SEGMENTI DI SOMMA MASSIMA

13	-5	12	1	-4	16	12	7	19	2	27	-21

Il massimo è chiaramente
quello indicato

MASSIMO COMUNE DIVISORE

Dati due interi m, n vogliamo calcolare $MCD(m, n)$

1. Se $m \geq n$ e $n \mid m$ allora $MCD(m, n) = n$
2. Se $m < n$ allora $MCD(m, n) = MCD(n, m)$
3. In tutti gli altri casi

$$MCD(m, n) = MCD(n, m \bmod n)$$

Innanzi tutto osserviamo che gli altri casi sono

$m \geq n \quad \wedge \quad n$ non è un divisore di m

Dunque possiamo scrivere $m = tn + K$ con $0 < K < n$

Se a è un divisore di m e $n \Rightarrow a$ divide K
Se a è il massimo comune divisore di m e n allora

① a è un divisore di k

② a è il $MCD(n, k)$

Proviamo ② (per assurdo)

Supponiamo che $\exists\, b$ divisore di n e k tale che $b > a$, allora

$n = bn'$ e $k = bk'$ ne segue che b dovrebbe dividere anche n.

Dunque b sarebbe il $MCD(n, n)$ contraddicendo così l'ipotesi

TEOREMA

Se $n > 0$ allora $l \leq \frac{\log n}{\log \phi} + 1$ dove

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62$$

Dimostrazione

Supponiamo che $n > 0$ e che quindi $l > 0$

Se $l = 1$ allora la tesi è banalmente vera

Assumiamo allora che $l > 1$

CLAIM

$$i = 0, \dots, l-1 \qquad r_{l-i} \geq \phi^{i}$$

Se il CLAIM fosse vero allora ponendo $i = l-1$ avremmo

$$n = r_1 \geq \phi^{l-1} \Rightarrow \log n \geq \log \phi^{(l-1)}$$

$$l \leq \frac{\log n}{\log \phi} + 1$$

Dobbiamo quindi provare il CLAIM

Per $i=0$ $(\ell-0=\ell)$ $r_\ell \geq 1$ vero!

Per $i=1$ $(\ell-1)$ $r_{\ell-1} \geq r_\ell + 1 \geq 2 > \phi^1$ ok!

supponiamo che la tesi sia vera per

$i \leq k-1$ $\left(= \ell-(k-1)\right)$

$$r_{\ell-k} = r_{\ell-(k-1)}\, q_{\ell-(k-1)} + r_{\ell-(k-2)} \geq$$

$$\geq r_{\ell-(k-1)} + r_{\ell-(k-2)} \geq$$

$$\geq \phi^{k-1} + \phi^{k-2} = \phi^{k-2}(\phi+1) =$$

$$\phi+1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \phi^{k-2}\,\phi^2 = \phi^k$$

TORRI DI HANOI

Proviamo, per induzione, che il numero di passi richiesti dal metodo proposto* è $2^n - 1$

Caso base $n=1$

Facciamo un solo spostamento

$$2^1 - 1 = 1 \qquad \text{ok!}$$

Supponiamo che la tesi sia vera per $n=k$ e proviamola per $n=k+1$

$$\text{Num\_Spostamenti}(\text{Hanoi}(k+1)) =$$

$$= 2\ \text{Num\_Spostamenti}(\text{Hanoi}(k)) + 1$$

$$= 2 \cdot \left(2^{k} - 1\right) + 1 = 2^{k+1} - 1$$