

PARTE A (TEORIA)

[T1] Rispondere ad almeno una delle seguenti domande.

a) Quali fra le seguenti equazioni differenziali sono a variabili separabili?

☐ $y'' = y'$

☐ $y' = \log(xy)$

☐ $y' = (\log x)(\log y)$

☐ $y' = \log x + \log y$

☐ $y'' = xy$

☐ $y' = xy$

☐ $y' = e^{x+y}$

b) Sia $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, con $X \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto, una funzione dotata di derivate parziali prime entrambe nulle in X . Questa informazione basta a garantire che f è costante in X ? Se la risposta è negativa, portare un controesempio.

[T2] Enunciare e dimostrare almeno uno dei seguenti teoremi:

a) Teorema di Fermat.

b) Teorema sul differenziale totale.

PARTE B (ESERCIZI)

[E1] Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y' - 4y = e^x(1 + \sin x).$$

b) Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = \log \frac{x}{x^2 + y^2}$ nell'insieme $X = [1, 5] \times [-1, 4]$

[E2] Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y} \log(1+x), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{x^4 + y^2}.$$

b) Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = x\sqrt{y-3}$$

e calcolarne, se esiste, la derivata direzionale nel punto $(1, 4)$ lungo la direzione della retta di equazione $4x + 3y - 7 = 0$.