Augusto e i Senatori

Dividiamo i senatori in $n/2$ coppie e ad ogni coppia (a, b) chiediamo ad a la sua opinione su b e a b la sua opinione su a

Per semplicità indichiamo con 1 la risposta "il senatore è onesto" e con 0 la risposta "il senatore è corrotto"

Es: La coppia (a, b) sarà indicata con $(0, 1)$ se b dirà che a è onesto e a dirà che b è corrotto

Indichiamo inoltre con il simbolo H ~~oppure~~ oppure D la vera identità di un senatore

H : onesto $\qquad$ D : corrotto

A questo punto siano

x il numero delle coppie (H, H)

m il numero delle coppie $(1, 1)$

Partiamo con la seguente osservazione

$(0,0) \in \{(D,D),(D,H),(H,D)\}$

$(0,1) \in \{(D,D),(H,D)\}$

$(1,0) \in \{(D,D),(D,H)\}$

$(1,1) \in \{(D,D),(H,H)\}$

Dunque in ogni coppia diversa da $(1,1)$ vi è al più un solo sciatore onesto

Poiché i sciatori onesti sono più della metà le coppie del tipo (H,H) dovranno essere almeno 1.

(Ricordiamo che abbiamo indicato con X il numero di tali coppie)

Adesso dimostriamo che

$$X \geq \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$$

Sia ℓ il numero di coppie diverse da $(1,1)$ e y il numero di senatori onesti presenti in tali coppie

$$y + 2x \geq \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow x \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$$

↑ per ipotesi

Poiché $y \leq \ell \Rightarrow -y \geq -\ell$. Pertanto

$$x \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \geq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{n}{2} - \ell\right)}_{m} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{m}{2}$$

Quindi $x \geq \frac{1}{2} + \frac{m}{2}$

A questo punto la nostra strategia è la seguente. Scartiamo tutti i senatori appartenenti a coppie ~~(1,1)~~ diverse da $(1,1)$

Per le coppie $(1,1)$ scartiamo 1 senatore (a caso)

Per quanto detto sopra ci rimarranno n senatori

Di questi più della metà sono onesti

Perché?

Precedentemente abbiamo dimostrato che

$$x \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{2}$$

Ovvero il numero di coppie che contengono solo onesti (x) è più grande della metà di n (numero di coppie (1,1))

Torniamo alla nostra strategia

Se $n \leq 2$ abbiamo finito perché entrambi i senatori rimasti saranno onesti

Altrimenti ripetiamo il ragionamento appena fatto con una variante: se n è dispari chiediamo agli altri senatori l'opinione sul giocatore rimasto "spaiato" e stabiliamo la sua identità per maggioranza (in caso di parità il giocatore è onesto)

Nel caso peggiore il numero di opinioni richieste dalla nostra strategia è

$$n + 2\frac{n}{2} + 2\frac{n}{4} + \dots + 2\frac{n}{2^{\log n}} + (n-1) \simeq$$

per gestire il caso dispari

costo per determinare l'intera lista

$$\simeq 3n + \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + \frac{n}{2^{\log n}}\right) \leq$$

$$\leq 3n + n \sum_{i=1}^{\log n} \frac{1}{2^i} \leq$$

SOMMA GEOMETRICA $\sum_{i=0}^{k} x^i$

per $|x| < 1$ si ha $\sum_{i=0}^{k} x^i \leq \frac{1}{1-x}$

nel nostro caso $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 2$

$\leq 3M + 2M = 5M$