DIPARTIMENTO
di MATEMATICA
e INFORMATICA

Anno Accademico 2018-2019

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU) [A-L]

12 Settembre 2019

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 (a) Sia dato il numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

Scrivere il numero complesso z^{19} in forma algebrica.

(b) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^4 + 4z^2 = -i\bar{z}(4 + z^2).$$

2 Sia data la funzione reale di una variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} 4\arctan\left(\frac{x}{5}\right) - \pi & \text{se } x > 5 \\ (x-5)e^{x-5} & \text{se } x \leq 5 \end{cases}.$$

(a) Studiare la continuità e la derivabilità di f in $\mathbb{R}$.

(b) Stabilire se esistono rette tangenti al grafico di f nel suo punto di ascissa $x_0 = 5$ e, in caso affermativo, determinare le loro equazioni.

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = 5\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\ln|x^2 - 1|.$$

Studiare f e tracciarne un grafico qualitativo.
(Omettere il calcolo della derivata seconda)

12 Settembre 2019

Svolgimento della prova scritta

1 (a) Innanzitutto conviene scrivere i numeri $1+i$ e $1-i$ in forma esponenziale:

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad 1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

Quindi:

$$z=\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}\right)^{8}}=\frac{2^5e^{i\frac{5}{2}\pi}}{2^4e^{i14\pi}}=2\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i2\pi}}=2e^{-i\frac{3}{2}\pi}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i.$$

Di conseguenza

$$z^{19}=2^{19}i^{19}=2^{19}(i^2)^9i=2^{19}(-1)^9i=-2^{19}i.$$

(b) L'equazione assegnata si può riscrivere come segue:

$$(z^2+4)(z^2+i\bar{z})=0.$$

Il primo fattore è $z^2+4=(z+2i)(z-2i)$ e si annulla per $z_1=2i$ e $z_2=-2i$. Vediamo adesso quando si annulla il secondo fattore. Posto $z=x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$, si ha

$$z^2+i\bar{z}=x^2-y^2+2ixy+i(x-iy)=(x^2-y^2+y)+ix(1+2y)=0$$

se e solo se

$$\begin{cases}x^2-y^2+y=0\\ x(1+2y)=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{cases}x^2-y^2+y=0\\ x=0\end{cases} \quad\vee\quad \begin{cases}x^2-y^2+y=0\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}\right)$$

e quindi

$$\begin{cases}y(1-y)=0\\ x=0\end{cases} \quad\vee\quad \begin{cases}x^2=\frac{3}{4}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Pertanto il primo sistema è risolto se e solo se $(x,y)=(0,0)$ oppure $(x,y)=(0,1)$, mentre il secondo sistema è risolto solo dalle coppie $(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Le corrispondenti soluzioni complesse sono, rispettivamente,

$$z_3=0,\quad z_4=i,\quad z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad z_6=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

In conclusione, l'equazione assegnata ammette 6 soluzioni:

$$2i,\quad -2i,\quad 0,\quad i,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

2 (a) Osserviamo che il dominio di f è $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$. Inoltre, f è certamente continua e derivabile in ciascuno degli intervalli $]5,+\infty[$ e $]-\infty,5[$ in quanto somma, prodotto e composizione di funzioni, rispettivamente, continue e derivabili in tali insiemi.

Resta da esaminare la continuità e la derivabilità di f in $x=5$. Poiché

$$\lim_{x\to5^+}f(x)=\lim_{x\to5^+}\left(4\arctan\left(\frac{x}{5}\right)-\pi\right)=4\cdot\frac{\pi}{4}-\pi=0$$

e

$$\lim_{x\to5^-}f(x)=\lim_{x\to5^+}(x-5)e^{x-5}=0=f(0),$$

si conclude che

$$\lim_{x\to5}f(x)=0=f(0)$$

e dunque f è continua pure in $x=5$.

Studiamo la derivabilità di f in $x = 5$. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{20}{25+x^2} & \text{se } x > 5 \\ (x-4)e^{x-5} & \text{se } x < 5 \end{cases}.$$

Poiché

$$f'_+(5) = \lim_{x \to 5+} f'(x) = \frac{2}{5}, \qquad f'_-(5) = \lim_{x \to 5^-} f'(x) = 1,$$

ne viene che $f'_+(5) \neq f'_-(5)$ e quindi per il Teorema sul limite della derivata, f non è derivabile in $x = 5$ e presenta in $x = 5$ un punto angoloso.
In conclusione, f è continua in $\mathbb{R}$ ed è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

(b) Per quanto trovato nel punto precedente, il grafico di f presenta in $x = 5$ due rette tangenti che hanno equazioni $y - f(5) = f'_\pm(5)(x-5)$, cioè

$$y = \frac{2}{5}(x-5), \qquad y = x - 5.$$

3 dom $f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, |x^2 - 1| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. La funzione è pari e dunque non è restrittivo studiarla solo in $]0, +\infty[\setminus\{1\}$. f è continua in dom f. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{5}{2}\pi, \qquad \lim_{x \to 1^\pm} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale (sia destro che sinistro) per f. Inoltre, non esistono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, si ha

$$f'(x) = \frac{5\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{2x(2x^4 + 5x^2 - 3)}{(1 + x^4)(1 - x^2)} = \frac{2x(x^2 + 3)(2x^2 - 1)}{(1 + x^4)(1 - x^2)}.$$

Dunque, per $x > 0$, f è crescente in $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$, f è decrescente in $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ e in $]1, +\infty[$, ammette un minimo relativo in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e non ha massimi o minimi assoluti.