i}^{n-1} j-i+1 = \sum_{j=1}^{n-i} j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)^2}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$O(n^3)$$