Appunti di Lezione: Strutture Discrete

Riepilogo ed Esercitazioni

V. Cutello

Contenuti I

STRUTTURE DISCRETE

PARTE 5: Riepilogo

Esercitazioni, domande a risposta multipla

Domanda 1

Gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3\}$

1. Sono diversi perché $B \setminus A = \{1, 2, 3\}$
2. Sono diversi perché hanno cardinalità diverse.
3. Sono uguali.

Domanda 1: Risposta

- Gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3\}$ sono uguali, perché contengono gli stessi elementi.
- Gli insiemi, per come definiti, non hanno ripetizione di elementi.

Domanda 2

Dati tre insiemi non vuoti A, B, C quali delle 3 seguenti uguaglianze è corretta ?

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Domanda 2: Risposta

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ infatti
  - Se $x \in (A \setminus B) \setminus C$ allora $x \in (A \setminus B)$ e $x \notin C$ ed inoltre se $x \in (A \setminus B)$ allora $x \in A$ e $x \notin B$. Quindi $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$ quindi $x \notin B \cup C$. Ovvero $x \in A \setminus (B \cup C)$.
  - Viceversa, se $x \in A \setminus (B \cup C)$ allora $x \in A$ a $x \notin B \cup C$. Ma se $x \notin B \cup C$ allora $x \notin B$ e $x \notin C$. Quindi, $x \in (A \setminus B)$ e $x \notin C$ da cui concludiamo $x \in (A \setminus B) \setminus C$.
- Per $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$ abbiamo $(A \setminus B) \setminus C = \{4\} \setminus C = \emptyset$
  - mentre $A \setminus (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$ che è un controesempio alla risposta 2;
  - inoltre, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{4\} \cup \{1, 2\}$ che è un controesempio alla risposta 3.

Domanda 3

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ quali dei seguenti gruppi di insiemi è una partizione di A ?

1. $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{4, 8, 9\}$, $D = \{6\}$
2. $B = \{1, 2, 3, 5, \}$, $C = \{4, 8, 9\}$, $D = \{6, 7, 10\}$
3. $B = \{1, 2, 3, 5, \}$, $C = \{4, 7, 8, 9\}$, $D = \{5, 6, 9, 10\}$

Domanda 3: Risposta

- La risposta corretta è la 2 infatti

  $\{1, 2, 3, 5, \} \cup \{4, 8, 9\} \cup \{6, 7, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A$

  ed inoltre
  $$B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$$
- La risposta 1 è sbagliata perché $B \cup C \cup D \neq A$
- La risposta 3 è sbagliata perché $C \cap D = \{9\}$

Domanda 4

Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ e $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Esiste una funzione iniettiva da A a $B \cup C$
2. Esiste una funzione iniettiva da $B \cup C$ ad A
3. Esiste una funzione surgettiva da $B \cup C$ ad A

Domanda 4: Risposta

- $|A| = 10$ mentre $|B \cup C| = 9$, quindi non può esserci una funzione iniettiva da A a $B \cup C$ e per lo stesso motivo non può esserci una funzione surgettiva da $B \cup C$ ad A.
- La risposta corretta è la 2 ed un esempio di funzione iniettiva in questo caso è l'applicazione identica $f(x) = x$ che possiamo utilizzare perché $B \cup C \subset A$.

Domanda 5

Il Teorema di divisione tra interi relativi afferma che dati due interi $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, esistono unici due interi relativi q, r, con $0 \leq r < |b|$ tali che

1. $a = b + q \cdot r$
2. $a = b + r + q$
3. $a = q \cdot b + r$

Domanda 5: Risposta

- Oviamente la risposta corretta è la 3 e q è il quoziente e r è il resto.

Domanda 6

Se utilizziamo l'algoritmo di Euclide per calcolare $MCD(100, 30)$ abbiamo le seguenti serie di uguaglianze (e computazioni)

1. $MCD(100, 30) = MCD(50, 15) = MCD(10, 5) = MCD(5, 0)$
2. $MCD(100, 30) = MCD(30, 10) = MCD(10, 0)$
3. $MCD(100, 30) = MCD(20, 6) = MCD(10, 3) = MCD(3, 1)$

Domanda 6: Risposta

- L'algoritmo di Euclide è basato sulla uguaglianza $MCD(a, b) = MCD(b, r)$ se $b \neq 0$ e r il resto della divisione a/b. Se invece $b = 0$ allora $MCD(a, 0) = 0$.
- Nel nostro caso, quindi, $MCD(100, 30) = MCD(30, 10) = MCD(10, 0) = 10$.

Domanda 7

Per quali delle seguenti coppie di interi (a, b), l'uguaglianza $a \bmod b = 6$ è falsa?

1. $(-4, -10)$
2. $(-4, 10)$
3. $(4, -10)$

Domanda 7: Risposta

$$
\begin{array}{rcll}
-4 \bmod -10 & \Rightarrow & -4 = 1 \cdot (-10) + 6 \quad \text{e quindi} & -4 \bmod -10 = 6 \\
-4 \bmod 10 & \Rightarrow & -4 = -1 \cdot 10 + 6 \quad \text{e quindi} & -4 \bmod 10 = 6 \\
4 \bmod -10 & \Rightarrow & 4 = 0 \cdot (-10) + 4 \quad \text{e quindi} & 4 \bmod -10 = 4
\end{array}
$$

Domanda 8

Quanto vale $3^{20} \bmod 11$?

1. 1
2. 5
3. 7

Domanda 8: Risposta

$$
\begin{aligned}
3^{20} \bmod 11 &= (3^4)^5 \bmod 11 = 81^5 \bmod 11 = \\
&= (81 \bmod 11)^5 \bmod 11 = 4^5 \bmod 11 = \\
&= 2^10 \bmod 11 = (2^5)^2 \bmod 11 = \\
&= 32^2 \bmod 11 = (32 \bmod 11)^2 \bmod 11 = \\
&= 10^2 \bmod 11 = 100 \bmod 11 = 1.
\end{aligned}
$$

Domanda 9

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ quanti sono i suoi sottoinsiemi di cardinalità 3?

1. Tanti quanti quelli di cardinalità 7
2. Tanti quanti quelli di cardinalità 6
3. Meno di 100

Domanda 9: Risposta

- Il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di cardinalità n si calcola con il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$
- quindi nello specifico $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$.
- dalla definizione di coefficiente binomiale abbiamo che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Quindi la risposta alla domanda è la 1

Domanda 10

Il teorema binomiale di Newton afferma che dati a e b numeri reali vale l'uguaglianza:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n \cdot b^k$
2. $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$
3. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

Domanda 10: Risposta

- La risposta corretta è ovviamente la 3

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Domanda 11

Qual è la probabilità che lanciando 3 monete escano 2 teste?

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{8}$
3. $\frac{8}{15}$

Domanda 11: Risposta

- Lo spazio degli eventi ha cardinalità 8

$$(TTT), (TTC), (TCT), (TCC), (CTT), (CTC), (CCT), (CCC)$$

- il numero degli eventi dove ci sono 2 teste è 3
- Risposta corretta la 2.

Domanda 12

Dato un mazzo di 52 carte, supponiamo di estrarre una carta a caso. Se una carta di cuori ci fermiamo. Altrimenti, rimettiamo la carta nel mazzo e riproviamo. Quante estrazione ci aspettiamo di dover fare prima di pescare una carta di cuori?

1. 4
2. 8
3. 13

Domanda 12: Risposta

- Nel mazzo ci sono 13 carte di cuori, 13 di picche, 13 di fiori e 13 di quadri.
- La probabilità di pescare una carta di cuori è allora $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- Per la prova di Bernoulli, allora, il numero atteso di tentativi è 4.

Domanda 13

Sia G un grafo non orientato con 10 vertici. Quali delle seguenti affermazioni non è sicuramente falsa.

1. Esiste un solo vertice che ha grado dispari e nessun vertice di grado 0
2. Esiste un solo vertice che ha grado pari e nessun vertice di grado 0
3. Esiste un solo vertice che ha grado 0

Domanda 13: Risposta

- Come conseguenza dell'Handshaking Theorem abbiamo che il numero dei vertici di grado dispari è un numero pari.
- Quindi la risposta 1 e la 2 (che implicherebbe 9 vertici di grado dispari) sono sicuramente false.
- La risposta 3 potrebbe essere vera. Basta considerare un grafo in cui uno solo dei vertici non ha archi incidenti.

Domanda 14

Sia dato il grafo bipartito completo $K_{5,4}$. Quanti sono i suoi archi?

1. 9
2. 20
3. 25

Domanda 14: Risposta

- Dato $K_{5,4}$ l'insieme dei vertici V si può partizionare in due insiemi V_1 e V_2 tali che $|V_1| = 5$ e $|V_2| = 4$.
- Ogni vertice di V_1 è connesso da un arco ad ogni vertice di V_2 (e solo ad essi).
- Quindi il grado di ogni vertice di V_1 è 4. La somma dei gradi dei vertici di V_1 ci fornisce il numero di archi totali: 20.

Domanda 15

Sia dato un grafo G con 10 vertici. Per quale dei seguenti valori del numero degli archi, possiamo sicuramente dire che il grafo non è planare?

1. 15
2. 20
3. 25

Domanda 15: Risposta

- Condizione necessaria perché un grafo con $|V| \geq 3$ vertici sia planare è che $|E| \leq 3|V| - 6$.
- Potremmo anche avere grafi non planari con $|E| \leq 3|V| - 6$ ma di sicuro se $|E| > 3|V| - 6$ allora il grafo non è planare.
- Nel nostro caso $3|V| - 6 = 24$. Quindi, se $|E| = 25$ il grafo sicuramente non è planare.

Domanda 16

Sia G con 100 vertici, tale che ogni suo vertice è connesso a non più di 20 vertici. Qual è il numero minimo di colori sufficienti per colorare il grafo?

1. 20
2. 21
3. 22

Domanda 16: Risposta

- Il teorema di Brooks ci assicura che il numero cromatico di un grafo $\chi(G)$ è minore od uguale al grado massimo dei suoi vertici aumentato di 1.
- Nel nostro caso allora $\chi(G) \leq 20 + 1 = 21$.
- Quindi, la risposta corretta è la 2.

Domanda 17

Il numero 234432 è divisibile per 99?

1. Si.
2. No. Però è divisibile per 9.
3. No. Però è divisibile per 11.

Domanda 17: Risposta

- La radice numerica del numero dato è 9 quindi è divisibile per 9.
- La somma delle cifre di posto dispari $2 + 4 + 3$ è uguale a quella delle cifre di posto pari $3 + 4 + 2$ quindi è divisibile per 11.
- Risulta allora divisibile per $9 \cdot 11 = 99$.

Domanda 18

Quanto vale $\phi(1000)$?

1. 200
2. 300
3. 400

Domanda 18: Risposta

$$\phi(1000) = \phi(10^3) = \phi(2^3 \cdot 5^3) = (2^3 - 2^2) \cdot (5^3 - 5^2) = 4 \cdot 100 = 400$$

Domanda 19

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe k è definito come

1. Il numero delle applicazioni iniettive da un insieme di k elementi in un insieme di n elementi
2. Il numero delle applicazioni iniettive da un insieme di n elementi in un insieme di k elementi
3. Il numero delle applicazioni surgettive da un insieme di n elementi in un insieme di k elementi

Domanda 19: Risposta

- Ovviamente, data la definizione, la risposta corretta è la 1.

Domanda 20

Qual è la probabilità di estrarre un figura (K, Q, J) dal mazzo di 52 carte?

1. ($\frac{3}{13}$
2. ($\frac{4}{15}$
3. ($\frac{5}{16}$

Domanda 20: Risposta

- Le figure sono 12 quindi la probabilità di estrarne una è

$$\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

Domanda 21

Se abbiamo 2 eventi A e B tali che $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Supponiamo che $P(A|B) = \frac{1}{2}$. Qual è la probabilità che si verifichi B dato A?

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{3}{4}$

Domanda 21: Risposta

- Utilizziamo la regole di Bayes e otteniamo

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

- Risposta corretta la 3.

Domanda 22

Supponiamo di avere un dado le cui 6 facce hanno come valori i primi 6 numeri dispari: $1, 3, 5, 7, 9, 11$. Qual è il valore atteso che si ottiene lanciando il dado?

1. 6
2. 8
3. 10

Domanda 22: Risposta

- I valori sono equiprobabili, quindi $E[X] = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11)/6 = 36/6 = 6$.

Domanda 23

Sia G un grafo non orientato. Il grafo si dice regolare di ordine k

1. Se ha esattamente k vertici ed è connesso.
2. Se possiede esattamente k archi
3. Se i vertici del grafo hanno tutti lo stesso grado k

Domanda 23: Risposta

- La risposta è ovviamente la 3.

Domanda 24

Dato il grafo rappresentato dalla seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il grafo è Euleriano? Esiste anche un cammino (non ciclo) Hamiltoniano?

1. E' euleriano ma non hamiltoniano.
2. Non è euleriano ma è hamiltoniano
3. Il grafo è sia euleriano che hamiltoniano.

Domanda 24: Risposta

- Il grafo ha solo 2 vertici di grado dispari, il vertice 6 ed il vertice 2 quindi è euleriano.
- Il seguente cammino passa per tutti i vertici: $6 - 3 - 2 - 1 - 5 - 4$.
- Quindi la risposta corretta è la 3.

Domanda 25

Dato il grafo rappresentato dalla seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quali sono i suoi gradi di connessione h, k rispetto agli archi e rispetto ai vertici?

1. $1, 1$
2. $2, 1$
3. $2, 2$

Domanda 25: Risposta

- Il vertice 6 ha un solo arco adiacente, ossia l'arco che va dal vertice 6 al vertice 3. Eliminando tale arco il vertice è disconnesso.
- Ovviamente, ciò implica che se eliminiamo il vertice 3 il grafo risultante è disconnesso.
- Quindi la risposta esatta è la 1.

Domanda 26

Sia G un grafo planare connesso con 100 vertici e 200 archi. Dopo averlo disegnato sul piano, quante sono le facce?

1. 102
2. 120
3. 210

Domanda 26: Risposta

- Il teorema di Eulero ci dice che $v - e + f = 2$
- Quindi, se $v = 100$ e $e = 200$ deve necessariamente essere $f = 102$.

Domanda 27

Dati 3 insiemi A, B, C quali delle seguenti uguaglianze è vera?

1. $C \cup (A \cap B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$
2. $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$
3. $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cup (C \cap B)$

Domanda 27: Risposta

- Gli operatori di unione ed intersezione si distribuiscono l'uno sull'altro, quindi la risposta corretta è la 2. Verifichiamola
- Se $x \in C \cup (A \cap B)$ allora 2 casi sono possibili
    - Caso 1: $x \in C$. Ciò implica che $x \in (C \cup A)$ e $x \in (C \cup B)$ e quindi $x \in (C \cup A) \cap (C \cup B)$
    - Caso 2: $x \in A \cap B$. Ciò implica che $x \in A$ e $x \in B$ e quindi $x \in (C \cup A) \cap (C \cup B)$
- Viceversa se $x \in (C \cup A) \cap (C \cup B)$ vuol dire che $x \in (C \cup A)$ e $x \in (C \cup B)$ quindi o appartiene a C e di conseguenza $x \in C \cup (A \cap B)$ oppure, se $x \notin C$ allora $x \in A$ e $x \in B$ e quindi $x \in (A \cap B)$ che implica $x \in C \cup (A \cap B)$.

Domanda 28

Sia data la famiglia di insiemi $F = \{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{4,5,6\},\{4,5\}\}$. Quanti insiemi appartengono alla chiusura rispetto all'unione di F?

1. 8
2. 9
3. 10

Domanda 28: Risposta

- La chiusura di F è la famiglia

$$\begin{gathered}\{\{1,2,3,4,5,6\},\\ \{1,2,3,4,5\},\{1,2,4,5,6\},\\ \{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\},\\ \{4,5,6\},\\ \{1,2\},\{4,5\}\}\end{gathered}$$

  che ha 8 elementi.
- Quindi la risposta corretta è la 1

Domanda 29

Sia data la famiglia di insiemi
$F = \{\{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{4, 5\}, \{3, 6\}\}$. Quali dei seguenti insiemi è un hitting sit minimale?

1. $\{3, 4, 6\}$
2. $\{1, 4, 5\}$
3. $\{3, 5, 6\}$

Domanda 29: Risposta

- $\{3,4,6\}$ non è minimale perché $\{3,4\}$ è un hitting set
- $\{1,4,5\}$ non è neppure un hitting set perché non interseca $\{3,6\}$
- $\{3,5,6\}$ è minimale perché è un hitting set, ma $\{5,6\}$, $\{3,6\}$ e $\{3,5\}$ non lo sono.
- Quindi la risposta corretta è la 3

Domanda 30

Sia data la seguente relazione definita sui numeri interi:

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : x, y \text{ sono entrambi pari}\}$$

Quali delle seguenti proprietà non è verificata da R ?

1. riflessiva
2. simmetrica
3. transitiva

Domanda 30: Risposta

- R non è riflessiva, perché se y è dispari allora $(y, y) \notin R$.
- R è simmetrica perché se x, y sono pari lo sono anche y e x
- R è transitiva perché se x, y sono pari e y, z sono pari, allora x, z sono pari.
- Quindi la risposta corretta è la 1

Domanda 31

Sia data la seguente relazione di equivalenza definita sui numeri interi:

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : x + y \text{ è un numero pari}\}$$

Quante sono le classi di equivalenza di R ?

1. 1
2. 2
3. infinite

Domanda 31: Risposta

- Per capire quante sono le classi di equivalenza, cominciamo con il vedere in quale classe stanno 0 e 1.
- $0 + x$ è pari se x è pari. Quindi, $[0] = \{n : n \text{ è pari}\}$.
- $1 + x$ è pari se x è dispari. Quindi, $[1] = \{n : n \text{ è dispari}\}$.
- Dal momento che $[0] \cup [1] = \mathcal{N}$ ne concludiamo che le classi di equivalenza di R sono 2.

Domanda 32

Sia $h \geq 4$ un numero pari. Allora possiamo dire che

1. $2^h - 1 \equiv 0 \bmod 3$
2. $2^h - 1 \equiv 1 \bmod 3$
3. $2^h - 1 \equiv 2 \bmod 3$

Domanda 32: Risposta

- Come già dimostrato, $2^h \equiv 1 \bmod 3$ se h è pari.
- Infatti $2 \equiv (-1) \bmod 3$ da cui, per l'invarianza rispetto al prodotto, otteniamo $2^h \equiv (-1)^h \bmod 3$.
- Quindi $2^h - 1 \equiv 0 \bmod 3$.
- La risposta corretta è la 1.

Domanda 33

Dati gli interi 22 e 23 e le loro traiettorie della sequenza di Collatz, quali dei due numeri ha la traiettoria più lunga?

1. 22
2. 23
3. le due traiettorie hanno la stessa lunghezza

Domanda 33: Risposta

- Traiettoria di 22

$$22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$$

- Traiettoria di 23

$$23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$$

- La risposta corretta è la 3.

Domanda 34

Cosa possiamo dire delle 2 seguenti domande sui numeri primi?

- I numeri primi sono infiniti?
- I numeri primi gemelli sono infiniti?

1. La risposta per entrambe le domande è positiva
2. La risposta per entrambe le domande è negativa
3. Entrambe le risposte 1 e 2 sono sbagliate.

Domanda 34: Risposta

- Sappiamo che i numeri primi sono infiniti, ma non abbiamo ancora una risposta per la seconda domanda.
- La risposta corretta è dunque la 3.

Domanda 35

Dati i due interi 34.321 e 175.513 il loro prodotto è uguale a

1. 6.023.781.673
2. 6.033.781.673
3. 6.033.681.683

Domanda 35: Risposta

- Calcoliamo le radici numeriche: $\rho(34.321) = 4$, $\rho(175.513) = 4$ quindi il loro prodotto deve avere radice numerica $\rho(16) = 7$.
- $\rho(6.023.781.673) = \rho(43) = 7$.
- $\rho(6.033.781.673) = \rho(44) = 8$.
- $\rho(6.033.681.683) = \rho(44) = 8$.
- Quindi la 2 e la 3 sono di sicuro sbagliate. La risposta può essere solo la 1.

Domanda 36

Qual è l'inverso di 5 modulo 21 ?

1. 16
2. 17
3. 18

Domanda 36: Risposta

- 5 e 21 sono coprimi, quindi l'inverso di 5 modulo 21 esiste.
- Per il teorema di Eulero, se n ed m sono coprimi allora $n^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod m$.
- Quindi l'inverso di 5 modulo 21 è $5^{\phi(21)-1} \bmod 21 = 5^{11} \bmod 21$
- Dal momento che $5^2 = 25 \equiv 4 \bmod 21$ abbiamo

$$5^{11} \bmod 21 \equiv 4^5 \cdot 5 \bmod 21 \equiv 2^{10} \cdot 5 \bmod 21$$

  continuando

$$(2^{10}) \cdot 5 \bmod 21 \equiv (2^5)^2 \cdot 5 \equiv (32 \bmod 21)^2 \cdot 5 \equiv 11^2 \cdot 5 \bmod 21$$

  quindi

$$(121 \bmod 21) \cdot 5 \equiv 16 \cdot 5 \equiv 80 \bmod 21 \equiv 17 \bmod 21$$

- Verifichiamo $5 \cdot 17 = 85 = 4 \cdot 21 + 1$.

Domanda 37

Se lanciate una moneta ed un dado, qual è la probabilità di ottenere testa e 6 ?

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{1}{10}$
3. $\frac{1}{12}$

Domanda 37: Risposta

- I due eventi sono indipendenti e quindi la probabilità che si verifichino entrambi è data dal prodotto delle probabilità

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Domanda 38

Se lanciate due dadi e sommate i risultati, qual è la probabilità di ottenere un risultato maggiore di 8?

1. $\frac{2}{9}$
2. $\frac{4}{21}$
3. $\frac{5}{18}$

Domanda 38: Risposta

- I casi possibili in totale sono 36
- Entrambi i dadi, però devono avere un valore maggiore od uguale a 3 altrimenti il totale non potrà essere maggiore di 8.
- Quindi, i casi da analizzare sono 16 e di questi quelli che danno un totale maggiore di 8 sono i seguenti 10

Dado 1	Dado 2	Totale
3	6	9
4	5	9
4	6	10
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	3	9
6	4	10
6	5	11
6	6	12

- Quindi probabilità di avere un totale maggiore di 8 è $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Domanda 39

In una classe ci sono 15 ragazzi e 10 ragazze. Se ne prendiamo 3 a caso, qual è la probabilità di prendere 2 ragazzi e 1 ragazza?

1. $\frac{21}{46}$
2. $\frac{24}{55}$
3. $\frac{27}{60}$

Domanda 39: Risposta

- Il numero totale di gruppi di 3 studenti è $\binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 2300$.
- Abbiamo 10 modi di scegliere una ragazza da un gruppo di 10 e $\frac{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ modi di scegliere 2 ragazzi da un gruppo di 15.
- In totale, allora, il numero di possibili gruppi 1 ragazza più 2 ragazzi è $10 \cdot 105 = 1050$.
- La probabilità cercata è allora

$$\frac{1050}{2300} = \frac{105}{230} = \frac{21}{46}$$

Domanda 40

Sia G un grafo planare e G' un grafo isomorfo a G. Il grafo G' è planare?

1. Si.
2. Dipende dal suo numero di vertici.
3. Dipende dal suo numero di archi

Domanda 40: Risposta

- Due grafi isomorfi hanno lo stesso numero di vertici e lo stesso numero di archi.
- Utilizzando l'isomorfismo, il grafo G' potrà essere disegnato nel piano esattamente come G.
- Quindi, anche G' è planare

Domanda 41

Sia dato un grafo $G = (V, E)$, sia $V' \subseteq V$ e $G' = (V', E')$ il sottografo indotto da V'. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

1. Se G è aciclico anche G' lo è.
2. Se G' è planare anche G lo è.
3. Se G è connesso anche G' lo è.

Domanda 41: Risposta

- Ovviamente, se un grafo è aciclico ogni suo sottografo lo è. Quindi, la risposta 1 è sicuramente vera.
- La 2 non è sicuramente vere perché la planarità di un sottografo non implica la planarità del grafo di partenza. Esempio K_4 (planare) e K_5 non planare.
- La connessione di G non implica la connessione di G'. Immaginate un grafo con 3 vertici e 2 archi $(a, b), (b, c)$. Se rimuoviamo b otteniamo un grafo con 2 nodi disconnessi.

FINE RIEPILOGO

ESERCITAZIONI