Slide 1

Teoria elementare degli Insiemi

Lezione Introduttiva

Terminologia e simboli

Slide 2

Terminologia e simboli

La matematica, come ogni altra disciplina scientifica, utilizza oltre al linguaggio comune un proprio *linguaggio* che serve a rendere con precisione e brevità le proposizioni riguardanti gli enti di cui si occupa. Esso fa largo uso di simboli di cui ora ricorderemo brevemente il significato.

Abbreviazioni e loro significato

- **C.N.** significa condizione necessaria;
- **C.S.** significa condizione sufficiente;
- **C.N.S.** significa condizione necessaria e sufficiente;
- **c.v.d.** significa, com'è usuale, come volevasi dimostrare.

Slide 3

e=AND, o=OR

Quando all'interno delle proposizioni faremo uso delle congiunzioni **e** ed **o** intenderemo con esse rispettivamente l'**intersezione logica** (spesso indicata anche con **AND** oppure $\wedge$') e l'**unione logica** (anche indicata con **OR** oppure $\vee$).

Implicazione:$\Leftarrow$,$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Siano P e Q due proposizioni.
Diremo che *P implica Q* se ogni volta che P è vera lo è anche Q e scriveremo P $\Rightarrow$ Q.

Tale scrittura si legge equivalentemente nei modi seguenti:
P implica Q, oppure *da P segue Q*, oppure *C.N. perché sia P vera è che lo sia Q*, oppure *C.S. perché Q sia vera è che lo sia P.*

Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ si scrive $P \Leftrightarrow Q$ e si dice che *P equivale a Q* (oppure *C.N.S. affinché P sia vera è che Q sia vera*, *P vale se e soltanto se vale Q*).

In alcuni casi si usa anche scrivere *P* **sse** *Q*, intendendo con questo *P è vera* ***se e solo se*** *è vera Q.*

Quantificatori: $\exists$, $\forall$

Essi rendono più rapido e preciso il linguaggio.
Il loro significato è il seguente:

1. $\forall$: per ogni, qualunque sia.
2. $\exists$: esiste (almeno un).

La negazione è sempre data dal segno / sopra il simbolo in questione.
Ad esempio, $\nexists$ significa *non esiste (alcun)*; analogamente la negazione di uguaglianza è indicata con il simbolo $\neq$.

Slide 6

Il Metodo della Matematica

Il metodo comunemente usato in matematica consiste nel precisare senza ambiguità i **presupposti**(le regole del gioco), che non possono essere cambiati nel corso dell'elaborazione della teoria, e nel dedurre, con passaggi logici, da tali presupposti il maggior numero di informazioni.
I presupposti vengono chiamati **postulati** o **Assiomi**.
Da questi, mediante dimostrazioni logiche, vengono dedotti i risultati nella forma di **teoremi** (corollari, proposizioni).

Slide 7

Lezione 1

Teoria elementare degli Insiemi

Slide 8

Insiemi

La nozione di insieme viene spesso utilizzata nella vita di tutti i giorni; ad esempio si parla dell'insieme

- degli iscritti ad un corso di laurea
- delle stelle in cielo
- dei punti di un piano

Un insieme è semplicemente una collezione di oggetti detti **elementi dell'insieme**.
Gli insiemi sono completamente caratterizzati dai loro elementi: due insiemi sono uguali (cioè sono lo stesso insieme) se contengono gli stessi elementi. Questa affermazione viene detta principio di **estensionalità**.

Slide 9

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole **A, B, C, ...**
Gli elementi che fanno parte degli insiemi si indicano con le lettere minuscole *a, b, c, ...*
Per descrivere e precisare quali siano gli elementi di un insieme si possono utilizzare varie rappresentazioni:

- rappresentazione tabulare;
- rappresentazione grafica;
- rappresentazione caratteristica.

Rappresentazione Tabulare

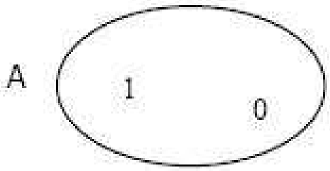
Esempio 2.
L'insieme **B** formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione tabulare:

$$\mathbf{B} = \{\text{ a, e, i, o u }\}.$$

Definizione - Un **insieme** si dice **finito** quando è possibile scriverne la rappresentazione tabulare e tale scrittura ha termine. In caso contrario si dice **infinito**.

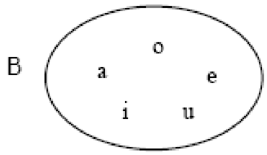
Rappresentazione grafica

La rappresentazione grafica di un insieme consiste nel racchiudere i suoi elementi in una linea chiusa.
Tale rappresentazione si chiama **diagramma di Venn**.
Esempio 1. L'insieme **A** costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione grafica:



Slide 12

Esempio 2. L'insieme **B** formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:



Slide 13

Rappresentazione caratteristica

La rappresentazione caratteristica di un insieme consiste nel *caratterizzare* i suoi elementi *con una proprietà comune* detta appunto proprietà caratteristica.
Esempio 1. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione caratteristica:

$$\mathbf{A} = \{ \text{ numeri interi compresi tra 0 e 2 } \}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{A} = \{x \text{ numeri interi, } 0 \leq x \leq 2 \}$$

Slide 14

Esempio 2. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:

$$\mathbf{A} = \{ \text{ vocali dell'alfabeto italiano } \}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{A} = \{\text{x: vocale dell'alfabeto italiano } \}$$

Slide 15

Insiemi: Definizioni

L'Universo $\mathbb{U}$.
È bene fissare di volta in volta un universo di oggetti. denotato di solito con $\mathbb{U}$. Gli insiemi che verranno considerati conterranno solo elementi di tale universo.
Tipiche scelte per universo sono:

- $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali (cioè $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$).
- $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi (cioè tutto $\mathbb{N}$ più $0,\ -1,\ -2,\ \ldots$)
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$, l'insieme dei numeri razionali, l'insieme dei numeri razionali positivi, e l'insieme dei numeri razionali negativi. (N.B. I numeri positivi sono strettamente maggiori di 0. I numeri negativi sono strettamente minori di 0).

Slide 16

L'insieme vuoto $\emptyset$

- **Definizione**. Si definisce **insieme vuoto** l'insieme privo di elementi che si indica col simbolo $\emptyset$.

(**Nota** Nel caso degenere in cui l'universo è vuoto allora esso coincide con l'insieme vuoto.)

Slide 17

Relazioni tra Insiemi: Simboli e significato

- **Il simbolo di appartenenza:** $\in$
  Quando a denota un elemento e $\mathbf{Q}$ un insieme, scriveremo $a \in \mathbf{Q}$ per dire che a appartiene a $\mathbf{Q}$.
  Scriveremo $a \notin \mathbf{Q}$ per dire che a non appartiene a $\mathbf{Q}$.
  Scriveremo $a, b \in \mathbf{Q}$ per abbreviare: $a \in \mathbf{Q}$ e $b \in \mathbf{Q}$.
- **Insiemi Uguali $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.**
  Definizione. Due insiemi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si dicono **uguali** quando sono costituiti dagli stessi elementi, cioè ogni elemento di uno è anche elemento dell'altro.
  In questo caso si scrive: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
- **Insiemi diversi $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.**
  Definizione. Se due insiemi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ non sono eguali allora si dice che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono **diversi** e si scrive: $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Slide 18

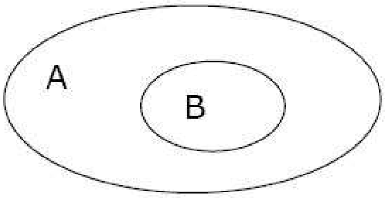
- **Insiemi disgiunti** . **Definizione**
  Se nessun elemento di **A** sta in **B**, allora si dice che **A** e **B** sono **disgiunti**.
- *Esempio 1.* Se
  $\mathbf{A} = \{r, t\}$ e $\mathbf{B} = \{t, r\} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
- *Esempio 2.* Se
  $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ e $\mathbf{B} = \{a, d, e\} \Rightarrow \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.
- *Esempio 3.* Se $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ e $\mathbf{B} = \{m, n, t\} \Rightarrow$ **A** e **B** sono disgiunti.

Slide 19

L'inclusione - *simbolo* $\subseteq$

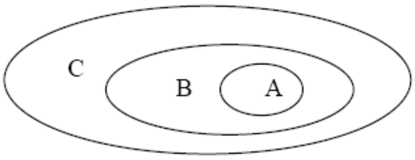
Definizione. Diremo che **B** è un **sottoinsieme** di **A** se ogni elemento di **B** appartiene anche a **A**.
Si dice anche che **B** è incluso in **A**.
Scriveremo $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

Per dire che **B** non è un sottoinsieme di **A** scriveremo $\mathbf{B} \nsubseteq \mathbf{A}$.



Slide 20

Talvolta per dire che $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ si scrive per brevità una <u>*catena di inclusioni*</u> $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$



Slide 21

Uguaglianza e doppia inclusione

Si noti che se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ allora ovviamente $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Viceversa, se si ha simultaneamente $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ allora $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ hanno gli stessi elementi e quindi, per il **principio di estensionalità**, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Abbiamo quindi che $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ se e solo se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. La espressione **se e solo** se viene spesso abbreviata con **sse** o sostituita con il simbolo $\Leftrightarrow$.

Slide 22

Inclusioni banali

É immediato verificare che le inclusioni $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{U}$ valgono per ogni insieme $\mathbf{A}$.
Anche $\emptyset \subseteq \mathbf{A}$ vale anche per qualsiasi insieme $\mathbf{A}$.
Infatti $\emptyset \subseteq \mathbf{A}$ significa che ogni elemento di $\emptyset$ è un elemento di $\mathbf{A}$.
Se ciò non fosse vero dovremmo essere in grado di trovare un controesempio, cioè un elemento di $\emptyset$ che non appartiene a $\mathbf{A}$. Ma $\emptyset$ non ha elementi sicché tale controesempio non può esistere.

$$\Downarrow$$

Ogni insieme possiede sicuramente due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto.

Slide 23

Inclusione stretta, $\subset$

Definizione: Si definisce **sottoinsieme proprio** di un insieme $\mathbf{A}$ ogni suo sottoinsieme non vuoto e distinto da $\mathbf{A}$.
Il generico insieme $\mathbf{B} \neq \emptyset$ si dirà quindi sottoinsieme proprio di $\mathbf{A}$, e si scriverà $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, se

$$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{B} \neq \mathbf{A}$$

Si può anche dire che:
$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ se $\forall b \in \mathbf{B} \Rightarrow b \in \mathbf{A}$ e $\exists\, \bar{a} \in \mathbf{A} : \bar{a} \notin \mathbf{B}$
Nota. Il termine e indica **AND** o equivalentemente $\wedge$.

Slide 24

Operazioni Booleane

I principali operatori booleani binari sugli insiemi sono:

$* \cap *$: Intersezione

$* \cup *$: Unione

$* \setminus *$: Differenza

$* \Delta *$: Differenza simmetrica

Il principale operatore unario è

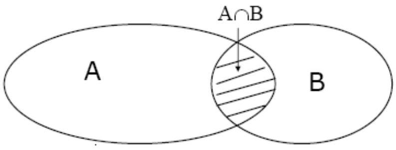
$\neg *$: il complemento

Slide 25

Intersezione

• ***Definizione.*** Si definisce **intersezione** tra due insiemi **A** e **B**, l'insieme formato dagli elementi comuni ad **A** e **B**.
L'intersezione è un operatore binario tra insiemi che viene indicato con il simbolo ∩.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \;\; e \;\; x \in \mathbf{B}\}$$



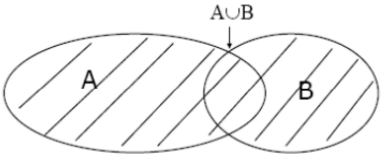
Slide 26

Unione

- ***Definizione***. Si definisce **unione** tra due insiemi **A** e **B**, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad **A** o che appartengono a **B**.

L'unione è un operatore binario tra insiemi che viene indicato con il simbolo $\cup$.

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \ \ o \ \ x \in \mathbf{B}\}$$



Slide 27

Ovviamente:

- Se **A** e **B** non hanno elementi comuni allora $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \supseteq \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}$

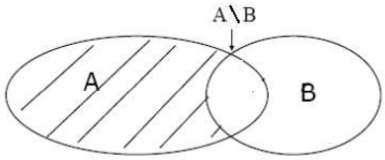
Slide 28

Differenza

- **Definizione**. Si definisce insieme **differenza** tra due insiemi **A** e **B**, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad **A** e che non appartengono a **B**.

La differenza è un operatore binario tra insiemi che viene indicato con il simbolo $\setminus$.

$$\mathbf{A}\setminus\mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \ \ e \ \ x \notin \mathbf{B}\}$$



Slide 29

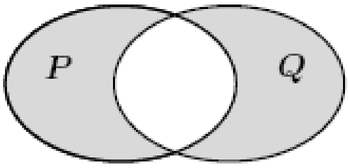
Differenza Simmetrica

- **Definizione**. La **differenza simmetrica** tra **A** e **B** è l'insieme degli elementi che appartengono ad **A** e non appartengono a **B** **o** che appartengono a **B** ma non appartengono ad **A**. Viene denotata con $\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \triangle \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \ \mathbf{e} \ x \notin \mathbf{B}, \ \mathbf{o}\ , x \in \mathbf{B} \ \mathbf{e} \ x \notin \mathbf{A}\}.$$

Valgono, come si vede dalla figura, le due relazioni seguenti:

$$\mathbf{A} \triangle \mathbf{B} = (\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}) \cup (\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}) \qquad \mathbf{A} \triangle \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})\setminus(\mathbf{B} \cap \mathbf{A})$$

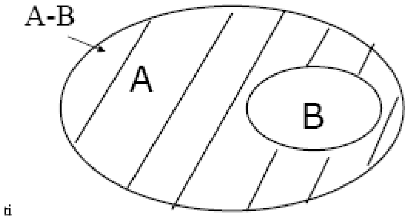


Slide 30

Differenza complementare

• **Definizione**. Si definisce **differenza complementare** tra due insiemi, l'insieme **A** ed un suo sottinsieme **B**, $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono a **A** ma non a **B**.
La differenza è un operatore binario tra insiemi che viene indicato con il simbolo $-$.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x : x \in \mathbf{A} \;\; e \;\; x \notin \mathbf{B}, \mathbf{B} \subset \mathbf{A}\}$$

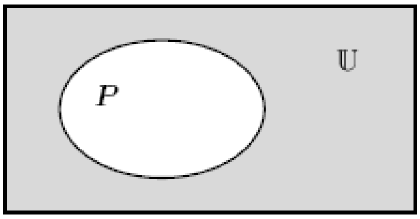


Slide 31

Il Complemento

• **Definizione**. Dato un insieme **A** e l'Universo $\mathbb{U}$ si chiama **complemento di A**, l'insieme differenza $\mathbb{U} \backslash \mathbf{A}$.
Questo insieme viene denotato con $\neg\mathbf{A}$, o $\mathbf{C}(\mathbf{A})$, o $\mathbf{A}^C$.
Dire che un elemento x dell'universo appartiene al complemento di **A equivale** a dire che x non appartiene ad **A**:

$$\text{se } x \in \neg\mathbf{A} \iff x \notin \mathbf{A}.$$



Slide 32

Esempi

- *Esempio 1*

$$\text{Se: } \mathbf{A} = \{a, b, c, d\} \text{ e } \mathbf{B} = \{a, d, f\}$$
$$\Rightarrow \ \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{a, d\} \text{ e}$$
$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a, b, c, d, f\}$$

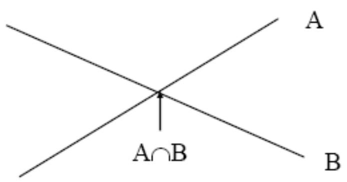
- *Esempio 2*

$$\text{Se: } \mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } \mathbf{B} = \{1, 3, 5\}$$
$$\Rightarrow \ \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{1, 3\} \text{ e}$$
$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Slide 33

- *Esempio 3.* Siano **A** e **B** gli insiemi dei punti di due rette non parallele, r ed s, giacenti su uno stesso piano.

$\mathbf{A} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R} : y = mx + q\}$ e
$\mathbf{B} = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R} : y = nx + p\}$, con $m \neq n$.
Allora $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ é l'insieme formato dal punto di intersezione.



Se le rette r ed s fossero state parallele ($m = n$) allora $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

- *Esempio 4*

$$\text{Se: } \mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } \mathbf{B} = \{1, 3\}$$
$$\Rightarrow \ \mathbf{A} - \mathbf{B} = \{2, 4\}$$

Slide 34

Identità booleane

Definizione. Dicesi **Identità Booleana** una eguaglianza tra insiemi che vale *per ogni* insieme *in ogni* universo.
Le seguenti identità booleane valgono in *qualsiasi* universo e *qualsiasi* siano gli insiemi **A** e **B**.

1) $\neg\neg\mathbf{A} = \mathbf{A}$

2) $\mathbf{A} \bigtriangleup \mathbf{B} = \mathbf{B} \bigtriangleup \mathbf{A}$ → $\bigtriangleup$ è un operatore commutativo.

3) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$ → $\cup$ è un operatore commutativo.

4) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$ → $\cap$ è un operatore commutativo.

5) $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \neg\mathbf{B}$ → $\setminus$ è un operatore **non** commutativo.

Slide 35

Equivalenze

Il simbolo $\Longleftrightarrow$ verrà usato per abbreviare l'espressione *se e solo se.* Si sottintende anche che l'espressione vale *per ogni* insieme e *per ogni* possibile universo.

Esempi

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \Longleftrightarrow \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$

oppure

$$\mathbf{A} \bigtriangleup \mathbf{B} = \emptyset \Longleftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Slide 36

Implicazioni

Il simbolo $\Longrightarrow$ verrá usato per abbreviare l'espressione *se ... allora*. Anche in questo caso si sottintende che l'espressione vale *per ogni* insieme e *per ogni* possibile universo.

Esempio

$$\mathbf{A} = \emptyset \Longrightarrow \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$

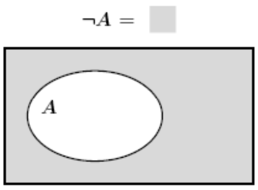
Slide 37

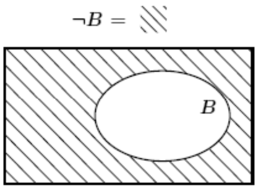
Leggi di *De Morgan*

Le seguenti due identità prendono il nome di **Leggi di De Morgan**:

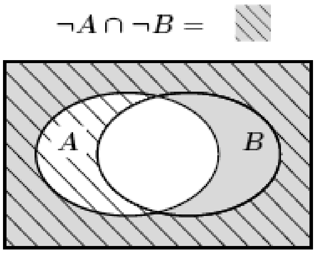
$$\neg\left(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}\right) = \neg\mathbf{A} \cap \neg\mathbf{B}$$
$$\neg\left(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}\right) = \neg\mathbf{A} \cup \neg\mathbf{B}$$

Verifichiamo graficamente la prima (da destra a sinistra)





Sovrapponendo le due figure otteniamo



2^a Legge di De Morgan (*derivazione dalla prima*)

La seconda legge di De Morgan si può derivare dalla prima. Infatti, dalla prima legge si ha:

$$\forall\ \mathbf{P}, \mathbf{Q} \Longrightarrow \neg(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) = \neg\mathbf{P} \cap \neg\mathbf{Q}$$

Prendendo il complemento di entrambi i membri dell'equaglianza, si ha

$$\neg\neg(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) = \neg(\neg\mathbf{P} \cap \neg\mathbf{Q})$$

Semplificando la doppia complementazione, si ottiene

$$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) = \neg(\neg\mathbf{P} \cap \neg\mathbf{Q}),$$

Slide 40

Questa relazione vale *per ogni* insieme $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ in *qualsiasi* universo. Quindi, in particolare, vale per gli insiemi: $\mathbf{P} = \neg\mathbf{A}$ e $\mathbf{Q} = \neg\mathbf{B}$. Sostituendo si ottiene:

$$(\neg\mathbf{A} \cup \neg\mathbf{B}) = \neg(\neg\neg\mathbf{A} \cap \neg\neg\mathbf{B}),$$

Semplificando la doppia complementazione a destra, si ottiene:

$$(\neg\mathbf{A} \cup \neg\mathbf{B}) = \neg(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

che è la seconda Legge di De Morgan.

Slide 41

Interdefinibilità di ¬, ∩ e ¬, ∪

Le leggi di deMorgan permettono di esprimere l'intersezione tramite l'unione ed il complemento o viceversa l'unione tramite l'intersezione ed il complemento.
Queste leggi possono infatti essere scritte nella forma:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \neg(\neg\mathbf{A} \cap \neg\mathbf{B})$$
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \neg(\neg\mathbf{A} \cup \neg\mathbf{B})$$

Slide 42

Relazioni tra la Differenza simmetrica e Complemento

Le due relazioni che seguono stabiliscono uno stretto rapporto tra la differenza simmetrica ed il complemento.

$$\mathbf{A} \bigtriangleup \mathbf{B} = \neg\mathbf{A} \bigtriangleup \neg\mathbf{B} \ \ (\star)$$

$$\neg(\mathbf{A} \bigtriangleup \mathbf{B}) = \neg\mathbf{A} \bigtriangleup \mathbf{B} \ \ (\star\,\star)$$

Slide 43

Leggi di associatività degli operatori booleani

La seguenti identità si chiamano **Leggi di Associatività**:

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \bigtriangleup \mathbf{B}) \bigtriangleup \mathbf{C} = \mathbf{A} \bigtriangleup (\mathbf{B} \bigtriangleup \mathbf{C})$$

L'associatività dell'unione e della intersezione sono semplici da verificare.
Lo studente verifichi l'associatività della differenza simmetrica utilizzando i diagrammi di Venn.

Slide 44

Grazie a queste identità si possono omettere alcune parentesi.

Esempio: le cinque espressioni che seguono sono tutte equali tra loro. L'ultima è ovviamente la più semplice da scrivere:

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup (\mathbf{C} \cup \mathbf{D}) =$$

$$= (\,(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}) \cup \mathbf{D} =$$

$$= \mathbf{A} \cup (\,(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cup \mathbf{D}\,) =$$

$$= \mathbf{A} \cup (\,\mathbf{B} \cup (\mathbf{C} \cup \mathbf{D})\,) =$$

$$= \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$$

Slide 45

Gli Insiemi Numerici

Slide 46

Insiemi Numerici

Una classe di insieme di particolare interesse è rappresentata dagli insiemi numerici. Come è noto dal liceo tali insiemi si distinguono in: insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$), insieme degli interi relativi ($\mathbb{Z}$), insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ ed insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$). Tali insiemi godono della proprietà seguente:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Nella rappresentazione insiemistica appare evidente che ciascuna classe è un ampliamento di quella che la precede.

All'interno di ciascuno di tali insiemi verranno poi definite le operazioni elementari (e successivamente quelle più complesse).

Slide 47

Gli operatori

Definizione: Operatore Unario. Chiameremo operatore unario su un insieme numerico $\mathbf{X}$ una qualsiasi legge $\star$ che associa ad un qualsiasi elemento dell'insieme, i.e. $\forall a \in \mathbf{X}$ un altro elemento di un altro insieme numerico $\mathbf{D}$. $c = \star a,\ c \in \mathbf{D},\ \mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}$.

Definizione: Operatore binario. Chiameremo operatore binario su un insieme numerico $\mathbf{Y}$ una qualsiasi legge $*$ che associa ad una qualsiasi coppia di elementi dell'insieme, i.e. $\forall a, b \in \mathbf{Y}$, un altro elemento dello stesso insieme $c = a * b,\ c \in \mathbf{Y}$.

Slide 48

Gli operatori numerici **binari elementari** sono:

somma, *sottrazione*, *prodotto* e *divisione*

rappresentati rispettivamente con i simboli

$$+ \quad - \quad \cdot \quad /.$$

Gli operatori numerici **unari** più utilizzati sono:

l'opposto di un numero, *l'inverso di un numero*,
la elevazione a potenza, *il logaritmo*,
gli operatori trigonometrici.

Slide 49

Osservazione Taluni operatori (sia unari che binari) sono definibili in modo particolare (o non sono definibili) negli insiemi numerici più ristretti $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ o sutto l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Esempio 1. L'opposto non è definibile all'interno dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Esempio 2. Dati i numeri interi, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a = 2$ e $b = -3$ l'operazione di divisione tra questi numeri è definibile all'interno dei numeri interi a condizione di prendere il massimo intero contenuto nell'operazione *classica* di divisione. Così:

$$a/b = 0 \qquad b/a = -1 \qquad .$$

Nota. Quest'ultimo esempio è di notevole importanza quando si opera con le macchine calcolatri elettroniche per la diversa rappresentazione *in machina* dei numeri interi e di quelli reali.

Slide 50

Numeri Naturali

La definizione dei numeri naturali si può derivare dagli assiomi di Peano [1,2]. Questo insieme numerico traduce l'azione naturale del contare.
L'insieme dei numeri naturali è un insieme infinito, indicato con il simbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Gli operatori binari definiti su tale insieme sono quelli elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione), quelli unari sono l'elevamento a potenza ed l'estrazione di radice (nei limiti sopra descritti).

[1] *http : //www.math.unifi.it/ petti/DIDATTICA/MATERIALI/peano.pdf*

[2] *http : //www.dimi.uniud.it/gorni/Dispense/AssiomiDiPeano.pdf*

Slide 51

In primo luogo occorre ricordare l' **ordine** con il quale devono essere svolte le operazioni che si trovano nella medesima espressione.
Il corretto **ordine di priorità decrescente** è il seguente:

1: parentesi
2: potenze e radici
3: moltiplicazioni e divisioni
4: addizioni e sottrazioni.

Esempio: $3 + 4 \cdot (3 + 2)^2 = 3 + 4 \cdot 5^2 = 3 + 4 \cdot 25 = 3 + 100 = 103$.

Slide 52

Le quattro operazioni fondamentali soddisfano le seguenti proprietà.

Addizione

- Proprietà commutativa: $a + b = b + a$
- Proprietà associativa: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Sottrazione

- Proprietà invariantiva: $a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$

Moltiplicazione

- Proprietà commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Proprietà associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
- Proprietà distributiva rispetto alla somma $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Divisione

- Proprietà invariantiva: $a : b = (a : c) : (b : c) = (a \cdot c) : (b \cdot c)$
- Proprietà distributiva rispetto alla somma: $(a + b) : c = a : c + b : c$

Slide 53

Operazione	**Proprietà**	Descrizione
addizione	commutativa →	$a + b = b + a$
	associativa →	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
sottrazione	invariantiva →	$a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$
Moltiplicazione	commutativa →	$a \cdot b = b \cdot a$
	associativa →	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
	distributiva rispetto alla somma →	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Divisione	invariantiva →	$a : b = (a : c) : (b : c) = (a \cdot c) : (b \cdot c)$
	distributiva rispetto alla somma →	$(a + b) : c = a : c + b : c$

Slide 54

Nota. Si noti che in una frazione la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma è applicabile solo al dividendo (numeratore) e non al divisore (denominatore).

Esempio

$$\frac{6+9}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3} \quad \text{mentre} \quad \frac{24}{4+8} \neq \frac{24}{4} + \frac{24}{8}$$

Le proprietà dell'elevamento a potenza e dell'estrazione di radice verranno trattati più avanti.

Slide 55

□

Partendo dai numeri naturali, $\mathbb{N}$,con successivi ampliamenti delle classi numeriche, si possono definire le classi dei numeri relativi, $\mathbb{Z}$, dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e quindi dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Un altro modo per descrivere gli insiemi numerici è quello di postulare l'esistenza dell'insieme dei numeri reali e le relative proprietà, per poi restringersi agli insiemi dei numeri razionali, relativi ed interi.

Slide 56

Assiomi dei Numeri Reali

I numeri reali

Postulato.
Esiste un insieme numerico, che chiameremo **Insieme dei numeri reali** ed indicheremo con $\mathbb{R}$, nel quale è possibile effettuare, con opportune regole, le quattro operazioni elementari $(+,\ -,\ \cdot,\ /)$.

Assiomi dei numeri reali

- **Assiomi relativi alle operazioni**

1. Proprietà associativa,
2. Proprietà commutativa;
3. Proprietà distributiva;
4. Esistenza degli elementi neutri: 0 e 1;
5. Esistenza degli opposti: a e $-a$;
6. Esistenza degli inversi: a e $a^{-1} = 1/a = \frac{1}{a}$.

Slide 59

- **Assiomi relativi all'ordinamento**

7. Dicotomia: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
8. Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$.

Slide 60

- **Assioma di completezza**

9. Siano **A** e **B** due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano un elemento a di **A** e b di **B**.

   Allora esiste **almeno** un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano $a \in \mathbf{A}$ e $b \in \mathbf{B}$.

   In modo sintetico. Siano:

   $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset, \mathbf{B} \neq \emptyset$ tali che $\forall\, a \in \mathbf{A}$ AND $\forall\, b \in \mathbf{B}$ $a \leq b$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tale che } a \leq c \leq b,\ \forall\, a \in \mathbf{A} \text{ AND } \forall\, b \in \mathbf{B}$$

Slide 61

Insieme dei numeri naturali

Dagli assiomi dei numeri reali, possiamo affermare che apparterranno ad $\mathbb{R}$ anche tutti i numeri che sono il risutato di operazioni elementari tra due numeri reali.

$$\Downarrow$$

In particolare, apparterranno ad $\mathbb{R}$ i numeri interi positivi $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1\ )$ che possono ottenersi dall'assioma **4** con l'operazione somma ripetuta più volte .

Tale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si chiama insieme dei numeri naturali e, come è noto si indica con

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

Slide 62

Insieme dei numeri interi relativi

Analogamente utilizzando gli assiomi **4** e **5** possiamo costruire un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dagli elementi di $\mathbb{N}$, dai loro opposti e dall'elemento nullo 0.

Tale insieme prende il nome di: **insieme dei numeri interi relativi** e si indica con:

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n,\ \ldots\}$$

Slide 63

Insieme dei numeri razionali

Presi comunque due numeri interi relativi, $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$, il numero risultante dall'operazione della divisione m/n si chiamerà **numero razionale**.

L'insieme dei numeri razionali costituito dai numeri così costruiti si indicherà con $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{m}{n} : \; m, n \; \in \mathbb{Z}, \; n \neq 0 \, \}$$

Slide 64

Risulta che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Essendo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, su di essi sono definite le operazioni idotte da $\mathbb{R}$.
Essi però non soddisfano tutti gli assiomi dei numeri reali. In particolare:

- In $\mathbb{N}$ non valgono gli assiomi **4** (esistenza dello 0), **5** (esistenza degli opposti), **6** (esistenza degli inversi con l'eccezione del numero 1) e **9** (assioma di completezza).
- In $\mathbb{Z}$ non valgono gli assiomi **6** (esistenza degli inversi con l'eccezione del numero 1) e **9** (assioma di completezza).
- In $\mathbb{Q}$ valgono tutti gli assiomi di operazione e ordinamento ma non vale l'assioma di completezza, **9**.

Slide 65

Operazioni sui numeri naturali

Esamineremo adesso le consequenze di quanto sopra.

In $\mathbb{N}$ non esiste l'opposto e l'inverso di alcun numero.

$$\Downarrow$$

In $\mathbb{N}$ si possono **sempre** eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione ma **non è in genere possibile eseguire le operazioni inverse di sottrazione e divisione**. Cioè

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \ \exists\, r \in \mathbb{N}\ :\ r = m + n$$
$$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \exists\, r \in \mathbb{N}\ :\ r = m \cdot n$$
$$\text{ma}$$
$$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \nexists\ \text{ in generale } r \in \mathbb{N}\ :\ r = m - n$$
$$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0,\ \nexists\ \text{ in generale } r \in \mathbb{N}\ :\ r = \tfrac{m}{n}$$

Slide 66

Operazioni sui numeri interi relativi

Esclusi 1 e -1, in $\mathbb{Z}$ non esiste l'inverso di alcun numero.

$$\Downarrow$$

Questo si traduce dicendo che in $\mathbb{Z}$ **è in genere possibile eseguire le operazioni di addizione, sottrazione e prodotto ma non di divisione**. Cioè

$$\forall m, n \in \mathbb{Z},\ \exists\ \ r \in \mathbb{Z}\ :\ r = m - n$$
$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,\ \nexists\ \text{ in generale } r \in \mathbb{Z}\ :\ r = \tfrac{m}{n}$$

Operazioni sui numeri frazionari

$\mathbb{Q}$ soddisfa tutti gli assiomi di operazione e di ordinamento di $\mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Questo si traduce dicendo che in $\mathbb{Q}$ è possibile eseguire **tutte** le 4 operazioni elementari.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ non soddisfano l'assioma di completezza

L'assioma di completezza, applicato ad $\mathbb{R}$, in modo sintetico dice quanto segue. Siano:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset, \mathbf{B} \neq \emptyset \;\text{ tali che }\; \forall a \in \mathbf{A} \text{ AND } \forall b \in \mathbf{B} \;\; a \leq b$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in \mathbb{R} \;\text{ tale che }\; a \leq c \leq b,\; \forall a \in \mathbf{A} \;\text{ AND }\; \forall b \in \mathbf{B}$$

Se adesso lo applichiamo rispettivamente ad $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ vediamo subito che in questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ esso non è soddisfatto.
Questo è semplice per gli insiemi $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{Z}$.

Slide 69

Consideriamo, ad esempio:
$\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{N}$ definiti come:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 6\}$$
$$\mathbf{B} = \{y \in \mathbb{N} : 7 \leq y \leq 10\}$$

Questi insiemi soddisfano le ipotesi dell'assioma di completezza.
Si vede subito che

$$\nexists z \in \mathbb{N} : x \leq z \leq y \ \ \forall x \in \mathbf{A},\ \forall y \in \mathbf{B}$$

Infatti **non esiste** alcun numero naturale compreso tra 6 e 7.

Analogamente si può ragionare per due sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$

Provare che l'assioma di completezza non vale nel caso dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ risulta più complesso.
Omettiamo la dimostrazione.

Slide 70

Non soddisfare l'assioma di completezza cosa comporta ?

Negli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ è possibile seguire solo una parte delle operazioni elementari.

In $\mathbb{Q}$ sono invece possibili eseguire **tutte** le operazioni elementari.

Per effetto della non validità dell'assioma di completezza in $\mathbb{Q}$ non è possibile eseguire, in generale, calcoli quali la estrazione di radice o il calcolo dei logaritmi.

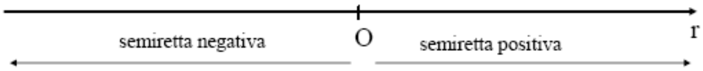
Ovviamente, a maggior ragione, questi non sono in generale possibili anche in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Slide 71

Rappresentazione degli insiemi numerici sulla retta

Si consideri lo *spazio metrico unidimensionale* rappresentato da retta **orientata** r sulla quale è stato segnato un **punto origine** O. Consideriamo inoltre un segmento u che rappresenta l'**unità di misura** sulla retta. $\Downarrow$

- L'orientamento della retta definisce il verso di percorrenza: crescente, decrescente;
- L'origine O divide la retta in due semirette: la semiretta positiva, sul lato del verso crescente, e la semiretta negativa, sul lato opposto;
- L'unità di misura u permette di misurare le distanze sulla retta.



Slide 72

Rappresentazione dei numeri interi, interi relativi e frazionari

La rappresentazione dei numeri sulla retta è una **corrispondenza** tra un elemento x dell'insieme numerico ed un punto P della retta. Gli elementi neutri (*assioma 4*) 0 ed 1 sono rappresentati rispettivamente dall'origine O e dal punto P_1 la cui distanza dall'origine, nella semiretta positiva, è uguale ad $1 \cdot u$.

Per rappresentare il numero intero positivo $n \in \mathbb{N}$ basterà prendere **nella semiretta positiva** il punto P_n che si trova ad una distanza $n \cdot u$ dall'origine O.
Il suo opposto, $-n \in \mathbb{Z}$ sarà rappresentato dal punto P_{-n} che si trova, **nella semiretta negativa** alla stessa distanza $n \cdot u$ dall'origine O.

Slide 73

Si noti che benché gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ siano infiniti essi **non ricoprono** interamente la retta r

$$\Downarrow$$

la corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ ed i punti della retta è una **corrispondenza univoca** ma *non biunivoca.*

Slide 74

Rappresentazione dei numeri frazionari

In modo assolutamente analogo, preso un elemento $m/n \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ esso sarà rappresentato dal punto P che si trova ad una distanza $m/n \cdot u$ dall'origine rispettivamente nella semiretta positiva se $m/n > 0$ e nella semiretta negativa se $m/n < 0$.

Gli elementi di $\mathbb{Q}$ ricoprono interamente la retta r ?

La risposta è NO.

La dimostrazione tuttavia esula dai nostri scopi.

Anche in questo caso la corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{Q}$ ed i punti della retta è una **corrispondenza univoca**.

I punti P della retta r che **non corrispondono** ad elementi di $\mathbb{Q}$ sono detti **numeri irrazionali**. Esempi notevoli di numeri irrazionali sono: $\sqrt{2} = 1,4141\ldots$, $\pi = 3,14\ldots$, $e = 2,7182\ldots$.

Slide 75

Retta e Numeri Reali

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere messo in corrispondeza biunivoca con i punti della retta r:

ad ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ corrisponde un unico punto P della retta r e **viceversa**.

Nota: nel seguito, anche se non esplicitamente menzionato, ci riferiremo sempre all'insieme dei numeri reali.

Slide 76

Intervalli limitati

Definizione. Dicesi **intervallo limitato** un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi sono compresi tra due valori numeri reali $a,\ b\ \in \mathbb{R},\ a < b$.

A seconda che i numeri a e b appartengono o no all'intervallo, questo prende nomi diversi.

Slide 77

Definizioni

- **Intervallo chiuso e limitato**:

$$[a,\ b]\ = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a\ \leq\ x\ \leq\ b\,\}$$

- **Intervallo aperto e limitato**:

$$(a,\ b)\ =]a,\ b[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ a\ <\ x\ <\ b\,\}$$

- **Intervallo aperto a sinistra e limitato**:

$$(a,\ b]\ =]a,\ b] = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a\ <\ x\ \leq\ b\,\}$$

- **Intervallo aperto a destra e limitato**:

$$[a,\ b)\ =\ [a,\ b[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ a\ \leq\ x\ <\ b\,\}$$

Intervalli illimitati

Definizione. Dicesi **intervallo illimitato** un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi sono maggiori (aperto a destra) o minori (aperto a sinistra) di un numero reale $a \in \mathbb{R}$ assegnato.

Gli intervalli illimitati possono essere, dal lato in cui sono limitati, aperti o chiusi.
Le respettive definizioni si deducono facilmente dalle precedenti.

Esempio
Intervallo illimitato a destra e aperto a sinistra

$$(a,\ +\infty)\ =]a,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ a\ <\ x\ <\ +\infty\ \}$$

ovvero

$$(a,\ +\infty)\ =]a,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ : x\ > a\}$$

Intervallo illimitato a destra e chiuso a sinistra

$$[a,\ +\infty)\ =\ \{x \in \mathbb{R}\ :\ a\ \leq\ x\ <\ +\infty\ \}$$

Intorno di un punto

Definizione.
Chiameremo **intorno di un punto x_0 di raggio δ**, e lo indicheremo con $\mathbf{I}_{x_0}(\delta)$, quel sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito come:

$$\mathbf{I}_{x_0}(\delta) = \{\ x \in \mathbb{R}\ :\ x_0 - \delta\ <\ x\ <\ x_0 + \delta\ \}$$

Esercizi

Esercizio 1. Dati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 8\}$$
$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 7\}$$
$$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\}$$

Calcolare l'insieme $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$.

Suggerimento: $\{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\} = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$.

Esercizio 2. Dati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}, \quad \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 1,4\}$$

Calcolare gli insiemi $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

Massimo di un insieme numerico

Sia $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali.

Definizione. Diremo che $M \in \mathbf{A}$ è un **massimo** dell'insieme **A**, se M è maggiore o eguale ad ogni elemento di **A**. Sinteticamente

$$A \in \mathbb{R}, \quad M \text{ massimo di } \mathbf{A}$$
$$\Updownarrow$$
$$M \in \mathbf{A} \quad \text{AND} \quad M \geq a, \ \forall\, a \in \mathbf{A}$$

Nota. Per indicare che M è il massimo di **A** scriveremo:

$$M = \max \mathbf{A}$$

Slide 82

Minimo di un insieme numerico

Sia $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali.

<u>Definizione</u>. Diremo che $m \in \mathbf{A}$ è un **minimo** dell'insieme **A**, se m è minore o eguale ad ogni elemento di **A**. Sinteticamente

$$A \in \mathbb{R}, \quad m \text{ minimo di } \mathbf{A}$$
$$\Updownarrow$$
$$m \in \mathbf{A} \quad \text{AND} \quad m \leq a, \; \forall \, a \in \mathbf{A}$$

Nota. Per indicare che m è il minimo di **A** scriveremo:

$$m = \min \mathbf{A}$$

Slide 83

<u>Non tutti gli insiemi sono dotati di massimo e minimo !</u>

Esempio. Sia **A** l'insieme dei numeri reali positivi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \; > \; 0\}, \text{ allora}$$
$$\Downarrow$$
$$\nexists \; \min \mathbf{A} \;\; \text{e} \;\; \nexists \; \max \mathbf{A}$$

Infatti:

- $\nexists M \in \mathbf{A} : M > x, \forall x \in \mathbf{A} \; \rightarrow$ non eiste il massimo.
- $0 < x, \forall x \in \mathbf{A}$ ma $0 \notin \mathbf{A} \; \Rightarrow$ 0 non è un minimo di **A**. Quindi non esiste il minimo.

Slide 84

Unicità del Massimo e del minimo

Teorema Il massimo e minimo di un insieme numerico, se esistono, sono unici.

Dimostrazione
La tesi del teorema viene si **dimostra per assurdo**.
Supponiamo, per assurdo, che **A** sia dotato di due massimi:
$M_1 =$ max **A** e $M_2 =$ max **A**, con $M_1 \neq M_2$.
Allora valgono contemporaneamente le proprietà:

1. **1a)** $M_1 \in \mathbf{A}$; **2a)** $M_1 \geq a \ \forall a \in \mathbf{A}$;
   3a) ; se $M_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow M_1 \geq M_2$.
2. **1b)** $M_2 \in \mathbf{A}$; **2b)** $M_2 \geq a \ \forall a \in \mathbf{A}$;
   3b) se $M_1 \in \mathbf{A} \Rightarrow M_2 \geq M_1$.

Dalle 3a) e 3b deve aversi contemporaneamente:
$M_1 \geq M_2$ **e** $M_2 \geq M_1$ da cui $\Rightarrow$ $M_1 = M_2$. c.v.d. .

Slide 85

Esempio.
Consideriamo l'insieme numerico:
$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \ : x = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0\} \ = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}.$
Si verifica *abbastanza facilmente* che:

1. max $\mathbf{B} = 1$ (ovvio !);
2. $\nexists$ min **B**.

La proposizione (2) può essere provata in modo abbastanza semplice. Supponiamo, per assurdo, che sia $m =$ min **B**.
Basterà allora trovare un intero ν tale che sia $\frac{1}{\nu} < m$ per provare che m non è il minimo.
Questo valore di ν è dato da qualunque ν tale che $\nu > [\frac{1}{m}] + 1$, dove con la scrittura $[\star]$ si intende il *massimo intero contenuto in* $\star$.
Il ragionamento sopraesposto può ripetersi qualunque sia m assunto come ipotesi (per assurdo) come minimo: $\Rightarrow$ non esiste il minimo dell'insieme **B**.

Slide 86

Maggiorante e minorante di un insieme numerico

Definizione. Un numero reale L si dirà maggiorante per un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ se esso è maggiore o eguale di ogni elemento di $\mathbf{A}$, cioè:

$$L \text{ maggiorante di } \mathbf{A} \iff L \geq a, \forall\, a \in \mathbf{A}$$

Definizione. Un numero reale l si dirà minorante per un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ se esso è minore o eguale di ogni elemento di $\mathbf{A}$, cioè:

$$l \text{ minorante di } \mathbf{A} \iff l \leq a, \forall\, a \in \mathbf{A}$$

Slide 87

Osservazione 1

il massimo e minimo di un insieme, se esistono, sono anche rispettivamente un maggiorante ed un minorante dell'insieme.

NON è vero il viceversa

È infatti facile convincersi che NON È VERO che se esistono un maggiorante e un minorante allora essi sono rispettivamente massimo e minimo dell'insieme.

Osservazione 2

Un insieme di numeri reali non ammette sempre maggioranti o minoranti

Esempio. Sia dato l'insieme $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$.

$$\Downarrow$$

1. $\nexists$ min **A**;
2. $\nexists$ max **A**;
3. $\exists$ minoranti di **A** (ad es. tutti i numeri negativi);
4. $\nexists$ maggioranti di **A**.

Insiemi limitati

Definizione. Un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ di numeri reali si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.

Definizione. Un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ di numeri reali si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante.

Definizione. Un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ di numeri reali si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

$$\mathbf{A} \text{ limitato } \iff \exists\, l,\ L\ \in \mathbb{R} : l \leq a \leq L,\ \forall\, a \in \mathbf{A}$$

Esercizio. Provare che se un insieme **A** ammette un maggiorante L allora l'insieme dei maggioranti di **A** è infinito e dotato di minimo.

Slide 90

Estremo superiore

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente ($\Rightarrow$ ammette maggioranti).

Definizione. Diremo che $e_{sup} \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di $\mathbf{A}$, e scriveremo $e_{sup} = \sup \mathbf{A}$, se e_{sup} è il minimo dell'insieme dei maggioranti di $\mathbf{A}$.

Cioè:

$$e_{sup} = \sup \mathbf{A} \Leftrightarrow \{ \begin{array}{l} 1.\ e_{sup} \geq a,\ \forall\, a \in \mathbf{A} \\ 2.\ \ \forall\, \epsilon\ >\ 0,\ \exists\, \bar{a} \in \mathbf{A}\ :\ e_{sup} - \epsilon\ <\ \bar{a} \end{array}$$

Slide 91

Estremo inferiore

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali non vuoto e limitato inferiormente ($\Rightarrow$ ammette minoranti).

Definizione. Diremo che $e_{inf} \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di $\mathbf{A}$, e scriveremo $e_{inf} = \text{inf}\mathbf{A}$, se e_{inf} è il massimo dell'insieme dei minoranti di $\mathbf{A}$.

Cioè:

$$e_{inf} = \text{inf}\mathbf{A} \Leftrightarrow \{ \begin{array}{l} 1.\ e_{inf} \leq a,\ \forall\, a \in \mathbf{A} \\ 2.\ \ \forall\, \epsilon\ >\ 0,\ \exists\, \bar{a} \in \mathbf{A}\ :\ e_{inf} + \epsilon\ >\ \bar{a} \end{array}$$

Slide 92

Teorema. Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \ \mathbf{A} \neq \emptyset$, un insieme di numeri reali non vuoto, allora valgono le seguenti proposizioni:

- se $\mathbf{A}$ è limitato superiormente $\Longrightarrow \ \mathbf{A}$ ammette estremo superiore;
- se $\mathbf{A}$ è limitato inferiormente $\Longrightarrow \ \mathbf{A}$ ammette estremo inferiore;

Slide 93

Convenzione. Se $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \ \mathbf{A} \neq \emptyset$, è un insieme di numeri reali non vuoto e non limitato superiormente, allora si pone:

$$\mathbf{sup}\ \mathbf{A} \ = \ +\infty$$

Allo stesso modo, se $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \ \mathbf{A} \neq \emptyset$, è un insieme di numeri reali non vuoto e non limitato inferiormente, allora si pone:

$$\mathbf{inf}\ \mathbf{A} \ = \ -\infty$$

$\Downarrow$

In forza della precedente convenzione possiamo dire che:

Ogni insieme di numeri reali diverso dall'insieme vuoto ammette sia l'estremo inferiore che l'estremo superiore.

In particolare

- se è limitato superiormente, ammette estremo superiore finito;
- se è limitato inferiormente, ammette estremo inferiore finito;

Esempi

Esempio 1.

Consideriamo l'insieme dei numeri reali positivi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\,\}.$$

Si può affermare che:

- $\nexists$ min **A** e $\nexists$ max **A**;
- $\exists$ minoranti di **A** e $\nexists$ maggioranti di **A**;

  Inoltre:

- inf $\mathbf{A} = 0$ e sup $\mathbf{A} = +\infty$

Slide 96

Esempio 2.

Sia $\mathbf{Z_p}$ l'nsieme dei numeri interi relativi pari:

$$\mathbf{Z_p} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Si può affermare che:

- $\nexists$ min $\mathbf{Z_p}$ e $\nexists$ max $\mathbf{Z_p}$;
- $\nexists$ minoranti di $\mathbf{Z_p}$ e $\nexists$ maggioranti di $\mathbf{Z_p}$;

  Inoltre:
- inf $\mathbf{Z_p} = -\infty$ e sup $\mathbf{Z_p} = +\infty$

Slide 97

Esempio 3.

Sia $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \; = \; \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$.
Si può affermare che:

- $\nexists$ min $\mathbf{B}$ e $\exists$ max $\mathbf{B} = 1$;
- $\exists$ minoranti di $\mathbf{B}$ e $\exists$ maggioranti di $\mathbf{B}$;

  Inoltre:
- inf $\mathbf{B} = 0$ e sup $\mathbf{A} =$ max $\mathbf{A} = 1$

Slide 98

Esempio 4.

Sia
$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \; = \; \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}$.
Si può affermare che:

- $\exists$ min $\mathbf{C} = 0$ e $\nexists$ max $\mathbf{C}$;
- $\exists$ minoranti di $\mathbf{C}$ e $\exists$ maggioranti di $\mathbf{C}$;

  Inoltre:
- inf $\mathbf{C} =$ min $\mathbf{C} = 0$ e $\exists$ sup $\mathbf{A} = 1$

Slide 99

Esempio 5.

Sia
$\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \; = \; \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\}$.
Si può facilmente provare (provateci !) che:

- $\exists$ inf $\mathbf{C} = 1$ e $\nexists$ min $\mathbf{C}$;
- $\exists$ minoranti di $\mathbf{C}$ e $\exists$ maggioranti di $\mathbf{C}$;

  Inoltre:
- e $\exists$ sup $\mathbf{C} = 2$ e $\exists$ max $\mathbf{C} = 2$

Slide 100

Esempio 6. Consideriamo i due insiemi numerici:

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 - 6x - 7 \; \leq \; 0 \, \}$$
$$E_2 = \{x \in \mathbb{R} \; : \; -x^2 + 12x - 27 \; > \; 0 \, \}$$

Calcolare $E_1 \, \cap \, E_2$ ed $E_1 \, \cup \, E_2$

Soluzione. Per risolvere l'esericizio occorre conoscere gli elementi dei due insiemi, cioè risolvere le due disequazioni che definiscono gli insiemi. Inziamo da E_1:

$$x^2 - 6x - 7 \; \leq \; 0 \;\; \Rightarrow \;\; x^1_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$$
$$\Rightarrow \;\; x^1_1 = -1, \; x^1_2 = 7 \Longrightarrow \;\; E_1 = \{x \in \mathbb{R} \; : \; -1 \leq x \leq 7 \, \}$$

Slide 101

Per E_2 si ha:

$$-x^2 + 12x - 27 \; > \; 0 \;\; \Rightarrow \;\; x^2_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 108}}{-2} = \frac{-12 \pm 6}{-2}$$
$$\Rightarrow \;\; x^2_1 = 3, \; x^2_2 = 9 \Longrightarrow \;\; E_2 = \{x \in \mathbb{R} \; : \; 3 \; < \; x \; 9 \, \}$$

Quindi:

$$E_1 \, \cap \, E_2 \; = \{ \, x \in \mathbb{R} \; 3 < x \leq 7 \, \}$$
$$E_1 \, \cup \, E_2 \; = \{ \, x \in \mathbb{R} \; - 1 \leq x < 9 \, \}$$

Insiemi numerici particolari

Slide 102

Sino ad ora abbiamo considerato insiemi, numerici e non, formati da una collezione di oggetti singoli. Esistono tuttavia situazioni nelle quali l'elemento caratterizzante l'insieme può essere costituito esso stessa da una collezione ordinata di oggetti. Un esempio facile è l'insieme dei coniugi residenti in italia. Per rappresentare questp insieme occorre considerare una **coppia ordinata**, ad es. (nome marito, nome moglie) o (occupazione marito, occupazione moglie) o altro. L'estensione al caso generale di una **n-pla ordinata** è ovvio. Nel caso degli insiemi numeri si considerano spesso n-ple ordinate di numeri reali per rappresentare situazioni diverse. In modo particolare ci interessano gli insiemi formati da coppie o terne di numeri reali, del tipo:

$$(\ x_1,\ x_2\ ), \qquad (\ x_1,\ x_2,\ x_3\ )$$

Gli insiemi numerici formati da coppie ordinate

Slide 103

Consideriamo l'insieme numerico:

$$\mathbf{D} = \{\ (x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \}$$

È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **D** e i punti del piano.

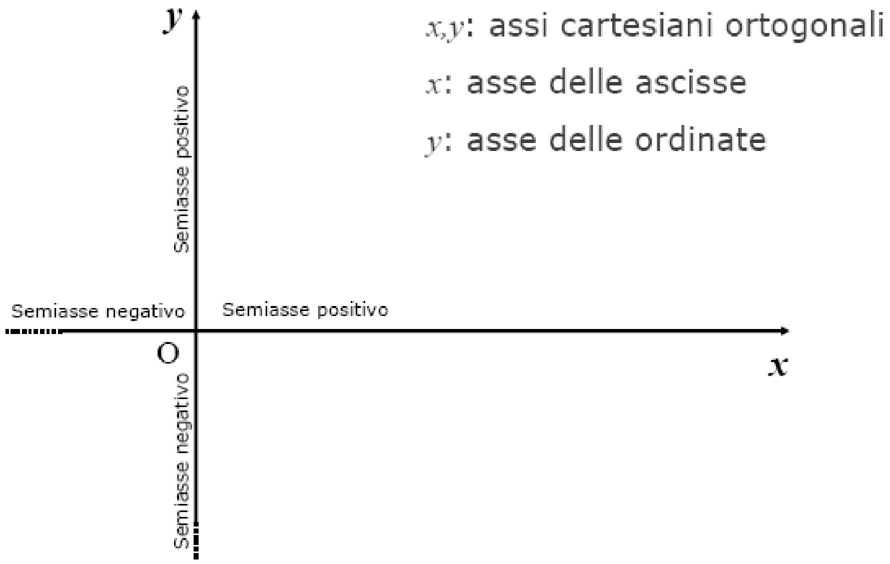
Per far ciò occorre introdurre nel piano un sistema di riferimento e le unità di misura.

Questo problema fu risolto per primo dal matematico e filosofo francese René Descartes (1596-1650), più noto con il nome di Cartesio.

Slide 104

Si considerano nel piano due rette orientate non parallele (normalmente si prendono due rette mutuamente ortogonali), denominate assi cartesiani, su ciascuna delle quali si introduce una unità di misura (normalmente la stessa unità di misura).
Le due rette vengono dette assi cartesiani: asse delle ascisse e asse delle ordinate.
Il punto O di incontro delle due rette viene scelto come l'origine di misura delle distanze su ciascuna delle rette.
Il piano **segnato** dagli assi cartesiani viene così diviso in 4 quadranti. Convenzionalmente si indicherà con il nome di **primo quadrante** quello che contiene i semiassi positivi degli assi cartesiani. I quadranti si numerano a partire dal primo in senso antiorario.

Slide 105



x,y: assi cartesiani ortogonali

x: asse delle ascisse

y: asse delle ordinate

Figura 1: Assi Cartesiani

Slide 106

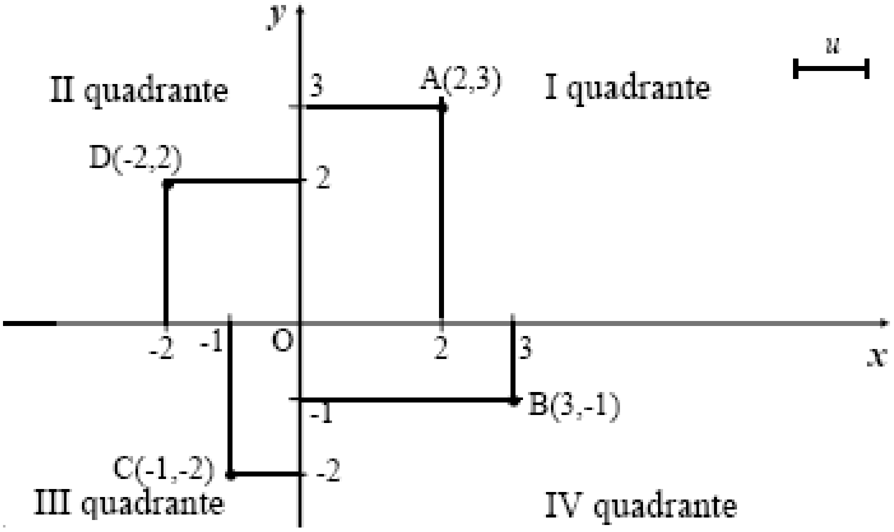


Figura 2: Quadranti del piano segnato da assi Cartesiani

Slide 107

Preso un generico punto P del piano si conducono da esso le rette parallele ai due assi cartesiani e si individuano i punti, P_x e P_y, nelle quali tali rette incontrano gli assi.
Le due distanze dall'origine, rispettivamente sull'asse delle ascisse e quello delle ordinate, rappresentano la coppia ordinata (x_1, x_2) - più spesso indicate con (x, y) - dell'insieme **D** prima definito.

Viceversa presa una coppia ordinata $(x, y) \in \mathbf{D}$ questa individua nel piano segnato dagli assi cartesiani Oxy(u) i punti P_x, sull'asse delle ascisse, e P_y, sull'asse delle ordinate, e conseguentemente il punto P del piano.

In questo modo resta stabilita una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del piano cartesiano Oxy(u) e le coppie di numeri reali.

Slide 108

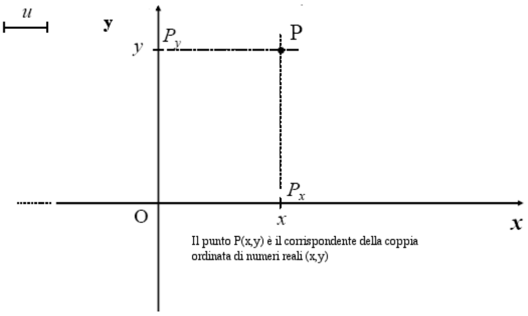


Figura 3: Coordinate Cartesiane

Chiameremo

- il numero x: ascissa del punto P
- il numero y: ordinata del punto P
- i numeri x e y: coordinate del punto P
- diremo che P ha coordinate (x, y) con: $P(x, y)$

Slide 109

Prodotto Cartesiano

Dati due oggetti a e b di un generico universo $\mathbb{U}$, la scrittura (a, b) prende il nome di coppia ordinata di a e b, a è detta prima coordinata e b è detta seconda coordinata.
Valgono le seguenti proprietà:

1. $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$;
2. $(a, b) \neq (b, a) \;\; \forall\, a, b :\; a \neq b.$

Restringiamo ora la nostra attenzione al caso $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.
Definizione. Dati due insiemi $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}$ si chiama **prodotto cartesiano** di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e si indica con $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, l'insieme:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \; \{ \; (a, b), a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \; \}$$

Si osservi che, in generale, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ come segue ovviamente dalla proprietà (2).

Nota. È importante sottolineare che nelle definizioni di coppia ordinata e prodotto cartesiano è fondamentale l'ordine con cui si scrivono gli oggetti e gli insiemi. La definizione di prodotto cartesiano si generalizza a 3 o più insiemi.

Esempio 1 Siano $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbf{B} = \{1, 2\}$, allora:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$$
$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}.$$

È anche possibile rappresentare il prodotto cartesiano di due (o più) insiemi in forma di tabella o mediante una matrice (di cui parleremo in seguito).

Esempio 2 Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} = \mathbb{R}$ allora si scriverà:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \ldots, \quad \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}\,.$$

Le funzioni

Slide 112

Applicazione o Funzione

Il concetto di funzione, di una o piú variabili, viene utilizzato implicitamente nella vita quotidiana.

- Funzioni di una variabile
  - la temperatura dell'atmosfera **T** dipende dall'altitudine **h**, $\mathbf{T} = \mathbf{T(h)}$;
  - la lunghezza **C** della circonferenza dipende dalla lungezza del raggio **r**, $\mathbf{C} = \mathbf{C(r)}$;
  - l'area **A** del cerchio dipende dal quadrato del raggio **r**, $\mathbf{A} = \mathbf{A(r)}$.
- Funzioni di due variabili
  - l'area **A** di un rettangolo dipende dalla lunghezza dei lati **a** e **b**, $\mathbf{A} = \mathbf{A(a,b)}$;
  - il voto **V** dell'esame dipende dallo studio **S** e dalla fortuna **F**, $\mathbf{V} = \mathbf{V(S,F)}$;

Slide 113

Applicazione o Funzione

Dati due insiemi **A** e **B** chiamiamo **funzione** o **applicazione** da **A** in **B** ogni legge (corrispondenza) che associa ad ogni elemento di **A** **uno ed uno solo** elemento di **B**. Si scrive:

$$f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \qquad\qquad \mathbf{A} \underset{\rightarrow}{f} \mathbf{B}$$

oppure

$$x \rightarrow f(x) \qquad\qquad x \rightarrow y = f(x)$$

Slide 114

Nomenclatura

A si chiama *dominio o insieme di definizione* di f e si indica anche con $\mathbf{D}_f$.

B si chiama *insieme di arrivo* di f.

$x \in \mathbf{A}$ é detta *variabile indipendente* o *argomento*;

$y \in \mathbf{B}$ é detta *variabile dipendente* o *valore* o *immagine* di x.

$f(\mathbf{A})$ é detto *codominio* o *insieme dei valori* o *insieme delle immagini* di f. Questo é l'insieme definito da:

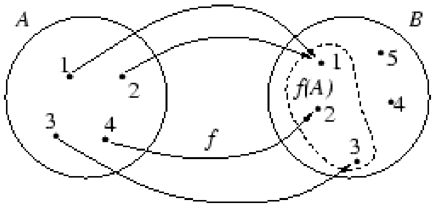
$$f(\mathbf{A}) = \ \{y \in \mathbf{B} \mid \ y = f(x), x \in \mathbf{A}\ \} \subseteq \mathbf{B}$$

Slide 115

Esempio 1. Siano $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Possiamo definire una funzione mediante assegnazione diretta delle immagini degli elementi di **A**:

$$f(1) = 1, \ \ f(2) = 1, \ \ f(3) = 3, \ \ f(4) = 2$$

ottenendo come codominio $f(\mathbf{A}) = \{1, 2, 3\}$.



Slide 116

Esempi di funzioni

Esempio 2.
La legge che associa ad ogni individuo il suo gruppo sanguigno é una funzione:

$$f_1 \ : \ \mathbf{I} \ = \ \{x \mid x \ \text{ é un individuo } \} \to \{A, AB, B, 0\}$$

Esempio 3.
La legge che associa ad ogni numero naturale il suo doppio:

$$f_2 \ : \ \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \mathbb{N}$$

$$n \to 2n\text{definisce} \ \ f_1(\mathbb{N}) = \text{numeri pari.}$$

Slide 117

Grafico di una funzione

Data la funzione $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ chiameremo *grafico della funzione f* l'insieme G_f definito da:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \mid \ y = f(x)\}$$

Nel caso in cui $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}$ questo insieme rappresenta una curva nel piano (x, y).

Non tutte le curve nel piano possono essere grafici di funzione

Infatti **la caratterstica** della funzione (ad un sol valore) é la unicitá, cioé $\forall x \in \mathbf{A}, \exists$ uno ed un solo, $y = f(x)$.

Slide 118

Il grafico in figura (4) rappresenta il grafico di una funzione in quanto soddisfa la condzione di unicitá; quello in figura (5) non rappresenta un grafico di funzione in quanto non soddisfa la condizione di unicitá. Si vede infatti, in questo secondo caso, che esistono dei valori di x ai quali corrispondono oiú valori della y.

Slide 119

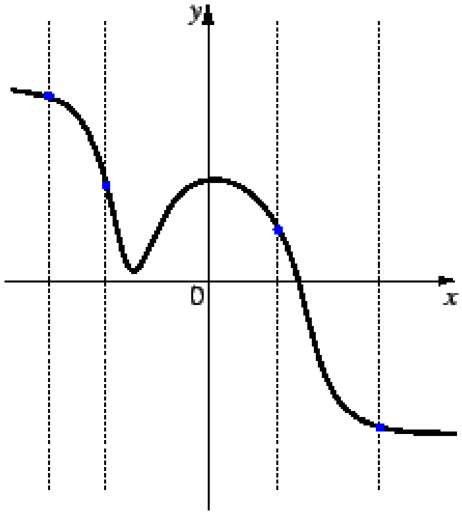


Figura 4: Grafico che rappresenta una funzione

Slide 120

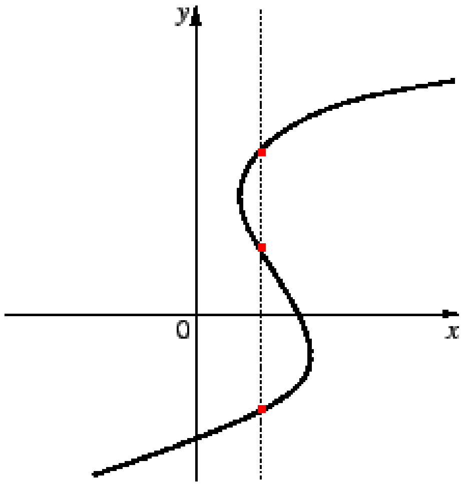


Figura 5: Grafico che **non** rappresenta una funzione

Slide 121

Funzione Iniettiva

Definizione. Diremo che una funzione $f\ :\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é iniettiva se:

$$\forall\, x', x'' \in \mathbf{A},\ x' \neq x'' \ \Rightarrow\ f(x')\ \neq\ f(x'') \tag{1}$$

Cioé se a valori diversi della variabile indipendente x corrispondono valori diversi della $f(x)$.

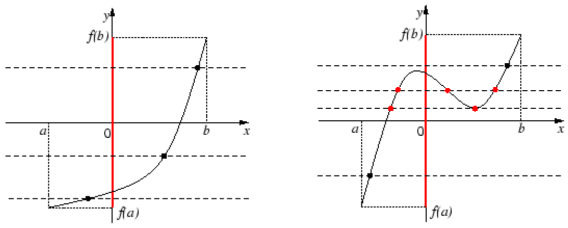


Figura 6: Grafico di funzione iniettiva (sinistra) e non iniettiva (destra)

Slide 122

Funzione Suriettiva

Definizione. Diremo che una funzione $f\ :\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ é suriettiva se $f(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. Cioé se l'insieme immagine (codominio) é $\mathbf{B}$.

Esempio . Sia $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ due funzioni. Il grafico a sinistra rappresenta f che é suriettiva, mentre quello a destra rappresenta g che non é suriettiva.

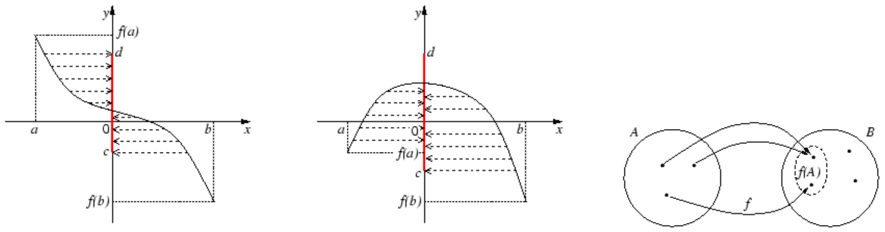


Figura 7: Grafico di funzione non iniettiva (sinistra), non suriettiva (centro), non iniettiva né suriettiva.

Slide 123

Funzione Biiettiva

Definizione. Diremo che $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ é **biiettiva** se f é iniettiva e suriettiva.

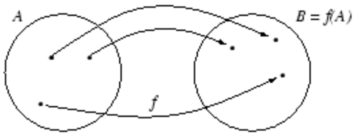


Figura 8: Grafico di funzione biiettiva.

Slide 124

Funzioni pari, dispari, periodiche

Si consideri la generica funzione $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.
Diremo che $f(x)$ é una funzione é

$$\text{pari se } f(x) = f(-x) \, , \, \forall \, x \in \mathbf{A} \quad (2)$$

$$\text{dispari se } f(x) = -f(-x) \, , \, \forall \, x \in \mathbf{A} \quad (3)$$

$$\text{periodica di periodo } \mathbf{T} \text{ se } f(x+T) = f(x) \, , \, \forall \, x \in \mathbf{A}. \quad (4)$$

Slide 125

Funzioni Monotone

Definizione. Diremo che $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é crescente (non decrescente) se

$$\forall x', x'' \in \mathbf{A}, x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'') \text{ crescente} \quad (5)$$

$$\forall x', x'' \in \mathbf{A}, x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'') \text{ non decrescente} \quad (6)$$

Definizione. Diremo che $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é decrescente (non crescente) se

$$\forall x', x'' \in \mathbf{A}, x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'') \text{ decrescente} \quad (7)$$

$$\forall x', x'' \in \mathbf{A}, x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'') \text{ non crescente} \quad (8)$$

Definizione. Chiameremo **funzioni monotone** le funzioni che sono crescenti, non decrescenti, decrescenti, non crescenti.

Slide 126

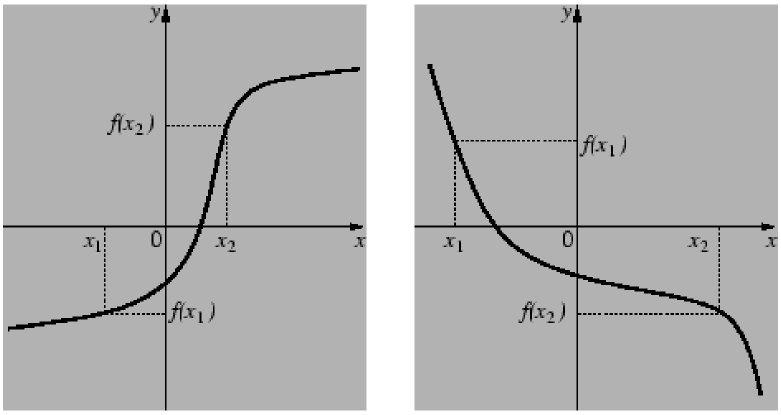


Figura 9: Grafico di funzione crescente (sinistra) e decrescente (destra).

Slide 127

Funzioni limitate

Definizioni. La funzione $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ si dirá

$$\text{limitata superiormente se: } \forall x \in \mathbf{A}, \exists k \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq k \tag{9}$$

$$\text{limitata inferiormente se: } \forall x \in \mathbf{A}, \exists m \in \mathbb{R} \ : \ m \leq f(x) \tag{10}$$

$$\text{limitata se: } \forall x \in \mathbf{A}, \exists k, m \in \mathbb{R} \ : \ m \leq f(x) \leq k \tag{11}$$

Slide 128

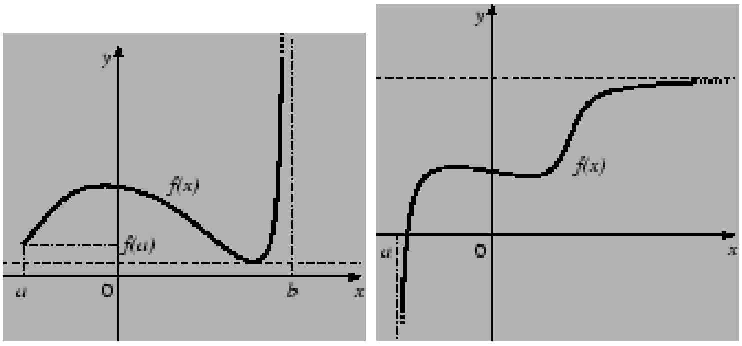


Figura 10: Grafico di funzione limitata inferiormente (sinistra) o superiormente (destra).

Slide 129

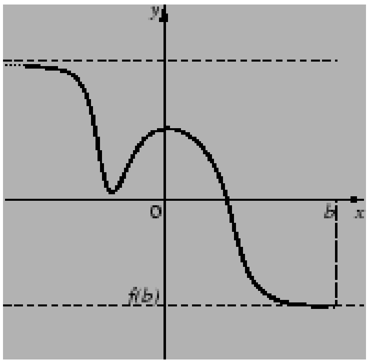


Figura 11: Grafico di funzione limitata superiormente e inferiormente .

Slide 130

Punti di Massimo e minimo assoluto di $f(x)$

Si consideri la generica funzione $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.
Diremo che $x_0 \in \mathbf{A}$ é un punto di **massimo assoluto** per f se:

$$\forall x \in \mathbf{A} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0) \qquad (12)$$

Analogamente diremo che $x_0 \in \mathbf{A}$ é un punto di **minimo assoluto** per f se:

$$\forall x \in \mathbf{A} \;\Rightarrow\; f(x_0) \leq f(x) \qquad (13)$$

Osservazione: una funzione f puó avere piú di un punto di massimo e minimo assoluti.

Slide 131

Massimi e minimi relativi

Si consideri la generica funzione $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.
Diremo che $x_0 \in \mathbf{A}$ eún punto di **massimo relativo** per f se:

$$\exists\, \mathbf{I}_\delta(x_0) \;:\; \forall x \in \mathbf{I}_\delta(x_0) \cup \{x_0\} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0) \qquad (14)$$

Analogamente diremo che $x_0 \in \mathbf{A}$ ún punto di **minimo realtivo** per f se:

$$\exists\, \mathbf{I}_\delta(x_0) \;:\; \forall x \in \mathbf{I}_\delta(x_0) \cup \{x_0\} \;\Rightarrow\; f(x_0) \leq f(x) \qquad (15)$$

Osservazione: una funzione f puó avere piú di un punto di massimo e minimo relativi.

Slide 132

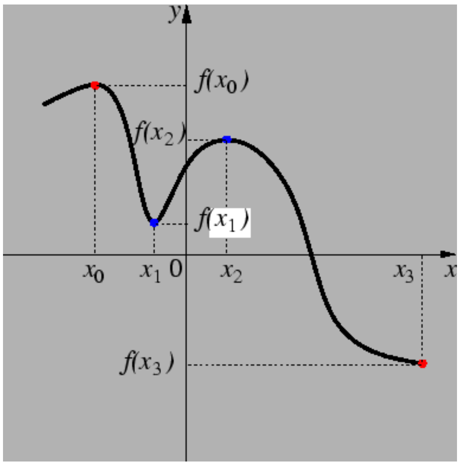


Figura 12: Punti di massimo e minimo, assoluti e relativi.

Slide 133

empty slide

Slide 134

Composizione di funzioni

Consideriamo le due generiche funzioni

$$f : \mathbf{X} \to \mathbf{B}, \quad \text{e} \quad g : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$$

cioé le funzioni

$$y = f(x), \quad x \in \mathbf{X}, \; y \in \mathbf{B}, \quad \text{e} \quad z = g(y), \quad y \in \mathbf{Y}, \quad z \in \mathbf{Z}.$$

Se $\mathbf{Y} \cap f(\mathbf{X}) \neq \emptyset$ allora possiamo considerare la funzione composta

$$z = (g \circ f)(x) = g(\,f(x)\,) \;\text{ con }\; x \in \bar{\mathbf{X}} \tag{16}$$

$$\text{dove} \tag{17}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \{x \in \mathbf{X} \;:\; f(x) \in \mathbf{Y}\,\} \tag{18}$$

cioé l'insieme dei valori $x \in \mathbf{X}$ tali che $f(x) \in \mathbf{Y}$.

Slide 135

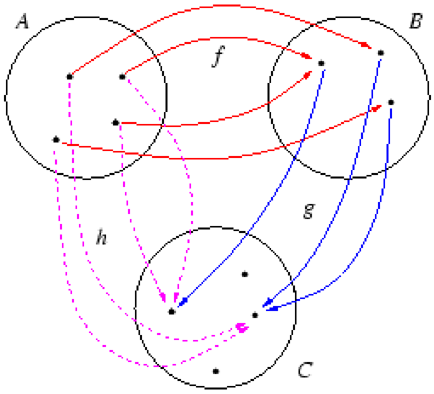


Figura 13: Composizione di funzioni.

Slide 136

Per ottenere la funzione composta basta spesso sostituire la espressione di $f(x)$ al posto della y in $g(y)$.
Esempio
Siano

$$y = f(x) = \sqrt{x}, \;\; x \in \mathbf{A}, \;\; \mathbf{A} = [0, +\infty)$$
$$z = g(y) = y + 1, \quad y \in \mathbb{R}$$

L'immagine della prima funzione é contenuta in $\mathbb{R}$, cioé $f(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.
É quindi possibile considerare la funzione composta

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

Il dominio della funzione composta $g(f(x))$ é l'immagine della funzione f, $f(\mathbf{A})$.

Slide 137

Esso quindi potrebbe non coincidere con il dominio della funzione $g(y)$ iniziale ma, come in questo caso, con una restrizione (cioé un sottoinsieme) dello stesso.
Nel nostro caso

$$g(y) = y + 1 \; y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{dominio di g(y)} \;=\; D_g = \mathbb{R}$$
$$y = \sqrt{\times} \; x \in \mathbf{A} \Rightarrow \; \text{immagine di f(x)} \;=\; f(\mathbf{A}) = [0, \infty)$$

Essendo

$$[0, \infty) \subset \mathbb{R} \;\Rightarrow\; D_{(g \circ f)(x)} \neq f(\mathbf{A})$$

Casi Patologici

Possono verificarsi casi patologici. Si consideri l'esempio che segue.
Esempio. Si vogliono comporre le seguenti due funzioni:

$$y = f(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f(\mathbf{A}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$z = g(y) = \frac{1}{y},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Componendo le due funzioni si ha:

$$z = (g \circ f)(x) \ = \ g(f(x)) \ = \ g(\frac{1}{x}) \ = \frac{1}{\frac{1}{x}} \ = \ x$$

Dopo questi passaggi si sarebbe tentati di dire che $D_{(g \circ f)(x)} \ = \ \mathbb{R}$.

Questa affermazione é errata

Infatti non puó accadere che il dominio di f sia contenuto in $D_f \subset D_{g(f(x))}$.
Se questo accadesse la funzione $f(x)$ non sarebbe definita per tutti gli $x \in D_{g(f(x))} \setminus D_f$.

Nel caso in esame infatti $f(x)$ é non definita in $x = 0$ e tale deve essere $(g \circ f)(x)$ perché altrimenti la composizione non sarebbe possibile in quel punto.

Esempi di funzioni

Funzioni lineari . Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = a\,x\; +\; b \qquad\qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{19}$$

che prende il nome di **funzione lineare**. Si vede subito che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = ax + b\} \end{aligned}$$

Nel piano cartesiano é rappresentata dalla retta di equazione $y = ax + b$.

Inoltre

- Se $a > 0$ allora $f(x)$ é monotona crescente;
- Se $a < 0$ allora $f(x)$ é monotona decrescente;
- Se $a = 0$ allora $f(x)$ é la funzione costante $f(x) = b$.
- $f(x)$ é non limitata, i.e. *nexists* il massimo e minimo assoluti della funzione.

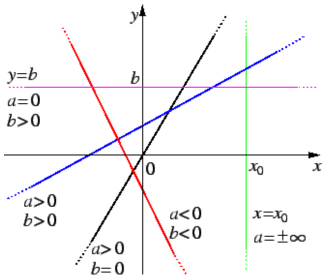


Figura 14: Funzioni lineari.

Slide 142

Funzioni identitá . Un caso particolare di funzione lineare si ha quando $a = 1,\ b = 0$. In questo caso $y = f(x) = x$, e la funzione é una applicazione dell'insieme in se stesso, cioé:

$$f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$$

La funzione identitá sull'insieme **A** si indica con $id_{\mathbf{A}}$.
Si vede subito che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x\} \text{ } \textit{i.e.} \text{ la prima bisettrice} \end{aligned}$$

$id_{\mathbf{A}}$ é non limitata.

Slide 143

empty slide

Slide 144

Funzioni Quadratiche. Consideriamo la funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = a\, x^2\ +\ bx\ + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \tag{20}$$

che prende il nome di **funzione quadratica**. Si vede subito che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &\subset \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = ax^2 + bx + c\} \end{aligned}$$

Nel piano cartesiano é rappresentata dalla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Slide 145

Inoltre:

- Se $a > 0$ allora $f(x)$ é limitata inferiormente, decrescente in $(-\infty, -b/2a)$ e crescente in $(-b/2a, +\infty)$;
- Se $a < 0$ allora $f(x)$ é limitata superiormente, crescente in $(-\infty, -b/2a)$ e decrescente in $(-b/2a, +\infty)$; ;

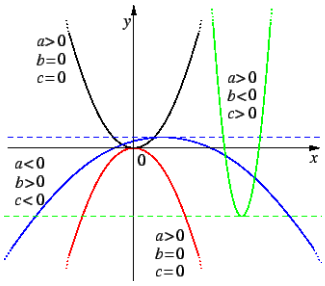


Figura 15: Funzioni quadratiche

Slide 146

Funzione modulo o valore assoluto Consideriamo la funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

che prende il nome di **funzione valore assoluto** o **funzione modulo**. Si vede subito che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &\subset \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \mid x \mid\} \end{aligned}$$

Slide 147

Inoltre:

- É úna funzione pari;
- Non é limitata superiormente;
- é crescente in $(0, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0)$; ;

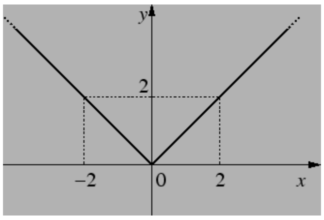


Figura 16: Funzione valore assoluto

Slide 148

Funzione segno di x . Consideriamo la funzione $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x)=\frac{\mid x\mid}{x} \tag{21}$$

che prende il nome di **funzione segno di x** Si vede subito che:

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$f(\mathbb{R})=\{-1,1\}$$

Slide 149

Inoltre:

- É úna funzione dispari;
- é limitata;
- é costante, $=1$, per $x>0$ e per $x<0$, $=-1$.

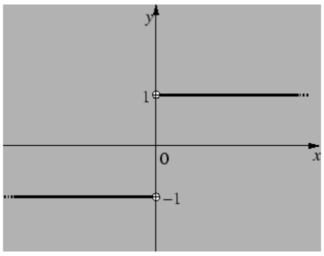


Figura 17: Funzione Segno

Slide 150

Funzione parte intera di x Consideriamo la funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x & \text{se } x \geq 0 \\ inf\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

che prende il nome di **funzione parte intera di x**. Si vede subito che:

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$$

Inoltre:

- É úna funzione non decrescente;
- Non é limitata;

Slide 151

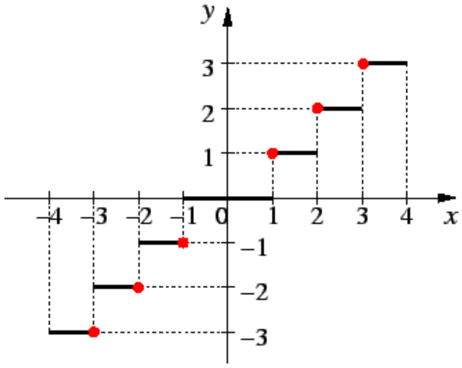


Figura 18: Funzione parte intera

Slide 152

Funzione floor o funzione pavimento Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\} \tag{22}$$

che prende il nome di **funzione floor** o **funzione pavimento**. Si vede subito che:

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$$

Inoltre:

- É úna funzione non decrescente;
- Non é limitata;

Il grafico é simile a quello della funzione parte intera.

Slide 153

Funzione HeavySide ***letteralmente LatoPesante***
Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

che prende il nome di **funzione HeavySide** Si vede subito che:

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$$

Inoltre:

- É úna funzione non decrescente;
- é limitata;

Il grafico é semplicemente un gradino di altezza $y = 1$ in $x = 0$.

Funzione inversa

Definizione. Sia $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \equiv f(\mathbf{A})$ una funzione **biiettiva** (e quindi biunivoca), allora esiste la funzione inversa

$$f^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{A} \tag{23}$$

$$y \to \ f^{-1}(y) = x \tag{24}$$

tale che $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Proprietá delle funzioni inverse .

1. La funzione composta della funzione inversa, f^{-1}, con la funzione stessa, f, é la funzione identitá sul dominio di $\mathbf{A}$ di f:

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{A}} \tag{25}$$

Analogamente, La funzione composta della funzione f con la sua inversa, f^{-1}, é la funzione identitá sul dominio di $\mathbf{B}$ di f^{-1}:

$$f \circ f^{-1} = id_{\mathbf{B}} \tag{26}$$

2. Dire che f é dotata di funzione inversa equivale a dire che l'equazione $y = f(x)$, $\forall y \in \mathbf{B}$ ha un'unica soluzione $x \in \mathbf{A}$.

Slide 156

3. dal punto di vista geometrico, f ha inversa se il suo grafico G_f é intersecato dalle rette parallele all'asse delle x una sola volta (fig. 19);

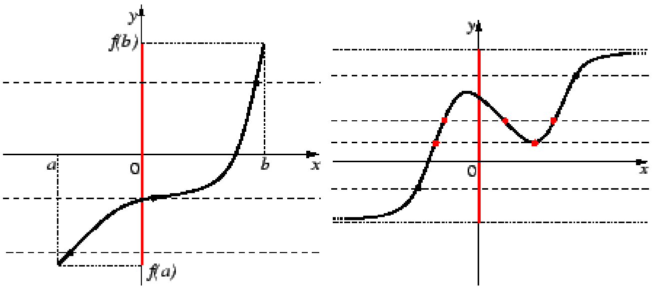


Figura 19: funzione invertibile (destra) e non invertibile (sinistra)

Slide 157

4. i grafici di f e della sua inversa f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$ (fig. 20), cioè se $(a, b) \in G_f$, allora $(b, a) \in G_{f^{-1}}$. Infatti:

$$(a, b) \in G_f \Rightarrow b = f(a) \Rightarrow f^{-1}(b) = a \Rightarrow (b, a) \in G_{f^{-1}}.$$

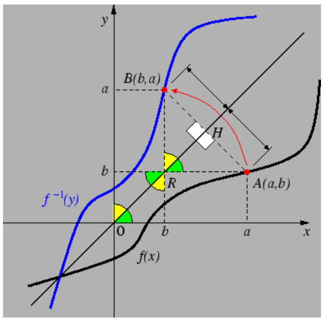


Figura 20: Simmetrie nel grafico della funzione inversa

Slide 158

5. **Osservazione** Attenzione: il dominio di f_1 é B e quindi f_1 si applica agli elementi $y \in B$, ossia y é la variabile indipendente per f_1 ed x é quella dipendente.
   Per disegnarne il grafico <u>nello stesso riferimento cartesiano</u> in cui si disegna il grafico di $f(x)$ occorre non confondere il ruolo delle variabili: in tale riferimento i valori della variabile indipendente sono sull'asse delle ascisse e quelli delle variabili dipendenti sull'asse delle ordinate, senza riguardo al nome che esse hanno nell'espressione delle funzioni.
   Come regola pratica, per disegnare il grafico della funzione inversa $x = f_1(y)$, basta riguardare f_1 come una nuova funzione g che ha la stessa espressione di f_1, ma con i nomi delle variabili scambiati e disegnare quindi $y = g(x)$. Questo equivale esattamente a dar nome **x** alla variabile indipendente di f_1 e **y** a quella dipendente.

Slide 159

6. Perché sono simmetrici ? Considerando la figura 20 , sia $A = (a, b)$ un punto del grafico di f: allora per ottenere le coordinate del corrispondente punto B sul grafico di f_1 basta osservare che i due triangoli di vertici A, H, R e H, B, R sono uguali e rettangoli, quindi l'ascissa di B è b e l'ordinata di B è $b + \overline{BR} = b + \overline{AR} = a$.
7. In definitiva dunque, per trovare l'espressione della funzione inversa $f_1(y)$di una funzione reale invertibile $y = f(x)$ occorre esplicitare l'espressione rispetto ad x.

Slide 160

Proprietá delle operazioni tra funzioni - (1)

Descriviamo ora le operazioni possibili che coinvolgono una funzione.
Sia $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B},\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}$.
Definiamo:

- funzione prodotto per uno scalare $k \in \mathbb{R}$ la funzione $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B} \mid g(x) = k\ f(x)$.
- funzione *opposta* della funzione f quella che si ottiene dal caso precedente per $k = -1$;
- la funzione *inversa* di f cioé la funzione $g : (\mathbf{A} \setminus \{x : f(x) = 0\}) \to \mathbb{R} \mid g(x) = \frac{1}{f(x)}$
  Osservazione. Abbiamo escluso dal dominio della funzione inversa i valori di x che annullano il denominatore cioé l'insieme $\{x : f(x) = 0\}$.

Slide 161

Proprietá delle operazioni tra funzioni - (2)

Consideriamo ora due funzioni $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}',\ \mathbf{A}, \mathbf{A}' \subseteq \mathbb{R}$ e $f : \mathbf{B} \to \mathbf{B}',\ \mathbf{B}, \mathbf{B}' \subseteq \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$.
Allora $\forall x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ possiamo definire:

- la somma (differenza) delle funzioni f e g come la funzione $h : (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbb{R} \mid h(x) = f(x) \pm g(x)$;
- il prodotto delle funzioni f e g come la funzione $p : (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = f(x)g(x)$;
- il rapporto tra le funzioni f e g come la funzione $r : (\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \setminus \{x : g(x) = 0\}) \Rightarrow \mathbb{R} \mid r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$;
  Osservazione - Anche in questo caso abbiamo escluso dal dominio della funzione r i valori che annullano il denominatore, cioé l'insieme $\{x : g(x) = 0$.

Slide 162

Esempio: Quattro casi interessanti

É interessante considerare quattro *operazioni* che si possono fare su una funzione reale $f(x)$ (che per comoditá consideriamo definita su un intervallo, cioé $\mathbf{A} = [a, b]$) trasformandola in una nuova funzione $g(x)$ (definita anch'essa in un intervallo, $\mathbf{B} = [c, d]$ non necessariamente uguale ad $[a, b]$) mediante una costante $k \in R$:

Slide 163

Traslazione verticale

1. **Traslazione verticale**: $g(x) = f(x) + k$.
   Questa operazione non cambia il dominio di f, *i.e.* $[c, d] = [a, b]$, mentre $f(\mathbf{A}) \neq g(\mathbf{B})$.

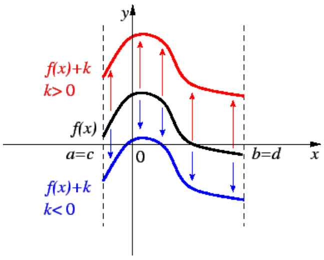


Figura 21: Traslazione verticale: $g(x) = f(x) + k$.

Slide 164

Traslazione orizzontale

2. **Traslazione orizzontale**: $g(x) = f(x + k)$.
   Questa operazione cambia il dominio di f, *i.e.* $[c, d] = [a + k, b + k]$. Essa é quindi possibile se é possibile definire la funzione f nel nuovo dominio. L'immagine delle due funzioni é in generale diversa: $f(\mathbf{A}) \neq g(\mathbf{B})$.

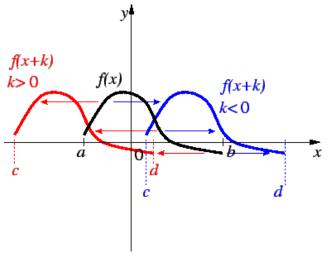


Figura 22: Traslazione orizzontale: $g(x) = f(x + k)$.

Slide 165

Trasformazione di scala

3. **Trasformazione di scala**: $g(x) = kf(x)$.
   Questa operazione non cambia il dominio di f, *i.e.* $[c, d] = [a, b]$. Essa é quindi sempre possibile. L'immagine delle due funzioni é in generale diversa: $f(\mathbf{A}) \neq g(\mathbf{B})$.

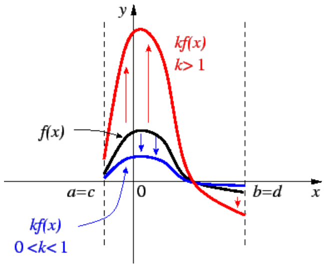


Figura 23: Trasformazione di scala: $g(x) = kf(x)$.

Slide 166

Dilatazione o contrazione

4. **Dilatazione o contrazione**: $g(x) = f(k\,x)$.
   Questa operazione cambia il dominio di f, *i.e.* $[c, d] = [ka, kb]$. Essa é quindi possibile se é possibile definire la funzione f nel nuovo dominio. L'immagine delle due funzioni é in generale diversa: $f(\mathbf{A}) \neq g(\mathbf{B})$.

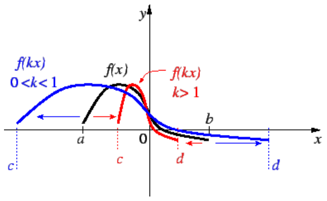


Figura 24: Dilatazione / contrazione: $g(x) = f(kx)$.

Slide 167

Successioni

Consideriamo ora un particolare tipo di funzioni, denominate **successioni**, che sono delle applicazioni dall'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri reali.

$$s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \tag{27}$$

Le successioni rappresentano un caso interessante perché essendo il dominio l'insieme dei numeri naturali l'immagine della applicazione viene naturalmente costruita come un insieme **ordinato** di numeri reali.

Slide 168

Esempio 1.
Si consideri la funzione s_n definita dalla legge:

$$s_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Il dominio di s_n é banalmente l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Consideriamo ora l'immagine di s_n, cioé $s_n(\mathbb{N})$. Si nota facilmetne che:

1. al variare di $n \in \mathbb{N}$ l'immagine di s_n genera l'insieme numerico *ordinato* che puó indicarsi come
$$\frac{1}{n} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}.$$
2. l'immagine di s_n é un insieme numerico non finito, limitato, dotato di massimo (non di minimo) ed il cui estremo inferiore é $inf(s_n(\mathbb{N})) = 0$.

Slide 169

Esempio 2.
Si consideri la funzione s_n definita dalla legge:

$$s_n = \log(\frac{1}{n}) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Il dominio di s_n é banalmente l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Consideriamo ora l'immagine di s_n, cioé $s_n(\mathbb{N})$. Si nota facilmetne che:

1. al variare di $n \in \mathbb{N}$ l'immagine di s_n genera l'insieme numerico *ordinato* che puó indicarsi come $\log(\frac{1}{n}) = \{0, \log(\frac{1}{2}), \log(\frac{1}{3}), \ldots, \log(\frac{1}{n}), \ldots\}$.
2. l'immagine di s_n é un insieme numerico non finito, non limitato superiormente e dotato di minimo $(= 0)$.

Successioni Monotone

É possibile applicare alle successione i concetti di crescenza, non decrescenza, decrescenza, non crescenza.
Ripetiamo, senza con questo voler offendere l'aula, le definizioni.
Diremo che una successione é

- monotona **crescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \Rightarrow \ y_{n_2} > y_{n_1} \tag{28}$$

- monotona **non decrescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \Rightarrow \ y_{n_2} \geq y_{n_1} \tag{29}$$

- monotona **decrescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \Rightarrow \ y_{n_2} < y_{n_1} \tag{30}$$

- monotona **non crescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \Rightarrow \ y_{n_2} \leq y_{n_1} \tag{31}$$

Slide 172

Concetto di Limite

Limiti delle successioni

Slide 173

Concetto di limite

Una funzione é una legge f che associa a ciascun valore della variabile indipendente $x \in \mathbf{A}$, appartenente al suo dominio, uno ed un sol valore della variabile indipendente $y \in \mathbf{B}$ appartenente al codominio della funzione.

Ci poniamo ora le seguenti domande:

- assegnato un valore x_0 appartenente o meno al dominio D_f della funzione quale valore assumerá la variabile dipendente quando la variabile indipendente $x \in D_f$ si avvicina quanto si vuole ad x_0 ?
- se $x_0 \in D_f$ il valore assunto dalla funzione nel quesito precedente sará eguale o distinto al valore $f(x_0)$ assunto dalla funzione in x_0 ?

Chiediamoci, per prima cosa, se il punto x_0 che scegliamo puó essere arbitrario o deve soddisfare a qualche requisito.

Slide 174

Per renderci conto delle caratteristiche che serve richiedere al punto x_0 consideriamo il seguente
Esempio. Sia $f(x)$ la funzione definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2, \\ -x & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$$

Il dominio della funzione é $D_f = (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$.
Scegliamo ora il punto $x_0 = 0$, $x_0 \notin D_f$ e poniamoci la prima delle domande precedenti.
Osserviamo subito che la frase *quando la variabile indipendente* $x \in D_f$ *si avvicina quanto si vuole ad* x_0 non ha molto senso.
Infatti nel nostro esempio la variabile indipendente non potrá mai avvicinarsi al punto $x_0 = 0$ in quanto la funzione é definita per valori della x ben distanti dal punto stesso.

Slide 175

Questo puó essere legato al fatto che $x_0 \notin D_f$?.

La risposta é negativa

Per rendercene conto consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2, \\ -x & \text{se } x \leq -2 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Che, guarda caso, é identica alla precedente ma include nella definizione il punto x_0 assegnangli il valore $f(x_0) = -1$.
Come si vede l'aver incluso x_0 in D_f non ha eliminato il problema.

Quello che dobbiamo richiedere é che vicino quanto si vuole ad x_0 si possano trovare valori di $x \in D_f$.
Cerchiamo di formalizzare questi concetti.

Slide 176

Punto di Accumulazione

Siano $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme numerico e $x_0 \in \mathbb{R}$ un numero reale eventualmente non appartenente ad **A**.

Definizione. Diremo che il punto x_0 é **punto di accumulazione** per l'insieme **A** se comunque si prenda un intorno di x_0 esso contiene almeno un punto $a \in \mathbf{A}$, cioé

$$x_0 \text{ di accumulazione se } \forall I_\delta(x_0), \ \exists a \in \mathbf{A} \cap I_\delta(x_0). \qquad (32)$$

Nota. La richiesta che l'intorno contenga almeno un punto é equivalente a richiedere che ne contenga infiniti (*la dimostrazione si esegue per assurdo*).

Definizione. Si chiama **insieme derivato** di un insieme $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei suoi punti di accumulazione.
Tale insieme si indica con $\mathbf{A}'$.

Slide 177

Ma come facciamo a sapere se un insieme contiene punti di accumulazione ?

Teorema Un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ limitato ed infinito ammette sempre almeno un punto di accumulazione.

Teorema Un insieme $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente (superiormente) ammette $+\infty$ $(+\infty)$ come punto di accumulazione.

Nota. La dimostrazione é semplice. Occorre tuttavia definire il concetto di intorno di $+\infty$ come un qualunque intervallo del tipo (m, $-\infty$). Analogamente si dirá intorno di $-\infty$ un qualunque intervallo del tipo ($+\infty$, m).
Con queste definizioni la dimostrazione del teorema segue in modo semplice (*provateci !*).

Slide 178

Esempio 1

Consideriamo il nostro ormai noto insieme numerico

$$\mathbf{A} = \{x = \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \tag{33}$$

É facile convincersi che $\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow\ x \notin \mathbf{A}'$ cioé **x non é un punto di accumulazione**.

É facile provare che il punto $x = 0$, *che non appartiene all'insieme* $\mathbf{A}$, é un punto di accumulazione per $\mathbf{A}$.

Dimostrazione. Infatti comunque si prenda un intorno $I_\delta(0)$ tutti gli infiniti elementi dell'insieme $\mathbf{A}$ tali che $1/n < \delta$ apparterranno all'intorno.

Slide 179

Esempio 2

Consideriamo l'insieme $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$, cioé l'intervallo aperto a sinistra $]0, 1]$.

É facile convincersi che:

- tutti i punti dell'insieme sono di accumulazione;
- il punto $x = 0$ é di accumuazione per l'insieme

Nota. Si osservi che in questo caso $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}'$, cioé l'insieme dei punti di accumulazione é piú ampio dell'insieme stesso !!

Slide 180

Punti di Accumulazione particolari

Puó accadere, ed anche abbastanza spesso, che l'intorno $I_\delta(x_0)$ contenga elementi del dominio **A** solamente nel semintervallo sinistro $[x_0 - \delta, x_0[$ o in quello destro $]x_0, x_0 + \delta]$.

In questi casi il concetto del *tendere a ...* potrá applicarsi solo a quell'intervallo che contiene punti del dominio della funzione.
Si parlerá allora di limite sinistro o di limite destro, a seconda che la variabile indipendente tenda a x_0 da sinistra o da destra e si indicheranno con la scrittura x_{0^-} e x_{0^+} rispettivamente.

Slide 181

Funzioni limitate e non

Sia data una generica funzione $f : \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$. L'immagine $f(\mathbf{A})$ é un sottoinsieme numerico, $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$.
Come tutti gli insiemi numerici $f(\mathbf{A})$ puó essere limitato o non limitato. In quest'ultimo caso puó accadre che *al tendere di x* ad particolare x_0 la funzione $| f(x) |$ assuma valori sempre piú grandi.

Puó quindi accadre che *al tendere di x* ad particolare x_0 la funzione non tenda ad un valore finito ma, come si dice, diverge a $\pm\infty$.

Slide 182

Limiti di successioni

Consideriamo una generica successione numerica, $y_n : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$.
Il dominio della successione é rappresentato dall'insieme dei numeri interi $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
Tale insieme (considerato come sottinsieme di $\mathbb{R}$) é non-finito (cioé contiene infiniti elementi). Inoltre:
- non ammette punti di accumulazione al finito (*in quanto tra due generici numeri naturali successivi esistono infiniti numeri reali non appartenenti ad* $\mathbb{N}$;
- ma, come abbiamo visto in precedenza, $+\infty$ é un punto di accumulazione.

Ha allora senso chiedersi che valore assumerá il termine generico della successione quando n tende a $+\infty$.

Slide 183

2 -Limiti di successioni

Prima di addentrarci nelle definizione formale vediamo di capire cosa puó accadere quando $n \to +\infty$. Si possono verificare 3 casi:

1. il termine y_n tende ad un valore finito l;
2. il termine y_n diventa infinitamente grande positivamente (o negativamente). Cioé $y_n \to +\infty$ oppure $y_n \to -\infty$;
3. il termine y_n non tende ad alcun valore ma *oscilla* in modo regolare o irregolare.

Slide 184

3- Limiti di successioni

Adesso cerchiamo di dare un significato operativo alle espressioni che abbiamo utilizzato.
Dire che al tendere di $n \to \infty$ il termine y_n tende ad un valore finito l significa che man mano che il valore n cresce allora y_n si avvicina sempre piú ad l.

Questo significa che se $n_2 > n_1$ allora $\mid y_{n_2} - l \mid \leq \mid y_{n_1} - l \mid$, cioé la differenza $\mid y_n - l \mid$ diventa sempre piú piccola al crescere di n.

(*Si osservi che abbiamo considerato il valore assoluto della differenza* $y_n - l$ *in quanto ci interessa la distanza tra i valori di* y_n *ed* l *e questa non dipende dal fatto che sia* $y_n \geq l$ *o viceversa*)

Siamo allora in grado di formalizzare quanto detto nella definizione di limite finito di una successione.

Slide 185

4- Limiti di successioni - $\lim_{n \to \infty} y_n = l$

Definizione. Data una successione numerica y_n a valori in $\mathbb{R}$, diremo che la successione y_n **converge** ad un limite finito l e scriveremo

$$\lim_{n \to \infty} y_n = l \tag{34}$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \, \nu \in \mathbb{N} : \ \forall \, n > \nu \ \Rightarrow \mid y_n - l \mid < \epsilon \tag{35}$$

5 - Limiti di successioni - $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$

Possiamo facilmente modificare questa definizione per rappresentare il secondo caso nel quale al crescere di n il valore assunto da y_n cresce a dismisura.

Definizione. Data una successione numerica y_n a valori in $\mathbb{R}$, diremo che la successione y_n diverge **positivamente** e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \tag{36}$$

se

$$\forall \kappa > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, n > \nu\ \Rightarrow\ y_n > \kappa \tag{37}$$

6 - Limiti di successioni - $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$

Definizione. Data una successione numerica y_n a valori in $\mathbb{R}$, diremo che la successione y_n **diverge negativamente** e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \tag{38}$$

se

$$\forall \kappa > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, n > \nu\ \Rightarrow\ y_n < -\kappa \tag{39}$$

7 - Terminologia:Successioni Regolari e Irregolari

Diremo che una **successione é regolare** se accade che:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l \ \text{ oppure } \ \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \qquad (40)$$

Nel caso contrario si dirá che la **successione** é **irregolare o oscillante**.

Successioni infinitesime ed infinitamente grandi

Diremo che una successione é **infinitesima** se accade che

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \qquad (41)$$

Diremo che una successione é **infinitamente grande** se accade che

$$\lim_{n\to\infty} \mid y_n \mid = +\infty \qquad (42)$$

Nota. *Si osservi che se una successione é divergente allora essa é infinitamente grande* **ma non é vero il viceversa**. Una successione puó essere infinitamente grande senza essere divergente positivamente o negativamente. Un esempio evidente é la successione $y_n = (-n)^n$ che assume alternativamente valori negativi e positivi progressivamente crescenti: $\{-1, 4, -9, 16, -25, \ldots\}$

Slide 190

8 - Limiti di successioni - Esempi

É facile provare che le successioni nel seguito indicate sono regolari ed ammettono i relativi limiti:

$$y_n = \frac{n+1}{n} \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n \quad = 1 \tag{43}$$

$$y_n = \log n^2 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \tag{44}$$

$$y_n = \log(\frac{1}{n}) \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

Altrettanto semplice é provare che le successioni nel seguito indicate sono non regolari.

- $y_n = (-1)^n$
- $y_n = \cos(\pi n)$

Slide 191

9 - Limiti di successioni - Esempi

Sia $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, un numero reale positivo. Consideriamo la successione:

$$y_n = n^\alpha \ \{1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha, \ldots, n^\alpha, \ldots\}$$

Preso comunque $\kappa > 0$ consideriamo il minimo intero maggiore di $\kappa^{\frac{1}{\alpha}}$, cioé $\nu = \lceil \kappa^{\frac{1}{\alpha}} \rceil$, ed osserviamo che $\forall\ n > \nu$ si ha

$$n^\alpha \ > \ \nu^\alpha > (\kappa^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = \kappa$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$$

Slide 192

10 - Limiti di successioni - Esempi

Il limite della stessa successione cambia se consideriamo il caso di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0$.
Infatti preso comunque $\epsilon > 0$ consideriamo il minimo intero maggiore di $\epsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, cioé $\nu = \lceil \epsilon^{\frac{1}{\alpha}} \rceil$ (ovvero $[\epsilon^{\frac{1}{\alpha}}] + 1$), ed osserviamo che $\forall\, n > \nu$ si ha

$$n^\alpha \;<\; \nu^\alpha < (\epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = \epsilon$$

Ne segue che

$$\lim_{n \to \infty} n^\alpha = 0$$

Slide 193

1 - Teoremi sui Limiti di successioni

Teorema. *Ogni successione regolare ha un unico limite*

Dimostrazione. *Proviamo il teorema nel solo caso di limite finito.*
Supponiamo, per assurdo, che la successione y_n ammetta due limiti distinti $l_1 \neq l_2$. Allora:

i) $\forall \epsilon > 0\ \exists \nu_1 \in \mathbb{N} :\ \forall n > \nu_1 \Rightarrow |\, y_n - l_1 \,| < \epsilon$ ovvero $l_1 - \epsilon < y_n < l_1 + \epsilon$

ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \nu_2 \in \mathbb{N} :\ \forall n > \nu_2 \Rightarrow |\, y_n - l_2 \,| < \epsilon$ ovvero $l_2 - \epsilon < y_n < l_2 + \epsilon$

Dalle precedenti segue che detto $\nu = max\{\nu_1, \nu_2\}$ le due relazioni precedenti valgono contemporaneamente $\forall \epsilon > 0$.
Questo peró non é possibile per tutti i valori di ϵ tali che sia $\epsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ in quanto per tali valori di ϵ si ha $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\, \cap\,]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$, gli intervalli sono cioé disgiunti, per cui y_n non puó appartenere contemporaneamente ad entrambi.

Slide 194

2 - Teoremi sui Limiti di successioni

Consideriamo una successione di numeri naturali a due a due distinti tra loro e disposti in ordine crescente:

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

e poniamo:

$$z_k = y_{n_k}$$

I numeri $\{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$ formano una successione che prende il nome di **successione estratta** dalla successione y_n. Vale allora il teorema.

Teorema.

Se la successione delle y_n ammette un limite (finito o infinito), ogni successione estratta da essa ammette lo stesso limite. senza dimostrazione

Slide 195

3 - Teoremi sui Limiti di successioni

Teorema.

Ogni successione convergente é un insieme numerico limitato, e se h e k sono due numeri reali tali che per n abbastanza grande risulti $h \leq y_n \leq k$, si ha:

$$h \leq \lim_{n\to\infty} y_n \leq k \tag{47}$$

senza dimostrazione

Slide 196

4 - Teoremi sui Limiti di successioni

Teorema. (di confronto)

Siano $y'_n,\ y''_n,\ y_n$ tre successioni numeriche tali che:

$$\lim_{n\to\infty} y'_n = \lim_{n\to\infty} y''_n = l \tag{48}$$

$$y'_n \le y_n \le y''_n \tag{49}$$

allora anche la successione delle y_n é convergente verso lo stesso limite l, cioé

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l \tag{50}$$

Slide 197

5 - Teoremi sui Limiti di successioni

Teorema (di confronto).

Siano $y'_n,\ ; y_n$ due successioni numeriche tali che:

$$\lim_{n\to\infty} y'_n = +\infty \qquad [-\infty] \tag{51}$$

ed inoltre

$$\exists\ \nu \in \mathbb{N} :\ y'_n \le y_n\ \ \forall n > \nu \tag{52}$$

allora anche la successione delle y_n é divergente positivamente (negativamente), cioé

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \qquad [-\infty] \tag{53}$$

senza dim.

6 - Teoremi sui Limiti di successioni

Teorema. (di permanenza del segno)

Se é

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l > 0 \qquad [< 0] \tag{54}$$

allora

$$\exists\, \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \Rightarrow y_n > 0 \qquad [< 0] \tag{55}$$

senza dim.

7 - Teoremi sui Limiti di successioni

Teorema. (*Criterio di convergenza di Cauchy*)

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della successione y_n é che, comunque si assegni un $\epsilon > 0$ sia possibile determinare un indice ν tale che per ogni coppia di indici m ed n entrambi maggiori di ν riesca:

$$\mid y_n - y_m \mid < \epsilon \tag{56}$$

In modo sintetico il criterio di convergenza di Cauchy si esprime come segue:

C.N.S affinché la successione y_n sia convergente é che

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, m, n\ \in \mathbb{N},\ m, n\ >\ \nu \Rightarrow \mid y_n - y_m \mid < \epsilon \tag{57}$$

1 - Operazioni sui limiti delle successioni

Definizione. Siano y'_n e y''_n due successioni e $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ due costanti reali. La successione y_n definita come: $y_n = c_1\, y'_n + c_2\, y''_n$ si dice **combinazione lineare** delle successioni y'_n e y''_n.

Teorema.

Se le successioni y'_n e y''_n sono convergenti anche la successione y_n é convergente e si ha:

$$\lim_{n\to\infty} y_n \ = c_1 \ \lim_{n\to\infty} y'_n \ + c_2 \ \lim_{n\to\infty} y''_n \tag{58}$$

senza dim.

2 - Operazioni sui limiti delle successioni

Prendendo $c_1 = c$ e $c_2 = 0$ ovvero $c_1 = 1$ e $c_2 = \pm 1$ dal teorema precedente seguono i seguenti

Corollari.

$$\lim_{n\to\infty} c\, y'_n \ = c \ \lim_{n\to\infty} y'_n \tag{59}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\ y'_n \ + \ y''_n\ ) \ = \ \lim_{n\to\infty} y'_n + \ \lim_{n\to\infty} y''_n \tag{60}$$

- la dimostrazione segue banalmente applicando il teorema precedente

3 - Operazioni sui limiti delle successioni

Definizione. Siano y'_n e y''_n due successioni. La successione u_n definita come: $u_n = y'_n \, y''_n$ si dice **prodotto** delle successioni y'_n e y''_n.

Teorema.

Se le successioni y'_n e y''_n sono convergenti anche la successione u_n é convergente e si ha:

$$\lim_{n \to \infty} u_n \; = \; \lim_{n \to \infty} y'_n \, \lim_{n \to \infty} y''_n \tag{61}$$

senza dim.

4 - Operazioni sui limiti delle successioni

Definizione. Siano y'_n e y''_n due successioni. La successione v_n definita come: $v_n = y'_n \, y''_n, \; y''_n \neq 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$ si dice **rapporto** delle successioni y'_n e y''_n.

Teorema.

Se le successioni y'_n e y''_n sono convergenti e se si ha $y''_n \neq 0, \; \lim_{n \to \infty} y''_n \; \neq 0$, allora anche la successione v_n é convergente e si ha:

$$\lim_{n \to \infty} v_n \; = \; \frac{\lim_{n \to \infty} y'_n}{\lim_{n \to \infty} y''_n} \tag{62}$$

senza dim.

5 - Operazioni sui limiti delle successioni

Osservazione. La condizione $y''_n \neq 0$ é necessaria per definire la successione rapporto mentre la condizione $\lim\limits_{n\to\infty} y''_n \neq 0$ é necessaria per la validitá del teorema.
Si osservi che la seconda condizione potrebbe non verificarsi anche se la prima é sempre valida.

Esempio.
Si considerino le successioni $y'_n = \frac{n+1}{n}$ e $y''_n = e^{-n}$.
É facile vedere che $y''_n \neq 0$, $\forall n$ ma che $\lim\limits_{n\to\infty} y''_n = 0$.
Inoltre $\lim\limits_{n\to\infty} y'_n = 1$.
Le ipotesi del teorema non sono verificate quindi la tesi non vale.
Infatti:

$$v_n = \frac{y'_n}{y''_n} = \frac{n+1}{n}\, e^n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty \tag{63}$$

6 - Operazioni sui limiti delle successioni

Osservazione. Quando le ipotesi dei teoremi precedenti non sono verificate ovviamente non sono valide le tesi. Vediamo ora in quali casi é possibile estendere i risultati visti in precedenza ed i casi invece nei quali si puó verificare che il limite di una successione somma, prodotto o rapporto di altre successione dia come risultato una **forma indeterminata**.

Slide 206

7 - Operazioni sui limiti delle successioni

Consideriamo dapprima la combinazione lineare di due successioni che, per semplicitá e senza perdita di generalitá, possiamo scrivere come $u_n = y'_n + y''_n$. Valgono i due teoremi che seguono: **Teorema**.

Se la successione y'_n é divergente positivamente e la successione y''_n, pur non essendo eventualmente convergente, ammette un estremo inferiore finito h allora anche la successione combinazione lineare $u_n = y'_n + y''_n$ é divergente positivamente,:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \tag{64}$$

Dimostrazione. Essendo infatti per n abbastanza grande $y'_n > k$ allora sará possibile trovare un ν abbastanza grande tale che per $n > \nu$ sia $y'_n + y''_n > k + h$. Questo prova l'asserto. **cvd**

Slide 207

8 - Operazioni sui limiti delle successioni

In maniera assolutamente analoga vale il seguente:
Teorema.

Se la successione y'_n é divergente negativamente e la successione y''_n, pur non essendo eventualmente convergente, ammette un estremo superiore finito h allora anche la successione combinazione lineare $u_n = y'_n + y''_n$ é divergente negativamente:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \tag{65}$$

Dimostrazione. *Mutatis mutandis* la dimostrazione usa le stesse argomentazioni logiche di quella del teorema precedente. **cvd**

9 - Forma indeterminata $\infty \;\; -\infty$

Se invece la successione y'_n diverge positivamente e la successione y''_n diverge negativamente ne consegue che nulla puó dirsi sulla somma di due quantitá grandi quanto si vuole in valore assoluto ma opposte in segno.
La scrittura *formale* (ma non sostanziale)

$$\lim_{n\to\infty} u_n \; = \lim_{n\to\infty} (y'_n + y''_n) \; = \; \infty \;\; -\infty \tag{66}$$

é una *forma indeterminata.*

10 - Operazioni sui limiti delle successioni

Consideriamo ora la successione prodotto $u_n = y'_n \cdot y''_n$.
Sulla base dei ragionamenti esposti per i teoremi precedenti potete facilmente provare che valgono i seguenti teoremi:

Teorema.

Se la successione y'_n é infinitesima e la successione y''_n, pur non essendo eventualmente convergente, ammette un estremo superiore finito h allora anche la successione prodotto u_n é infinitesima, cioé:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \; = 0.$$

Slide 210

11 - Operazioni sui limiti delle successioni

Teorema.
Se la successione y'_n é infinitamente grande e la successione y''_n, pur non essendo eventualmente convergente, ammette un estremo inferiore positivo finito h allora anche $\mid y'_n \, y''_n \mid$ *é infinitamente grande*, cioé:

$$\lim_{n\to\infty} \mid y'_n \cdot y''_n \mid = \ +\infty \tag{67}$$

Dall'esame del segno di $y'_n \cdot y''_n$ si potrá poi decidere, caso per caso, se tale prodotto sia divergente positivamente o negativamente.

NOTA. Il lettore studi il comportamento del modulo della successione prodotto nel caso in cui le successioni y'_n e y''_n divergono rispettivamente positivamente e negativamente.

Slide 211

12 - Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Consideriamo poi il caso in cui y'_n sia infinitesima e y''_n divergente (positivamente o negativamente).
É chiaro che nulla potrá dirsi sulla successione dei prodotti $y'_n \cdot y''_n$ in quanto il fatto che uno sia molto grande puó essere compensato, in misura maggiore o minore a seconda dei casi, dal fatto che l'altro é molto piccolo.
La scrittura *formale* (ma non sostanziale)

$$\lim_{n\to\infty} u_n \ = \lim_{n\to\infty} (y'_n \cdot y''_n) \ = \ 0 \cdot \infty \tag{68}$$

si dice che é una *forma indeterminata.*

Slide 212

13 - Operazioni sui limiti delle successioni

Esaminiamo ora i casi della successione rapporto tra due successioni $u_n = y'_n/y''_n$.
Consideriamo dapprima il caso in cui y''_n sia infinitesima, cioé: $\lim_{n\to\infty} y''_n = 0$. Valgono allora i due teoremi.

Teorema.
Se la successione y''_n é infinitesima e la successione y'_n convergente ad un valore non nullo $l \neq 0$, allora la successione rapporto u_n é infinitamente grande:

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{y'_n}{y''_n} \mid = \ +\infty \tag{69}$$

Dall'esame del segno di $y'_n \cdot y''_n$ si potrá poi decidere, caso per caso, se tale rapporto sia divergente positivamente o negativamente.

Senza Dimostrazione (*DV = Deum voluntatis*)

Slide 213

14 - Operazioni sui limiti delle successioni

Teorema.
Se la successione y''_n é infinitesima e la successione $\mid y'_n \mid$ ha un estremo inferiore positivo, allora la successione rapporto u_n é infinitamente grande:

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{y'_n}{y''_n} \mid = \ +\infty \tag{70}$$

Anche in questo caso dall'esame del segno di $y'_n \cdot y''_n$ si potrá poi decidere, caso per caso, se tale rapporto sia divergente positivamente o negativamente.

Senza Dimostrazione (*DV = Deum voluntatis*)

Slide 214

15 - Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Se invece $\lim\limits_{n\to\infty} y'_n = 0$ nulla puó dirsi sul comportamento della successione rapporto in quanto il tendere a zero della successione al numeratore puó compensare o meno, a seconda dei casi, il tendere a zero del denominatore.
La scrittura *formale* (ma non sostanziale)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y'_n}{y''_n} = \frac{0}{0} \tag{71}$$

si suole anche dire *forma indeterminata.*

Slide 215

16 - Operazioni sui limiti delle successioni

Esaminiamo ora il caso in cui uno dei termini del rapporto $\frac{y'_n}{y''_n}$ é divergente (positivamente o negativamente) e l'altro limitato superiormente in valore assoluto. Vale il seguente teorema:

Teorema.

1. Se $\lim\limits_{n\to\infty} y'_n; \;=\; +\infty \;\; [-\infty] \quad$ e $\mid y''_n \mid < k, \forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{y'_n}{y''_n} \mid = \; +\infty \tag{72}$$

2. Se $\mid y'_n \mid < k, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y''_n; \;=\; +\infty \;\; [-\infty]$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{y'_n}{y''_n} \mid = \; 0 \tag{73}$$

Nota: Nella (72) dall'esame del segno di $y'_n \cdot y''_n$ si potrá poi decidere, caso per caso, se tale rapporto sia divergente positivamente o negativamente.

Slide 216

16bis - Cenno di dimostrazione

1. Per ipotesi $\forall k > 0$, $\exists \nu : \forall n > \nu \to y'_n > k$ e $h > 0$. Allora, dalla sequenza di disequazioni, si vede che $\forall k' = k/h > 0, \exists \nu'$ tale che
$$\mid \frac{y'_n}{y''_n} \mid \geq \mid \frac{y'_n}{h} \mid > \frac{k}{h} = k' \tag{74}$$
2. Per ipotesi $\forall k > 0$, $\exists \nu : \forall n > \nu \to y''_n > k$ e $h > 0$. Allora, dalla sequenza di disequazioni, si vede che $\forall k'' = h/k > 0, \exists \nu'$ tale che
$$\mid \frac{y'_n}{y''_n} \mid \leq \mid \frac{h}{y''_n} \mid < \frac{h}{k} = k'' \tag{75}$$

da cui l'asserto. (was zu beweisen war, ■)

Slide 217

17 - Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Rimane infine da esaminare il caso in cui y'_n e y''_n sono entrami divergenti.
Anche in questo caso nulla puó dirsi, in generale, sull'andamento della successione rapporto in quanto il crescere a dismisura del numeratore puó o meno essere compensato dalla crescita del denominatore.
La scrittura *formale* (ma non sostanziale)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y'_n}{y''_n} = \frac{\infty}{\infty} \tag{76}$$
é anch'essa una *forma indeterminata.*

Nota. Vedremo in seguito, studiando i limiti delle funzioni, come in alcuni casi le forme indeterminate si possano risolvere con l'introduzione del concetto di **ordine** degli infinitesimi e degli infiniti.

Slide 218

Empty Slide

Slide 219

Limiti delle funzioni

Continuitá

Slide 220

1 -Definizione di limite di una funzione -

Dopo aver discusso i limiti di quelle particolari funzioni note con il nome di successioni passiamo a definire il concetto di limite per una generica funzione

$$f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \ \mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R} \tag{77}$$

Da quello che abbiamo visto in precedenza sui *punti di accumulazione* possiamo aspettarci che:

1. una funzione $f(x)$ definita in un dominio limitato **puó ammettere** infiniti punti di accumulazione al finito;
2. una funzione $f(x)$ definita in un dominio non limitato **ammettere** come punti di accumulazione uno, o entrambi, il punti all'infinito $(-\infty, +\infty)$.

$$\Downarrow$$

Slide 221

dovremo definire i limiti delle funzioni per:

1. il generico punto di accumulazione al finito, x_0 ;
2. i punti all'infinito, $-\infty, +\infty$.

2 - Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$

Data la funzione $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ed un suo punto di accumulazione $x_0 \in \mathbf{A}'$ diremo che:

1. la funzione ammette un limite finito l_s per x che tende a x_0 da sinistra (**limite sinistro**), e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = l_s \tag{78}$$

se accade che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 \, [\Rightarrow | \, f(x) - l_s \, | < \epsilon \tag{79}$$

3 - Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$

2. la funzione ammette un limite finito l_d per x che tende a x_0 da destra (**limite destro**), e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = l_d \tag{80}$$

se accade che

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \, \delta > 0 \ : \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow | \, f(x) - l_d \, | < \epsilon. \tag{81}$$

Slide 224

4 - Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$

3. la funzione ammette un limite finito l_d per x che tende a x_0 e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{82}$$

se accade che

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \text{cioé se} \quad l_s = l_d \tag{83}$$

oppure se accade che

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |\ f(x) - l_d\ |< \epsilon. \tag{84}$$

Slide 225

Primo Teorema sui limiti

Teorema.
Condizione Necessaria e Sufficiente affinché una funzione $f(x)$ ammetta un limite finito per $x \to x_0$ é che essa ammetta il limite sinistro, l_s, ed limite destro, l_d, e che tali limiti siano eguali.

Slide 226

5 - Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$

4. la funzione diverge positivamene [negativamente] da sinistra per x che tende a x_{0-} e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = +\infty \;\; [-\infty] \qquad \text{se accade che} \tag{85}$$

$$\forall \kappa > 0, \; \exists\, \delta > 0 \; : \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow \; f(x) > \kappa \;\; [f(x) < -\kappa] \tag{86}$$

5. la funzione diverge positivamene [negativamente] da destra per x che tende a x_{0+} e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = +\infty \;\; [-\infty] \qquad \text{se accade che} \tag{87}$$

$$\forall \kappa > 0, \; \exists\, \delta > 0 \; : \; \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow \; f(x) > \kappa \;\; [f(x) < -\kappa] \tag{88}$$

Slide 227

6 - Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$

6. la funzione diverge positivamente [negativamente] per x che tende a x_0 e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\; [-\infty] \tag{89}$$

se accade rispettivamente che

$$\forall \kappa > 0, \; \exists\, \delta > 0 \; : \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash x_0 \; \Rightarrow \; f(x) > \kappa \tag{90}$$

ovvero

$$\forall \kappa > 0, \; \exists\, \delta > 0 \; : \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash x_0 \; \Rightarrow \; f(x) < -\kappa \tag{91}$$

Slide 228

7 - Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$

Funzioni infinitamente grandi

7. la funzione $f(x)$ é **infinatemente grande** in x_0- e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} \mid f(x) \mid = +\infty \tag{92}$$

se accade che

$$\forall \kappa > 0,\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash x_0\ \Rightarrow \mid f(x) \mid > \kappa \tag{93}$$

Nota. Valgono le stesse considerazioni fatte per le successioni.

Slide 229

8 - Definizione di limite di una funzione - $x \to \pm\infty$

Con le definizioni precedenti abbiamo esaurito i casi in cui il punto di accumulazione x_0 sia un punto finito.

Rimane da esaminare il caso in cui il punto di accumulazione sia $-\infty$ o $+\infty$.
Prima di addentrarci nelle definizioni formali si osservi che questo caso é assolutamente analogo a quello delle successioni - con l'unica differenza che nelle successioni l'unico caso possibile era $n \to +\infty$ - esaminato in precedenza.

Essendo le definizioni molto simili a quelle giá esaminate, useremo una presentazione piú compatta.

Slide 230

9 - Definizione di limite di una funzione - $x \to +\infty$

Definizione. Data la funzione $f(x)$ definita in un insieme non limitato $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ diremo rispettivamente che ammette limite finito, diverge positivamente, diverge negativamente, é infinitamente grande per x che tende a $+\infty$ e scriveremo rispettivamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \textbf{se} \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x > \bar{x}\ \Rightarrow |\ f(x) - l\ | <\ \epsilon \tag{94}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \textbf{se} \quad \forall\kappa > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x > \bar{x}\ \Rightarrow\ f(x) >\ \kappa \tag{95}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \textbf{se} \quad \forall\kappa > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x > \bar{x}\ \Rightarrow\ f(x) <\ -\kappa \tag{96}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |\ f(x)\ |= \infty \quad \textbf{se} \quad \forall\kappa > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x > \bar{x}\ \Rightarrow |\ f(x)\ |>\ \kappa \tag{97}$$

Slide 231

10 - Definizione di limite di una funzione - $x \to -\infty$

Definizione. Data la funzione $f(x)$ definita in un insieme non limitato $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ diremo rispettivamente che ammette limite finito, diverge positivamente, diverge negativamente, é infinitamente grande per x che tende a $-\infty$ e scriveremo rispettivamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad \textbf{se} \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x < \bar{x}\ \Rightarrow |\ f(x) - l\ | <\ \epsilon \tag{98}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \textbf{se} \quad \forall\kappa > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x < \bar{x}\ \Rightarrow\ f(x) >\ \kappa \tag{99}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \textbf{se} \quad \forall\kappa > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x < \bar{x}\ \Rightarrow\ f(x) <\ -\kappa \tag{100}$$

$$\lim_{x\to-\infty} |\ f(x)\ |= \infty \quad \textbf{se} \quad \forall\kappa > 0,\ \exists\bar{x}\ :\ \forall x < \bar{x}\ \Rightarrow |\ f(x)\ |>\ \kappa \tag{101}$$

Limiti di una funzione costante $f(x) = c$

Esempio 1. Sia $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ la funzione costante.
Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono di accumulazione.
Preso comunque un $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = c \tag{102}$$

egualmente per $x \to \pm\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c \tag{103}$$

segue: Limiti di una funzione costante $f(x) = c$

Infatti, nel caso del limite ad un generico x_0 finito si ha:
che assegnato comunque $\epsilon > 0$, la relazione

$$\mid f(x) - c \mid < \epsilon \tag{104}$$

cioé

$$-\epsilon < f(x) - c < \epsilon \tag{105}$$

si riduce, essendo $f(x) = c$, a

$$-\epsilon < \epsilon \tag{106}$$

che é sempre vera comnque si prenda δ.
<u>Esercizio</u>. Provate il limite per $x \to \pm\infty$

Slide 234

Limiti della funzione $segn(x)$ in $x_0 = 0$

Esempio 2. Sia $f(x) = segn(x) = \frac{|x|}{x}$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e la cui immagine é l'insieme $\{-1, 1\}$.
É immediato verificare che $x = 0$ é un punto di accumulazione del dominio ma non appartiene al dominio della funzione. Essendo:

- $\forall\, x < 0$ la funzione é costante e vale, $segn(x) = -1$,
- $\forall\, x > 0$ la funzione vale, $segn(x) = +1$.

Ne segue:

$$\lim_{x \to 0-} segn(x) = -1 \tag{107}$$

$$\lim_{x \to 0+} segn(x) = +1 \tag{108}$$

Quindi il limite destro e sinistro sono distinti $\Rightarrow$ non esiste il limite della funzione per $x \to 0$.

Slide 235

Limiti di una funzione lineare: $f(x) = ax + b$

Esempio 3. Sia $f(x) = ax + b$, dove $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, una generica funzione lineare.
Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono di accumulazione.
Preso comunque un $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ax_0 + b \tag{109}$$

Nel caso $x \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Viceversa nel caso $x \to -\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Slide 236

Limiti della funzione: $f(x) = x^n$

Esempio 4. Sia $f(x) = x^n$, dove $n \in \mathbb{N}$, la funzione esponenziale con esponente intero.
Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono di accumulazione.
Preso comunque un $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^n \tag{110}$$

Nel caso $x \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Viceversa nel caso $x \to -\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{per } n \text{ dispari} \\ +\infty & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

Slide 237

Limiti della funzione: $f(x) = (\frac{1}{x})^n$

Esempio 5. Sia $f(x) = (\frac{1}{x})^n = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione esponenziale con esponente intero negativo.
L'insieme dei punti di accumulazione é l'unione del dominio, $D_f = \mathbb{R} \setminus 0$, e del punto $\{0\}$, cioé tutti i punti di $\mathbb{R}$.
Preso comunque un $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^n \tag{111}$$

Nel caso $x_0 = 0$ si ha, per n pari:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \tag{112}$$

Slide 238

Segue: Limiti della funzione: $f(x) = (\frac{1}{x})^n$

mentre, per n dispari

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty \tag{113}$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty \tag{114}$$

Quindi la funzione $f(x) = (\frac{1}{x})^n = x^{-n}$ **con n dispari non ammette limite per $x \to 0$.**
Nel caso $x \to \pm\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \tag{115}$$

Nota: Oltre alla dimostrazione formale é facile convincersi di questo risultato nel caso particolare $n = 1$.

Slide 239

Limiti di un Polinomio: $P_n(x)$

Esempio 5. Consideriamo il *generico* polinomio di grado n, $\in \mathbb{N}$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{116}$$

o scritto nella forma

$$P_n(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0 = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \tag{117}$$

Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono di accumulazione.
É facile provare che preso comunque un $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0) \tag{118}$$

Slide 240

segue - limiti di un Polinomio

Consideriamo adesso il polinomio nella forma (117).
Nel caso $x \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{119}$$

Viceversa nel caso $x \to -\infty$ si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{per } n \text{ dispari} \\ +\infty & \text{per } n \text{ pari} \end{cases} \tag{120}$$

La dimostrazione di questo risultato si ottiene facilmente utilizzando i teoremi delle operazioni sui limiti che vedremo subito dopo.

Slide 241

Operazioni sui limiti -Premessa

In precedenza abbiamo definito le operazioni tra funzioni come una nuova funzione, chiamata funzione somma, differenza, prodotto e rapporto rispettivamente delle funzioni date. Il dominio della nuova funzione poteva sottostare ad alcune restrizioni. Nella maggior parte dei casi esso era semplicemente la intersezione dei domini delle funzioni che erano prese in considerazione nell'operazione in esame; con la esclusione, nel caso del rapporto, di quei punti del dominio dove si annullava la funzione al denominatore. In quanto con il termine *stess dominio* si intenderá che il dominio individuato in quel capitolo.

Slide 242

Operazioni sui limiti -1

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite nello stesso dominio comune $\mathbf{A}$ e sia $x_0 \in \mathbf{A}'$ un punto di accumulazione di $\mathbf{A}$ (**finito o infinito**). Detti $c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{R}$ numeri reali qualsiasi, e $n, k \in \mathbb{N}$ due interi, se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \tag{121}$$

si ha:

1. il limite della combinazione lineare $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ é dato da:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) &= c_1 \lim_{x\to x_0} f(x) + c_2 \lim_{x\to x_0} g(x) \\ &= c_1 l \ + \ c_2 m\end{aligned} \tag{122}$$

Nota Il caso della funzione prodotto per uno numero reale si ottiene dalla precedente per $c_1 = \alpha$ e $c_2 = 0$; la somma si ottiene per

Slide 243

$c_1 = c_2 = 1$, e la differenza per $c_1 = 1$; $c_2 = -1$.

2. il limite del prodotto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é dato da:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l \ \cdot \ m \tag{123}$$

3. il limite del rapporto $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, solo se $m = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ é dato da:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l}{m} \tag{124}$$

4. il limite della funzione elevata a potenza intera $h(x) = f(x)^{\frac{n}{k}}$ é dato da:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)^{\frac{n}{k}}] = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\frac{n}{k}} = [l]^{\frac{n}{k}} \tag{125}$$

a condizione che sia *a)* $l > 0$ per n pari; *b)* $l \neq 0$ per n dipari.

Slide 244

Estensioni

I teoremi precedenti si estendono poi a tutti i casi:

$$\lim_{x\to x_{0-}} \qquad \lim_{x\to x_{0+}} \tag{126}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \qquad \lim_{x\to -\infty} \tag{127}$$

Si possono altresí estendere ai limiti delle funzioni i tutti i teoremi che abbiamo enunciato nel caso delle successioni. Riportiamo solo i piú importanti.

Slide 245

Teoremi sui limiti delle funzioni

Teorema. *Se una funzione $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ (finito o infinito) allora tale limite é unico.*

Teorema. *Siano* $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ definite rispettivamente nei domini A, A_1, A_2. Detto $\mathbf{B}' = \mathbf{A}' \cup \mathbf{A}'_1 \cup \mathbf{A}'_2 \neq \emptyset$ l'insieme comune dei loro insiemi derivati e, detto $X \subseteq \mathbf{B}'$, accade che:

1. $x_0 \in \mathbf{X}$;
2. $\forall x \in \mathbf{X}$ si verifica che $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$
3. le due funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono entrambe convergenti allo stesso limite l per $x \to x_0$

allora

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Teorema di permanenza del segno

Teorema Se: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 0 \quad [< 0]$ allora $\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash \{x_0\}$ accade che

$$f(x) > 0 \qquad\qquad [< 0] \tag{128}$$

Dimostrazione Infatti, per ipotesi si ha che $\forall \epsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \backslash \{x_0\} \ \Rightarrow \ \epsilon - l < f(x) < \epsilon + l \tag{129}$$

Scegliendo, tra tutti gli ϵ arbitrari, quelli tali che $\epsilon - l > 0$ segue l'asserto.

Nota. Il caso in cui sia $l < 0$ é una banale estensione.
Altrettanto semplice é il caso in cui sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0 \quad [< 0]$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l > 0 \quad [< 0]$.
La dimostrazione é un esercizio che siete invitati a svolgere da soli.

Criterio di convergenza di Cauchy, $x \to x_0$

Teorema *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione $f(x)$ sia convergente per $x \to x_0$ é che*:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ \forall x', x'' \in I_\delta(x_0), \ \ x', x'' \neq x_0 \tag{130}$$

$$\Longrightarrow | \ f(x') - f(x'') \ | < 0 \tag{131}$$

Criterio di convergenza di Cauchy, $x \to \pm\infty$

Teorema *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione $f(x)$ sia convergente per $x \to +\infty$ $[-\infty]$ é che*:

$$\forall \epsilon > 0, \exists x^* \ : \ \forall x', x'' > x^* \ \Longrightarrow | \ f(x') - f(x'') \ | < 0 \tag{132}$$

$$[\, \forall \epsilon > 0, \exists x^* \ : \ \forall x', x'' < x^* \ \Longrightarrow | \ f(x') - f(x'') \ | < 0 \,] \tag{133}$$

Funzioni continue - 1

Siamo ora in grado di rispondere alla seconda domanda che ci eravamo posti *molte* lezioni or sono:

Quando $x \to x_0$ *la funzione* $f(x)$ *puó*
tendere anche ad un valore $l \neq f((x_0)$ *!!*

Continuitá nel punto x_0

Definizione

Diremo che una funzione $f(x)$, definita in (a, b), é continua nel punto $x_0 \in]a, b[$, interno all'intervallo (a, b) se accade che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{134}$$

Funzioni continue - 2

Osservazione 1: Come avrete notato questa volta nell'indicare il dominio abbiamo usato, invece del generico insieme **A**, un intervallo. Il motivo é che, nella maggior parte dei casi, le funzioni sono definite in un solo intervallo con la eventuale esclusione di qualche punto di esso. É ovvio che quanto diremo sugli intervalli si puó ripetere, facendo attenzione a non cadere in *trappole matematiche* per domini generici costituiti dalla unione di diversi intervalli.

Osservazione 2: Avrete pure notato che abbiamo parlato di **punto interno** senza averlo mai definito.
Colmiamo subito questa lacuna.

Funzioni continue - 2

Punto interno

Definizione. Sia $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme numerico, diremo che il punto $x_0 \in \mathbf{A}$ é un **punto interno** di $\mathbf{A}$ se esiste un intorno completo di x_0 costituito da soli elementi di $\mathbf{A}$, cioé se

$$\exists \delta > 0 \ : \ \mathbf{A} \cup I_\delta(x_0) = \mathbf{A} \tag{135}$$

Punto di frontiera

Definizione. Sia $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme numerico, diremo che il punto $x_0 \in \mathbf{A}$ é un **punto di frontiera** (o punto estremo) di $\mathbf{A}$ se comunque si prenda un intorno completo di x_0, $I_\delta(x_0)$ esso contiene almeno un punto non appartenente ad $\mathbf{A}$. Questa condizione si puó esprimenre dicendo che:

$$\forall \delta > 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{A} \subset \ (\ \mathbf{A} \ \cup \ I_\delta(x_0) \ ) \tag{136}$$

oppure

$$\forall \delta > 0 \ \Rightarrow \ (\ \mathbf{A} \ \cup \ I_\delta(x_0) \ ) \neq I_\delta(x_0) \tag{137}$$

Slide 252

Funzioni continue - 3

Continuitá nel punto x_0 di frontiera o estremo

Definizione

Diremo che una funzione $f(x)$, definita in (a, b), é continua nei punti di frontiera a, b dell'intervallo $[a, b]$ se accade che

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \tag{138}$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \tag{139}$$

Nota. Ovviamente puó accadere che la funzione sia continua in uno solo dei punti di frontiera

Slide 253

Continuitá nell'intervallo

Definizione. Diremo che la funzione $f(x)$ definita nell'intervallo (a, b) (aperto o chiuso) é ivi continua se essa é continua per ogni $x \in (a, b)$, cioé se

$$\forall x^* \in]a, b[\Rightarrow \lim_{x \to x^*} = f(x^*) \tag{140}$$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \tag{141}$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \tag{142}$$

Slide 254

Operazioni tra funzioni continue - 1

Per le funzioni continue valgono i seguenti teoremi per la cui dimostrazione basta utilizzare le stesse tecniche viste per i limiti (é opportuno che ci proviate !!).

Teorema. Siano $f(x)$ e $g(x)$ tali che possano essere definite le funzioni combinazione lineare, prodotto e rapporto; e siano c_1 e c_2 due costanti reali. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 allora risultano anche continue in x_0 le funzioni:

1. $h_c(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$
2. $h_p(x) = f(x) \cdot g(x)$
3. $h_r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
   Infatti se $g(x_0) \neq 0$ allora, per il teorema di permanenza del segno, esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che $\forall x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow g(x) \neq 0$, quindi $h_r(x)$ é ivi definibile ed é anche continua in x_0.

Slide 255

Operazioni tra funzioni continue- 2

Corollario. - Il teorema precedente puó estendersi a tutti i punti in cui sono continue le funzioni $f(x)$ e $g(x)$. Quindi se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in un comune intervallo (a, b) sono ivi continue anche la funzione combinazione lineare, prodotto e, con le restrizioni ovvie sui punti in cui $g(x) = 0$, anche la funzione rapporto.

Teorema Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{A}$ e continua in $x_0 \in \mathbf{A}$ e sia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{A}$ una successione numerica convergente ad x_0, allora

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0) \tag{143}$$

Nota. Il risultato del teorema puó altresí scriversi come $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$, cioé *nelle ipotesi del teorema é possibile invertire il segno di limite con quello di funzione.*

Slide 256

Funzioni Uniformemente Continue

La continuitá é una proprietá del singolo punto (cioé una proprietá locale) che puó valere per tutti i punti di un intervallo. Si tratta, in questo caso della estensione *globale* di una proprietá locale.
Vediamo ora una proprietá naturalmente **globale**.
Definizione. Una funione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b) si dice **uniformemente continua** in (a, b) se:

$$\begin{aligned} &\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ :\ \forall\ x', x'' \in (a, b)\ ,\ \mid x' - x'' \mid < \delta \\ &\qquad\Longrightarrow\ \mid\ f(x') - f(x'')\ \mid <\ \epsilon \end{aligned} \tag{144}$$

Per le funzioni unformemente contune valgono le proprietá (*che non dimostriamo*)

Slide 257

Funzioni Uniformemente Continue - 2

Teorema 1. - *Una funzione uniformemente continua in un intervallo (a, b) é anche continua in (a, b).*

Teorema 2. - *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ é ivi anche uniformemente continua.*

Teorema 3. - *Una funzione continua in un intervallo chiuso non limitato e convergente all'infinito é ivi uniformemente continua.*

Teorema 4. - *Una funzione uniformemente continua in un intervallo aperto e limitato $]a, b[$ puó essere prolungata in una funzione continua in $[a, b]$ chiuso.*

Slide 258

Proprietá delle funzioni continue - 1

Esaminiamo ora alcune proprietá delle funzioni continue che sono **molto importanti** in molte situazioni concrete.

Teorema 1: ***Teorema di permanenza del segno.***
Se la funzione $f(x)$ definita nell'intervallo (a, b) é continua e positiva [negativa] in $x_0 \in (a, b)$, esiste un intorno di $I_\delta(x_0)$ nel quale $f(x)$ é ancora positiva [negativa].
Dimostrazione: Il teorema é una conseguenza di quello analogo dimostrato per i limiti.

Slide 259

Proprietá delle funzioni continue - 2

Teorema 2: ***Teorema di esistenza degli zeri.***
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b); se essa é continua in un punto x_0 tale che, comunque si prennda un intorno $I_\delta(x_0)$, essa assume sempre in tale intorno sia valori positivi che valori npn positivi, allora si ha $f(x_0) = 0$.
Dimostrazione: Il teorema é una conseguenza del teorema precedente. Infatti se, per assurdo, fosse $f(x_0) > 0$ allora dovrebbe esistere un intorno di x_0 per i punti del quale deve aversi $f(x) > 0$. Poiché questo non é, per ipotesi del presente teorema, si deve escludere che sia $f(x_0) > 0$. ed assumere che sia $f(x_0) \leq 0$.
Ragionando in modo analogo si deve escludere che sia $f(x_0) < 0$ ed assumere che sia $f(x_0) \geq 0$.
Ma, se contemporaneamente valgono le relazioni $f(x_0) \leq 0$ e $f(x_0) \geq 0$, dal postulato n. 8 dei numeri reali segue $f(x_0) = 0$. Q.E.D.

Proprietá delle funzioni continue - 3

Teorema 3 .
Una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo (a, b) non puó ivi assumere due valori α e β $(< \alpha)$ senza assumere ***tutti*** *i valori dell'intervallo $[\alpha, \beta]$.* Dimostrazione Omessa

Teorema 4: *Teorema di Weierstrass* .
Una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitao $[a, b]$ é ivi sempre dotata di minimo, m, e massimo, M. Dimostrazione Omessa

Teorema 5.
Una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume tutti i valori dell'intervallo $[m, M]$.

Dimostrazione: Il teorema discende immediatamente dai teoremi 3 e 4.

Proprietá delle funzioni continue - 4

Corollario.
Sia funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Detti $f(a) \neq f(b)$ i valori assunti dalla funzione agli estremi (e per fissare le idee supponiamo $f(a) < f(b)$) e detto s un numero reale compreso tra questi, cioé $f(a) < s < f(b)$, allora esiste un $\bar{x} \in [a, b]$ per il quale risulta $f(\bar{x}) = s$.

Dimostrazione: Il teorema discende immediatamente dai teoremi 3 e 5.

Corollario.
Sia funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Detti m e M rispettivamente il minimo e massimo, detto s un numero reale compreso tra questi, cioé $m < s < M$, allora esiste un $\bar{x} \in [a, b]$ per il quale risulta $f(\bar{x}) = s$.

Dimostrazione: Il teorema discende immediatamente dai teoremi 3 e 5.

Punti di discontinuitá delle funzioni

Definizione.
Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b) e sia $c \in (a, b)$.
Se
i) $f(x)$ é non dotata di limite in c, cioé se $\nexists \lim_{x \to c}$, o
ii) se pur essendo convergente si ha

$$\lim_{x \to c} \neq f(c) \tag{145}$$

allora

c si dice punto singolare o punto di ***discontinuitá*** *della funzione $f(x)$.*

Punti di discontinuitá eliminabile

Nel caso in cui valga la (145) vediamo come si puó eliminare il punto di discontinuitá.

1. Se vale la condizione (145) allora basta definire la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \neq c \\ f(c) & x = c \end{cases} \tag{146}$$

2. Se invece $f(x)$ é definita per $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ e $\lim_{x \to c} f(x) = L$, allora possiamo definire una nuova funzione detta **estensione continua** o **prolungamento per continuitá** nel modo seguente:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \forall\, x \in (a, b),\ x \neq c \\ L & x = c \end{cases} \tag{147}$$

Slide 264

Punti di discontinuitá non eliminabile

1. **Discontinutá di I specie**
   Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b) e sia $c \in (a, b)$.
   Diremo che c é un punto di discontinuitá di I specie se la funzione, non dotata di limite in c, é dotata di limite destro e sinistro distinti, cioé:
   $$\lim_{x \to c-} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to c+} f(x) = l_2, \quad \text{e} \quad l_1 \neq l_2 \qquad (148)$$
2. **Discontinutá di II specie**
   Diremo che c é un punto di discontinuitá di II specie se almeno uno (o entrambi) dei limiti destro o sinistro di $f(x)$, per $x \to c$ non esistono.
3. **Punto di infinito**
   Diremo infine che c é un punto di infinito della funzione se $f(x)$ é divergente a destra, o a sinistra, o da entrambi i lati.

Slide 265

Esempio

Sia $f(x)$ la funzione definita in $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dalla relazione

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

Consideriamo il punto $c = 1$ del dominio di $f(x)$ e definiamo:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = & \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \ \ \forall\, x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } \ x = 1 \end{cases}$$

La funzione $F(x)$ é il prolungamento per continuitá della funzione $f(x)$ in $x = 1$.

Funzione monotone - 1

Abbiamo giá dato le definizioni di funzioni crescente, non decrescente, decrescente e non crescente.
Vogliamo adesso stabilire alcune proprietá di queste funzioni monotone.

Teorema.
I punti di discontinuitá di una funzione monotona sono tutti di I specie.
(Dimostrazione omessa)

Teorema.
Se $f(x)$ é una funzione monotona nell'intervallo $[a, b]$ la quale assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$, $f(x)$ é continua in $[a, b]$.
(Dimostrazione omessa)

Funzione monotone - 2

Teorema.
Se $a \in \mathbb{R}$ é una costante reale, le funzioni:

$$x^a, \quad a^x, \quad \log_a x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x$$

sono continue in ogni intervallo limitato che non contenga punti in cui queste non sono definite.
(Dimostrazione omessa)

Slide 268

Infinitesimi ed infiniti

Analogamente a quanto si é visto con le successioni si danno le seguenti:

Definizioni.

1. Una funzione $f(x)$ si dice **infinitesima nel punto** x_0 (finito od infinito) se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \tag{149}$$
2. Una funzione $f(x)$ si dice **infinitamente grande nel punto** x_0 (finito od infinito) se
$$\lim_{x \to x_0} \mid f(x) \mid = +\infty \tag{150}$$

Slide 269

Infinitesimi ed infiniti - 1

Consideriamo ora le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe infinitesime in x_0 (finito ed infinito) e, supposto che sia $\forall x \neq x_0, \;\; g(x) \neq 0$, consideriamo la funzione rapporto

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Possono presentarsi **quattro casi distinti**:

1. Se accade che la funzione $h(x)$ é convergente in x_0 ed il limite é una quantitá finitia diversa da zero, cioé se:
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \; \neq 0 \tag{151}$$
allora $f(x)$ e $g(x)$ sono

   infinitesimi dello stesso ordine in x_0.

Slide 270

Infinitesimi ed infiniti - 2

2. Se accade che la funzione $h(x)$ é infinitesima in x_0, cioé se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0 \tag{152}$$

allora $f(x)$ si dirá:

infinitesima di ordine superiore rispetto a $g(x)$ in x_0.

3. Se accade che la funzione $h(x)$ é infinitamente grande x_0, cioé se:

$$\lim_{x \to x_0} \mid h(x) \mid = +\infty \tag{153}$$

allora $f(x)$ si dirá:

infinitesima di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ in x_0.

Slide 271

Infinitesimi ed infiniti - 3

4. Se accade che la funzione $h(x)$ non ammette limite in x_0, cioé se:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} h(x) \tag{154}$$

allora si dirá che:

$f(x)$ e $g(x)$ son infinitesimi non paragonabili in x_0.

Estensione delle definizioni.

Definizioni analoghe possono essere date per le funzioni infinitamente grandi in x_0.

In questo caso si parla di **infiniti** dello stesso ordine, di ordine inferiore o superiore.

Slide 272

Infinitesimi ed infiniti - 4

1. $f(x)$ e $g(x)$ **infiniti dello stesso ordine** in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \neq 0 \tag{155}$$

2. $f(x)$ é in x_0 **infinito di ordine superiore** rispetto a $g(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \mid h(x) \mid = +\infty \tag{156}$$

3. $f(x)$ é in x_0 **infinito di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0 \tag{157}$$

4. $f(x)$ e $g(x)$ **infiniti non paragonabili** in x_0 se:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} h(x) \tag{158}$$

Slide 273

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 1

Se $g(x)$ é positiva in x_0 ed $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ é un numero reale positivo tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \neq 0 \tag{159}$$

allora $f(x)$ si dirá infinitesima [infinito] di ordine α rispetto a $g(x)$ in x_0.

Si osservi che se:

$\alpha < 1 \Rightarrow f(x)$ é infinitesimo [infinito] di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ in x_0;

$\alpha = 1 \Rightarrow f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi [infiniti] dello stesso ordine in x_0;

$\alpha > 1 \Rightarrow f(x)$ é infinitesimo [infinito] di ordine superiore rispetto a $g(x)$ in x_0;

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 2

Se per α comunque grande [piccolo] la $f(x)$ é un infinitesimo o un infinito di ordine superiore [inferiore] rispetto a $[g(x)]^\alpha$ allora si dice che $f(x)$ é un infinitesimo [infinito] di ordine infinitamente grande [piccolo] rispetto a $g(x)$.

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 3 - Esempi

Esempio 1 - Le funzioni $f(x) = 5x^2 - 3x$ e $g(x) = 2x^2 + 12x$ sono chiaramente infinitesime in $x_0 = 0$. Considero:

$$h(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x^2 + 12x} \quad \text{e ottengo che :}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(5x-3)}{x(2x+12)} = -\frac{3}{12}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x), g(x) \ \text{ infinitesimi dello stesso ordine.}$$

Slide 276

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 4 - Esempi

Esempio 2 - Le funzioni $f(x) = (x-3)^3$ e $g(x) = 6(x-3)^2 + 4(x-3)$ sono chiaramente infinitesime in $x_0 = 3$. Considero:

$$h(x) = \frac{(x-3)^3}{6(x-3)^2 + 4(x-3)} \quad \text{e ottengo che :}$$

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-3)^2}{(x-3)[6(x-3)+4]} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{6x-14} = 0$$

$\Longrightarrow$ $f(x)$infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$.

Slide 277

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 5 - Esempi

Esempio 3 - Le funzioni $f(x) = 6(x-3)^2 + 4(x-3)$ e $g(x) = (x-3)^3$ sono chiaramente infinitesime in $x_0 = 3$. Considero:

$$h(x) = \frac{6(x-3)^2 + 4(x-3)}{(x-3)^3} \quad \text{e ottengo che :}$$

$$\lim_{x\to 3} \mid h(x) \mid = \; displaystyle \lim_{x\to 3} \mid \frac{(x-3)[6(x-3)+4]}{(x-3)(x-3)^2} \mid = +\infty$$

$\Longrightarrow$ $f(x)$infinitesimo di ordine inferioe rispetto a $g(x)$.

Slide 278

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 6 - Esempi

Esempio 3 - Le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ sono chiaramente infinitesime in $x_0 = 0$. Proviamo ora che sono infinitesime dello stesso ordine e che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Per $\mid x \mid < \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\mid \sin x \mid \leq \mid x \mid \leq \mid \tan x \mid \quad \text{dividendo per } \mid \sin x \mid$$

$$1 \leq \mid \frac{\sin x}{x} \mid \leq \mid \frac{1}{\cos x} \mid \quad \text{da cui il limite per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{CVD}$$

essendo $\cos x$ continua e non nulla in $x = 0$.

Slide 279

Ordine dell'infinitesimo [infinito] - 7 - Esempi

Esempio 3 - Le funzioni $f(x) = 1 - \cos x$ e $g(x) = x$ sono chiaramente infinitesime in $x_0 = 0$. Proviamo ora che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0$$

$\Longrightarrow$ $f(x) = 1 - \cos x$ é un infinetisimo di ordine superiore rispetto ad x.

Infinitesimi e infiniti: Teoremi

Teorema.
Se $f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x)$ son quattro funzioni tutte infinitesime per $x \rightarrow x_0$, e se $g_1(x), g_2(x)$ sono infinitesime di ordine superiore rispettivamente rispetto a $f_1(x), f_2(x)$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Dimostrazione. Infatti puó scriversi:

$$\frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1+\frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{1+\frac{g_2(x)}{f_2(x)}}$$

e per le ipotesi del teorema

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1+\frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{\frac{1+g_2(x)}{f_2(x)}} = 1 \quad \text{Da cui l'asserto. (cvd)}$$

Infinitesimi e infiniti: Teoremi

Con analogo procedimento si posso dimostrare i seguenti teoremi relativi agli *infiniti.*

Teorema.
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infiniti per $x \rightarrow x_0$, di cui il primo di ordine superiore rispetto al secondo, anche la loro somma é un infinito.

Teorema
Se $f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x)$ son quattro funzioni tutte infinitamente grandi per $x \rightarrow x_0$, e se $g_1(x), g_2(x)$ sono di ordine superiore rispettivamente rispetto a $f_1(x), f_2(x)$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

ammesso che uno dei due precedenti limiti esista.

Slide 282

DERIVATE

Slide 283

Incrementi finiti della funzione e della variabile

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in (a, b) e siano $x, x_0 \in (a, b)$

Definizioni. - Diremo:

- **incremento della funzione** $f(x)$, corrispondente al passaggio da x_0 ad x, la differenza
$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \tag{160}$$
- **incremento della variabile indipendente** la differenza
$$\Delta x = x - x_0 \tag{161}$$
- **rapporto incrementale** la quantitá
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{162}$$

Slide 284

Derivate - Definizioni - 2

Definizione. - Chiameremo **derivata della funzione** $f(x)$ **nel punto** x_0 il limite, se esiste ed é finito, del rapporto incrementale al tendere di $x \to x_0$, cioé

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{163}$$

ovvero

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{164}$$

Slide 285

Derivate - Definizioni - 3

- La derivata é ovviamente un concetto puntuale come il limite.
- Se la funzione ammette derivata in x_0 allora si dirá **derivabile** in x_0.
- Se la funzione $f(x)$ é derivabile in tutti i punti (ovviamente solo interni) dell'intervallo allora si dirá **derivabile nell'intervallo** $]a, b[$.
- **Definizione.** - **Funzione derivata prima**. Se $f(x)$ é dotata di derivata prima in ogni punto del'intervallo allora risulta definita una nuova funzione che chiameremo **funzione derivata prima** e indicheremo equivalentemente con

$$Df(x), \quad f'(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{df}{dx}. \tag{165}$$

Slide 286

Derivate - 4

Teorema. - *Se la funzione $f(x)$ é derivabile in x_0 allora $f(x)$ é continua in x_0 .*

Dimostrazione. Per ipotesi la funzione é derivabile, quindi esiste finito il limite del rapporto incrementale che indichiamo con λ. Dalla definizione di limite si ha:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ \forall x \in I_\delta(x_0)$$

$$\Rightarrow \ \lambda - \epsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \lambda + \epsilon$$

Detto $L = max\{\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon\}$ si ha

$$f(x) - f(x_0) < L \mid x - x_0 \mid \quad \forall \ \mid x - x_0 \mid < \delta$$

$$\Rightarrow \ f(x) - f(x_0) < L \mid x - x_0 \mid < L\delta \quad \text{se prendo } L\delta < \epsilon$$

$$\Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{cvd}$$

Slide 287

Interpretazione geometrica della derivata

Nella la figura (25) l'incremento della funzione e della variabile indipendente son indicati con Δy e Δx rispettivamente.

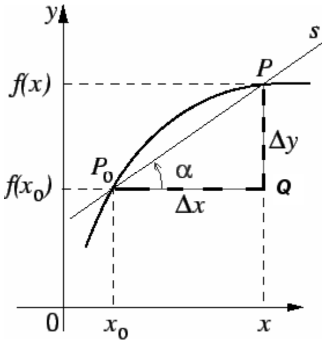


Figura 25: Significato geometrico della derivata

Slide 288

Interpretazione geometrica della derivata

Δy e Δx sono i cateti del triangolo rettangolo chiuso dalla ipotenusa P_0P. Un arcinoto risultato delle trigonometria dice: *la lunghezza di un cateto é eguale alla lunghezza dell'altro per la tangente dell'angolo α opposto al primo cateto*. Ne consegue che:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quando si passa al limite per $x \to x_0$ la retta secante su cui giace l'ipotenusa P_0P tende alla retta tangente alla curva $y = f(x)$. Detto β l'angolo che tale retta tangente forma con l'asse delle x si ha:

$$\tan \beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Slide 289

Interpretazione geometrica della derivata

L'equazione della retta s passante per i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x, f(x))$ é data da:

$$\frac{Y - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{X - x_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad Y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(X - x_0)$$

Passando al limite per $x \to x_0$ in entrambi i membri della precedente, si ottiene l'equazione della retta tangente in x_0:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$$

La derivata di $f(x)$ nel punto x_0 é il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto x_0.

Slide 290

Rette tangenti verticali

Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ non sia derivabile in x_0 perché risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\; [-\infty]$.

La trattazione geometrica prima svolta puó ripetersi in modo assolutamente analogo. Tuttavia il passaggio al limite non é possibile in quando il limite del rapporto incrementale diverge a $+\infty \;\; [-\infty]$.

É facile tuttavia riconoscere che in questo caso la retta tangente ala curva $y = f(x)$ nel punto x_0 é la retta parallela all'asse Y di equazione $X = x_0$.

Slide 291

Punti angolosi

Diremo che il punto x_0 appartenente al dominio della funzione $f(x)$ é un **punto angoloso** se $f(x)$ é non derivabile nel punto x_0 ed esistono finiti e distinti i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lambda', \text{ e } \lim_{x \to x_0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lambda'' \text{ con } \lambda' \neq \lambda'' \tag{166}$$

Slide 292

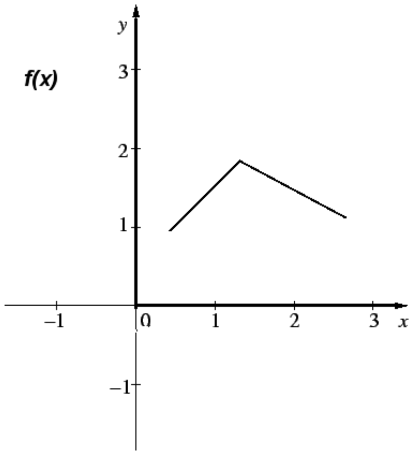


Figura 26: Punto angoloso

Punti cuspidali o cuspidi

Diremo che il punto x_0 appartenente al dominio della funzione $f(x)$ é un **punto cuspidale** o **cuspide** se $f(x)$ é non derivabile nel punto x_0 ed si verifano uno dei seguenti casi:

$$\textit{(a)} \qquad \lim_{x \to x_0 -} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty, \text{ e } \lim_{x \to x_0 +} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \qquad (167)$$

oppure

$$\textit{(b)} \qquad \lim_{x \to x_0 -} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty, \text{ e } \lim_{x \to x_0 +} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \qquad (168)$$

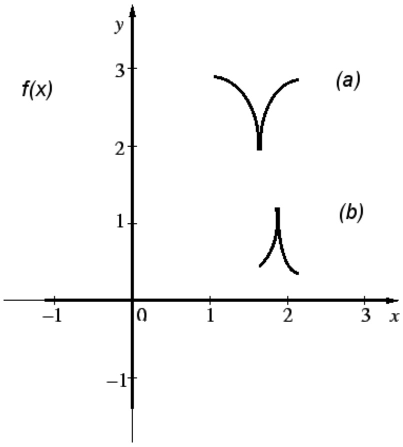


Figura 27: Punto cuspidale

Slide 295

Primi esempi di derivate

1. $f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R},\ costante \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

   Infatti: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = 0$

2. $f(x) = x, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$

   Infatti: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = h \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = 1$

3. $f(x) = a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R},\ costante \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a$

   Infatti: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = a \cdot h \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = a$

4. $f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},\ costanti \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a$

   Infatti: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = ah \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = a$

5. $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

   Infatti: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2h(x+h) \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = \lim_{h\to 0} 2(x+h) = 2x$

Slide 296

6. $f(x) = 1/x, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/x^2 \ \ \forall x \neq 0$

   Infatti: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x+h)} \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = \lim_{h\to 0} -\dfrac{h}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

7. $f(x) = \sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \ \forall x > 0$

   Infatti:

   $\Delta f = f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+h} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \ \Rightarrow \ \lim_{h\to 0} \Delta\, f/h = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

8. $f(x) = \mid x \mid, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = segn(x)$

   Infatti: *i)* se $x > 0, \Rightarrow \mid x \mid = x; \ \ f'(x) = 1,$

   . *ii)* se $x < 0, \Rightarrow \mid x \mid = -x, \ \ f'(x) = -1 \ \Rightarrow \ f'(x) = segn(x).$

   Nota La funzione $f(x) = \mid x \mid$ non é derivabile in $x = 0$, che é facile riconoscere essere un punto angoloso.

Altre Derivate Fondamentali

funzione	*derivata*	**Note**	(169)
$\sin(x)$	$\cos(x)$	.	(170)
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	.	(171)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\forall\alpha \in \mathbb{R}$ e solo se	(172)
		$x^\alpha, x^{\alpha-1}$ hanno senso.	(173)
a^x	$a^x \ln_e a$	$\forall a > 0$	(174)
a^{-x}	$-a^{-x} \ln_e a$	$\forall a > 0$	(175)
e^x	e^x	caso particolare del prec.	(176)
e^{-x}	$-e^{-x}$	caso particolare del prec.	(177)
$\log_a \mid x \mid$	$\frac{1}{x}\log_a(e)$	$\forall a > 0, a \neq 1, x \neq 0$	(178)
$\log_e \mid x \mid$	$\frac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$	(179)

Slide 299

Regole di Derivazione - 1

Teorema.
Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ derivabili in (a,b) e c_1, c_2 in $\mathbb{R}$ due costanti reali, allora:

$$\frac{d}{dx}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 D f_1(x) + c_2 D f_2(x) \tag{180}$$

in generale

$$D\left[\sum_1^n c_i f_i(x)\right] = \sum_1^n c_i D f_i(x) \tag{181}$$

Slide 300

Regole di Derivazione - 2

Teorema.
Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ derivabili in (a,b) allora:

$$D[f_1(x) \cdot f_2(x)] = D f_1(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot D f_2(x) \tag{182}$$

e in generale

$$D \prod_1^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \left[D f_i(x) \prod_{j=1,n;\ j \neq i} f_j(x) \right] \tag{183}$$

Slide 301

Regole di Derivazione - 3

Teorema.
Siano $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in (a, b) allora il loro rapporto é derivabile in tutti i punti nei quali $g(x) \neq 0$ e vale:

$$D[\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)} \tag{184}$$

da cui il caso particolare

$$D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{Dg(x)}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \tag{185}$$

Nota

$$\begin{aligned} D[f(x)/g(x)] &= D[f(x) \times 1/g(x)] = 1/g \times f + g' \times f' \\ &= 1/g \times f' + (-g'/g^2) \times f = (g\ f' - f\ g')/g^2 \end{aligned}$$

Slide 302

Regole di Derivazione - 4 - Derivate delle funzioni inverse

Teorema.
La funzione inversa di una funzione continua é anch'essa continua.

Teorema.
Una funzione crescente (decrescente) in un intervallo $[a, b]$ é invertibile in tale intervallo.

Teorema.
Sia $f(x)$ crescente (decrescente) in $[a, b]$ ed ivi derivabile.
Se $f'(x) \neq 0$ allora anche la funzione inversa di $f(x)$ detta $\varphi(x)$ o $f^{-1}(x)$, é derivabile e si ha:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(x)} \tag{186}$$

Slide 303

Regole di Derivazione: Derivate delle funzioni composte

Richiamiamo i criteri con i quali é possibile definire una funzione composta.
Siano date due funzioni:
$y = y(x),\ y : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $z = z(y),\ z : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$,
allora possiamo considerare la funzione composta

$$(z \circ y)(x) \quad \text{ovvero} \quad z[y(x)] : \mathbf{A} \to \mathbf{C}.$$

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema. Una funzione composta per mezzo di due funzioni continue é anch'essa continua.

Slide 304

Regole di Derivazione: Derivate delle funzioni composte

Teorema.
Una funzione $u = F[\varphi(x)]$ composta per mezzo di due funzioni derivabili é anch'essa derivabile, e la sua derivata é eguale al prodotto delle derivate delle funzioni componenti:

$$D\,F[\varphi(x)] = \ F'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \qquad (187)$$

Slide 305

Regole di Derivazione: Derivate delle funzioni composte

Teorema.
Una funzione $u = F[\varphi(x)]$ composta per mezzo di due funzioni derivabili é anch'essa derivabile, e la sua derivata é eguale al prodotto delle derivate delle funzioni componenti:

$$D\,F[\varphi(x)] = \ F'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \qquad (188)$$

Slide 306

Derivate delle funzioni composte - Esempi

1. $D\,[\varphi(x)]^{\alpha} = \alpha[\varphi(x)]^{\alpha-1} \cdot \varphi'(x)$
   Quindi, se $f(x) = [3x^2 + 5x + 2]^3$, ponendo
   $f(y) = y^3,\ y = [3x^2 + 5x + 2]$
   ne segue $f'(x) = 3[3x^2 + 5x + 2]^2 \cdot (6x + 5)$
2. $D\ \log[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$
   Quindi se $f(x) = \log(x^2 + 1)$ ponendo $f = f(y) = \log(y)$ e
   $y = y(x) = x^2 + 1$ e $f = f[y(x)]$
   ne segue $Df = f' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
3. Se $f(x) = e^{\varphi(x)}$ allora $f = f(y) = e^y$ e $y = y(x) = \varphi(x)$, da cui
   $Df = f' \cdot \varphi' = e^y \cdot \varphi'$.
   Quindi se $f(x) = e^{(5x^2+1)}$ allora $Df = e^{(5x^2+1)} \cdot (10x)$.
4. Se $f(x) = \sin(\varphi(x))$ allora $Df(x) = \varphi'(x) \cdot \cos(\varphi(x))$;
5. Se $f(x) = \cos(\varphi(x))$ allora $Df(x) = \varphi'(x) \cdot (-\sin(\varphi(x)))$;

Slide 307

6. Difficile! Data la funzione: $u = [\ f(x)\ ]^{\,g(x)}$, calcolare Df.
   Dalla definizione di logaritmo se $\alpha \ln a \;\Rightarrow\; e^{\alpha} = a \;\Rightarrow\; e^{\ln a} = a$.

$$\begin{aligned} u(x) = [\ f(x)\ ]^{\,g(x)} &= e^{\,\log(f(x))^{g(x)}} = \\ &= e^{g(x)\cdot \log(f(x))} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} D[f(x)]^{g(x)} &= D\ [\ e^{g(x)\cdot\log(f(x))}\ ] = \\ &= e^{\,g(x)\log(f(x))} \cdot D[\ g(x)\cdot\log(f(x))\ ] = \\ &= [\ f(x)^{g(x)}\ ]\cdot\left[\ g'(x)\log f(x)\ +\ g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\ \right] \end{aligned} \tag{189}$$

<u>Esempio</u>. Se $f(x) = x^x$ allora

. $f'(x) = x^x \cdot [\ 1\cdot\log x\ +\ x/x\ ] = x^x[\log x + 1]$.

Slide 308

Uso delle derivate - 1

Approssimazioni per piccole variazioni

Concetto di differenziale

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (a, b). Consideriamo la quantitá

$$\omega = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) \tag{190}$$

Sappiamo, per l'ipotesi di derivabilitá della $f(x)$, che:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \omega = 0 \tag{191}$$

Riscriviamo ora la (190) nella forma:

$$\Delta f = f'(x)\Delta x\ +\ \omega\Delta x \tag{192}$$

Slide 309

Chiameremo **differenziale** della funzione $y = f(x)$, e lo indicheremo con dy o df la quantitá:

$$dy \;=\; df \;= f'(x)\Delta x \tag{193}$$

da cui

$$\Delta f = \; df \;+ \omega\Delta x \tag{194}$$

É facile convincersi che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mid \frac{1}{\omega}\frac{\Delta f}{\Delta x} \mid = \lim_{\Delta x \to 0} \mid \frac{df}{\omega} \mid = +\infty \tag{195}$$

Quindi la quantitá $\omega\Delta x$ é un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δf e df.

Slide 310

Ne consegue il seguente

Asserto:*L'incremento Δf ed il differenziale df differiscono per un infinitesimo di ordine superiore, i.e. $\Delta f = df + O(sup)$.*

Questo giustifica il fatto che si usi spesso la eguaglianza approssimata $\Delta f \approx df$. Essendo poi
$\Delta f = f(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ si ha:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x \;+ O(sup) \tag{196}$$

Trascurando l'infinitesimo di ordine superiore si ottiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x \tag{197}$$

La formula trovata permette di calcolare la funzione continua nel punto $x + \Delta x$ conoscendo semplicemente il valore della funzione e della derivata prima nel generico punto x.

Slide 311

Interpretazione geometrica del differenziale

L'equazione della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel generico punto $\bar{x}$ é:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$
$$\Rightarrow Y = f(x) + f'(x)(X - x)$$

Se lungo la retta tangente si vuole calcolare la y nel punto $x + dx$ si ha:

$$y(x + dx) = f(x) + f'(x)((X + dx) - x) \tag{198}$$
$$= f(x) + f'(x)dx = f(x) + df \tag{199}$$

$\Rightarrow$ *df* rappresenta l'incremento dell'ordinata sulla retta tangente alla curva quando si passa da x a $x + dx$.

Slide 312

Teorema del valor medio o di Lagrange

Teorema. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo (a, b) e derivabile nel suo aperto $]a, b[$. Allora

$$\exists \xi \in]a, b[: \quad f(b) - f(a) = (b - a)f(\xi) \tag{200}$$

Interpretazione geometrica. Osserviamo per prima cosa che la corda che unisce i punti $A(a, f(a)$ e $B(b, f(b)$ forma con l'asse delle x un angolo la cui tangente é:

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{201}$$

Il teorema di Lagrange dice che **esiste** una tangente alla curva $G_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)$ parallela alla corda che passa per gli estremi A e B. Il punto di tangenza é il punto $P(\xi, f(\xi))$.

Dimostrazione omessa

Slide 313

Teorema di Rolle

Teorema.
Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, e sia $f(a)=f(b)$ allora

$$\exists\ \xi \in]a,b[\ :\ f'(\xi)=0 \tag{202}$$

cióe esiste un punti ξ interno all'intervallo $[a,b]$ tale che la sua derivata sia nulla.
Il teorema di Rolle é una conseguenza del teorema di Lagrange.
Infatti se $f(a)=f(b)$ allora $\tan\alpha = 0$.

Slide 314

Teorema di Cauchy

Teorema.
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$.
Se $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullano contemporaneamente e $g(a)\neq g(b)$ allora

$$\exists\ \xi \in]a,b[\ :\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{203}$$

Funzioni a derivata nulla

Sappiamo che una una funzione costante ha derivata identicamente nulla. É vero il contrario ?
Lo possiamo provare grazie al teorema di Lagrange.
Teorema. Se la derivata prima di una funzione $f(x)$ é identicamente nulla nell'intervallo (a, b), allora la funzione $f(x)$ é costante in tale intervallo, cioé:

$$if \;\; f'(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) = const \;\; \forall x \in (a, b) \tag{204}$$

Dimostrazione. Infatti $\forall x', x'' \in (a, b)$ per il teorema di Lagrange si ha $f(x') - f(x'') = 0$ quindi $f(x') = f(x'') = costante$

Funzioni Primitive

Definizione. Diremo che la funzione $F(x)$ é una primitiva della funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, b) se $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in (a, b)$ cioé se la sua derivata é eguale a $f(x)$ in (a, b).
Teorema (banale). Se $F(x)$ é una primitiva di $f(x)$ in (a, b) allora *tutte e sole le funzioni primitive di $f(x)$ sono della forma:*

$$F(x) + c \tag{205}$$

dove c é una costante arbitraria.
Dimostrazione. Infatti detta $F_1(x)$ un'altra primitiva di $f(x)$ considero la funzione $g(x) = F(x) - F_1(x)$. Tale funzione ha derivata nulla in (a, b), infatti $g'(x) = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Per il teorema precedente allora si ha

$$F_1(x) = F(x) + c \qquad\qquad c.v.d. \tag{206}$$

Limiti di forme indeterminate

Enunciamo, ma non dimostriamo, alcuni teoremi che servono al calcolo dei limiti.

Teorema - Primo teorema dell'Hospital

Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite, continue e derivabili in un intervallo (a, b). Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di tale intervallo tale che $f(x_0) = g(x_0)$, sia $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \neq x_0$ ed inoltre esiste il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{allora anche il} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{207}$$

é ben determinato e vale la relazione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{208}$$

Estensione del 1^0 teorema dell'Hospital

Teorema. I risultati del primo teorema dell'Hospital sussistono anche nelle seguenti ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ definite, continue per $x \neq x_0$e infinitesime per $x \to x_0$, con x_0 punto al finito o all'infinito. Cioé:

$$\text{se } \exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{209}$$

Slide 319

Secondo Teroema dell'Hospital

Teorema. Siano $f(X)$ e $g(x)$ definite e derivabili $\forall x \in [a,b], x \neq x_0$, entrambi infinitamente grandi per $x \to x_0$. Se é $g'(x) \neq 0$ e se esiste il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora, esiste anche il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{210}$$

Slide 320

Forme indeterminate

Il primo e secondo teorema dell'Hospital, si compnediano in un'unico enunciato detto ***Regola dell'Hospital***:

Se al tendere di x verso un punto (finito o infinito) le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime o entrambe infinitamente grandi, la ricerca del limite di $\frac{f}{g}$ puó essere ricondotta a quella del limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ***Se quest'ultimo esiste****, esiste anche il primo ed i due limiti sono eguali.*

Questa regola risolve il problema delle forme indeterminate che si presentano nella forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Si noti che se il limite $x \to x_0$ del rapporto $\frac{f'}{g'}$ é ancora una forma indeterminata, nulla vieta, se per le funzioni f' e g' sono soddisfatte le ipotesi della regola dell'Hospital, di considerare il limite del rapporto $\frac{f''}{g''}$ e riapplicare la regola dell'Hospital.

Slide 321

Le forme indeterminate: $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$

Per lo studio di tali forme ci si puó sempre ricondurre alla regola dell'Hospital.

1. Forma $0 \cdot \infty$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \tag{211}$$

Consideriamo la funzione $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ per la quale ovviamente si ha $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$, allora essendo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \tag{212}$$

lo studio del limite é ricondotto all'interno della Regola dell'Hospital.

Slide 322

Forme indeterminate - segue

2. Forma $\infty - \infty$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \tag{213}$$

e per le quali si vuole studiare il $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$. Riscriviamo la differenza nella forma:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \tag{214}$$

ed il limite viene ricondotto alla regola dell'Hospital.

Slide 323

Forme indeterminate che originano da $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$

Essendo, come abbiamo visto, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, riscriviamo tali limiti nella forma

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} \tag{215}$$

Si possono presentare diversi casi.

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}.$
In questo caso, per la continuitá della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^l \tag{216}$$

Se poi $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 allora $l = f(x_0)^{g(x_0)}$.

Slide 324

Segue: Forme indeterminate tipo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = 0\cdot\infty$
In questa situazione non é possibile applicare il procedimento descritto in precedenza.
Questa situazione puó presentarsi nei seguenti tre casi:

b1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to 0^0$

b2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to \infty^0$

b3) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty, \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1 \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to 1^0$

Si risolvono riscrivendo la funzione $g(x)\ln f(x)$ in una forma piú idonea per l'applicazione della regola dell'Hospital.

Slide 325

Segue: Forme indeterminate tipo $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$

Riscriviamo $g(x) \ln f(x)$ nei tre casi:

$$\textbf{b1)} \quad g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \textit{oppure} \quad g(x) \ln f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \tag{217}$$

$$\textbf{b2)} \quad g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \textit{oppure} \quad g(x) \ln f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \tag{218}$$

$$\textbf{b3)} \quad g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \tag{219}$$

Slide 326

Segue: Forme indeterminate tipo $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$

Osservazione. Osserviamo che, a differenza delle forme esaminate nei casi precedenti (b1), (b2) e (b3), possono pure presentarsi nei limiti del tipo in esame espressioni del tipo:

$$0^{+\infty} \qquad\qquad \infty^{\infty} \tag{220}$$

Queste non sono da considerarsi forme indeterminate, dovendosi ovviamente porre:

$$0^{+\infty} = \infty^{-\infty} = 0 \qquad\qquad 0^{-\infty} = \infty^{+\infty} = \infty \tag{221}$$

Regola dell'Hospital - Esempi

Esempio 1

Si voglia calcolare il $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x$ con $\alpha > 0$. Il limite si presenta nella forma $0 \cdot (-\infty)$.

Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x^\alpha}{\alpha}\\ &= 0\end{aligned}$$

Regola dell'Hospital - Esempi

Esempio 2 - Si voglia calcolare il $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}$ con $\alpha > 0$. Il limite si presenta nella forma $0 \cdot \infty$.

Detto n il piú piccolo numero intero maggiore o eguale ad α, cioé $n \geq \alpha$, applicando n-volte la regola dell'Hospital, si ha:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}}{e^x}$$

che segue immediatamente dalla osservazione che $\alpha - n \leq 0$.

Nota. Il risultato cui siamo pervenuti, e che vale $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ comunque grande, puó anche scriversi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

Possiamo quindi dire che per $x \to \infty$ e^{-x} é un **infinitesimo di ordine infinitamente grande** rispetto ad $\frac{1}{x}$.

Asintoti dei diagrammi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo non limitato, ad esempio (a, ∞).

Definizione. Diremo che la retta r, di equazione $y = mx + n$ é un asintoto per il diagramma della funzione $f(x)$ se la distanza d tra la retta ed il punto del diagramma di ascissa x tende a 0 per $x \to \infty$.

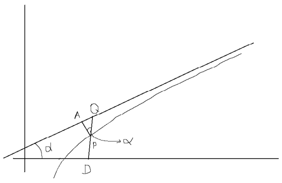


Figura 28: Asintoti obliqui

Per calcolare d consideriamo il triangolo PAQ, rettangolo in A. La distanza d é rappresentata dal segmento AP ortogonale alla retta r. Indichiamo con α l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x e che corrisponde all'angolo in P del triangolo PAQ. Dalle formule trigonometriche sui triangoli rettangoli si ha

$$\overline{AP} = \overline{PQ} \cos\alpha \tag{222}$$

$$d = |f(x) - y| \cos\alpha = |f(x) - mx - n| \cos\alpha \tag{223}$$

Teorema - Condizione necessaria e sufficiente affinché la retta r di equazione $y = mx + n$ sia un asintoto per il grafico della funzione $f(x)$ é che sia:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx - n] = 0 \tag{224}$$

Slide 331

Asintoti per $x \to \infty$

Se la (224) é vera allora vale anche:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right] = 0 \qquad (225)$$

da questa e dalla (224) segue che il coefficiente angolare ed il termine noto dell'asintoto sono dati da:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad (226)$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = 0 \qquad (227)$$

Slide 332

Asintoti - Casi particolari

1) - Asintoti obliqui - $m \neq 0$ - Se $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ allora $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$. Applicando la regola dell'Hospital si ha:

$$m = \lim_{x\to\infty} f'(x) \qquad (228)$$

2) - Asintoti orizzontali - $m = 0$ - Se $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$ allora la retta r é parallela all'asse x ed ha equazione $y = n$, dove

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) \qquad (229)$$

3) - Asintoti verticali - La retta $y = mx + n$ non puó mai essere verticale. Infatti *non possono esistere asintoti verticali per* $x \to \infty$. Al finito, cioé per $x \to x_0$, si dirá che il diagramma di $f(x)$ ha un asintoto verticale in x_0 se il punto x_0 é un punto di infinito per la funzione $f(x)$, cioé se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \qquad (230)$$

Slide 333

Slide 334

Funzioni Crescenti, Decrescenti e derivata prima

Lo studio della derivata prima permette di dare informazioni sull'andamento, crescente o decrescente, della funzione in un punto e in un intervallo. Ricordiamo, per prima cosa, la definizione di funzione crescente (decrescente).

Definizione - diremo che $f(x)$ é crescente in x_0 se:

$$\exists I_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_+\delta] : \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) < f(x_0)$$
$$\text{e } \forall x \in]x_0, x_+\delta] \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

La definizione di funzione decrescente in x_0 si ottiene invertendo nella precedente il verso delle disequazioni.

Funzioni Crescenti, Decrescenti e derivata prima

Teorema - Se la funzione $f(x)$ definita, continua e derivabile in x_0 ha derivata prima positiva (negativa) in x_0, $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), allora essa é crescente (decrescente) in x_0.

Dimostrazione

Invero essendo, per fissare le idee, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ allora per il teorema di permanenza del segno é possibile trovare un δ tale che, $\forall |\Delta x| < \delta$, si abbia $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$, cioé

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0) + \Delta x$$

che prova l'asserto quando si prende $\Delta x > 0$ e $\Delta x < 0$.

Nota L'estensione al caso delle funzioni decrescenti é ovvia e pertanto lasciata al lettore.

Funzioni Crescenti, Decrescenti e derivata prima

Vale il teorema inverso.

Teorema

Se $f(x)$ é crescente [decrescente] in x_0 allora $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$

Il caso $f'(x) = 0$ va visto separatamente. In questo caso la retta tangente é parallela all'asse x ma l'informazione sulla derivata prima nel punto x_0 non é sufficiente per stabilire l'andamento della funzione. Si deve ricorrere allo studio della funzione derivata prima in un intorno opportuno $I_\delta(x_0)$del punto x_0.

Slide 337

Se $f'(x_0) = 0$, per $\forall x \in I_\delta(x_0)$ possono verificarsi quattro casi distinti:

1. Se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora $f(x)$ ha un massimo relativo in x_0
2. Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ allora $f(x)$ ha un minimo relativo in x_0
3. Se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ allora $f(x)$ é non decrescente in x_0;
4. Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora $f(x)$ é non crescente in x_0;

Slide 338

Funzioni Crescenti, Decrescenti e derivata prima

da cui il seguente

Teorema

Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione $f(x)$ continua e derivabile in (a,b) sia in tale intervallo sempre crescente [decrescente] é che:

A) $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b)$ $[f'(x) \leq 0]$

B) $\nexists (\alpha, \beta) \subseteq (a, b)\ :\ f'(x) \equiv 0\ \forall x \in (\alpha, \beta)$

o equivalentemente

Teorema

Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione $f(x)$ continua e derivabile in (a,b) sia in tale intervallo sempre crescente [decrescente] é che sia $f(x)$ crescente [decrescente] per ogni $x \in (a, b)$.

Massimi e minimi relativi di una funzione

Definizione - Diremo che un punto x_0 interno all'intervallo (a,b), $x_0 \in]a,b[$, é un punto di massimo [minimo] relativo per $f(x)$, definita in (a,b) se si puó trovare un suo intorno nel quale sia, per ogni x dell'intorno, $f(x) \leq f(x_0)$ $[f(x) \geq f(x_0)]$, cioé:

$$\exists I_\delta \ : \ \forall x \in I_\delta \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0) \qquad [f(x) \geq f(x_0)] \tag{231}$$

Diremo poi che x_0 é un punto di massimo [minimo] relativo proprio se:

$$\exists I_\delta \ : \ \forall x \in I_\delta \ \Rightarrow \ f(x) < f(x_0) \qquad [f(x) > f(x_0)] \tag{232}$$

Da quanto visto sino ad ora risultano evidenti i seguenti teoremi:

Massimi e minimi relativi di una funzione

Teorema *Condizione Necessaria affinché $f(x)$, derivabile in x_0, abbia in tale punto una massimo o minimo relativo é che risulti* $f'(x) = 0$. La condizione necessaria significa che:

Se x_0 é un punto di massimo allora deve essere $f'(x_0) = 0$

Teorema - *Condizione sufficiente affinché in x_0 la funzione $f(x)$ abbia un massimo [minimo] relativo é che:*

A) $\exists I_\delta(x_0) \ : \ f'(x) > 0 \ \forall x < x_0$ **e** $f'(x) < 0 \ \forall x > x_0$ (*massimo*)

B) $\exists I_\delta(x_0) \ : \ f'(x) < 0 \ \forall x < x_0$ **e** $f'(x) > 0 \ \forall x > x_0$ (*minimo*)

Se invece

C) $\exists I_\delta(x_0) : \ f'(x) > 0 \ \forall x \in I_\delta(x_0), x \neq x_0 \ \Rightarrow \ f(x)$ é crescente in x_0;

D) $\exists I_\delta(x_0) : \ f'(x) < 0 \ \forall x \in I_\delta(x_0), x \neq x_0 \ \Rightarrow \ f(x)$ é decrescente in x_0.

Slide 341

Condizione sulla derivata seconda

Studiamo adesso per i casi (A) e (B) l'andamento della funzione $\varphi(x) = f'(x)$. Si ha:

A) $\exists I_\delta(x_0)\ :\ \varphi(x) > 0\, \forall x < x_0$ **e** $\varphi(x) < 0\, \forall x > x_0$

$$\Rightarrow\ \varphi(x) \text{ é crescente in } x_0\ \ \varphi'(x) = f''(x) > 0$$

Quando $f''(x_0) > 0$ *é positiva, la funzione ha un massimo in* x_0

B) $\exists I_\delta(x_0)\ :\ \varphi(x) < 0\, \forall x < x_0$ **e** $\varphi(x) > 0\, \forall x > x_0$

$$\Rightarrow\ \varphi(x) \text{ é decrescente in } x_0\ \ \varphi'(x) = f''(x) < 0$$

Quando $f''(x_0) > 0$ *é positiva, la funzione ha un minimo in* x_0

Da quanto visto segue il

Slide 342

Condizione sulla derivata seconda

Teorema - Se $f'(x_0) = 0$ e $f(x)$ é dotata di derivata seconda in x_0, allora Condizione sufficiente affinché in x_0 abbia un massimo [minimo] relativo é che risulti

$$f''(x_0) < 0 \qquad [f''(x_0) > 0] \tag{233}$$

Teorema - Se $f'(x_0) = 0$ e $f(x)$ é dotata di derivata seconda in x_0, Condizione Necessaria affinché x_0 sia di massimo [minimo] relativo é che risulti:

$$f''(x_0) < 0 \qquad [f''(x_0) > 0] \tag{234}$$

Nota - Rimarrebbe da esaminare il caso in cui $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Il risultato del teorema generale, che omettiamo, possono ottenersi con lo studio della funzione derivata prima.

Ricerca dei massimi e minimi assoluti

Sia $f(x)$ definita in $[a, b]$. Per il teorema di Wierstrass essa é dotata ivi dotata di massimo e minimo assoluti.
Quanto visto in precedenza permette di fissare la ricerca del massimo e minimo assoluti come segue:

1. Si cercano i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x)$ nell'aperto $]a, b[$; indichiamo tali punti rispettivamente con $\{x_{M_1}, x_{M_2}, \ldots, x_{M_n}\}$ e $\{x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}\}$;
2. Si calcolano i valori della funzione neigli estremi: $f(a)$ e $f(b)$;
3. Si trova il punto di massimo assoluto cercando il valore di x per cui risulta $\max\{f(a), f(b), f(x_{M_1}), f(x_{M_2}), \ldots, f(x_{M_n})\}$;
4. Si trova il punto di minimo assoluto cercando il valore di x per cui risulta $\min\{f(a), f(b), f(x_{m_1}), f(x_{m_2}), \ldots, f(x_{m_k})\}$;

Concavitá, Convessitá, Flessi

Sebbene il concetto di concavitá e convessitá possa sembrare naturale é opportuno (e per voi sorprendente) formulare tale concetto in modo esatto.
Definizione
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in (a, b) e derivabile in $x_0 \in]a, b[$. Consideriamo la retta t tangente al grafico della funzione nel punto x_0. Tale retta divide il piano in due semipiani.
Indichiamo con Π_0' quello superiore e con Π_0'' quello inferiore.
Diremo che:

A) $f(x)$ volge la concavitá [convessitá] nel verso dell'asse y se

$$\exists I_\delta(x_0)\ :\ \forall x \in I_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ P = (x, f(x)) \in \Pi'_0 \qquad \text{concavitá}$$
$$\exists I_\delta(x_0)\ :\ \forall x \in I_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ P = (x, f(x)) \in \Pi''_0 \qquad \text{convessitá}$$

B) Nel caso in cui non si verificano le condizioni precedenti diremo che x_0 é un punto di flesso. Piú precisamente diremo che x_0 é un *punto di flesso proprio* se:

$$\exists I_\delta(x_0)\ :\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[,\ P = (x, f(x)) \in \Pi'_0$$
$$\text{AND}\quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta]\ P = (x, f(x)) \in \Pi''_0$$

o viceversa

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0[,\ P = (x, f(x)) \in \Pi''_0$$
$$\text{AND}\quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta]\ P = (x, f(x)) \in \Pi'_0$$

diremo che $f(x)$ ha un **flesso** in x_0.

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema I - Se $f''(x_0) \neq 0$ allora il diagramma di $f(x)$ volge nel punto x_0 la concavitá ovvero la convessitá nel verso dell'asse y secondo che sia rispettivamente $f''(x_0) > 0$ ovvero $f''(x_0) < 0$.

Teorema - *Condizione Necessaria* affinché x_0 sia un punto di flesso del diagramma di $f(x)$ é che risulti $f''(x_0) = 0$.

Teorema - Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ allora x_0 é un punto di flesso proprio del diagramma di $f(x)$.

Formula di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b) ed ivi derivabile almeno n-volte; detto x_0 un punto qualsiasi di (a, b) sussiste la formula:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \\ + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(\xi)$$

cioé

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \ + \ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(\xi) \tag{235}$$

dove ξ é un punto compreso tra x_0 ed x.

Formula di Taylor - segue

Il termine

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(\xi) \tag{236}$$

viene indicato con il nome di *Termine complementare* della formula di Taylor.

Si noti che se $|x - x_0| < 1 \ \Rightarrow \ \frac{(x-x_0)^n}{n!} << 1$ e pertanto il termine é un infinitesimo sia per $x \to x_0$ che per $n \to \infty$.

La formula di Taylor risulta particolarmente utile in quanto permette, nell'intorno del punto x_0, di approssimare una generica funzione mediante una funzione polinomiale $P_n(x - x_0)$.
Se la formula é troncata al primo termine allora si ha una approssimazione lineare della funzione.

Slide 349

Formula di Taylor e differenziale

Possiamo riscrivere la formula di Tayolor in termini dell'incremento della funzione Δf e del differenziale df. Ricordando che

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \qquad\qquad df = f'(x_0)(x - x_0)$$

si ha

$$\Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\left[d^n f\right]_{x=x_0+\theta\Delta x} \tag{237}$$

Questa scrittura é una precisazione della formula $\Delta f = df + \omega\Delta x$ vista in precedenza.

Slide 350

Soluzioni di $f(x) = 0$

Soluzione di equazioni non lineari $f(x) = 0$

Premessa

Il problema di trovare soluzione di equazioni é uno dei problemi per i quali la soluzione in forma analitica esiste solo in un numero limitato di casi. Quelli piú noti sono le equazioni di polinomi di primo e secondo grado ed alcuni tipi di equazioni trigonometriche.

In generale la soluzione di una equazione del tipo $f(x) = 0$ puó trovarsi graficamente individuando i punti nei quali il grafico della funzione $y = f(x)$ incontra l'asse delle x di equazione $y = 0$. Il generico punto x_i nel quale $f(x_i) = 0$ viene detto **uno zero** dell'equazione $f(x) = 0$.

É facile convincersi che, in generale, detta $f(x)$ una funzione continua in (a, b), l'equazione $f(x) = 0$ puó:

- non ammettere soluzioni; in questo caso il grafico della funzione $y = f(x)$ giace nel semipiano delle y positive o delle y negative, ad esempio $f(x) = x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$ o $f(x) = -2 + \sin(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- ammettere una sola soluzione, ad esempio $f(x) = ax + b = 0,\ x \in \mathbb{R}$;
- ammettere un numero finito di soluzioni, ad esempio $f(x) = x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$;
- ammettere un numero infinito (ma numerabile) di soluzioni, ad esempio $f(x) = cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.

In tutti i casi in cui esiste un punto x_0 per cui esiste una soluzione $f(x_0) = 0$, la continuitá della funzione garantisce che esiste un intorno del punto x_0 nel quale la funzione $f(x)$ assume valori sempre opposti in segno a sinistra e a destra di x_0.

Viceversa, se esiste un intervallo $(\alpha, \beta) \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ allora per il teorema degli zeri esiste almeno un punto $\xi \in (\alpha, \beta)$ tale che sia $f(\xi) = 0$.

Risulta evidente la generalizzazione espressa dal seguente:

Asserto - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in (a, b). Se esiste un intervallo $(\alpha, \beta) \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ allora, per il teorema degli zeri, esistono un numero dispari di punti $x_i \in (\alpha, \beta),\ i \in \mathbb{N}$ tali che sia $f(x_i) = 0$.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esistano un numero pari di zeri, ad es. due $x_1 < x_2$, e che sia $f(\alpha) < 0,\ f(\beta) > 0$. Allora si ha: $\forall x \in [\alpha, x_1[\ \ f(x) < 0;\quad \forall x \in]x_1, x_2[, f(x) > 0;\quad \forall x \in]x_2, \beta], f(x) < 0$. Il che non é possibile in quanto per ipotesi $f(\beta) > 0$.

La soluzione analitica di una equazione fornisce un metodo per la individuazione di tutti gli zeri della equazione. Basti pensare, ad esempio, al noto metodo per trovare le soluzioni di una equazione polinomiale di secondo grado, la ben nota $ax^2 + bx + c = 0$. Riflettendo con attenzione é facile rendersi conto che quanto visto nelle scuole superiori non é semplicemente una formula risolutiva ma un metodo. Infatti occorre: *a)* per prima cosa verifcare che sia $a \neq 0$ perché altrimenti il problema si riduce alle soluzioni di una equazione di primo grado; *b)* poi a seconda che rispettivamente sia $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0, \ = 0 \ \geq 0$, l'equazione non ammette soluzioni, ammette due soluzioni coincidenti o due soluzioni distinte. In quest'ultimo caso *il metodo analitico fornisce una relazione per individuare gli zeri della soluzione.*

A differenza di quella analitica la metodologia numerica per la ricerca degli zeri di una equazione *non permette di conoscere a priori il numero di zeri dell'equazione, né fornisce una relazione generale per il calcolo di tutti gli zeri.*

Tuttavia, individuata una regione del dominio della funzione $f(x)$ nella quale é ragionevole ritenere che esista un solo zero dell'equazione, ad esempio mediante il grafico della funzione o metodi equivalenti, la metodologia numerica permette di costruire una successione di valori $\{x_i\}$ che, per alcuni metodi, é possibile dimostrare essere convergente al valore dello zero. La ricerca degli zeri dell'equazione deve pertanto essere fatta singolarmente per ciascuno degli zeri

Ci proponiamo adesso di mostrare alcuni metodi numerici per la soluzione di questo problema iniziando dalla individuazione delle regioni nelle quali é ragionevole ritenere che esista uno zero della equazione.

Individuazione delle regioni contenenti uno zero

Per questa fase iniziale é opportuno utilizzare tutti gli strumenti analitici a nostra disposizione per studiare l'andamento della funzione $f(x)$ in modo da ottenere il maggior numero di informazioni possibili.

Se la funzione $f(x)$ é definita in un dominio non limitato, cioé $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ o $(-\infty, +\infty)$, la prima cosa da fare é studiare il comportamento della funzione all'infinito. Se per $x \to \infty$ accade rispettivamente che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) < 0 \tag{238}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to -\infty} f(x) < 0 \tag{239}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0 \tag{240}$$

allora i teoremi sui limiti ci garantiscono che la funzione avrá sempre almeno uno zero nel suo dominio.

Le metodologie possibile per la ricerca delle regioni che contengono uno (ed un solo) zero dell'equazione $f(x) = 0$ sono tipicamente costruiti *ad hoc* sul problema in esame. Nel seguito, come esempio, considereremo due approcci abbastanza comuni: *i)* metodi tabellari; *ii)* metodi grafici.

I metodi tabellari

I **metodi tabellari** consistono nel produrre una tabella dei valori della funzione in un numero finiti di punti, tipicamente equidistanti, del dominio verificando se la funzione assume agli estremi degl intervalli valori discordi. Questi metodi possono ovviamente essere applicati solo se il dominio della funzione é limitato. Nel caso di un dominio non limitato allora occorre far uso delle informazioni sull'andamento della funzione all'infinito e costruire la tabella in sottodomini limitati scelti opportunamente. Se, ad esempio, sappiamo che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; +\infty \;\text{ oppure }\; \lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; l \;>\; 0$$

allora é certo che esiste una punto $\bar{x}$ tale che $\forall x > \bar{x}$ la funzione assumerá sempre valori positivi. Sará allora possible, per il nostro scopo, restringere il dominio illimitato ad un dominio limitato del quale $\bar{x}$ é l'estremo superiore.

Il metoto tabellare puó essere indicativo dell'esistenza di uno zero ma non permette di escludere la esistenza di zeri in un intervallo x_h, x_{h+1}.

Infatti non é possibile escludere che la funzione in tale intervallo abbia un numero pari di zeri e quindi sia $f(x_h)f(x_{h+1}) > 0$.

Se la funzione é *smooth*, cioé non rapidamente oscillante, il metodo dovrebbe fornire indicazioni attendibili sulle regioni interessate alla esistenza di uno zero. Se invece la funzione é rapidamente oscillante l'indicazione puó essere erronea.

I metodi grafici

I metodi grafici cercano di avere informazioni studiando il grafico della funzione $f(x)$.

1) Il metodo grafico piú semplice é quello che costruisce il grafico della funzione. Anche in questo caso se la funzione é definita in un dominio non limitato occorre utilizzare le informazioni sul suo comportamento asintotico.

2) Se la funzione é esprimibile come somma algebrica di due funzioni, i.e. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, allora l'equazione $f(x) = 0$ puó scriversi come
$f_1(x) = f_2(x)$.

Questa scrittura permette di individuare i punti x_i soluzione del problema $f(x) = 0$ semplicemente osservando per i quali i grafici delle funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si incontrano.

Per far questo basterá graficare, sullo stesso diagramma cartesiano le due funzioni $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ ed individuare le regioni, cioé gli intervalli $[x_i, x_i + 1]$ che racchiudono i punti in cui le due curve si incontrano.

Una volta individuati questi intervalli sará possibile, come vedremo piú avanti, iniziare una ricerca *mirata* della soluzione in ciascuno di essi.

Si osservi infine che una generica curva di equazione $y = h(x)$ rappresenta il luogo dei punti $P(x, h(x))$. I punti della curva sono le soluzioni dell'equazione $g(x) = y - h(x) = 0$. La curva, quindi, divide il piano cartesiano in due regioni caratterizzate dalla proprietá che in ciascuna di esse la funzione $g(x)$ é rispettivamente positiva o negativa. Questa proprietá puó tornare utile nella ricerca della regione che contiene uno zero.

Metodi per la ricerca degli zeri

I metodi per la soluzione di equazioni non lineari si distinguono in **metodi chiusi** e **metodi aperti**.

Un metodo numerico per la ricerca degli zeri **é un procedimento (o algoritmo)** per costruire una successione numerica $\{x_i\}$ che converge al valore dello zero.

Sebbene dal punto di vista teorico sia importante provare che la successione delle $\{x_i\}$ converga, non é praticamente possibile, né pensabile, calcolare tutti i termini della successione numerica.

Ogni procedimento iterativo necessita che sia definito un criterio per decidere quanti termini della successione numerica é neessario calcolare (***criterio di arresto***). Questo, come vedremo in seguito, dipende dal tipo di procedimento iterativo. In generale si potrebbe richiedere che il valore della funzione nel termine x_i-mo, trovato dalla iterazione *i-ma*, disti da zero meno di un valore di tolleranza ϵ prefissato, ad es. $f(x_i) < \epsilon$, ad es. $\epsilon = 10^{-6}$. Tuttavia é facile rendersi conto che questo criterio potrebbe essere fallace e dipende dalla rapiditá con cui la funzione in esame si avvicina a zero. Il lettore potrá facilmente verificare che lo stesso valore di ϵ dará risposte diverse per le funzioni $f(x) = (x - x_0)$, $f(x) = (x - x_0)^2$, $f(x) = (x - x_0)^4$ tutte nulle nel punto x_0.

Ordine di un metodo - Supponiamo che la funzione $f(x) \in C[a, b]$, cioé continua in $[a, b]$, abbia uno zero semplice $\xi \in [a, b]$ in tale intervallo. Come abbiamo detto un metodo numerico costruisce una successione di punti $\{x_n\}$ che converge ad ξ.
L'**errore** al generico passo n é la distanza dal *valore vero* ξ:

$$e_n = \mid x_n - \xi \mid \qquad (241)$$

Definizione - Si dice che la successione $\{x_n\}$ generata dal metodo numerico converge a ξ con **ordine** $p \geq 1$ se

$$\exists k_0 \in mathbbN, c \in \mathbb{R}, c > 0 \ : \ \mid x_{k+1} - \xi \mid \ \leq \ c \mid x_k - \xi \mid^p \quad \forall k \geq k_0 \quad (242)$$

In questo caso il metodo si dirá di **ordine** *p*.

Osservazione - Se $p = 1$ (metodo lineare) per avere la convergenza deve necessariamente essere $c < 1$. In questo caso é detto **fattore di convergenza**.

Nota - In generale la convergenza dipende dalla scelta del *guess* iniziale x_0. I risultati di convergenza valgono solo localmente, cioé per un opportuno intorno del punto ξ, cioé $x_0 \in I_\delta(\xi)$.
I metodi per i quali la convergenza non dipende dal *guess* iniziale si dicono *globalmente convergenti.*

L'ordine del metodo é legato alla rapiditá con cui si raggiunge la soluzione con la precisione voluta. Nella pratica si utilizza il concetto di velocitá di convergenza.

Definizione - Chiameremo **velocitá di convergenza** di un metodo il numero di iterazioni necessarie al raggiungimento della soluzione, cioé al punto di zero con la precisione richiesta.

Metodi chiusi

I **metodi chiusi**, detti anche *braketing methods*, sono quelli che si basano sul teorema di esistenza degli zeri. Tali metodi richiedono la conoscenza di due punti x_1, x_2 tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$; la convergenza alla soluzione di questi metodi é garantita. Se nell'intervallo in esame esistono piú di uno zero il metodo ne trova solamente uno. Tuttavia, trovato il primo zero é possibile riformulare il problema in uno o piú intervalli, che non contengo lo zero trovato e ripetere il procedimento di ricerca degli zeri.

Metodi aperti

I **metodi aperti** non fanno riferimento al teorema di esistenza degli zeri. Questi metodi non richiedono la individuazione di un intervallo $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. I metodi aperti non hanno una convergenza garantita. Essi possono convergere o no; se convergono hanno tuttavia una maggiore velocitá di convergenza.

METODI CHIUSI con radici semplici

Pre-processing Sia $f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ e ivi continua. Supponiamo di aver individuato con uno dei metodi sopra esposti una regione nella quale sia $f(a) \cdot f(b) < 0$. Siamo allora nelle condizioni di applicabilitá del teorema degli zeri e possiamo pertando utilizzare un metodo chiuso.

$$\boxed{\textbf{Metodo di Bisezione.}}$$

Supponiamo che sia $f(x) \in C(a, b)$, cioé definita e continua in (a, b) e sia $f(a)f(b) < 0$.
Per il teorema degli zeri sappiamo che $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$.
Fissata la **tolleranza** ϵ il metodo di bisezione é descritto dall'algoritmo che segue.

1. Fisso $x_\alpha = a$ e $x_\beta = b$; Inizializzo il contatore delle iterazioni $i = 0$
2. il candidato ad essere un punto di zero é il punto medio $x_i = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}$;
3. Se $|x_\alpha - x_\beta| < \epsilon$ allora x_i é il punto cercato. L'iterazione si arresta. Altrimenti (cioé se Se $|x_\alpha - x_\beta| \geq \epsilon$) procedo al passo successivo. *(Ovviamente questa condizione non si verifica mai alla prima iterazione).*
4. calcolo la funzione nei 3 punti $f(x_\alpha), f(x_\beta), f(x_i)$;
   calcolo $f(x_\alpha) \cdot f(x_i)$ e $f(x_\beta) \cdot f(x_i)$;
5. Identifico il nuovo intervallo in cui si trova, per il teorema di esistenza degli zeri, il candidato punto di zero:
   - Se $f(x_\alpha) \cdot f(x_i) < 0$
     $\Rightarrow$ l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (x_α, x_i)
     $\Rightarrow$ definisco un nuovo intervallo di ricerca (x_α, x_β),
     con la posizione $x_\alpha = x_\alpha$ e $x_\beta = x_i$,
     e continuo il ciclo dal punto (6) ;
   - Se invece $f(x_\beta) \cdot f(x_i) < 0$
     $\Rightarrow$ l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (x_i, x_β)
     $\Rightarrow$ definisco un nuovo intervallo di ricerca (x_α, x_β),
     con la posizione $x_\alpha = x_i$ e $x_\beta = x_\beta$,
     e continuo il ciclo dal punto (6);
6. Aumento di una unitá il contatore delle iterazioni, $i = i + 1$ e continuo il processo iterativo dal punto (2)

Quando il processo iterativo si arresta il punto ξ per cui $f(\xi) = 0$ si trova all'interno dell'intervallo (x_α, x_β) ed é approssimato dal punto $x_i \pm err$, con $err = (x_\alpha + x_\beta)/2$.

É interessante analizzare come decresce l'ampiezza Δ_i dell'intervallo entro cui si trova ξ al procedere delle iterazioni.

$$\begin{array}{rcl}
\text{iteraz. } 0 & \rightarrow & \Delta_0 = (b-a)/2^0 \\
\text{iteraz. } 1 & \rightarrow & \Delta_1 = \Delta_0/2 = (b-a)/2^1 \\
\text{iteraz. } 2 & \rightarrow & \Delta_2 = \Delta_1/2 = (b-a)/2^2 \\
\text{iteraz. } 3 & \rightarrow & \Delta_3 = \Delta_2/2 = (b-a)/2^3 \\
\text{iteraz. } 4 & \rightarrow & \Delta_4 = \Delta_3/2 = (b-a)/2^4 \\
\text{iteraz....} & \rightarrow & \dots\ \dots\ \dots \\
\text{iteraz. n} & \rightarrow & \Delta_n = \Delta_{n-1}/2 = (b-a)/2^n
\end{array}$$

É allora possibile calcolare l'errore alla n-ma iterazione:

$$|e_n| = |\ \xi - x_n\ | \leq h^n \cdot (b-a) \tag{243}$$

Il metodo é quindi lineare con un fattore di convergenza $c = \frac{1}{2}$.

0.0.1 Metodo della Tangente

Il metodo della tangente, detto pure **Regula Falsi** é un metodo chiuso. La costruzione della successione $\{x_j\}$ é analoga a quella vista per il metodo di Bisezione. Il termine generale della successione é dato dal punto di incontro della retta che congiunge gli estremi dell'intervallo nel quale, alla k-ma iterazione, si trova il punto di zero ξ.

Detto $[a_k, b_k]$ l'intervallo alla k-ma iterazione (con $f(a_k)f(b_k) \leq 0$) l'equazione della retta condotta dalgi estremi di tale intervallo é:

$$\frac{y - f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} = \frac{x - a_k}{b_k - a_k} \tag{244}$$

Il punto di intersezione con l'asse x (di equazione $y = 0$) é dato da:

$$x_k = a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{245}$$

Questa approssimazione sostituisce il valore di x_i al punto (2) della iterazione del metodo di Bisezione. Si puó provare che $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \xi$.

L'altra differenza con il metodo di Bisezione riguarda il *criterio di arresto* della iterazione. Infatti dalla figura 29 é facile rendersi conto che nel caso del metodo della tangente non é l'intervallo che contiene il punto ξ a decrescere progressivamente ma é il punto x_k ad avvicinarsi sempre piú al punto ξ. Infatti il punto x_k si troverá sempre a sinistra di ξ se la funzione rivolge la convessitá nel verso delle y positive o sempre a destra se la funzione rivolge la concavitá nel verso delle y positive.

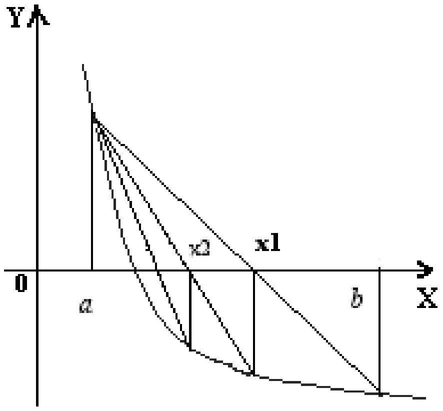


Figura 29: Approssimazioni con il Metodo della Secante o Regula Falsi

Come abbiamo detto in precedenza la strategia di arresto della iterazione basata sulla condizione $f(x_k) \leq \epsilon$ potrebbe essere fallace se la funzione ha sempre valori prossimi a zero. Per evitare questo possibile inconveniente occorre *eliminare* il peso del valore della funzione e considerare solo le variazioni relative rispetto alla iterazione. La soluzione é considerare non il valore della funzione ma il valore dei termini della successione. Dato che il metodo converge allora $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$, quindi per il criterio di convergenza di Cauchy sulle successioni si ha che:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\nu : \forall n > \nu \Rightarrow\ |x_{n+1} - x_n| < \epsilon \tag{246}$$

É facile vedere che questo equivale a richiedere che

$$\forall n > \nu \Rightarrow\ |\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1| < \epsilon \tag{247}$$

Il criterio *ragionevole* é quindi richiedere che sia $|\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1| < \epsilon$. Concettualmente questo equivale a dire che il punto x_k non progredisce piú verso il punto ξ. Con questo criterio il Metodo Regula Falsi genera la successione delle $\{x_k\}$ con il seguente algoritmo:

1. Fisso $a_0 = a$ e $b_0 = b$; fisso il primo elemento della successione, $k = 0$.
2. il valore x_k della successione é il punto medio: $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;
3. Se $k \geq 1$ **AND** $|x_k/x_{k-1} - 1| < \epsilon$ allora l'iterazione si arresta (x_k é il punto cercato).
   Altrimenti (cioé se Se $|x_k/x_{k-1} - 1| \geq \epsilon$) procedo al passo successivo.
4. calcolo la funzione nei 3 punti $f(a_k), f(b_k), f(x_k)$;
   calcolo $f(a_k) \cdot f(x_k)$ e $f(b_k) \cdot f(x_k)$;

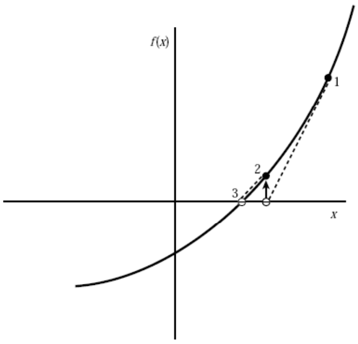


Figura 30: Approssimazioni successive con il Metodo di Newton - Raphson

5. Identifico il nuovo intervallo in cui si trova, per il teorema di esistenza degli zeri, il candidato punto di zero:
    - Se $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$
      ⇒ l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (a_k, x_k)
      ⇒ pongo $a_k = a_k$ e $b_k = x_k$ e continuo il ciclo dal punto (6) ;

    - Se invece $f(b_k) \cdot f(x_k) < 0$
      ⇒ l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (x_k, b_k)
      ⇒ pongo $a_k = x_k$ e $b_k = b_k$ e continuo il ciclo dal punto (6) ;
6. Aumento di una unitá il contatore dei termini della successione $\{x_k\}$ delle iterazioni, $k = k + 1$ e continuo il processo iterativo dal punto (2)

0.1 Metodi Aperti

I metodi aperti derivano per la maggior parte dal Teorema del Punto fisso la cui trattazione esula dagli scopi di questa presentazione. I metodi aperti non garantiscono in generale la convergenza della successione delle x_k alla soluzione ξ. Tuttavia se il *guess* iniziale é abbastanza prossimo al valore di ξ allora un metodo aperto converge mlto piú rapidamente di un metodo chiuso. Noi studieremo solamente il metodo di Newton.

Metodo di Newton - Il Metodo di Newton-Raphson puó derivarsi dalla formula di Taylor. Supponiamo di aver assegnato un *guess* iniziale x_0 molto prossimo al punto di zero ξ della funzione. Approssimando la funzione $f(x)$ nel punto ξ mediante la formula di Taylor si ha:

$$0 = f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(\xi - x_0)^2 + O[(\Delta x)^3] \quad (248)$$

Assumendo che il guess iniziale sia molto prossimo a ξ allora solo i primi termini della formula di Taylor sono importanti. Possiamo quindi trascurare i termini quadratici e superiori e considerare solamente la approssimazione lineare. Risolvendo rispetto a ξ si ha la prima approssimazione x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{249}$$

Ricordando quanto visto sul significato geometrico del differenziale si capisce che il Metodo di Newton-Raphson calcola il punto di intersezione tra la retta tangente alla curva in x_0 e l'asse delle x. Questo punto é assunto come nuovo guess ed il procedimento ripetuto, cioé

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{250}$$

Il metodo ha un ordine di convergenza quadratico ed é molto veloce. Occorre tuttavia fornire un buon guess iniziale e garantirsi che la funzione non abbia derivata nulla nella regione di ricerca. La figura 30 mostra i passi di convergenza per la equazione $f(x) = x \cdot \sin(\pi x) - e^{-x} = 0$.

Slide 351

INTEGRALI

1 Misurabilitá

Il concetto di integrale é legato a quello di misura di un insieme di punti. Di questi tipi di insiemi abbiamo giá visto l'unione, l'intersezione, la differenza, etc.. Vogliamo ora introdurre nuove nozioni da utilizzare per gli insiemi di punti nel piano.

Definizione - **Insieme limitato** - Diremo che un insieme di punti del piano Π é limitato se esiste un cerchio C che lo contiene, cioé se $\exists\ C \subset \Pi : A \subset C$ o, equivalentemente $C \cup A = C$.

Consideriamo adesso un insieme A *del piano* Π *e indichiamo con* $P \in A$ *un generico punto di tale insieme.*

Definizione - **Punto interno** - Diremo che P é un punto interno se esiste un cerchio C_P di centro P tutto costituito di punti di A, cioé se $\exists\ C_P \subset \Pi : C_P \subset A$ o, equivalentemente $C_P \cup A = A$.

Definizione - **Punto esterno** - Diremo che P é un punto esterno se esiste un cerchio C_P di centro P tutto costituito da punti non appartenenti ad A, cioé se $\exists\ C_P \subset \Pi : C_P \cap A = \emptyset$.

Definizione - **Punto di frontiera** - Diremo che un punto Q, appartenente o no all'insieme A, é un punto di frontiera se esso non é né interno né esterno, ovvero se comunque si prenda un cerchio C_Q di centro Q esso é sempre costituito sia da punti appartenenti ad A che da punti non appartenenti ad A, cioé se $\forall\ \ C_Q \subset \Pi : C_Q \cap A \neq \emptyset$ o equivalentemente $A \subset C_Q \cup A$, $C_Q \subset C_Q \cup A$.
L'insieme dei punti di frontiera di un insieme A viene detto **frontiera di A** e si indica con ∂A

Estenzione *- I concetti visti per gli insiemi nello spazio 2-dimensionale del piano si estendono agli insiemi negli spazi 1-dimensionali (la retta), 3-dimensionali ed n-dimensionali.*

Definizione - **Poligono** - Chiameremo Poligono ogni insieme del piano Π la cui frontiera é costituita da un numero finito di segmenti di rette.

Area dei Poligoni - Dalla geometria elementare sappiamo come effettuare la misura ovvero il calcolo dell'area.

Concetto di misura per un insieme di punti del piano

Vogliamo ora estendere il concetto di misura, cioé il calcolo dell'area, ad un generico insieme del piano.

Distinguiamo in quanto segue gli insiemo dotati di punti interni da quelli che invece non hanno punti interni.

Insieme limitato e dotato di punti interni

Sia A un insieme del piano Π limitato e dotato di punti interni.
Consideriamo allora gli insiemi:

$$I = \{\text{Insieme dei poligoni contenuti in } A\}; \tag{251}$$

$$E = \{\text{Insieme dei poligoni contenenti } A\}; \tag{252}$$

$$M_I = \{\text{Insieme numerico delle aree dei poligoni di } I\}; \tag{253}$$

$$M_E = \{\text{Insieme numerico delle aree dei poligoni di } E\}. \tag{254}$$

Detti $P \in I$ e $Q \in E$ due generici poligoni e m_P, m_Q le rispettive aree, risulta evidente che $\forall P \in I, \forall Q \in E \quad \Rightarrow \quad P \subseteq Q$ e $m_P \leq m_Q$.
Ne consegue che gli insiemi numerici M_I e M_Q sono separati, cioé
$M_I \cap M_Q = \emptyset$.

Definizione - **Misurabilitá di A secondo Jordan** - Diremo che l'insieme A é misurabile secondo Jordan se gli insiemi numerici delle aree dei poligoni contenuti e conteneti A sono contigui.

Definizione - **Misura di A secondo Jordan** - Chiameremo misura di A secondo Jordan l'elemento di separazione tra M_I e M_E. La misura di A viene anche detta *area* di A.

Insieme privo di punti interni

Sia A un insieme del piano Π privo di punti interni. In questo caso non esistono poligoni contenuti in A.
Se, tuttavia, l'insieme numerico delle aree dei poligoni contenti A ha come estremo inferiore il valore zero, allora la misura di A sará eguale a zero, mis(A)$= 0$.

Esempio . Si consideri l'insieme costituito dai punti di un segmento di retta. É immediato costruire l'insieme dei poligoni contenenti tale segmento e verificare che l'insieme numerico delle loro aree ha come estremo inferiore lo zero.

Proprietá della misura

La misura cosí costruita gode delle seguenti proprietá:

1. Siano $A \subseteq B$ due insiemi limitati e misurabili, allora $area(A) \leq area(B)$;
2. Siano A, B due insiemi limitati e misurabili, senza punti interni in comune, i.e $[(A \setminus \partial A) \ \cap \ (B \setminus \partial B)] = \emptyset$, allora si ha

$$area\ (A \cup B) = area\ A + area\ B \tag{255}$$

3. Siano A, B due insiemi limitati e misurabili, allora sono misurabili anche la intersezione $A \cap B$ e la unione $A \cup B$.
4. Siano A, B due insiemi limitati e misurabili, e sia $B \subseteq A$, allora la misura dell'insieme differenza $A - B$ é data da:

$$area\ (A - B) = area\ A - area\ B \tag{256}$$

Nota Le definizioni e le proprietá sopra esposte si possono estendere agli insiemi su una retta. Tali insiemi sono intervalli singoli o pluri-intervalli, cioé piú intervalli privi di punti comuni. Intervalli e pluri-intervalli sono misurabili in modo elementare e sostituiscono i poligoni. Il resto é ovvio.

2 Integrale definito

L'integrale definito di una funzione é la misura di un insieme del piano associato alla funzione stessa. Per definirlo in modo esatto occorre dare ancora qualche definizione.

Rettangoloide - Sia $f(x)$ una funzione definita in $[a,b]$ ed ivi non negativa, i.e. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, diremo **Rettangoloide di base** $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$ l'insieme dei punti del piano che soddisfano le diseguaglianze:

$$a \leq x \leq b \qquad\qquad 0 \leq y \leq f(x) \tag{257}$$

Teorema - Il rettangoloide relativo ad una funzione continua é un insieme misurabile.
Dimostrazione.
Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli mediante i punti $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
Osserviamo che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ la funzione, per ipotesi continua, é dotata, per il teorema di Wierstrass, di minimo m_i e massimo M_i.
Per ciascun intervallo considero i rettangoli R_{m_i} ed R_{M_i} che hanno per base l'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ ed altezze rispettivamente m_i e M_i.
É immediato convincersi che il rettangoloide di $f(x)$ contiene il rettangoloide $R_m = \cup_{i=1}^{n} R_{m_i}$, mentre é contenuto dal rettangoloide $R_m = \cup_{i=1}^{n} R_{M_i}$. Dette poi

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i \tag{258}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \tag{259}$$

rispettivamente le aree dei rettangolidi contenuti e contenenti il rettagoloide relativo alla funzione $f(x)$, essendo:

$$\forall i \ \ (x_{i+1} - x_i) \cdot m_i \ \leq \ (x_{i+1} - x_i) \cdot M_i \tag{260}$$

ne segue

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot m_i \ \leq \ \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot M_i \tag{261}$$

cioé

$$s_n \leq S_n \tag{262}$$

Al variare di n, s_n e S_n descrivono due insiemi numerici disgiunti.
Si puó dimostrare che per $n \to \infty$ i due insiemi numerici sono contigui, cioé

Teorema - Gli insiemi numerici descritti dalle somme s ed S al variare in tutti i modi possibili della decomposizione in intervalli parziali dell'intervallo $[a,b]$ sono contigui ed il loro elemento di separazione é l'area del rettangoloide relativo alla funzione $f(x)$.

Corollario - L'insieme dei punti del diagramma (grafico) di una funzione continua $f(x)$ ha misura nulla.

Siamo ora in grado di dare la definizione di integrale definito di una funzione continua.

Definizione (**Integrale definito**) - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$ ed ivi positiva, chiameremo **Integrale definito di f(x) in [a,b]** e scriveremo

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \tag{263}$$

l'elemento di separazione degli insiemi numerici $\{s_n\}$ ed $\{S_n\}$ al variare comunque della decomposizione dell'intervallo [a,b].

2.1 Proprietá degli Integrali definiti

L'integrale definito gode di alcune proprietá notevoli che sono evidenziate dai teoremi che seguono.

Proprietá Distributiva

Teorema 1 - Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni definite e continue in $[a,b]$, entrambe ivi non negative, e siano c_1 e c_2 due costanti reali, allora si ha:

$$\int_{[a,b]} [\ c_1\ f_1(x) + c_2\ f_2(x)\ ]\,dx = c_1 \int_{[a,b]} f_1(x)\,dx + c_2 \int_{[a,b]} f_2(x)\,dx \tag{264}$$

Corollario - **Integrali di funzioni negative**
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a,b]$ ed ivi negativa,
i.e. $f(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = -\int_{[a,b]} |\ f(x)\ |\,dx \tag{265}$$

Infatti la funzione $g(x) = |\ f(x)\ | = c_1\ f(c)$ con $c_1 = -1$. Quindi

$$\int_{[a,b]} |\ f(x)\ |\,dx = \int_{[a,b]} g(x)\,dx = \int_{[a,b]} c_1\ f(x)\,dx = c_1 \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Il concetto di integrale si estende anche al caso in cui $f(x) \leq 0$ ma l'area del rettangoloide di una funzione, negli intervalli nei quali questa é negativa ha misura negativa.

Proprietá Additiva

Teorema 2 - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia $c \in [a, b]$, allora

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,c]} f(x)\, dx + \int_{[c,b]} f(x)\, dx \tag{266}$$

Teorema 3 (**Teorema della Media**)
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[a, b]$ e siano m e M rispettivamente il minimo ed il massimo della funzione in $[a, b]$, allora

$$m(b-a) \ \le \ \int_{[a,b]} f(x)\, dx \ \le \ M(b-a) \tag{267}$$

Inoltre, esiste almeno un punto $\xi \in [a, b]$ tale che:

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = (b-a)f(\xi) \tag{268}$$

Interpretazione Geometrica - La interpretazione geometrica del secondo asserto del teorema precedente é che esiste almeno un rettangolo avente la stessa area e la stessa area del rettangoloide della funzione $f(x)$ e che l'altezza di questo rettangolo é compresa tra il minimo ed massimo della funzione $f(x)$.

Valgono poi i seguenti teoremi.

Teorema 4 - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[a, b]$. Se $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$ allora ne segue che

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx \ge 0 \tag{269}$$

ed il segno di eguaglianza sussiste se e solo se $f(x)$ *é identicamente nulla in* $[a, b]$

Teorema 5 - Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni definite e continue nell'intervallo $[a, b]$, e sia $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, allora ne segue

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx \ge \int_{[a,b]} g(x)\, dx \tag{270}$$

Teorema 6 - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[a,b]$, allora vale sempre la diseguaglianza

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\, dx \right| \leq \int_{[a,b]} \left|f(x)\right| dx \tag{271}$$

Dimostrazione - Ricordiamo che ovviamente vale sempre la diseguaglianza

$$-\left|f(x)\right| \leq f(x) \leq \left|f(x)\right|.$$

Quindi per il teorema (271) segue

$$-\int_{[a,b]} \left|f(x)\right| dx \leq \int_{[a,b]} f(x)\, dx \leq \int_{[a,b]} \left|f(x)\right| dx \tag{272}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{[a,b]} f(x)\, dx \right| \leq \int_{[a,b]} \left|\ f(x)\ \right| dx \tag{273}$$

c.v.d.

Teorema 7 - Sia $f(x)$ una funzione definita, continua e non negativa nell'intervallo $[a,b]$; sia inoltre $[a',b'] \subseteq [a,b]$, allora

$$\int_{[a',b']} f(x)d(x) \leq \int_{[a,b]} f(x)d(x) \tag{274}$$

Area di un dominio normale

Definizione - Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite e continue in $[a,b]$ e sia, almeno $\forall x \in]a,b[$, $g(x) \leq f(x)$.
Chiameremo **Dominio Normale** rispetto all'asse x l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano alle disequazioni:

$$a \leq x \leq b \qquad\qquad g(x) \leq y \leq f(x) \tag{275}$$

Si puó provare che l'area del Dominio Normale é data da:

$$\int_{[a,b]} [f(x) - g(x)]dx \tag{276}$$

2.2 Estensione del Concetto di Integrale

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[\alpha, \beta]$; sia inoltre $a, b \in [\alpha, \beta]$.

Definizione - Diremo integrale definito di $f(x)$ tra a e b e scriveremo:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)\, dx & \text{se } a < b\ ; \\ 0 & \text{se } a = b\ ; \\ -\int_{[b,a]} f(x)\, dx & \text{se } a > b\ . \end{cases} \tag{277}$$

I numeri reali a e b prendono rispettivamente il nome di limite (o estremo) inferiore e superiore dell'integrale definito. Valgono, nel significato della estensione appena detta, i teoremi visti in precedenza.

Teorema - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[\alpha, \beta]$. Se $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{278}$$

Teorema - Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[\alpha, \beta]$. Se $a, b \in [\alpha, \beta]$ allora esiste un punto ξ compreso tra a e b per il quale si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi) \cdot (b - a) \tag{279}$$

3 Funzioni Integrali e funzioni primitive

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ e siano $x_0, x \in [\alpha, \beta]$. Supponiamo x_0 fissato ed x variabile e consideriamo

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \tag{280}$$

Definizione - Al variare di $x \in [\alpha, \beta]$ la (280) risulta una funzione della variabile x che verrá indicata con il nome di **Funzione Integrale**:

$$F(x) \; = \; \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \tag{281}$$

Osservazione - Si noti che benché la funzione f sia stata indicata come $f(x)$ essa appare nella definizione della funzione integrale (280) e nella (280) come $f(t)$. Si tratta ovviamente della stessa funzione, cioé della stessa legge che associa ad un valore $t \in [\alpha, \beta]$ il valore $f(t)$.
Si dice che **la variabile di integrazione é muta** in quanto il valore della funzione non dipende dal nome specifico che viene dato alla variabile indipendente ma solo dalla legge f e dal dominio $[\alpha, \beta]$.

Per la funzione integrale $F(x)$ é banale il seguente:
Asserto - Se $F(x)$ é la funzione integrale definita in (281) allora $F(x_0) = 0$.

Inoltre é possibile provare il seguente teorema:
Teorema - La funzione $F(x)$ é continua e derivabile in (α, β) e la sua derivata é:

$$F'(x) = f(x) \tag{282}$$

La funzione $F(x)$ si dirá Primitiva della funzione $f(x)$, cioé:

Definizione - Data una funzione $f(x)$ definita e continua in (α, β), diremo **Primitiva** di $f(x)$ ogni funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x) \tag{283}$$

Valgono i seguenti teoremi:
Teorema - Ogni funzione $f(x)$ continua in (α, β) é ivi dotata di una funzione primitiva.

Teorema - Tutte e sole le primitive di $f(x)$ sono della forma:

$$F(x) \ = \ \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \ + \ c \tag{284}$$

dove c é una costante arbitraria.
Dimostrazione - Dette infatti $F(x)$ e $G(x)$ due arbitrarie primitive di $f(x)$, si consideri la funzione $H(x) = F(x) - G(x)$. Per ipotesi si ha ovviamente

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Ricordando poi che se una funzione ha derivata identicamente nulla in un intervallo allora la funzione é costante, segue

$$H(x) = F(x) - G(x) = c \ \ \Rightarrow \ \ F(x) = G(x) + c \qquad \text{c.v.d.}$$

Corollario - Se $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$ allora si ha $G(x_0) = c$, da cui

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \tag{285}$$

Da cui discende il seguente

Teorema - Il problema del calcolo definito fra a e b di una funzione continua $f(x)$ si riduce a quello della ricerca di qualsiasi primitiva di $f(x)$.
Detta $G(x)$ tale funzione primitiva allora

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx \ = \ G(b) - G(a) \tag{286}$$

4 Integrali Indefiniti

Abbiamo visto che tutte e sole le funzioni primitive di $f(x)$ sono date nella forma

$$F(x) + c \quad \text{con } c \text{ costante arbitraria}$$

Questa espressione prende il nome di **Integrale Indefinito** della funzione $f(x)$ e si scrive

$$\int f(x)\, dx \tag{287}$$

Aggiungiamo ora alcune osservazioni che permettono di meglio comprendere i concetti sopra esposti.

Osservazione 1 - L'integrale definito é un numero, cioé l'area del rettangoloide associato alla funzione.

Osservazione 2 - L'integrale indefinito é una funzione definita a meno di una costante arbitraria.

Osservazione 3 - Dalla definizione di integrale indefinito segue

$$D \int f(x)\, dx \;=\; f(x) \tag{288}$$

$\Rightarrow$ *L'integrazione indefinita puó considerarsi come l'operazione inversa della derivazione.*

Osservazione 4 - Ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione indefinita.

i) Integrale della funzione combinazione lineare

$$\begin{aligned} D\Big[\, c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx \,\Big] &= c_1 D \int f_1(x)dx + c_2 D \int f_2(x)dx \\ &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \end{aligned}$$

quindi

$$\int \Big[\, c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \,\Big] dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx$$

ed i casi particolari

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int \Big[\ f_1(x) \pm f_2(x)\ \Big]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

ii) Ricordando poi la regola di derivazione di un prodotto si ha:

$$\begin{aligned} D\int\Big[\ u(x)v'(x)+u'(x)v(x)\ \Big]\ dx &= D\Big[\ \int uv'\ dx + \int u'v\ dx\ \Big] = \\ &= D\int uv'\ dx + D\int u'v\ dx = \\ &= uv' + u'v = D\Big[\ u(x)\cdot v(x)\Big] \end{aligned}$$

iii) Ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big[\int f(x)\ dx\Big]_{x=\varphi(t)} &= \Big[\frac{d}{dx}\int f(x)\ dx\Big]_{x=\varphi(t)}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \\ &= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \end{aligned}$$

da cui

$$\Big[\int f(x)\ dx\Big]_{x=\varphi(t)} = \int f\,[\ \varphi(t)\ ]\cdot\varphi'(t)\ dt$$

5 Integrali Indefiniti immediati

Come abbiamo detto l'integrazione indefinita puó considerarsi come l'operazione inversa della derivazione. Gli integrali indefiniti immediati possono allora ricavarsi dalla tabella delle derivate fondamentali (**??**) leggendola a destra il termine da porre sotto segno di integrale ed a sinistra il risultato dell'integrazione indefinita. Riportiamo nel seguito alcuni di questi integrali notevoli.

$$1)\ \int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c; \qquad \text{per } \alpha \neq -1 \tag{289}$$

$$2)\ \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|+c \tag{290}$$

$$3)\ \int a^{x}\,dx = a^{x}\cdot\log_{a} e+c \tag{291}$$

$$4)\ \int e^{x}\,dx = e^{x}+c \tag{292}$$

$$5)\ \int \cos(x)\,dx = \sin(x)+c \tag{293}$$

$$6)\ \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+c \tag{294}$$

$$7)\ \int \frac{1}{\cos^{2}(x)}\,dx = \tan(x)+c \tag{295}$$

$$8)\ \int \frac{1}{1+x^{2}}\,dx = \arctan(x)+c \tag{296}$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx = \arcsin(x)+c \tag{297}$$

$$= -\arccos(x)+c \tag{298}$$

6 Metodi di integrazione Indefinita

Il calcolo di un integrale indefinito di una funzione puó rivelarsi un problema estremamente complesso.

A differenza del processo di derivazione, che anche se implica lunghi calcoli giunge al calcolo della derivata, il calcolo dell'integrale potrebbe, malgrado l'applicazione delle tecniche note, non giungere al calcolo dell'integrale.

Nel presente paragrafo accenniamo ai metodi di integrazione per permettervi il calcolo dell'integrale nelle situazioni piú semplici. Esistono le tavole di integrazione costruite dai matematici nel corso degli ultimi secoli o il sito della Wolfram Research (http://integrals.wolfram.com/index.jsp) dove é possibile calcolare in linea un integrale anche complesso. Nel caso di integrali complessi é sempre conveniente verificare il risultato effettuando la derivata della funzione ottenuta come risultato. Anche per questa operazione esistono oggi software (non il linea) che permettono di effettuare la derivata di una funzione seppur complessa.

6.1 Integrazione per Trasformazione della funzione integranda

Sia $F(x)$ la funzione primitiva della funzione $f(x)$ di cui si vuole calcolare l'integrale, cioé:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{299}$$

Adesso mostriamo che se riusciamo a riscrivere la funzione $f(x)$ in modo che sia evidentemente eguale alla derivata di una funzione $F(x)$ il nostro problema é risolto.
Derivando membro a membro la precedente si ottiene:

$$f(x) = F'(x)$$

moltiplicando ambi i membri per il differenziale della variabile indipendente

$$f(x)\,dx = F'(x)\,dx$$

ed essendo $F'(x)dx = dF(x)$, integrando membro a membro, si ottiene

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int F'(x)dx\\ &= \int dF = F(x) + c\end{aligned}$$

Esempio - Si vuole calcolare $\int e^{ax}dx$, con $a \neq 0$.
Vediamo i passi da effettuare:

1. si moltiplica e divide per la costante a: $\int e^{ax}dx{=}\frac{1}{a}\int e^{ax}\cdot a\cdot dx$;
2. poi si pone $t = ax$ da cui $dt = adx$, e si risolve l'integrale notevole:
$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int e^{ax}\cdot a\,dx = \frac{1}{a}\int e^{t}dt = \frac{1}{a}\,e^{t} + c$$
3. Si ritorna quindi alla variabile di integrazione originaria con la trasformazione inversa da t in x mediante $t = ax$. Si ottiene
$$\Rightarrow\ \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + c$$

Il risultato ottenuto puó essere facilemente interpretato mediante le funzioni composte. Infatti se considero F come funzione della variabile t tramite la x, cioé se $F(x)$ e $x = \varphi(t)$, ovvero $F(\varphi(t))$, allora:

$$dF = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(t)\,dt \tag{300}$$

Nel caso dell'esempio precedente si ha $ax = t$, cioé $x = \varphi(t) = t/a$, da cui $\varphi'(t) = 1/a\ dt$ da cui il risultato.

6.2 Integrazione elementare per decomposizione e somma

Questo metodo di integrazione ha la sua origine dalla regola di derivazione della funzione combinazione lineare. Ricordiamo che

$$D\Big[c_1\ f_1(x) + c_2\ f_2(x)\Big] = c_1\ D\Big[f_1(x)\Big] + c_2\ D\Big[f_2(x)\Big]$$

Quindi

$$\int \Big[c_1\ f_1(x) + c_2\ f_2(x)\Big]\ dx = c_1 \int f_1(x)\ dx + c_2 \int f_2(x)\ dx + c \tag{301}$$

Il risultato si puó ovviamente generalizzare

$$\int\ \sum_{i=1}^{n} c_i\ f_i(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\ \int f_i(x)\ dx + c \tag{302}$$

L'estensione permette di calcolare in modo semplice l'integrale di un generico polinomio di grado n. Infatti:

$$\begin{aligned}\int \Big[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0\Big]\ dx &= \int \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\ dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \int x^i\ dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + c\end{aligned}$$

6.3 Integrazione di funzioni razionali

Su questo argomento, che presenta non poche difficoltá, daremo solo un cenno solo per completezza della trattazione. Siano $N_n(x)$ e $D_m(x)$ due polinomi a coefficienti reali rispettivamente di grado n ed m, $n > m$. Consideriamo la funzione $f(x) = N_n(x)/D_m(x)$. Essendo $n > m$ possiamo effettuare la divisione tra i due polinomi:

$$f(x) = \frac{N_n(x)}{D_m(x)} = Q_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{D_m(x)} \tag{303}$$

dove $Q(x)$ é un polinomio di grado $n - m$ ed $R(x)$ é il resto. Allora

$$\int f(x)\, dx = \int Q_{n-m}(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{D_m(x)}\, dx \tag{304}$$

Il calcolo del primo integrale, i.e. $\int Q_{n-m}(x)\, dx$ é, come abbiamo visto in precedenza, semplice. Il secondo integrale é invece abbastanza complesso. Occorre per prima cosa calcolare le radici dell'equazione $D_m(x) = 0$ e verificare che la funzione integranda $\frac{R(x)}{D_m(x)}$ sia continua anche in questi punti. In caso contrario occorre calcolare un *integrale improprio*. La trattazine di questo argomento esula dal nostro obiettivo e viene omessa.

6.4 Integrazione per parti

Questo metodo di integrazione ha origine dalla regola di derivazione della funzione prodotto. Consideriamo la funzione $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. La sua derivata é data da:

$$D\big[u(x)v(x)\big] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Integrando la precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} \int D\big[uv\big] = u(x)v(x) &= \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \\ \Rightarrow \quad \int u(x)v'(x)\, dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx \end{aligned}$$

Esempio - Si vuole calcolare l'integrale $\int xe^x\, dx$. Identifichiamo

$$\begin{aligned} v(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = e^x \\ u(x) = x \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 1 \end{aligned}$$

quindi

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int \big(1 \cdot e^x\big) dx = x\, e^x - e^x = (x-1)\, e^x + c$$

6.5 Metodo di sostituzione

Il metodo si basa sulla sostituzione della variabile di integrazione e, per molti aspetti, é simile a quello di trasformazione della fnzione integranda.
Consideriamo $\int f(x)dx$.
Poniamo $x = \varphi(t)$, da cui $dx = \varphi'(x)dt$, quindi

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f\left[\varphi(t)\right]\, \varphi'(t)\, dt\right]_{t=\varphi(x)}$$

dove $t = \varphi(x)$ é la funzione inversa di $x = \varphi(t)$.

Esempio - Si vuole calcolare $\int e^{ax}\, dx$. Poniamo $x(t) = t/a$, da cui $dx = 1/a\, dt$: la funzione inversa é banalmente $t(x) = a \cdot x$. Quindi si ottiene:

$$\int e^{ax}\, dx = \left[\int e^t \frac{1}{a}\, dt\right]_{t(x)=ax} = \frac{1}{a}\left[\int e^t\, dt\right] = \frac{1}{a}\left[e^t\right]_{t(x)=ax} + c$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} + c$$

7 Integrali Impropri

La definizione di integrale definito che abbiamo dato é valida se la funzione é continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Vogliamo adesso estendere tale definizione al caso in cui *i)* l'intervallo possa essere non limitato superiormente e/o inferiormente; *ii)* la funzione sia generalmente continua, cioé contenga in numero finito di punti di discontinuitá nei quali la funzione sia un infinito.

7.1 Integrali Impropri di I tipo

Definizione - Integrale Improprio di **I** tipo.
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, \infty)$.
Chiameremo integrale improprio di I tipo della funzione $f(x)$ in tale intervallo e scriveremo:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx \tag{305}$$

il limite, se esiste finito, dell'integrale esteso all'intervallo $[a, r]$ quando r tende all'infinito. In questo caso la funzione si dirá integrabile in $[a, \infty)$.
Nel caso in cui tale integrale non esiste o diverge allora la funzione si dirá non integrabile in $[a, \infty)$.

La definizione si estende naturalmente all'integrale di una funzione continua nell'intervallo $(-\infty, b]$ o nell'intervallo non limitato $(-\infty, +\infty)$. Si ha:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_r^b f(x)dx \tag{306}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \tag{307}$$

$$= \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 f(x)dx + \lim_{r\to+\infty} \int_0^r f(x)dx \tag{308}$$

Esempio 1 Si vuole calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $[1, \infty)$.
Si ha:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x)dx &= \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x^2}dx = \\ &= \lim_{r\to\infty} \left[-\frac{1}{r}\right]_1^r = \\ &= \lim_{r\to\infty} (-\frac{1}{r} + 1) = 1 \end{aligned}$$

Esempio 2 Si vuole calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1, \infty)$.
Si ha:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x)dx &= \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x} dx = \\ &= \lim_{r\to\infty} \Big[\ln(x) \Big]_1^r = \\ &= \lim_{r\to\infty} \ln(r) = 1 \end{aligned}$$

Esempio 3 Si vuole calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $[-\infty, \infty)$.
Si ha:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x)dx &= \lim_{r\to\infty} 2 \int_0^r \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{r\to\infty} 2 \Big[\arctan(x) \Big]_1^r = \\ &= \lim_{r\to\infty} \arctan(r) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Esempio 4 Si vuole calcolare l'integrale di $f(x) = \cos(x)$ in $[0, \infty)$.
Si ha:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x)dx &= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \cos(x) dx = \\ &= \lim_{r\to\infty} \Big[\sin(x) \Big]_1^r = \\ &= \lim_{r\to\infty} \sin(r) \text{ che non esiste.} \end{aligned}$$

7.2 Integrali Impropri di II tipo

.

Definizione - Integrali Improprio di **II** tipo.
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $]a, b]$ infinitamente grande per $x \to a$.
Diremo integrale improprio di **II** tipo della funzione $f(x)$ e scriveremo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to a+} \int_r^b f(x)dx \tag{309}$$

se esiste ed é finito il limite dell'integrale esteso all'intervallo limitato $[r, b]$ In caso contrario la funzione non é integrabile.

Analogamente se $f(x)$ é definita e continua in $[a, b[$ ed infinitamente grande per $x \to b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to b-} \int_r^b f(x)dx \tag{310}$$

Se la funzione $f(x)$ ha un numero finito di punti di di infinito, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nell'intervallo $[a, b]$ allora basterá dividere l'intervallo $[a, b]$ nei sottointervalli

$$[a, c_1[\ \cup\ [a_1, c_2[\ \cup [c_2, a_2]\ \cup \ldots \cup\ [c_n, b] \tag{311}$$

ed applicare il teorema di decomposizione in somma degli integrali.

Slide 352

METODI NUMERICI

8 Metodi numerici

Abbiamo giá visto, nel teorema (286) come si procede per il calcolo di un integrale definito in modo esatto. Questo calcolo implica tuttavia la conoscenza di una primitiva della funzione integranda che potrebbe rappresentare un problema insormontabile.

L'ultimo argomento di questo capitolo é dedicato al calcolo approssimato degli integrali definiti. Gli integrali definiti rappresentano la misura dell'area del rettangolide della *funzione integranda* $f(x)$.

La definizione stessa di integrale definito ci permette di intuire un metodo per una prima stima del valore dell'integrale. Infatti dividendo l'intervallo di integrazione $[a, b]$ in n sottointervalli mediante i punti $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ é possibile calcolare, nel modo esposto in precedenza, le aree dei rettangoloidi $R_m = \cup_{i=1}^{n} R_{m_i}$ ed $R_m = \cup_{i=1}^{n} R_{M_i}$ rispettivamente contentuto e contenente il rettangoloide della funzione $f(x)$.
L'area del rettangoloide della funzione $f(x)$ é quindi compresa tra le aree dei due rettangolidi R_m ed R_M, cioé:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i = S_n \qquad (312)$$

Ne consegue che, in analogia a quanto visto per la soluzione delle equazioni non lineari, fissato un valore di tolleranza ϵ, possiamo procere a successive suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ sino a quando

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i) \leq \epsilon \tag{313}$$

Questo approccio é tuttavia molto dispendioso dal punto di vista computazionale in quanto richiede che per ogni sottointervallo si proceda al calcolo del massimo e del minimo assoluto della funzione nel sottontervallo considerato. Esso viene quindi presentato solo per comprendere come, in linea di principio, il calcolo approssimato sia possibile.

Il tecniche per il calcolo approssimato di un integrale definito vengono usualmente chiamate **Quadrature Numeriche**. Questo studio é dominio di quella branca dell'analisi denominata *Analisi Numerica* il cui studio esula dagli obiettivi di questo corso. É tuttavia importante sottolineare che l'analisi numerica non solo studia sempre nuovi metodi numerici ma fornisce, e questa é la parte importante, una stima dell'errore che si compie nell'effettuare la approssimazione. In questo modo si puó controllare la bontá della approssimazione.

Tuttavia alcuni dei risultati delle Quadrature Numeriche posso essere introdotte in modo semplice e queste sono, per i vostri scopi sufficienti per calcolare la maggior parte degli integrali definiti.

Il principio generale a cui si ispirano la classe di tecniche per la quadratura numerica che esamineremo é quello di dividere l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di sottointervalli. In ciascun sottointervallo la funzione viene calcolata in un numero finito di punti (tipicamente tre punti) ed approssimata mediante polinomi di diverso ordine. Il calcolo dell'integrale viene quindi eseguito sul polinomio che approssima la funzione in ciascun sottointervallo. Una formulazione generale di questo approccio viene fatta in un insieme di formule note come *le formule di Newton-Cotes.* Noi ne esmineremo solo alcune.

Supponiamo quindi di aver diviso l'intervallo $[a, b]$ in n di sottointervalli $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. L'approssimazione dell'integrale viene sempre presentata per il generico sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$.

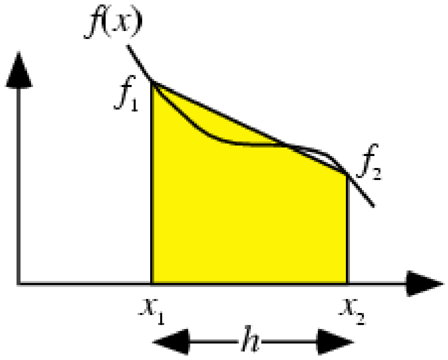


Figura 31: Metodo del Trapezio

8.1 Metodo del Trapezio

Il primo metodo é il piú semplice ed intuitivo e rappresenta la formula di Newton-Cotes a due punti. L'approssimazione corrisponde a calcolare l'area del trapezio che si ottiene interpolando la funzione assegnata con la retta, quindi con un polinomio di ordine uno, che passa per i punti $(x_i, f(x_i))$ e $x_{i+1}, f(x_{i+1})$ come mostrato in figura per i punti di indice $i = 1$ ed $i = 2$. L'approssimazione é data da:

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)\, dx = \frac{1}{2}h(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi) \tag{314}$$

dove $f_i \equiv f(x_i)$ ed, ovviamente, $f_{i+1} \equiv f(x_{i+1})$; $h = (x_{i+1} - x_i)$.
Il primo termine a destra rappresenta banalmente l'area di un trapezio che ha per basi i valori f_i, f_{i+1} ed altezza h; il secondo termine é l'errore che si commette nella approssimazione. Questo dipende dalla derivata seconda della funzione calcolata in un punto $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ e da h^3. Detto M un maggiorante di $f''(\xi)$ si ottiene un maggiorante dell'errore in funzione di h. Se $h < 1$ allora $h^3 \ll 1$ e questo termine diviene trascurabile rispetto al primo.

Si osservi che volendo calcolare l'integrale in tutto l'intervallo $[a, b]$ sommando i contributi di ciascun sottointervallo si dovrá calcolare due volte il valore della funzione in tutti i punti x_i esclusi gli estremi $x_0 = a$ e $x_n = b$. Per evitare questo si usa una *formula composita*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \tag{315}$$

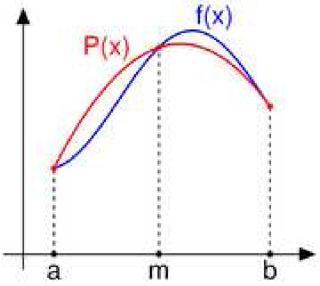


Figura 32: Regola di Simpson

8.2 Metodo di Simpson

Questo metodo é piú spesso chiamato con il nome di **Regola di Simpson** dal nome del suo inventore il matematico Thomas Simpson (1710-1761). É una formula di Newton-Cotes nella quale la approssimazione della funzione viene effettuata mediante un polinomio del secondo ordine (quadratico). Questo significa approssimare l'andamento della funzione con un arco invece di una retta come nel metodo del trapezio. Nel caso della Regola di Simpson si usano i *Polinomi interpolatori di Lagrange del terzo ordine* per interpolare la funzione in tre punti equispaziati di due sottointervalli consecutivi. Si osservi che, a differenza del metodo del trapezio, il metodo di Simpson richiede che l'intervallo $[a, b]$ venga suddiviso in un numero pari di intervalli. Per questo motivo conviene indicare il numero di intervalli con $2n$.

Nella figura (32) gli estremi sono indicati con a e b ed il punto di mezzo con m. Nella divisione in sottointervalli basta porre $a = x_i$, $m = x_{i+1}$ e $b = x_{i+2}$. L'approssimazione dell'integrale é data da:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} dx = \frac{h}{3}\Big[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\Big] + R_i \tag{316}$$

dove $h = (x_{i+1} - x_i) = (b - a)/2n$ ed R_i é l'errore nell'intervallo in considerazione (identificato dall'indice dell'estremo inferiore) dato da

$$R_n = \frac{1}{90} h^5 \cdot f^{(4)}(\xi) \tag{317}$$

con $\xi \in [x_i, x_{i+2}]$ ed $f^{(4)}$ indica la derivata quarta della funzione $f(x)$. Detto M un maggiorante di $f^{(4)}$ si ottiene un maggiorante dell'errore R_i in funzione di h. Se $h < 1$ allora $h^5 \ll 1$ e l'errore diviene trascurabile rispetto al primo termine.

Anche in questo caso volendo calcolare l'integrale in tutto l'intervallo $[a, b]$ sommando i contributi di ciascun sottointervallo si dovranno calcolare due volte i valori della funzione nei punti intermedi. Per evitare questo si usa la *formula composita*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2} + f_{2n}\Big] - R_n \tag{318}$$

che puó scriversi in forma compatta come

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big[f_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} f_{2j}) + 4\sum_{k=1}^{n} f(_{2k-1}) + f_{2n}\Big] \tag{319}$$

Dove R_n é l'errore della formula composita dato da

$$R_n = \frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in [a,b] \tag{320}$$

9 Equazioni differenziali

Vogliamo ora affrontare il problema di determinare una funzione incognita $y(x)$ conoscendo la sua relazione con le sue prime n derivate, $y', y'', y''', y^{(n)}$ e la variabile indipendente.

Una tale realzione si chiama equazione differenziale di ordine n. Ogni funzione $y(x)$ che la soddisfa si dice una soluzione o un integrale della equazione differenziale.

Esempi di equazioni differenziali sono:

$$y' - y\sin^2(x) = 0 \tag{321}$$

$$(y')^2 + y/x = 0 \tag{322}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{323}$$

$$y^{(iv)} - y = 1 \tag{324}$$

dove 321 e 322 sono equazioni differenziali del I ordine, 323 è del III ordine e 324 è del IV ordine.

L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che in essa compaiono.

La forma più generale di una equazione differenziale di ordine n è una scrittura del tipo:

$$f[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)] = 0 \tag{325}$$

dove $f[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)]$ è una funzione arbitraria delle variabili indicate.

Integrare una equazione differenziale significa trovare tutte le funzioni $y(x)$ che la soddisfano.

10 Equazioni del I ordine a variabili separabili

Dette $X(x)$ e $Y(y)$ due funzioni continue rispettivamente di x e y consideriamo l'equazione differenziale del I ordine

$$y' = X(x)Y(y) \tag{326}$$

Per risolverla, si procede come segue.

Si dividono entrambi i membri per $Y(y)$, supposto $Y(y) \neq 0, \forall y$.

$$\frac{y'}{Y(y)} = X(x)$$

e si integra

$$\int \frac{y'dx}{Y(y)} = \int X(x)dx$$

essendo $y'(x)dx = dy$, si ottiene

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx$$

Dette allora

$$f(y) = \int \frac{dy}{Y(y)}$$
$$g(y) = \int X(x)dx$$

rispettivamente le primitive di $1/Y(y)$ e $X(x)$, si ha

$$f(y) = \ g(x) + x$$

Detta $y = \phi(\cdot)$ la funzione inversa di $f(y)$ si ottiene

$$y = \phi[g(x) + c]$$

che rappresenta la soluzione della 326.

11 Proprietà delle equazioni differenziali

Mostremo ora alcune importanti proprietà delle equazioni differenziali lineari riferendoci, per semplicità, ad equazioni del secondo ordine. Quanto mostrato vale tuttavia per un ordine n qualsiasi.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y'' = a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{327}$$

dove $a_1(x), a_2(x)$ ed $f(x)$ sono funzioni note.
Consideriamo ora l'**equazione omogenea associata**

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{328}$$

Siano ora $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due integrali della 328. Per essi quindi vale che

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0 \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0 \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima per c_1 e la seconda per c_2 costanti arbitrarie e sommando membro a membro si trova

$$[c_1y_1'' + c_2y_2''] + a_1[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_2[c_1y_1 + c_2y_2] = 0 \tag{329}$$

segue che la funzione $y_0 = c_1y_1 + c_2y_2$ è anch'essa soluzione della omogenea associata.

È possibile mostrare che se le funzioni y_1 e y_2 soddisfano alla condizione di essere linearmente indipendenti, tutte e sole le soluzioni della equazione omogenea associata sono della forma

$$y_0 = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{330}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Nota: il concetto di linearmente indipendente è analogo a quello dei vettori nel piano.

Per approfondimenti si veda, ad es, il sito `http://it.wikipedia.org/wiki/Dipendenza_lineare#Esempio_III_.28richiede_il_calcolo_infinitesimale.29`

Teorema 11.1 *Nel caso di equazioni differenziali del secondo ordine lineari la condizione che garantisce che due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione omogenea associata siano linearmente indipendenti è che la quantità*

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

sia non identicamente nulla.

Consideriamo ora l'equazione completa

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

Siano y ed $\hat{y}$ due soluzioni di questa equazione. Per essa

$$\begin{aligned} y'' + a_1y + a_2y &= f(x) \\ \hat{y}'' + a_1\hat{y}' + a_2\hat{y} &= f(x) \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$(y - \hat{y})'' + a_1(y - \hat{y})' + a_2(y - \hat{y}) = 0$$

cioè la funzione $y = y - \hat{y}$ è una soluzione della equazione omogenea associata. Ma poiché, come abbiamo visto, tutte le soluzioni della omogenea associata sono delle forma (330) allora sarà possibile trovare le costanti c_1 e c_2 in modo che

$$y = y - \hat{y} = c_1y_1 + c_2y_2$$

da cui

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \hat{y} \tag{331}$$

Si osservi ora che $\forall c_1, c_2$ il secondo membro è una soluzione dell'equazione completa. Infatti detto $y_0 = c_1y_1 + c_2y_2$ si ha

$$\begin{aligned} y_0'' + a_1y_0' + a_2y_0 &= 0 \\ \hat{y}'' + a_1\hat{y}' + a_2\hat{y} &= f(x) \end{aligned}$$

sommando

$$(y_0 + \hat{y})'' + a_1(y_0 + \hat{y})' + a_2(y_0 + \hat{y}) = f(x)$$

La (331) viene quindi chiamata integrale generale delle equazioni differenziali .
Mostriamo adesso un'altra proprietà.

Teorema 11.2 *Consideriamo due equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti che si differenziano solo per il temine noto*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{332}$$
$$z'' + a_1 z' + a_2 z = \phi(x) \tag{333}$$

Dette $\bar{y}, \bar{z}$ *rispettivamente soluzione della (332) e della (333) e* k_2, k_2 *due costanti reali, allora*

$$\tilde{y} = k_1 \bar{y}(x) + k_2 \bar{z}(x) \tag{334}$$

è una soluzione particolare della equazione

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = k_1 f(x) + k_2 \phi(x) \tag{335}$$

Dimostrazione:
Infatti moltiplichiamo la (332) per k_1, la (333) per k_2 per le soluzioni particolari $\bar{y}$ e $\bar{z}$. Sommando membro a membro

$$(k_1\bar{y} + k_2\bar{z})'' + a_1(k_1\bar{y} + k_2\bar{z})' + a_2(k_1\bar{y} + k_2\bar{z}) = k_1 f + k_2 \phi$$

Posto $\theta = k_1 y + k_2 z$, la precedente prova che la soluzione dell'equazione

$$\theta'' + a_1\theta' + a_2\theta = k_1 f(x) + k_2 \phi(x)$$

è data da

$$\theta = k_1 \bar{y}(x) + k_2 \bar{z}(x)$$

□

Osservazione.
La soluzione generale

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \hat{y}$$

$c_1, c_2 \in \Re$ arbitrarie, rappresenta infinite soluzioni in quanto ha due costanti arbitrarie. Se adesso imponiamo due vincoli o condizioni iniziali del tipo

$$y(x_0) = \alpha \quad y'(x_0) = \beta$$

si prova che esiste una ed una sola soluzione che soddisfa le condizioni richieste.

Questi tipo di equazioni rappresentano, ad esempio, la dinamica unidimensionale di un punto soggetto ad una forza esterna. Il moto del punto $y(t)$ in funzione del tempo é determinato dalla posizione iniziale $y(t = 0)$ e dalla velocitá iniziale, $y'(t = 0)$.

12 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Una equazione differenziale lineare edl primo ordine si scrive

$$y' + a_1(x)y = f(x) \tag{336}$$

e l'omogenea associata

$$y' + a_1(x)y = 0 \tag{337}$$

Osserviamo che la 337 è una equazione a variabili separabili. Quindi

$$\frac{y'}{y} = -a_1(x) \Rightarrow \frac{y'dx}{y} = -a_1(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a1(x)dx \Rightarrow \log|y| = -\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt + c$$

posto $c = \log c_1$

$$y = c_1 e^{[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt]}$$

che è la forma più generale della soluzione di una equazione differenziale lineare del primo ordine. Per trovare la soluzione della 336 occorre trovare in integrale particolare. Il metodo che si usa prende il nome di <u>metodo di variazione della costante arbitraria</u>. Indichiamo con $y_1 = e^{[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt]}$ la soluzione della omogenea associata. Cerchiamo una soluzione della equazione completa che abbia la forma

$$y = \gamma(x)y_1(x)$$

Derivando si ottiene

$$y'(x) = \gamma'(x)y_1(x) + \gamma(x)y_1'(x)$$

Sostituendo nella 336 si ha

$$[\gamma'(x)y_1(x) + \gamma(x)y_1'(x)] + a_1[\gamma(x)y_1(x)] = f(x)$$

da cui

$$\gamma(x)[y_1'(x) + a_1 y_1(x)] + \gamma'(x)y_1(x) = f(x)$$

ma $y_1'(x) + a_1 y_1(x) \equiv 0$ essendo $y_1(x)$ soluzione della equazione omogenea associata; quindi

$$\begin{aligned}\gamma'(x)y_1(x) &= f(x)\\ \gamma'(x) &= \frac{f(x)}{y_1(x)}\\ \gamma(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}dt + c_1\end{aligned}$$

La soluzione generale è quindi $y =$ soluzione omogenea + soluzione particolare dove la soluzione della omogenea è $c_1 y_1$ e quella particolare è $\gamma(x) y_1(x)$, quindi

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1(x) + y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{dt} = \\ &= y_1(x)[c_1 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{dt} = \\ &= e^{[-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dt]} \cdot [c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t) \cdot e^{[\int_{x_0}^{t} a_1(\xi)d\xi]} dt \end{aligned}$$

Osservazione.
Si noti che la soluzione particolare per cui $y_0 = b_0$ si ottiene ponendo $c_1 = b_0$. Infatti

$$e^{[-\int_{x_0}^{x_0} a_1(t)dt]} = 1 \text{ e } \int_{x_0}^{x} f(t)dt = 0$$

da cui l'asserto.

13 Eq. diff. lineari del I ordine a coefficienti costanti

Un caso interessante e molto comune nelle applicazioni è quello in cui $a_1(x)$ =costante. In questo caso conviene seguire un procedimento diverso. La nostra equazione è

$$y' + a_1 y = f(x) \tag{338}$$

e la omogenea associata è

$$y' + a_1 y = 0 \tag{339}$$

Cerchiamo una soluzione della (339) che abbia la forma

$$y_1 = e^{\alpha x}$$

Calcoliamo $y_1' = \alpha e^{\alpha x}$ e sostituiamo nella (339)

$$\begin{aligned} \alpha e^{\alpha x} + a_1 e^{\alpha x} &= 0 \\ (\alpha + a_1) e^{\alpha x} &= 0 \\ \alpha + a_1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \alpha &= -a_1 \\ \Rightarrow \quad y_1 &= e^{-a_1 x} \end{aligned}$$

Per la soluzione particolare della 338 si ricorre al metodo generale. La soluzione generale vista in precedenza

$$y = e^{\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dt\right]} \left[c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t)\ e^{\left[\int_{x_0}^{t} a_1(s)ds\right]} dt\right]$$

nel caso a_1 =costante si riduce a

$$y = e^{-a_1 x} \left[c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t)\ e^{a_1 t} dt\right]$$

La difficoltà nel calcolo dell'integrale $\int_{x_0}^{x} f(t)dt\ e^{a_1 t} dt$ dipende da $f(x)$.

Casi particolari $[f(x) = e^{\beta x}, 1, e^{-a_1 x}]$

Se $f(x) = e^{\beta x}$ dalla formula generale, posto $x_0 = 0$, si ha per $a_1 + \beta \neq 0$

$$\int_0^x f(t)\ e^{a_1 t} dt = \int_0^x e^{(\beta + a_1)t} dt = \frac{1}{a_1 + \beta} e^{(\beta + a_1)x} - \frac{1}{a_1 + \beta}$$

$$y = e^{-a_1 x} \left[c_1 + \frac{1}{\beta + a_1} e^{(\beta + a_1)} - \frac{1}{a_1 + \beta} \right]$$

$$\text{posto } c = c_1 - \frac{1}{a_1 + \beta}$$

$$y = ce^{-a_1 x} + \frac{1}{\beta + a_1} e^{\beta x}$$

Allo stesso risultato si perviene cercando una soluzione della $y' + a_1 y = e^{\beta x}$ del tipo $y = ke^{\beta x}$. Infatti posto

$$\begin{aligned} y &= ke^{\beta x} \\ y' &= k\beta e^{x} \\ \Rightarrow \quad k\beta e^{\beta x} + a_1 k e^{\beta x} &= e^{\beta x} \\ k(a_1 + \beta) &= 1 \\ k &= \frac{1}{a_1 + \beta} \end{aligned}$$

L'integrale particolare è quindi

$$\bar{y} = \frac{1}{a_1 + \beta} e^{\beta x}$$

che sommato all'integrale della omogenea associata

$$y = c_1 e^{a_1 x}$$

da

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + \frac{1}{a_1 + \beta} e^{\beta x}$$

Se $\beta = 0$ l'equazione si riduce a

$$y' + a_1 y = 1$$

che ammette l'integrale particolare

$$\bar{y} = \frac{1}{a_1} \quad (y' = 0)$$

da cui

$$y = c_1 e^{a_1 x} + \frac{1}{a_1}$$

Caso $a_1 + \beta_1 = 0$ cioè $\beta = -a_1$.
In questo caso per cercare l'integrale particolare poniamo

$$y = kxe^{-a_1 x}, \qquad y' = ke^{-a_1 x} - ka_1 xe^{-a_1 x}$$

Sostituiamo nella equazione

$$\begin{gathered} y' + a_1 y = e^{-a_1 x} \\ ke^{-a_1 x} - ka_1 xe^{-a_1 x} + ka_1 xe^{-a_1 x} = e^{-a_1 x} \\ \Rightarrow \quad ke^{-a_1 x} = e^{-a_1 x} \Rightarrow k = 1 \end{gathered}$$

L'integrale genererale è quindi

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + xe^{-a_1 x} = (c_1 + x)e^{-a_1 x}$$

Caso particolare $[f(x) = \sin \gamma x, \cos \gamma x]$
Vogliamo adesso cercare l'integrale particolare dell'equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti

$$y' - a_1 y = \sin \gamma x \qquad \gamma \in \Re \tag{340}$$

Poniamo

$$\begin{gathered} \bar{y} = k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x \\ \bar{y}' = \gamma k_1 \cos \gamma x - \gamma k_2 \sin \gamma x \end{gathered}$$

e cerchiamo k_1, k_2. Sostituendo nella 340 si ha

$$\begin{gathered} \gamma k_1 \cos \gamma x - \gamma k_2 \sin \gamma x + a_1 k_1 \sin \gamma x + a_1 k_2 \cos \gamma x = \sin \gamma x \\ \sin \gamma x[a_1 k_1 - \gamma k_2] + \cos \gamma x[\gamma k_1 + a_1 k_2] = \sin \gamma x \end{gathered}$$

che è soddisfatta se

$$\begin{cases} a_1 k_1 - \gamma k_2 & = 1 \\ \gamma k_1 + a_1 k_2 & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a k_1 e k_2 si ottiene, dalla seconda:

$$\begin{gathered} k_2 = -\frac{\gamma}{a_1} k_1 \\ a_1 k_1 + \frac{\gamma^2}{a_1} k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2} \\ \Rightarrow k_2 = \frac{-\gamma}{a_1^2 + \gamma^2} \end{gathered}$$

Da cui l'integrale particolare è dato da

$$\bar{y} = \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2} \sin \gamma x - \frac{\gamma}{a_1^2 + \gamma^2} \cos \gamma x$$

In modo analogo per l'equazione differenziale

$$y' + a_1 \gamma = \cos \gamma x$$

si trova

$$k_1 = \frac{\gamma}{a_1^2 + \gamma^2} \qquad ; \qquad k_2 = \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2}$$
$$\bar{y} = \frac{\gamma}{a_1 + \gamma^2} \sin \gamma x + \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2} \cos \gamma x$$

Da cui le soluzioni generali:

- Equazione $y' + a_1 y = \sin \gamma x$

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + \frac{1}{a_1^2 + \gamma^2} [a_1 \sin \gamma x - \gamma \cos \gamma x]$$

- Equazione $y' + a_1 y = \cos \gamma x$

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + \frac{1}{a_1^2 + \gamma^2} [\gamma \sin \gamma x + a_1 \cos \gamma x]$$

Caso particolare

Siamo ora in grado di scrivere l'integrale particolare dell'equazione

$$y' + a_1 y = A + B e^{\beta x} + C \sin \gamma x + c' \cos \gamma x$$

con $A, B, C, C' \in \Re$ costanti arbitrarie. Infatti per un teorema visto in precedenza l'integrale particolare è dato da:

i) Se $\beta \neq -a_1$

$$\bar{y} = \frac{A}{a_1} + \frac{B}{\beta + a_1} e^{\beta x} + \frac{c}{a_1^2 + \gamma_2} [a_1 \sin \gamma x + \gamma \cos \gamma x] + \frac{c'}{a_1^2 + \gamma^2} [\gamma \sin \gamma x + a_1 \cos \gamma x]$$

ii) Se $\beta = -a_1$

$$\bar{y} = \frac{A}{a_1} + B x e^{\beta x} + \frac{c}{a_1 + \gamma^2} [a_1 \sin \gamma x + \gamma \cos \gamma x] + \frac{c'}{a_1^2 + \gamma^2} [\gamma \sin \gamma x + a_1 \cos \gamma x]$$

14 Eq. diff. del II ordine a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{341}$$

dove $a_1, a_2 \in \Re$. Consideriamo l'equazione omogenea associata

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{342}$$

e cerchiamo una soluzione del tipo

$$y = e^{\alpha x}$$

essendo $y' = \alpha e^{\alpha x}, y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$, sostituendo in 342 si trova

$$e^{\alpha x}(\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2) = 0$$

L'equazione algebrica

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0 \tag{343}$$

si chiama **equazione algebrica caratteristica associata** alla (342).

Come è noto, l'equazione algebrica (343) ammette le soluzioni:

a) due soluzioni reali e distinte $\alpha_1 \neq \alpha_2, \delta > 0$

b) due soluzioni reali e coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2, \delta = 0$

c) nessuna soluzione reale, $\delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$

Esaminiamo i tre casi singolarmente.

a) : $\exists \alpha_1 \neq \alpha_2 \in \Re$
Allora le funzioni

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} \qquad ; \qquad y_2 = e^{\alpha_2 x}$$

sono soluzioni particolari. Per vedere se sono linearmente indipendenti, calcoliamo

$$\begin{aligned} W(x) = \\ y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = \\ e^{\alpha_1 x} \alpha_2 e^{\alpha_2 x} - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x} = \\ (\alpha_1 - \alpha_2) e^{(\alpha_2 + \alpha_2) x} \end{aligned}$$

Essendo $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow W(x) \neq 0 \forall x \in \Re \Rightarrow y_1, y_2$ sono linearmente indipendenti. La soluzione della omegenea associata è quindi

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

b) : $\alpha_1 = \alpha_2$

Allora $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ è una soluzione della equazione differenziale omogenea. Si verifica subito che $y_2 = xe^{\alpha_1 x}$ è anch'essa una soluzione della equazione omogenea. Infatti

$$y_2' = e^{\alpha_1 x} + x\alpha_1 e^{\alpha_1 x} \qquad ; \qquad y_2'' = \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1^2 x e^{\alpha_1 x}$$

da cui

$$\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1^2 x e^{\alpha_1 x} + a_1 e^{\alpha_1 x} + a_1 x \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 x e^{\alpha_1 x} = 0$$
$$x[\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + \alpha_2] + [2\alpha_1 + a_1] = 0$$

Ricordiamo ora che l'equazione caratteristica associata ha una soluzione doppia, quindi

$$\alpha_1^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$$
$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2a}, \delta = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{a_1}{2} \Rightarrow 2\alpha_1 + a_1 = 0$$

il che prova che $y_2 = xe^{\alpha_1 x}$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Vediamo se sono linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \\ &= e^{\alpha_1 x}[e^{\alpha_1 x} + x\alpha_1 e^{\alpha_1 x}] - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} x e^{\alpha_1 x} = \\ &= e^{2\alpha_1 x}[1 + x\alpha_1 - x\alpha_1] = \\ &= e^{2\alpha_1 x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re \end{aligned}$$

Quindi la soluzione della omogenea associata è

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}$$

c) : $\delta < 0$, i.e. non esistono soluzioni reali.

Cerchiamo una soluzione del tipo $y = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ e determiniamo α, β. Si ha:

$$\begin{aligned} y' &= \beta \cos \beta x \cdot e^{\alpha x} + \alpha \sin \beta x \cdot e^{\alpha x} \\ y'' &= \beta[-\beta \sin \beta x e^{\alpha x} + \alpha \cos \beta x \cdot e^{\alpha x}] + \alpha[\beta \cos \beta x \cdot e^{\alpha x} + \alpha \sin \beta x \cdot e^{\alpha x}] = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2) e^{\alpha x} \sin \beta x + (2\alpha\beta) \cos \beta x e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si trova

$$\begin{aligned} &[(\alpha^2 - \beta^2) e^{\alpha x} \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x e^{\alpha x}] + \\ &\qquad [a_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + a_1 \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x] + \\ &\qquad\qquad a_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = 0 \end{aligned}$$

Raggruppando i termini seno e coseno

$$[\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2]e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta(2\alpha_1 + a_1)e^{\alpha x}\cos\beta x = 0$$

Quindi deve essere

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2 & = 0 \\ \beta(2\alpha_1 + a_1) & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -a_1/2 \qquad \beta^2 = a_1^2/4 - a_1^2/2 + a_2 = \frac{4a_2 - a_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = -a_1/2 \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$$

L'altra soluzione si può cercare dello stesso tipo:

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y' &= \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x \\ y'' &= \alpha[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x] - \beta[\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x] = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x e^{\alpha x} - (2\alpha\beta)\sin\beta x e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$(\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x + a_1[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x] + a_2 e^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2)e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta(2\alpha + a_1) = 0$$

che è facile riconoscere essere nelle stesse condizioni prima trovate . Quindi $\alpha = -a_1/2$ e $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$.

Proviamo ora che le due soluzioni trovate sono linearmente indipendenti. Calcoliamo

$$\begin{aligned} W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x] - \\ e^{\alpha x}\cos(\beta x)[\beta e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x] = \\ e^{\alpha x}[\alpha\sin\cdot\cos - \beta\sin^2 - \beta\cos^2 - \alpha\sin\cos] \\ \Rightarrow W(x) = -\beta e^{\alpha x} \neq 0\ \forall x \text{ essendo } \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a1_2} \neq 0 \end{aligned}$$

In sintesi l'integrale della omogena associata è

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

con $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a1_2} \qquad \alpha = -\frac{1}{2}a_1$

Riassumendo
L'integrale dell'equazione $y'' + a_1 y + a_2 y = 0$ è dato da:

$$
\begin{array}{lr}
=c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} & \alpha_1, \alpha_2 = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \quad a_1^2 - 4a_2 > 0 \\
=c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_2 x} & \alpha_1 = -a_1/2 \quad a_1^2 - 4a_2 = 0 \\
=c_1 e^{ux} \cos vx + c_2 e^{ux} \sin vx & u = -\dfrac{a_1}{2}, v = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a - a_1^2}, 4a - a_1^2 > 0
\end{array}
$$

Cerchiamo ora un integrale particolare delle equazione completa $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ nei casi in cui $f(x) = 1, e^{\beta x}, \sin \gamma x, \cos \gamma x$.

1. $f(x) = 1$
   È immediato vedere che $\bar{y} = \frac{1}{a_2}(a_2 \neq 0)$. Infatti $\bar{y}' = 0, \bar{y}'' = 0$ e l'equazione è soddisfatta. Se $a_2 = 0$ allora $\bar{y} = \frac{x}{a_1}(\bar{y}' = \frac{1}{a_1}, \bar{y}'' = 0)$. Se $a_1 = a_2 = 0$ allora $y = cx$ con c arbitrario.

2. $f(x) = e^{\beta x}$
   Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y} = ke^{\beta x}$ con k costante da determinarsi. Si ha

   $$y' = k\beta^{\beta x} \qquad ; \qquad y'' = k\beta^2 e^{\beta x} \text{ e sostituendo nell'equazione}$$
   $$[k\beta^2 + a_1 k\beta + a_2 k]e^{\beta x} = e^{\beta x}$$
   $$\Rightarrow k = [\beta^2 + a_1\beta + a_2]^{-1} \text{ se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 \neq 0$$
   $$\Rightarrow \bar{y} = [\beta^2 + a_1\beta + a_2]^{-1} e^{\beta x}$$

   Se $\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$ allora β è una radice dell'equazione caratteristica. In questo caso la soluzione si cerca del tipo $\bar{y} = kxe^{\beta x}$. Ripetendo il procedimento si trova

   $$k = \frac{1}{2\beta + a_1} \qquad \text{(da fare per esercizio).}$$

   Se infine fosse simultaneamente $\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$ e $2\beta + a_1 = 0$. Cioè se β fosse radice doppia dell'equazione caratteristica, si pone $\bar{y} = kx^2 e^{\beta x}$. Ripetendo il procedimento si trova

   $$k = 1/2 \qquad \text{(fare per esercizio).}$$

   In sintesi

   $$\bar{y} = \begin{cases} [\beta^2 + a_1\beta + a_2]^{-1} e^{\beta x} & \text{se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 \neq 0 \\ (2\beta + a_1)^{-1} e^{\beta x} & \text{se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0, 2\beta + a_1 \neq 0 \\ \frac{1}{2} x^2 e^{\beta x} & \text{se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0, 2\beta + a_1 = 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = \sin \gamma x$
   In questo caso si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y} = k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x$$

dove k_1 e k_2 sono costanti da determinarsi. Calcoliamo $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$ e sostituiamo nell'equazione

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= k_1\gamma \cos \gamma x - k_2\gamma \sin \gamma x \\ \bar{y}'' &= -k_1\gamma^2 \sin \gamma x - k_2\gamma^2 \cos \gamma x \end{aligned}$$

da cui

$$k_1\gamma^2 \sin \gamma x - k_2\gamma^2 \cos \gamma x + a_1[k_1\gamma \cos \gamma x - k_2\gamma \sin \gamma x] + \\ a_2[k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x] = \sin \gamma x$$

Raggruppando rispetto a seno e coseno si ha

$$[-k_1\gamma^2 - a_1k_2\gamma + a_2k_1] \sin \gamma x + [-k_2\gamma^2 + a_1k_1\gamma + a_2k_2] \cos \gamma x = \sin \gamma x$$

che è soddisfatta se

$$\begin{cases} k_1(a_2 - \gamma^2) - k_2a_1 & = 1 \\ k_1a_1\gamma + k_2(a_2 - \gamma^2) & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a k_1, k_2 si ottiene

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{a_2 - \gamma^2}{(a_2 - \gamma^2) + a_1\gamma^2} \\ k_2 &= \frac{-a_1\gamma}{(a_2 - \gamma^2) + a_1\gamma^2} \end{aligned}$$

Queste espressioni perdono senso nel caso in cui sia contemporaneamente $a_1 = 0, a_2 = \gamma^2$. In questo caso l'equazione diviene

$$y'' + \gamma^2 y = \sin \gamma x$$

una soluzione particolare di questa equazione è

$$\bar{y} = -\frac{x}{2\gamma} \cos \gamma x$$

come si può facilmente verificare per sostituzione.

4. Caso $f(x) = \cos \gamma x$
   In questo caso si procede esattamente come nel caso precedente. Si cerca una soluzione del tipo
   $$\bar{y} = k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x$$
   e si trova
   $$k_1 = \frac{a_1 \gamma}{(a_2 - \gamma^2) + a_1 \gamma^2}$$
   $$k_2 = \frac{a_2 - \gamma^2}{(a_2 - \gamma^2) + a_1 \gamma^2}$$
   Nel caso in cui sia contemporaneamente $a_2 = \gamma^2, a_1 = 0$ una soluzione particolare è data da
   $$\bar{y} = \frac{x}{2\gamma} \sin \gamma x$$

5. Caso generale $f(x) = A + Be^{\beta x} + C \sin \gamma x + C' \cos \gamma x$
   Si procede esattamente come già visto per le equazioni di primo grado.

Slide 353

Elementi di algebra matriciale

Per **matrice** $m \times n$ si intende una tabella di mn numeri disposti in m righe ed n colonne. Tale matrice si suole indicare con $\mathcal{A}$. Se a_{ij} è l'elemento della riga i-esima e della colonna j-esima, allora

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (344)$$

Per abbreviare la notazione si scrive anche $\mathcal{A}=(a_{ij})$. In questo caso si suppone che i vari da 1 a m e j vari da 1 a n.

Se accade che $m = n$ si dice che $\mathcal{A}$ è **quadrata**. Gli elementi a_{ij} della matrice che considereremo da qui in avanti saranno numeri reali.

Slide 354

Si chiama **trasposta** di una matrice $\mathcal{A}$ di dimensioni $m \times n$ la matrice $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$ di dimensione $n \times m$ le cui righe sono le colonne di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{345}$$

La matrice $\mathcal{A}$ è detta simmetrica se $\mathcal{A}^{\mathcal{T}} = \mathcal{A}$.
Le matrici simmetriche sono necessariamente quadrate.
Si osservi che $(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}} = \mathcal{A}$ per *qualunque* matrice $\mathcal{A}$.

Slide 355

Molto spesso si deve considerare un vettore n-dimensionale $\mathbf{x}$ come una matrice $n \times 1$ avente n righe ed 1 colonna:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{346}$$

In quanto tale, $\mathbf{x}$ è chiamato **vettore colonna**. $\mathbf{x}^T$ ha una riga ed n colonne per cui è chiamato **vettore riga**:

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{347}$$

Slide 356

Gran parte dell'utilità delle matrici dipende dalla seguente definizione di moltiplicazione fra matrici, che permette di combinare due matrici ottenendone una sola, e in modo da preservare le relazioni lineari.

Se $\mathcal{A}=(a_{ij})$ è una matrice $m \times n$ e $\mathcal{B}=(b_{ij})$ è una matrice $n \times p$, allora il prodotto $\mathcal{AB}$ è la matrice $\mathcal{C}=(c_{ij})$ di dimensione $m \times p$ i cui elementi sono dati da:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p$$

La moltiplicazione matriciale è *associativa*, infatti: $\mathcal{A}(\mathcal{BC})=(\mathcal{AB})\mathcal{C}$. La moltiplicazione matriciale *non* è commutativa.

Il lettore dovrebbe verificare che accade: $(\mathcal{AB})^{\mathcal{T}}=\mathcal{B}^{\mathcal{T}}\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$.

Slide 357

15 Determinanti e matrici inverse

In generale è possibile definire il determinante $\det(\mathcal{A})$ per una qualunque matrice quadrata. Per una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ si indica il suo determinante come:

$$\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{348}$$

Non cercheremo di dare una definizione formale di determinante, ma noteremo che un determinante $n \times n$ può essere sviluppato nei minori secondo qualunque sua riga o colonna, e quindi può essere espresso come somma di multipli di determinanti $(n-1) \times (n-1)$.

Slide 358

Continuando questo processo possiamo alla fine ricondurci al calcolo di (forse parecchi) determinanti 2 × 2 o 3 × 3, di cui ora daremo la definizione.

Il determinante di una matrice $\mathcal{A}$ di dimensioni 2 × 2 risulta essere così definito:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{349}$$

Analogamente, un determinante 3 × 3 risulta essere così definito:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \tag{350}$$

Slide 359

Si osservi ora che possiamo ricondurі al calcolo interattivo di determinanti di ordine 2 raccogliendo a fattor comune gli elementi della prima riga:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \tag{351}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{352}$$

I determinanti 2 × 2 così ottenuti vengono chiamati *minori* del determinante 3 × 3. Questo processo è chiamato *sviluppo* del determinante 3 × 3 nei minori secondo la prima riga.

Lo sviluppo nei minori può essere effettuato secondo qualunque riga o colonna.

Slide 360

Si noti che compare un segno “-” in ogni termine il cui minore è ottenuto eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima, quando $i + j$ è un numero dispari. Ad esempio possiamo sviluppare il determinante precedente in minori lungo la seconda colonna nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \tag{353}$$

Naturalmente questo valore coincide con quello ottenuto in precedenza.

Slide 361

Per i determinanti è possibile enunciare le seguenti proprietà:

- se due righe di un determinante si scambiano fra loro, il determinante cambia di segno;
- se due righe di un determinante sono uguali il determinante ha valore nullo;
- se un multiplo di una riga è sommato a un’altra riga, il determinante rimane inalterato.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due matrici $n \times n$ allora det($\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$)=det($\mathcal{A}$).
Inoltre det($\mathcal{AB}$)=det($\mathcal{A}$) det($\mathcal{B}$).

Si dice che la matrice quadrata $\mathcal{A}$ è **singolare** se det($\mathcal{A}$)=0.
Se det($\mathcal{A}$) $\neq 0$ si dice che $\mathcal{A}$ è **non singolare**.

Slide 362

La matrice identità $n \times n$ è la matrice:

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{354}$$

Ovviamente $\mathcal{I}$ commuta con ogni matrice $n \times n$: $\mathcal{IA}$=$\mathcal{AI}$=$\mathcal{A}$. Inoltre accade che det($\mathcal{I}$)=1.

L'**inversa** di una matrice quadrata $\mathcal{A}$ *non singolare* è una matrice quadrata non singolare A^{-1} che soddisfa:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I} \tag{355}$$

Slide 363

Ogni matrice quadrata non singolare $\mathcal{A}$ ha un'inversa $\mathcal{A}^{-1}$ *unica.*

Inoltre l'inversa soddisfa a:

$$\det(\mathcal{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathcal{A})} \tag{356}$$

$$(\mathcal{A}^{-1})^T = (\mathcal{A}^T)^{-1} \tag{357}$$

Slide 364

16 Trasformazioni lineari

Una funzione F il cui dominio è lo spazio m-dimensionale $\mathbb{R}^m$ e la cui immagine è contenuta nello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ è chiamata **trasformazione lineare** da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ se soddisfa la condizione

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

per tutti i punti x e y di $\mathbb{R}^m$ e tutti i numeri reali λ e μ. A tale trasformazione lineare F corrisponde una matrice $\mathcal{F}$ di dimensione $n \times m$ tale che, per tutti $x \in \mathbb{R}^m$, si abbia

$$F(x) = \mathcal{F}x,$$

Slide 365

ovvero, espresso in termini delle componenti di x,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{358}$$

Si dice che $\mathcal{F}$ è una **rappresentazione matriciale** della trasformazione lineare F.

Se $m = n$, per cui F trasforma $\mathbb{R}^m$ in se stesso, allora $\mathcal{F}$ è una matrice quadrata.

In questo caso $\mathcal{F}$ è non singolare se e solo se F è biunivoca e ha l'intero $\mathbb{R}^m$ come immagine.

Slide 366

La composizione di trasformazioni lineari è ancora una trasformazione lineare e quindi avrà una rappresentazione matriciale.

La motivazione reale su cui si basa la definizione di moltiplicazione matriciale è che la rappresentazione matriciale di una *composizione* di trasformazioni lineari è il *prodotto* delle matrici individuali che rappresentano le trasformazioni della composizione.

Se F è una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{F}$ di dimensione $n \times m$, e se G è una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{G}$ di dimensione $p \times n$, allora la composizione $G \circ F(x_1, x_2, \dots, x_m) = G(F(x_1, x_2, \dots, x_m))$ è essa stessa una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^p$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{G}\mathcal{F}$ di dimensione $p \times m$.

Risulta cioè:

$$G(F(x)) = \mathcal{G}\mathcal{F}x$$

Slide 367

17 Equazioni lineari

Un sistema di n equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots\ a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots\ a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{359}$$

può essere scritto in modo compatto come una singola equazione matriciale

$$\mathcal{A} = \mathbf{b},$$

Slide 368

dove

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{360}$$

Confrontiamo l'equazione $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con l'equazione $ax = b$ per una sola incognita x. $ax = b$ ha l'unica soluzione $x = a^{-1}b$ purché $a \neq 0$. Analogamente il sistema lineare $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha un'unica soluzione data da

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{b}$$

a condizione che $\mathcal{A}$ sia non singolare.

Slide 369

Per vedere questo, si moltiplicano a sinistra per $\mathcal{A}^{-1}$ entrambi i membri dell'equazione $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Se $\mathcal{A}$ è singolare, allora il sistema $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ può avere può non avere una soluzione, a seconda del vettore $\mathbf{b}$, e se una soluzione esiste, allora non sarà unica.

Consideriamo il caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (vettore nullo).

Allora qualunque vettore $\mathbf{x}$ perpendicolare a tutte le righe di $\mathcal{A}$ soddisferà il sistema. Siccome le righe di $\mathcal{A}$ giacciono in uno spazio di dimensione minore di n (poiché il det($\mathcal{A}$)=0) vi sarà almeno una retta di tali vettori $\mathbf{x}$. Quindi la soluzione di $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ non è unica se $\mathcal{A}$ è singolare. Lo stesso deve valere per il sistema $\mathcal{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$: esisteranno vettori $\mathbf{y}$ non nulli che soddisfano l'equazione se $\mathcal{A}$ è singolare. Ma allora, se is sistema $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha qualche soluzione $\mathbf{x}$, dobbiamo avere:

$$(\mathbf{y} \bullet \mathbf{b}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{y}^T\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T\mathcal{A}^T\mathbf{y})^T = (\mathbf{x}^T\mathbf{0})^T = (0)$$

Slide 370

.

Quindi $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ può avere soluzioni solo per quei vettori $\mathbf{b}$ che sono perpendicolari a *ogni soluzione* $\mathbf{y}$ di $\mathcal{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Enunciamo ora, per concludere questo capitolo, un risultato di una certa importanza nella risoluzione dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

Regola di Cramer. Sia $\mathcal{A}$ una matrice non singolare $n \times n$. Allora la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ha componenti date da

$$x_1 = \frac{\det(\mathcal{A}_1)}{\det(\mathcal{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathcal{A}_2)}{\det(\mathcal{A})}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(\mathcal{A}_n)}{\det(\mathcal{A})},$$

dove $\mathcal{A}_j$ è la matrice $\mathcal{A}$ in cui la j-esima colonna è stata sostituita dal vettore colonna $\mathbf{b}$.

Slide 371

Applicazioni alle Scienze Farmaceutiche

Sebbene le Scienze della Vita sembrino molto lontane dal formalismo astratto delle scienze matematiche molti fenomeni biologici sono rappresentabili con *semplici leggi* espresse con il linguaggio della matematica.

Scopo del presente capitolo é mostrare alcune applicazioni concrete in modo esaltare la motivazione dello studio e giustificare gli sforzi effettuati per studiare i capitoli precedenti.

Molti fenomeni biologici e farmacologici sono rappresentati da **leggi di crescita**, si pensi ad esempio alla crescita della massa tumorale, o **leggi di decadimento**, come, ad esempio, la concentrazione del farmaco negli organi.

Per questo motivo richiamiamo le funzioni che *tipicamente* rappresentano questi andamenti: la funzione esponenziale e la funzione logaritmica.

Slide 372

Funzioni Esponenziale e Logaritmo

18 Funzione Esponenziale

Una funzione esponenziale é una funzione della forma

$$f(x) = a^x \qquad a \ = \ costante \ > \ 0 \tag{361}$$

[**Nota**] Si noti di non confondere la funzione esponenziale con la funzione potenza $g(x) = x^a$ dove la variabile indipendente é la base e non l'esponente della potenza.

Slide 373

Se $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ ovvero $x \in \mathbb{Q}$ il significato della funzione esponenziale é ben noto. Lo richiamiamo per facilitá:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^n &= \Pi_{i=1}^n a \qquad n \in \mathbb{N} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \qquad n \in \mathbb{N} \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} \qquad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ in generale, cioé x é un numero reale, ad es. $x = \pi$, il significato di a^x non é una nozione elementare la cui definizione esatta esula dai nostri obiettivi.

Tuttavia osserviamo che abbiamo detto che $f(x) = a^x$ é una funzione continua e differenziabile. Affinché ció accada occorre tuttavia che il dominio di $f(x) = a^x$ sia tutto composto di punti di accumulazione. Ora, se x é un numero reale *puro* (i.e $x \notin \mathbb{N}$, $x \notin \mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{Q}$ allora si puó scrivere

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r \qquad r \in \mathbb{Q}. \tag{362}$$

cioé il limite cui tende la funzione a^r quando r temde ad x.

Osservazione - Si noti che la scrittura ha senso in quanto x é un punto di accumulazione per l'insieme $\mathbb{Q}$ anche se $x \notin \mathbb{Q}$.

Le funzioni esponenziali soddisfano alcune identitá note come

Leggi degli esponenti - Se $a > 0$ e $b > 0$, allora $\forall x, r \in \mathbb{R}$ si ha:

$$i)\ a^0 = 1 \qquad ii)\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad iii)\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$iv)\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad v)\ (a^x)^y = a^{xy} \qquad vi)\ (ab)^x = a^x b^x$$

Inoltre

$$\text{Se } a > 1 \ \Rightarrow\ \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\text{Se } 0 < a < 1 \ \Rightarrow\ \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

18.1 Funzione Logaritmo

Se $a > 0$ e $a \neq 1$ la funzione $f(x) = a^x$ é monotona, cioé biunivoca. Essa é quindi invertibile. La sua funzione inversa é chiamata funzione logaritma.

Slide 376

Definizione Funzione Logaritmica o logaritmo.
Se $a > 0$ ed $a \neq 1$ la funzione $y = \log_a x$, chiamata **logaritmo di x in base a** é la funzione inversa di a^x, cioé

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y \quad (a > 0, a \neq 1) \tag{363}$$

Si noti che $x \in]0, \infty)$ mentre $y \in \mathbb{R}$. Inoltre valgono le proprietá di composizione delle funzioni inverse:

$$\log_a(a^x) \;=\; x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a^{\log_a x} \;=\; x \quad \forall x > 0 \tag{364}$$

Slide 377

Anche per i logaritmi valgono alcune identitá fondamentali note come

Leggi dei logaritmi - $\forall a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ si ha:

$$\begin{array}{rlrl} i) & \log_a 1 \;=\; 0 & ii) & \log_a(xy) \;=\; \log_a x + \log_a y \\ iii) & \log_a(\frac{1}{x}) \;=\; -\log_a x & iv) & \log_a(\frac{x}{y}) \;=\; \log_a x - \log_a y \\ v) & \log_a(x^y) \;=\; y \log_a x & vi) & \log_a x \;=\; \frac{\log_b}{\log_b a} \end{array}$$

Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{Se } a > 1 \;\Rightarrow & \lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \\ \text{Se } 0 < a < 1 \;\Rightarrow & \lim_{x \to 0+} \log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \end{array}$$

Slide 378

19 Il numero di Napier

Si consideri la successione $s_n = (1 + 1/n)^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Questa successione é crescente ma limitata. Essa ammette quindi un limite finito.
Si puøprovare che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$s_1 = 2 \ < \ \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n \ < \ 3 \tag{365}$$

Il numero di Napier o Neper (John Neper 1550-1617), indicato con la lettera e é il limite di s_n:

$$e = \lim_{n\to\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n = 2,718281828459045\ldots \tag{366}$$

Il numero e é un numero reale; essendo $e > 0$ allora puó essere utilizzato come base di una funzione esponenziale. Essendo poi anche $e \neq 1$ puó anche essere utilizzato come base di un logaritmo.

Slide 379

20 Logaritmo Naturale ed esponenziale

Se $a = e$ (numero di Neper) allora la funzione esponenziale e la funzione logaritmica viste in precedenza divengono l'esponenziale e^x ed il logaritmo naturale $\ln x$. Per queste funzioni valgono, ovviamemente, tutte le proprietá, identitá e leggi viste in precedenza. Ricordiamo poi che:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x; \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}; \qquad \int \frac{1}{x} = \ln \mid x \mid + C$$

20.1 Proprietá di crescita di e^x e $\ln x$

Slide 380

Sappiamo sia e^x che $\ln x$ divergono quando $x \to \infty$ e che entrambe le funzioni sono monotone crescenti. Ci chiediamo ora quale delle due presenta la velocitá di crescita maggiore.

La risposta puó ottenersi facilmente osservando che e^x é un infinito di ordine superiore rispetto ax x. Infatti $\lim_{x\to\infty} (e^x/x) = \infty$ come si puó facilemente provare con le ragola dell'Hospital. Questo prova che la crescit di e^x é *superlineare* cioé si trova sempre sopra la retta $y = x$.

Se adesso ricordiamo che $\ln x$ é la funzione inversa di e^x ed il grafico della funzione inversa si ottiene come immagine speculare rispetto alla retta $y = x$ é immediato dedurre che $\ln x$ é *sublineare*. Conseguentemente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0. \tag{367}$$

Slide 381

Inoltre é facile rendersi conto che, se $a > 0$, allora la funzione e^x é anche *superpolinomiale*, cioé $\forall a$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad \lim_{x\to\infty} \mid x \mid^a e^x = 0 \tag{368}$$

Analogamente é immediato mostrare che il logaritmo é *subpolinomiale*, cioé:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0. \quad \forall a > 0. \tag{369}$$

Modelli di crescita/decadimento

21 Crescita Esponenziale e Modelli di decadimento

Slide 382

Molti fenomeni naturali riguardano grandezze che aumentano o diminuiscono con rapiditá proporzinale al loro valore.

Questi fenomeni possono essere descritti matematicamente come segue:
Sia $y(t)$ il valore di una grandezza che varia con rapiditá proporzionale al suo valore. Essa é allora descritta dalla equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{370}$$

Slide 383

Riscritta nella forma $y' - ky = 0$ si riconosce che questa é una equazione differenziale lineare del I^0 ordine a variabili separabili.

La sua soluzione generale é

$$y(t) = Ce^{kt} \qquad C \ = \ cost. \tag{371}$$

É facile riconoscere che il fenomeno rappresenta una crescita se $k > 0$, rappresenta invece un decadimento se $k < 0$.

Al variare del parametro C la (371) rappresenta una famiglia di curve esponenziali.

Per individuare quella che interessa in modo univoco occorre fornire un dato ulteriore. Fissata una origine dei tempi, $t = 0$, sia $y(t = 0) = y_0$ il valore assunto dalla quantitá y al tempo $t = 0$, allora

$$y(0) = y_0 = C \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{kt} \tag{372}$$

fornisce la soluzione unica cercata.

Slide 384

21.1 Tempo di dimezzamento e raddoppiamento

La crescita esponenziale é caratterizzata da un tempo di raddoppiamento o dimezzamento (*half-life*) costante.

Supponiamo il fenomeno sia caratterizzato da una crescita ($k > 0$).

Detto T_R il tempo in cui la variabile y raddoppia si ha

$$y(t + T_R) = y_0 e^{k(t+T_R)} = 2y(t)$$

riscrivendo

$$\begin{aligned} y_0 e^{kt} e^{kT_R} &= 2y_0 e^{kt} \\ e^{kT_R} &= 2 \quad \Rightarrow \quad T_R = \frac{1}{k} \ln 2 \end{aligned}$$

Slide 385

Analogamente se il fenomeno é caratterizzato da un decadimento ($k < 0$) cerchiamo il tempo di dimezzamento T_D. Si ha

$$y(t + T_D) = y_0 e^{k(t+T_D)} = \frac{1}{2} y(t)$$

riscrivendo

$$\begin{aligned} y_0 e^{kt} e^{kT_D} &= \frac{1}{2} y_0 e^{kt} \\ e^{kT_D} &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T_D = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{k} \ln 2 \end{aligned}$$

Slide 386

21.2 Crescita di organismi

- **Esempio 21.1** *Nelle prime settimane dopo la nascita, un neonato aumenta in peso con una rapiditá proporzionale al peso. Carlo, un bel maschietto, pesava 4 kg al momento della nascita e 4.4 kg dopo due settimane. Possiamo stimare quanto pesava 5 giorni dopo la nascita ?*

Soluzione
Indico con $y(t)$ *il peso del neonato (in kg) al tempo* t *(in giorni).*
L'istante $t = 0$ *corrisponde al momento della nascita.*
I dati del problema sono: $y(0) = 4$; $y(14) = 4.4$.
L'incognita é $y(5)$.

La legge del fenomeno é $y(t) = y(0)e^{kt}$.

Slide 387

Impongo i dati e trovo prima k

$$y(14) = y(0)e^{14k} \Rightarrow k = \frac{1}{14}\ln\frac{y(14)}{y(0)} = \frac{1}{14}\ln(1.1)$$

quind calcolo $y(5)$

$$y(5) = y(0)e^{5k} = 4e^{5\frac{1}{14}\ln(1.1)} = 4(1.1)^{5/14}$$

Calcolo approssimato del risultato.
Osservo che

$$5/14 = 5/15 + \delta \ \ \text{con } \delta = 1/(15 \cdot 14) \Rightarrow \frac{5}{14} \simeq \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$y(5) = 4\sqrt[3]{1.1}$$

21.3 Colture biologiche

Slide 388

- **Esempio 21.2** *Una certa coltura di cellule cresce con rapiditá proporzionale al numero di cellule presenti. Se la coltura contiene inizialmente* 500 *cellule e dopo 24 ore ne contiene* 800, *quante cellule vi saranno dopo altre 12 ore ?*

Soluzione *Sia*

- $y(t)$ *il numero di cellule al tempo t misurato in ore;*
- $y(t = 0) = 500$*;*
- $y(t = 24) = 800$.

Il fenomeno é regolato dalla legge

$$y'(t) = ky(t), \text{ con } y_0 = 500.$$

Slide 389

Per prima cosa dobbiamo trovare il valore di k.

$$y(t) = 500e^{kt}$$

essendo poi

$$\begin{aligned} y(24) &= 800 = 500e^{k\cdot 24} \\ \Rightarrow\ e^{k\cdot 24} &= 8/5 \ \Rightarrow\ 24k = \ln(8/5) \\ \Rightarrow\ k &= (1/24)\ln(8/5) = (1/24)\ln(1.6) \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di calcolare il numero di cellule al tempo $t = 36$ *ore.*

$$\begin{aligned} y(t = 36) &= 500e^{k\cdot 36} = 500e^{\frac{36}{24}\ln(1.6)} = \\ &= 5\cdot 10^2 e^{\frac{3}{2}\ln(1.6)} = 5\cdot 10^2 e^{\ln(1.6)^{3/2}} = \\ &= 5\cdot 10^2(1.6)^{3/2} = [5\sqrt{1.6^3}]10^2 \simeq 10^{12}. \end{aligned}$$

Slide 390

• **Esempio 21.3** *I batteri di una certa coltura crescono con rapiditá proporzionale alla loro quantitá. Se inizialmente sono presenti* 100 *batteri ed il loro numero raddoppia in un'ora, quanti batteri saranno presenti dopo un tempo ulteriore di* 1, 5 *ore ?*

Soluzione

Detto $y(t)$ il numero di batteri presenti al tempo t misurato in ore allora la legge di crescita é

$$y(t) = y_0 e^{kt}, \quad con\, y_0 = 1000 \tag{373}$$

Il tempo di raddoppiamento é $T_R = (1/k) \ln 2$.
Quindi, se $T_R = 1$ allora $k = \ln 2$.
Detto $t_2 = 2.5$ ore, si ha

$$y(t_2) = y_0\ e^{k \cdot 2.5} = 100\ e^{2.5 \ln 2} = 100\ 2^{2.5} =$$
$$= 100\ 2^2\ 2^{1/2} = 400\ \sqrt{2} \simeq 565$$

Slide 391

• **Esempio 21.4** *In una coltura di batteri, la cui crescita é proporzionale al loro numero, il numero di batteri triplica ogni 3 giorni.*

Se alla fine di 7 giorni di coltura sono presenti 10 *milioni di batteri, quanti ve ne erano inizialmente ?*

Soluzione

Indico con $y(t)$ il numero di batteri presenti al tempo t. Le unitá sono $y(t)$ = [milioni di batteri] e t = [giorni].
La legge del fenomeno é

$$y(t) = y_0\ e^{kt} \ \ y_0 \ \ incognito$$

I dati a disposizione sono: $y(3) = 3y_0$ e $y(7) = 10$.

Slide 392

Allora:

1.

$$y(3) = y_0 e^{3k} \;\Rightarrow\; 3k = \ln \frac{y(3)}{y_0} = \ln 3 \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{3} \ln 3$$

2.

$$y(7) = y_0 e^{k7} \;\Rightarrow\; y_0 = y(7) e^{-7k} = y(7) e^{-\frac{7}{3} \ln 3} \;\Rightarrow$$

$$y_0 = 10 e^{\ln 3^{3/7}} = 10\ 3^{3/7} = 10/(3^2 \sqrt[3]{3}) = (10/27) \sqrt[3]{3} \simeq 0.0137$$

Slide 393

FARMCO-CINETICA

21.4 Assorbimento di un farmaco

Mostriamo ora come le tecniche affrontate sono utili per lo studio di quella branca della scienza farmaceutica nota come **Farmaco Cinetica**.

Ci limiteremo a quello che é conosciuto come il modello mono-compartimentimentale e ad una trattazione volta a mettere in evidenza l'utilizzo delle tecniche senza prestare troppa attenzione agli aspetti chimico-farmaceutici che verranno approfonditi in uno specifico corso.

Slide 394

21.4.1 Somministrazione per pillole

Inizieremo con un esempio che considera la somministrazione di un farmaco in dosi discrete, del tipo pillole.
É noto che la quantitá di farmaco nell'organismo diminuisce con una rapiditá proporzionale alla concentrazione residua. Detta $x(t)$ la quantitá di farmaco l'equazione che regola questo processo é

$$\frac{dx}{dt} = -K_e\, x \tag{374}$$

Si riconosce che questa é una equazione differenziale a variabili separabili la cui soluzione generale é

$$x(t) = Ce^{-K_e\, t} \quad C \text{ costante da determinarsi} \tag{375}$$

Slide 395

• **Esempio 21.5** *La concentrazione del farmaco **A** nell'organismo ha un tempo di dimezzamento di 12 ore. É noto che l'effetto del farmaco é nullo se la quantitá scende al sotto 500 **u** (u = unitá di farmaco) e che il farmaco é tossico se si supera una concentrazione di 1000 **u**. Il farmaco é disponibile in dosi da 500 **u**.*

*La terapia inizia con una dose iniziale ($t_1 = 0$) di due compresse da 500 **u**. Determinare i tempi t_2, t_3, $\ldots t_n$ delle somministrazioni successive in modo che la concentrazione non scenda mai sotto le 600 u e non superi mai il limite di tossicitá.*

Soluzione

Sappiamo che il tempo di dimezzamento é $T_D = -(1/k)\ln 2$.
Essendo $T_D = 12$ h ne segue

$$k = -\frac{T_D}{\ln 2} = -\frac{12}{\ln 2} < 0 \qquad (376)$$

Noto k calcolo il tempo t_2 della seconda amministrazione.

Slide 396

Indico con $y(t)$ la concentrazione di farmaco al tempo t.

*Per non superare il limite di tossicitá questa deve esser fatta quando la concentrazione é 600 **u**,*

$$y(t_2) = y_0 e^{-kt_2} \;\Rightarrow\; 600 = 1000 e^{-kt_2}$$

$$\Rightarrow\; t_2 = \frac{1}{k}\ln\frac{6}{10}$$

Dopo la seconda iniezione ($t = t_2$) la concentrazione é $600 + 500 = 1100$ ***u**. Il tempo t_3 per la somministrazione successiva si ottiene immediatamente se si considera come nuovo istante iniziale t_2. Detto $t_3' = t_3 - t_2$ si ha:*

$$y(t_3') = y(t_2)e^{kt_3'} \;\Rightarrow\; 600 = 1000 e^{kt_3'}$$

$$\Rightarrow\; t_3' = \frac{1}{k}\ln\frac{6}{11} \;\Rightarrow\; t_3 = t_2 + \frac{1}{k}\ln\frac{6}{11}$$

Slide 397

Gli altri tempi $t_4, t_5, \ldots, t_n$ *si calcolano allo stesso modo. Si ha:*

$$t_4 = t_3 + \frac{1}{k} \ln \frac{6}{11} = t_2 + 2 \cdot \frac{1}{k} \ln \frac{6}{11}$$

Quindi in generale

$$t_n = \frac{1}{k} \ln \frac{6}{10} + (n-2) \cdot \frac{1}{k} \ln \frac{6}{11}$$

Slide 398

.

21.4.2 Somministrazione per fleboclisi

Affrontiamo adesso il caso di somministrazione per fleboclisi. Sappiamo, anche se molti di voi non lo avranno mai provato, cosa si intende per somministrazione per fleboclisi.

Una certa quantitá di medicinale viene immessa in una soluzione neutra (tipicamente 250 0 500 grammi di soluzione fisiologica) e questa viene introdotta nel corpo del paziente per via endovena.

A differenza della somministrazione per capsule, iniezioni intramuscolari o endovene, dove l'immissione del prodotto puó considerarsi istantanea, nella amministrazione per via endovena una certa quantitá di medicinale viene introdotta nel paziente in un tempo finito che puó essere controlato dall'operatore sanitario.

Il vantaggio di questa modalitá di somministrazione é quella di evitare forte concentrazioni di farmaco nel paziente.

Questa modalitá di somministrazione del farmaco puó essere utile per evitare di sovraccaricare l'organismo con dosi eccessive di farmaco.

Per prima cosa scriviamo l'equazione differenziale che regola il processo (esempio 1) e ne troviamo poi la soluzione.

Slide 401

- **Esempio 21.6** *Una sostanza medicinale é introdotta nella circolazione del sangue per via endovenosa. La flebo é regolata in modo da immettere in vena una quantitá costante* ***a*** *[nelle unitá scelte] di medicinale con flusso costante nell'unitá di tempo.*

Nel paziente il medicinale viene assorbito ed eliminato dal fegato con un tasso proporzionale alla concentrazione del medicinale nel sangue. Scrivere l'equazione che regola il fenomeno.

Soluzione

Indichiamo con $x(t)$ *la concentrazione di medicinale nel sangue. Fissiamo come istante iniziale (t=0) quello in cui inizia la somministrazione mediante la flebo.*

La variazione della concentrazione nel sangue, $\frac{dx(t)}{dt}$ *é dovuta a due effetti:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = + \boldsymbol{IN} \text{ (medicinale immesso in circolo)}$$
$$- \boldsymbol{OUT} \text{ (medicinale assorbito ed eliminato)}$$

Slide 402

Per effetto del primo termine dx/dt *cresce in funzione del medicinale immesso in circlo al tempo* t

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^{IN} = A(t) \;\; \textit{nel nostro esempio } A(t) = a = const.$$

Per effetto del secondo termine la concentrazione del medicinale decresce in funzione della concentrazione presente, cioé

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^{OUT} = B(t)\;x(t) \;\; \textit{nel nostro esempio } B(t) = b = const.$$

Quindi l'equazione cercata é:

$$\frac{dx}{dt} = a - b\;x$$

L'assorbimento di un farmaco immesso in circolo mediante una fleboclisi é quindi descritto da una semplice equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti.

Slide 403

- **Esempio 21.7** *La quantitá $y(t)$ evolve nel tempo secondo la legge*

$$y'(t) = a - by(t)$$

Noto il valore al tempo iniziale $y(t=0) = y_0$ determinare la funzione $y(t)$ che permette di conoscere y al generico istante t.

Soluzione

Riscrivo la legge nella forma $y' + by = a$. Questa é una equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti non omogenea.

1) Considero la omogenea associata $y' + by = 0$ (equaz. a variabili separabili) la cui soluzione é

$$\frac{y'}{y} = -b \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -b\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -b\,dt \;\Rightarrow\; \ln y(t) = -b\,t + C$$

$$y(t) = C_1 e^{-bt} \qquad C_1 \;=\; costante$$

Una soluzione particolare della $y' + by = a$ é $\bar{y} = a/b =$ costante.

Slide 404

Quindi

$$y(t) = a/b + C_1 e^{-bt}$$

Impongo la condizione iniziale

$$y(t=0) = y_0 \;\Rightarrow\; y_0 = a/b + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = y_0 - a/b$$

Da cui la soluzione cercata é

$$y(t) = y_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$$

Si osservi che, indipendentemente dal valore iniziale y_0, la soluzione tende ad un limite asintotico che dipende solo dal rapporto a/b. Infatti:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a}{b}$$

Cinetica Chimica

22 Velocitá di una reazione Chimica

Slide 405

Supponiamo che una molecola di reagente **A** si combini con una molecola di reagente **B** per formare una singola molecola del prodotto **C**. e che inversamente, una molecola di **C** possa dissociarsi nelle molecole di **A** e **B**

La reazione bidirezionale viene rappresentata dalla formula

$$A + B \leftrightarrows C \tag{377}$$

La direzione e la rapiditá di tale reazione dipende dalle concentrazioni di **A**, **B** e **C** indicate respettivamente con [A], [B] e [C] e misurate in moli (1 mole $\simeq$ 6.023 10^{23} molecole.

Slide 406

Secondo la **legge di azione di massa**, la velocitá di produzione di **C** a partire da **A** e **B** é proporzionale al prodotto delle concentrazioni di **A** e **B**,

$$\text{velocitá di produzione di } \mathbf{C}\text{: } \frac{d[C]}{dt} = k_1[A][B] \tag{378}$$

Analogamente, la velocitá alla quale **C** si dissocia é l'opposto della velocitá con cui **A**, oppure **B**, é prodotto da **C**, quindi é proporzionale alla concentrazione di **C**:

$$\text{velocitá di dissociazione di } \mathbf{C}\text{: } \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = k_2[C] \tag{379}$$

Quindi la velocitá con cui [C] cambia nella soluzione é data dalla somma di (378) e (379):

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1[A][B] - k_2[C] \tag{380}$$

La reazione sará in equilibrio se $d[C]/dt = 0$, cioé se la quantitá prodotta di **C** é eguale a quella dissociata, i.e.

$$\frac{[A][B]}{[C]} = \frac{k_2}{k_1} = costante \tag{381}$$

Casi limiti

Slide 407

Se $k_2 \ll k_1$, o $k_2 \simeq 0$, ovvero **C** é eliminato dalla soluzione come precipitato allora la reazione continuerá sino all'esaurimenti di **A** o **B**. Si dirá allora che la reazione é completa.

Per calcolare il tempo di in cui la reazione si esaurisce occorre conoscere la proporzione nella quale **A** e **B** si uniscono per formare una mole di C, le concentrazioni inziali di [A] e [B] ed, ovviamente, le costanti k_1 e k_2.

22.1 Reazione non reversibile

Consideriamo il caso in cui la reazione sia non reversibile e proceda sino all'esaurimento dei costituenti **A** e **B**.

Supponiamo di fissare l'istante iniziale, $t = 0$, all'istante in cui si mescolano **A** e **B**, con le seguenti quantitá:

Slide 408

a molecole/cc del costituente **A**

b molecole/cc del costituente **B**

Indichiamo con $x(t)$ il numero di molecole di **C** presenti all'istante t e supponiamo, per sola semplicitá, che **C** sai composto da una molecola di **A** ed una molecola di **B**.
$\Rightarrow$ la concentrazione di **A** al tempo t é data da $a - x$,
$\Rightarrow$ la concentrazione di **B** é data da $b - x$.

Slide 409

Il fenomeno é regolato dall'equazione:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(a-x)(b-x) \tag{382}$$

che é una equazione differenziale <u>*non lineare*</u> ma **a variabili separabili**.

In quanto segue discuteremo separatamente i due casi $a \neq b$ e $a = b$.

Slide 410

Caso $a \neq b$ -
Osserviamo innanzitutto che sará sempre $(a-x)(b-x) \neq 0$ per cui

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int kdt = kt + Cost$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x})$$

da cui

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{a-x} - \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{b-x}$$

essendo in generale

$$\int \frac{dx}{(\alpha-x)} = -\ln \mid \alpha - x \mid$$

Slide 411

Allora anche per $\alpha = a$ e $\alpha = b$.

Inoltre essendo $\forall x$, $a - x > 0$ e $b - x > 0$, si ha

$$\frac{1}{b-a}\big(-\ln(a-x) + \ln(b-x)\big) = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{b-x}{a-x} = (b-a)kt + (b-a)\cdot Cost$$

Per calcolare la costante Cost impongo che al tempo $t = 0$ non vi sia (ragionevolmente) composto

$$\ln\frac{b}{a} = (b-a)\cdot Cost$$

Slide 412

Quindi

$$\begin{aligned}
\ln\frac{b-x}{a-x} &= (b-a)kt + \ln\frac{b}{a} \\
\ln\frac{b-x}{a-x} - \ln\frac{b}{a} &= (b-a)kt \\
\ln\Big(\frac{a}{b}\cdot\frac{b-x}{a-x}\Big) &= (b-a)kt \\
\frac{a}{b}\Big(\frac{b-x}{a-x}\Big) &= e^{(b-a)kt} \\
\frac{b-x}{a-x} &= \frac{b}{a}e^{(b-a)kt}
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto ad x si trova

$$x(t) = \frac{ab[e^{(b-a)kt} - 1]}{be^{(b-a)kt} - a}$$

Slide 413

Caso $a = b$ -
Se $a = b = \alpha$ allora il fenomeno é descritto dall'equazione

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)^2$$

Questa é una equazione differenziale non lineare a variabili separabili:

$$\frac{dx}{(\alpha - x)^2} = kdt$$
$$\int \frac{dx}{(\alpha - x)^2} = kt + Const$$

Con il cambio di variabile $y = (\alpha - x)$ e $dx = -dy$ si ottiene

Slide 414

$$\frac{1}{\alpha - x} = kt + Const$$
$$\alpha - x = \frac{1}{kt + Const}$$
$$x(t) = \alpha - \frac{1}{kt + Const}$$

Imponendo la condizione iniziale $x(t = 0) = 0 \Rightarrow Const = 1/\alpha$; quindi

$$x(t) = \alpha - \frac{1}{kt + 1/\alpha}$$
$$\frac{\alpha^2 kt}{\alpha kt + 1}$$

Si noti che come é da aspettarsi alla fine del processo $[C] = \alpha$, infatti

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \alpha$$

Slide 415

23 Concentrazione di una soluzione

Consideriamo ora due esempi del calcolo della concentrazione di una soluzione.

- **Esempio 23.1** *Lo zucchero si scioglie nell'acqua con una rapiditá proporzionale alla sua quantitá non ancora sciolta. Se inizialmente sono presenti* 50 *kg. di zucchero e se dopo* 5 *ore ne rimangono solo* 20 *kg, quanto tempo sará necessario affinché si sia sciolto il* 90% *dello zucchero ?*

Soluzione
Indico con $y(t)$ la quantitá (in Kg.) non sciolta di zucchero al tempo t (in ore).
La legge che regola il fenomeno é

$$y(t) = y_0 e^{kt}, \ \ y_0 = 50.$$

Slide 416

Essendo noto il valore di y ad un altro tempo, nel caso $t = 5$, posso ricavare k. Si ha

$$y(5) = 20 = 50 \cdot e^{k \cdot 5} \ \Rightarrow \ k = \frac{1}{5} \ln \frac{2}{5}$$

Cerco il tempo t_3 per il quale sia $y(t_3) = 0.1\ y_0$.
Impongo

$$y(3) = 0.1 y_0 = y_0 e^{k t_3}$$

$$\frac{1}{10} = e^{(\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5}) t_3} = e^{\frac{t_3}{5} \ln \frac{2}{5}}$$

$$\ln(1/10) = \frac{t_3}{5} \ln(2/5) \ \Rightarrow \ t_3 = 5 \frac{\ln(1/10)}{\ln(2/5)}$$

- **Esempio 23.2** *Una cisterna contiene inizialmente 1000 Litri di una soluzione con 50 kg di sali disciolti. Supponiamo che*

  1. *nella cisterna fluisca una soluzione contenente 10 gr di sale per litro, con una portata costante di 10 Litri/min;*
  2. *il liquido della cisterna è mantenuto ad ogni istante completamente mescolato;*
  3. *La soluzione effluisce dal recipiente con una portata di 10 Litri/min.*

Si vuole sapere quanto sale rimane nella cisterna trascorsi 40 minuti dall'apertura delle valvole di carico e scarico dalla cisterna.

Soluzione. *Sia:*

- $x(t)$ *la quantitá di sale (in kg) nella cisterna al tempo t (in minuti);*
- $t = 0$ *Apertura delle valvole di carico e scarico;*
- $x(0) = 50\ kg$

Detti:

$V(t)$ = *il volume di soluzione presente nella cisterna al tempo t [unitá: litri];*

C_{IN} = *la concentrazione di sale nel fluido entrante [unitá: Kg/litro];*

$C = x(t)/V(t)$ = *la concentrazione di sale nella cisterna al tempo t [unitá: kg/litri];*

F_E *il Flusso entrante di sale [unitá: Kg/min];*

F_U *il Flusso uscente di sale [unitá: Kg/min];*

Q_{IN} = *la portata del liquido entrante (unitá:litri/minuto);*

Q_{OUT} *la portata del liquido uscente (unitá:litri/minuto);*

Slide 419

e tenendo presente che occorre portare i dati del problema tutti alle stesse unitá, si ha:

- $F_{IN} = C_{IN} \cdot Q_{IN} = =10$ *gr/Litro · 10 Litri/min* $=$
  $= 10^{-2}$ *Kg/Litro* $\cdot$ 10 *Litri/min* $= 10^{-1}$ *Kg/min*
- $F_{OUT} = x(t)/V(t) \cdot Q_{OUT} = \frac{x(t)}{1000}[\frac{Kg}{Litri}] \cdot\ 10\ [\frac{Litri}{min}] =$
  $= 10^{-2}x(t)\ \ [\frac{Kg}{min}]$

La variazione della quantitá di sale rispetto al tempo é data, per la legge di conservazione della massa, da:

$$\frac{dx}{dt} = F_{IN} - F_{OUT}$$

cioé

$$\frac{dx}{dt} = 10^{-1} - 10^{-2}x$$

Che é l'equazione differenziale del I ordine da risolvere.

Slide 420

Poniamo, per semplicitá di scrittura, $10^{-2} = a$ *e* $10^{-1} = b$*, allora*

$$x'(t) + ax = b$$

e l'omogenea associata é data da:

$$x'(t) + ax = 0$$

La soluzione della omogenea associata é $x(t) = c_1e^{-at}$ *con* c_1 *costante reale da determinarsi.*
La soluzione particolare é

$$\bar{x} = b/a$$

mentre la soluzione generale é:

$$x(t) = \frac{b}{a} + c_1e^{-at}$$

Slide 421

Per determinare la costante c_1 *imponiamo la condizione iniziale* $x(t=0) = 50\ kg$,

$$50 = \frac{b}{a} + c_1 \ \Rightarrow\ c_1 = 50 - b/a$$

Risostituendo alle costanti a *e* b *i valori numerici si ha:*

$$a = 10^{-2};\ \ b = 10^{-1};\ \ c_1 = 50 - 10 = 40$$

Quindi

$$x(t) = 10 + 40e^{-t/100}$$

La quantitá di sale rimasta nella cisterna dopo 40 *minuti si calcola semplicemente ponendo* $t = 40$. *Si ha:*

$$x(40) = 10 + 40e^{-4/10} \simeq 36.8 \quad kg.$$

Slide 422

Cenni di Statistica e Probabilitá

In questo capitolo daremo alcuni cenni di Statistica Descrittiva e di Probabilitá per mostrare la connessione di questa disciplina con gli argomenti di matematica trattati.

24 Statistica

La statistica é la scienza che permette di studiare i fenomeni complessi dei quali non sono note le relazioni tra le diverse manifestazioni. La sua piú antica applicazione é nei fenomeni sociali. con il fiorire delle scienze sperimentali la statistica é stata un valido supporto per l'analisi dei dati Si possono distinguere due rami della statistica: la statistica descrittiva e la statistica inferenziale.

Slide 423

La **Statistica descrittiva** ha come scopo quello di descrivere le *caratteristiche* prese in esame dell'insieme di *entitá statistiche* oggetto dello studio. Tale nsieme prende il nome di **popolazione** indipendentemente dal fatto che si tratti di individui o cose. I dati acquisiti vengono organizzati in *tabelle* e *grafici* di vario tipo. Se la descrizione delle caratteristiche uó essere effettuata mediante rilevazioni numeriche allora é possible fornire *misure di sintesi* e *di tendenza centrale*, e *misure di dispersione.*

La **Statistica Inferenziale** ha come obiettivo lo studio delle caratteristiche di una popolazione partendo dai dati parziali ottenuti analizzando uno o piú campioni estratti, con metodologie appropriate dalla popolazione in esame. Per questo scopo occorre far ricorso alla **Teoria della Probabilitá**. I risultati ottenuti saranno poi intesi in senso probabilistico.

Slide 424

Il nostro obiettivo in questo capitolo é solo quello di mostrare come la statistica descrittiva sia legata alla rappresentazione dei dati in insiemi numerici e la teoria della probabilitálla integrazione. Rimandiamo il lettore alle Note di Statistica e Probabilitá in cui l'argomento é affrontato in maniera piú estesa.

25 Terminologia e Definizioni

Prima di procedere é opportuno, al fine di evitare ambiguitá nell'uso dei termini, definire alcuni concetti e termini di base della statistica.

Slide 425

- **Popolazione Statistica**. Con questo termine si individua *la collettivitá (o l'insieme P) entro cui si studia il fenomeno.* Si noti che il termine viene é utilizzato indipendentemente dal fatto che l'insieme in esame sia costituito da persone.
  La popolazione statistica relativa all'occupazione in Italia negli ultimi 10 anni é costituita dai cittadini italiani in etá lavorativa negli ultimi 10 anni;
  la popolazione statistica relativa al numero di stanze delle abitazioni di una data regione é, invece, costituita da tutte le abitazioni di quella regione; e ancora,
  la popolazione statistica relativa alla durata delle lampadine di una fabbrica é costituita da tutte le lampadine prodotte da quella fabbrica.

Slide 426

- **Unitá Statistica**. Con questo termine si individua *ogni elemento della popolazione statistica, cioé ogni individuo o cosa su cui si osserva il fenomeno.* In termini insiemistici una unitá statistica é un elemento $p \in P$.
  Quindi, ogni cittadino italiano in etá lavorativa negli ultimi 10 anni, ogni abitazione di quella regione, oppure ogni lampadina prodotta da quella fabbrica sono le unitá statistiche dei rispettivi fenomeni collettivi presi precedentemente come esempio.
- **Campione Statistico**. Con questo termine si individua *un qualsiasi insieme C di unitá statistiche appartenenti alla popolazione P.* Un campione é dunque un sottoinsieme della popolazione statistica, $C \subset P$.
  Cosí, sempre riferendoci agli esempi giá visti, potremo dire che i soli cittadini residenti a Roma e in etá lavorativa negli ultimi IO anni, o le abitazioni di una sola provincia di quella regione,

oppure 50 delle lampadine prodotte da quella fabbrica costituiscono campioni statistici delle rispettive popolazioni.

- **Carattere** *Statistico.* Con questo termine si individua *la caratteristica mediante la quale é possibile descrivere l'insieme delle unitá statistiche*, ovvero della popolazione. Sono ad esempio: l'altezza, il sesso, lo stato civile o l'etá degli individui, il numero di stanze delle abitazioni, etc. a seconda del fenomeno che si intende studiare.
- **Modalitá** Si definiscono modalitá *i modi diversi nei quali puó presentarsi il carattere* (ad es. 20 anni, maschio, 50 Kg, etc); qualora le modalitá vengano espresse in termini allora il carattere verrá detto mutabile (ad es. Sesso Maschio/Femmina); se invece le modalitá vengono espresse in numeri allora il carattere verrá chiamato Variabile.

- **Osservazione**. Con questo termine si individua il *valore assunto dal carattere (o dalla variabile statistica) in una unitá statistica.*
  Quindi la durata di vita della singola lampadina, il numero di stanze di una abitazione, lo stato di occupazione (occupato/disoccupato) di un cittadino.
- **Scale** Con questo termine si intendono *i modi in cui sono organizzati i caratteri.* Si distinguono diversi tipi di scale:
  - **a)** *Scala Nominale*: é rappresentata da quei caratteri con modalitá qualitative. Queste modalitá non presentano alcun ordine di successione (esempio: nazionalitá, sesso).
  - **b)** Ordinale: é rappresentata da quei caratteri con modalitá qualitative che presentano un ordinamento semplice ma senza una stima numerica (esempi: bambini, giovani, adolescenti, adulti)

Slide 429

c) *Scala a intervalli*: si parla di dati organizzati ad intervalli quando esiste una unitá di misura costante e, quindi, una misura di distanza tra le modalitá quantitative (esempio: altezza della popolazione ad intervalli di 5 cm).

d) *Scala di rapporti o cardinale*: Si usa questo termine quando il carattere é rappresentato in modalitá quantitativa mediante una grandezza assoluta (tipicamente numerica).

Come vederemo piú avanti per poter meglio elaborare i dati con sistemi elettronici le scale nominale ed ordinale sono spesso riferite a quantitá numeriche (es maschi=0, femmine=1).

- **Dati Statistici**. Con questo termine si intende *il numero che esprime quantitativamente il numero delle volte in cui una modalitá si é presentata nell'indagine.*

Slide 430

Completiamo con le definizioni di variabile aleatoria (o causale) e di variabile statistica; e con quelle di serie e seriazione statistica.

- Con il termine **variabile aleatoria** si intende *una entitá, numerica o non, che puó assumere uno solo tra tutti i valori di un insieme, ed a ciascuno dei quali é associata una probabilitá.*
- Con il termine di **variabile statistica**, ci si riferisce invece ad *una entitá che, nelle osservazioni effettuate sulle unitá che costituiscono la popolazione, ha assunto piú valori, frequentemente diversi tra loro.*

L'unico legame tra questi due concetti puó, per ora, essere il seguente: prima della rilevazione dei dati una variabile statistica puó essere considerata come una variabile aleatoria.

Ricordiamo che la variabile statistica é una variabile quantitativa ed assume solo valori numerici; é invece un carattere o variabile qualitativa quando assume valori non numerici.

- Con il termine di **serie** statistica si intende *una successione di dati relativi a una variabile qualitativa.*

- Con il termine di **seriazione** statistica si intende *una successione di dati relativi a una variabile quantitativa.*

Si noti che in questo contesto il termine serie ha un significato diverso da quello che tale termine ha nell'analisi matematica.

25.1 Esempi

- **Esempio 25.1** *Supponiamo che l'indagine statistica in esame sia quella di rilevare il numero di stanza delle abitazioni italiane. In questo caso: il numero di stanze delle abitazioni italiane é una variabile statistica che nelle singole unitá si presenta nella modalitá* 1 *quando l'abitazione ha una sola stanza, nella modalitá* 2 *quando ha due stanze, nella modalitá* 3 *quando ha tre stanze, e cosí via.*
Sempre come esempio, l'altezza di un insieme di persone dai 15 ai 18 anni é una variabile statistica che nelle singole unitá ha assunto valore $1,56$ *se la persona presa in esame é alta 1,56 m; ha assunto valore* $1,71$ *se la persona misurata é alta 1,71 m, ecc.*

Slide 433

- **Esempio 25.2** *Riassumiamo quanto esposto fin qui illustrando i concetti statistici che caratterizzano il seguente fenomeno:* **titolo di studio dei cittadini italiani che hanno compiuto 25 anni**.
  - *Il fenomeno é collettivo in quanto é possibile conoscerlo soltanto attraverso una molteplicitá di osservazioni sul titolo dl studio dei singoli cittadini.*
  - il titolo di studio *é una variabile statistica qualitativa infatti si presenta sotto diverse modalitá non numeriche corrispondenti a: nessun titolo, licenza elementare, licenza media, diploma di scuola superiore, laurea.*
  - *La popolazione statistica é l'insieme costituito da tutti i cittadini italiani in etá superiore ai 25 anni.*
  - *Una unitá statistica é ogni cittadino italiano con piú di 25 anni.*

Slide 434

- *Le modalitá* nessun titolo, licenza elementare, ..., laurea *sono le diverse osservazioni, cioé i diversi valori che la variabile ha assunto quando l'unitá presa in esame si é rivelata in possesso del rispettivo titolo di studio. Se i laureati sono risultati 1423550, questo numero é un dato statistico.*
- *Qualsiasi insieme di cittadini italiani di etá superiore a 25 anni, come quelli che in una determinata ora si trovano a passare in una strada di Milano, o i primi 200 in ordine alfabetico dell'anagrafe di Palermo, é un campione della popolazione del nostro fenomeno.*

Slide 435

26 Statistica Descrittiva

Data una popolazione **P** della quale si vuole studiare una caratteristica espressa in termini quantitativi con una misura numerica (ad es. l'altezza degli studenti dell'Universitá di Catania nell'A.A. 2005-06) i dati raccolti, nell'esempio le misure delle altezze h, possono essere rappresentati mediante un insieme numerico $\mathbf{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ dove N é la cardinalitá della popolazione e x_i non sono tutti necessariamente distinti. Tale insieme é finito (i.e. ha cardinalitá finita) ed é limitato (i.e. sará dotato di un minimo ed un massimo).

Organizzazione e Rappresentazione dei dati
Supponiamo, ipotesi ragionevole se la popolazione é sufficientemente ampia, che esistano $\bar{N}$ valori distinti delle misure x_i che indicheremo con x_j ciascuna delle quali si presenta f_j volte.

Slide 436

La quantitá f_j viene chiamata **frequenza assoluta** del valore x_j. Ovviamente $\sum f_j = N$.

In molti casi si preferisce sostituire le frequenze assolute con le frequenze relative f_h^r

$$f_h^r = \frac{f_h}{\sum_{i=1}^n f_h} \tag{383}$$

dove la somma delle frequenze relative é

$$\sum_{i=1}^n f_h^r = 1 \tag{384}$$

Indichiamo quindi con $\bar{\mathbf{S}}$ l'insieme di coppie (x_j, f_j) dove $j = 1, 2, \ldots, \bar{N}$.

Nota 1 - Si osservi che questo é certamente il caso quando la misura in esame puó assumere solo valori discreti (ad es. numeri interi). Tuttavia anche nel casi in cui x_i puó assumere tutti i valori reali in un intervallo la esistenza di una precisione intrinseca dello strumento di misura porta alla conseguenza che esisteranno molte entitá che hanno la stessa misura della caratteristica in esame.

Slide 437

Organizzazione dei dati in ranghi . Se il numero di dati non é grande o se la variabilitá della caratteristica in esame é troppo elevata allora si preferisce organizzare i dati raggruppandoli in **ranghi** (o **classi**).

Dato l'insieme **S** dei dati, indichiamo rispettivamente con h_m ed h_M il minimo ed il massimo valore assunto dagli elementi dell'insieme. Detto poi n un numero intero dividiamo l'intervallo $[h_m, h_M]$ in n parti eguali di ampiezza $\Delta = (h_M - h_m)/n$ e costruiamo n insiemi ciascuno dei quali contiene le misure i cui

Slide 438

valori ricadono all'interno dell'intervallo stesso:

$$S_1 = \{h_j : h_m \ \le h_j \le h_m + \Delta, \tag{385}$$

e per $k = 2, \ldots, n$

$$S_k = \{h_j : h_m + (k-1)\Delta < h_j < h_m + k\Delta\}, \tag{386}$$

Nel primo insieme la disequaglianza di sinistra é chiusa in quanto l'intervallo $[h_m, h_M]$ é chiuso da entrambi i lati. Associamo, inoltre, ad ogni sottoinsieme S_k la coppia $(f_k, h_{medio-k})$, dove f_k é la cardinalitá dell'insieme S_k, cioé il numero di misure che ricadono nel kmo intervallo e $h_{medio-k}$ é il valore medio dell'intervallo che definisce S_k. La collezione $\mathcal{C}$ degli insiemi $S_k \subset \mathbf{S}$ rappresenta la organizzazione dei dati in classi o ranghi di ampiezza Δ.

Slide 439

Puó accadere, per la natura dei dati o per altri motivi, che i dati siano raccolti direttamente in classi. Ad esempio se il Sistema Sanitario Nazionale volesse studiare il consumo di farmaci in funzione dell'etá, raccogliere il dato dividendo *ab initio* la popolazione statistica secondo l'anno di nascita senza tener conto del mese e del giorno di nascita. In questo caso la data di nascita esatta degli intervistati non fa parte della misura e, ovviamente, non é piú rilevabile. Analogamente quando in uno studio si utilizzassero dati organizzati in ranghi tratti da pubblicazioni di studi precedenti il *dato grezzo* non eńoto. In questi casi, qualora si volesse procedere ad elaborazioni successive, al dato viene assegnato il valore cenrale della classe. Cosí, ad esempio, si assume che gli individui la cui altezza cade nella classe tra $[160 - 170\ cm]$ siano tutti alti 165 cm.

Slide 440

Rappresentazione mediante Tabelle Se la variabile x_i assume valori discreti o l'insieme delle misure é organizzato in ranghi allora l'insieme S dei dati puó essere rappresentato mediante tabelle a due colonne dove, nella prima colonna sono riportati le classi e nella seconda la frequenza assoluta f, relativa f^r in ciascuna classe.

Le tabelle permettono di avere una visione d'insieme del dato statistico che non sarebbe rilevabile dalla semplice elencazione degli elementi dell'insieme dei dati S.

Distribuzione di frequenza.

Si chiama **distribuzione di frequenza** la funzione $f(x)$, definita (nel caso di una variabile statistica) per elencazione, che associa elemento a tutti gli elementi distinti $x_i \in S$ la frequenza assoluta (o relativa) con cui tali elementi sono presenti in S. Nel caso di una variabile statistica che assume, ovviamente, un insieme limitato di valori o é organizzata in classi, essa é quindi definita da $\bar{N}$ coppie di valori (x_j, f_j). Delle distribuzioni di frequenza per le variabili causali parleremo nel seguito.

Nella maggioranza dei casi le distribuzioni di frequenza assoluta o relativa di una variabile statistica, organizzata per classi, vengono rappresentate con istogrammi.

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali rappresentiamo la distribuzione di frequenza dei dati in ranghi mediante n rettangoli avente base di ampiezza Δ (ampiezza della classe) ed altezza proporzionale ad f_h (o f_h^r).

La costante di proporzionalitá é scelta in modo tale che l'area di ciascun rettangolo rappresenti la frequenza della classe. Per classi della stessa ampiezza (come quelle sin'ora descritte) tale costante vale $1/\Delta$. Tale rappresentazione viene detta **Istogramma** delle frequenze.

É immediato dedurre da quanto sopra detto che la misura dell'area dell'Istogramma delle frequenze assolute é eguale alla cardinaliá dell'insieme S, cioé il numero delle osservazioni statistiche, mentre l'area dell'Istogramma dele frequenze relative éguale ad 1.

27 Probabilitá

Una delle applicazioni della teoria della misura (cioé degli integrali) ŕappresentata dalla teoria della Probabilitá. Ne diamo nel seguito un breve cenno rimandando il lettore alla trattazione più estesa che viene fatta nei testi che trattano di Statistica e Probabilitá.

Slide 443

Definizione. La probabilitá del verificarsi di un evento E é un numero reale compreso tra 0 ed 1, $P(E) \in [0, 1]$.

Se il verificarsi dell'evento é certo allora $P(E) = 1$; se invece l'evento E non ha alcuna possibilitá di verificarsi (evento impossibile) allora $P(E) = 0$.

Dato un evento E esso pó verificarsi in diverse modalitá X. Ad esempio se si considera il lancio di una moneta a due facce le modalitá vengono usualmente indicate con i termini *testa/croce* o

Slide 444

0/1. Se la moneta é ben bilanciata le due facce hanno la stessa probabilitá di mostrarsi sul lato superiore della moneta dopo il lancio (lo spazio degli eventi si dice equiprobabile). Quindi la probabilitá che dopo il lancio si presenti la modalitá $X = testa/0''$ é $P(E) = 1/2$. Ci aspettiamo infatti che, in una moneta ben bilanciata, le due modalitá siano equiprobabili e dopo *molti* lanci la frequenza degli eventi *testa* sia circa la metá del numero dei lanci effettuati. Con iIl termine *molti* si intende, in questo contesto, che l'affermazione é valida in senso asintotico, cioé quanto il numero di lanci tende all'infinito.

Da quanto detto si osserva che nel'osservazione di un fenomeno o nel corso di un esperimento una o più caratteristiche del fenomeno possono assumere valori diversi (quantitativi o qualitativi). Questo rappresenta la *variabilità del fenomeno* e la caratteristica che varia prende il nome di variabile casuale.

Slide 445

DEF. 27.1 *Diremo variabile casuale o aleatoria la caratteristica del fenomeno che può assumere diversi valori nell'osservazione del fenomeno o in un esperimento.*

DEF. 27.2 *Quando la variabile X dell'evento puó assumere solo un insieme discreto di valori allora diremo che X é una* ***variabile casuale discreta****.*

- **Esempio 27.1** *Come é noto un dato ha* 6 *facce numerate da* 1 *a* 6*. Dopo il lancio una delle facce viene mostrata in alto. L'evento* $E =\{$ *risultato del lancio del dado* $\}$ *puó quindi presentarsi con* 6 *modalit'a, ovvero la variabile X puó assumere i valori* 1, 2, 3, 4, 5, 6$\}$ *In un dado non truccato ogni faccia é equiprobabile, quindi*

$$P(X = i) = \frac{1}{6} \quad i = \ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \tag{387}$$

Consideriamo ora l'evento E_1 definito come segue:

Slide 446

$$E_1 = \{ \text{ il risultato del lancio é un numero dispari } \}$$

Allora essendo i numeri dispari 3 si ha:

$$P(E_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \tag{388}$$

Se considerassimo invece l'evento E_2=$\{$il risultato del lancio é un numero < 7 $\}$ allora $P(E_2) = 1$.

Definizione Variabile Casuale Continua
Se la modalitá X dell'evento E puó assumere tutti i valori in un intervallo (a, b) di numeri reali (limitato o illimitato) allora X si dirá una variabile casuale continua.

• **Esempio 27.2** *Si consideri il seguente esperimento: un ago bilanciato é lasciato cadere in modo casuale su una superficie piana liscia sulla quale é stata segnata una retta.*
Per ogni lancio si misura l'angolo acuto che l'ago forma con la retta. La variabile dell'evento $E = \{$*lancio dell'ago* $\}$ *é l'angolo* X *misurato (ad es. in gradi), quindi* $X \in [0, 90]$..

La variabile X *é una variabile casuale continua. Nell'ipotesi ragionevole di equiprobabilitá (ago non truccato) si ha la probabilitá che la variabile* X *assuma un valore* $x \in [0, 90]$ *é:*

$$P(X = x) = 0 \tag{389}$$

$$P(X = x, x \in [0, 90]) = 1 \tag{390}$$

La seconda condizione é ovvia. Per la prima basta osservare che per il postulato della copletezza dei nmeri reali esistono infiniti numeri reali $x \in [0, 90]$. *Se preso un generico* $\bar{x} \in [0, 90]$ *fosse* $P(x = \bar{x}) > 0$ *allora la probabilitá totale (nell'ipotesi di*

equiprobabilitá divergerebbe. Questo ovviamente é un assurdo essendo la probabilitá dell'evento certo $= 1$ *per definizione.*

Consideriamo ora la probabilitá che X *assuma un valore compreso in un intervallo* $[x_1, x_2] \subset [0, 90]$. *Supponiamo, per chiarirci le idee il caso particolare* $[x_1 = 10, x_2 = 20]$. *Si ha ovviamente:*

$$P(X = x,\ x \in [10, 20]) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

Infatti essendo l'ampiezza dell'intervallo $\delta = x_2 - x_1 = 10$ *l'evento é equivalente a quello del lancio di un ipotetico dado a* 10 *facce o all'estrazione di un numero da* 1 *a* 10.

Per il generico intervallo $[x_1, x_2]$ *si ha quindi:*

$$P(X = x,\ x \in [x_1, x_2]) = \frac{1}{90}(x_2 - x_1)$$

Slide 449

Per rappresentare questa probabilitá definiamo la funzione costante:

$$f(x), x \in [0,90] \quad : \; f(x) = \frac{1}{90}$$

Conseguentemente

$$P(X = x, \; x \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

La funzione cosí definita prende il nome di ***densitá di probabilitá*** *della variabile casuale* X*.*

Nela caso particolare in cui $f(x) =$ *const si dirá che* X *é distribuita uniformemente e* $f(x)$ *viene chiamata una distribuzione uniforme.*

Slide 450

Definizione - Funzione di densitá di Probabilitá

Diremo che una funzione $f(x)$ definita in $[a,b]$ é una funzione di probabilitá di una variabile casuale continua X distribuita in $[a,b]$ se:

$$a) \; f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b] \tag{391}$$

$$b) \; \int_a^b f(x)dx = 1 \tag{392}$$

$$c) \; \forall x_1, x_2 \in [a,b] \;\Rightarrow\; P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{393}$$

Il concetto di funzione di probabilitá si estende a variabili casuali distribuite su intervalli semi-infiniti o infiniti. In questo caso gli integrali corrispondenti saranno integrali impropri.

Slide 451

Generalizzazione - Sia X una variabile casuale continua distribuita uniformemente in $[a, b]$ allora la funzione di densitá di proabilitá in tale intervallo é data da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \forall x \in [a, b] \\ \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases} \tag{394}$$

- **Esempio 27.3** *Gli atomi radioattivi decadono emettendo particelle. L'intervallo di tempo T nel quale in generico atomo decade é una variabile casuale a valori in $[0, \infty]$. si é osservato che il numero di atomi non ancora decaduti al generico tempo t é una funzione esponenziale; detto $N(t)$ il numero di atomi non ancora decaduti al tempo t si ha*

$$N(t) = N_0 e^{-kt} \tag{395}$$

dove N_0 é il numero di atomi radiotattivi (tutti non decaduti) al

Slide 452

tempo iniziale.
Se adesso considero l'evento $E = \{l'atomo\ decade\ dopo\ il\ tempo\ Tgeqt\}$ allora la probabilitá dell'evento segue la stessa legge funzionale, cioé

$$P[E] = P[T \geq t] = Ce^{-kt} \tag{396}$$

Vogliamo adesso trovare $f(x)$ la funzione di densitá di probabilitá della variabile casuale T. Da quanto detto in precedenza deve aversi:

$$1) \quad \int_t^{\infty} f(x)dx = P[T \geq t] = Ce^{-kt} \tag{397}$$

$$2) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{398}$$

Slide 453

Osserviamo innanzitutto che affinché possano valere la due relazioni precedenti occorre che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \tag{399}$$

Si, infatti questo fosse, per assurdo, non vero allora l'integrale divergerebbe.
Invertendo gli estremi di integrazione della (1), e cambiando si segno, possiamo definire la funzione $\varphi(t)$ la cui derivata é la funzione integranda:

$$\varphi(t) = -\int_{\infty}^{t} f(x)dx; \qquad \varphi'(t) = -f(t) \tag{400}$$

Slide 454

Dalla prima delle (397) si ottiene:

$$\varphi(t) = -\int_{\infty}^{t} f(x)dx = Ce^{kt} \tag{401}$$

$$\tag{402}$$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int_{\infty}^{t} -f(x)dx = -f(t) = \frac{d}{dt}\left(Ce^{-kt}\right) = -Cke^{-kt} \tag{403}$$

Quindi

$$f(t) = C\ k\ e^{-kt} \tag{404}$$

Imponiamo ora la seconda delle (397), cioé $\int_0^\infty f(x)dx = 1$.
Si trova:

$$1 = \int_0^\infty f(t)dt = \lim_{r\to\infty}\int_0^r Cke^{-kt}dt =$$
$$= C\lim_{r\to\infty}\left[-e^{kt}\right]_0^r = C\lim_{r\to\infty}\left[1 - e^{kr}\right] = C$$

Quindi $C = 1$ *e la funzione densitá di probabilitá é:*

$$f(x) = e^{-kt} \tag{405}$$

• **Esempio 27.4** *Per quale valore della costante* C *la funzione* $f(x) = C(1 - x^2)$ *é una funzione di densitá di probabilitá in* $x \in [-1, 1]$. *Calcolare poi* $P[X : -1 \leq x \leq 1/2]$.

Soluzione

a) *Verifico che la funzione sia positiva* $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [-1, 1]$. *Ne segue che deve essere* $C > 0$;

b) *Impongo la normalizzazione:*

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} C(1 - x^2)dx = \\ &= C\big[x - x^3/3\big]_{-1}^{1} = C\big[2 - 2/3\big] = 4/3 \cdot C \end{aligned}$$

Quindi

$$C = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$$

c) *Calcolo* $P[X : -1 \leq x \leq 1/2]$.

$$\begin{aligned} P[X : -1 \leq x \leq 1/2] &= \int -1^{1/2} f(x)dx = \\ &= \frac{3}{4}\big[x - x^3/3\big] = \frac{27}{32} \end{aligned}$$

Slide 457

28 Momenti della funzione di densitá

Definizione - Momento di ordine p.
Si dice **momento di ordine p** della funzione di densitá di probabilitá della variabile casuale X con variazioni nel generico intervallo (a, b) la quantitá

$$m^{(p)} = \int_a^b x^p f(x)dx \tag{406}$$

Casi particolarmente importanti sono i momenti di ordine 1 e di ordine 2.

Definizione - Media (*o speranza matematica*).
Se X é una variabile casuale continua in $[a, b]$ con funzione di densitá di probabilitá $f(x)$, la media di X, che si indicherá con la lettera μ (o la speanza matematica - indicata con $E[X]$ é definita

Slide 458

come il momento di ordine 1 della funzione di densitá di probabilitá, cioé

$$\mu = \int_a^b xf(x)dx \tag{407}$$

Definizione - **Media di una funzione della variabile casuale** X
Sia $g(x)$ una funzione della variabile casuale continua X con valori in $[a, b]$ e con funzione densitá di probabilitá $f(x)$ allora la **media della funzione** $g(x)$ é definita da:

$$< g(X) > = \int_a^b g(x)f(x)dx \tag{408}$$

Per collegare questi concetti con quelli studiati in precedenza consideriamo la variabile casuale discreta Y che k assume valori discreti compresi in $[a, b]$

Consideriamo un numero n di eventi e l'istogramma delle frequenze relative di tali eventi. Se vogliamo calcolare il valore medio, M_y assunto dalla variabile Y nei$n$ eventi avremo:

$$M_y = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i^a y_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i^{(a)}} \tag{409}$$

dove $f_i^{(a)}$ é la frequenza assoluta di occorrenza del valore discreto y_i, e $\sum_{i=1}^{k} f_i^{(a)} = k$ il numero di eventi n (cioé la cardinalitá dell'insieme delle prove effettuate.

Ricordando che la frequenza relativa della misura y_i é definita come

$$f_i(r) = \frac{f_i^{(a)}}{\sum_{i=1}^{k} f_i^{(a)}} \tag{410}$$

si ottiene

$$M_y = \sum_{i=1}^{k} y_i f_i^{(r)} \tag{411}$$

dove

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^{(r)} = 1 \tag{412}$$

La funzione a valori discreti $f_i^{(r)}$ é l'equivalente della funzione di densitá di probabilitá per la variabile discreta Y.

Slide 461

Se volessimo infatti calcolare la probabilitá $P[Y : y \in [y_p, y_q]]$ che la variabile Y assuma tutti i valori discreti compresi tra $[y_p, y_q] \subset [a, b]$ essa sará data dal rapporto (*numero di casi favorevoli/numero casi possibili*), cioé dalla somma delle frequenze relative:

$$P\big[Y : y \in [y_p, y_q]\big] = \sum_{i=p}^{q} f_i^{(r)} \tag{413}$$

cioé l'area della regione dell'istogramma delle frequenze relative cmpresa tra i valori y_p ed y_q.

La funzione $f_i^{(r)}$ soddisfa quindi a tuttu i requisiti che abbiamo richiesto per la funzione di densitá di probablitá. Infatti:

$$1) f_i^{(r)} \geq 0 \;\; \forall i \in [1, k] \tag{414}$$

$$2) \sum_{i=1}^{k} f_i^{(r)} = 13) \qquad P\big[Y : y \in [y_p, y_q]\big] = \sum_{i=p}^{q} f_i^{(r)} \tag{415}$$

Slide 462

Nel limite $k \to \infty$ che trasforma la variabile casuale Y da discreta a continua si ritrovano le definizioni precedenti. Per immaginare un caso del genere si pensi alla variabile casuale discreta individuata dalla faccia di un dado, cioé un cubo sulle cui facce sono scritti i numeri interi da 1 a 6. Se adesso per dado utilizziamo al posto di un cubo un solido regolare con k facce allora la nostra variabile casuale rimane discreta (utilzzando numeri razionali si potrebbe restare nell'intervallo [1,6]). Se adesso $k \to \infty$ allora il nostro solido diviene una sfera e la variable casuale assumerá tutti i valori dell'intervallo.

Slide 463

Speranza Matematica

La speranza matematica é cosí chiamata perché é un concetto che puó applicarsi ai giochi. Spiegheremo il concetto riferendoci quindi ad un gioco (i dadi) legati ad una variabile casuale discreta.

Supponiamo che in una partita il giocatore paghi al banco la somma di **C** euro per tirare un dato una volta. A sua volta il banco pagherá al giocatore le somme di $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ a seconda che escano i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Con un dado non truccato il giocatore ha la seguente probabilitá di vincita:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} v_i \cdot \frac{1}{6} \qquad (416)$$

essendo la variabile equiprobabile con probabilitá = 1/6.

Slide 464

A seconda che sia $E(X) < = > C$ il gioco sará favorevole al Banco, giusto (cioé entrambi hanno la stessa *speranza di vincita*) o favorevole al giocatore.

Se $v_i = i$ allora la scrittura precedente rappresenta la media della variabile casuale X, mentre per generici valori di v_i la scrittura precedente rappresenta la media della funzione della variabile aleatoria y, $v(y_i)$.

Slide 465

28.1 Varianza

Definizione - Varianza La varianza di una variabile casuale X con densitá di probabilitá $f(x),\ x \in [a,b]$ é la media della funzione $g(x) = (x-\mu)^2$, cioé il quadrato dello scarto della variabile casuale continua dalla media μ.

La varianza é un momento di ordine 2 e si indica con σ^2 o $Var[X]$:

$$\sigma^2 = Var[X] = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx \tag{417}$$

Sviluppando il quadrato del binomio ed utilizzando la proprietá

Slide 466

additiva delgi integrali si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_a^b x^2dx - 2\mu\int_a^b xf(x)dx + 2\mu^2\int_a^b f(x)dx = \\ &= \int_a^b x^2 f(x)dx - 2\mu^2 + \mu^2 \\ \sigma^2 &= \int_a^b x^2 f(x)dx - \mu^2\end{aligned}$$

Definizione Devizione Standard
La radice quadrata della varianza, σ, prende il nome di deviazione standard:

$$\sigma = \left(\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx\right)^{1/2} \tag{418}$$

Slide 467

29 Distribuzione normale

Le funzioni di densitá di probabilitá piú interessanti sono le cosidette distribuzioni normali o *gaussiane.*

Esistono una *famiglia* di distribuzioni normali tute colegate ad una distribuzione particolare chiamata **distribuzione normale standard** che ha la forma:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad z \in (-\infty, +\infty) \tag{419}$$

L'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \tag{420}$$

non é esprimibile in termini di funzioni elementari (cioé é difficile da calcolare); tuttavia la funzione $f(z)$ é misurabile in $\mathbb{R}$ e la sua misura vale 1, quindi l'integrale vale $\sqrt{2\pi}$.

Slide 468

Si osservi che la funzione $f(z)$ é simmetrica rispetto a $z = 0$. Quindi

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz = 0 \tag{421}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz = 1 \tag{422}$$

Distribuzione normale generale

Diremo che una variabile casuale continua X é distribuita normalmente con media μ e deviazione standard $\sigma > 0$ se la sua funzione di densitá di probabilitá, che inicheremo con $f_{\mu,\sigma}$ é espressa in termini della distribuzione normale standard $f(z)$ da:

$$f_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma} \tag{423}$$

Slide 469

Osservazione importante .
Come abbiamo detto la funzione $e^{-z^2/2}$ non ha primitive esprimibili con funzioni elementari. Conseguentemente il calcolo dell'integrale di $f(z)$ tra due qualunque estremi deve essere fatto ricorrendo a tavole o ad integrazioni numeriche.

Le tavole. Sono ovunque disponibili (sui libri o su Internet) tavole che riportano i valori della **Distribuzione cumulativa** di una variabile casuale con distribuzione normale standard, cioé

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \qquad (424)$$

Utilizzando queste tavole é possibile calcolare l'integrale della distribuzione normale standard tra due valore reali qualunque

Slide 470

utilizzando la proprietá additiva degli integrali:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-z^2/2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{-\infty} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-z^2/2} dz = \\ &= F(\beta) - F(\alpha) \end{aligned}$$

Se si volessero calcolare i vaori relativi ad una funzione di distribuzione gaussiana con media μ e varianza σ allora occorrerá tener presente la (423)