DIPARTIMENTO
di MATEMATICA
e INFORMATICA

Anno Accademico 2018-2019

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU) [A-L]

11 Luglio 2019

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia dato il seguente numero complesso:

$$z = \frac{1}{|1+i|^2}\left[\operatorname{Re}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right) - \frac{1+i}{i} + |e^{i2019\pi}|\right].$$

(a) Scrivere z in forma algebrica, in forma trigonometrica e in forma esponenziale.
(b) Calcolare le radici cubiche di z.

2 Siano date le seguenti equazioni:

$$(E_1): \qquad (2x-1)^{2019} + (2x-1)^{2017} + 2x - 1 = 0,$$
$$(E_2): \qquad 2^{x^2-1} + x^2 - 1 = 0.$$

(a) Provare che (E_1) ammette una sola soluzione reale e determinarla.
(b) Stabilire se (E_2) ammette soluzioni reali e, in caso affermativo, dire quante sono e localizzarle in $\mathbb{R}$ determinando degli intervalli tali che ciascuno di essi contenga una e una sola soluzione di (E_2).

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x^2-4}{|x-1|}.$$

Studiare f e tracciarne un grafico qualitativo.

11 Luglio 2019

Svolgimento della prova scritta

$\boxed{1}$ (a) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$.
(b) $X_0 = e^{i\frac{\pi}{18}}$, $X_1 = e^{i\frac{13}{18}\pi}$, $X_2 = e^{i\frac{25}{18}\pi}$.

$\boxed{2}$ (a) Si può procedere per via diretta:

$$(2x-1)^{2019} + (2x-1)^{2017} + 2x - 1 = (2x-1)\underbrace{\left[(2x-1)^{2018} + (2x-1)^{2016} + 1\right]}_{>0,\ \forall x\in\mathbb{R}} = 0$$

se e solo se $2x - 1 = 0$ cioè $x = \frac{1}{2}$.

(b) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla legge

$$h(x) = 2^{x^2-1} + x^2 - 1.$$

Si ha $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e risulta $h'(x) = 2x2^{x^2-1}\ln 2 + 2x = 2x[2^{x^2-1}\ln 2 + 2]$. Da ciò segue subito che $h'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $h'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$ e $h'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.
Lavoriamo innanzitutto nell'intervallo $[0, +\infty[$. Per quanto osservato sopra, h è strettamente crescente in tale intervallo. Inoltre, $h(0) = -\frac{1}{2} < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Per il Teorema di esistenza degli zeri e per la stretta monotonia, esiste uno ed un solo numero reale x_0 tale che $h(x_0) = 0$, cioè esiste una sola soluzione di (E_2) in $[0, +\infty[$.
Ripetendo lo stesso ragionamento nell'intervallo $]-\infty, 0]$ (o, più semplicemente, tenendo conto della parità della funzione h), si prova che esiste una ed una sola soluzione x_1 di (E_2) in $]-\infty, 0]$.
In definitiva, (E_2) ammette due soluzioni reali: una positiva e una negativa.
Volendo restringere gli intervalli contenenti le radici, si può provare che le ipotesi del Teorema di esistenza degli zeri (oltre che la monotonia) sono verificate, ad esempio, negli intervalli chiusi e limitati $[0, 1]$ e $[-1, 0]$, dunque $x_0 \in]0, 1[$ e $x_1 \in]-1, 0[$.

$\boxed{3}$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Inoltre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{x^2-4}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x < -2 \vee x > 2, \\ f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm 2, \\ f(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 < x < 2,\ x \neq 1. \end{aligned}$$

Inoltre, f è continua in $\operatorname{dom} f$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = -\infty.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale (sia destro che sinistro) per f. Inoltre, non esistono asintoti orizzontali e potrebbero esistere asintoti obliqui. Si trova facilmente che:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad k_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 1,$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \qquad k_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) + x] = -1,$$

dunque la retta di equazione $y = x + 1$ è asintoto obliquo destro per f e la retta di equazione $y = -x - 1$ è asintoto obliquo sinistro per f.

Inoltre,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Studiando il segno di f' si vede facilmente che f è crescente in $]1, +\infty[$ e decrescente in $]-\infty, 1[$. La funzione f non ammette estremi relativi.

Infine,

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{6}{(x-1)^3} & \text{se } x > 1 \\ \frac{6}{(x-1)^3} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Studiando il segno di f'' si deduce facilmente che f ha la concavità verso il basso in $]-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty[$.