DIPARTIMENTO
di MATEMATICA
e INFORMATICA

Anno Accademico 2019-2020

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU) [A-L]

19 Febbraio 2020

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia dato il numero complesso

$$z = \frac{1}{2}\, i \operatorname{Im}\left[(1+i)\overline{(1-i)}\right] - |\mathrm{e}^{i4\pi}|.$$

(a) Scrivere z in forma esponenziale e determinare il coniugato di z.

(b) Calcolare le radici quadrate di z.

2 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos^4 \frac{x}{3}}{\ln \sqrt[4]{x^2+x+1} - 2\arctan x}.$$

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}.$$

Studiare f e tracciarne un grafico qualitativo.

19 Febbraio 2020

Risultati degli esercizi

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a) $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$; $\bar{z} = -1 - i$.

(b) Le radici quadrate di z sono i numeri complessi $X_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3}{8}\pi}$ e $X_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11}{8}\pi}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Il limite presenta la forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$. Applicando il Teorema di De L'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2+x+1)^3}} \cdot (2x+1) - \frac{2}{1+x^2}} = -\frac{4}{7}$$

Dunque, per il Teorema di De L'Hôpital, il limite proposto vale pure $-\frac{4}{7}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ L'insieme di definizione di f è $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ed f è continua in $\mathbb{R}$. Si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Dunque si conclude che f non ammette asintoti di alcun tipo. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,4\}$ si ha:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-4}\cdot\sqrt[3]{x-2}}.$$

Risulta $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 3$. Dallo studio del segno di f' si deduce che f è decrescente in $]-\infty, 2]$ e in $[3,4]$ ed è crescente in $[2,3]$ e in $[4,+\infty[$. Ne viene che i punti del grafico di f aventi ascisse $x = 2$ e $x = 4$ sono punti di minimo locale e il punto di ascissa $x = 3$ è un punto di massimo locale (non assoluto). Poiché $f(2) = f(4) = \sqrt[3]{4}$, si deduce che i punti di ascisse $x = 2$ e $x = 4$ sono punti di minimo assoluto. Infine, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,4\}$ si ha:

$$f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-4)^4} + \sqrt[3]{(x-2)^4}}{\sqrt[3]{(x-4)^4}\cdot\sqrt[3]{(x-2)^4}}.$$

Studiando il segno di f'' si deduce che f è concava in $\mathbb{R}$.

Avvalendosi del Teorema sul limite della derivata si vede subito che f presenta in $x = 2$ e in $x = 4$ due punti di cuspide poiché

$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 4^\pm} f'(x) = \pm\infty.$$