Appunti di Matematica Discreta - Algebra lineare

7 ottobre 2011

AVVISO: I presenti appunti possono contenere (anzi sicuramente conterranno) errori e/o ripetizioni. Essi sono infatti opera di vari collage e, per ovvie questioni di tempo, non sono stati rivisti. Pertanto **non intendono sostituire alcun libro di teoria e/o esercizi** ma vogliono sopratutto essere un dettagliato programma del corso. Prego gli studenti di prestare particolare attenzione nella loro lettura e di informarmi sia direttamente che per e-mail (quattrocchi@dmi.unict.it) su qualunque errore (certo o sospetto) notato.

Cercherò di correggere nel più breve tempo possibile qualunque errore trovato. Pertanto questi appunti saranno continuamente aggiornati: la data dell'ultimo aggiornamento appare in prima pagina. Consiglio infine agli studenti di **non stamparli immediatamente** ma farlo il più tardi possibile (per lo meno alcuni giorni dopo che l'argomento sia stato trattato a lezione).

Indice

1 Insiemi e operazioni su di essi

Per comodità dello studente richiamiamo alcuni concetti elementari di teoria degli insiemi.

Il concetto di *insieme* è primitivo ed è sinonimo di classe, totalità. Sia A un insieme di elementi qualunque. Per indicare che *a è un elemento di A* scriveremo $a \in A$. Se A e B sono insiemi, diremo che A è un *sottoinsieme* di B e scriveremo $A \subseteq B$ se ogni elemento di A è un elemento di B. Fra i sottoinsiemi di B ci sono in particolare B stesso e l'insieme vuoto che viene denotato con $\emptyset$. Due insiemi A e B si dicono *uguali*, $A = B$, se hanno gli stessi elementi. Cioè:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Diremo che un sottoinsieme A di B è *proprio*, se $A \neq B$ e scriveremo $A \subset B$.

Se A è un insieme, denoteremo con $P(A)$ l' insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A; $P(A)$ si dice *l'insieme delle parti di A*.

Esempio 1.1 Sia $A = \{1, 2, 3\}$. Allora $P(A) = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$ essendo $b_1 = \emptyset$, $b_2 = \{1\}$, $b_3 = \{2\}$, $b_4 = \{3\}$, $b_5 = \{1, 2\}$, $b_6 = \{1, 3\}$, $b_7 = \{2, 3\}$, $b_8 = \{1, 2, 3\}$.

Se A e B sono insiemi, diremo *unione* di A e B l'insieme $A \cup B$ costituito dagli elementi che stanno in A oppure in B, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$, diremo *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi comuni ad A e B, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$, mentre diremo *differenza* di A e B l'insieme $A - B$ degli elementi di A che non sono elementi di B, $A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Due insiemi si dicono *disgiunti* se la loro intersezione è l'insieme vuoto.

Se A è sottoinsieme di B diremo *complementare (o complemento)* di A in B l'insieme $B - A$ e lo denoteremo con $C_B A$. Se B è l'insieme ambiente il complementare di A in B verrà semplicemente denotato con CA.

Se A e B sono insiemi, definiamo *prodotto cartesiano* di A e B e lo denoteremo con $A \times B$, l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Proprietà

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (proprietà commutativa);
3. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (proprietà associativa);
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione);
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione);

7. $C(A \cap B) = CA \cup CB$, $C(A \cup B) = CA \cap CB$ (formule di De Morgan).

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente gli insiemi dei numeri naturali ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$), degli interi relativi ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$), dei numeri razionali ($\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$), dei numeri reali e dei numeri complessi.

2 Applicazioni

Siano A e B insiemi non vuoti.

Definizione 2.1 *Si dice* applicazione (o funzione) *di A in B, e si denota con $f : A \to B$, una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in A$* ***uno ed un solo elemento*** *$f(x) \in B$.*

Un'applicazione si dice:

- *iniettiva* se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, cioè se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ o anche da $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
- *suriettiva* (od anche: *su tutto*) se ogni elemento di B è il corrispondente di qualche elemento di A, cioè se $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tale che $y = f(x)$;
- *biiettiva* se è iniettiva e suriettiva; una applicazione biiettiva di A in B è detta pure una *corrispondenza biunivoca* fra A e B.

Esempio 2.1 Siano $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{R}$ quello dei numeri reali. La legge $f(n) = \frac{1}{n-1}$, non definisce un'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, perchè non esiste $f(1)$. Essa può però essere vista come un'applicazione $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$.

Esempio 2.2 Sia $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali non negativi. La legge f che ad ogni $a \in \mathbb{R}^+$ associa quel numero o quei numeri $b \in \mathbb{R}$ tali che $b^2 = a$ **non** é un'applicazione. Infatti, per esempio, al numero $4 \in \mathbb{R}^+$, la f associa sia 2 che -2. Invece la legge g che ad ogni $a \in \mathbb{R}^+$ associa quel numero o quei numeri $b \in \mathbb{R}^+$ tali che $b^2 = a$ é un'applicazione $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definita da $g(x) = \sqrt{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Esempio 2.3 Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi e sia $\mathbb{Q}$ l'insieme delle frazioni, ridotte ai minimi termini, $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. La legge $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(\frac{m}{n}) = m + n$, è un'applicazione. Si osservi che f non è iniettiva. Infatti si ha $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ ma $f(\frac{2}{3}) = f(\frac{3}{2})$.

Esempio 2.4 L'applicazione $i_A : A \to A$, definita dalla legge $i(x) = x \ \forall x \in A$, dicesi applicazione identica o unità, essa è iniettiva e suriettiva pertanto è biiettiva.

Esempio 2.5 L'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita dalla legge $f(n) = n+1$ è un' applicazione iniettiva ma non suriettiva perchè lo 0 non proviene da nessun elemento.

Definizione 2.2 *Sia $f : A \to B$ un'applicazione; dicesi immagine di f e si indica con Imf, il sottoinsieme di B costituito dagli elementi che sono corrispondenti di qualche elemento di A. Cioè:*

$$Imf = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ tale che } y = f(x)\}.$$

Chiaramente f è suriettiva se e solo se $Imf = B$.

Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Se $b \in B$ indicheremo con $f^{-1}(b)$ l'insieme degli elementi $a \in A$ tali che $f(a) = b$. Poniamo cioè

$$f^{-1}(b) = \{a \mid a \in A \text{ e } f(a) = b\}.$$

Ovviamente se $b \notin Imf$ si ha $f^{-1}(b) = \emptyset$.

Definizione 2.3 Prodotto di applicazioni. *Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ applicazioni. Si definisce prodotto o composizione di f e g, l'applicazione di A in C ottenuta applicando successivamente prima f e poi g; essa viene denotata con $g \circ f$ ed è definita da*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in A.$$

Il prodotto di applicazioni gode della proprietà associativa cioè per $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ si ha $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definizione 2.4 Applicazione inversa. *Se l' applicazione $f : A \to B$ è biiettiva allora si può definire l'applicazione inversa $f^{-1} : B \to A$ come segue: $\forall y \in B$, $f^{-1}(y)$ è l' unico elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$.*

Chiaramente è:

- $f \circ f^{-1} = i_B$,
- $f^{-1} \circ f = i_A$,
- $(f^{-1})^{-1} = f$.

Sulla composizione di due applicazioni si hanno vari risultati, alcuni dei quali sono richiamati nelle due seguenti proposizioni. La dimostrazione della Proposizione 2.1 è lasciata allo studente come esercizio.

Proposizione 2.1 *Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ applicazioni.*

1. *Se f e g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva.*
2. *Se f e g sono suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva.*
3. *Se f e g sono biettive allora $g \circ f$ è biiettiva.*
4. *Se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva.*

5. *Se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva.*

6. *Se $g \circ f$ è biettiva allora f è iniettiva e g è suriettiva.*

Proposizione 2.2 *Siano $f : A \to B$, $g : B \to A$ applicazioni, e inoltre $f \circ g = i_B$ e $g \circ f = i_A$, allora f e g sono entrambe biiettive e $g = f^{-1}$.*

Dimostrazione. Proviamo che f è biettiva, in modo analogo si prova la biettività di g.

- f è suriettiva: Sia $\overline{y} \in B$; si ha $g(\overline{y}) = \overline{x} \in A$, da cui $f(\overline{x}) = f(g(\overline{y})) = f \circ g(\overline{y}) = i_B(\overline{y}) = \overline{y}$.

- f è iniettiva: Siano $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Allora $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, $i_a(x_1) = i_A(x_2)$, $x_1 = x_2$.

Proviamo che $g = f^{-1}$. Cioè che per ogni $\overline{y} \in B$, $g(\overline{y}) = f^{-1}(\overline{y})$. Sia $\overline{x}$ l'unica soluzione (nella variabile x) dell'equazione $f(x) = \overline{y}$. Cioè $\overline{y} = f(\overline{x})$. Allora $f^{-1}(\overline{y}) = \overline{x}$. Quindi $g(\overline{y}) = g(f(\overline{x})) = g \circ f(\overline{x}) = i_a(\overline{x}) = \overline{x}$. ▮

Esercizio. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione così definita

$$f(n) = \begin{cases} +\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ e}' \text{ pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ e}' \text{ dispari} \end{cases} .$$

Dire se f è biunivoca oppure no.

Dati due insiemi non vuoti A e B possiamo considerare un nuovo insieme, denotato con B^A, costituito da tutte le applicazioni di A in B. Un caso particolarmente importante è il caso in cui $B = \{0, 1\}$ è l'insieme costituito da due elementi 0, 1; denoteremo tale insieme con il simbolo $\mathbf{2}$. Se $f \in \mathbf{2}^A$, cioè se $f : A \to \{0, 1\}$, allora $\forall x \in A$ si ha $f(x) = 0$ oppure $f(x) = 1$.

Se A è un insieme, per ogni suo sottoinsieme I, $I \subseteq A$, possiamo definire un'applicazione $f_I : A \to \{0, 1\}$ che caratterizza gli elementi di I, detta funzione caratteristica di I, nel seguente modo:

$$f_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin I \\ 1 & \text{se } x \in I \end{cases} .$$

Chiaramente $f_A : A \to \{0, 1\}$ è definita da $f_A(x) = 1 \ \forall x \in A$, mentre $f_\emptyset : A \to \{0, 1\}$ è definita da $f_\emptyset(x) = 0 \ \forall x \in A$.

Teorema 2.1 *Sia A un insieme. Esiste un'applicazione biunivoca fra gli insiemi $\mathbf{2}^A$ e $P(A)$.*

Dimostrazione. Definiamo due applicazioni φ, ψ come segue: $\varphi : \mathbf{2}^A \to P(A)$ associa ad ogni applicazione $f : A \to \mathbf{2}$ il sottoinsieme di A costituito dagli elementi $x \in A$ tali che

$f(x) = 1$; $\psi : P(A) \to \mathbf{2}^A$ associa ad ogni sottoinsieme $B \subseteq A$ l'applicazione $f : A \to \mathbf{2}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x \notin B \\ 1 & \text{se } \; x \in B \end{cases} .$$

È facile verificare le seguenti uguaglianze: $\varphi \circ \psi = i_{P(A)}$ e $\psi \circ \varphi = i_{\mathbf{2}^A}$. La Proposizione 2.2 completa la dimostrazione. ▮

Faremo uso del seguente assioma della teoria degli insiemi:

Assioma della scelta o di Zermelo. Sia A un insieme non vuoto. Esiste allora una applicazione che ad ogni sottoinsieme non vuoto $B \subseteq A$ associa un elemento appartenente a B.

3 Relazioni di equivalenza

Definizione 3.1 *Dicesi relazione binaria definita su un insieme non vuoto A, un sottoinsieme $R \subseteq A \times A$.*

Se $(a, b) \in R$ scriviamo anche aRb e diciamo che a sta nella relazione R con b. Esempi di relazioni binarie definite su A sono $A \times A$ stesso e la relazione identica I definita da aIb se e solo se $a = b$.

Si dice che una relazione binaria gode della proprietà:

- *riflessiva* se aRa per ogni $a \in A$,
- *transitiva* se da aRb e bRc segue aRc per $a, b, c \in A$,
- *antisimmetrica* se da aRb e bRa segue $a = b$ per $a, b \in A$,
- *simmetrica* se da aRb segue bRa per $a, b \in A$.

Definizione 3.2 Equivalenza. *Una relazione binaria definita sull'insieme non vuoto A si chiama relazione di equivalenza su A se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Se E è una relazione di equivalenza, invece di aEb scriveremo $a \equiv b$ (E) e leggeremo "a equivalente a b in E" o, quando non c'è possibilità di equivoco, scriveremo semplicemente $a \equiv b$ e leggeremo "a equivalente a b".

Definizione 3.3 *Sia A un insieme non vuoto. Dicesi partizione di A una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di A tale che ogni elemento di A sta in uno ed uno solo dei sottoinsiemi della famiglia. I sottoinsiemi della famiglia si dicono le classi della partizione.*

Teorema 3.1 *Una partizione di A definisce una relazione di equivalenza su A e viceversa.*

Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria) Per dimostrare che una partizione di A definisce una relazione di equivalenza su A, basta porre $a \equiv b \ (E)$ quando a e b stanno nella stessa classe della partizione: infatti si vede subito che gode delle tre proprietà: riflessiva, transitiva, simmetrica.

Viceversa, una relazione di equivalenza su A definisce una partizione di A. Infatti per ogni $a \in A$, consideriamo il sottoinsieme $C(a) \subseteq A$ costituito dagli elementi equivalenti ad a, cioè $C(a) = \{x \in A \mid x \equiv a\}$; si vede subito che la famiglia $\{C(a) \mid a \in A\}$ costituisce una partizione di A: infatti $a \in C(a)$ perchè $a \equiv a$; inoltre se è pure $a \in C(b)$ si ha $a \equiv b$; se allora x è un elemento qualunque di $C(b)$ è $x \equiv b$ e per le proprietà simmetrica e transitiva $x \equiv a$ cioè $x \in C(a)$ da cui $C(b) \subseteq C(a)$; analogamente $C(a) \subseteq C(b)$. Ne segue che ogni elemento di A sta in una e una sola classe della famiglia $\{C(a) \mid a \in A\}$. ∎

Definizione 3.4 (Insieme quoziente). *Sia E una relazione di equivalenza definita su A. Dicesi insieme quoziente di A rispetto ad E l'insieme, denotato con A/E, che ha come elementi le classi della partizione di A associata ad E. Cioè $A/E = \{C(a) \mid a \in A\}$.*

Se ad ogni $a \in A$ associamo la classe $C(a)$ cui esso appartiene, otteniamo una applicazione $\varphi_E : A \to A/E$ detta *applicazione canonica associata ad E*; si vede subito che φ_E è suriettiva ed è iniettiva se e solo se $E = I$.

Siano dati ora due insiemi A, B ed una applicazione $f : A \to B$ tra essi, allora si può definire su A una relazione di equivalenza E_f ponendo $a \equiv b \ (E_f)$ se $f(a) = f(b)$; tale relazione si dice relazione di equivalenza associata ad f.

4 Relazioni di ordinamento parziale

Definizione 4.1 (Ordinamento parziale). *Una relazione binaria definita su un insieme A si chiama relazione di ordinamento parziale se gode delle proprietà riflessiva, transitiva, antisimmetrica.*

Un insieme A con una relazione R di ordinamento parziale definita su di esso, si dice parzialmente ordinato, brevemente p.o..

Se R è una relazione di ordinamento parziale definita su A, per $a, b \in A$ scriveremo $a \leq b$ invece che aRb e leggeremo "a è minore od uguale a b". Se è $a \leq b$ ed $a \neq b$ allora scriveremo $a < b$ e leggeremo "a è strettamente minore di b".

Sia A un insieme p.o. e $a, b \in A$. Se $a \leq b$ oppure $b \leq a$ allora i due elementi a e b si dicono *confrontabili* . Un insieme p.o. in cui due qualunque elementi sono confrontabili, si dice un insieme *ordinato o linearmente ordinato o catena.*

Un elemento $a \in A$ si dice *minimo* (assoluto) di A se $a \leq x$ per ogni $x \in A$. Il minimo, quando esiste, è unico.

Un elemento $a \in A$ si dice *minimale o minimo relativo* di A se non c'è nessun elemento minore o uguale ad a distinto da a stesso, cioè se da $x \leq a$ segue $x = a$.

Definizione 4.2 (Insieme ben ordinato). *Un insieme p.o. si dice* ben ordinato *quando ogni suo sottoinsieme ha il minimo. Un insieme ben ordinato è anche ordinato.*

In modo del tutto analogo si danno le nozioni di massimo e di massimo relativo.

Minoranti e maggioranti. Estremo inferiore ed estremo superiore. Sia A un insieme p.o. e B un suo sottoinsieme. Si chiama *minorante* di B in A un elemento $a \in A$ tale che $a \leq x$ per ogni $x \in B$.

Si chiama *estremo inferiore* di B in A il massimo dei minoranti. Notiamo che non è detto che esistano minoranti di B in A e se ne esistono può darsi che il loro insieme non abbia massimo; pertanto l'estremo inferiore non sempre esiste.

L'estremo inferiore a di B in A è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

(i) $a \in A$ e $a \leq x$ per ogni $x \in B$;

(ii) se $b \in A$ è tale che $b \leq x$ per ogni $x \in B$ allora $b \leq a$.

Osserviamo che se l' estremo inferiore di B in A esiste ed è un elemento di B allora esso è il minimo di B; viceversa il minimo di B, se esiste, è anche l' estremo inferiore di B in A. In modo analogo si danno le definizioni di *maggioranti* e di *estremo superiore* di B in A.

Un insieme p.o. si dice *completo* quando ogni suo sottoinsieme ha estremo superiore e estremo inferiore. In particolare un insieme p.o. completo ha minimo e massimo.

Diagrammi di insiemi p.o. finiti. Assegnato un insieme p.o. finito $(A; \leq)$ è utile considerare il *diagramma* di A, ottenuto nel seguente modo. Si disegnano tanti punti quanti sono gli elementi dell'insieme, avendo l'accortezza di disegnare a più in basso di b se $a \leq b$; si congiungono poi due elementi a, b con un segmento se $a < b$ e non ci sono elementi maggiori di a e minori di b. Dal grafico che si ottiene si possono leggere con facilità tutte le proprietà dell'insieme p.o. A.

Condizioni equivalenti all' assioma di Zermelo. Le seguenti condizioni sono equivalenti all'assioma di Zermelo:

(i) (Teorema di Zermelo). Ogni insieme può essere ben ordinato.

(ii) (Lemma di Zorn). Se un insieme p.o. A gode della proprietà che ogni catena in esso contenuta ha un maggiorante allora A ha almeno un massimo relativo.

5 Cardinalità di un insieme

Definizione 5.1 *Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità o sono equipotenti, e si scrive $|A| = |B|$, se esiste un'applicazione biunivoca fra A e B.*

Esercizi.

1. Provare che $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri interi pari.
2. Provare che $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. Provare che $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$.

Definizione 5.2 *Si dice che A ha cardinalità maggiore di B, e si scrive $|A| > |B|$, se B è equipotente ad un sottoinsieme di A ed A e B non sono equipotenti.*

Proposizione 5.1 *Sia X non vuoto. L'equipotenza induce una relazione di equivalenza su $P(X)$.*

Definizione 5.3 *Un insieme si dice numerabile se ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Proposizione 5.2 *Sia A un insieme numerabile. Allora $A \times A$ è pure numerabile.*

Dimostrazione. Poichè A è numerabile possiamo numerare i suoi elementi. Quindi possiamo scrivere

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Disponiamo gli elementi di $A \times A$ nel quadro:
$(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots$
$(a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), \ldots$
$(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3), \ldots$
....
e stabiliamo la corrispondenza $f : \mathbb{N} \to A \times A$ come segue:
$f(1) = (a_1, a_1)$, $f(2) = (a_1, a_2)$, $f(3) = (a_2, a_1)$, $f(4) = (a_1, a_3)$, $f(5) = (a_2, a_2)$, $f(6) = (a_3, a_1)$, $\ldots$ e così via secondo il cosiddetto metodo diagonale di Cantor. ▮

Proposizione 5.3 *L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali hanno la stessa cardinalità.*

Proposizione 5.4 *La cardinalità di $\mathbb{N}$ è minore di quella di $\mathbb{R}$, cioè $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.*

Dimostrazione. Osservato che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ basta provare che $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{R}$ non sono equipotenti. Supponiamo per assurdo che esista la biiezione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ così definita (i numeri reali sono scritti in forma di numeri decimali illimitati non periodici di periodo 9):
$f(0) = \pm a_0, c_{01}c_{02}c_{03} \ldots c_{0n} \ldots$
$f(1) = \pm a_1, c_{11}c_{12}c_{13} \ldots c_{1n} \ldots$
....
$f(n) = \pm a_n, c_{n1}c_{n2}c_{n3} \ldots c_{nn} \ldots$
....

Considerato il numero $\alpha = 0, c_0c_1 \ldots c_n \ldots$ con $c_0 \neq 9, c_{01},\ c_1 \neq 9, c_{12},\ c_2 \neq 9,\ c_{23},\ \ldots,$ $c_n \neq c_{n,n+1}$,9 ... si ha che $\forall n \in N\ f(n) \neq \alpha$. Ma questo è un assurdo perchè avevamo supposto $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. ∎

Definizione 5.4 *Un insieme si dice avere la cardinalità o potenza del continuo se ha la stessa cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.*

Proposizione 5.5 *Per ogni insieme A è $|A| < |P(A)| = |\mathbf{2}^A|$.*

Dimostrazione. Anzitutto $P(A)$ contiene il sottoinsieme costituito dalle parti di A che possiedono un solo elemento e quindi otteniamo una applicazione iniettiva di A in questo sottoinsieme di $P(A)$. Proviamo adesso che non può esistere un'applicazione suriettiva di A in $P(A)$, e quindi A e $P(A)$ non sono equipotenti. Supponiamo per assurdo che esista una applicazione suriettiva $f : A \to P(A)$; sia $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. B è un sottoinsieme di A e quindi, per la suriettività di f esiste $b \in A$ tale che $f(b) = B$. Due casi sono possibili: $b \in f(b) = B$ allora per definizione deve essere $b \notin B$ oppure $b \notin f(b) = B$ allora per definizione $b \in B$; in entrambi i casi si ha l'assurdo. ∎

Definizione 5.5 *Un insieme si dice finito se è vuoto oppure se, per qualche $n \in \mathbb{N}$, è equipotente all'insieme $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ formato dai primi n numeri naturali.*

Definizione 5.6 *Un insieme si dice infinito se non è finito.*

Proposizione 5.6 *Sia A un insieme. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(*i*) *A è infinito.*

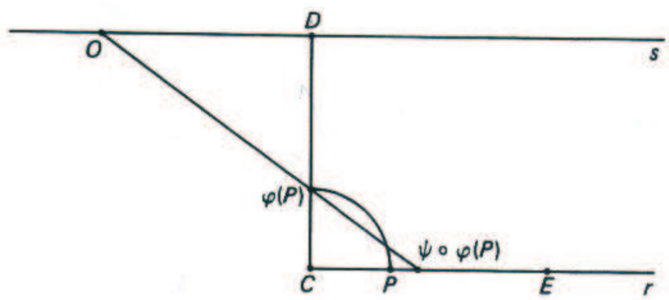
(*ii*) *A possiede un sottoinsieme numerabile.*

(*iii*) *A è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.*

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. A non è vuoto. Sia $a_1 \in A$; è $\{a_1\} \neq A$ perchè A è infinito. Sia $a_2 \in A$ con $a_2 \neq a_1$; è $\{a_1, a_2\} \neq A$. Sia $a_3 \in A$ con $a_3 \neq a_1, a_2$, e così via costruiamo un sottoinsieme numerabile $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subseteq A$. Osserviamo che in questa prova si è fatto uso

dell'assioma di Zermelo.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sia $N \subseteq A$ un sottoinsieme numerabile; indichiamo con $a_1, a_2, \ldots$ gli elementi di N; consideriamo il seguente sottoinsieme A' di A, $A' = (A - N) \cup \{a_2, a_4, a_6 \ldots\}$. Si ha $A' \neq A$ perchè $a_1 \notin A'$ ed inoltre A' è equipotente ad A: basta infatti considerare l'applicazione $f : A' \to A$ definita da $f(x) = x$ se $x \in A - N$ ed $f(a_{2n}) = a_n$ per $n = 1, 2, \ldots$
$(iii) \Rightarrow (i)$. Un insieme finito non è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Tale fatto, che sembra piuttosto evidente, può essere facilmente dimostrato mediante induzione. ∎

Diamo un esempio di un insieme che si può mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.



Siano: r una semiretta con origine in C, CE un segmento su r, CD un segmento perpendicolare ad r e tale che $CD = CE$ ed s una retta parallela ad r e passante per D. Detti $\mathcal{A}$ l'insieme dei punti di CE diversi da E, e $\mathcal{B}$ l'insieme dei punti di CD diversi da D, per ogni punto $P \in \mathcal{A}$, la circonferenza di centro C e raggio CP interseca CD in un punto $\varphi(P) \in \mathcal{B}$ e resta così definita un'applicazione $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ biiettiva. Proiettando da O i punti di CD diversi da D su r si ottiene un'applicazione biiettiva ψ dall'insieme $\mathcal{B}$ nell'insieme dei punti di r; dunque $\psi \circ \varphi$ risulta un'applicazione biiettiva dall'insieme dei punti del segmento CE diversi da E nell'insieme dei punti di r.

Esercizio. Stabilire una corrispondenza biunivoca fra **tutti** i punti del segmento CE (E compreso) e i punti della semiretta r.

Ipotesi del continuo. L'ipotesi del continuo afferma che se un insieme infinito A ha cardinalità minore della potenza del continuo, allora A è numerabile. È stato provato che sia l'ipotesi del continuo che la sua negazione sono entrambe compatibili con gli usuali assiomi della teoria degli insiemi.

6 Operazioni algebriche binarie

Definizione 6.1 *Dato un insieme $M \neq \emptyset$, chiamiamo operazione algebrica binaria definita su M una qualunque applicazione f che associa ad ogni coppia ordinata $(a, b) \in M \times M$ uno ed un solo elemento c appartenente ad M.*

$$f \ : \ M \times M \to M \qquad \forall (a, b) \in M \times M \qquad f(a, b) = c \in M.$$

L'operazione f viene indicata, a seconda del caso particolare che si sta studiando, con i simboli: $*$, $\circ$, $\oplus$, $\otimes$, $\ldots$. Per esempio si scrive $a * b = c$ invece di $f(a,b) = c$, ecc.

Esempi.

1. La somma e il prodotto introdotte in $\mathbb{N}$ sono operazioni algebriche binarie, mentre la sottrazione e la divisione non lo sono.

2. Sia $P = 2\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri pari e D quello dei numeri dispari, la somma è un'operazione algebrica binaria definita su P, mentre non lo è su D.

3. Sono esempi di operazioni algebriche binarie definite su $\mathbb{N}^*$ [1]

   - l'applicazione f che associa alla coppia (a,b), di elementi distinti o no, la potenza che ha per base il primo elemento e per esponente il secondo elemento: $f(a,b) = a^b$ cioè $a * b = a^b$;
   - l'applicazione f che associa alla coppia $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il loro MCD: $a \circ b = M.C.D.(a,b)$.

Si dice che l'operazione $*$ definita su M gode della *proprietà commutativa* se:

$$\forall a, b \in M \text{ si verifica che } a * b = b * a.$$

Le operazioni $+$ e $\cdot$ sugli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono commutative; le operazioni $-$ in $\mathbb{Z}$ e $/$ in $\mathbb{Q}^*$, come pure l'elevamento a potenza in $\mathbb{N}^*$ non sono commutative.

L'operazione $*$ definita su M gode della *proprietà associativa* se:

$$\forall a, b, c \in M \text{ si verifica che } (a * b) * c = a * (b * c).$$

Le operazioni $+$ e $\cdot$ su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ sono associative.

Le seguenti operazioni non sono associative:

- *l'elevamento a potenza* in $\mathbb{N}^*$; infatti ad esempio è $(2 * 3) * 4 \neq 2 * (3 * 4)$, avendosi $(2 * 3) * 4 = 2^3 * 4 = (2^3)^4 = 212$ e $2 * (3 * 4) = 2 * 3^4 = 2^(3^4) = 281$.

- *la sottrazione* in $\mathbb{Z}$, infatti ad esempio è $8-(5-2) \neq (8-5)-2$, avendosi $8-(5-2) = 8-3 = 5$ e $(8-5)-2 = 3-2 = 1$.

Esempi.

1. Sia M un insieme non vuoto e $*$ l'operazione su di esso definita in modo tale che: $\forall a, b \in M$, $a * b = b$. Tale operazione è associativa, infatti è $(a * b) * c = a * (b * c)$, avendosi $(a * b) * c = b * c = c$ e $a * (b * c) = a * c = c$; ma non è commutativa, a meno che l'insieme sia costituito da un unico elemento, cioè $|M| = 1$.

[1] I simboli $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ indicano gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali privati dello 0.

2. Sia E un insieme e $P(E)$ l'insieme delle sue parti, le operazioni di $\cap$ e $\cup$ su $P(E)$ sono commutative e associative.

Definizione 6.2 *Dicesi struttura algebrica un insieme non vuoto M su cui sono definite una o più operazioni algebriche binarie $*$, $+$, $\oplus$, ...*

Indichiamo con $(M, *)$ una struttura algebrica dove è definita l'operazione $*$, con $(M, *, +)$ una struttura algebrica dove sono definite le operazioni $*$ e $+$, $(M, *, +, \oplus, \dots)$ una struttura algebrica dove sono definite le operazioni $*$, $+$, $\oplus$, ...

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ con le operazioni $+$ e/0 $\cdot$ sono strutture algebriche.

Definizione 6.3 *Dicesi semigruppo una struttura algebrica $(M, *)$, ove $*$ è operazione associativa su M.*

Definizione 6.4 *Dicesi elemento neutro di $(M, *)$ un elemento $e \in M$ tale che $\forall a \in M$ si ha: $a * e = e * a = a$.*

Si osservi che

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, con l'operazione di addizione $+$ hanno lo 0 elemento neutro.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, con l'operazione di moltiplicazione $\cdot$ hanno 1 come elemento neutro ed è chiamato elemento unità.
- $\mathbb{Q}^*$ con l'operazione di divisione / non ha elemento neutro, infatti $a/1 = a$ mentre $1/a \neq a$.

Definizione 6.5 *Sia $(M, *)$ una struttura algebrica avente elemento neutro e. Dicesi elemento simmetrico di $a \in M$ un elemento $a' \in M$ tale che $a * a' = a' * a = e$.*

Diremo che a è simmetrizzabile se esiste l'elemento a' simmetrico di a.

Si ha

- In $\mathbb{N}$ nessun elemento tranne lo 0 è simmetrizzabile rispetto a $+$.
- In $(\mathbb{Z}, +)$ qualsiasi elemento è simmetrizzabile (il simmetrico di a è $-a$) così anche in $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ (il simmetrico di a è $\frac{1}{a}$).

Definizione 6.6 *Dicesi monoide un semigruppo $(M, *)$ dotato di elemento neutro. In altre parole un monoide è un insieme M dotato di un'operazione $*$ associativa in cui esiste un elemento e tale che $a * e = e * a = a$ per ogni $a \in M$.*

$(\mathbb{N}, +)$ è un monoide ove il numero zero è l'elemento neutro. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un monoide ove il numero 1 è l'elemento neutro. Sia X un insieme non vuoto. allora $(X^X, \circ)$ è un monoide ove l'applicazione identica i_X è l'elemento neutro.

7 Gruppi

Definizione 7.1 *Dicesi gruppo un insieme non vuoto M con una operazione algebrica binaria $f : M \times M \to M$ ($f(a,b) = a * b$) definita su di esso che gode delle seguenti tre proprietà:*

1. *$\forall a, b, c \in M$ $(a * b) * c = a * (b * c)$ (l'operazione $*$ è associativa);*
2. *$\exists e \in M$ tale che $a * e = e * a = a$ $\forall a \in M$ (esistenza dell'elemento neutro).*
3. *$\forall a \in M$ $\exists a' \in M$ tale che $a * a' = a' * a = e$ (ogni elemento $a \in M$ è simmetrizzabile).*

Teorema 7.1 *In un gruppo l'elemento neutro è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due elementi neutri e ed e'. Per la proprietà dell'elemento neutro si ha: $\forall a \in M$ $a * e = e * a = a$. Dunque:

$$e * e' = e' * e = e$$

e anche

$$e' * e = e * e' = e'$$

da cui $e = e'$. ∎

Teorema 7.2 *In un gruppo ogni elemento a ammette un solo simmetrico a'.*

Dimostrazione. Sia $(M, *)$ un gruppo. Supponiamo per assurdo che esista un $a \in M$ avente due elementi simmetrici a'' ed a'. Si ha:

$$a' = e * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''.$$

da cui $a' = a''$. ∎

Definizione 7.2 *Un gruppo $(M, *)$ si dice abeliano o commutativo se l'operazione gode della proprietà commutativa: $a * b = b * a$ per ogni $a, b \in M$.*

Teorema 7.3 *Sia $(M, *)$ un gruppo. Per ogni coppia fissata $a, b \in M$ esiste uno e un solo $x \in M$ tale che $a * x = b$, oppure esiste uno e un solo $y \in M$ tale che $y * a = b$.*

In altre parole in un gruppo le equazioni $a * x = b$ e $y * a = b$ hanno una e una solo soluzione. Si noti che in generale non é detto che queste soluzioni siano uguali. Se invece il gruppo é commutativo le due soluzioni coincidono.

Dimostrazione. Sia $a * x = b$, moltiplicando a destra entrambi i membri per a' (il simmetrico di a) si ha $a' * (a * x) = a' * b$. Per la proprietà associativa, $(a' * a) * x = a' * b$, $e * x = a' * b$ e quindi $x = a'b$ é l'unica soluzione della equazione $a * x = b$.

Analogamente (moltiplicando a sinistra per a') si prova che l'unica soluzione di $y * a = b$ é $y = b * a'$.

Se il gruppo é abeliano abbiamo $x = a' * b = b * a' = y$. ∎

Spesso l'operazione algebrica binaria del gruppo è indicata con $\cdot$ (chiamata moltiplicazione) oppure con $+$ (chiamata addizione). Nel primo caso il gruppo si dice *moltiplicativo*, nel secondo *additivo*. Si usa la seguente terminologia:

- In un gruppo moltiplicativo l'elemento neutro verrà indicato con 1 ed è detto *unità*, mentre il simmetrico di a verrà indicato con a^{-1}, ed è detto il *reciproco*.

  È immediato verificare che: $(a^{-1})^{-1} = a$ e $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

- In un gruppo additivo l'elemento neutro verrà indicato con 0 ed è detto *elemento nullo*, mentre il simmetrico di a verrà indicato con $-a$, ed è detto *l'opposto*.

  È immediato verificare che: $-(-a) = a$ e $-(a + b) = (-b) + (-a)$.

Il Teorema 7.3 può essere riformulato nelle due seguenti forme:

Teorema 7.4 *Se $(G, \cdot)$ è un gruppo moltiplicativo, $\forall a, b \in G$ le due equazioni $a \cdot x = b$ e $y \cdot a = b$ ammettono una sola soluzione (date da $x = a^{-1} \cdot b$ e $y = b \cdot a^{-1}$, rispettivamente). Se $(G, +)$ è un gruppo additivo, $\forall a, b \in G$ le due equazioni $a + x = b$ e $y + a = b$ ammettono una sola soluzione (date da $x = -a + b$ e $y = b - a$, rispettivamente).*

Teorema 7.5 *In un gruppo moltiplicativo $(G, \cdot)$ valgono le leggi di cancellazione a sinistra e a destra, cioè:*

$$\forall a, b, c \in G, \quad \text{da} \quad a \cdot b = a \cdot c \quad \text{segue che} \quad b = c;$$

$$\forall a, b, c \in G, \quad \text{da} \quad b \cdot a = c \cdot a \quad \text{segue che} \quad b = c.$$

In un gruppo additivo $(G, +)$ valgono le leggi di cancellazione a sinistra e a destra, cioè:

$$\forall a, b, c \in G, \quad \text{da} \quad a + b = a + c \quad \text{segue che} \quad b = c;$$

$$\forall a, b, c \in G, \quad \text{da} \quad b + a = c + a \quad \text{segue che} \quad b = c.$$

Sono esempi di gruppi additivi abeliani (con le usuali operazioni di addizione $+$): $(\mathbb{Z}, +)$, gruppo additivo degli interi relativi, $(\mathbb{Q}, +)$, gruppo additivo dei razionali, $(\mathbb{R}, +)$, gruppo additivo dei reali. Si osservi che, se si considera l'usuale operazione di prodotto $\cdot$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ non é un gruppo moltiplicativo (non esiste l'inverso di un elemento), mentre $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ e $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sono gruppi moltiplicativi abeliani. Per dare qualche altro esempio di gruppo introduciamo la nozione di *matrice*.

Definizione 7.3 *Siano m e n due numeri naturali. Una matrice A di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ é una tabella di numeri reali*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. Scriveremo anche

$$A = (a_{ij}) \,, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Indicheremo con il simbolo $\mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$. Ogni elemento a_{ij} della matrice é contrassegnato da due indici: il primo i denota la *riga* mentre il secondo j la colonna alla quale l'elemento appartiene. Si dice anche che a_{ij} é l'elemento di posto (i, j) nella matrice A.

Se $m = n$, allora la matrice A si dice *quadrata di ordine* n; in tal caso scriveremo $\mathcal{M}(n; \mathbb{R})$ invece di $\mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$. Le matrici di tipo $1 \times n$ si diranno *matrici riga* e quelle di tipo $m \times 1$ *matrici colonna.* L'i-esima riga della matrice $A = (a_{ij})$ é la matrice di tipo $1 \times n$

$$R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$

mentre la j-esima colonna di A é data dalla matrice di tipo $m \times 1$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Dicesi *matrice nulla* di $\mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$ la matrice Θ di tipo $m \times n$ i cui elementi sono tutti uguali a 0. Cioè

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

In $\mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$ definiamo l'operazione di addizione $\oplus$ nel seguente modo: per ogni $A, B \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, poniamo

$$(a_{ij}) \oplus (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \,.$$

È facile verificare che $((\mathcal{M}(m, n; \mathbb{R}), \oplus)$ é un gruppo abeliano.

Definizione 7.4 *Un gruppo si dice finito se ha un numero finito di elementi. Il numero dei suoi elementi si dice ordine del gruppo.*

Talvolta, specialmente quando si tratta di gruppi abeliani, si usa la notazione additiva invece di quella moltiplicativa. Cioè: l'operazione del gruppo si chiama addizione (invece di moltiplicazione) e si scrive $a + b$ (invece di $a \cdot b$), l'elemento unità del gruppo si chiama *zero* e si indica con 0 (invece di 1); l'inverso di un elemento a si chiama *opposto* e si indica con $-a$ (invece di a^{-1}). Si pone inoltre $a + (-b) = a - b$.

Gruppo simmetrico. Sia M un insieme non vuoto. L'insieme delle applicazioni biiettive di M in M è un gruppo e si chiama il *gruppo simmetrico* su M. Se M è finito e ha n elementi, il gruppo simmetrico su M è finito ed ha $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ elementi. In quest'ultimo caso il gruppo simmetrico si suole chiamare *gruppo delle sostituzioni* su n elementi. Se $M = \{1, 2, \dots, n\}$ allora la sostituzione $f : M \to M$ tale che $f(i) = a_i$ e $f(a_i) \neq f(a_j)$ per ogni $i, j \in M$ con $i \neq j$, viene spesso indicata con

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

o, più semplicemente, con $a_1, a_2, \dots, a_n$ e viene chiamata permutazione di $1, 2, \dots, n$.

Definizione 7.5 *Dicesi sottogruppo di un gruppo $(G, \cdot)$ un sottoinsieme A non vuoto di G che risulta essere un gruppo rispetto alla stessa operazione definita in G.*

In ogni gruppo $(G, \cdot)$ esistono almeno due sottogruppi, i cosiddetti *sottogruppi banali o impropri*. Essi sono il gruppo stesso e il sottogruppo che ha come unico elemento l'elemento neutro di G; ogni altro sottogruppo è detto proprio.

Teorema 7.6 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè A (sottoinsieme non vuoto del gruppo $(G, \cdot)$) sia un sottogruppo di G è che siano verificate le seguenti due condizioni:*

1. $\forall a, b \in A \Longrightarrow a \cdot b \in A$;
2. $\forall a \in A \Longrightarrow a^{-1} \in A$.

Dimostrazione. Necessità. Supponiamo che A sia un sottogruppo di G. Allora A stesso è un gruppo e quindi le condizioni *1* e *2* sono verificate.
Sufficienza. Supponiamo che le condizioni *1* e *2* siano verificate. Per la *1*, $a, b \in A \Longrightarrow a \cdot b \in A$ e quindi $\cdot$ è anche un'operazione definita in A che verifica la proprietà associativa in A ($\forall a, b, c \in A$ si ha $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$) valendo essa in G. Poichè le condizioni *1* e *2* valgono per ogni coppia di elementi di A, varranno in particolare per a e a^{-1} $\forall a \in A$. Allora $a \cdot a^{-1} = e \in A$, cioè l'elemento neutro di G appartiene pure ad A. Ed essendo anche che per ogni $a \in A$ anche $a^{-1} \in A$, segue che $(A, \cdot)$ è un gruppo, cioè un sottogruppo di $(G, \cdot)$.
▮

Le condizioni *1* e *2* sono equivalenti all'unica condizione $\forall a, b \in A \Rightarrow ab^{-1} \in A$.

Teorema 7.7 Intersezione di sottogruppi. *Se S e H sono due sottogruppi di G, allora $S \cap H$ è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione. Si ha:

1. Se $a \in S \cap H$, essendo S e H sottogruppi, abbiamo $a^{-1} \in S$ e $a^{-1} \in H$ quindi $a^{-1} \in S \cap H$.

2. Se $a, b \in S \cap H$, essendo S e H sottogruppi, abbiamo $ab \in S$ e $ab \in H$. Quindi $ab \in S \cap H$.

1 e *2* provano la tesi. ▮

Più in generale, se G_i, $i \in I$ è un insieme di sottogruppi di G, allora $G' = \cap_{i \in I} G_i$ (formato dagli elementi comuni a tutti i sottogruppi G_i) è un sottogruppo di G.

Teorema 7.8 Unione di sottogruppi. *Se S e H sono due sottogruppi di G, allora $S \cup H$ non è sottogruppo di G, tranne nel caso in cui $H \subseteq S$ oppure $S \subseteq H$.*

Dimostrazione. Sia $a \in S - H$ e $b \in H - S$, facciamo vedere che $ab \notin S \cup H$. Supponiamo per assurdo che $ab \in S \cup H$, ad esempio sia $ab \in S$. Avremo $ab = s$ per qualche $s \in S$. Moltiplicando ambo i membri a sinistra per a^{-1} (si ricordi che $a^{-1} \in S$), si avrebbe $a^{-1}ab = a^{-1}s \in S$, da cui $b = a^{-1}s \in S$. Ciò è assurdo perchè $b \notin S$; analogamente se $ab \in H$ si perviene ad un assurdo. ▮

8 Campi

Definizione 8.1 *Dicesi campo $\mathbb{K}$ una terna $(\mathbb{K}, +, \times)$ dove $\mathbb{K}$ è insieme non vuoto mentre $+$ e $\times$ sono due operazioni binarie su $\mathbb{K}$ tali che:*

K1) (Chiusura). Per ogni coppia $a, b \in \mathbb{K}$, $a + b \in \mathbb{K}$ e $a \times b \in \mathbb{K}$.

K2) (Associatività). Comunque presi $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

K3) (Commutatività). Per ogni coppia $a, b \in \mathbb{K}$, $a + b = b + a$ e $a \times b = b \times a$.

K4) (Identità). Esistono due elementi in $\mathbb{K}$, denotati con 0 e 1 e detti rispettivamente lo zero e l'unità del campo, tali che $0 \neq 1$ e, per ogni $a \in \mathbb{K}$, $a + 0 = a$ e $a \times 1 = a$.

K5) (Opposto). Per ogni $a \in \mathbb{K}$, esiste un elemento $b \in \mathbb{K}$ (detto l'opposto di a), tale che $a + b = 0$.
(Inverso). Per ogni $a \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esiste un elemento $c \in \mathbb{K}$ (detto l'inverso di a) tale che $a \times c = 1$.

K6) (Distributività). Comunque presi $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Ricordiamo che le condizioni $K1)$, $K2)$, $K4)$ e $K5)$ dicono che $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo additivo e $(\mathbb{K}^*, \times)$ un gruppo moltiplicativo. Si può provare che:

- $a \times b$ non è mai uguale a 0 se $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
- l'inverso di $a \in \mathbb{K}^*$ è sempre diverso da 0;
- sia l'inverso che l'opposto di a sono unici e si indicano, rispettivamente, con a^{-1} e $-a$.

Sono esempi di campi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Come è ben noto, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo.

Se $(\mathbb{K}, +, \times)$ è un campo e $\mathbb{K}$ è un insieme finito, diremo che il *campo è finito*. Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 8.1 *Se $(\mathbb{K}, +, \times)$ è un campo finito, esistono un numero primo p e un intero positivo k tali che $|\mathbb{K}| = p^k$. Viceversa, per ogni primo p e intero positivo k, esiste un campo finito avente p^k elementi.*

È anche noto che, a meno di isomorfismi, un campo finito è unico. Esso è denotato con $GF(p^k)$.

Un interessante esempio di campo finito é dato da $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ in cui $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ e le operazioni $+$ e $\cdot$ sono così definite:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

9 Omomorfismi fra strutture

Definizione 9.1 *Siano $(G, *)$ e $(G', \circ)$ due gruppi. Un'applicazione $f : G \to G'$ si dice un omomorfismo di G in G' quando, per ogni $a, b \in G$, è $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.*

Un omomorfismo biiettivo fra G e G' si dice un *isomorfismo.* Se $G' = G$ l'isomorfismo si dice *automorfismo.*

Teorema 9.1 *Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo fra gruppi. Allora*

1. *$f(e) = e'$, essendo e ed e' gli elementi unità rispettivamente di G e G';*
2. *$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$;*
3. *se H è un sottogruppo di G allora $f(H) = \{a' \in G' \mid \exists a \in H \text{ tale che } f(a) = a'\}$ è un sottogruppo di G.*
4. *se H' è un sottogruppo di G' allora $f^{-1}(H') = \{a \in G \mid f(a) \in H'\}$ è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione. (1) Si ha $f(a) \circ f(e) = f(a * e) = f(a)$ e $f(e) \circ f(a) = f(e * a) = f(a)$. Dunque $f(e)$ è l'elemento neutro di G'.
(2) Da $e' = f(e) = f(a * a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1})$ e $e' = f(e) = f(a^{-1} * a) = f(a^{-1}) \circ f(a)$, segue che $f(a^{-1})$ è l'inverso di $f(a)$, cioè $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.
(3) Innanzitutto si osservi che $f(H)$ non è vuoto perchè $e' = f(e) \in f(H)$. Inoltre se $a', b' \in f(H)$ significa che $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ con $a, b \in H$; allora $a' \circ b'^{-1} = f(a) \circ (f(b))^{-1} = f(a) \circ f(b^{-1}) = f(a * b^{-1}) \in f(H)$ perchè $a * b^{-1} \in H$ essendo H un sottogruppo di G.
(4)Intanto $f^{-1}(H')$ non è vuoto perchè $e \in f^{-1}(H')$ in quanto $f(e) = e' \in H'$. Inoltre se $a, b \in f^{-1}(H')$ significa $f(a), f(b) \in H'$; allora $a * b^{-1} \in f^{-1}(H')$ perchè $f(a * b^{-1}) = f(a) \circ f(b^{-1}) = f(a) \circ (f(b))^{-1} \in H'$ essendo H' un sottogruppo di G'. ∎

Nucleo ed immagine di un omomorfismo. Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi. Definiamo *nucleo di* f e lo denotiamo con $Ker\, f$ il sottoinsieme di G così definito

$$Ker\, f = \{a \in G \mid f(a) = e'\}.$$

Definiamo *immagine di* f e la denotiamo con $Im f$, il sottoinsieme di G' così definito

$$Im f = \{a' \in G' \mid \text{ esiste } a \in G \text{ tale che } f(a) = a'\}.$$

Teorema 9.2 *Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi. Si ha*

1. *$Ker\, f$ è un sottogruppo di G.*
2. *$Im\, f$ è un sottogruppo di G'.*
3. *f è iniettiva se e solo se $Ker\, f = \{e\}$.*
4. *f è suriettiva se e solo se $Im\, f = G'$.*

Definizione 9.2 *Siano $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{K}', \oplus, \circ)$ due campi. Un'applicazione $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ è un omomorfismo di $\mathbb{K}$ in $\mathbb{K}'$ se $\forall a, b \in \mathbb{K}$ risulta:*

1. *$f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$,*
2. *$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$.*

Un omomorfismo biiettivo si dice un *isomorfismo* fra $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$. Se $\mathbb{K}' = \mathbb{K}$ l'isomorfismo si dice *automorfismo*. Per gli omomorfismi tra campi valgono teoremi analoghi a quelli per gli omomorfismi fra gruppi.

10 Matrici: prodotto righe per colonne

Nella Definizione 7.3 del paragrafo 7 abbiamo introdotto il concetto di matrice di tipo $m \times n$ ad elementi in $\mathbb{R}$. Sempre nello stesso paragrafo abbiamo definito cosa si intende per somma $\oplus$ fra matrici e per matrice nulla e abbiamo lasciato al lettore il compito di verificare che l'insieme delle matrici $m \times n$ con l'operazione di somma forma un gruppo additivo abeliano. In questo paragrafo vogliamo richiamare alcune definizioni e operazioni sulle matrici che ci saranno utili in seguito. É facile verificare che tutto quanto detto precedentemente per le matrici ad elementi in $\mathbb{R}$ può ripetersi per le matrici ad elementi in un generico campo $\mathbb{K}$.

Sia $\mathcal{M}(m, n; \mathbb{K})$ l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ ad elementi in un campo $\mathbb{K}$, i cui elementi chiameremo scalari (qualora $m = n$ porremo $\mathcal{M}(n, n; \mathbb{K}) = \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$).

Definizione 10.1 *Dicesi prodotto di uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ per una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{K})$ la matrice*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

ottenuta moltiplicando per λ tutti gli elementi di A.

Definizione 10.2 *Siano date le matrici $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{K})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(n, p; \mathbb{K})$ (si noti che A é di tipo $m \times n$ e B di tipo $n \times p$). Dicesi prodotto righe per colonne di A per B la matrice*

$$A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}(m, p; \mathbb{K})$$

definita, per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, p$, nel seguente modo:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{is} b_{sj} + \ldots a_{in} b_{nj}.$$

Esempio 10.1 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, 4; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(4, 3; \mathbb{R}).$$

Allora $A \cdot B$ é la matrice di tipo 2×3 data da

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & 3(-3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ -4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 & -4(-3) + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 & -4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 44 & 38 & 22 \\ 53 & 90 & 26 \end{pmatrix}.$$

Esempio 10.2 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3,4;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(4,1;\mathbb{R}).$$

Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot 5 \\ 5\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 7 + 3\cdot 5 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 6\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 56 \\ 59 \end{pmatrix}.$$

Esempio 10.3 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2;\mathbb{R}).$$

Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 & 2\cdot 7 + 3\cdot 9 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 & 4\cdot 7 + 5\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 41 \\ 14 & 73 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che sia A che B sono quadrate di ordine n allora si possono fare entrambi i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$. In generale si ha

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Infatti siano A e B le matrici di ordine 2 definite nell'Esempio 10.3. Si ha

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 38 \\ 38 & 51 \end{pmatrix} \neq A \cdot B.$$

Definizione 10.3 *Dicesi matrice identica di ordine n la seguente matrice quadrata di ordine n:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Per l'operazione di moltiplicazione fra matrici valgono le proprietà elencate nel seguente teorema di cui lasciamo al lettore la facile verifica. D'ora in poi la somma fra le matrici A e B saraà indicata con $A + B$ invece di $A \oplus B$.

Teorema 10.1 *Siano $A, B \in \mathcal{M}(m,n;\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}(n,p;\mathbb{K})$, $E \in \mathcal{M}(p,q;\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora:*

1. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
2. $A\cdot(C+D) = A\cdot C + A\cdot D$;
3. $\lambda(A\cdot C) = (\lambda A)\cdot C = A\cdot(\lambda C)$;
4. $(A\cdot C)\cdot E = A\cdot(C\cdot E)$;
5. $A\cdot I_n = I_m\cdot A = A$;
6. *se* $C = D$ *allora* $A\cdot C = A\cdot D$;
7. *se* $A = B$ *allora* $A\cdot C = B\cdot C$.

Si osservi che, in generale, la (6) e la (7) del Teorema 10.1 non possono essere invertite. Infatti, posto nel primo caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 7 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 7 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

abbiamo $C \neq D$ e

$$A\cdot C = A\cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 12 & 23 \\ 13 & 36 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, posto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix},$$

abbiamo $A \neq B$ e

$$A\cdot C = B\cdot C = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 28 & 8 \end{pmatrix}.$$

Definizione 10.4 *Dicesi matrice diagonale una matrice quadrata* $A = (a_{ij})$ *di ordine* n *tale che* $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$, *ovvero se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Conseguenza immediata del prodotto riga per colonna fra matrici é il seguente teorema.

Teorema 10.2 *Sia A la matrice diagonale (1). Allora*

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^k & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

Esempio 10.4 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Allora

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definizione 10.5 *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{K})$. Dicesi trasposta di A la matrice $A^T = (b_{ji}) \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{K})$ tale che $b_{ji} = a_{ij}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.*

Esempio 10.5 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Per le matrici trasposte valgono le proprietà elencate nel seguente teorema di cui lasciamo al lettore la facile verifica.

Teorema 10.3 *Siano $A, B \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}(n, p; \mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora:*

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$;
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$;
4. $(A^T)^T = A$;

5. $I_n^T = I_n$.

Definizione 10.6 *Una matrice quadrata A di ordine n, cioè $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ si dice simmetrica se $A^T = A$, cioè se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$.*

Esempio 10.6 La seguente matrice é simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ allora gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formano la *diagonale principale* di A.

Definizione 10.7 *Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Esempio 10.7 *Verificare se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

é invertibile.

SVOLGIMENTO. Essendo $A \in \mathcal{M}(2,;\mathbb{R})$ bisogna verificare se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_2$. Poniamo

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

e cerchiamo di determinare $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La precedente uguaglianza equivale a

$$\begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 6z & 3y + 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la quale é vera se e solo se il seguente sistema ammette soluzioni

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ 3x + 6z = 0 \\ 3y + 6t = 1 \end{cases}. \tag{2}$$

Poichè (2) non ha soluzioni, la matrice data A non é invertibile.

Esempio 10.8 *Verificare se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

é invertibile.

SVOLGIMENTO. Essendo $A \in \mathcal{M}(2,;\mathbb{R})$ bisogna verificare se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R})$ tale che $AB = BA = I_2$. Poniamo

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

e cerchiamo di determinare $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La precedente uguaglianza equivale a

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+7z & 3y+7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la quale é vera se e solo se il seguente sistema ammette soluzioni

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2t=0 \\ 3x+7z=0 \\ 3y+7t=1 \end{cases}. \tag{3}$$

Poichè (2) ha l'unica soluzione $(x, y, z, t) = (7, -2, -3, 1)$, l'inversa di A é

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine non é difficile verificare che

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Teorema 10.4 *Sia $A \in \mathcal{M}(n;K)$ invertibile. Allora esiste una ed una sola matrice $B \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Dimostrazione. Per definizione di matrice invertibile, esiste almeno una $B \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Sia adesso $C \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Allora $C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B$. ▌

Per il precedente teorema la matrice B verrà indicata con A^{-1} e sarà detta la *matrice inversa* di A. Come proveremo nel Teorema 15.8, se esiste una matrice B tale che $A \cdot B = I_n$ allora esiste una matrice $C \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $C \cdot A = I_n$. Vale il seguente teorema.

Teorema 10.5 *Sia $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$. Se esistono $B, C \in \mathcal{M}(N;\mathbb{K})$ tali che*

$$A \cdot B = I_n \quad \text{e} \quad C \cdot A = I_n,$$

allora $C = B$.

Dimostrazione. Si ha $C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B$. ∎

Il seguente risultato é immediata conseguenza dei Teoremi 10.4, 10.5 e 15.8.

Teorema 10.6 *Una matrice $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ é invertibile se e solo se esiste $B \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $A \cdot B = I_n$.*

L'insieme delle matrici invertibili $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ si indica con $GL(n;\mathbb{K})$. In $GL(n;\mathbb{K})$ valgono le seguenti proprietà.

Teorema 10.7 *Siano $A, B \in GL(n;\mathbb{K})$, allora si ha:*

1. *$A \cdot B \in GL(n;\mathbb{K})$ e $(A \cdot B)^{-1} \in GL(n;\mathbb{K})$.*
2. *$A^{-1} \in GL(n;\mathbb{K})$ e $(A^{-1})^{-1} = A$.*
3. *$A^T \in GL(n;K)$ e $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.*
4. *$I_n \in GL(n;\mathbb{K})$ e $(I_n)^{-1} = I_n$.*

L'insieme $GL(n;\mathbb{K})$ con il prodotto righe per colonne costituisce un gruppo non commutativo, detto il *gruppo lineare generale*. Si osservi quindi che in $GL(n;\mathbb{K})$ valgono le leggi di cancellazione a sinistra ed a destra:

1. se $C \cdot A = C \cdot B$ e $A, B, C \in GL(n;\mathbb{K})$, allora $A = B$;
2. se $A \cdot C = B \cdot C$ e $A, B, C \in GL(n;\mathbb{K})$, allora $A = B$.

Si confronti la precedente affermazione con la (6) e la (7) del Teorema 10.1.

Teorema 10.8 *Siano $A, B \in \mathcal{M}(m, n;\mathbb{K})$.*

- *Sia $C \in GL(m;\mathbb{K})$. Allora $A = B$ se e solo se $C \cdot A = C \cdot B$.*
- *Sia $C \in GL(n;\mathbb{K})$. Allora $A = B$ se e solo se $A \cdot C = B \cdot C$.*

Dimostrazione. Sia $C \in GL(m;\mathbb{K})$. Se $A = B$ allora, per la (6) del Teorema 10.1, si ha $C \cdot A = C \cdot B$. Sia, ora, $C \cdot A = C \cdot B$. Essendo $C \in GL(m;\mathbb{K})$, esiste la matrice inversa C^{-1} di C. Allora, per il Teorema 10.1,

$$C^{-1} \cdot (C \cdot A) = C^{-1} \cdot (C \cdot B),$$
$$(C^{-1} \cdot C) \cdot A = (C^{-1} \cdot C) \cdot B,$$
$$A = B.$$

Se $C \in GL(n;\mathbb{K})$, la dimostrazione é analoga. ∎

11 Sistemi lineari e matrici ridotte per righe

Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, tali che: 1) per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$, se $b_i = 0$ allora esiste almeno un $j_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ per cui $a_{ij_i} \neq 0$; 2) per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$ esiste almeno un $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ per cui $a_{i_j j} \neq 0$. Allora, posto $b_i \in \mathbb{K}$, diremo che la scrittura

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{4}$$

rappresenta un sistema lineare di m equazioni nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Gli elementi a_{ij} e b_i si dicono rispettivamente i *coefficienti* e i *termini noti* di (4).

Definizione 11.1 *Dicesi soluzione del sistema (4) una qualsiasi n-upla ordinata $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ di elementi di $\mathbb{K}$ tale che*

$$\begin{cases} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n = b_1 \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \ldots + a_{mn}\eta_n = b_m \end{cases} .$$

Dato un sistema lineare, ad esso é associato il problema di determinare l'insieme di tutte le sue soluzioni. Ovviamente un sistema lineare potrebbe essere impossibile (cioè non avere alcuna soluzione). In tal caso l'insieme delle sue soluzioni coincide con l'insieme vuoto.

Definizione 11.2 *Due sistemi lineari si dicono equivalenti se i loro insiemi di soluzioni coincidono.*

Definizione 11.3 *Un sistema lineare si dice omogeneo se i suoi termini noti sono tutti nulli.*

Un sistema lineare omogeneo di m equazioni nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si scrive quindi nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} . \tag{5}$$

Si ricordi che i coefficienti di (5) godono delle seguenti proprietà: 1) per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$ esiste almeno un $j_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ per cui $a_{ij_i} \neq 0$; 2) per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$ esiste almeno un $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ per cui $a_{i_j j} \neq 0$.

Per determinare l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare (e in particolare di un sistema lineare omogeneo) é ben noto il metodo di Gauss di eliminazione delle variabili.

Consideriamo dapprima i sistemi lineari omogenei. In tal caso il metodo di Gauss si basa sul seguente teorema.

Teorema 11.1 *Comunque fissati $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, e comunque presi $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ con $i \neq j$, (5) é equivalente al sistema che si ottiene sostituendo l'equazione i-esima con la seguente:*

$$\lambda(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) + \mu(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n) = 0. \tag{6}$$

Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria) Senza ledere la generalità, possiamo supporre $i = 1$ e $j = 2$. Dobbiamo così dimostrare che (5) é equivalente al sistema

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \mu(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

É immediato verificare che una soluzione di (5) é anche soluzione di (7). Viceversa, supponiamo che $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é soluzione di (7). Si ha

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) + \mu(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases}$$

e quindi, essendo $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0$,

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases}.$$

Avendo supposto $\lambda \neq 0$, possiamo moltiplicare entrambi i membri della prima equazione per $\frac{1}{\lambda}$ ottenendo

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases},$$

cioè $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è soluzione di (5). ∎

Esempio 11.1 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases},$$

a coefficienti in $\mathbb{R}$, facendo uso del Teorema 11.1.

SVOLGIMENTO. Nel seguito scriveremo $E_i \to \lambda E_i + \mu E_j$ per indicare che, nel sistema in considerazione, sostituisco l'equazione i-esima con l'equazione avente il primo membro formato dalla somma del primo membro della i-esima con il primo membro della j-esima rispettivamente moltiplicati per λ e μ.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{E_2 \to 2E_2 - E_1} \\ \boxed{E_3 \to E_3 - E_1} \\ \boxed{E_4 \to 2E_4 - E_1} \\ \boxed{E_5 \to 2E_5 - E_1} \end{array} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{E_3 \to E_3 + 2E_2} \\ \boxed{E_4 \to E_4 + 5E_2} \\ \boxed{E_5 \to E_5 + E_2} \end{array} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -7x_3 + 9x_4 = 0 \\ -12x_3 + 18x_4 = 0 \\ -2x_3 + 16x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{E_4 \to 7E_4 - 12E_3} \\ \boxed{E_5 \to 7E_5 - 2E_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -7x_3 + 9x_4 = 0 \\ 18x_4 = 0 \\ 94x_4 = 0 \end{cases} \quad \boxed{E_5 \to 47E_5 - 4E_4} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -7x_3 + 9x_4 = 0 \\ 18x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

Che ha, come unica soluzione, $(0,0,0,0)$. Quindi il sistema assegnato ha una ed una sola soluzione data da $(0,0,0,0)$.

Esempio 11.2 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases},$$

a coefficienti in $\mathbb{R}$, facendo uso del Teorema 11.1.

SVOLGIMENTO.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{E_2 \to 2E_2 - E_1} \\ \boxed{E_3 \to E_3 - E_1} \end{array} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{E_3 \to E_3 + 2E_2} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases} . \tag{8}$$

Posto $x_4 = \eta$, (8) equivale a

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5\eta \\ -x_2 - 2x_3 = -3\eta \\ -7x_3 = -9\eta \end{cases}.$$

Risolvendo per sostituzione, esso ammette infinite soluzioni date da $\left(\frac{4}{7}\eta, \frac{3}{7}\eta, \frac{9}{7}\eta, \eta\right)$ per ogni $\eta \in \mathbb{R}$.

Si noti che in (8) si può prendere come parametro x_3 invece di x_4. In tal caso, posto $x_4 = \rho$, avremo

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_4 = -4\rho \\ -x_2 + 3x_4 = 2\rho \\ 9x_4 = 7\rho \end{cases},$$

che ha le soluzioni $\left(\frac{4}{9}\rho, \frac{1}{3}\rho, \rho, \frac{7}{9}\rho\right)$ per ogni $\rho \in \mathbb{R}$. Si noti che

$$\left\{\left(\frac{4}{7}\eta, \frac{3}{7}\eta, \frac{9}{7}\eta, \eta\right) \mid \eta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{4}{9}\rho, \frac{1}{3}\rho, \rho, \frac{7}{9}\rho\right) \mid \rho \in \mathbb{R}\right\}.$$

Per il Teorema 11.1, esse sono anche le soluzioni del sistema assegnato.

Osservazione 11.1 Sia

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{9}$$

il sistema ottenuto da (5) mediante la trasformazione (6) per opportuni i, j, λ e μ con $i \neq j$ e $\lambda \neq 0$. Allora

1. In (9) l'equazione i-esima potrebbe essere trasformata in una identità del tipo $0 = 0$.

2. In (9) il numero delle variabili continua ad essere uguale ad n.

La prima osservazione é provata dall'Esempio 11.1. Proviamo la seconda. Cioè che, comunque presa una variabile x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, esiste almeno una equazione di (9) in cui il coefficiente di x_j é diverso dallo zero. Per esempio consideriamo la variabile x_1 e supponiamo $a_{11} \neq 0$. Se nella (6) é $i \neq 1$, avremo $b_{11} = a_{11} \neq 0$ ed il risultato rimane provato. Per $i = 1$, avremo $b_{11} = \lambda a_{11} + \mu a_{j1}$ con $\lambda \neq 0$ e $j \neq 1$. Se $b_{11} \neq 0$ segue il risultato, invece se $b_{11} = 0$, avremo $\lambda a_{11} + \mu a_{j1} = 0$, $\mu a_{j1} = -\lambda a_{11} \neq 0$, $b_{j1} = a_{j1} \neq 0$ e il risultato rimane completamente provato.

Nel definire il sistema (4) abbiamo supposto che esso non contenga variabili i cui coefficienti siano tutti nulli e nemmeno equazioni del tipo $0 = 0$. Si noti che il metodo di risoluzione del Teorema 11.1 continua a valere anche senza queste restrizioni sul sistema.

Definizione 11.4 Matrice ridotta per righe. *Una matrice $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$, si dice ridotta per righe se, per ogni i, é verificata una delle due seguenti condizioni:*

- *$a_{ij} = 0$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$, oppure*
- *esiste almeno un $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $a_{it} \neq 0$ e, se $i < m$, $a_{\rho t} = 0$ per ogni $i + 1 \leq \rho \leq m$.*

Esempio 11.3 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

é ridotta per righe.

Definizione 11.5 Elemento speciale. *Sia $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$, una matrice ridotta per righe. Per la Definizione 11.4, ogni riga $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ contiene almeno un elemento $a_{it} \neq 0$ tale che, se $i < m$, $a_{\rho t} = 0$ per ogni $i + 1 \leq \rho \leq m$. Per ogni riga non nulla R_i si fissi, a piacere, uno solo di questi elementi. Esso si chiama l'elemento speciale relativo ad R_i.*

Sia A la matrice ridotta dell'Esempio 15.4. Gli elementi candidati ad essere di tipo speciale sono quelli di posto $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$ e $(5, 6)$ (si noti che la terza riga non può contenere alcun elemento speciale). Possiamo quindi scegliere come speciali quelli di posto $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(4, 3)$ e $(5, 4)$.

Teorema 11.2 *Il numero di elementi speciali di una matrice ridotta $m \times n$ é minore od uguale al* $\min\{m, n\}$.

Dimostrazione. Sia r il numero degli elementi speciali in una matrice ridotta $m \times n$. Per definizione, in ogni riga si può fissare al più un elemento speciale, allora $r \leq m$. Inoltre, come si vede facilmente, due elementi speciali non possono mai trovarsi in una stessa colonna. Ne segue $r \leq n$. ∎

Una qualsiasi matrice $m \times n$, $A = (a_{ij})$, può essere sempre vista come la matrice incompleta associata ad un sistema lineare omogeneo di $\overline{m} \leq m$ equazioni (A potrebbe avere una o più righe nulle, in tal caso conviene eliminare le identità $0 = 0$) in $\overline{n} \leq n$ incognite (A potrebbe avere una o più colonne formate tutte da zeri). Ridurre per righe A equivale ad applicare ripetutamente il Teorema 11.1 al sistema ad essa associato e a quelli equivalenti che via via si ottengono e/o scambiare due equazioni fra loro. *Il risultato é una matrice ridotta il cui sistema omogeneo associato é equivalente al sistema associato alla matrice iniziale.* Mostriamo questo fatto nel seguente esempio.

Esempio 11.4 Vogliamo ridurre per righe la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Il sistema *formalmente* associato alla (10) é

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ 0 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Si noti che l'identità $0 = 0$ sta ad indicare che la matrice associata ha una riga tutta formata da zeri. Analogamente l'assenza della variabile x_4 in (11) indica che la quarta colonna della matrice associata é tutta nulla. Applicando a (11) le riduzioni

$$\boxed{E_2 \to E_2 + E_1} \; \boxed{E_4 \to E_4 - E_1} \; \boxed{E_5 \to E_5 + E_1},$$

otteniamo

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_5 + 3x_6 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 0 \\ 4x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases}. \tag{12}$$

Ridurre il sistema (11) equivale a ridurre la matrice (10) nel modo seguente

$$\boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \; \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \; \boxed{R_5 \to R_5 + R_1}.$$

Come risultato si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

il cui sistema omogeneo associato è (12). Adesso applichiamo le riduzioni

$$\boxed{E_5 \to E_5 - 4E_4} \quad \text{e} \quad \boxed{R_5 \to R_5 - 4R_4}$$

rispettivamente al sistema (12) ed alla matrice (13). Abbiamo

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_5 + 3x_6 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 0 \\ 6x_5 - x_6 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Quest'ultima matrice é ridotta. Gli elementi speciali sono quelli di posto $(1,1)$, $(2,2)$, $(4,3)$ e, a scelta, o quello di posto $(5,5)$ oppure quello di posto $(5,6)$. Tanto per fissare le idee supponiamo che l'elemento speciale nella quinta riga sia quello di posto $(5,5)$. Ciò equivale a considerare la variabile x_6 come parametro arbitrario e le variabili x_1, x_2, x_3 ed x_5 come incognite. Otteniamo così il sistema (non omogeneo)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = -2x_6 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_5 = -3x_6 \\ x_3 - x_5 = -x_6 \\ 6x_5 = x_6 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\left(-\frac{7}{18}x_6, -\frac{8}{9}x_6, -\frac{5}{6}x_6, \frac{1}{6}x_6, x_6\right) \quad \text{per ogni} \quad x_6 \in \mathbb{R}.$$

Se nella quinta riga della matrice (14) prendiamo come elemento speciale quello di posto $(5,6)$, otteniamo il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_6 = -x_5 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_6 = -3x_5 \\ x_3 + x_6 = x_5 \\ x_6 = 6x_5 \end{cases} \tag{15}$$

in cui x_5 é assunto come parametro libero e x_1, x_2, x_3, x_6 come incognite. Esso ha le ∞^1 soluzioni

$$\left(-\frac{7}{3}x_5, -\frac{16}{3}x_5, -5x_5, x_5, 6x_5\right) \quad \text{per ogni} \quad x_5 \in \mathbb{R}.$$

Se nella quinta riga della matrice in (14) prendiamo come elemento speciale quello di posto $(5,5)$, otteniamo il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = -2x_6 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_5 = -3x_6 \\ x_3 - x_5 = -x_6 \\ 6x_5 = x_6 \end{cases} \tag{16}$$

in cui x_6 é assunto come parametro libero e x_1, x_2, x_3, x_5 come incognite. Esso ha le ∞^1 soluzioni

$$\left\{\left(-\frac{7}{18}x_6, -\frac{8}{9}x_6, -\frac{5}{6}x_6, \frac{1}{6}x_6, x_6\right) \mid x_6 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(-\frac{7}{3}x_5, -\frac{16}{3}x_5, -5x_5, x_5, 6x_5\right) \mid x_5 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si osservi che il numero di elementi speciali di una matrice ridotta coincide col numero delle variabili assunte come incognite nel sistema ridotto ad essa associato.

Riassumendo, per ridurre una matrice, basta applicare opportunamente ad essa ed alle matrici cia via ottenute, le seguenti

Regole di riduzione per righe:

1. *Sostituire a tutti gli elementi della riga R_i i corrispondenti elementi di R_i moltiplicati per $\lambda \neq 0$ e sommare ad essi i corrispondenti elementi della riga R_j, con $j \neq i$, moltiplicati per μ.* Possiamo riassumere questa regola come segue
$$R_i \to \lambda R_i + \mu R_j, \quad \text{essendo} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{e} \quad i \neq j. \tag{17}$$

2. *Scambiare due righe fra loro.* Cioè
$$R_i \longleftrightarrow R_j. \tag{18}$$
Questa regola é lecita in quanto equivale a scambiare, nel sistema associato, due equazioni fra loro.

Esempio 11.5 Si consideri la matrice associata al sistema dell'Esempio 11.2:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Ridurre per righe A equivale ad usare le stesse regole adoperate per trasformare il sistema dato nell'Esempio 11.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 2R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to R_3 + 2R_2} \longrightarrow$$

$\begin{pmatrix} \underline{2} & -3 & 4 & -5 \\ 0 & \underline{-1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-7} & 9 \end{pmatrix}$, la quale risulta ridotta (gli elementi sottolineati corrispondono agli elementi speciali scelti).

Si osservi che la (17) può essere usata scegliendo arbitrariamente coppie di valori λ e μ (purchè sia $\lambda \neq 0$) e coppie di righe i e j (purchè sia $i \neq j$). Si capisce quindi che riducendo una stessa matrice A *si può pervenire a matrici ridotte distinte.* Tuttavia esse, pur essendo distinte, conservano la stessa *informazione*: i sistemi lineari omogenei associati sono equivalenti, cioè hanno insiemi di soluzioni coincidenti. Il motivo segue immediatamente dal Teorema 11.1 in quanto ogni sistema lineare omogeneo associato ad una matrice ridotta dalla matrice A é equivalente al sistema lineare omogeneo associato alla matrice A stessa. Illustriamo questo fatto con il seguente esempio.

Esempio 11.6 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo A per righe in due modi diversi.

Riduzione numero 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 3R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 2R_1} \\ \boxed{R_5 \to R_5 - R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 5R_3 - 2R_2} \\ \boxed{R_4 \to 5R_4 - R_2} \\ \boxed{R_5 \to 5R_5 - 2R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_4 \to 5R_4 - 3R_3} \\ \boxed{R_5 \to 5R_5 + 2R_3} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Riduzione numero 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + 4R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \\ \boxed{R_5 \to R_5 + R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 10R_3 + R_2} \\ \boxed{R_4 \to 10R_4 + R_2} \\ \boxed{R_5 \to 5R_5 - 3R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_4 \to 5R_4 - 3R_3} \\ \boxed{R_5 \to 5R_5 + R_3} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Sia B che C sono matrici ridotte dalla A. Ma, come si vede facilmente, i sistemi a loro associati sono equivalenti. Infatti si ha:

sistema associato a B: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 5y = 0 \\ -25z = 0 \end{cases}$;

sistema associato a C: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 5x + 10z = 0 \\ 25x = 0 \end{cases}$.

Entrambi questi sistemi hanno una e una sola soluzione, la banale, cioè $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Si noti che nell'Esempio 11.6 sia B che C hanno lo stesso numero di elementi speciali. Questo non é un caso ma *in tutte le matrici ridotte da una stessa matrice fissata, il numero degli elementi speciali é costante*. Esso infatti coincide col numero delle incognite del sistema ad essa associato (si noti che questo sistema potrebbe essere non omogeneo).

Si osservi ancora che, nell'Esempio 11.6, il numero degli elementi speciali delle matrici ridotte dalla A coincide col numero delle incognite del sistema lineare omogeneo associato ad A e, questo sistema ammette solo la soluzione banale $(0, 0, 0)$. Anche questo non é un caso ma, come si verifica facilmente, *un sistema lineare omogeneo ha come unica soluzione quella banale se e solo se il numero degli elementi speciali della matrice ridotta associata alla matrice incompleta coincide col numero delle incognite.*

Vediamo ora, in alcuni esempi, cosa accade quando in un sistema lineare omogeneo il numero degli elementi speciali della matrice ridotta associata alla matrice incompleta é minore del numero delle incognite.

Esempio 11.7 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 0 \\ -x + y + z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 0 \\ x + y - z - t = 1 \\ 6x + 12y + 15z + 18t = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Riduciamo la matrice incompleta del sistema assegnato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 6R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_4 \to R_4 - 3R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to R_4 - 3R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quest'ultima matrice risulta ridotta (possiamo prendere per elementi speciali quelli di posto $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,3)$). Assumendo come incognite le variabili i cui coefficienti concorrono a formare le colonne contenenti gli elementi speciali (nel nostro esempio x, y, z) e le rimanenti (nel nostro esempio solo la t) come parametri liberi, il sistema assegnato risulta equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -3t \\ 2y + 3z = -4t \\ -2z = 4t \end{cases}$$

Si vede facilmente che questo sistema ha le ∞^1 soluzioni

$$(x, y, z, t) = (0, t, -2t, t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 11.8 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Riduciamo la matrice incompleta del sistema assegnato.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 - 3R_2} \\ \boxed{R_4 \to 3R_4 - 2R_2} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_4 \to 4R_4 - R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -54 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima matrice risulta ridotta (possiamo prendere per elementi speciali quelli di posto $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ e $(4,4)$). Prendendo come incognite le variabili i cui coefficienti concorrono a formare le colonne contenenti gli elementi speciali, il sistema assegnato risulta equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4x_5 - x_6 \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 5x_5 + x_6 \\ 4x_3 + 10x_4 = -8x_5 - 2x_6 \\ -54x_4 = 12x_5 + 18x_6 \end{cases}$$

Si vede facilmente che questo sistema ha le ∞^2 soluzioni

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{21x_5}{-9}, \frac{43x_5 - 12x_6}{-9}, \frac{26x_5 - 6x_6}{-9}, \frac{2x_5 + 3x_6}{-9}, x_5, x_6\right)$$

per ogni $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$.

In conclusione *un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione (quella banale). Se il numero degli elementi speciali della matrice ridotta associata alla matrice incompleta del sistema coincide col numero delle variabili, la banale é l'unica soluzione del sistema. Se il numero degli elementi speciali della matrice ridotta associata alla matrice incompleta é minore del numero delle colonne, si hanno ∞^α soluzioni, essendo α uguale al numero delle variabili meno il numero degli elementi speciali.*

Consideriamo adesso il caso generale di un sistema lineare i cui termini noti non é detto siano tutti nulli. Si noti che quanto diremo per determinare le soluzioni di questi sistemi si può applicare al caso dei sistemi omogenei. Non é comunque difficile rendersi conto che lo studio sopra esposto dei sistemi lineari omogenei é una *versione semplificata* della seguente. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{19}$$

con $a_{ij}, bi \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, tali che: 1) per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$, se $b_1 = 0$ allora esiste almeno un $j_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ per cui $a_{ij_i} \neq 0$; 2) per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$ esiste almeno un $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ per cui $a_{i_jj} \neq 0$ (come osservato per i sistemi omogenei, quello che diremo in seguito vale anche se il sistema non soddisfi queste condizioni, cioè anche nel caso (19) contenga identità del tipo $0 = 0$ oppure in cui una o più variabili di (19) abbia coefficienti tutti nulli).

In modo del tutto analogo al Teorema 11.1 si prova il seguente risultato.

Teorema 11.3 *Comunque fissati $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, e comunque presi $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ con $i \neq j$, (19) é equivalente al sistema che si ottiene sostituendo l'equazione i-esima con la seguente:*

$$\lambda(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) + \mu(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n) = \lambda b_i + \mu b_j. \tag{20}$$

Si ricordi che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é detta la matrice incompleta del sistema (19), mentre

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

é detta la matrice completa di (19).

Per risolvere il sistema (19) conviene trasformarlo (usando ripetutamente il Teorema 11.3) in uno equivalente le cui matrici completa ed incompleta risultino ridotte per righe. Per comodità conveniamo di separare nella matrice completa la colonna dei termini noti dalle colonne dei coefficienti delle incognite. Scriveremo cioè

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

e applicheremo ripetutamente ad essa le regole di riduzione per righe in modo che, alla fine, sia la matrice completa che quella incompleta risultino ridotte.

Esempio 11.9 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x+y+3t=1 \\ x-y+2t=2 \\ x+y+4t=-1 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Si osservi che sia la matrice incompleta che quella completa sono ridotte (gli elementi speciali sono quelli di posto $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,3)$). Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} x+y+3t=1 \\ -2y-2t=1 \\ t=-2 \end{cases} .$$

In tal caso i coefficienti di tutte le variabili concorrono a formare le colonne contenenti gli elementi speciali quindi tutte le variabili devono essere prese come incognite. É immediato verificare che il sistema precedente ha una sola soluzione data da $(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -2)$.

Esempio 11.10 *Studiare in* $\mathbb{R}$ *il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=1 \\ 7x-2y+7z+2t=5 \\ 2x-y+z+3t=2 \end{cases} .$$

SVOLGIMENTO. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -R_2+7R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3-2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to 4R_3+R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right).$$

Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=1 \\ -12y+14z+5t=2 \\ -6z+9t=2 \end{cases}$$

Prendendo come incognite le variabili i cui coefficienti concorrono a formare le colonne contenenti gli elementi speciali possiamo scrivere

$$\begin{cases} x-2y+3z=1-t \\ -12y+14z=2-5t \\ -6z=2-9t \end{cases}$$

Il sistema precedente ha le ∞^1 soluzioni

$$(x,y,z,t) = \left(\frac{-21t+16}{18}, \frac{39t-10}{18}, \frac{9t-2}{6}, t\right)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 11.11 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=4 \\ x-y+z-t=2 \\ x+2y-z+3t=0 \\ x+y-z-t=1 \\ 2x+3y-z-3t=5 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \\ \boxed{R_5 \to R_5 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 3R_3 - 4R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 3R_2} \\ \boxed{R_5 \to R_5 - 7R_2} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & 11 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_4 \to -2R_4 + R_3} \\ \boxed{R_5 \to 4R_5 - 7R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -34 & 16 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_5 \to R_5 + 17R_4} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right) = B.$$

Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=4 \\ y-2z-2t=-2 \\ 4z+10t=4 \\ 2t=-2 \\ 0=-51 \end{cases}$$

Il precedente sistema é impossibile (cioè non ha soluzioni) in quanto l'ultima delle sue equazioni

$$0x + 0y + 0z + 0t = -51$$

non ha soluzioni. Quindi anche il sistema assegnato é impossibile.

Nell'Esempio 11.11 sia la matrice B che quella incompleta (cioè la matrice ottenuta eliminando l'ultima colonna della B) risultano ridotte ma *il numero degli elementi speciali della incompleta é minore del numero degli elementi speciali della completa* B. Quando accade questo fatto il sistema non ha mai soluzioni (é impossibile). Se invece *il numero degli elementi speciali della matrice incompleta é uguale al numero degli elementi speciali della completa* B, il sistema ammette soluzioni (vedasi Esempi 11.9 e 11.10). In tal caso se il numero degli elementi speciali é uguale al numero delle variabili (Esempio 11.9), la soluzione é unica, mentre se il numero degli elementi speciali é minore del numero delle variabili (Esempio 11.10) avremo ∞^α soluzioni, con α dato dalla differenza fra il numero delle variabili e quello degli elementi speciali.

Per risolvere il sistema lineare (19) possiamo procedere nel seguente modo:

1. Si riduca la matrice completa

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

in modo che anche quella incompleta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

risulti ridotta. Siano rispettivamente A' e B' le matrici ridotte della A e della B.

2. Se il numero degli elementi speciali di A' é minore di quello di B', il sistema é impossibile.

3. Se il numero degli elementi speciali di A' coincide con quello di B' il sistema ammette soluzioni (si noti che in questo caso gli elementi speciali possono essere scelti in modo che siano tutti contenuti in colonne di A'). Più precisamente, posto uguale ad r il numero degli elementi speciali, si proceda nel seguente modo:

   (a) Se $r = n$, cioè il numero degli elementi speciali coincide con quello delle variabili di (19), il sistema ha una ed una sola soluzione che si può trovare risolvendo per sostituzione il sistema ridotto avente B' come matrice completa.

(b) Se $r < n$, il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni che possono trovarsi procedendo come segue (si vedano gli Esempi 11.10 e 11.12). Si scriva il sistema avente B' come matrice completa e si scartino le eventuali identità del tipo $0 = 0$. Il risultato é un sistema di r equazioni. In esso si mettano a termine noto tutti i monomi contenenti le variabili i cui coefficienti non concorrono a formare le colonne di A' dove si trovano gli elementi speciali (queste variabili saranno considerate come parametri arbitrari di $\mathbb{K}$). Si ottiene così un nuovo sistema di r equazioni in r incognite che può essere risolto per sostituzione.

Esempio 11.12 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 11x_6 = 4 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa B, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta A.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 6 & 8 & 11 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_2} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & \underline{3} & 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \underline{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B'.$$

In B' gli elementi speciali sono sottolineati. Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 = 2 \\ 0 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 = 2 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Prendendo come incognite le variabili i cui coefficienti concorrono a formare le colonne contenenti gli elementi speciali (cioè le colonne 3, 4 e 6) otteniamo il seguente sistema di tre equazioni nelle tre incognite x_3, x_4 e x_6:

$$\begin{cases} -x_3 + 3x_4 + 5x_6 = 1 - x_1 - 2x_2 - 4x_5 \\ 3x_3 + x_6 = 2 - 2x_1 + x_2 \\ 4x_3 = -x_1 \end{cases}$$

al variare dei parametri reali x_1, x_2 e x_5. Esso ha le ∞^1 soluzioni

$$\left(x_1, x_2, -\frac{1}{4}x_1, 2-\frac{5}{4}x_1+x_2, -3+\frac{5}{3}x_1-\frac{7}{3}x_2-\frac{4}{3}x_5\right)$$

comunque presi $x_1, x_2, x_5 \in \mathbb{R}$.

Posto

$$A=(a_{ij}), \quad i=1,2,\ldots,m, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

il sistema (4) può scriversi nella seguente forma vettoriale

$$A \cdot X = B. \tag{21}$$

Se C é una matrice quadrata di ordine m invertibile, per il Teorema 10.8, il sistema (21) é equivalente al seguente

$$(C \cdot A) \cdot X = C \cdot B. \tag{22}$$

Di fatto, il metodo di riduzione di Gauss precedentemente esposto consiste nel determinare (attraverso le successive riduzioni) una matrice invertibile C di ordine m per cui il sistema (22) si risolva più facilmente di (21). Illustriamo adesso con alcuni esempi come si costruisce C. Innanzitutto si ricordi che il metodo di riduzione per righe si basa sulla successiva applicazione di una delle due regole (17) o (18). Se poniamo $D=(d_{rs})$ ove, per $r=1,2,\ldots,m$ e $s=1,2,\ldots,m$, si ha

$$d_{rs}=\begin{cases} 1 & \text{se } r=s\neq i \\ \lambda\neq 0 & \text{se } r=s=i \\ 0 & \text{se } r\neq s \text{ e } (r,s)\neq(i,j) \\ \mu & \text{se } (r,s)=(i,j) \end{cases},$$

allora applicare a (21) la regola (17) equivale a moltiplicare entrambi i membri di (21) per D (si noti che, avendo supposto $\lambda \neq 0$, D é invertibile). Analogamente la regola (18) equivale a moltiplicare entrambi i membri di (21) per F, essendo F la matrice che si ottiene scambiando la riga i con la riga j nella matrice identica I_m (si osservi che $F^{-1}=F$). Il sistema dell'Esempio 11.10, in forma vettoriale, é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Applicare ad esso la regola $R_2 \to -R_2 + 7R_1$ equivale a moltiplicare entrambi i membri di (23) per la matrice

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ora applichiamo la riduzione $R_3 \to R_3 - 2R_1$, cioè moltiplichiamo entrambi i membri di quest'ultimo sistema per

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si perviene al sistema ridotto applicando la regola $R_3 \to 4R_3 + R_1$, cioè moltiplicando entrambi i membri per

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che questo sistema si ottiene moltiplicando entrambi i membri di (23) per la matrice $C = G_3 \cdot G_2 \cdot G_1$.

Si osservi che nell'esempio precedente abbiamo moltiplicato entrambi i membri di (23) per G_1. Avremmo potuto, più semplicemente, scrivere (23) in forma matriciale e poi moltiplicare per G_1, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 14 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

e procedere analogamente con le matrici G_2 e G_3.

Come secondo esempio risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} . \tag{24}$$

Come ormai dovrebbe essere chiaro, (24) può scriversi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Riduciamo la precedente matrice mediante le seguenti regole:

1. $R_1 \leftrightarrow R_4$ cui corrisponde la matrice

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2. $R_2 \to R_2 - R_1$ cui corrisponde la matrice

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. $R_2 \leftrightarrow R_3$ cui corrisponde la matrice

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4. $R_4 \to R_4 - R_2$ cui corrisponde la matrice

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

5. $R_4 \to R_4 + R_3$ cui corrisponde la matrice

$$G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$G_5 \cdot G_4 \cdot G_3 \cdot G_2 \cdot G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

il sistema (24) si riduce al seguente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

cioè

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

12 Ancora sui sistemi lineari.

Il metodo di risoluzione di un sistema lineare illustrato alla fine del Paragrafo 11, trasforma il sistema assegnato, quando ha soluzioni, in uno ridotto formato da una equazione avente esattamente una incognita, una equazione avente al più due incognite, una equazione avente al più tre incognite ... e così via fino ad esaurire tutte le incognite del sistema ridotto. Ovviamente un tale sistema si risolve facilmente. Nell' Esempio 11.10, il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 7x - 2y + 7z + 2t = 5 \\ 2x - y + z + 3t = 2 \end{cases}$$

é stato ridotto nel seguente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 - t \\ -12y + 14z = 2 - 5t \\ -6z = 2 - 9t \end{cases} . \tag{25}$$

Sebbene esso si risolva facilmente, ci poniamo la seguente domanda: *É possibile usare ancora il metodo di riduzione in modo da ottenere direttamente le soluzioni*? Per esempio il sistema (25) ha come matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1-t \\ 0 & -12 & 14 & 2-5t \\ 0 & 0 & -6 & 2-9t \end{array}\right). \tag{26}$$

Applicando il metodo di riduzione

$$R_i \quad \to \quad \lambda R_i + \mu R_j,\ \ \lambda \neq 0, i \neq j,$$

dal *basso verso l'alto* trasformiamo la (26) nella matrice identica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1-t \\ 0 & -12 & 14 & 2-5t \\ 0 & 0 & -6 & 2-9t \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to 2R_1 + R_3} \\ \boxed{R_2 \to 3R_2 + 7R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 0 & 4-11t \\ 0 & -36 & 0 & 20-78t \\ 0 & 0 & -6 & 2-9t \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to -9R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -18 & 0 & 0 & -16+21t \\ 0 & -36 & 0 & 20-78t \\ 0 & 0 & -6 & 2-9t \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to -\frac{1}{18}R_1} \\ \boxed{R_2 \to -\frac{1}{36}R_2} \\ \boxed{R_3 \to -\frac{1}{6}R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{16-21t}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{39t-10}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9t-2}{6} \end{array}\right)$$

da cui otteniamo le soluzioni

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{-21t + 16}{18}, \frac{39t - 10}{18}, \frac{9t - 2}{6}, t\right)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In generale, per risolvere *completamente* un sistema lineare si può procedere riducendo la matrice ad esso associata procedendo *dall'alto verso il basso* in modo da ottenere gli elementi speciali e così verificare se il sistema é possibile o impossibile. Nel primo caso si può proseguire col metodo di riduzione procedendo *dal basso verso l'alto* in modo da trasformare la matrice ridotta in una verificante le seguenti condizioni: 1) tutti gli elementi speciali sono uguali ad 1; 2) gli elementi delle colonne contenenti un elemento speciale sono tutti nulli, facendo ovviamente eccezione per l'elemento speciale stesso. Da una tale matrice si ricavano immediatamente le soluzioni del sistema. Illustriamo questo procedimento con alcuni esempi.

Esempio 12.1 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare:*

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 1 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Scriviamo le matrici completa e incompleta del sistema come fatto precedentemente e applichiamo il metodo di riduzione *dall'alto verso il basso* in modo da ottenere gli elementi speciali e vedere quindi se il sistema é possibile o no.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -3R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to 3R_3 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - 16R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -3 \end{array}\right)$$

Abbiamo così ridotto la matrice. Gli elementi speciali sono quelli di posto $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,3)$. Essi appaiono tutti nella matrice incompleta (quella che ha come colonne i coefficienti delle incognite) pertanto il sistema é possibile. Infine, essendo il numero degli elementi speciali uguale al numero delle incognite, la soluzione é unica. Per determinarla procediamo col metodo di riduzione *dal basso verso l'alto*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to 9R_1 + 2R_3} \\ \boxed{R_2 \to 18R_2 + R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & -18 & 0 & 21 \\ 0 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & -3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{27}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{18}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{-18}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Quindi la soluzione del sistema assegnato é

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Esempio 12.2 *Studiare in $\mathbb{R}$ il sistema lineare:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z + 3t = 1 \\ 2x + 6z + 4t = 3 \\ x + y - z - t = 2 \\ -x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Scriviamo le matrici completa e incompleta del sistema e applichiamo il metodo di riduzione *dall'alto verso il basso* in modo da ottenere gli elementi speciali e vedere quindi se il sistema é possibile o no.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 3R_3 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to 3R_4 + 2R_1} \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 17 & 12 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 2R_3 - 5R_2} \\ \boxed{R_4 \to -2R_4 + R_2} \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -28 & -20 & -1 \\ 0 & 0 & -28 & -20 & -1 \end{array}\right)
$$

$$
\boxed{R_4 \to R_4 - R_3}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \underline{-3} & 4 & 3 & 1 \\ \underline{2} & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-28} & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Abbiamo così ridotto la matrice. Gli elementi speciali fissati sono quelli di posto $(1,2)$, $(2,1)$ e $(3,3)$ (invece di quest'ultimo si potrebbe scegliere quello di posto $(3,4)$ e procedere di conseguenza). Gli elementi speciali sono tutti appartenenti alla matrice incompleta pertanto il sistema é possibile. Infine, essendo il numero degli elementi speciali (=3) minore del numero delle variabili (=4), abbiamo ∞^1 soluzioni al variare del parametro libero t. Per determinarle procediamo col metodo di riduzione *dal basso verso l'alto*:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \underline{-3} & 4 & 3 & 1 \\ \underline{2} & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-28} & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\boxed{R_1 \to R_1 - 2R_2}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \underline{-3} & -2 & -1 & -2 \\ \underline{2} & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-28} & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to -14R_1 + R_3} \\ \boxed{R_2 \to 14R_2 + 3R_3} \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \underline{42} & 0 & -6 & 27 \\ \underline{28} & 0 & 0 & -4 & 39 \\ 0 & 0 & \underline{-28} & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{42}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{28}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{-28}R_3} \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{14} \\ \underline{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{39}{28} \\ 0 & 0 & \underline{1} & \frac{5}{7} & \frac{1}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Quindi le soluzioni del sistema assegnato sono

$$
(x,y,z,t) = \left(\frac{39}{28} + \frac{1}{7}t, \frac{9}{14} + \frac{1}{7}t, \frac{1}{28} - \frac{5}{7}t, t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.
$$

Si osservi che, similmente a quanto visto alla fine del Paragrafo 11, applicare ad una matrice le regole di riduzione dal basso verso l'alto equivale a moltiplicarla per una opportuna matrice invertibile.

13 Sistemi lineari dipendenti da un parametro

Dedichiamo questo paragrafo ad alcuni esempi di risoluzione di sistemi lineari dipendenti da un parametro reale. Risolveremo tali sistemi usando sempre il metodo di riduzione illustrato nei paragrafi precedenti. L'unica differenza é la presenza del parametro che per certi valori potrebbe annullare elementi della matrice candidati ad essere speciali.

Esempio 13.1 *Studiare, al variare del parametro reale k, il sistema lineare:*

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \\ kx + (2-k)y + kz = k^2 - k + 1 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Scriviamo le matrici completa e incompleta del sistema e applichiamo il metodo di riduzione *dall'alto verso il basso* in modo da ottenere gli elementi speciali e vedere quindi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se il sistema é possibile o no.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \\ k & 2-k & k & k^2-k+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - kR_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - kR_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & k-1 \\ 1-k^2 & 1-k & 0 & k^2-k \\ k-k^2 & 2-2k & 0 & k^2-2k+1 \end{array}\right) = B$$

Se $k = 1$, B diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

quindi, per $k = 1$, il sistema ha le ∞^2 soluzioni $(-y - z + 1, y, z)$ per ogni $y, z \in \mathbb{R}$.

Consideriamo ora $k \neq 1$. In tal caso la matrice B non é ancora ridotta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & k-1 \\ 1-k^2 & 1-k & 0 & k^2-k \\ k-k^2 & 2-2k & 0 & k^2-2k+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 + R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 + 2R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & k-1 \\ 2-k-k^2 & 0 & 0 & k^2-1 \\ 2-k-k^2 & 0 & 0 & k^2-1 \end{array}\right) \boxed{R_4 \to R_4 - R_3} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & k-1 \\ 2-k-k^2 & 0 & 0 & k^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = C.$$

Se $2-k-k^2=0$, cioè se $k=1$ oppure se $k=-2$, la terza riga della matrice incompleta é formata da elementi nulli. Poichè stiamo studiando il sistema per $k \neq 1$, l'unica soluzione accettabile dell'equazione $2-k-k^2=0$ é $k=-2$. Per tale valore di k, essendo $k^2-1=3 \neq 0$, il sistema é impossibile.

Sia ora $k \neq -2, 1$. Per questi valori di k, essendo $2-k-k^2 \neq 0$, la matrice ha tre elementi speciali tutti appartenenti alla matrice incompleta. Poichè le incognite sono tre il sistema ha una ed una sola soluzione. Gli elementi speciali sono quelli di posto $(1,3)$, $(2,2)$ e $(3,1)$ (si ricordi che $k \neq -2, 1$). Per determinarla procediamo col metodo di riduzione *dal basso verso l'alto* (si osservi che nella matrice C possiamo eliminare l'ultima riga):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & k-1 \\ (1-k)(k+2) & 0 & 0 & k^2-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to (1-k)(k+2)R_1 - kR_3} \\ \boxed{R_2 \to (k+2)R_2 - R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & (1-k)(k+2) & (1-k)(k+2) & (1-k)(k+2)-k(k^2-1) \\ 0 & (k-1)(k+2) & 0 & (k-1)(k+2)-k^2+1 \\ (1-k)(k+2) & 0 & 0 & k^2-1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to R_1 + R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (1-k)(k+2) & (k-1)(k+1)^2 \\ 0 & (k-1)(k+2) & 0 & k-1 \\ (1-k)(k+2) & 0 & 0 & k^2-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{(1-k)(k+2)}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{(k-1)(k+2)}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{(1-k)(k+2)}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{(k+1)^2}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{k+1}{k+2} \end{array}\right).$$

Quindi le soluzioni del sistema assegnato sono

$$(x,y,z) = \left(-\frac{(k+1)^2}{k+2}, \frac{1}{k+2}, -\frac{k+1}{k+2}\right).$$

Esempio 13.2 *Studiare, al variare del parametro reale k, il sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} (1-k)x + y + z = 0 \\ 2x + (2-k)y + 2z = 0 \\ x + y + (1-k)z = 0 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Essendo il sistema omogeneo scriviamo solo la matrice incompleta e applichiamo ad essa il metodo di riduzione *dall'alto verso il basso*.

$$\begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 2 & 2-k & 2 \\ 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix} \begin{array}{|c|}\hline R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ \hline R_3 \to R_3 + (k-1)R_1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 2k & -k & 0 \\ -k^2+2k & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 2k & -k & 0 \\ -k^2+4k & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Se $-k^2 + 4k = 0$, cioè $k = 0, 4$, la terza riga di B ha tutti gli elementi nulli. Inoltre si ha:

Se $k = 0$ allora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, per $k = 0$, si hanno le ∞^2 soluzioni $(-y - z, y, z)$ per ogni $y, z \in \mathbb{R}$.

Se $k = 4$ allora

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice risulta ridotta con elementi speciali quello di posto $(1, 3)$ e quello di posto $(2, 2)$. Riduciamo B *verso l'alto* (si osservi che possiamo eliminare la terza riga di B)

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_1 \to 4R_1 + R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline R_1 \to \frac{1}{4}R_1 \\ \hline R_2 \to -\frac{1}{4}R_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ e quindi, per $k = 4$, si hanno le ∞^1 soluzioni $(x, 2x, x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Sia ora $k \neq 0, 4$. Allora $-k^2 + 4k \neq 0$ e B ha tre elementi speciali. In tal caso il sistema, avendo tre incognite ed essendo omogeneo, ha l'unica soluzione banale $(0, 0, 0)$.

Esempio 13.3 *Studiare, al variare del parametro reale k, il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ kx + y + z = k \\ x - y + kz = 2 \\ 2x + 3y + z = k - 1 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Scriviamo le matrici completa e incompleta del sistema e applichiamo il metodo di riduzione *dall'alto verso il basso* in modo da ottenere gli elementi speciali e vedere quindi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se esso é possibile o no.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & 3 & 1 & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 3R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 0 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k+1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & k-5 \end{array}\right) = B$$

Se $k = 1$, B diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \boxed{R_4 \to 2R_4 + R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

Quindi, per $k = 1$, il numero degli elementi speciali coincide con quello delle incognite. Inoltre gli elementi speciali sono nella matrice incompleta. Pertanto il sistema ha una sola soluzione. Determiniamola procedendo col metodo di riduzione dal *basso verso l'alto* applicato alla matrice ridotta in cui abbiamo eliminato la seconda riga perchè formata tutta da zeri.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_3} \\ \boxed{R_1 \to 2R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to R_1 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \\ \boxed{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Quindi per $k = 1$ abbiamo l'unica soluzione $(-1, -2, \frac{5}{2})$.

Sia ora $k \neq 1$. Allora

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 0 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k+1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & k-5 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to \frac{1}{k-1}R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & k^2-1 \\ 2-k-k^2 & 0 & k+1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & k-5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 + R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & k-4 \end{array}\right).$$

Se $k=-1$, il sistema é impossibile. Sia $k \neq -1,+1$. Allora

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & k-4 \end{array}\right) \boxed{R_4 \to (k+1)R_4 + 2R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-3k-2 \end{array}\right).$$

Se $k^2-3k-2 \neq 0$ il sistema é impossibile. Supponiamo $k^2-3k-2=0$, cioè $k=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, allora l'ultima riga della matrice precedente é formata tutta da elementi nulli. Eliminando ques'ultima riga e ricordando che $k=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-3k-2 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to (k+1)R_1 - R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & k+1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to R_1 - (k+1)R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k+1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\boxed{R_1 \to R_1 \frac{1}{k+1} R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 \frac{1}{k+1} R_3}\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{k+1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+1} \end{array}\right)$$

dalla quale, ricordando che $k=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, otteniamo le soluzioni

$$\left(1, -\frac{2}{5+\sqrt{17}}, \frac{2}{5+\sqrt{17}}\right) \quad e \quad \left(1, -\frac{2}{5-\sqrt{17}}, \frac{2}{5-\sqrt{17}}\right).$$

Esempio 13.4 *Studiare, al variare del parametro reale k, il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x+ky-t=k \\ (k+1)x+y+t=1 \\ 2x+y+kt=2 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Scriviamo le matrici completa e incompleta del sistema e applichiamo il metodo di riduzione *dall'alto verso il basso* in modo da ottenere gli elementi speciali e vedere quindi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se esso é possibile o no.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ k+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c}\boxed{R_2 \to R_2 - (k+1)R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1}\end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ 0 & -k^2-k+1 & k+2 & -k^2-k+1 \\ 0 & 1-2k & k+2 & 2-2k \end{array}\right) = B$$

Se $k = -2$, B diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 + 5R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Quindi per $k = -2$ il sistema é impossibile.

Sia adesso $k \neq -2$. Abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ 0 & -k^2-k+1 & k+2 & -k^2-k+1 \\ 0 & 1-2k & k+2 & 2-2k \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ 0 & -k^2-k+1 & k+2 & -k^2-k+1 \\ 0 & k^2-k & 0 & k^2-k+1 \end{array}\right).$$

Se $k = 0, 1$ sia la matrice incompleta che la completa sono ridotte ma la matrice incompleta ha due elementi speciali (per esempio, quelli di posto $(1, 1)$ e $(2, 3)$) mentre la completa ha tre elementi speciali (per esempio, quelli di posto $(1, 1)$, $(2, 3)$ e $(3, 4)$). Quindi per $k = 0, 1$ il sistema é impossibile.

Se $k \neq 0, 1$ la matrice incompleta e la completa hanno tre elementi speciali (nei posti $(1, 1)$, $(2, 3)$ e $(3, 2)$). Poichè il sistema ha tre incognite si ha una sola soluzione. Lasciamo al lettore la determinazione di questa soluzione.

14 Come ricavare la matrice inversa attraverso il metodo di riduzione.

Ricordiamo che per il Teorema 10.6, una matrice A di ordine n é invertibile se e solo se esiste una matrice B di ordine n tale che $A \cdot B = I_n$, essendo I_n la matrice identica di ordine n. In questo paragrafo mostreremo come sia possibile, mediante il metodo di riduzione, verificare se una matrice A é invertibile e, in tal caso, determinarne l'inversa.

Esempio 14.1 *Determinare l'eventuale inversa della matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO. A é invertibile se esiste una matrice

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

tale che $A \cdot B = I_3$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la quale equivale a

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 - z_1 & x_2 + 2y_2 - z_2 & x_3 + 2y_3 - z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ 2x_1 + y_1 + 3z_1 & 2x_2 + y_2 + 3z_2 & 2x_3 + y_3 + 3z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Uguagliando nella (27) la prima, seconda e terza colonna della matrice a primo membro rispettivamente con la prima, seconda e terza colonna di quella a secondo membro, deduciamo che A ha inversa se i seguenti tre sistemi lineari

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

hanno soluzione. Tali soluzioni, se esistono, costituiscono le tre colonne dell'inversa B. Poichè i precedenti sistemi differiscono solamente nelle colonne dei termini noti possiamo risolverli, in modo più compatto, nel seguente modo. Si riduca per righe la seguente matrice formata nella prima parte dai coefficienti delle incognite (uguali per tutti e tre i sistemi) e, nella seconda parte, dalle tre colonne dei termini noti:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 + 3R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to R_1 - R_3} \\ \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to R_1 - 2R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to -R_3} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Le soluzioni dei tre sistemi sono quindi

$$(x_1, y_1, z_1) = (2, -1, -1), \quad (x_2, y_2, z_2) = (-7, 5, 3), \quad (x_3, y_3, z_3) = (3, -2, -1)$$

e la matrice inversa della A é

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dall'esempio precedente se ne deduce che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

é invertibile se, mediante il metodo di riduzione, é possibile trasformare la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{28}$$

in modo che la sottomatrice che nella (28) é a sinistra della | (quella coincidente con A) coincida con la matrice identica. In tal caso, la sottomatrice che otterremo a destra della | fornisce l'inversa di A. Nel nostro esempio abbiamo trasformato la (28) nella

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right),$$

pertanto

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

é l'inversa di A.

Possiamo schematizzare quanto detto nel seguente modo. Sia data la matrice A di ordine n. Si vuole sapere se essa é invertibile e, al tempo stesso, determinarne l'inversa (se esiste). Si può procedere nel seguente modo.

Metodo per determinare l'eventuale inversa di una matrice A:

1. Si formi la matrice $(A \mid I_n)$, in cui I_n denota la matrice identica di ordine n.
2. Si applichi il metodo di riduzione a $(A \mid I_n)$ sia dall'*alto verso il basso* che, eventualmente, dal *basso verso l'alto*:
   (a) se, mediante il metodo di riduzione, non é possibile trasformare A nella matrice I_n allora A non é invertibile;
   (b) se, mediante il metodo di riduzione, A viene trasformata in I_n avremo trasformato $(A \mid I_n)$ in $(I_n \mid B)$. In tal caso A é invertibile e B é la sua inversa.

Esempio 14.2 *Determinare l'inversa della matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO. La matrice assegnata é ridotta. Applichiamo il metodo di riduzione dal *basso verso l'alto* alla matrice $(A \mid I_5)$ in modo da trasformarla nella $(I_5 \mid A^{-1})$:

$$(A \mid I_5) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{R_4 \to 3R_4 + R_5} \\ \boxed{R_3 \to 3R_3 - 5R_5} \\ \boxed{R_2 \to 3R_2 - R_5} \\ \boxed{R_1 \to 3R_1 - 2R_5} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 0 & 3 & 0 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 9 & 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{R_3 \to 4R_3 - R_4} \\ \boxed{R_2 \to 4R_2 + R_4} \\ \boxed{R_1 \to 4R_1 - R_4} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 12 & 0 & 48 & 12 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & 24 & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 12 & -3 & -21 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_3} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 12 & 0 & 48 & 12 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 12 & -24 & 9 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 12 & -3 & -21 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to 3R_1 - R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 144 & 36 & -12 & 24 & -18 & -66 \\ 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 12 & -24 & 9 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 12 & -3 & -21 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{144}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{36}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{12}R_3} \\ \boxed{R_4 \to \frac{1}{12}R_4} \\ \boxed{R_5 \to \frac{1}{3}R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & -\frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

da cui, scambiando opportunamente le righe fra loro, otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & -\frac{11}{24} \end{array}\right). \text{ Pertanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & -\frac{11}{24} \end{pmatrix}.$$

Esempio 14.3 *Determinare l'eventuale inversa della matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO. Applichiamo il precedente metodo.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

É evidente che A non può mai essere trasformata nella I_3, pertanto non é invertibile.

Esempio 14.4 *Dire per quali valori del parametro reale k la seguente matrice é invertibile e, per questi, determinarne l'inversa:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & k \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO. Applichiamo il precedente metodo.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & k & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 + R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k-4 & k-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to 2R_3 - (k-1)R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-k-6 & 0 & k+1 & 1-k & 2 \end{array}\right).$$

Se $k^2 - k - 6 = 0$, cioè $k = -2, 3$, la matrice non é invertibile.

Sia, per il momento, $k = 2$. Allora

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-k-6 & 0 & k+1 & 1-k & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to 2R_1 + R_3} \\ \boxed{R_2 \to R_2 + R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to R_1 - R_3} \\ \boxed{R_2 \to R_2 + R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \\ \boxed{R_2 \to -\frac{1}{4}R_2} \\ \boxed{R_3 \to -\frac{1}{2}R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Allora, per $k = 2$, la matrice A é invertibile e la sua inversa é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo adesso $k \neq -2, 2, 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-k-6 & 0 & k+1 & 1-k & 2 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to (k-2)R_3 + (k^2-k-6)R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(k^2-k-6) & 4 & 2(k-4) & 2(k-2) \end{array}\right) \boxed{R_1 \to (k-2)R_1 + kR_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} k-2 & 0 & k+2 & -2 & k & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(k^2-k-6) & 4 & 2(k-4) & 2(k-2) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to 2(k^2-k-6)R_1 - (k+2)R_3} \\ \boxed{R_2 \to (-k^2+k+6)R_2 + R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & -4k^2+16 & 2k^3-4k^2-8k+16 & -2k^2+8 \\ 0 & \beta & 0 & k^2-k-2 & -k^2+3k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & \gamma & 4 & 2k-8 & 2k-4 \end{array}\right)$$

(essendo $\alpha = 2k^3 - 6k^2 - 8k + 24$, $\beta = k^3 - 3k^2 - 4k + 12$ e $\gamma = 2k^2 - 2k - 12$)

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{2(k-2)(k^2-k-6)}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{(k-2)(k^2-k-6)}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{2(k^2-k-6)}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-2(k+2)}{k^2-k-6} & \frac{k^2-4}{k^2-k-6} & -\frac{k+2}{k^2-k-6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k+1}{k^2-k-6} & \frac{1-k}{k^2-k-6} & \frac{2}{k^2-k-6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{k^2-k-6} & \frac{k-4}{k^2-k-6} & \frac{k-2}{k^2-k-6} \end{array}\right).$$

Allora, per $k \neq -2, 2, 3$, la matrice A é invertibile e la sua inversa é

$$\begin{pmatrix} \frac{-2(k+2)}{k^2-k-6} & \frac{k^2-4}{k^2-k-6} & -\frac{k+2}{k^2-k-6} \\ \frac{k+1}{k^2-k-6} & \frac{1-k}{k^2-k-6} & \frac{2}{k^2-k-6} \\ \frac{2}{k^2-k-6} & \frac{k-4}{k^2-k-6} & \frac{k-2}{k^2-k-6} \end{pmatrix}.$$

15 Determinanti. Teorema di Cramer. Teorema di Rouché-Capelli

Definizione 15.1 *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times m$. Per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dicesi minore complementare dell'elemento a_{ij} la matrice $(n-1) \times (m-1)$ che si ottiene dalla A sopprimendo in essa la riga i-esima e la colonna j-esima.*

Esempio 15.1 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & -11 & 2 & 4 \\ 8 & -7 & 12 & 4 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 19 & 21 & -3 & 5 \\ 56 & -1 & 45 & 34 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Il minore complementare di a_{34} é

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & 19 & -3 & 5 \\ 56 & -1 & 45 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ora definire per ricorrenza una funzione di $M(n;\mathbb{K})$ in $\mathbb{K}$ che ad ogni matrice quadrata A di ordine n associa un elemento $\det A \in \mathbb{K}$, detto il *determinante* di A.

Passo 1. Sia $A = (a_{11})$ una matrice quadrata di ordine $n = 1$. In tal caso poniamo

$$\det A = \det\,(a_{11}) = a_{11}.$$

Passo 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

In tal caso poniamo

$$\det A = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}.$$

Passo 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

In tal caso poniamo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Passo 4. Supponiamo che sia stato definito $\det A$ per una matrice quadrata A di ordine $n-1$. Definiamo $\det A$ per una matrice quadrata A di ordine n. Innanzitutto diamo la seguente definizione.

Definizione 15.2 *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dicesi complemento algebrico dell'elemento a_{ij}, e si indica con A_{ij}, il numero $(-1)^{i+j}$ moltiplicato per il determinante del minore complementare dell'elemento a_{ij} (si noti che questo minore é una matrice quadrata di ordine $n-1$ di cui si suppone ne sia stato definito il determinante).*

Per esempio, posto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

il complemento algebrico dell'elemento a_{23} é

$$(-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -(6-3) = -3.$$

Vale, in generale, il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 15.1 (Teorema di Laplace) *Fissata una linea qualsiasi (riga o colonna) di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$, la somma dei prodotti degli elementi della linea per i rispettivi complementi algebrici é un valore che é indipendente dalla linea scelta.*

In altre parole il teorema precedente afferma che comunque si scelgano due linee differenti (non necessariamente *parallele*), la somma dei prodotti degli elementi di una linea per i rispettivi complementi algebrici é uguale per entrambe le lineee scelte.

Definizione 15.3 (Definizione ricorsiva di determinante) *Data una matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$, si dice determinante di A (e si scrive* $\det A$ *oppure $|A|$) la somma dei prodotti di una linea qualsiasi di A per i rispettivi complementi algebrici.*

Come esempio facciamo vedere che, quando A ha ordine 2 oppure 3, le definizioni di $\det A$ date ai Pass1 2 e 3 coincidono con quella ricorsiva del Passo 4.

Sia $n = 2$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Fissata come linea la prima riga abbiamo

$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1} \det (a_{22}) + a_{12}(-1)^{1+2} \det (a_{21}) = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$.

Sia $n = 3$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Fissata come linea la prima riga abbiamo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

$$a_{12}(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) -$$

$$a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Esempio 15.2 *Calcolare il* $\det A$, *essendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO. Fissando la terza riga abbiamo

$$\det A = -3(-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$1(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0(-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3(-3) - (-3) + 1 = 13.$$

Proprietà dei determinanti. Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$. Allora

1. Se in A esiste una linea con gli elementi tutti nulli, $\det A = 0$.
2. Se si scambiano fra loro di posto due lineee parallele si ottiene una nuova matrice A' per la quale si ha $\det A' = -\det A$.
3. Se in A vi sono due lineee parallele uguali, allora $\det A = 0$.
4. Se si moltiplicano tutti gli elementi di una linea di A per $\alpha \in \mathbb{K}$, si ottiene una nuova matrice A' per la quale si ha $\det A' = \alpha \det A$.
5. Se in A vi sono due linee parallele proporzionali, allora $\det A = 0$.

6. Se gli elementi di una linea di A sono binomi, allora det $A =$ det $B +$ det C, essendo B e C rispettivamente le matrici ottenute da A sostituendo ad ogni binomio il suo primo addendo ed il suo secondo addendo.

   Per esempio se
$$A = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
   si ha
$$\det A = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

7. Se agli elementi di una linea di A si aggiungono gli elementi corrispondenti di altre linee parallele, moltiplicate per costanti qualsiasi, il valore del det A non cambia.

8. Se in A tutti gli elementi al di sopra (o al di sotto) della diagonale principale sono tutti nulli, allora il det A é uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.

   Per esempio se
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$
   si ha det $A = a_{11}a_{22}a_{33}$.

9. La somma dei prodotti degli elementi di una linea di A per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra linea ad essa parallela, é 0.

10. Il determinante di A coincide col determinante della sua trasposta, cioè det $A =$ det A^T.

Le precedenti proprietà (in particolare la 7) si rivelano utili quando si debba effettuare il calcolo del determinante di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 4$. Data la matrice A, per la definizione ricorsiva di determinante, bisogna prima scegliere una linea e moltiplicare poi i suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici. É allora evidente che conviene scegliere una linea nella quale figuri il maggior numero possibile di zeri. Se in nessuna linea c'é un *sufficiente* numero di zeri, mediante la proprietà 7, é possibile costruire una nuova matrice A', avente il determinante uguale a quello di A, la quale possieda in una sua linea il massimo numero possibile di zeri. Illustriamo quanto detto con un esempio. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la proprietà 7 (ovviamente C_i denota la colonna i-esima):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boxed{R_2 \to R_2 - R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C_2 \to C_2 - 2C_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le matrici ottenute hanno tutte lo stesso determinante. Pertanto

$$\det\ A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6.$$

Del seguente teorema omettiamo la dimostrazione.

Teorema 15.2 Teorema di Binet. *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. Il determinante della matrice prodotto $A \cdot B$ é uguale al prodotto dei determinanti di A e di B. Cioè*

$$\det\ A \cdot B = \det\ A \cdot \det\ B.$$

Teorema 15.3 *Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia A' una matrice ridotta per righe della A mediante le regole di riduzione (17) e (18). Allora $\det\ A \neq 0$ se e solo se $\det\ A' \neq 0$. In generale però non é detto che A ed A' hanno gli stessi determinanti.*

Dimostrazione. Per le proprietà dei determinanti abbiamo che se ad A si applica la regola di riduzione $R_i \to \lambda R_i + \mu R_j$ (con $\lambda \neq 0$ e $i \neq j$) si ottiene una matrice B tale che $\det\ B = \lambda \det\ A$. Analogamente, se ad A si applica la regola $R_i \leftrightarrow R_j$ si ottiene una matrice B tale che $\det\ B = -\det\ A$. ∎

Adesso ci poniamo la seguente domanda: *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Esistono matrici A' ridotte per righe della A tali che $\det\ A' = \det\ A$?* La risposta a questo quesito é positiva e segue dalla proprietà 7 dei determinanti che possiamo enunciare come

Regola di riduzione in senso stretto:

$$R_i \to R_i + \mu R_j, \quad \forall \mu \in \mathbb{K}, \quad i \neq j. \tag{29}$$

Diremo che la matrice A' é la matrice ridotta in senso stretto della A se A' può essere ottenuta dalla A mediante la regola (29).

Teorema 15.4 *Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia $\overline{A}$ la matrice ridotta in senso stretto della A. Allora* $\det \overline{A} = \det A$.

Dimostrazione. Si veda la proprietà 7 dei determinanti. ∎

Definizione 15.4 *Sia A una matrice $m \times n$ e sia $h \leq \min\{m, n\}$. Scelte in A h righe e h colonne qualsiasi, gli h^2 elementi in cui esse si intersecano formano una matrice quadrata che prende il nome di minore di ordine h della matrice A.*

Definizione 15.5 *Si dice rango o caratteristica di una matrice A di tipo $m \times n$, l'ordine massimo dei minori di A aventi determinante diverso da zero. Il rango di A si indica con $r(A)$.*

Dalla proprietà 10 dei determinanti si ottiene facilmente il seguente risultato.

Teorema 15.5 *Il rango di una matrice A coincide con quello della sua trasposta A^T.*

Sia A una matrice ridotta. Fissati in A gli elementi speciali, sia M il minore ottenuto prendendo in A gli elementi in cui si intersecano le righe e le colonne passanti per gli elementi speciali. Allora, per le proprietà 2 e 8 dei determinanti, $\det M \neq 0$. Per esempio si consideri la matrice ridotta

$$A = \begin{pmatrix} \underline{-1} & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 5 & 5 & \underline{7} \\ 0 & -8 & \underline{-14} & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$M = \begin{pmatrix} \underline{-1} & 3 & 2 \\ 0 & 14 & \underline{7} \\ 0 & \underline{-14} & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando fra loro in M le colonna 2 e 3, abbiamo

$$M' = \begin{pmatrix} \underline{-1} & 2 & 3 \\ 0 & \underline{7} & 14 \\ 0 & 0 & \underline{-14} \end{pmatrix}$$

che é una matrice triangolare. Pertanto $\det M = -\det M' = (-1) \cdot 7 \cdot (-4) \neq 0$.

Teorema 15.6 *Il rango di una matrice A coincide col numero degli elementi speciali di una qualsiasi matrice ridotta dalla A mediante il metodo di riduzione per righe.*

Dimostrazione. Sia M un minore di ordine h, $h \leq \min\{m, n\}$, della matrice A di tipo $m \times n$. Il metodo di riduzione per righe trasforma A in una matrice A'. Sia M' il minore ottenuto scegliendo nella A' le righe e le colonne corrispondenti (nella A) a quelle di M. Per le proprietà 2, 4, 6 e 7 dei determinanti si ottiene che $\det M' = 0$ se e solo se $\det M = 0$.

Sia ora B la matrice ridotta dalla A mediante il metodo di riduzione per righe e supponiamo che B ha h elementi speciali. Indichiamo infine con C il minore ottenuto scegliendo in B le h righe e le h colonne occupate dagli elementi speciali. Allora C é un minore di ordine massimo, infatti B ha esattamente h righe non tutte nulle. Inoltre, come osservato prima, per le proprietà 2 e 8 dei determinanti, si ha $\det C \neq 0$. ∎

Esempio 15.3 *Determinare il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO. Per il Teorema 15.6, il rango di A coincide col numero degli elementi speciali di una sua matrice ridotta per righe.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 + 3R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 + R_1} \\ \boxed{R_5 \to R_5 + 4R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 18 & 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_4 \to 7R_4 - 3R_3} \\ \boxed{R_5 \to 7R_5 - 10R_3} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & -8 & -14 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -14 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_6 \to R_6 - R_3} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \underline{-1} & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 5 & 5 & \underline{7} \\ 0 & -8 & \underline{-14} & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Pertanto il rango di } A \text{ é } 3.$$

Si osservi il numero degli elementi speciali di una matrice ridotta A' coincide col numero delle sue righe non nulle. Pertanto abbiamo il seguente

Metodo per determinare il rango di una matrice: Il rango di una matrice A é dato dal numero di righe non nulle di una sua qualsiasi matrice ridotta per righe.

Definizione 15.6 Matrice ridotta per colonne. *Una matrice* $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$, *si dice ridotta per colonne se, per ogni* j, *é verificata una delle due seguenti condizioni:*

- $a_{ij} = 0$ *per ogni* $i = 1, 2, \ldots, n$, *oppure*
- *esiste almeno un* $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *tale che* $a_{tj} \neq 0$ *e, se* $j < n$, $a_{t\rho} = 0$ *per ogni* $j + 1 \leq \rho \leq n$.

Esempio 15.4 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

é ridotta per colonne.

Definizione 15.7 Elemento speciale di una matrice ridotta per colonne. *Sia* $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$, *una matrice ridotta per colonne. Per la Definizione 11.4, ogni colonna* $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *contiene almeno un elemento* $a_{tj} \neq 0$ *tale che, se* $j < n$, $a_{t\rho} = 0$ *per ogni* $j + 1 \leq \rho \leq n$. *Per ogni colonna non nulla* C_j *si fissi, a piacere, uno solo di questi elementi. Esso si chiama l'elemento speciale relativo a* C_j.

La dimostrazione del seguente teorema é immediata.

Teorema 15.7 *Ridurre per colonne la matrice* A *equivale a ridurre per righe la sua trasposta* A^T. *Inoltre, se* A' *é una matrice ridotta per colonne di* A, *esiste una matrice ridotta per righe di* A^T *che coincide con* $(A')^T$.

Esempio 15.5 *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice A' *ridotta per colonne della* A. *Cercare una matrice ridotta per righe della* A^T *che coincida con* $(A')^T$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{C_2 \to C_2 + C_1} \\ \boxed{C_3 \to -C_3 + C_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \boxed{C_3 \to -4C_3 + C_2} \longrightarrow$$

$A' = \begin{pmatrix} \underline{-1} & 0 & 0 \\ 2 & \underline{4} & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & \underline{-7} \end{pmatrix}$ dove gli elementi sottolineati sono stati scelti come speciali. Adesso riduciamo per righe la trasposta di A:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to -R_3 + R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to -4R_3 + R_2} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} \underline{-1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{4} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-7} \end{pmatrix}.$$

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Diremo che l'equazione

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$$

é *combinazione lineare* delle rimanenti se esistono $m-1$ scalari $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, per cui le due seguenti uguaglianze siano verificate per ogni $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \lambda_i \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\right), \tag{30}$$

e

$$b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \lambda_i b_i. \tag{31}$$

Consideriamo adesso il sistema lineare di n equazioni in n variabili

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{32}$$

Supponiamo che (32) abbia infinite soluzioni. Come visto nel Paragrafo 11, applicando ripetutamente il Teorema 11.3 é possibile ridurre (32) ad un sistema in cui almeno una fra le sue equazioni (supponiamo la j-esima) coincida con l'identità $0 = 0$. Questo equivale a dire che l'equazione j-esima di (32) é combinazione lineare delle rimanenti.

Teorema 15.8 *Sia $A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$. Supponiamo che esista una matrice $B \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $A \cdot B = I_n$. Allora esiste una matrice $C \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $C \cdot A = I_n$.*

Dimostrazione. Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{b2} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo gli n sistemi

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases},$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases},$$

....

$$(n) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 1 \end{cases}$$

Essendo $A \cdot B = I_n$, per $j = 1, \ldots, n$, $(b_{1j}, b_{2j} \ldots, b_{nj})$ é una soluzione del sistema (j). Proviamo adesso che, per ogni j, questa soluzione é unica. Supponiamo per esempio che (1) abbia più di una soluzione, quindi infinite. Come osservato precedentemente, almeno una delle sue equazioni é combinazione lineare delle rimanenti. Per la (31), essa non può coincidere con la prima. Supponiamo sia la j-esima per qualche $2 \leq j \leq n$. Allora, per le (30) e (31),

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\right)$$

per ogni $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Ricordando che $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ é una soluzione del sistema (j), abbiamo

$1 = a_{1j}b_{1j} + a_{2j}b_{2j} + \ldots + a_{nj}b_{nj} = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \left(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}\right) = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0$. Impossibile, quindi per $j = 1, 2, \ldots, n$ il sistem (j) ammette l'unica soluzione $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$. Allora, come esplicitamente osservato nel Paragrafo 11, il numero degli elementi speciali della matrice ridotta della A é uguale ad n (in altre parole il rango di A é n). Per i Teoremi 15.5 e 15.6, anche A^T ha rango n. Ne segue che esiste una ed una sola matrice $Y \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ tale che $A^T \cdot Y = I_n$ (si osservi che l'i-esima colonna di Y é l'unica soluzione del sistema $A^T X_i = F_i$). Quindi $\left(A^T \cdot Y\right)^T = I_n^T = I_n$, da cui $Y^T \cdot A = I_n$. Pertanto la matrice cercata é $C = Y^T$. ∎

Il seguente risultato fornisce una formula per calcolare la matrice inversa quando essa esiste.

Teorema 15.9 *Una matrice A di ordine n é invertibile se e solo se* det $A \neq 0$. *Posto inoltre $A = (a_{ij})$ e $A^{-1} = (b_{ij})$, si ha*

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det\, A}$$

essendo A_{ji} il complemento algebrico dell'elemento a_{ji} di A (si veda la Definizione 15.2).

Esempio 15.6 *Sia data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se A é invertibile e, in caso affermativo, determinare l'inversa A^{-1}.

SVOLGIMENTO. Si ha det $A = 11 \neq 0$. Pertanto A é invertibile. Abbiamo quindi $A^{-1} = (B_{ij})$ essendo:

$$b_{11} = \frac{(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{11} = -\frac{3}{11}, \qquad b_{12} = \frac{(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{11} = \frac{2}{11},$$

$$b_{13} = \frac{(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{11} = \frac{8}{11}, \qquad b_{21} = \frac{(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{11} = -\frac{1}{11},$$

$$b_{22} = \frac{(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{11} = -\frac{3}{11}, \qquad b_{23} = \frac{(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{11} = \frac{10}{11},$$

$$b_{31} = \frac{(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{11} = \frac{4}{11}, \qquad b_{32} = \frac{(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{11} = \frac{1}{11},$$

$$b_{33} = \frac{(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{11} = -\frac{7}{11}.$$

Pertanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{8}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{10}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{11} \end{pmatrix}.$$

Si consideri il seguente sistema lineare di n equazioni in n incognite (un sistema lineare il cui numero di equazioni coincide col numero delle incognite si dice quadrato):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{33}$$

Si ricordi che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é detta la matrice incompleta del sistema (33). Per la risoluzione dei sistemi lineari, oltre al metodo di riduzione illustrato nei paragrafi precedenti, si possono applicare i seguenti due importanti teoremi di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 15.10 (Teorema di Cramer). *Se* $\det A \neq 0$*, allora il sistema (33) ha un'unica soluzione data da*

$$\left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_n}{\det A}\right)$$

essendo A_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, la matrice che si ottiene sostituendo nella matrice incompleta* A *del sistema la colonna i-esima con la colonna*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

dei coefficienti. Per esempio

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema 15.11 (Teorema di Rouché-Capelli). *Il sistema lineare completo di m equazioni in n incognite*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{34}$$

ammette soluzioni se e solo se la sua matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e la sua matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango. In tal caso, posto $r(A) = r(B) = h \leq \min\{n, m\}$ e indicato con H un minore di A di ordine h avente determinante diverso da zero, (34) é equivalente ad un sistema di h equazioni in h incognite avente come equazioni quelle i cui coefficienti concorrono a formare le righe di H (le altre equazioni si scartano) e come incognite quelle i cui coefficienti concorrono a formare le colonne di H (le altre incognite si portano a termine noto). Il sistema così ottenuto si può risolvere mediante il Teorema di Cramer.

Esempio 15.7 *Studiare, applicando il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 7x - 2y + 7z + 2t = 5 \\ 2x - y + z + 3t = 2 \end{cases} .$$

SVOLGIMENTO. Come visto nell'Esempio 11.10 la matrice incompleta e la matrice completa hanno lo stesso numero di elementi speciali, cioè hanno lo stesso rango pertanto il sistema ammette soluzioni. Il massimo ordine di un minore della matrice incompleta A del sistema assegnato é 3. Infatti il minore formato dalle prime tre colonne di A ha determinante -18. Quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema assegnato equivale al seguente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 - t \\ 7x - 2y + 7z = 5 - 2t \\ 2x - y + z = 2 - 3t \end{cases}$$

che, per il Teorema di Cramer, ha soluzione

$$\left(\frac{\det \begin{pmatrix} 1-t & -2 & 3 \\ 5-2t & -2 & 7 \\ 2-3t & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-18}, \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 3 \\ 5 & 5-2t & 7 \\ 2 & 2-3t & 1 \end{pmatrix}}{-18}, \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1-t \\ 7 & -2 & 5-2t \\ 2 & -1 & 2-3t \end{pmatrix}}{-18} \right).$$

16 Vettori applicati del piano

Definizione 16.1 *Sia O un punto fissato del piano. Si chiama vettore applicato in O un segmento orientato OP, dove P é un punto del piano diverso da O.*

Un vettore applicato é individuato da tre elementi:

- la *direzione*, cioè la retta passante per i punti O e P;
- il *verso*, che é quello che va da O a P (indicato dalla freccia);
- il *modulo*, cioè il numero reale non negativo che misura la lunghezza del segmento (non orientato) OP.

Il vettore che ha modulo uguale a zero e direzione e verso indeterminati dicesi *vettore nullo* e si indica con $\vec{O}$.

Definizione 16.2 *Due vettori applicati in O sono uguali se e solo se o entrambi hanno modulo zero, oppure hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo.*

Un vettore si indica con $\overrightarrow{OP}$ oppure, più semplicemente, con $\vec{v}$. Il modulo di un vettore si indica con $|\overrightarrow{OP}|$, oppure $|\vec{v}|$.

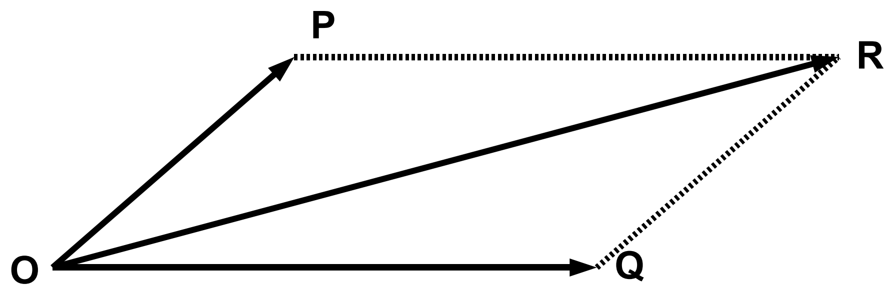
Definizione 16.3 Somma di vettori. *Siano $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ due vettori applicati in O. Vogliamo definire il vettore*

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

detto somma di $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$. Procediamo nel seguente modo:

- *Se $\overrightarrow{OP} = \vec{O}$, porremo $\overrightarrow{OR} = \vec{O} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \vec{O} = \overrightarrow{OQ}$.*
  Analogamente, se $\overrightarrow{OQ} = \vec{O}$, porremo $\overrightarrow{OR} = \vec{O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} + \vec{O} = \overrightarrow{OP}$.

- *Se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ sono entrambi diversi dal vettore nullo ed hanno direzioni pure diverse, costruiamo il seguente parallelogramma $OPRQ$*



Il vettore $\overrightarrow{OR}$ definisce la somma $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$.

- *Siano ora $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ due vettori entrambi diversi dal vettore nullo ed aventi la stessa direzione (cioè giacenti sulla stessa retta).*

  1. *Se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ hanno lo stesso verso, si definisce $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ il vettore $\overrightarrow{OR}$ che ha la stessa direzione e verso dei due vettori dati e modulo uguale a $|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{OQ}|$.*
  2. *Se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ hanno verso opposto e moduli diversi, si definisce $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ come quel vettore $\overrightarrow{OR}$ che ha la stessa direzione dei vettori dati, lo stesso verso del vettore che ha modulo maggiore, e modulo uguale alla differenza dei moduli (il maggiore meno il minore).*
  3. *Se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ hanno verso opposto e lo stesso modulo, si definisce $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ il vettore nullo $\vec{O}$.*

Definizione 16.4 *Dicesi opposto del vettore $\vec{v}\neq\vec{O}$ il vettore avente la stessa direzione e lo stesso modulo di $\vec{v}$, ma verso opposto. L'opposto di $\vec{v}$ si indica con $-\vec{v}$. Porremo $-\vec{O}=\vec{O}$.*

Definizione 16.5 *Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si chiama differenza di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (e si indica con $\vec{v}-\vec{w}$) il vettore $\vec{v}+(-\vec{w})$*

Si può verificare che l'insieme dei vettori applicati in un punto, con l'operazione di somma, risulta essere un gruppo abeliano.

Definizione 16.6 Prodotto di un numero per un vettore.

- *Siano $\vec{v}$ un vettore non nullo e $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Dicesi prodotto di a per $\vec{v}$ il vettore (che si indica con $a\vec{v}$) così definito:*

  1. *il modulo di $a\vec{v}$ é uguale a $|a||\vec{v}|$;*
  2. *la direzione di $a\vec{v}$ é quella di $\vec{v}$;*

3. *il verso di $a\vec{v}$ é quello di $\vec{v}$ se $a > 0$, oppure é il verso opposto a quello di $\vec{v}$ se $a < 0$.*

- *Per convenzione si pone $0\vec{v} = a\vec{O} = \vec{O}$.*

Proposizione 16.1 *Il prodotto di un numero, detto scalare, per un vettore gode delle seguenti proprietà:*

- *Distributiva rispetto agli scalari: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.*
- *Distributiva rispetto ai vettori: $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$.*
- *Associativa: $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$.*
- *Esistenza dell'elemento neutro: $1\vec{v} = \vec{v}$.*

Si può provare che

$$-\vec{v} = (-1)\vec{v}.$$

Nel piano α fissiamo un sistema di coordinate cartesiane $O\vec{x}\vec{y}$ e consideriamo i vettori di α applicati in O.

Definizione 16.7 Componenti di un vettore applicato. *Sia $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Le coordinate (a, b) del punto P si chiamano le componenti di $\vec{v}$ (rispetto al sistema di coordinate fissato $O\vec{x}\vec{y}$).*

Valgono le seguenti proprietà:

1. Due vettori sono uguali se hanno le componenti ordinatamente uguali.
2. Le componenti di $\vec{v}$ si indicano con v_x e v_y e scriveremo $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.
3. Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ allora si ha $|\,\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Definizione 16.8 Versore. *Dicesi versore un vettore di modulo 1.*

Quindi $\vec{v}$ é un versore se e solo se $v_x^2 + v_y^2$. Si ha inoltre che per ogni vettore non nullo $\vec{v}$ esiste uno ed un solo versore avente la stessa direzione e lostesso verso di $\vec{v}$, esso é dato da $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$, si chiama *versore associato a* $\vec{v}$ e si indica con $vers\,\vec{v}$.

I vettori $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono due versori, detti i versori fondamentali del sistema di coordinate $O\vec{x}\vec{y}$.

Teorema 16.1 Scomposizione. *Per ogni vettore $\vec{v}$ si ha*

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

Cioè ogni vettore si può scomporre in modo unico nella somma di un vettore avente la direzione dell'asse $\vec{x}$ e di un vettore avente la direzione dell'asse $\vec{y}$; e questi due vettori si ottengono moltiplicando i versori fondamentali per le componenti di $\vec{v}$.

Proposizione 16.2 *Siano $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Allora:*

1. $a\vec{v} = (av_x)\vec{i} + (av_y)\vec{j}$;
2. $\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x)\vec{i} + (v_y + w_y)\vec{j}$.

Definizione 16.9 Vettori paralleli. *Siano $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ due vettori non nulli. Essi si dicono paralleli (e si scrive $\vec{v}//\vec{w}$) se hanno la stessa direzione (cioè se i punti O, P e Q giacciono sulla stessa retta).*

Per convenzione $\vec{O}$ é parallelo ad ogni vettore $\vec{v}$.

Proposizione 16.3 *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori non nulli. Allora:*

1. *$\vec{v}//\vec{w}$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, tale che $\vec{w} = t\vec{v}$. Si ha inoltre che $t = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$ se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno lo stesso verso, oppure $t = -\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$ se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno verso opposto.*
2. *$\vec{v}//\vec{w}$ se e solo se $v_x w_y - v_y w_x = 0$.*

Esempio 16.1 *Siano $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{w} = 6\vec{i} + h\vec{j}$. Trovare, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\vec{v}//\vec{w}$.*

SVOLGIMENTO. Per la (2) della Proposizione 16.3 deve essere $v_x w_y - v_y w_x = 3h - 24 = 0$. Quindi $h = 8$.

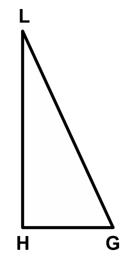
Più in generale é possibile provare il seguente risultato.

Teorema 16.2 *Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori non nulli e non paralleli del piano. Allora, comunque si fissi un vettore $\vec{w}$ nel piano esiste una ed una sola coppia ordinata $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.*

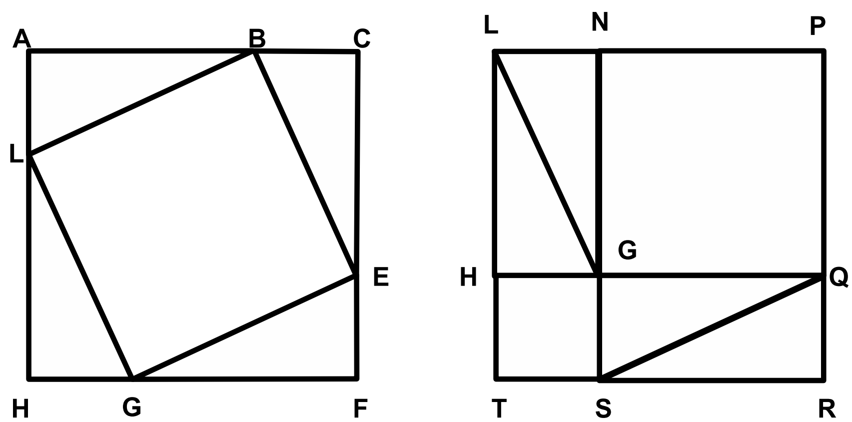
Vogliamo ora stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinchè due vettori non nulli del piano siano ortogonali. A tale scopo richiamiamo alcuni importanti risultati della geometria euclidea.

Teorema 16.3 Teorema di Pitagora. *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa é equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Si consideri il triangolo rettangolo LGH in figura.



Vogliamo provare che $\overline{LG}^2 = \overline{LH}^2 + \overline{HG}^2$. Costruiamo due quadrati $ACFH$ e $LPRT$ come nella figura seguente.



Entrambi questi quadrati hanno lato uguale a $\overline{LH} + \overline{HG}$. Si osservi inoltre che i triangoli LHG, GEF, BCE, ABL (contenuti nel primo quadrato) sono equivalenti fra loro, e i triangoli LHG, LNG, GQR, GRS (contenuti nel secondo quadrato) sono pure equivalenti fra loro. Pertanto $\overline{LG}^2 = As(LBEG) = As(ACFH) - As(LHG) - As(GEF) - As(BCE) - As(ABL) = As(LPRT) - As(LHG) - As(LNG) - As(GQR) - As(GRS) = As(NPQG) + As(HGST) = \overline{LH}^2 + \overline{HG}^2$. ∎

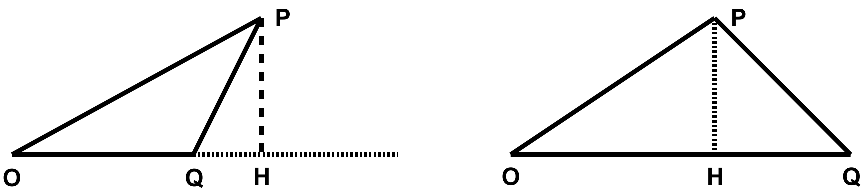
Teorema 16.4 *Sia POQ un triangolo qualsiasi. Posto $\alpha = P\widehat{O}Q$ si ha che*

1. $\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 > \overline{PQ}^2$ *se e solo se* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2. $\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = \overline{PQ}^2$ *se e solo se* $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

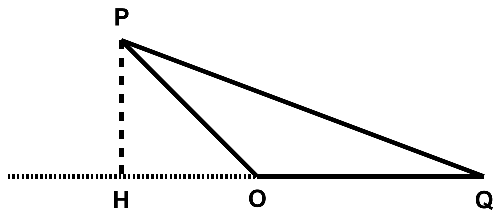
3. $\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 < \overline{PQ}^2$ *se e solo se* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, allora per il teorema di Pitagora, $\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = \overline{PQ}^2$. Sia $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Se l'angolo $P\widehat{Q}O$ é retto, per il teorema di Pitagora abbiamo $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 < \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$. Supponiamo ora che $P\widehat{Q}O$ non sia retto. Allora si ha uno dei due casi mostrati nella figura seguente



In ogni caso il piede H della perpendicolare condotta da P al lato OQ appartiene alla semiretta avente origine in O e contenente il punto Q. Quindi $\overline{QH}^2 = (\overline{OQ} - \overline{OH})^2$. Da cui $\overline{PQ}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OH}^2 - 2\overline{OH} \cdot \overline{OQ} + \overline{HP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OH} \cdot \overline{OQ} < \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2$.

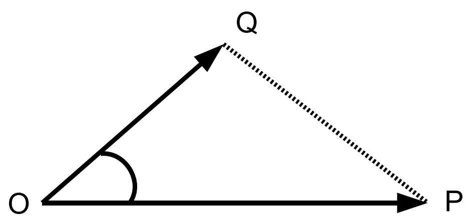
Sia ora $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Allora abbiamo



e quindi $\overline{PQ}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{HP}^2 = (\overline{OH} + \overline{OQ})^2 + \overline{HP}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{OH}^2 + \overline{OQ}^2 + 2\overline{OH} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + 2\overline{OH} \cdot \overline{OQ} > \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$.

Viceversa, supponiamo che vale l'equazione $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2$, allora $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Infatti se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ si ha, come abbiamo provato sopra, $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 > \overline{PQ}^2$. Mentre se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, abbiamo $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 < \overline{PQ}^2$. Analogamente si prova che se $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 > \overline{PQ}^2$, allora $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mentre se $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 < \overline{PQ}^2$, allora $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. ▮

Siano $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ due vettori non nulli e non paralleli. L'angolo in O del triangolo OPQ (non orientato e di misura in radianti compreso fra 0 e π) si chiama *l'angolo formato dai due vettori non nulli* $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e si denota col simbolo $\widehat{\vec{v}\vec{w}}$.



Nel seguito confonderemo $\widehat{\vec{v}\vec{w}}$ con la sua misura in radianti.

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono non nulli e paralleli poniamo $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = 0$ se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno lo stesso verso, $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \pi$ se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno verso opposto.

Si osservi che $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{2}$ se e solo se $\vec{v} \perp \vec{w}$ ($\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali).

Teorema 16.5 *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori. Allora*

1. $|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 > |\vec{v} - \vec{w}|^2$ *se e solo se* $0 \leq \widehat{\vec{v}\vec{w}} < \frac{\pi}{2}$;

2. $|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |\vec{v} - \vec{w}|^2$ *se e solo se* $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{2}$;

3. $|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 < |\vec{v} - \vec{w}|^2$ *se e solo se* $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{\vec{v}\vec{w}} \leq \pi$.

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Se $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = 0$ o $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \pi$, la tesi segue facilmente. Sia ora $\vec{v} \neq \vec{O}$ e $\vec{w} \neq \vec{O}$. Posto $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ si ha $|\vec{v} - \vec{w}| = \overline{PQ}$ e il risultato segue dal Teorema 16.4. ∎

Convenendo che il vettore nullo $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ può essere considerato sia parallelo che ortogonale ad un qualsiasi altro vettore $\vec{w}$, il seguente corollario é conseguenza immediata del Teorema 16.5 e della definizione di modulo di un vettore.

Corollario 16.1 *Siano* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ *e* $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$. *Allora*

1. $0 \leq \widehat{\vec{v}\vec{w}} < \frac{\pi}{2}$ *se e solo se* $v_x w_x + v_y w_y > 0$;

2. $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{2}$ *se e solo se* $v_x w_x + v_y w_y = 0$;

3. $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{\vec{v}\vec{w}} \leq \pi$ *se e solo se* $v_x w_x + v_y w_y < 0$.

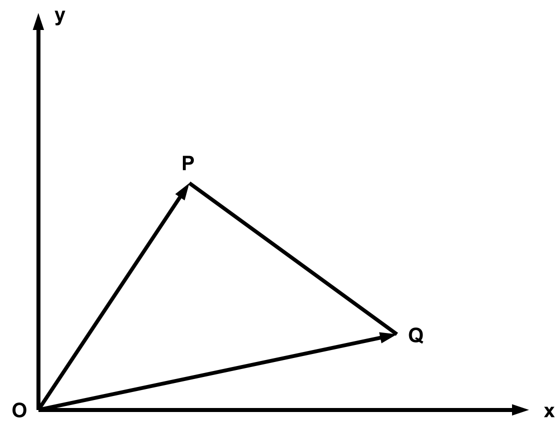
Definizione 16.10 Prodotto scalare. *Siano* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ *e* $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ *due vettori del piano. Dicesi prodotto scalare o prodotto interno di* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *il numero reale* $\vec{v} \cdot \vec{w}$ *così definito:*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = v_x w_x + v_y w_y.$$

Teorema 16.6 *Si ha*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}}.$$

Dimostrazione. Poniamo $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$. Nel caso in cui uno dei due vettori é nullo il teorema segue facilmente. Supponiamo $\vec{v} \neq \vec{O}$ e $\vec{w} \neq \vec{O}$. Dimostriamo il teorema solo nel caso in cui $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ siano come nella figura seguente lasciando al lettore gli altri casi.



Si ha $v_x = |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{i}}$, $v_y = |\vec{v}| \sin \widehat{\vec{v}\vec{i}}$, $w_x = |\vec{w}| \cos \widehat{\vec{w}\vec{i}}$, $w_y = |\vec{w}| \sin \widehat{\vec{w}\vec{i}}$ e $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \widehat{\vec{v}\vec{i}} - \widehat{\vec{w}\vec{i}}$. Quindi $\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \cos(\widehat{\vec{v}\vec{i}} - \widehat{\vec{w}\vec{i}}) = \cos \widehat{\vec{v}\vec{i}} \cos \widehat{\vec{w}\vec{i}} + \sin \widehat{\vec{v}\vec{i}} \sin \widehat{\vec{w}\vec{i}} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{|\vec{v}||\vec{w}|}$, da cui la tesi.

Si osservi che questo risultato si può ottenere come conseguenza del teorema di Carnot. Infatti, considerando il triangolo OPQ, si ha $\overline{PQ} = |\vec{v} - \vec{w}|$ e, per il teorema di Carnot,

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}},$$

cioè

$$(v_x - w_x)^2 + (v_y - w_y)^2 = v_x^2 + v_y^2 + w_x^2 + w_y^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}},$$

da cui la tesi. ∎

Si osservi che, nel corso della dimostrazione del precedente teorema, é stata ottenuta la seguente rilevante uguaglianza per due vettori non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2}}. \tag{35}$$

Si osservi che $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\,\vec{v}\,|^2$, $\quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$. Dal Corollario 16.1 segue infine che:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ se e solo se $0 \leq \widehat{\vec{v}\vec{w}} < \frac{\pi}{2}$;
2. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ se e solo se $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{2}$;
3. $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ se e solo se $\frac{\pi}{2} < \widehat{\vec{v}\vec{w}} \leq \pi$.

Proposizione 16.4 *Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:*

1. *Associativa:* $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
2. *Commutativa:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
3. *Distributiva:* $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

17 Vettori applicati dello spazio

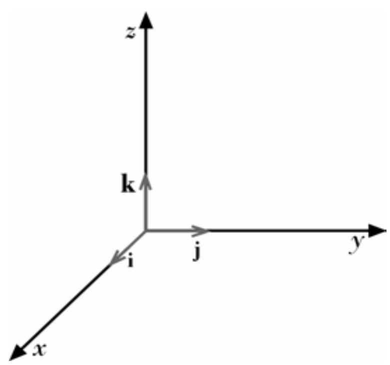
Analogamente ai vettori applicati del piano possiamo definire i vettori applicati dello spazio. Omettiamo di ripetere (perchè del tutto equivalenti) le definizioni di vettore applicato, vettore nullo, uguaglianza fra vettori, somma di vettori, vettore opposto, prodotto di uno scalare per un vettore.

Ovviamente se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é un vettore e nello spazio fissiamo un sistema di coordinate cartesiane $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$, le coordinate (a, b, c) di P si chiamano le componenti di $\vec{v}$ e si indicano con v_x, v_y e v_z. Il modulo di $\vec{v}$ é quindi

$$|\,\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

I versori fondamentali sono

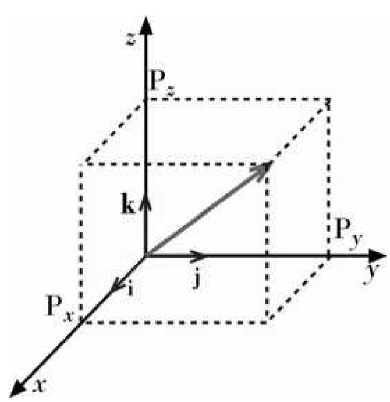
$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Teorema 17.1 Scomposizione. *Per ogni vettore $\vec{v}$ si ha*

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Cioè ogni vettore si può scomporre in modo unico nella somma di un vettore avente la direzione dell'asse $\vec{x}$, di un vettore avente la direzione dell'asse $\vec{y}$ e di un vettore avente la direzione dell'asse $\vec{z}$; e questi tre vettori si ottengono moltiplicando i versori fondamentali per le componenti di $\vec{v}$.



Se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$ e $a \in \mathbb{R}$, si ha

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x)\vec{i} + (v_y + w_y)\vec{i} + (v_z + w_z)\vec{k},$$

$$a\vec{v} = (av_x)\vec{i} + (av_y)\vec{j} + (av_z)\vec{k}.$$

Due vettori non nulli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, tale che $\vec{w} = t\vec{v}$ (cioè $w_x = tv_x$, $w_y = tv_y$ e $w_z = tv_z$). Si vede facilmente che

$$\vec{v}//\vec{w} \Longleftrightarrow v_xw_y - v_yw_x = v_yw_z - v_zw_y = v_xw_z - v_zw_x = 0.$$

Le definizione di angolo e di prodotto scalare fra due vettori applicati coincidono con quelle date nel piano. Ovviamente si ha

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z,$$

$$\cos\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\,\vec{v}\,||\,\vec{w}\,|} = \frac{v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}.$$

In particolare $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali se e solo se $v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z = 0$.

Definizione 17.1 Coseni direttori. *Sia $\vec{v}$ un vettore non nullo. Si dicono coseni direttori di $\vec{v}$ i coseni che $\vec{v}$ forma con gli assi coordinati. Abbiamo quindi*

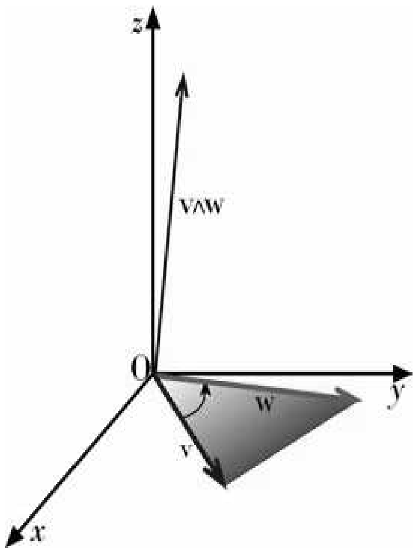
$$\cos\widehat{\vec{v}\vec{i}} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

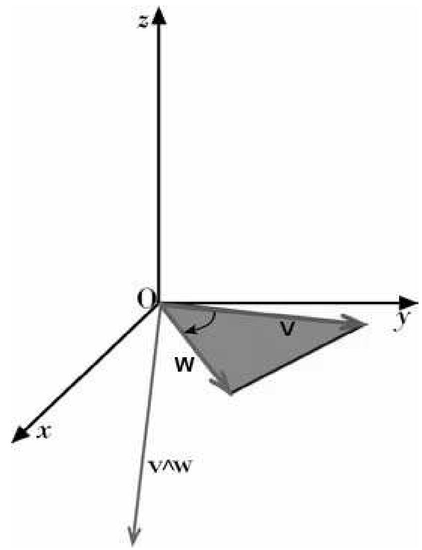
$$\cos\widehat{\vec{v}\vec{j}} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

$$\cos\widehat{\vec{v}\vec{k}} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Corollario 17.1 *La somma dei quadrati dei coseni direttori di un vettore non nullo é uguale ad 1.*

Definizione 17.2 Prodotto vettoriale. *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori. Dicesi prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ il vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ coincidente col vettore nullo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli oppure, se non sono paralleli, con il vettore avente modulo uguale a $|\,\vec{v}\,||\,\vec{w}\,|\sin\widehat{\vec{v}\vec{w}}$, direzione ortogonale al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e verso come indicato nella seguente figura*





Si osservi che, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono non nulli, il verso di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ é determinato dalla *Regola della mano sinistra:* si dispongano le tre dita della mano sinistra pollice, indice e medio in modo che l'indice sia ortogonale al piano formato dal pollice e dal medio. Se il pollice indica il verso di $\vec{v}$ e il medio quello di $\vec{w}$, allora l'indice indicherà il verso di $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

Si ha

$\wedge$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{O}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{O}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{O}$

Proposizione 17.1 *Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:*

1. *Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono non nulli, allora $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{O}$ se e solo se $\vec{v}//\vec{w}$. Abbiamo quindi che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli se e solo se $v_x w_y - v_y w_x = v_y w_z - v_z w_y = v_x w_z - v_z w_x = 0$.*

2. $(a\vec{v}) \wedge \vec{w} = a(\vec{v} \wedge \vec{w})$ e $\vec{v} \wedge (a\vec{w}) = a(\vec{v} \wedge \vec{w})$.

3. $\vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{u}$ e $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$.

4. $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$.

Si noti che, in generale, il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.

Teorema 17.2 *Siano* $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ *e* $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$, *allora*

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Dimostrazione. Ricordando la Proposizione 17.1, abbiamo

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \wedge (w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

∎

Definizione 17.3 Prodotto misto. *Dicesi prodotto misto dei tre vettori* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *(e si denota con* $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$*), il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare fra* $\vec{u}$ *e* $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

Se almeno uno dei tre vettori é nullo oppure se $\vec{v}//\vec{w}$ allora $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$. Si ha inoltre

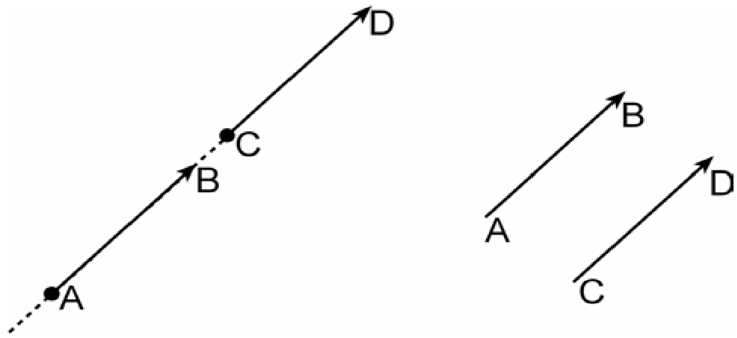
Teorema 17.3 *Il prodotto misto* $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$ *é uguale a zero se e solo se i tre vettori sono complanari.*

Teorema 17.4 *Se* $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ *e* $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$, *allora*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

18 Vettori liberi

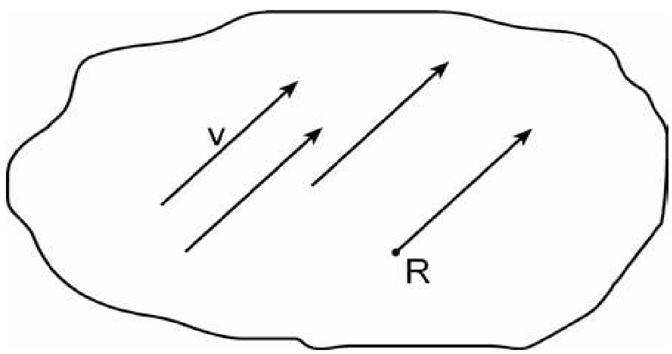
Un *vettore libero é un segmento orientato libero di muoversi nello spazio senza cambiare lunghezza, direzione e verso.* Se AB é un segmento orientato da A a B, esso rappresenta un vettore libero. Un altro segmento CD orientato da C a D rappresenta lo stesso vettore libero se e solo se i due segmenti giacciono su rette parallele (o sulla stessa retta), hanno la stessa lunghezza e sono orientati concordemente.



Il vettore libero $\vec{v}$ rappresentato dal segmento AB si denota col simbolo $B - A$ o anche con le stesse notazioni dei vettori applicati.

Indicato con $\mathcal{V}$ l'insieme di tutti i vettori applicati dello spazio, definiamo su di esso la seguente relazione $\mathcal{L}$: *il vettore applicato* $\overrightarrow{AB}$ *é in relazione* $\mathcal{L}$ *col vettore applicato* $\overrightarrow{CD}$ *se e solo se essi giacciono su rete parallele (o sulla stessa retta), hanno lo stesso modulo e sono orientati concordemente.*

Si vede facilmente che $\mathcal{L}$ é una relazione di equivalenza su $\mathcal{V}$ e ogni classe di equivalenza può essere identificata con un vettore libero.



Se $\vec{v} = B - A$ é un vettore libero e R é un punto qualsiasi dello spazio, esiste un unico punto S tale che $\vec{v} = S - R$. In particolare, se O é un punto fissato dello spazio, ogni vettore libero $\vec{v}$ si può scrivere come $P - O$ (per un opportuno punto P). Cioè a $\vec{v}$ corrisponde il vettore $\overrightarrow{OP}$ applicato in O.

Il modulo di un vettore libero é la lunghezza di uno qualunque dei segmenti che lo rappresentano.

Si faccia attenzione a non confondere il vettore libero $P - O$ col vettore applicato in O, $\overrightarrow{OP}$, che lo rappresenta.

Per effettuare una qualunque operazione con i vettori liberi basta applicarli in uno stesso punto, effettuare la corrispondente operazione fra i vettori applicati, e prendere il risultato ottenuto convenendo che, se il risultato é un vettore, bisogna considerarlo come libero. Vale inoltre la seguente proposizione.

Proposizione 18.1 Regola della poligonale. *Per sommare due o più vettori liberi,* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ *(*$n \geq 2$*, si scrive* $\vec{v}_1 = P_1 - P_0$*,* $\vec{v}_2 = P_2 - P_1$*,* $\ldots$*,* $\vec{v}_n = P_n - P_{n-1}$*, e si* *somma formalmente*

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n = (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \ldots + P_n - P_{n-1} = P_n - P_0.$$

Se $\vec{v} = B - A$ é un vettore libero con $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$, *le componenti del vettore libero* $\vec{v}$ sono

$$v_x = x_2 - x_1, \quad v_y = y_2 - y_1, \quad v_z = z_2 - z_1.$$

Risulta

$$|\,\vec{v}\,| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

19 Rette del piano e loro equazioni

Una retta r del piano si può individuare assegnando per esempio:

1. un punto P_0 di r e un vettore $\vec{v}$ non nullo ortogonale ad r; oppure
2. un punto P_0 di r e un vettore $\vec{w}$ non nullo parallelo ad r; oppure
3. due punti distinti P_1 e P_2 di r.

Caso 1: Equazione cartesiana della retta. Siano $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto di r e $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vettore ortogonale ad r. Un punto $P \equiv (x, y)$ del piano appartiene ad r se e solo se il vettore $P - P_0$ é ortogonale a $\vec{v}$. Cioè se e solo se

$$\vec{v} \cdot (P - P_0) = 0. \tag{36}$$

La (36) si chiama *equazione vettoriale della retta*. Da essa segue

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

ove, posto $c = -ax_0 - by_0$, si ha

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0), \tag{37}$$

detta *equazione cartesiana della retta.*

Si osservi che per ogni $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, l'equazione $kax + kby + kc = 0$ (con $(a, b) \neq (0, 0)$) e la (37) rappresentano la stessa retta. Viceversa, se $ax + by + cz = 0$ e $a'x + a'y + b'z = 0$

rappresentano una stessa retta, allora esiste un numero reale $k \neq 0$ tale che $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$.

Se $b \neq 0$, la (37) può scriversi

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

la quale, posto $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, diventa

$$y = mx + n$$

e viene detta l'*equazione esplicita della retta.*

Caso 2: Equazioni parametriche della retta. Sia r la retta passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e parallela al vettore non nullo $\vec{w} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = l\vec{i} + m\vec{j}$. Il punto $P \equiv (x, y)$ appartiene ad r se e solo se $P - P_0 // \vec{w}$, cioè $P - P_0 = t\vec{w}$ (vedasi Proposizione 16.3). Quindi si ha $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = P - P_0 = t\vec{w} = \begin{pmatrix} tl \\ tm \end{pmatrix}$, da cui

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}, \tag{38}$$

dette le *equazioni parametriche di* r. Si osservi che, per $t = 0$, il punto P coincide con P_0.

Per passare dalla rappresentazione parametrica a quella cartesiana di r basta eliminare il parametro t tra le (38). Cioè:
(1) Se $l \neq 0$ e $m \neq 0$ si ha $t = \frac{x - x_0}{l}$ e $t = \frac{y - y_0}{m}$ e quindi l'equazione cartesiana di r é

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

(2) Se $l = 0$ e quindi, essendo $\vec{w} \neq 0$, $m \neq 0$ le (38) diventano

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + mt \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana di r é $x = x_0$.
(3) Se $m = 0$ e quindi $l \neq 0$ si ha, analogamente al caso precedente, la seguente equazione cartesiana

$$y = y_0.$$

Viceversa il passaggio dalla rappresentazione cartesiana alla parametrica si può fare nel seguente modo. Essendo $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ortogonale ad r, $\vec{w} = b\vec{i} + (-a)\vec{j}$ é ortogonale a $\vec{v}$ (vedasi (35)). Quindi $\vec{w}$ é parallelo ad r. Inoltre:

(1) Se $b \neq 0$ si ha che $P_0 \equiv (0, -\frac{c}{b})$ é un punto della retta r di rappresentazione cartesiana $ax + by + c = 0$ e, in tal caso, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = bt \\ y = -\frac{c}{b} - at \end{cases} .$$

(2) Se $a \neq 0$, allora $P_0 \equiv (-\frac{c}{a}, 0)$ é un punto della retta r di rappresentazione cartesiana $ax + by + c = 0$ e, in tal caso, le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = -\frac{c}{a} + bt \\ y = -at \end{cases} .$$

Caso 3: Retta r per i due punti distinti $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$. Un vettore parallelo ad r é $\vec{w} = B - A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. Quindi r ha le seguenti equazioni paramentriche

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} ,$$

dalle quali si può ricavare, col procedimento descritto sopra, l'equazione cartesiana. Quindi l'equazione della retta r passante per i due punti distinti $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$ é:

- $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ se $x_2 - x_1 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$;
- $x = x_1$ se $x_2 - x_1 = 0$ (quindi $y_2 - y_1 \neq 0$);
- $y = y_1$ se $y_2 - y_1 = 0$ (quindi $x_2 - x_1 \neq 0$).

Riassumendo l'equazione della retta del piano passante per i due punti distinti $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$ é

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La seguente tabella riassume le condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra due rette r e r'.

RETTE	PARALLELISMO	ORTOGONALITÀ
$r)\ \ ax+by+c=0$ $r')\ a'x+b'y+c'=0$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ cioè $ab'-a'b=0$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ cioè $aa'+bb'=0$
$r)\ ax+by+c=0$ $r')\ \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ cioè $al+bm=0$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ cioè $am-bl=0$
$r)\ \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$ $r')\ \begin{cases} x=x_0'+l'\rho \\ y=y_0'+m'\rho \end{cases}$	$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$ cioè $lm'-ml'=0$	$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$ cioè $ll'+mm'=0$

Esempio 19.1 *Scrivere l'equazione della retta r passante per $P_0 \equiv (1,-3)$ e parallela a $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

SVOLGIMENTO. Si ha
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+t \end{cases},$$
da cui (eliminando t) $\frac{x-1}{2} = y+3$.

Esempio 19.2 *Scrivere l'equazione della retta s passante per $P_0 \equiv (1,-3)$ ed ortogonale a $\vec{v} = (2,1)$. Scrivere le equazioni parametriche di s.*

SVOLGIMENTO. Si ha $\vec{v} \cdot (P-P_0) = 0$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix} = 0$. Quindi l'equazione di s é $2(x-1)+y+3=0$. Per trovare le sue equazioni parametriche basta scrivere la precedente equazione come $x - 1 = -\frac{y+3}{2}$ e porre

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ -\frac{y+3}{2} = t \end{cases}, \quad \textit{da cui} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$$

Esempio 19.3 *Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti $A \equiv (1, -3)$ e $B \equiv (1, 4)$.*

SVOLGIMENTO. I due punti hanno la stessa ascissa. Quindi r ha equazione $x = 1$.

Esempio 19.4 *Determinare l'intersezione fra le due rette distinte $r) \quad ax + by + c = 0$ e $s) \quad a'x + b'y + c' = 0$.*

SVOLGIMENTO. L'intersezione fra r ed r' é data dall'insieme dei punti P le cui coordinate sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}. \tag{39}$$

Supponiamo dapprima che $ab' - a'b = 0$, cioè che il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (ortogonale ad r) é parallelo al vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ (ortogonale ad r'). In tal caso il sistema (39) o ha infinite soluzioni oppure é impossibile (si veda il Teorema 15.11). Più precisamente, posto

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

si ha, nella nostra ipotesi, $r(A) = 1$ (vedasi Definizione 15.5). Se anche $r(B) = 1$ il sistema (39) ha infinite soluzioni e quindi r coincide con r'. Se $r(B) = 2$, (39) é impossibile, quindi $r \cap r' = \emptyset$. In entrambi i casi diremo che r e r' sono parallele.

Sia ora $ab' - a'b \neq 0$. Per il teorema di Cramer 15.10, (39) ha una ed una sola soluzione. Essa fornisce le coordinate dell'unico punto intersezione fra le rette r ed r'.

Teorema 19.1 *La distanza fra il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ dalla retta r di equazione $ax + by + cz + d = 0$ é data da*

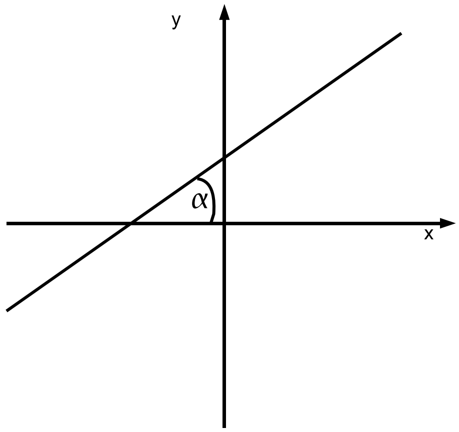
$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

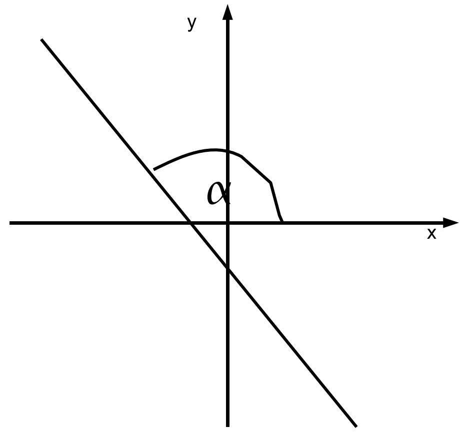
Se $b \neq 0$ l'equazione della retta $r) ax + by + c = 0$ può essere scritta nella forma esplicita

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Il numero $m = -\frac{a}{b}$ dicesi *coefficiente angolare* di r. Se $b = 0$ r *non ha coefficiente angolare.*

Si può dimostrare che $m = \tan \alpha$ essendo α l'angolo fra il semiasse positivo delle ascisse e la retta r rappresentato in figura:





Se $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ allora la retta r passante per A e B ha coefficiente angolare dato da

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Teorema 19.2 *Le due rette* $r)\ y = mx + n$ *e* $r')\ y = m'x + n'$ *sono ortogonali se e solo se* $mm' = -1$.

20 Coordinate omogenee nel piano

Si definisca su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ la seguente relazione $\mathcal{R}$:

$$(\alpha, \beta, \gamma)\, \mathcal{R}\, (\alpha', \beta', \gamma') \Longleftrightarrow \quad \text{esiste } \ k \in \mathbb{R}, \ k \neq 0 \ \text{ tale che } \ \alpha' = k\alpha, \beta' = k\beta, \gamma' = k\gamma.$$

Si verifica facilmente che la relazione $\mathcal{R}$ sopra definita é di equivalenza. Ad ogni $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ resta così associata la classe di equivalenza

$$[(\alpha, \beta, \gamma)] = \left\{(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mid (\alpha', \beta', \gamma')\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)\right\}.$$

Ogni punto P del piano, rispetto al sistema $O\vec{x}\vec{y}$, viene identificato tramite le sue coordinate (x, y); esse verranno dette le *coordinate non omogenee* del punto P e P viene detto *punto proprio.* Ad ogni punto $P \equiv (x, y)$ possiamo associare $[(x, y, 1)] = \{(t'x, t'y, t') \mid t' \in R, t' \neq 0\}$. Ognuna delle terne $(x', y', t') \in [(x, y, 1)]$ viene detta *coordinate omogenee di P.*

Si osservi che se (x', y', t') sono le coordinate omogenee del punto $P \equiv (x, y)$, allora $x' = t'x$ e $y' = t'y$. Possiamo quindi dire che ad ogni terna (x', y', t') con $t' \neq 0$ corrisponde il punto $P \equiv (\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'})$. Ovviamente questa corrispondenza é suriettiva ma non iniettiva.

Se consideriamo una terna $(x', y', 0)$, ad essa non corrisponde alcun punto proprio P del piano. Diremo per definizione che alla terna $(x', y', 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ corrisponde un *nuovo* punto P del piano, detto *punto improprio.*

Ovviamente nella rappresentazione cartesiana i punti impropri non possono essere rappresentati. Per esempio ogni terna di $[(1, 2, 0)]$ rappresenta un punto improprio del piano.

Si consideri la retta r di equazione $ax+by+c=0$. Sia $P \equiv (x,y) \in r$. Rappresentando P in coordinate omogenee abbiamo $P \equiv (t'x, t'y, t')$ qualunque sia $t' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posto $x' = t'x$ e $y' = t'y$, l'equazione di r diventa $a\frac{x'}{t'} + b\frac{y'}{t'} + c = 0$, da cui

$$ax' + by' + ct' = 0, \tag{40}$$

che é detta *l'equazione omogenea della retta* r.

Si osservi che il punto improprio $(b, -a, 0)$ verifica la (40) (sostituendo ovviamente b al posto di x', $-a$ al posto di y' e 0 al posto di t'). Si vede facilmente che tutte le soluzioni diverse da $(0,0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + ct' = 0 \end{cases}$$

sono date da $k(b, -a, 0)$ per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

L'insieme di tutti i punti impropri del piano viene chiamato *retta impropria* e, ovviamente, la sua equazione é data da $t' = 0$. Si ricordi che non tutte le soluzioni (α, β, γ) dell'equazione $t' = 0$ sono le coordinate di un punto improprio.

Siano date le due rette *distinte* r ed r', di equazioni omogenee rispettivamente $ax' + by' + ct' = 0$ e $a'x' + b'y' + c't' = 0$. Allora $(bc' - b'c, ca' - ac', ab' - a'b) \neq (0,0,0)$, altrimenti le rette sarebbero coincidenti. Per trovare i punti comuni si deve risolvere il sistema formato dalle loro equazioni

$$\begin{cases} ax' + by' + ct' = 0 \\ a'x' + b'y' + c't' = 0 \end{cases}. \tag{41}$$

Ricordando la teoria riguardante i sistemi lineari, si vede che (41) oltre alla soluzione banale ha le seguenti soluzioni

$$(\rho(bc' - b'c), \rho(ca' - ac'), \rho(ab' - a'b)) \tag{42}$$

con ρ parametro arbitrario non nullo. Le (42) sono le coordinate omogenee di uno stesso punto (proprio o improprio) del piano. Quindi *due rette distinte hanno sempre un solo punto a comune di cui le* (42) *sono le coordinate omogenee.*

Se $ab' - a'b \neq 0$ le due rette si incontrano nel punto proprio di coordinate non omogenee $\left(\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)$, e le due rette si dicono incidenti.

Se invece $ab' - a'b = 0$ il punto comune alle due rette é improprio. Ed allora, se una delle rette, per esempio r', é la retta impropria, esse si incontrano, come abbiamo visto, nel punto improprio $(b, -a, 0)$ della retta r.
Se entrambe le rette sono proprie, la condizione $ab' - a'b = 0$ é la condizione di parallelismo ed in tal caso, ponendo $a' = \mu a$ e $b' = \mu b$, il sistema (41) ammette la soluzione $(b, -a, 0)$.

In conclusione due rette distinte e proprie si incontrano in uno e un sol punto, che é improprio se e solo se le rette sono parallele.

Siano date le due rette *distinte* r ed r', di equazioni omogenee rispettivamente $ax' + by' + ct' = 0$ e $a'x' + b'y' + c't' = 0$. Definiamo *fascio di rette individuato da* r *e* r' la totalità delle rette la cui equazione si ottiene facendo una combinazione lineare delle equazioni delle due rette con λ e μ parametri *non* entrambi nulli:

$$\lambda(ax' + by' + ct') + \mu(a'x' + b'y' + c't') = 0. \tag{43}$$

Per individuare una retta del fascio bisogna fissare λ e μ a meno di un fattore di poporzionalità (cioè bisogna fissare o $\frac{\lambda}{\mu}$ oppure $\frac{\mu}{\lambda}$).

Talvolta é utile scrivere l'equazione del fascio usando un solo parametro. Per esempio se $\lambda \neq 0$ (43) può scriversi, posto $\frac{\mu}{\lambda} = h$,

$$(ax' + by' + ct') + h(a'x' + b'y' + c't') = 0.$$

Questa equazione contiene tutte le rette del fascio ad eccezione della retta

$$a'x' + b'y' + c't' = 0.$$

Si può dimostrare che le rette del fascio individuato dalle rette (distinte) r ed r' sono tutte e sole le rette passanti per il punto $P = r \cap r'$. In particolare se P é un punto proprio allora le rette del fascio sono tutte e sole le rette passanti per esso, detto centro del fascio; se P é improprio allora r ed r' sono parallele e le rette del fascio sono tutte le rette parallele alle rette date.

In coordinate non omogenee possiamo scrivere che l'equazione del fascio di rette passanti per $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ é $\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ con $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Mentre l'equazione del fascio di rette parallele alla retta $ax + by + c = 0$ é $ax + by + \lambda = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio 20.1 *Trovare, se esistono, le equazioni delle rette s passanti per $P_0 \equiv (-1, 1)$ e che formano con gli assi un triangolo di area assegnata uguale a $\frac{1}{2}$.*

SVOLGIMENTO. La retta s, qualora esista, appartiene al fascio

$$\lambda(x + 1) + \mu(y - 1) = 0.$$

Poichè s interseca entrambi gli assi cartesiani possiamo scrivere la precedente equazione nel seguente modo

$$k(x + 1) + y - 1 = 0$$

ove si é posto $k = \frac{\lambda}{\mu} \neq 0$. Le intersezioni di s con gli assi cartesiani sono pertanto

$$A \equiv (0, 1 - k), \quad B \equiv (\frac{1 - k}{k}, 0).$$

Posto $O \equiv (0, 0)$ si ottiene il triangolo rettangolo OAB la cui area é data da

$$\frac{|OA||OB|}{2} = \frac{1}{2}|1 - k|\left|\frac{1 - k}{k}\right|.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}|1-k|\left|\frac{1-k}{k}\right| = \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{(1-k)^2}{k}\right| = 1,$$

$$\frac{(1-k)^2}{|k|} = 1,$$

$$k^2 - 2k + 1 = |k|$$

e, ricordando che $k \neq 0$, abbiamo due casi:

Caso $k > 0$. Si ha $k^2 - 3k + 1 = 0$ da cui

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Per $k = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ otteniamo i punti

$$A \equiv \left(0, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad B \equiv \left(\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, 0\right).$$

Per $k = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ otteniamo i punti

$$A \equiv \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad B \equiv \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}, 0\right).$$

Caso $k < 0$**.** Si ha $k^2 - k + 1 = 0$ che non ha alcuna soluzione reale.

21 Isometrie e similitudini nel piano

(Tutte le dimostrazioni presentate in questo paragrafo sono obbligatorie anche se non appaiono sotto forma di teorema)

Un'isometria piana é un'applicazione del piano in sé che conserva la distanza. Se denotiamo il piano con $\mathbb{R}^2$, un'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é un'isometria se e solo se comunque presi due punti P e Q in $\mathbb{R}^2$, si ha $d(f(P), f(Q) = |f(P)f(Q)| = |PQ| = d(P, Q)$.

Proposizione 21.1 *Sia f un'isometria piana. Allora:*

- *f é biunivoca e continua;*
- *se i punti P, Q ed R giacciono su una stessa retta, allora anche i punti corrispondenti $f(P)$, $F(Q)$, $F(R)$ giacciono su una stessa retta;*

- *due segmenti corrispondenti sono uguali;*
- *due triangoli corrispondenti sono uguali;*
- *due angoli corrispondenti sono uguali.*

L'insieme delle isometrie del piano, con l'operazione di composizione (prodotto di due applicazioni) é un gruppo, giacchè:

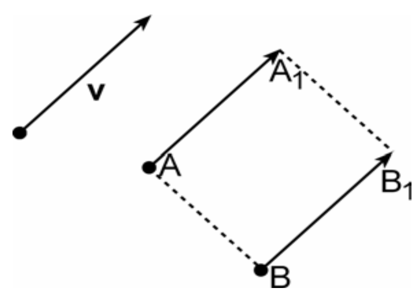
- la composizione di due isometrie é un isometria;
- la composizione di due isometrie é associativa;
- l'identità é un'isometria;
- per ogni isometria esiste la sua inversa.

Sono esempi di isometrie piane: la traslazione di un vettore $\vec{v}$; la rotazione di centro un punto P_0 e angolo α; la riflessione rispetto a una retta r; la glissoriflessione di asse r e vettore $\vec{v}$.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione del piano in sé. Un punto $P \in \mathbb{R}^2$ si dice fisso sotto l'azione della f se $f(P) = P$ (il punto P viene mandato in sé stesso).

Una retta $r \subset \mathbb{R}^2$ si dice fissa sotto l'azione della f se $f(P) \in r$ se e solo se $P \in r$; in tal caso scriveremo $f(r) = r$.

Traslazione di un vettore $\vec{v}$. *La traslazione di un vettore $\vec{v}$ é quell'applicazione, t_v, che ad ogni punto P del piano associa il punto $P_1 = t_v(P)$ tale che $\overrightarrow{PP_1} = \vec{v}$.*



Due segmenti corrispondenti sotto l'azione di una traslazione oltre ad essere uguali sono pure paralleli (sono equipollenti).

Se $\vec{v} \neq 0$, t_v non ha punti fissi, mentre ogni retta parallela a $\vec{v}$ é fissa.

Fissato nel piano il sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}$ e posto $\vec{v} = (a, b)$, la traslazione piana $t_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fa corrispondere al punto $P \equiv (x, y)$ il punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ tale che $x_1 = x + a$ e $y_1 = y + b$. Convenendo di rappresentare sia i vettori che le coordinate di un punto come vettori colonna, possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = t_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}, \quad \text{essendo } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Riassumendo la traslazione t_v può essere rappresentata nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Esempio 21.1 *Sia* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e sia* r *la retta di equazione* $3x + 2y = 12$. *Determinare l'equazione della retta traslata di* r *sotto l'azione di* t_v *o, in altre parole, l'equazione di* $t_v(r)$.

SVOLGIMENTO. Si ha

$$t_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_1 - 2 \\ y = y_1 \end{cases},$$

e, sostituendo nell'equazione di r i valori trovati, otteniamo

$$t_v(r)) \;\; 3(x_1 - 2) + 2y_1 = 12.$$

Da cui, cambiando nome alle variabili, si ha che l'equazione richiesta é

$$3x + 2y = 18.$$

Un altro modo per risolvere il precedente problema consiste nel determinare due punti $A, B \in r$, calcolare $A_1 = t_v(A)$ e $B_1 = t_v(B)$ e quindi scrivere l'equazione della retta passante per i punti A_1 e B_1. Per esempio si ha $A \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A_1 \equiv \begin{pmatrix} 4+2 \\ 0+0 \end{pmatrix}$ e $B_1 \equiv \begin{pmatrix} 0+2 \\ 6+0 \end{pmatrix}$. L'equazione della retta passante per A_1 e B_1 é

$$\frac{x-6}{-4} = \frac{y}{6}, \quad \text{ovvero} \quad 3x + 2y = 18.$$

Esempio 21.2 *Sia* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e sia* r *la retta di equazione* $2x + 3y = 6$. *Determinare l'equazione della retta traslata di* r *sotto l'azione di* t_v *o, in altre parole, l'equazione di* $t_v(r)$.

SVOLGIMENTO. Procediamo come nell'Esempio 21.1. Si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'equazione di $t_v(r)$ é

$$2(x_1 - 1) + 3(y_1 - 3) = 6,$$

$$2x + 3y = 17.$$

Risolviamo lo stesso esercizio usando il secondo metodo. Due punti distinti di r sono:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I traslati di A e B sono

$$A \equiv \begin{pmatrix} 3+1 \\ 0+3 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2+3 \end{pmatrix}.$$

L'equazione della retta passante per A_1 e B_1 é

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y-3}{5-3}, \quad \text{ovvero} \quad 2x + 3y = 17.$$

Come visto negli esercizi precedenti, vale la seguente proposizione.

Proposizione 21.2 *Siano* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *e* $P_1 = t_v(P)$*. Posto* $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *e* $P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$*, si ha*

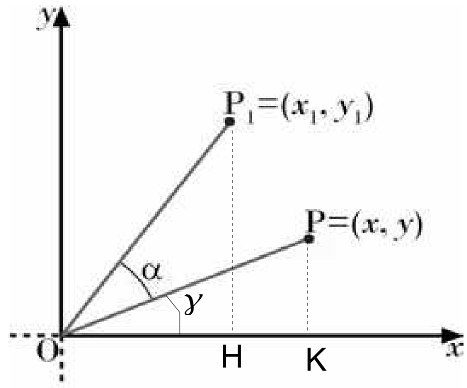
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - a \\ y_1 - b \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Come usualmente considerato in trigonometria, un *angolo orientato* é l'angolo generato dalla rotazione di una semiretta intorno alla propria origine; viene convenzionalmente considerato positivo se la rotazione avviene in verso antiorario, negativo in caso contrario. La semiretta di partenza e quella di arrivo si chiamano primo e secondo lato dell'angolo.

Rotazione di centro un punto P_0 ed angolo α. *La rotazione di centro P_0 ed angolo α é quell'applicazione $\varphi_{P_0,\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni punto $P \in \mathbb{R}^2$ associa il punto $P_1 = \varphi_{P_0,\alpha}(P)$ tale che $|P_0P| = |P_0P_1|$ e $\widehat{PP_0P_1} = \alpha$.*

Si osservi che, sotto l'azione di $\varphi_{P_0,\alpha}$, l'unico punto fisso é P_0 mentre si hanno rette fisse se e solo se α é un multiplo di π, in tal caso esse sono tutte le rette per P_0.

Cominciamo col considerare il caso in cui $P_0 \equiv O \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (rotazione attorno all'origine). Sia $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e supponiamo che la retta OP formi un angolo γ con l'asse delle $\vec{x}$. Vogliamo determinare le coordinate del punto $P_1 = \varphi_{O,\alpha}(P_0)$. Per semplicità supponiamo $\alpha > 0$ e che i punti P e P_1 si trovino nel primo quadrante (si veda la figura seguente). Allo stesso risultato si perviene anche negli altri casi.



Ricordando che $|OP| = |OP_1|$, si ha

$$\begin{cases} x = |OK| = |OP|\cos\gamma \\ y = |KP| = |OP|\sin\gamma \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = |OH| = |OP|\cos(\alpha+\gamma) = |OP|\cos\alpha\cos\gamma - |OP|\sin\alpha\sin\gamma = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y_1 = |HP_1| = |OP|\sin(\alpha+\gamma) = |OP|\sin\alpha\cos\gamma + |OP|\cos\alpha\sin\gamma = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{46}$$

In generale possiamo dire che, fissato un angolo α e supposte note le coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di un punto P del piano, le coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ del punto P_1 ottenuto ruotando attorno all'origine P di un angolo α (si ricordi che il verso positivo delle rotazioni é quello antiorario) sono date dalla (46).

Consideriamo adesso il problema inverso: siano noti l'angolo α e le coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ del punto $P_1 = \varphi_{O,\alpha}(P)$. Quali sono le coordinate di P?

Proposizione 21.3 *Sia $P_1 = \varphi_{O,\alpha}(P)$. Posto $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, si ha*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Dimostrazione. Dalla (46), ricavando $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in funzione di $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Per completare la dimostrazione é sufficiente osservare che

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Infatti si ha

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

∎

Si osservi che l'applicazione rappresentata dalla (47) si ottiene applicando una rotazione di $-\alpha$ alla (46) e cambiando il nome alle variabili. Quindi la (47) é l'applicazione inversa della (46).

Esempio 21.3 *Sia r la retta di equazione $x + y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s ottenuta applicando a r una rotazione di centro l'origine e angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.*

Ricordando la (47), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \\ \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di r otteniamo $\sqrt{2}y_1 = 1$. Quindi, cambiando nome alle variabili, l'equazione di s é $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Un altro procedimento per risolvere l'esercizio consiste nel fissare due punti distinti $A, B \in r$, calcolare le coordinate dei punti $A' = \varphi_{O,\frac{\pi}{4}}(A)$ e $B' = \varphi_{O,\frac{\pi}{4}}(B)$ e, infine, scrivere l'equazione della retta passante per A' e B'. Essa coincide con l'equazione della retta s cercata. Siano per esempio $A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per la (46), si ha

$$A' \equiv \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$B' \equiv \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'equazione della retta $A'B'$ é $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esempio 21.4 *Sia r la retta di equazione $2x - 3y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s ottenuta applicando a r una rotazione di centro l'origine e angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$.*

Ricordando la (47), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 \\ \\ y = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di r otteniamo $(2\sqrt{3}+3)x_1+(2-3\sqrt{3})y_1 = 2$. Quindi, cambiando nome alle variabili, l'equazione di s é $(2\sqrt{3}+3)x + (2-3\sqrt{3})y = 2$.

Consideriamo adesso il caso generale di una rotazione di centro $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Sia $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un punto generico del piano. Vogliamo ricavare le coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ del punto $P_1 = \varphi_{P_0,\alpha}(P)$. Procediamo nel seguente modo:

1. Applichiamo una traslazione di $\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$, in tal modo i punti P_0 e P vengono traslati rispettivamente nell'origine e nel punto $Q \equiv \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$.

2. Applichiamo una rotazione di centro $O \equiv P_0$ ed angolo α (si veda la (46)). Allora Q viene ruotato nel punto

$$R \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

3. Il punto cercato $P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ si ottiene traslando R di un vettore $-\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Procedendo in modo analogo alla Proposizione 21.3, si dimostra il seguente risultato.

Proposizione 21.4 *Siano dati il punto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e l'angolo α. Se $P_1 = \varphi_{P_0,\alpha}(P)$, con $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, allora*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Esempio 21.5 *Sia r la retta di equazione $x+y=1$. Scrivere l'equazione della retta s ottenuta applicando a r una rotazione di centro $P_0 \equiv (3,4)$ e angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.*

Ricordando la (49), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-3 \\ y_1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-3 \\ y_1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{6-7\sqrt{2}}{2} \\ \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{8-\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di r otteniamo $\sqrt{2}y_1 + 7 - 4\sqrt{2} = 0$. Quindi, cambiando nome alle variabili, l'equazione di s é $\sqrt{2}y + 7 - 4\sqrt{2} = 0$.

Esempio 21.6 *Sia r la retta di equazione $2x-3y=1$. Scrivere l'equazione della retta s ottenuta applicando a r una rotazione di centro $P_0 \equiv (1,2)$ e angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$.*

Ricordando la (49), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ y_1-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ y_1-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ y = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di r otteniamo $(2\sqrt{3}+3)x_1 + (2-3\sqrt{3})y_1 + 4\sqrt{3} - 17 = 0$. Quindi, cambiando nome alle variabili, l'equazione di s é $(2\sqrt{3}+3)x + (2-3\sqrt{3})y + 4\sqrt{3} - 17 = 0$.

Un'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice lineare se per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}\right) = \lambda f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu f \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\varphi_{O,\alpha}$ é un'applicazione lineare. Ricordando la (46), si ha infatti

$$\varphi_{O,\alpha}\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x + \mu\overline{x} \\ \lambda y + \mu\overline{y} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \lambda\varphi_{O,\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu\varphi_{O,\alpha} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che, se $P_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $\varphi_{P_0,\alpha}$ non é un'applicazione lineare.

Riflessione rispetto ad una retta. *La riflessione rispetto alla retta r é quell'applicazione $\delta_r(P)$ che ad ogni punto P del piano associa il punto $P_1 = \delta_r(P)$ che sta sulla perpendicolare ad r per P e tale che il punto medio di PP_1 stia su r.*

É chiaro che se $P \in r$ allora $P_1 = \delta_r(P) = P$, cioè ogni punto di r ha come corrispondente se stesso. Sotto l'azione di δ_r i punti fissi sono tutti e soli quelli di r. L'unica retta fissa é r stessa.

Cominciamo col considerare il caso in cui la retta r coincide con l'asse delle ascisse. Posto $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $P_1 = \delta_r(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, si ha $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Quindi la riflessione nell'asse delle ascisse si può rappresentare nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{50}$$

Consideriamo ora il caso generale di una retta r passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e formante un angolo α col semiasse positivo delle $\vec{x}$. Per ottenere le coordinate di $P_1 = \delta_r(P)$ applichiamo, nell'ordine, le seguenti isometrie:

1. La traslazione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$ si ha

$$P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow Q_1 \equiv \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

   Si osservi che con la precedente applicazione P_0 viene traslato nell'origine e la retta r nella retta r' parallela ad r e passante per l'origine.

2. La rotazione di centro l'origine ed angolo $-\alpha$. Per la (46), essendo $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, abbiamo

$$Q_1 \longrightarrow Q_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

   Si osservi che, come risultato della precedente rotazione, r' é coincide con l'asse delle $\vec{x}$.

3. La riflessione nell'asse $\vec{x}$ (si veda (50))

$$Q_2 \longrightarrow Q_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

4. La rotazione di centro l'origine ed angolo α

$$Q_3 \longrightarrow Q_4 \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

$$Q_4 \equiv \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

$$Q_4 \equiv \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

5. La traslazione di $-\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$Q_4 \longrightarrow Q_5 \equiv \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che Q_5 coincide col punto P_1 cercato.

In conclusione la riflessione nella retta r passante per $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e formante un angolo α col semiasse positivo delle ascisse si può rappresentare nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Dalla (51), procedendo in modo analogo alla Proposizione 21.3, segue il seguente risultato.

Proposizione 21.5 *Sia r la retta passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e formante un angolo α col semiasse positivo delle $\vec{x}$. Siano (x_1, y_1) le coordinate del punto $P_1 = \delta_r(P)$. Allora le coordinate (x, y) di P sono date da*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Si osservi che, cambiando nome alle variabili, la (51) e la (52) coincidono. Questo risultato era facilmente prevedibile in quanto la composizione di due riflessioni (ovviamente entrambe nella stessa retta r) é l'identità. Si può provare che δ_r é lineare se e solo se r passa per l'origine.

Esempio 21.7 *Sia s la retta di equazione $2x - 3y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s' ottenuta applicando ad s una riflessione nella retta r di equazione $x + y = 1$.*

Sia α l'angolo che r forma col semiasse positivo delle ascisse. Posto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, per la (52), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La retta r ha coefficiente angolare $m = -1$. Pertanto $\tan\alpha = -1$ e

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 0,$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -1.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1+1 \\ -x_1+1 \end{pmatrix},$$

Sostituendo nell'equazione di s otteniamo

$$s')\quad 2(-y_1+1) - 3(-x_1+1) = 1.$$

Esempio 21.8 *Sia s la retta di equazione $x - 2y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s' ottenuta applicando ad s una riflessione nella retta r di equazione $2x + 3y = 1$.*

Sia α l'angolo che la retta r forma col semiasse positivo delle ascisse. Posto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in r$, per la (52), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ y_1 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La retta r ha coefficiente angolare $m = -\frac{2}{3}$. Pertanto $\tan\alpha = -\frac{2}{3}$ e

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{5}{13},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -\frac{12}{13}.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}(x_1-2) - \frac{12}{13}(y_1+1) + 2 \\ -\frac{12}{13}(x_1-2) - \frac{5}{13}(y_1+1) - 1 \end{pmatrix},$$

$$s')\quad \frac{5}{13}(x_1-2) - \frac{12}{13}(y_1+1) - 2\left(-\frac{12}{13}(x_1-2) - \frac{5}{13}(y_1+1) - 1\right) = 1.$$

Glissoriflessione. *Per glissoriflessione (o antitraslazione) di asse r e vettore di traslazione il vettore $\vec{v}$ (parallelo a r) si intende la composizione $\delta_{r,v} = \delta_r \circ t_v = t_v \circ \delta_r$ della riflessione rispetto alla retta r con la traslazione del vettore $\vec{v}$.* Il fatto che il vettore $\vec{v}$ sia parallelo a r garantisce che tale composizione gode della proprietà commutativa.

Sotto l'azione di $\delta_{r,v}$ (con $\vec{v} \neq \vec{O}$) non si hanno punti fissi, mentre l'unica retta fissa é r stessa.

Sia r la retta passante per il punto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e formante un angolo α col semiasse positivo delle ascisse. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 \\ \overline{y} - y_0 \end{pmatrix}$ il vettore della glissoriflessione. Allora, dovendo essere $\vec{v}$ parallelo ad r, deve accadere che o $\overline{x} = x_0$ se r é parallela all'asse $\vec{y}$, oppure $\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0} = \tan\alpha$ se r non é parallela all'asse $\vec{y}$.

Applicando opportunamente la (51) e la (45) si determinano le due rappresentazioni della glissoriflessione a seconda che supponiamo $\delta_{r,v} = t_v \circ \delta_r$ oppure $\delta_{r,v} = \delta_r \circ t_v$. Abbiamo rispettivamente

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \overline{x} - 2x_0 \\ y + \overline{y} - 2y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Si osservi che la (53) e la (54), avendo i primi membri uguali, devono avere pure i secondi membri uguali. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 21.6 *Il secondo membro della (53) é uguale al secondo membro della (54).*

Dimostrazione. Possiamo supporre che α e $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ verifichino le seguenti condizioni:

1. $0 \leq \alpha < \pi$ (si ricordi che α é l'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse);
2. $\vec{v} \neq \vec{O}$, cioè $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (se $\vec{v} = \vec{O}$ la glissoriflessione coinciderebbe con la riflessione nella retta r);
3. $\overline{x} = x_0$ se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (caso in cui r é parallela all'asse $\vec{y}$) oppure $\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0} = \tan\alpha$ se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (caso in cui r non é parallela all'asse $\vec{y}$).

Provare che

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \overline{x} - 2x_0 \\ y + \overline{y} - 2y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

equivale a provare la seguente uguaglianza

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 \\ \overline{y} - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 \\ \overline{y} - y_0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Abbiamo i seguenti casi

Caso 1: $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Allora $\overline{x} - x_0 = 0$ e la (55) equivale a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{y} - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{y} - y_0 \end{pmatrix},$$

che é banalmente verificata.

Caso 2: $\alpha = 0$. Allora $\overline{y} - y_0 = 0$ e la (55) equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che é banalmente verificata.

Caso 3: $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$. Allora la (55) equivale a

$$\begin{cases} (\overline{x} - x_0)\cos 2\alpha + (\overline{y} - y_0)\sin 2\alpha = \overline{x} - x_0 \\ \\ (\overline{x} - x_0)\sin 2\alpha - (\overline{y} - y_0)\cos 2\alpha = \overline{y} - y_0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (\overline{x} - x_0)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\overline{y} - y_0)2\sin\alpha\cos\alpha = \overline{x} - x_0 \\ \\ (\overline{x} - x_0)2\sin\alpha\cos\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\overline{y} - y_0) = \overline{y} - y_0 \end{cases}.$$

Essendo $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\overline{x} - x_0 \neq 0$, $\overline{y} - y_0 \neq 0$. Quindi il sistema precedente é equivalente a

$$\begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0}\sin\alpha\cos\alpha = 1 \\ \\ 2\frac{\overline{x}-x_0}{\overline{y}-y_0}\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{cases}.$$

Ricordando infine che $\frac{\overline{y}-y_0}{\overline{x}-x_0} = \tan\alpha$, abbiamo

$$\begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha\cos\alpha = 1 \\ \\ 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{cases}$$

che sono banalmente verificate.

∎

Dalle (53) e (54), procedendo in modo analogo alla Proposizione 21.3, segue il seguente risultato.

Proposizione 21.7 *Sia r la retta passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e formante un angolo α col semiasse positivo delle $\vec{x}$. Siano (x_1, y_1) le coordinate del punto $P_1 = \delta_{r,v}(P)$. Allora le coordinate (x, y) di P sono date da*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ y_1 - \overline{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_0 - \overline{x} \\ 2y_0 - \overline{y} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Esempio 21.9 *Sia s la retta di equazione $2x - 3y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s' ottenuta applicando ad s una glissoriflessione nella retta r di equazione $x + y = 1$ di vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

La retta r ha coefficiente angolare $m = -1$. Pertanto $\tan\alpha = -1$, $\cos 2\alpha = 0$ e $\sin 2\alpha = -1$. Posto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 \\ \overline{y} - y_0 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} \overline{x} - 1 \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

da cui $\overline{x} = -2$ e $\overline{y} = 3$. Per la (56),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ y_1 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} x = -y_1 + 4 \\ y = -x_1 - 2 \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di s otteniamo $2(-y_1 + 4) - 3(-x_1 - 2) = 1$. Quindi, cambiando nome alle variabili, l'equazione di s' é $3x - 2y + 13 = 0$.

Se invece della (56) si applica la (57), abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

pervenendo allo stesso risultato.

Una similitudine é un'applicazione f del piano in sé che conserva i rapporti fra le distanze: esiste cioè una costante $k > 0$ tale che per ogni coppia di punti P e Q del piano si ha $d(f(P), f(Q)) = |f(P)f(Q)| = k|PQ| = kd(P, Q)$. La costante k si dice *rapporto di similitudine*. Ovviamente ogni isometria é una similitudine ma non viceversa.

Proposizione 21.8 *Sia f una similitudine nel piano con rapporto k. Allora:*

- *f é un'applicazione biunivoca e continua;*
- *f manda rette in rette;*

- *f trasforma una circonferenza di centro P_0 e raggio ρ in una circonferenza di centro $f(P_0)$ e raggio $k\rho$;*

- *angoli corrispondenti mediante la f sono uguali;*

- *triangoli corrispondenti mediante f sono simili.*

L'insieme delle similitudini del piano con la legge di composizione naturale (composizione di applicazioni) é un gruppo. É da osservare però che nella composizione di due similitudini, il rapporto di similitudine é uguale al prodotto dei due rapporti di similitudine. Un interessante esempio di similitudine é l'omotetia.

Un'omotetia di centro C e rapporto λ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) é l'applicazione $f = f_{C,\lambda}$ del piano in sé che fissa C e ad ogni punto $P \neq C$ fa corrispondere il punto $P_1 = f_{C,\lambda}(P)$ che sta sulla retta CP, dalla stessa parte di P se $\lambda > 0$, dalla parte opposta di P se $\lambda < 0$ e tale che $d(C, P_1) = |\lambda| d(C, P)$.

Proposizione 21.9 *Valgono le seguenti proprietà:*

- *Un'omotetia di centro C e rapporto λ é una similitudine con rapporto di similitudine $|\lambda|$.*

- *Per $\lambda = 1$, si ottiene l'identità; per $\lambda = -1$, si ottiene il mezzogiro intorno al punto C.*

- *Ogni omotetia é un'applicazione biunivoca e quindi invertibile: l'inversa della omotetia $f_{C,\lambda}$ é l'omotetia di centro C e rapporto $\frac{1}{\lambda}$.*

- *L'omotetia $f_{C,\lambda}$ fissa ogni retta passante per C.*

- *Le omotetie conservano la direzione: se r é una retta allora $f_{C,\lambda}(r)$ é una retta parallela ad r (vviamente se r passa per C allora $f_{C,\lambda}(r) = r$).*

Proposizione 21.10 *L'omotetia di centro $C \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e rapporto λ fa corrispondere al punto $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ il punto $P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ definito dalla seguente legge*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Dalla (58) segue subito che un'omotetia di centro $O \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é un'applicazione lineare.

Proposizione 21.11 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una generica similitudine. Allora l'espressione analitica di f é*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & -\lambda\sin\alpha \\ \lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \tag{59}$$

oppure

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & \lambda\sin\alpha \\ \lambda\sin\alpha & -\lambda\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \tag{60}$$

per un opportuno angolo α *e un opportuno vettore* $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$.

22 Piani e rette dello spazio e loro equazioni

(Tutte le dimostrazioni contenute in questo paragrafo sono obbligatorie anche se non appaiono sotto forma di teorema)

Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ ad ogni punto P vengono assegnate le coordinate reali non omogenee $P \equiv (x, y, z)$.

Un piano reale π dello spazio si può individuare assegnando:

1. un punto P_0 di π e un vettore $\vec{v}$ non nullo ortogonale a π;
2. tre punti non allineati P_0, P_1 e P_2 di π.

Caso 1: Equazione cartesiana del piano. Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0.z_0)$ un punto di π e sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vettore ad esso ortogonale. Un punto $P \equiv (x, y, z)$ appartiene a π se e solo se

$$\vec{v} \cdot (P - P_0) = 0,$$

cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Quest'ultima equazione é detta l'equazione cartesiana del piano ed é equivalente alla seguente

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Caso 2: Equazione vettoriale del piano. Siano $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$, tre punti non allineati dello spazio. Allora esiste un unico piano π passante per essi. Esso può vedersi come il piano per P_0 ortogonale al vettore $\vec{v} = (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)$ (che non é nullo, essendo i tre punti non allineati). Pertanto si ha

$$(P - P_0) \cdot (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) = 0$$

che é l'equazione vettoriale di π. Essa può scriversi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Esempio 22.1 Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_0 \equiv (2,0,3)$. L'equazione del piano π passante per P_0 e ortogonale a $\vec{v}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $x - 2 + 2y - (z-3) = 0$.

Esempio 22.2 *Siano $P_0 \equiv (2,0,3)$, $P_1 \equiv (1,-1,0)$ e $P_2 \equiv (0,1,0)$. Il piano passante per questi tre punti ha equazione*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ 1-2 & -1-0 & 0-3 \\ 0-2 & 1-0 & 0-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Parallelismo ed ortogonalità fra piani. I due piani distinti $\pi)\ ax + by + cz + d = 0$ e $\pi')\ a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli se e solo se i due vettori associati $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ (ortogonali rispettivamente a π e π') sono paralleli. Cioè

$$\pi \,//\, \pi' \Longleftrightarrow \vec{v} = \lambda \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{O}.$$

I piani π e π' sono ortogonali se e solo se

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0.$$

Equazioni parametriche di una retta. La retta r dello spazio passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e parallela a $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ é il luogo dei punti $P \equiv (x,y,z)$ dello spazio tali che $P - P_0$ é parallelo a $\vec{v}$. Cioè

$$P - P_0 = t\vec{v},$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lt \\ mt \\ nt \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

che sono dette le *equazioni parametriche di* r. Le componenti (l,m,n) si chiamano i *parametri direttori.*

Equazioni della retta passante per due punti. Siano $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$ due punti distinti dello spazio e sia r la retta passante per essi. Un vettore parallelo ad r é $\vec{v} = B - A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$. Le equazioni parametriche di r sono pertanto

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} . \tag{61}$$

Se $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ e $z_1 \neq z_2$ dalle (61) si ricavano le seguenti equazioni di r

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Se $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ e $z_1 \neq z_2$ si ha

$$r) \quad \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \end{cases} .$$

Se $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 \neq z_2$ si ha

$$r) \quad \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases} ,$$

e similmente si procede negli altri casi.

Intersezione fra piani dello spazio. Siano α e β due piani dello spazio e consideriamo $\alpha \cap \beta$. Si possono avere tre casi:

1. $\alpha \cap \beta$ é una retta r; in tal caso i due piani si dicono *incidenti*;
2. $\alpha \cap \beta$ contiene tutti i punti di α (e quindi di β); in tal caso i due piani si dicono *paralleli e coincidenti* o, più semplicemente, coincidenti;
3. $\alpha \cap \beta$ non contiene alcun punto; in tal caso si dicono *paralleli e distinti*.

Per trovare $\alpha \cap \beta$ si considera il sistema formato dalle due equazioni. esso risulta rispettivamente: risolubile con una incognita libera, risolubile con due incognite libere, non risolubile. Nel primo caso il sistema fornisce di per se una rappresentazione cartesiana di r. Per esempio siano $\alpha) \quad ax + by + cz + d = 0$ e $\beta) \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$ due piani non paralleli (cioè (a, b, c) non é proporzionale ad (a', b', c') o, equivalentemente, il sistema delle equazioni di α e β é risolubile con una incognita libera). Allora α e β si intersecano in una retta r la cui rappresentazione cartesiana é

$$r) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

Esempio 22.3 Siano $\pi)\;\; 2x - y + z - 1 = 0$ e $\pi')\;\; x - z = 0$. Poichè i due vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali, i due piani dati individuano la retta

$$r) \quad \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} .$$

Per determinare un vettore $\vec{v}$ parallelo ad r basta scrivere le sue equazioni parametriche. Nel nostro esempio, posto $z = t$ abbiamo

$$r) \quad \begin{cases} y = 3t - 1 \\ x = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposizione 22.1 *Siano dati i piani α e β e le rette r ed s. Inoltre sia*

- $\vec{v}$ *un vettore ortogonale ad α,*
- $\vec{w}$ *un vettore ortogonale a β,*
- $\vec{u}$ *un vettore parallelo ad r,*
- $\vec{q}$ *un vettore parallelo ad s.*

Allora

1. *$\alpha // \beta$ se e solo se $\vec{v} // \vec{w}$, cioè $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{O}$ oppure esiste $k \neq 0$ tale che $\vec{v} = k\vec{w}$;*
2. *$\alpha \perp \beta$ se e solo se $\vec{v} \perp \vec{w}$, cioè se e solo se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$;*
3. *$r//s$ se e solo se $\vec{u} // \vec{q}$, cioè se e solo se $\vec{u} \wedge \vec{q} = \vec{O}$ oppure esiste $k \neq 0$ tale che $\vec{v} = k\vec{q}$;*
4. *$r \perp s$ se e solo se $\vec{u} \perp \vec{q}$, cioè se e solo se $\vec{u} \cdot \vec{q} = 0$;*
5. *$\alpha // r$ se e solo se $\vec{v} \perp \vec{u}$, cioè se e solo se $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$;*
6. *$\alpha \perp r$ se e solo se $\vec{v} // \vec{u}$, cioè se e solo se $\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{O}$ oppure esiste $k \neq 0$ tale che $\vec{v} = k\vec{u}$.*

Intersezione di una retta e un piano. Siano α un piano e r una retta. Consideriamo $\alpha \cap r$. Si hanno tre casi:

- $\alpha \cap r$ é un solo punto, allora diremo che α e r sono *incidenti*;
- $\alpha \cap r$ coincide con r, allora diremo che r *é parallela e giacente* su α;
- $\alpha \cap r$ non contiene nessun punto, allora diremo che r é *parallela con* α *senza esservi contenuta.*

Per trovare $\alpha \cap r$ si può procedere nel seguente modo:

1. Si trova un rappresentazione parametrica di r:
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} . \tag{62}$$
2. Si sostituiscono i valori di (62) al posto delle variabili x, y e z nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ del piano α.
3. Si risolve l'equazione di primo grado in t così ottenuta. Se $\alpha \cap r$ é un solo punto questa equazione ammette una ed una solo soluzione t_0 la quale, sostituita al posto di t nelle (62), da le coordinate del punto intersezione. Se $\alpha \cap r = r$ l'equazione sarà un'identità, mentre se $\alpha \cap r = \emptyset$ non sarà risolubile.

Intersezione fra due rette. Siano r ed s due rette nello spazio. Consideriamo $r \cap s$. Si hanno quattro casi:

1. $r \cap s$ é un solo punto; allora le rette si dicono *incidenti*;
2. $r \cap s$ non contiene alcun punto e le rette non giacciono su uno stesso piano; allora r e s si dicono *sghembe*;
3. $r \cap s$ non contiene nessun punto e r ed s giacciono su uno stesso piano; allora esse si dicono *parallele e distinte*;
4. $r \cap s$ contiene infiniti punti; allora $r \cap s = r = s$ e le rette si dicono *coincidenti.*

Per trovare $r \cap s$ si può procedere nel seguente modo:

a) Si trovano le equazioni parametriche delle rette
$$r) \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad s) \begin{cases} x = x'_0 + l't' \\ y = y'_0 + m't' \\ z = z'_0 + n't' \end{cases}$$
(con l'avvertenza di chiamare in modo diverso i paramentri nelle due rappresentazioni).

b) Si risolve il sistema lineare (nelle due incognite t e t'

$$\begin{cases} x_0 + lt = x'_0 + l't' \\ y_0 + mt = y'_0 + m't' \\ z_0 + nt = z'_0 + n't' \end{cases} .$$

Se $r \cap s$ é come nel caso 1, il sistema precedente é risolubile con una sola soluzione (t_0, t'_0). I valori di t_0 e t'_0, sostituiti rispettivamente al posto di t e di t' nelle equazioni di r ed s, forniscono le coordinate del punto intersezione fra le due rette. Nei casi 2 e 3 il sistema non ha soluzioni. Nel caso 4 il sistema ha infinite soluzioni (con una incognita libera).

Angolo fra due rette. L'angolo fra due rette dello spazio é l'angolo formato da due vettori non nulli paralleli rispettivamente alle due rette (si noti che si definisce l'angolo fra due rette anche se queste non sono incidenti).

Ovviamente, se due rette formano un angolo φ, esse formano anche l'angolo $\pi - \varphi$. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ parallelo alla retta r e sia $\vec{w} = \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$ parallelo alla retta s. Allora $\cos \widehat{rs} = \pm \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}}$ e quindi

$$\cos \widehat{rs} = \pm \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Angolo fra due piani. L'angolo fra due piani é l'angolo formato da due vettori non nulli ortogonali ai due piani. Se i due piani formano l'angolo φ allora essi formano pure l'angolo $\pi - \varphi$. Pertanto, indicato con $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ il vettore ortogonale al piano α e con $\vec{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ il vettore ortogonale al piano β, si ha

$$\cos \widehat{\alpha\beta} = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Angolo fra una retta ed un piano non ortogonali. L'angolo fra una retta r ed un piano α non ortogonali é dato dall'angolo acuto che r forma con la sua proiezione ortogonale su α, e quindi é il complementare dell'angolo che un vettore non nullo parallelo ad r forma con un vettore ortogonale ad α. Pertanto se $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} // r$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \alpha$, si ha $\sin \widehat{r\alpha} = |cos \widehat{\vec{v}\vec{w}}|$, da cui

$$\sin \widehat{r\alpha} = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

23 Punti e rette improprie nello spazio

Analogamente alle coordinate omogenee nel piano introdotte nel paragrafo 20, si possono introdurre le coordinate omogenee di un punto P nello spazio. Se $P \equiv (x, y, z)$, allora le coordinate omogenee di P sono date da una qualsiasi quaterna (x', y', z', t') tale che $t' \neq 0$ e $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$ e $z = \frac{z'}{t'}$.

Il punto $P \equiv (x', y', z', 0)$, con $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, é detto punto improprio dello spazio.

Se $ax + by + cz + d = 0$ é l'equazione del piano α, allora

$$ax' + by' + cz' + dt' = 0 \tag{63}$$

rappresenta l'equazione di α in forma omogenea.

I punti impropri dello spazio sono caratterizzati dall'equazione $t' = 0$ (si ricordi che $(0, 0, 0, 0)$ non é un punto improprio). Quindi la (63) rappresenta l'equazione di un piano proprio se $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ oppure del piano improprio se $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Sia $ax' + by' + cz' + dt' = 0$ l'equazione del piano proprio α (quindi si ha $a^2 + b^2 + c^2 > 0$). I punti impropri di α si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' + dt' = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \end{cases}.$$

Tale luogo di punti é detto *la retta impropria del piano α*.

Sia data la retta r di equazioni

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0 \end{cases}.$$

Il punto improprio di r si ottiene intersecando r col piano improprio; cioè risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t' = 0 \\ ax' + by' + cz' + dt' = 0 \\ a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0 \end{cases}. \tag{64}$$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ é parallelo ad r, le sue componenti sono le prime tre coordinate del punto improprio di r. Infatti i vettori $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\vec{w}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sono ortogonali rispettivamente ai piani $ax' + by' + cz' + dt' = 0$ e $a'x' + b'y' + c'z' + d't' = 0$, quindi sono ortogonali a r e al vettore $\vec{v}$. Pertanto

$$\vec{w} \perp \vec{v} \Longrightarrow al + bm + cn = 0,$$
$$\vec{w}' \perp \vec{v} \Longrightarrow a'l + b'm + c'n = 0.$$

Ciò vuol dire che l, m e n soddisfano la seconda e terza equazione del sistema (64) e quindi sono le prime tre coordinate del punto improprio di r.

Esempio 23.1 *Determinare il punto improprio della retta r passante per i due punti $P_1 \equiv (1, 0, 2)$ e $P_2 = (0, 2, -1)$.*

SVOLGIMENTO. La retta r ha equazioni

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-2}{-1-2},$$

da cui si ottengono le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}.$$

Il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ é parallelo a r. Quindi il suo punto improprio é $(-1, 2, -3, 0)$.

Esempio 23.2 *Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P_0 \equiv (2, 0, -1)$ ed ortogonale alla retta $r)$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases}$.*

SVOLGIMENTO. Per determinare le componenti del vettore $\vec{v}$ parallelo ad r é sufficiente scrivere le sue equazioni parametriche:

$$r) \begin{cases} y = x \\ z = -2x - 1 \end{cases}, \quad r) \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t - 1 \end{cases}.$$

Quindi $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'equazione del piano cercato si ottiene scrivendo l'equazione del piano passante per P_0 ed ortogonale al vettore $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 0 \\ z - (-1) \end{pmatrix} = 0,$$

$$1(x-2) + 1(y-0) - 2(z+1) = 0,$$

$$x + y - 2z - 4 = 0.$$

Proposizione 23.1 *La retta r é parallela alla retta r' se e solo se hanno lo stesso punto improprio (si ricordi che in effetti un punto improprio $(a, b, c, 0)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, individua le infinite quaterne $(ka, kb, kc, 0)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$).*

Il piano α é parallelo al piano β se e solo se le loro rette improprie coincidono.

Fasci di piani. Dati due piani distinti $\alpha)$ $ax+by+cz+d=0$ e $\beta)$ $a'x+b'y+c'z+d'=0$, si definisce fascio $\Phi(\alpha,\beta)$ di piani la totalità dei piani descritti dall'equazione

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

al variare di $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ con $\lambda^2+\mu^2>0$.

Proposizione 23.2 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Per un punto dello spazio o passa un solo piano del fascio o passano tutti i piani del fascio.*

2. *Siano π e π' due piani distinti del fascio $\Phi(\alpha,\beta)$. Allora $\Phi(\pi,\pi')=\Phi(\alpha,\beta)$.*

3. *Siano α e β due piani distinti. Detta r la retta intersezione di α con β, il fascio $\Phi(\alpha,\beta)$ é formato da tutti e soli i piani contenenti r.*

Distanza fra due punti dello spazio. La distanza fra i punti $P_1\equiv(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2\equiv(x_2,y_2,z_2)$ é

$$\overline{P_1P_2}=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Distanza fra un punto ed un piano. La distanza fra il punto $P_0\equiv(x_0,y_0,z_0)$ e il piano $\alpha)$ $ax+by+cz+d=0$ é data da

$$d(P_0,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Proiezione ortogonale di un punto su una retta. La proiezione ortogonale del punto P_0 sulla retta r é il punto intersezione fra r e il piano passante per P_0 ed ortogonale ad r.

Distanza fra un punto ed una retta. La distanza fra il punto P_0 e la retta r é data dalla lunghezza del segmento avente per estremi P_0 e la proiezione ortogonale di P_0 su r.

Esempio 23.3 *Calcolare la distanza fra il punto $P_0\equiv(6,0,0)$ e la retta $r)$* $\begin{cases} x=t\\ y=t\\ z=2t\end{cases}$.

SVOLGIMENTO. Il piano α passante per P_0 ed ortogonale ad r é dato da

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-6\\ y-0\\ z-0\end{pmatrix}=0.$$

Quindi

$$\alpha)\ x+y+2z-6=0.$$

Per trovare il punto $P_1=\alpha\cap r$ sostituiamo nell'equazione di α i valori di x, y e z dati nelle equazioni di r: $t+t+2(2t)-6=0$, da cui $t=1$, quindi $P_1\equiv(1,1,2)$ é la proiezione ortogonale di P_0 su r. Si ha $d(P_0,r)=|P_0P_1|=\sqrt{25+1+4}=\sqrt{30}$.

Esempio 23.4 *Trovare l'equazione della retta r passante per $P_0 \equiv (2, 0, -1)$ ed ortogonale al piano $\alpha)$ $2x + y - 3z + 2 = 0$.*

SVOLGIMENTO. Il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ é ortogonale ad α, quindi $\vec{v}//r$. Allora l'equazione di r coincide con quella della retta passante per P_0 e parallela a $\vec{v}$. Cioè

$$r) \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 + 1t \\ z = (-1) + (-3)t \end{cases}.$$

Esempio 23.5 *Siano dati la retta $r) \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases}$ e il piano $\alpha)$ $x + y - 2z - 1 = 0$. Provare che r e α si intersecano in un punto P_0. Determinare inoltre le equazioni della retta s passante per P_0 e il punto $Q \equiv (2, 0, -1)$.*

SVOLGIMENTO. Le coordinate di P_0 sono individuate dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Quindi $P_0 \equiv \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right)$. Le equazioni di s sono

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{6}-2} = \frac{y-0}{-\frac{1}{6}-0} = \frac{z+1}{-\frac{2}{3}+1}.$$

Esempio 23.6 *Nello spazio siano assegnati il punto $P_0 \equiv (1, -1, 0)$, la retta $r) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ e il piano $\alpha)$ $x - y + 4 = 0$. Trovare, se esistono, la o le equazioni delle rette parallele ad α, passanti per P_0 ed incidenti r.*

SVOLGIMENTO. Nel nostro esempio si vede subito che $P_0 \notin \alpha$, $P_0 \notin r$ e r non é parallela ad α. Pertanto esiste una sola retta s parallela ad α ed incidente r. Essa si ottiene intersecando il piano β passante per P_0 e contenente la retta r con il piano γ passante per P_0 e parallelo ad α.

Piano β. Si scrive l'equazione del fascio di piani per $r) \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(2y + z - 3) = 0.$$

Si impone il passaggio per P_0: $-\lambda+\mu(-2-3)=0$, $\lambda+5\mu=0$. Possiamo quindi porre $\lambda=5$ e $\mu=-1$ ottenendo $\beta)$ $5(x+y-1)+(-1)(2y+z-3)=0$.

Piano γ. Essendo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ortogonale ad α, otteniamo che l'equazione di γ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \\ z-0 \end{pmatrix} = 0,$$

da cui $x-y-2=0$.

L'equazione della retta s é cosí

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ 5x+3y-z-2=0 \end{cases} .$$

Esempio 23.7 *Nello spazio siano assegnati il punto* $P_0 \equiv (2,-1,5)$, *la retta* $r)$ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=3+2t \end{cases}$ *e il piano* $\alpha)$ $x-y+4=0$. *Trovare, se esistono, la o le equazioni delle rette parallele ad* α, *passanti per* P_0 *ed incidenti* r.

SVOLGIMENTO. Nel nostro esempio si vede subito che $P_0 \notin \alpha$, $P_0 \in r$ (infatti se nelle equazioni parametriche di r si pone $t=1$ si ottengono le coordinate di P_0) e r non é parallela ad α. Pertanto ogni retta s parallela ad α e passante per P_0 (quindi incidente r in P_0) é una soluzione del nostro problema. Essa si ottiene intersecando il piano γ passante per P_0 e parallelo ad α con un qualunque piano β del fascio di piani contenente r.

Piano γ. Essendo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ortogonale ad α, otteniamo che l'equazione di γ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-5 \end{pmatrix} = 0,$$

da cui $x-y-3=0$.

Fascio di piani contenenti r: $\lambda(x+y-1)+\mu(2y+z-3)=0$.

Al variare di $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, con $\lambda^2+\mu^2>0$, otteniamo una retta s soluzione del nostro problema

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ \lambda(x+y-1)+\mu(2y+z-3)=0 \end{cases} .$$

Esempio 23.8 *Nello spazio siano assegnati il punto* $P_0 \equiv (1,-1,0)$, *la retta* $r) \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 3+2t \end{cases}$ *e il piano* $\alpha)$ $3x+5y+z+7=0$. *Trovare, se esistono, la o le equazioni delle rette parallele ad* α, *passanti per* P_0 *ed incidenti* r.

SVOLGIMENTO. Nel nostro esempio si vede subito che $P_0 \notin \alpha$, $P_0 \notin r$ e r é parallela ad α (infatti il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallelo ad r é ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ che é ortogonale ad α).

L'eventuale soluzione s del nostro problema, dovendo essere parallela ad α, deve giacere sul piano γ passante per P_0 e parallelo ad α. Inoltre s deve essere incidente r, quindi $\gamma \cap r \neq \emptyset$. Questo contraddice il fatto che γ ed r sono paralleli. Quindi il nostro problema non ha soluzioni.

Proposizione 23.3 Condizione di complanarità fra due rette nello spazio. Rette sghembe. *Nello spazio siano assegnate le due rette distinte*

$$r) \begin{cases} ax'+by'+cz'+dt'=0 \\ a'x'+b'y'+c'z'+d't'=0 \end{cases}, \qquad s) \begin{cases} \overline{a}x'+\overline{b}y'+\overline{c}z'+\overline{d}t'=0 \\ \overline{a'}x'+\overline{b'}y'+\overline{c'}z'+\overline{d'}t'=0 \end{cases}.$$

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ \overline{a'} & \overline{b'} & \overline{c'} & \overline{d'} \end{pmatrix}.$$

Allora

1. r *ed* s *sono complanari se e solo se* $\det A = 0$;

2. r *ed* s *sono sghembe se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Le equazioni omogenee delle rette date sono

$$r) \begin{cases} ax'+by'+cz'+dt'=0 \\ a'x'+b'y'+c'z'+d't'=0 \end{cases}, \qquad s) \begin{cases} \overline{a}x'+\overline{b}y'+\overline{c}z'+\overline{d}t'=0 \\ \overline{a'}x'+\overline{b'}y'+\overline{c'}z'+\overline{d'}t'=0 \end{cases}.$$

L'intersezione $r \cap s$ si ricava dallo studio del seguente sistema lineare omogeneo (nelle incognite x', y', z', e t')

$$\begin{cases} ax'+by'+cz'+dt'=0 \\ a'x'+b'y'+c'z'+d't'=0 \\ \overline{a}x'+\overline{b}y'+\overline{c}z'+\overline{d}t'=0 \\ \overline{a'}x'+\overline{b'}y'+\overline{c'}z'+\overline{d}'=0 \end{cases}. \tag{65}$$

Ovviamente (65) ha la soluzione banale $(0,0,0,0)$ ma questa quaterna non rappresenta le coordinate omogenee di un punto nello spazio. Com'é noto dalla teoria, (65) ha soluzioni diverse dalla banale se e solo si annulla il determinante della matrice incompleta A. Quindi, se det $A=0$ le rette r ed s, essendo distinte, si intersecano in un punto proprio od improprio (in questo secondo caso r ed s sono parallele). Se det $A \neq 0$ le rette sono sghembe. ∎

Distanza fra due rette sghembe. Siano

$$r) \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{ed} \quad s) \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases}$$

due rette sghembe. Allora esiste una ed una sola retta p, ortogonale sia ad r che ad s, che le interseca entrambe. Se P_0 e Q_0 sono i punti intersezione di p con r e con s rispettivamente, la distanza $|P_0Q_0|$ si chiama distanza fra r ed s.

La retta p si trova nel seguente modo: si considerano il punto generico $P \equiv (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$ di r e il punto generico $Q \equiv (x_0' + l't', y_0' + m't', z_0' + n't')$ di s (nota che nelle coordinate di Q abbiamo cambiato nome alla variabile t) e si impone al vettore $P - Q$ di essere ortogonale sia ad r che a s, cioè ai due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$. Quindi abbiamo il sistema (nelle variabili t e t')

$$\begin{cases} (P-Q) \cdot \vec{v} = 0 \\ (P-Q) \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} .$$

Esso ammette un'unica soluzione (t_0, t_0'). Quindi $P_0 \equiv (x_0 + lt_0, y_0 + mt_0, z_0 + nt_0)$ e $Q_0 \equiv (x_0' + l't_0', y_0' + m't_0', z_0' + n't_0')$.

Esempio 23.9 *Siano date le rette*

$$r) \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{ed} \quad s) \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases} .$$

Verificare che r ed s sono sghembe e determinarne la distanza.

SVOLGIMENTO. Le equazioni omogenee delle rette sono

$$r) \begin{cases} x' - y' = 0 \\ 2x' - z' - t' = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s) \begin{cases} 2x' + y' = 0 \\ x' + z' = 0 \end{cases} .$$

Poichè

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

r ed s sono sghembe. Supposti $P \in r$ e $Q \in s$, abbiamo $P - Q = \begin{pmatrix} t - t' \\ t + 2t' \\ 2t - 1 + t' \end{pmatrix}$. I vettori paralleli ad r ed s sono rispettivamente $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $(\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\begin{cases} (P - Q \cdot \vec{v} = 0 \\ (P - Q) \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$$

diventa

$$\begin{cases} 1(t - t') + 1(t + 2t') + 2(2t + t' - 1) = 0 \\ 1(t - t') + (-2)(t + 2t') + (-1)(2t + t' - 1) = 0 \end{cases},$$

che ha l'unica soluzione $\left(\frac{1}{3}, o\right)$. Quindi $P_0 \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e $Q_0 \equiv (0, 0, 0)$. Da cui

$$d(r, s) = |P_0 Q_0| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La retta p che incontra ortogonalmente r ed s é la retta passante per P_0 e Q_0. Cioè

$$p) \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = x = \frac{1}{3}t \\ z = -x = \frac{1}{3}t \end{cases}.$$

Condizione di allineamento fra tre punti. I tre punti (in coordinate omogenee) $P \equiv (x', y', z', t')$, $P_1 \equiv (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$ e $P_2 \equiv (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$ sono allineati se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & t \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 & t'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & t'_2 \end{pmatrix}$$

ha rango minore od uguale a 2.

24 Spazi vettoriali

Siano dati un insieme non vuoto V e un campo $\mathbb{K}$.

Definizione 24.1 *Diremo che V é uno spazio vettoriale (o lineare) sul campo $\mathbb{K}$ se sono definite due operazioni*

$$+ \ : \ V \times V \ \rightarrow \ V \qquad \text{e} \qquad \cdot \ : \ \mathbb{K} \times V \ \rightarrow \ V,$$

tali che

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ \stackrel{+}{\longrightarrow} \ \mathbf{u} + \mathbf{v} \qquad \text{e} \qquad (\lambda, \mathbf{u}) \ \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \ \lambda \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

che verificano le seguenti proprietà

1. *Associativa: per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$*, si ha* $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

2. *Commutativa: per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$*, si ha* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

3. *Esistenza dell'elemento neutro: esiste in* V *un elemento* $\mathbf{o} \in V$*, detto vettore nullo, tale che* $\mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$ *per ogni* $\mathbf{u} \in V$.

4. *Esistenza dell'opposto: per ogni* $\mathbf{u} \in V$ *esiste un vettore* $\mathbf{u}' \in V$*, detto l'opposto di* $\mathbf{u}$*, tale che* $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{u}' + \mathbf{u} = \mathbf{o}$*. In seguito indicheremo* $\mathbf{u}'$ *con* $-\mathbf{u}$.

5. *Se* 1 *é l'unità del campo* $\in \mathbb{K}$*, allora* $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ *per ogni* $\mathbf{u} \in V$*. L'elemento* 1 *é detto l'unità nella moltiplicazione per scalari.*

6. *Per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\mathbf{u} \in V$ *si ha* $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$.

7. *Per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\mathbf{u} \in V$ *si ha* $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$.

8. *Per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *si ha* $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.

Si osservi che $(V, +)$ é un gruppo additivo commutativo con elemento neutro $\mathbf{o}$. Pertanto in uno spazio vettoriale V, l'elemento neutro $\mathbf{o}$ e l'opposto di un elemento sono unici.

Esempio 24.1 L'insieme dei vettori applicati in uno stesso punto forma uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ (si veda la Proposizione 16.1).

Esempio 24.2 Si verifica facilmente che $V = \mathcal{M}(m, n; \mathbb{K})$, l'insieme delle matrici $m \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$, con le usuali operazioni di somma fra matrici e prodotto di una matrice per uno scalare é uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Nel caso in cui $V = \mathcal{M}(1, n; \mathbb{K})$ ($V = \mathcal{M}(m, 1; \mathbb{K})$) gli elementi di V saranno chiamati matrici riga (matrici colonna).

Teorema 24.1 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Esiste un solo vettore nullo in* V.

2. *Ogni vettore in* V *ha un solo opposto.*

3. *Per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$*, l'equazione* $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ *ammette l'unica soluzione* $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$.

4. *Per ogni scalare* $\lambda \in \mathbb{K}$*, si ha* $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5. *Per ogni vettore* $\mathbf{u} \in V$ *si ha* $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

6. *Per ogni* $\mathbf{u} \in V$*, si ha* $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.

7. *Per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\mathbf{u} \in V$*, si ha* $(-\lambda)\mathbf{u} = -(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(-\mathbf{u})$.

8. *Legge di annullamento della moltiplicazione per scalari*

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \text{ oppure } \ \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

9. *Leggi di cancellazione della moltiplicazione per scalari. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, si ha*

$$\lambda \mathbf{u} = \mu \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu,$$
$$\lambda \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}, \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

10. *Se V ha almeno un vettore non nullo e $\mathbb{K}$ é un insieme infinito, allora anche V é infinito.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Le (1), (2) e (3) sono diretta conseguenza del fatto che $(V, +)$ é un gruppo additivo abeliano.

(4): Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Infatti $\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0}$. Da cui $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(5): Per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ si ha $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Infatti $0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$. Da cui $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(6): Per ogni $\mathbf{u} \in V$, si ha $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Infatti $(-1)\mathbf{u} + \mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} + 1\mathbf{u} = (-1 + 1)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Da cui la tesi.

(7): Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u} \in V$, si ha $(-\lambda)\mathbf{u} = -(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(-\mathbf{u})$. Infatti $\mathbf{0} = [\lambda + (-\lambda)]\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + (-\lambda)\mathbf{u}$ da cui $(-\lambda)\mathbf{u} = -\lambda\mathbf{u}$. Inoltre $\mathbf{0} = \lambda[\mathbf{u} + (-\mathbf{u})] = \lambda\mathbf{u} + \lambda(-\mathbf{u})$. Da cui $\lambda(-\mathbf{u}) = -\lambda\mathbf{u}$.

(8): Legge di annullamento della moltiplicazione per scalari

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \text{ oppure } \ \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Infatti se $\lambda = 0$ la legge é provata. Se $\lambda \neq 0$ si ha $\mathbf{u} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{u} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(9): Leggi di cancellazione della moltiplicazione per scalari. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, si ha

$$\lambda \mathbf{u} = \mu \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu,$$
$$\lambda \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}, \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Infatti

$\lambda\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda - \mu = 0;$

$\lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}, \quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{u} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}.$

(10): Se V ha almeno un vettore non nullo e $\mathbb{K}$ é un insieme infinito, allora anche V é infinito. Infatti sia $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Se V é finito anche$\{\lambda\mathbf{u} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq V$ é finito. Quindi esisteranno $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tali che $\lambda_1\mathbf{u} = \lambda_2\mathbf{u}$. Questo contraddice la prima implicazione in (9). ∎

25 Sottospazi Vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia W un sottoinsieme non vuoto di V.

Definizione 25.1 *Diremo che W é un sottospazio vettoriale di V se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. *Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ si ha $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.*
2. *Per ogni $\mathbf{u} \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $\lambda \mathbf{u} \in W$.*

Dalla precedente definizione segue immediatamente che W é un sottospazio vettoriale di V se e solo se W é un sottoinsieme non vuoto di V che risulta essere uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con la stessa somma fra vettori e lo stesso prodotto di un vettore per uno scalare definiti per V.

Esempio 25.1 *Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $W = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; x + 3y - 4z = 0\}$. Provare che W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*

SVOLGIMENTO. Siano $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1) \in W$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Allora

$$\begin{cases} x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0 \\ x_2 + 3y_2 - 4z_2 = 0 \end{cases}.$$

Sommando membro a membro abbiamo

$$(x_1 + 3y_1 - 4z_1) + (x_2 + 3y_2 - 4z_2) = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 3(y_1 + y_2) - 4(z_1 + z_2) = 0.$$

Da cui $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$ e la 1 della Definizione 25.1 risulta provata. Sia $\mathbf{u} \in W$. Allora $x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0$. Moltiplicando quest'ultima equazione per $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo $\lambda x_1 + 3\lambda y_1 - 4\lambda z_1 = 0$. Essendo $\lambda \mathbf{u} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in W$ e la 2 della Definizione 25.1 risulta provata.

Esempio 25.2 *Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $W = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; x + 3y - 4z = 2\}$. Verificare se W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*

SVOLGIMENTO. Siano $\mathbf{u} = (3, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (6, 0, 1)$. Si verifica immediatamente che $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$. Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (9, 1, 2)$ e $9 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 4 \neq 2$, la 1 della Definizione 25.1 risulta falsa. Pertanto W non é un sottospazio vettoriale di W.

Si osservi che l'insieme W descritto nell'Esempio 25.2 non può essere un sottospazio vettoriale di V perchè $\mathbf{o} \notin W$. Come mostra il seguente esempio, $\mathbf{o} \in W \subseteq V$ non implica necessariamente che W sia un sottospazio vettoriale di V.

Esempio 25.3 *Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $W = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ x^2+3y-4z = 0\}$. Verificare se W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*

SVOLGIMENTO. Siano $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$. Si verifica immediatamente che $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$. Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 1, 2)$ e $3^2 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 4 \neq 0$, la 1 della Definizione 25.1 risulta falsa. Pertanto W non é un sottospazio vettoriale di W.

Teorema 25.1 *W è sottospazio vettoriale di V se e solo se per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si ha $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria) Sia W un sottospazio vettoriale di V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Per la 2 della Definizione 25.1 si ha $\lambda\mathbf{u} \in W$ e $\mu\mathbf{v} \in W$. Per la 1 della Definizione 25.1 si ha $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W$, cioè la tesi.

Viceversa, supponiamo che $W \subseteq V$ verifichi la condizione $\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v} \in W$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Posto $\lambda = \mu = 1$ si ha $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, cioè la 1 della Definizione 25.1. Posto $\mu = 0$ si ha $\lambda\mathbf{u} \in W$, cioè la 2 della Definizione 25.1. ∎

Esempio 25.4 *Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $W = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ 2x - y + z = 0 \ \text{ e } \ x + 3y - 4z = 0\}$. Provare che W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*

SVOLGIMENTO. Siano $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1) \in W$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Allora

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0 \\ 2x_2 - y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 + 3y_2 - 4z_2 = 0 \end{cases}.$$

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$. Dal sistema precedente segue

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda z_1 = 0 \\ \lambda x_1 + 3\lambda y_1 - 4\lambda z_1 = 0 \\ 2\mu x_2 - \mu y_2 + \mu z_2 = 0 \\ \mu x_2 + 3\mu y_2 - 4\mu z_2 = 0 \end{cases},$$

e quindi

$$\begin{cases} 2(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) + \lambda z_1 + \mu z_2 = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + 3(\lambda y_1 + \mu y_2) - 4(\lambda z_1 + \mu z_2) = 0 \end{cases}.$$

Da cui $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \in W$ e, per il Teorema 25.1, W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Corollario 25.1 *Sia W un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$. Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in W$ allora $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n \in W$ per ogni n-upla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Per $n = 1$ l'asserto segue dalla 2 della Definizione 25.1. Per $n = 2$ l'asserto segue dal Teorema 25.1. Sia $n = 3$. Allora $\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2 \in W$ (perchè il caso $n = 2$ è stato provato), quindi per il Teorema 25.1 si ha $(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2) + \lambda_3\mathbf{u}_3 \in W$, da cui l'asserto per $n = 3$. Così procedendo si prova il corollario per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. ▮

Teorema 25.2 *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano W_1 e W_2 due suoi sottospazi vettoriali. Allora $W_1 \cap W_2$ é un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Si osservi innanzitutto che, essendo $\mathbf{o} \in W_1 \cap W_2$, si ha $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Allora $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$ e quindi, essendo W_1 e W_2 sottospazi vettoriali, $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W_1$ e $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W_2$. Cioè $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$. Per il Teorema 25.1, si ha la tesi. ▮

Nel seguente teorema mostriamo che, in generale, non vale per l'unione di due sottospazi un teorema analogo al Teorema 25.2.

Teorema 25.3 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali di V. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $W_1 \cup W_2$ sia un sottospazio vettoriale di V è che $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Necessità. Supponiamo che $W_1 \cup W_2$ sia un sottospazio vettoriale di V, $W_1 \nsubseteq W_2$ e $W_2 \nsubseteq W_1$. Allora esistono $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ tali che $\mathbf{u} \in W_1$, $\mathbf{u} \notin W_2$, $\mathbf{v} \in W_2$, $\mathbf{v} \notin W_1$. Essendo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cup W_2$ e avendo supposto che $W_1 \cup W_2$ sia un sottospazio vettoriale, si ha $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_1 \cup W_2$. Quindi $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_1$ oppure $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_2$. Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si ha $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mu\mathbf{u} \in W_1$. Da cui, posto $\lambda = 1$ e $\mu = -1$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u} \in W_1$. E ciò contraddice il supposto $\mathbf{v} \notin W_1$. Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si ha $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mu\mathbf{v} \in W_2$. Da cui, posto $\lambda = 1$ e $\mu = -1$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{v} \in W_2$. E ciò contraddice il supposto $\mathbf{u} \notin W_2$.

Sufficienza. Supponiamo $W_1 \subseteq W_2$ (oppure $W_2 \subseteq W_1$) allora $W_1 \cup W_2 = W_2$ (oppure $W_1 \cup W_2 = W_1$). Quindi $W_1 \cup W_2$ è sottospazio di V. ▮

Definizione 25.2 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Dicesi combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ ogni vettore del tipo $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.*

Definizione 25.3 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$. Dicesi Span$(A)$ (spanning dell'insieme A) l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Cioè*

$$Span(A) = \{\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Si osservi che, se $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, allora $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathit{Span}(A)$. Infatti

$$\mathbf{u}_i = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\mathbf{u}_{i-1} + 1\mathbf{u}_i + 0\mathbf{u}_{i+1} + \ldots + \mathbf{u}_n$$

per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 25.4 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$. $\mathit{Span}(A)$ é un sottospazio vettoriale di V che risulta minimo, rispetto all'inclusione, fra tutti i sottospazi di V che contengono A.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Siano $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathit{Span}(A)$. Allora esistono $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tali che

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n,$$

$$\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n.$$

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si ha $\alpha\mathbf{w}+\beta\mathbf{v} = \alpha(\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{u}_n)+\beta(\mu_1\mathbf{u}_1+\mu_2\mathbf{u}_2+\ldots+\mu_n\mathbf{u}_n) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)\mathbf{u}_1 + (\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2)\mathbf{u}_2 + \ldots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n)\mathbf{u}_n \in \mathit{Span}(A)$. Dunque $\mathit{Span}(A)$ é un sottospazio vettoriale di V. Si osservi infine che se W é un sottospazio di V e $A \subseteq W$ si ha, per il Corollario 25.1, che ogni combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ appartiene a W. Quindi $\mathit{Span}(A) \subseteq W$. ∎

Definizione 25.4 *Il sottospazio vettoriale $\mathit{Span}(A)$ si dice il* sottospazio vettoriale generato *da A. Nel caso in cui $\mathit{Span}(A) = V$, diremo che V é* finitamente generato *e che A é un suo* insieme di generatori*.*

Si noti che V potrebbe avere altri insiemi di generatori diversi da A, per questa ragione abbiamo detto che A é **un** insieme di generatori per V.

Esempio 25.5 Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ definito nell'Esempio 25.1. Abbiamo che $(x, y, z) \in W$ se e solo se $x + 3y - 4z = 0$. Ricavando x in funzione di y e z possiamo affermare che $W = \{(-3y + 4z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Quindi gli elementi di W sono tutti e soli i vettori $\mathbf{u} = (-3y + 4z, y, z)$ per ogni $y, z \in \mathbb{R}$. Possiamo scrivere $\mathbf{u} = (-3y + 4z, y, z) = (-3y, y, 0) + (4z, 0, z) = y(-3, 1, 0) + z(4, 0, 1)$. Quindi, posto $\mathbf{u}_1 = (-3, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (4, 0, 1)$, si ha $W = \mathit{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$.

Teorema 25.5 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$.*

Se $\mathit{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}) = \mathit{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\})$ allora esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{u}_n = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$.

Viceversa, se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{u}_n = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$, allora $\mathit{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}) = \mathit{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\})$.

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) La prima parte del teorema é immediata conseguenza della Definizione 25.3. Proviamo la seconda parte. Si ha $Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}) \subseteq Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\})$. Infatti per ogni $(n-1)$-upla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ di elementi di $\mathbb{K}$ si ha $\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} = \lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+0\mathbf{u}_n \in Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\})$.

Proviamo ora che $Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}) \subseteq Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\})$. Per ogni n-upla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ di elementi di $\mathbb{K}$ si ha $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \lambda_n\mathbf{u}_n = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \lambda_n(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}) = (\lambda_1 + \lambda_n\alpha_1)\mathbf{u}_1 + (\lambda_2 + \lambda_n\alpha_2)\mathbf{u}_2 + \ldots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n\alpha_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + \in Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\})$. ▮

Caratterizzazioni di un sottospazio vettoriale finitamente generato. Alla luce degli Esempi 25.1, 25.4 e 25.5 possiamo concludere che un sottospazio lineare finitamente generato W dello spazio vettorale V sul campo $\mathbb{K}$ può essere caratterizzato nei tre modi seguenti:

1. **Mediante la, o le, sue equazioni** (si vedano gli Esempi 25.1 e 25.4). Se W coincide con tutto lo spazio V oppure con $\{\mathbf{o}\}$ (il sottospazio contenente il solo vettore nullo) le equazioni diventano, rispettivamente, $0x + 0y + 0z = 0$ e $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

2. **Mediante la descrizione dei suoi punti**.

   Come abbiamo visto nell'Esempio 25.5 il vettore $\mathbf{u} = (-3y + 4z, y, z)$ descrive il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ la cui equazione é $x + 3y - 4z = 0$.

   Il sottospazio W dell'Esempio 25.4 coincide con l'insieme dei vettori $\mathbf{u} = (x, 2x, \frac{7}{4}x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

3. **Mediante un insieme A di suoi generatori**. Cioè producendo un sottoinsieme A di vettori di V tali che $Span(A) = W$ (si veda l'Esempio 25.5).

   Determiniamo un insieme di generatori per il sottospazio W dell' Esempio 25.4. Poichè $\mathbf{u} = (x, 2x, \frac{7}{4}x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, descrive i vettori di W abbiamo $\mathbf{u} = (x, 2x, \frac{7}{4}x) = x(1, 2, \frac{7}{4})$. Pertanto $W = Span(\{(1, 2, \frac{7}{4})\})$.

Esempio 25.6 *Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -5)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 4, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_4 = (4, 8, -10)$. Determinare le equazioni di $W_1 = Span(\{\mathbf{u}_1\})$, $W_2 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$, $W_3 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\})$ e $W_4 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\})$.*

SVOLGIMENTO. Determiniamo $W_1 = Span(\{\mathbf{u}_1\})$. Il vettore $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ o, equivalentemente, $\lambda(1, 2, -5) = (x, y, z)$. Cioè $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1$ se e solo se il seguente sistema (nella incognita λ e avente x, y e z come termini noti) ammette soluzioni

$$\begin{cases} \lambda = x \\ 2\lambda = y \\ -5\lambda = z \end{cases}.$$

Pertanto

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 2 & y \\ -5 & z \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 + 5R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-2x \\ 0 & z+5x \end{array}\right).$$

Il sistema associato a quest'ultima matrice ha soluzioni se e solo se

$$\left\{\begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{array}\right. . \tag{66}$$

Il sistema (66) rappresenta le equazioni del sottospazio W_1.

Si osservi che alle (66) si poteva pervenire osservando che per ogni $\mathbf{u} \in W_1$ esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = \lambda(1, 2, -5) = (\lambda, 2\lambda, -5\lambda)$. Se poniamo $\mathbf{u} = (x, y, z)$ otteniamo $x = \lambda$, $y = 2\lambda$ e $z = -5\lambda$. Da cui, eliminando il λ, otteniamo (66).

Determiniamo $W_2 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$. Il vettore $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_2$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ oppure, equivalentemente, $\lambda_1(1, 2, -5) + \lambda_2(2, 4, 0) = (x, y, z)$. Cioè $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_2$ se e solo se il seguente sistema (nelle variabili λ_1, λ_2 e avente x, y e z come termini noti) ammette soluzioni

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = y \\ -5\lambda_1 + 0\lambda_2 = z \end{array}\right. .$$

Pertanto

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 4 & y \\ -5 & 0 & z \end{array}\right) \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-2x \\ -5 & 0 & z \end{array}\right).$$

Il sistema associato a quest'ultima matrice ha soluzioni se e solo se

$$y - 2x = 0. \tag{67}$$

La (67) rappresenta l'equazione del sottospazio W_2.

Determiniamo $W_3 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\})$. Il vettore $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_3$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}$ oppure, equivalentemente, $\lambda_1(1, 2, -5) + \lambda_2(2, 4, 10) + \lambda(1, 0, 1) = (x, y, z)$. Cioè $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_3$ se e solo se il seguente sistema (nelle variabili λ_1, λ_2, λ_3 e avente x, y e z come termini noti) ammette soluzioni

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 0\lambda_3 = y \\ -5\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = z \end{array}\right. .$$

Pertanto

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 4 & 0 & y \\ -5 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 + 5R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & -2 & y-2x \\ 0 & 10 & 6 & z+5x \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + 3R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & -2 & y-2x \\ 0 & 10 & 0 & z+3y-x \end{array}\right).$$

Il sistema associato a quest'ultima matrice ha per ogni terna (x, y, z), fissata arbitrariamente in $\mathbb{R}^3$, una ed una sola soluzione. Pertanto $W = \mathbb{R}^3$. In tal caso, non essendoci alcun *legame* fra x, y e z, non si puo' parlare di equazioni fra questi parametri, o, se proprio si vuole, si ha $0x + 0y + 0z = 0$.

Determiniamo $W_4 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\})$. Il vettore $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_4$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}$ oppure, equivalentemente, $\lambda_1(1, 2, -5) + \lambda_2(2, 4, 10) + \lambda_3(4, 8, -10) = (x, y, z)$. Cioè $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_4$ se e solo se il seguente sistema (nelle variabili λ_1, λ_2, λ_4 e avente x, y e z come termini noti) ammette soluzioni

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = y \\ -5\lambda_1 + 0\lambda_2 - 10\lambda_3 = z \end{cases}.$$

Pertanto

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 2 & 4 & 8 & y \\ -5 & 0 & -10 & z \end{array}\right) \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2x \\ -5 & 0 & -10 & z \end{array}\right).$$

Il sistema associato a quest'ultima matrice ha soluzioni se e solo se

$$y - 2x = 0. \tag{68}$$

La (68) rappresenta l'equazione del sottospazio W_2. Si osservi che $W_4 = W_2$. Pertanto, in virtù del Teorema 25.5, $\mathbf{u}_4$ é combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Un metodo per ottenere le equazioni di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ qualora sia noto un suo insieme di generatori. Se si osservano i vari casi dell'Esempio 25.6, si vede che per ottenere l'equazione (o le equazioni) del sottospazio $Span(A)$ di $\mathbb{R}^n$ (o più in generale $\mathbb{K}^n$) é sufficiente procedere nel seguente modo:

1. Sia $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ con $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Il sistema lineare (nelle variabili $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$)

$$\begin{cases} \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{21} + \ldots + \lambda_m u_{m1} = x_1 \\ \lambda_1 u_{12} + \lambda_2 u_{22} + \ldots + \lambda_m u_{m2} = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n} + \ldots + \lambda_m u_{mn} = x_m \end{cases}$$

ha la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{m1} & x_1 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{m2} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{mn} & x_n \end{array}\right). \tag{69}$$

Si noti che (69) ha come ultima colonna (quella corrisondente ai termini noti) il vettore generico $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ e come matrice incompleta la matrice avente come colonne, nell'ordine, $\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \ldots, \mathbf{u}_m^T$.

2. Si applichi ripetutamente il metodo di riduzione per righe in modo da ottenere, alla fine, una matrice B la cui sottomatrice formata dalle prime m colonne risulti ridotta.

3. Si eguaglino a zero gli ultimi elementi (quelli corrispondenti alla colonna dei termini noti) delle eventuali righe di B che hanno 0 nei primi m posti. Ovviamente, se la sottomatrice di B formata dalle prime m colonne non ha righe nulle, si ha $Span(A) = \mathbb{R}^m$.

Esempio 25.7 *Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Siano $\mathbf{u}_1 = (2, k, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (k, 1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 1, k)$. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le equazioni di $W = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\})$.*

SVOLGIMENTO. Consideriamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & x \\ k & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & k & z \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - kR_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & x \\ k-2 & 1-k & 0 & y-x \\ 1-2k & 1-k^2 & 0 & z-kx \end{array}\right) = B.$$

Se $k = 1$ abbiamo

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & 0 & y-x \\ -1 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & y-z \end{array}\right).$$

Quindi per $k = 1$ l'equazione di W é $y - z = 0$ e si ha $W = \{(x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Sia adesso $k \neq 1$. Abbiamo

$$B \boxed{R_3 \to R_3 - (1+k)R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & x \\ k-2 & 1-k & 0 & y-x \\ -k^2-k+1 & 0 & 0 & x-(1+k)y+z \end{array}\right).$$

Quindi:

- Se $-k^2 - k + 1 \neq 0$ e $k \neq 1$, il sottospazio W coincide con $\mathbb{R}^3$, cioè $W = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

- Se $-k^2 - k + 1 = 0$, cioè $k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, l'equazione di W é
$$x - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y + z = 0$$
e si ha $W = \left\{ \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y - z, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Definizione 25.5 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano W_1 e W_2 due suoi sottospazi. Si dice somma di W_1 con W_2 il sottoinsieme $W_1 + W_2$ di V così definito*
$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in W_1, \mathbf{v} \in W_2\}.$$

Teorema 25.6 *La somma $W_1 + W_2$ di due sottospazi vettoriali di V é ancora un sottospazio di V. Inoltre, $W_1 + W_2$ é il minimo (rispetto all'inclusione) tra tutti i sottospazi di V che contengono $W_1 \cup W_2$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$. Allora esistono $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in W_1$ e $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Se $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, si ha $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mu(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{v}_1) + (\lambda\mathbf{u}_2 + \mu\mathbf{v}_2)$ che appartiene a $W_1 + W_2$ in quanto $\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{v}_1 \in W_1$ e $\lambda\mathbf{u}_2 + \mu\mathbf{v}_2 \in W_2$.

Sia W un sottospazio di V contenente $W_1 \cup W_2$. Proviamo che $W_1 + W_2 \subseteq W$. Infatti, se $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, esistono $\mathbf{u}_1 \in W_1$ e $\mathbf{u}_2 \in W_2$ per cui $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Allora $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W_1 \cup W_2$ ed, essendo W un sottospazio di V contenente $W_1 \cup W_2$, si ha $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in W$. ▮

Si osservi che ogni vettore $\mathbf{u}_1 \in W_1$ ($\mathbf{u}_2 \in W_2$) appartiene alla somma $W_1 + W_2$. Infatti $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{o}$ con $\mathbf{u}_1 \in W_1$ e $\mathbf{o} \in W_2$ ($\mathbf{u}_2 = \mathbf{o} + \mathbf{u}_1$ con $\mathbf{o} \in W_1$ e $\mathbf{u}_2 \in W_2$).

Definizione 25.6 *La somma fra due sottospazi W_1 e W_2 di V si dice diretta, e si scrive $W_1 \oplus W_2$ (invece di $W_1 + W_2$) se $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{o}\}$. In tal caso i sottospazi W_1 e W_2 si dicono complementari.*

Teorema 25.7 *Ogni vettore $\mathbf{v} \in W_1 \oplus W_2$ si esprime in uno e un sol modo come somma di un vettore di W_1 più un vettore di W_2. Cioè esiste una e una sola coppia di vettori $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Per definizione di somma diretta esiste sicuramente almeno una coppia $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Supponiamo esista un'altra coppia $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in W_1 \times W_2$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Allora $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, da cui $\mathbf{w}_1 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2 \in W_1 \cap W_2$, essendo $\mathbf{w}_1 - \mathbf{u}_1 \in W_1$ e $\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2 \in W_2$. Poichè $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{o}\}$, segue $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2$, cioè $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$. ▮

Esempio 25.8 *Siano $V = \mathbb{R}^4$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Siano $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 2x + 3y + z + 3t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z - t = x + y + 3z + t = 0\}$.*

Determinare W_1+W_2 e $W_1\cap W_2$ mediante la descrizione dei punti, le equazioni ed un insieme dei generatori. Dire inoltre se la somma W_1+W_2 è diretta.

SVOLGIMENTO. Determiniamo i punti di W_1. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x+3y+z+3t=0 \end{cases},$$

otteniamo $W_1 = \left\{\left(-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}t, y, -\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}t, t\right) \mid y,t\in\mathbb{R}\right\}$. Analogamente, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ x+y+3z+t=0 \end{cases},$$

otteniamo $W_2 = \left\{\left(-\frac{4}{3}z, -\frac{5}{3}z-t, z, t\right) \mid z,t\in\mathbb{R}\right\}$. Determiniamo i punti di W_1+W_2 mediante la Definizione 25.5:
$W_1+W_2 = \left\{\left(-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}t, y, -\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}t, t\right)+\left(-\frac{4}{3}\overline{z}, -\frac{5}{3}\overline{z}-\overline{t}, \overline{z}, \overline{t}\right) \mid y,t,\overline{z},\overline{t}\in\mathbb{R}\right\} =$
$= \left\{\left(-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}t-\frac{4}{3}\overline{z}, y-\frac{5}{3}\overline{z}-\overline{t}, -\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}t+\overline{z}, t+\overline{t}\right) \mid y,t,\overline{z},\overline{t}\in\mathbb{R}\right\}$.
Si osservi che abbiamo cambiato nome alle variabili del punto generico di W_2 (perchè?).

Essendo $\left(-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}t-\frac{4}{3}\overline{z}, y-\frac{5}{3}\overline{z}-\overline{t}, -\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}t+\overline{z}, t+\overline{t}\right) =$
$= \left(-\frac{4}{3},1,-\frac{1}{3},0\right)y+\left(-\frac{4}{3},0,-\frac{1}{3},1\right)t+\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3},1,0\right)\overline{z}+(0,-1,0,1)\,\overline{t}$,
i vettori $\mathbf{u}_1=\left(-\frac{4}{3},1,-\frac{1}{3},0\right)$, $\mathbf{u}_2=\left(-\frac{4}{3},0,-\frac{1}{3},1\right)$, $\mathbf{u}_3=\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3},1,0\right)$ e $\mathbf{u}_4=(0,-1,0,1)$ formano un insieme di generatori di W_1+W_2.

Determiniamo le equazioni di W_1+W_2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & x \\ 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -1 & y \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \begin{array}{c}\boxed{R_2\to\frac{4}{3}R_2+R_1} \\ \boxed{R_3\to -4R_3+R_1}\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & x \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{9} & -\frac{4}{3} & x+\frac{4}{3}y \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 & x-4z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_4\to\frac{4}{3}R_4+R_1+\frac{4}{3}R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & x \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{9} & -\frac{4}{3} & x+\frac{4}{3}y \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 & x-4z \\ 0 & 0 & -\frac{32}{9} & 0 & \frac{4}{3}t+x+\frac{4}{3}y \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_4\to\frac{16}{3}R_4-\frac{32}{9}R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & x \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{9} & -\frac{4}{3} & x+\frac{4}{3}y \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 & x-4z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2048}{27}\left(\frac{y}{3}+z+\frac{t}{3}\right) \end{array}\right).$$

Quindi l'equazione di W_1+W_2 è $\frac{y}{3}+z+\frac{t}{3}=0$.

Le equazioni di $W_1 \cap W_2$ sono

$$\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x+3y+z+3t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \\ x+y+3z+t=0 \end{cases}. \tag{70}$$

Per determinare i punti di $W_1 \cap W_2$ risolviamo il sistema omogeneo (70):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \\ \boxed{R_4 \to -R_4 + R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + 3R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_4 \to 3R_4 + R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $W_1 \cap W_2 = \{(0,-t,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $(0,-1,0,1)$ è l'unico generatore di $W_1 \cap W_2$. Essendo $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{o}\}$, la somma $W_1 + W_2$ non è diretta. Si osservi infine che le equazioni (70) di $W_1 \cap W_2$ possono scriversi, più semplicemente,

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y+t=0 \end{cases}.$$

26 Base e dimensione di uno spazio vettoriale

Definizione 26.1 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Gli $n \geq 1$ vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ di V si dicono linearmente dipendenti se esistono n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$* **non** *tutti nulli tali che*

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}.$$

Definizione 26.2 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Gli $n \geq 1$ vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ di V si dicono linearmente indipendenti se*

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o},$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, implica

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Esempio 26.1 *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sul campo $\mathbb{R}$, determinare la lineare dipendenza o indipendenza dei vettori* $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -1, 3, 3)$ *e* $\mathbf{u}_3 = (2, 0, 0, 1)$.

SVOLGIMENTO. In base alle Definizioni 26.1 e 26.2 bisogna verificare se l'equazione vettoriale

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{o}$$

nelle variabili reali λ_1, λ_2 e λ_3 ammette solamente la soluzione banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (in questo caso $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ risultano linearmente indipendenti) oppure altre soluzioni oltre la banale (in tal caso $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ risultano linearmente dipendenti). La precedente equazione equivale al seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to -2R_4 + R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 2R_3 + 3R_2} \\ \boxed{R_4 \to 2R_4 + 7R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to 3R_4 + 13R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè il numero delle incognite coincide col numero degli elementi speciali, il sistema omogeneo ha la sola soluzione banale. Quindi i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.

Esempio 26.2 *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sul campo $\mathbb{R}$, determinare se i vettori* $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -1, 3, 3)$ *e* $\mathbf{u}_3 = (12, 3, 0, 21)$ *sono linearmente dipendenti o indipendenti.*

SVOLGIMENTO. In base alle Definizioni 26.1 e 26.2 bisogna verificare se l'equazione vettoriale

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{o}$$

nelle variabili reali λ_1, λ_2 e λ_3 ammette solamente la soluzione banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (in questo caso $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ risultano linearmente indipendenti) oppure altre soluzioni oltre la banale (in tal caso $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ risultano linearmente dipendenti). La precedente equazione equivale al seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 21\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline R_2 \to 3R_2 + R_1 \\ \hline R_3 \to R_3 - R_1 \\ \hline R_4 \to R_4 - R_1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 7 & 0 & 21 \\ -4 & 0 & -12 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline R_3 \to 7R_3 + 4R_2 \\ \hline R_4 \to 7R_4 - 3R_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 7 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè il numero delle incognite é maggiore del numero degli elementi speciali, il sistema omogeneo ha infinite soluzioni. Quindi i tre vettori dati sono linearmente dipendenti.

Teorema 26.1 *Un vettore $\mathbf{u} \in V$ é linearmente dipendente se e soltanto se $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Se $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ allora $1\mathbf{u} = 1\mathbf{o} = \mathbf{o}$, essendo 1 l'elemento unità del campo $\mathbb{K}$. Quindi $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ é linearmente dipendente. Viceversa sia $\mathbf{u}$ linearmente dipendente. Esiste allora $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, tale che $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Ne segue $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ per la legge di annullamento della moltiplicazione per scalari. ▮

Teorema 26.2 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Se m vettori fra di essi (con $1 \leq m < n$) sono linearmente dipendenti, allora tutti i vettori sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdere la generalità che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ siano linearmente dipendenti. Allora esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ non tutti nulli (cioè $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$) tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{u}_m = \mathbf{o}$. Ne segue

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{u}_m + 0\mathbf{u}_{m+1} + \ldots + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$$

con $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Pertanto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti. ▮

Dal teorema precedente segue facilmente il seguente corollario.

Corollario 26.1 *Se n vettori sono linearmente indipendenti allora m vettori qualunque fra essi (con $1 \leq m \leq n$) sono linearmente indipendenti.*

Teorema 26.3 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $n \geq 2$ vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ siano linearmente dipendenti é che almeno uno fra essi sia combinazione lineare dei rimanenti.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Condizione necessaria. Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **non tutti nulli** tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0$. Allora, risolvendo rispetto ad $\mathbf{u}_1$, si ha $\mathbf{u}_1 = -(\lambda_1)^{-1}\lambda_2\mathbf{u}_2 - (\lambda_1)^{-1}\lambda_3\mathbf{u}_3 - \ldots - (\lambda_1)^{-1}\lambda_n\mathbf{u}_n$, cioè $\mathbf{u}_1$ é combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Condizione sufficiente. Supponiamo che uno degli n vettori, ad esempio $\mathbf{u}_1$, sia combinazione lineare dei rimanenti, cioè $\mathbf{u}_1 = \mu_2\mathbf{u}_2 + \mu_3\mathbf{u}_3 + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n$. Allora $(-1)\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2 + \mu_3\mathbf{u}_3 + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$ con $(-1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Quindi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti. ∎

Presentiamo adesso un metodo pratico che permetta di individuare in un insieme Γ di vettori di $\mathbb{K}^n$ un sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità massima. Questo metodo si basa sui due seguenti teoremi.

Teorema 26.4 *Sia* $\Gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *un insieme di vettori di* $\mathbb{K}^n$ *tali che la matrice* $A = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \ldots \mid \mathbf{v}_m^T\right)$ *risulti ridotta per righe. Allora i vettori corrispondenti alle colonne contenenti gli elementi speciali sono linearmente indipendenti e, supposto che il loro numero sia* ρ*,* Γ *contiene al massimo* ρ *vettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Senza ledere la generalità, possiamo pensare che $\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \ldots, \mathbf{v}_\rho^T$ siano le colonne di A contenenti gli elementi speciali (si noti che ogni colonna di A contiene al più un elemento speciale, quindi $\rho \leq m$).

La matrice $B = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \ldots \mid \mathbf{v}_\rho^T\right)$, anch'essa ridotta per righe, può essere vista come la matrice incompleta di un sistema lineare omogeneo avente n equazioni e ρ incognite. Poichè il numero di incognite coincide con quello degli elementi speciali il sistema ha la sola soluzione banale. In altre parole l'equazione vettoriale $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_\rho\mathbf{v}_\rho = \mathbf{o}$, nelle variabili $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$, ha la sola soluzione banale $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\rho = 0$. Pertanto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\rho$ sono linearmente indipendenti.

Se $\rho < m$, A contiene (oltre alle colonne $\mathbf{v}_1^T$, $\mathbf{v}_2^T$, $\ldots$, $\mathbf{v}_\rho^T$) $m - \rho$ colonne nelle quali non appaiono elementi speciali. Sia $\mathbf{v}^T$ una di esse. Allora $B = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \ldots \mid \mathbf{v}_\rho^T \mid \mathbf{v}^T\right)$ può essere vista come la matrice completa di un sistema lineare di n equazioni in ρ incognite avente $\mathbf{v}^T$ come colonna dei termini noti e $\left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \ldots \mid \mathbf{v}_\rho^T\right)$ come matrice incompleta. Pertanto il sistema non omogeneo associato a B ha una ed una sola soluzione. Supposto che essa sia $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)$, abbiamo $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_\rho\mathbf{v}_\rho = \mathbf{v}$), cioè $\mathbf{v}$ é combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\rho$. Ripetendo il ragionamento per ognuna delle $m - \rho$ colonne di A non contenenti elemento speciale si ha la tesi. ∎

Esempio 26.3 Siano assegnati i vettori di $\mathbb{R}^5$ $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 3, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 0, 4, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (4, 0, 4, 0, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (5, 0, 4, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_6 = (6, 0, 4, 1, 0)$. Abbiamo

$$A = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \mathbf{v}_3^T \mid \mathbf{v}_4^T \mid \mathbf{v}_5^T \mid \mathbf{v}_6^T\right) = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella matrice precedente abbiamo sottolineato gli elementi speciali (si noti che nella prima riga si ha una sola possibilità di scelta per l'elemento speciale, mentre nella terza riga si hanno tre possibilità e, nella quarta, due). La matrice $B = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \mathbf{v}_5^T\right)$, formata dalle colonne di A contenenti gli elementi speciali, equivale al seguente sistema lineare omogeneo (si osservi che la seconda e quarta equazione potrebbero essere omesse)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \tag{71}$$

la cui unica soluzione é $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Cioè

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_5 = \mathbf{o} \quad \text{se e solo se} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Quindi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_5$ sono linearmente indipendenti.

Si consideri ora una colonna di A che non contiene elementi speciali, per esempio $\mathbf{v}_4^T$. Formiamo la matrice

$$C = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \mathbf{v}_5^T \mid \mathbf{v}_4^T\right) = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa equivale al seguente sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0) \neq (0, 0, 0)$, quindi

$$\mathbf{v}_4 = (4, 0, 4, 0, 0) = \frac{4}{3}(1, 0, 0, 0, 0) + \frac{4}{3}(2, 0, 3, 0, 0) + 0(5, 0, 4, 1, 0) = \frac{4}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_5$$

é combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_5$.

Analogamente si può dimostrare che $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_6$ sono combinazioni lineare di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_5$.

Il Teorema 26.4 permette di individuare in $\Gamma \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità massima solo nell'ipotesi che la matrice A avente come colonne i vettori di Γ sia ridotta per righe. Come procedere quando A non é ridotta? La risposta a questa domanda si ottiene facilmente dal seguente teorema.

Teorema 26.5 *I vettori*

$$\mathbf{u}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}),$$
$$\mathbf{u}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{u}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})$$

sono linearmente indipendenti se e solo se, comunque fissati $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, con $\lambda \neq 0$, e comunque scelti $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$,

$$\mathbf{v}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{(i-1)1}, \lambda a_{i1} + \mu a_{j1}, a_{(i+1)1}, \ldots, a_{n1}),$$
$$\mathbf{v}_2 = (a_{12}, \ldots, a_{(i-1)2}, \lambda a_{i2} + \mu a_{j2}, a_{(i+1)2}, \ldots, a_{n2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{v}_m = (a_{1m}, \ldots, a_{(i-1)m}, \lambda a_{im} + \mu a_{jm}, a_{(i+1)m}, \ldots, a_{nm})$$

sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Ovviamente $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \tag{72}$$

ammette la sola soluzione banale.

Per il Teorema 11.1, (72) equivale al seguente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{(i-1)1}x_1 + a_{(i-1)2}x_2 + \ldots + a_{(i-1)m}x_m = 0 \\ (\lambda a_{i1} + \mu a_{j1})x_1 + (\lambda a_{i2} + \mu a_{j2})x_2 + \ldots + (\lambda a_{im} + \mu a_{jm})x_m = 0 \\ a_{(i+1)1}x_1 + a_{(i+1)2}x_2 + \ldots + a_{(i+1)m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \tag{73}$$

il quale ha solamente la soluzione banale se e solo se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti. ∎

Riassumiamo quanto detto sopra nel seguente **metodo per individuare il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in un sottoinsieme A di $\mathbb{K}^n$.**

Dato l'insieme di vettori $\Gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subseteq \mathbb{K}^n$ si può determinare un sottoinsieme di massima cardinalità di Γ di vettori linearmente indipendenti nel seguente modo:

1. si formi la matrice $A = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \ldots \mid \mathbf{v}_m^T\right)$;

2. si riduca per righe A e si fissino gli elementi speciali nella matrice ridotta B;

3. si considerino **le colonne di A che corrispondono**, nella matrice ridotta B, alle colonne contenenti gli elementi speciali. Ovviamente esse individuano un sottoinsieme di Γ. Esso costituisce un sottoinsieme di cardinalità massima di vettori linearmente indipendenti di Γ.

Esempio 26.4 *Sia $\Gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} \subseteq \mathbb{R}^5$, essendo $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 2, -2, 4, 2)$ e $\mathbf{v}_5 = (0, 0, -1, 1, 1)$. Determinare un sottoinsieme linearmente indipendente di Γ avente massima cardinalità.*

SVOLGIMENTO. Consideriamo la matrice

$$A = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \mathbf{v}_3^T \mid \mathbf{v}_4^T \mid \mathbf{v}_5^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 + 2R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 3R_2} \\ \boxed{R_5 \to R_5 - R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_4 \to R_4 + R_3} \\ \boxed{R_5 \to R_5 + R_3} \end{array} \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \underline{-1} & 1 & 1 & 0 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia Ψ l'insieme dei vettori corrispondenti alle colonne di A_3. Per il Teorema 26.4, i vettori corrispondenti alle prime tre colonne di A_3 formano un sottoinsieme linearmente indipendente di Ψ avente cardinalità massima. Per il Teorema 26.5, i vettori corrispondenti alle prime tre colonne di A_2 sono linearmente indipendenti mentre quelli rimanenti sono una loro combinazione lineare. Applicando di nuovo il Teorema 26.5 alle matrici A_2 e A_1 e poi A_1 ed A, otteniamo che i vettori corrispondenti alle prime tre colonne di A formano un sottoinsieme linearmente indipendente di Γ avente cardinalità massima.

Corollario 26.2 *Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ é n.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Cominciamo col provare che in $\mathbb{K}^n$ si hanno **al più** n vettori linearmente indipendenti. Infatti siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m \in \mathbb{K}^n$ con $m \geq n$. La matrice $A = \left(\mathbf{u}_1^T \mid \ldots \mid \mathbf{u}_m^T\right)$ ha n righe. Pertanto la matrice ridotta da essa ottenuta contiene al più n elementi speciali (si ricordi che ogni riga può avere al massimo un solo elemento speciale). Come abbiamo visto il numero degli elementi speciali della matrice ridotta di A coincide con la cardinalità massima di un sottoinsieme linearmente indipendente di $\{\mathbf{u}_1 \ldots, \mathbf{u}_m\}$.

Proviamo ora che $\mathbb{K}^n$ contiene n vettori linearmente indipendenti. Poniamo (si ricordi che 1 indica l'elemento unità del campo $\mathbb{K}$):

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{K}^n,$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{K}^n,$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{K}^n,$$

....

$$\mathbf{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0) \in \mathbb{K}^n,$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{K}^n.$$

Ovviamente la matrice $A = \left(\mathbf{e}_1^T \mid \ldots \mid \mathbf{e}_n^T\right)$ risulta ridotta e contiene n elementi speciali (gli unici che in essa sono diversi dallo 0). Quindi l'insieme $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é linearmente indipendente. ∎

Definizione 26.3 Definizione di base. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme finito B di V é detto base di V se soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *B é un insieme di generatori di V, cioè $Span(B) = V$;*
2. *B é linearmente indipendente.*

Nello spazio $\mathbb{K}^n$ i vettori $\mathbf{e}_1 \ldots, \mathbf{e}_n$ definiti nella dimostrazione del Corollario 26.2 formano una base di $\mathbb{K}^n$.

Enunciamo i seguenti importanti teoremi di cui omettiamo, in questo contesto, la dimostrazione.

Teorema 26.6 *Sia A un insieme finito di generatori di uno spazio vettoriale $V \neq \{\mathbf{o}\}$ e sia H un sottoinsieme di A linearmente indipendente. Allora esiste almeno una base B di V tale che $H \subseteq B \subseteq A$.*

Il seguente teorema permette di estendere un qualsiasi sottoinsieme linearmente indipendente H di uno spazio vettoriale finitamente generato V ad una base di V.

Teorema 26.7 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$, $h \le n$, sono h vettori linearmente indipendenti, allora si può costruire una nuova base di V aggiungendo a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$ $n-h$ vettori opportunamente scelti in B.*

Dal Teorema 26.7 segue in particolare, per $h = n$, il seguente corollario

Corollario 26.3 *Se uno spazio vettoriale V ammette una base formata da n vettori, allora ogni sottoinsieme di n vettori linarmente indipendenti di V é una base di V.*

Teorema 26.8 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente una base formata da n vettori. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *Ogni sottoinsieme di V linearmente indipendente ha cardinalità minore od uguale ad n.*

2. *Qualsiasi base di V possiede n vettori.*

3. *Ogni insieme di generatori di V, formato da n vettori, é linearmente indipendente.*

La proprietà 2 del Teorema 26.8 giustifica la seguente importante definizione.

Definizione 26.4 *Sia $V \neq \{\mathbf{o}\}$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$. Si dice dimensione di V, e si indica con $\dim V$, la cardinalità di una qualsiasi base di V. Se $V = \{\mathbf{o}\}$, si pone $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$.*

Esempio 26.5 *Siano assegnati i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (2,3,1,-4)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (2,9,4,2)$, $\mathbf{v}_4 = (1,1,2,2)$, $\mathbf{v}_5 = (5,14,8,2)$ e $\mathbf{v}_6 = (1,0,1,0)$. Determinare un suo sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità massima e verificare se esso é una base di $\mathbb{R}^4$.*

SVOLGIMENTO. Applichiamo il metodo illustrato precedentemente. Sia

$$A = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \mathbf{v}_3^T \mid \mathbf{v}_4^T \mid \mathbf{v}_5^T \mid \mathbf{v}_6^T\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 14 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 14 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 2R_2} \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 14 & 0 \\ -4 & 0 & -7 & 0 & -11 & 0 \\ -10 & 0 & -16 & 0 & -26 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to 5R_3 - 2R_4} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 5 & \underline{1} \\ 3 & 1 & 9 & \underline{1} & 14 & 0 \\ \underline{-4} & 0 & -7 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-3} & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella matrice precedente abbiamo sottolineato gli elementi speciali. Pertanto un sottoinsieme linearmente indipendente di $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6\}$ di cardinalità massima é $\Gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6\}$. Per i Corollari 26.2 e 26.3, Γ é una base di $\mathbb{R}^4$. Ovviamente si ha $Span(\Gamma) = \mathbb{R}^4$.

Esempio 26.6 *Siano assegnati i vettori di* $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (2,3,1,-4)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (2,6,4,2)$, $\mathbf{v}_4 = (4,10,6,0)$, $\mathbf{v}_5 = (4,9,5,-2)$ *e* $\mathbf{v}_6 = (4,11,7,2)$. *Determinare un suo sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità massima e verificare se esso é una base di* $\mathbb{R}^4$.

SVOLGIMENTO. Applichiamo il metodo illustrato precedentemente. Sia

$$A = \left(\mathbf{v}_1^T \mid \mathbf{v}_2^T \mid \mathbf{v}_3^T \mid \mathbf{v}_4^T \mid \mathbf{v}_5^T \mid \mathbf{v}_6^T\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 10 & 9 & 11 \\ -1 & 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{R_2 \to R_2 - 3R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 2R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to R_4 + 4R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & \underline{2} & 4 & 4 & 4 \\ -3 & \underline{1} & 0 & -2 & -3 & -1 \\ \underline{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella matrice precedente abbiamo sottolineato gli elementi speciali. Pertanto un sottoinsieme linearmente indipendente di $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6\}$ di cardinalità massima é $\Gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Per i Corollari 26.2 e 26.3, Γ non é una base di $\mathbb{R}^4$.

Cerchiamo $Span(\Gamma)$. Usando le precedenti riduzioni, il sistema associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & x \\ 3 & 1 & 6 & y \\ -1 & 1 & 4 & z \\ 4 & 2 & 2 & t \end{array}\right)$$

si riduce a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & x \\ -3 & 1 & 0 & y - 3x \\ -2 & 0 & 0 & z - y + x \\ 0 & 0 & 0 & 9x - 6y + 4z + t \end{array}\right).$$

Pertanto l'equazione di $Span(\Gamma)$ é $9x - 6y + 4z + t = 0$ (cioè $(x,y,z,t) \in Span(\Gamma)$ se e solo se $9x - 6y + 4z + t = 0$). Si osservi inoltre che i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ non generano $\mathbb{R}^4$. Infatti, per esempio, $(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ ma $(0,0,0,1) \notin Span(\Gamma)$.

Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, permette di determinare le dimensioni dei sottospazi somma e somma diretta.

Teorema 26.9 *(Formula di Grassmann) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di V, allora*

$$dim\,(W_1 + W_2) + dim\,(W_1 \cap W_2) = dim\,W_1 + dim\,W_2.$$

Corollario 26.4 *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di V tali che $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{o}\}$, allora*

$$dim\,(W_1 \oplus W_2) = dim\,W_1 + dim\,W_2.$$

Esempio 26.7 *Siano $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z = 0, y+2z+t = 0\}$ e $W_2 = Span(\{\mathbf{u}_1 = (4, 1, 0, 4), \mathbf{u}_2 = (3, 0, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (9, 3, -2, 11)\})$. Determinare basi e dimensioni di W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.*

SVOLGIMENTO. Cerchiamo $dim\,W_1$. Si ha $W_1 = \{(-y-z, y, z, -y-2z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Essendo $(-y-z, y, z, -y-2z) = (-y, y, 0, -y)+(-z, 0, z, -2z) = y(-1, 1, 0, -1)+z(-1, 0, 1, -2)$, abbiamo $W_1 = Span(\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1, -2)\})$. Poichè

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 + R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_2} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} \underline{-1} & -1 \\ 0 & \underline{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente indipendente e quindi, generando W_1, ne costituisce una base. Abbiamo così $dim\,W_1 = 2$.

Consideriamo W_2. Poichè

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 4R_2 - R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to 3R_3 + 2R_2} \\ \boxed{R_4 \to 3R_4 - 2R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 3 & 9 \\ 0 & \underline{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti mentre $\mathbf{u}_3$ é combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Quindi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é una base di W_2 e $dim\,W_2 = 2$.

Consideriamo ora W_1+W_2. Abbiamo che $\mathbf{w} \in W_1+W_2$ se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \mu_1\mathbf{v}_2 + \lambda_2\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2$. Infatti $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$ se e solo se esistono $\mathbf{x} \in W_1$

e $\mathbf{y} \in W_2$ tali che $\mathbf{w} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Essendo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base di W_1 e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base di W_2, abbiamo l'asserto.

Quindi $W_1 + W_2 = Span(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$. Una base di $W_1 + W_2$ sarà data dal sottoinsieme linearmente indipendente di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ avente cardinalità massima. Per determinarlo basta ridurre la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to R_4 + R_3} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \underline{-1} & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & \underline{5} & 3 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $W_1 + W_2 = Span(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}) = Span(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\})$. Quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\}$ é una base di $W_1 + W_2$ e $dim\,(W_1 + W_2) = 3$.

Consideriamo infine $W_1 \cap W_2$. Per la formula di Grassmann,

$$dim\,(W_1 + W_2) + dim\,(W_1 \cap W_2) = dim\,W_1 + dim\,W_2,$$

$$3 + dim\,(W_1 \cap W_2) = 2 + 2,$$

$$dim\,(W_1 \cap W_2) = 1.$$

Le equazioni di $W_1 \cap W_2$ si ottengono mettendo a sistema quelle di W_1 con quelle di W_2. Determiniamo quindi le equazioni di W_2, essendo già date quelle di W_1. Poiché $W_2 = Span(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \\ 4 & 1 & t \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 4R_2 - R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & x \\ 0 & -3 & 4y - x \\ 0 & 0 & 3z + 8y - 2x \\ 0 & 0 & 3t - x - 8y \end{array}\right).$$

Le equazioni di W_2 sono quindi

$$\begin{cases} 3z + 8y - 2x = 0 \\ 3t - x - 8y = 0 \end{cases}.$$

Mettendo a sistema la equazioni di W_1 con quelle di W_2 abbiamo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 3z + 8y - 2x = 0 \\ 3t - x - 8y = 0 \end{cases}.$$

Essendo $dim\,(W_1 \cap W_2) = 1$, il precedente sistema può essere ridotto ad uno formato da tre equazioni.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & -8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to R_3 + 2R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 + R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_4 \to R_4 - 3R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to R_4 + R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di $W_1 \cap W_2$ sono pertanto

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 10y + 5z = 0 \end{cases},$$

e $W_1 \cap W_2 = \{(y, y, -2y, 3y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Quindi $\{(1, 1, -2, 3)\}$ é una base di $W_1 \cap W_2$.

Definizione 26.5 Definizione di base ordinata. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n. Si dice base ordinata di V ogni n-upla ordinata $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di vettori linearmente indipendenti di V.*

Il concetto di base ordinata é di fondamentale importanza nella teoria degli spazi vettoriali; esso riveste un ruolo analogo a quello del riferimento di coordinate cartesiane nella geometria euclidea. Infatti, possiamo rappresentare univocamente ogni vettore rispetto una base ordinata mediante una n-upla di scalari, detti le componenti del vettore. Le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per scalari si traducono poi nelle analoghe operazioni sulle componenti.

Teorema 26.10 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita n e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una sua base ordinata. Per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una ed una sola n-upla ordinata di scalari $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, detta la n-upla delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto la base ordinata B, tale che*

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n.$$

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Essendo B una base di V, $\mathbf{v}$ é combinazione lineare dei vettori di B. Pertanto $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n$. Se esiste un'altra n-upla ordinata $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_n \mathbf{u}_n$, abbiamo

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_n \mathbf{u}_n$$

da cui

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{u}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{u}_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{o}.$$

Pertanto $\lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2, \ \ldots, \ \lambda_n = \mu_n$. ∎

Siano $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ due basi ordinate dello spazio vettoriale V. Se $\mathbf{w} \in V$ allora esistono due n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ e $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ che sono rispettivamente le componenti di $\mathbf{w}$ rispetto le basi ordinate A e B. Per evitare confusione le indicheremo da ora in poi con $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_A$ e $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)_B$ per indicare la base rispetto la quale la n-upla data rappresenta le componenti.

Sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una base ordinata dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. La n-upla delle componenti del vettore nullo $\mathbf{o}$ di V é il vettore nullo $(0, 0, \ldots, 0)_B \in \mathbb{K}^n$, infatti $\mathbf{o} = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\mathbf{u}_n$. La n-upla delle componenti del vettore $\mathbf{u}_1$ di B é $(1, 0, \ldots, 0)_B \in \mathbb{K}^n$, infatti $\mathbf{u}_1 = 1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\mathbf{u}_n$; la n-upla delle componenti del vettore $\mathbf{u}_2$ di B é $(0, 1, \ldots, 0)_B \in \mathbb{K}^n$, infatti $\mathbf{u}_2 = 0\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\mathbf{u}_n$; $\ldots$; la n-upla delle componenti del vettore $\mathbf{u}_n$ della base ordinata B é $(0, 0, \ldots, 1)_B \in \mathbb{K}^n$, infatti $\mathbf{u}_n = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \ldots + 1\mathbf{u}_n$.

Definizione 26.6 Base canonica. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ dicesi base canonica la base ordinata $E_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ con $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.*

Teorema 26.11 *Sia E_n la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ allora le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto E_n coincidono con la n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Cioè*

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{E_n} = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Teorema 26.12 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una sua base ordinata. L'applicazione (detta l'isomorfismo delle componenti rispetto la base ordinata B)*

$$f_B \ : \ V \to \mathbb{K}^n$$

che ad ogni vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + \ldots + v_n\mathbf{u}_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)_B \in V$ associa la n-upla ordinata $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto la base ordinata B soddisfa le seguenti proprietà:

1. *f_B é biunivoca.*
2. *Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, si ha $f_B(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f_B(\mathbf{v}) + f_B(\mathbf{w})$.*
3. *Per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $f_B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f_B(\mathbf{v})$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) 1) L'applicazione f_B é sia suriettiva che iniettiva. La suriettività si ha perchè, essendo B una base ordinata di V, per ogni $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ abbiamo $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + \ldots + v_n\mathbf{u}_n \in V$ e $f_B(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. L'inettività di f_B segue immediatamente dal Teorema 26.10.

2) Siano

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + \ldots + v_n\mathbf{u}_n, \quad e \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + \ldots + w_n\mathbf{u}_n.$$

Allora
$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = (v_1+w_1)\mathbf{u}_1 + (v_2+w_2)\mathbf{u}_2 + \ldots + (v_n+w_n)\mathbf{u}_n,$$
e quindi
$$f_B(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f_B(\mathbf{w}) = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n,$$
$$f_B(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n+w_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)+(w_1, w_2, \ldots, w_n) = f_B(\mathbf{v})+f_B(\mathbf{w}).$$
3) Se $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + \ldots + v_n\mathbf{v}_n \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora si ha
$$\lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1)\mathbf{u}_1 + (\lambda v_2)\mathbf{u}_2 + \ldots + (\lambda v_n)\mathbf{u}_n$$
e quindi
$$f_B(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n,$$
$$f_B(\lambda\mathbf{v}) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n) = \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda f_B(\mathbf{v}).$$
∎

Teorema 26.13 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ avente la base ordinata $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Allora l'applicazione*
$$f_B^{-1} \;:\; \mathbb{K}^n \to V$$
che ad ogni $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ associa il vettore $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{u}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_B$ di V é biunivoca e si ha
$$f_B^{-1}(\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+\beta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)) = \alpha f_B^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+\beta f_B^{-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \quad (74)$$
per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) L'applicazione f_B^{-1} é l'inversa della f_B definita nel Teorema 26.12. Pertanto f_B^{-1} é biunivoca. Proviamo che vale la (74). Siano $\mathbf{v}_1 = f_B^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ e $\mathbf{v}_2 = f_B^{-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Allora $f_B(\mathbf{v}_1) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_B$ e $f_B(\mathbf{v}_2) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)_B$. Ne segue, per il Teorema 26.12, $f_B(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha f_B(\mathbf{v}_1) + \beta f_B(\mathbf{v}_2) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+$
$+\beta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2, \ldots, \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)$, e quindi
$$f_B^{-1}(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2, \ldots, \alpha\lambda_n + \beta\mu_n) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2. \quad (75)$$
Dalla (75) otteniamo
$f_B^{-1}(\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \beta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)) = f_B^{-1}(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2, \ldots, \alpha\lambda_n + \beta\mu_n) =$
$= \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \alpha f_B^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \beta f_B^{-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. ∎

Esempio 26.8 *Siano dati in* $\mathbb{R}^4$ *i vettori* $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,-1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (2,2,0,0)$ *e* $\mathbf{u}_4 = (2,0,0,1)$. *Provare che essi formano una base di* $\mathbb{R}^4$. *Determinare le componenti* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ *di* $\mathbf{v} = (7,8,5,3)$ *rispetto le basi ordinate* $B = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$ *e* $C = (\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3)$.

SVOLGIMENTO. I vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ formano una base di $\mathbb{R}^4$ se sono linearmente indipendenti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to 2R_4 + R_2} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_4 \to R_4 + 4R_3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \underline{-2} \\ \underline{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & \underline{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ sono linearmente indipendenti.

Cerchiamo le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto la base ordinata B. Si ha

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3 + \delta\mathbf{u}_4, \tag{76}$$

ovvero $(7,8,5,3) = \alpha(1,1,-1,2) + \beta(1,2,-1,3) + \gamma(2,2,0,0) + \delta(2,0,0,1) = (\alpha+\beta+2\gamma+2\delta, \alpha+2\beta+2\gamma, -\alpha-\beta, 2\alpha+3\beta+\delta)$. Le componenti α, β, γ e δ sono quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma+2\delta = 7 \\ \alpha+2\beta+2\gamma = 8 \\ -\alpha-\beta = 5 \\ 2\alpha+3\beta+\delta = 3 \end{cases} \tag{77}$$

la cui matrice associata é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Applicando a questa matrice le precedenti riduzioni otteniamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 27 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to -3R_1 + R_4} \\ \boxed{R_2 \to -3R_2 + R_4} \\ \boxed{R_3 \to 3R_3 + R_4} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 27 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to R_1 - R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -6 & -6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 27 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to R_1 + R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 27 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to -\frac{1}{6}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \\ \boxed{R_3 \to -\frac{1}{3}R_3} \\ \boxed{R_4 \to \frac{1}{3}R_4} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

e quindi $\alpha = -14$, $\beta = 9$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$ sono le componenti di $\mathbf{v} = (7, 8, 5, 3)$ rispetto la base ordinata B, cioè $\mathbf{v} = (-14, 9, 2, 4)_B$.

Cerchiamo ora le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto la base ordinata $C = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$. Si ha

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}_2 + \beta\mathbf{u}_4 + \gamma\mathbf{u}_1 + \delta\mathbf{u}_3, \tag{78}$$

ovvero $(7, 8, 5, 3) = \alpha(1, 2, -1, 3) + \beta(2, 0, 0, 1) + \gamma(1, 1, -1, 2) + \delta(2, 2, 0, 0) = (\alpha + 2\beta + \gamma + 2\delta, 2\alpha + \gamma + 2\delta, -\alpha - \gamma, 3\alpha + \beta + 2\gamma)$. Quindi le componenti α, β, γ e δ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + 2\delta = 7 \\ 2\alpha + \gamma + 2\delta = 8 \\ -\alpha - \gamma = 5 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 3 \end{cases} \tag{79}$$

il quale ha soluzione $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (9, 4, -14, 2)$, quindi $\mathbf{v} = (9, 4, -14, 2)_C$.

Si osservi che non é il caso di risolvere di nuovo il sistema (79). Infatti basta porre in esso β al posto di α, δ al posto di β, α al posto di γ e, infine, γ al posto di δ per ottenere il sistema (77). Ovviamente questa sostituzione si ricava osservando le uguaglianze (76) e (78).

Esempio 26.9 *Si considerino in $\mathbb{R}^3$ la basi ordinate $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ essendo $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 2, 2)$. Siano note, nella base A, le componenti dei due vettori $\mathbf{w}_1 = (5, -2, 7)_A$ e $\mathbf{w}_2 = (-3, 14, 2)_A$. Determinare le componenti di $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ nella base B.*

SVOLGIMENTO. Di questo esercizio daremo due metodi di risoluzione. Il primo si basa sul metodo visto nell'Esempio 26.8. Il secondo mostrerà una tecnica di risoluzione molto più generale ed interessante e introduce al problema della ricerca della matrice di cambiamento di base.

I metodo. Come abbiamo detto vogliamo riutilizzare le tecniche viste nell'Esempio 26.8. Pertanto come primo passo dobbiamo determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$: $\mathbf{w}_1 = (5, -2, 7)_A = 5\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 7\mathbf{u}_3 = 5(2, 1, 3) - 2(-1, 1, 1) + 7(0, 2, 1) = (12, 17, 20)$, $\mathbf{w}_2 = (-3, 14, 2)_A = -3\mathbf{u}_1 + 14\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 = -3(2, 1, 3) + 14(-1, 1, 1) + 2(0, 2, 1) = (-20, 15, 7)$.

Procedendo come nell'Esempio 26.8, bisogna determinare i valori degli a_{ij}, $i = 1,2$ e $j = 1,2,3$, tali che

$$\mathbf{w}_1 = (12,17,20) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + a_{13}\mathbf{v}_3 = (2a_{12}+2a_{13}, a_{11}+3a_{12}+2a_{13}, a_{11}-a_{12}+2a_{13}) \;\; e$$

$$\mathbf{w}_2 = (-20,15,7) = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{23}\mathbf{v}_3 = (2a_{22}+2a_{23}, a_{21}+3a_{22}+2a_{23}, a_{21}-a_{22}+2a_{23}).$$

In altre parole bisogna risolvere i due sistemi seguenti nelle incognite a_{ij}:

$$\begin{cases} 2a_{12}+2a_{13} = 12 \\ a_{11}+3a_{12}+2a_{13} = 17 \\ a_{11}-a_{12}+2a_{13} = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_{22}+2a_{23} = -20 \\ a_{21}+3a_{22}+2a_{23} = 15 \\ a_{21}-a_{22}+2a_{23} = 7 \end{cases}. \tag{80}$$

Si vede subito che (a parte il nome delle variabili) i sistemi precedenti differiscono solamente per i termini noti. Poichè li vogliamo risolvere col metodo di riduzione, possiamo compattare entrambi i sistemi in un'unica matrice le cui due colonne finali coincidono con le due colonne dei termini noti.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 2 & 12 & -20 \\ 1 & 3 & 2 & 17 & 15 \\ 1 & -1 & 2 & 20 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 2 & 12 & -20 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 35 \\ 1 & -3 & 0 & 8 & 27 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 2 & 12 & -20 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 4R_2 + R_3} \\ \boxed{R_1 \to 2R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 4 & 27 & -48 \\ 4 & 0 & 0 & 23 & 132 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -8 \end{array}\right) \boxed{R_1 \leftrightarrow R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 23 & 132 \\ 0 & 0 & 4 & 27 & -48 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -8 \end{array}\right) \boxed{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 23 & 132 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 27 & -48 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \\ \boxed{R_2 \to -\frac{1}{4}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{4}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{4} & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{4} & -12 \end{array}\right).$$

Pertanto $\mathbf{w}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})_B = (\frac{23}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{27}{4})_B$ e $\mathbf{w}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})_B = (33, 2, -12)_B$.

II metodo. Abbiamo $\mathbf{w}_1 = (5,-2,7)_A = 5\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 7\mathbf{u}_3$. Supponiamo che $\mathbf{u}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})_B = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + a_{i3}\mathbf{v}_3$. Allora $\mathbf{w}_1 = (5,-2,7)_A = 5\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 7\mathbf{u}_3 = 5(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + a_{13}\mathbf{v}_3) - 2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{23}\mathbf{v}_3) + 7(a_{31}\mathbf{v}_1 + a_{32}\mathbf{v}_2 + a_{33}\mathbf{v}_3) = (5a_{11} - 2a_{21} + 7a_{31})\mathbf{v}_1 + (5a_{12} - 2a_{22} + 7a_3)\mathbf{v}_2 + (5a_{13} - 2a_{23} + 7a_{33})\mathbf{v}_3 = (5a_{11} - 2a_{21} + 7a_{31}, 5a_{12} - 2a_{22} + 7a_3, 5a_{13} - 2a_{23} + 7a_{33})_B$. Quindi, posto

$$P^{A,B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

le componenti di $\mathbf{w}_1$ nella base B sono date dal prodotto riga per colonna di $P^{A,B}$ con la matrice 3×1 i cui elementi sono le componenti di $\mathbf{w}_1$ in base A

$$P^{A,B}(\mathbf{w}_1^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}_A .$$

Allo stesso modo si ricavano le componenti nella base B di $\mathbf{w}_2 = (-3, 14, 2)_A$

$$P^{A,B}(\mathbf{w}_2^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}_A .$$

Occorre quindi determinare le componenti nella base B dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = (2,1,3) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + a_{13}\mathbf{v}_3 = a_{11}(0,1,1) + a_{12}(2,3,-1) + a_{13}(2,2,2) = \\ &(2a_{12} + 2a_{13}, a_{11} + 3a_{12} + 2a_{13}, a_{11} - a_{12} + 2a_{13}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 = (-1,1,1) &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{23}\mathbf{v}_3 = a_{21}(0,1,1) + a_{22}(2,3,-1) + a_{23}(2,2,2) = \\ &(2a_{22} + 2a_{23}, a_{21} + 3a_{22} + 2a_{23}, a_{21} - a_{22} + 2a_{23}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 = (0,2,1) &= a_{31}\mathbf{v}_1 + a_{32}\mathbf{v}_2 + a_{33}\mathbf{v}_3 = a_{31}(0,1,1) + a_{32}(2,3,-1) + a_{33}(2,2,2) = \\ &(2a_{32} + 2a_{33}, a_{31} + 3a_{32} + 2a_{33}, a_{31} - a_{32} + 2a_{33}). \end{aligned}$$

Bisogna quindi risolvere i tre sistemi:

$$\begin{cases} 2a_{12} + 2a_{13} = 2 \\ a_{11} + 3a_{12} + 2a_{13} = 1 \\ a_{11} - a_{12} + 2a_{13} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_{22} + 2a_{23} = -1 \\ a_{21} + 3a_{22} + 2a_{23} = 1 \\ a_{21} - a_{22} + 2a_{23} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_{32} + 2a_{33} = 0 \\ a_{31} + 3a_{32} + 2a_{33} = 2 \\ a_{31} - a_{32} + 2a_{33} = 1 \end{cases} \tag{81}$$

Si vede subito che (a parte il nome delle variabili) i sistemi precedenti differiscono solamente per i termini noti. Poichè li vogliamo risolvere col metodo di riduzione, possiamo compattarli in un'unica matrice le cui tre colonne finali coincidono con le tre colonne dei termini noti.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 4R_2 + R_3} \\ \boxed{R_1 \to 2R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 4 & 6 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \boxed{R_1 \leftrightarrow R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \\ \boxed{R_2 \to -\frac{1}{4}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{4}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Pertanto

$$P^{A,B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Le componenti di $\mathbf{w}_1^T$ nella base B saranno quindi

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} \frac{23}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{27}{4} \end{pmatrix}_B.$$

Analogamente le componenti di $\mathbf{w}_2^T$ in base B sono

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 33 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}_B.$$

Il metodo dell'Esempio 26.9 fornisce il seguente

Metodo per determinare la matrice $P^{A,B}$ di cambiamento di base dalla base A alla base B.

Siano $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ due basi ordinate dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ siano $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$ e $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ le coordinate dei vettori $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$. Poniamo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \quad e \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}.$$

Per determinare $P^{A,B}$ si proceda nel seguente modo:

1. Si scriva la matrice

$$(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} & u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} & u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} & u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{array}\right). \tag{82}$$

2. Con il metodo di riduzione per righe si trasformi la matrice (82) in modo che la sottomatrice $\mathcal{B}$ venga trasformata nella matrice identica I_n. Allora la sottomatrice $\mathcal{A}$ verrà trasformata nella $P^{A,B}$. Schematizzando abbiamo

$$(\mathcal{B}|\mathcal{A})\boxed{\text{riduzione per righe}}\longrightarrow \left(I_n|P^{A,B}\right). \tag{83}$$

Possiamo usare lo stesso metodo, e la stessa matrice $(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ definita in (82), per determinare la matrice $P^{B,A}$ di cambiamento di base dalla base B alla base A. Infatti é immediato verificare che se, mediante il metodo di riduzione per righe, si trasforma la (82) in modo che la sottomatrice $\mathcal{A}$ venga trasformata nella matrice identica I_n allora $\mathcal{B}$ verrà trasformata nella $P^{B,A}$. Schematizzando abbiamo

$$(\mathcal{B}|\mathcal{A})\boxed{\text{riduzione per righe}}\longrightarrow \left(P^{B,A}|I_n\right). \tag{84}$$

Teorema 26.14 *Valgono le seguenti uguaglianze:* $P^{A,B} = \mathcal{B}^{-1}\cdot\mathcal{A}$ *e* $P^{B,A} = \mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{B}$.

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Come visto alla fine del Paragrafo 11, la riduzione (83) equivale alla costruzione di una matrice invertibile H tale che

$$H\cdot(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = (H\cdot\mathcal{B}|H\cdot\mathcal{A}) = \left(I_n|P^{A,B}\right).$$

Essendo $\det\mathcal{B}\neq 0$ (le colonne di $\mathcal{B}$ sono i trasposti dei vettori della base B), si ha $H = \mathcal{B}^{-1}$. Pertanto $P^{A,B} = \mathcal{B}^{-1}\cdot\mathcal{A}$. Analogamente, dalla (84) segue $P^{B,A} = \mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{B}$. ▮

É importante ricordare che le colonne della matrice $P^{A,B}$ rappresentano (nell'ordine) le componenti in base B dei trasposti dei vettori della base ordinata A. Analogamente, le colonne della matrice $P^{B,A}$ rappresentano (nell'ordine) le componenti in base A dei trasposti dei vettori della base ordinata B.

Esempio 26.10 *Si considerino in* $\mathbb{R}^3$ *la basi ordinate* $A = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ *e* $B = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ *essendo* $\mathbf{u}_1 = (2,1,3)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (0,2,1)$, $\mathbf{v}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3,-1)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (2,2,2)$. *Si determinino le matrici di cambiamento di base* $P^{A,B}$ *e* $P^{B,A}$.

SVOLGIMENTO. $P^{A,B}$ é stata determinata nell' Esempio 26.9. Cerchiamo $P^{B,A}$. Si ha

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c}\boxed{R_2\to R_2+R_1}\\ \boxed{R_3\to R_3+R_1}\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3\to 2R_3-R_2}\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 4 & 7 & 0 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}\boxed{R_2\to -7R_2+3R_3}\\ \boxed{R_1\to -7R_1+2R_3}\end{array}\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -20 & -6 & 0 & 7 & 0 \\ -4 & -44 & -16 & 0 & 0 & -14 \\ 1 & -3 & 4 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{R_1 \leftrightarrow R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ -4 & -44 & -16 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & -20 & -6 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_2 \leftrightarrow R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & -20 & -6 & 0 & 7 & 0 \\ -4 & -44 & -16 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{7}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{7}R_2} \\ \boxed{R_3 \to -\frac{1}{14}R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{20}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & -\frac{22}{7} & \frac{8}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Pertanto } P^{B,A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{20}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{22}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

27 Applicazioni lineari

Definizione 27.1 *Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione*

$$f : V \to W$$

si dice lineare se soddisfa le due seguenti condizioni:

1. $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ *per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$ *per ogni* $\mathbf{u} \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$.

È immediato verificare il seguente risultato:

Teorema 27.1 *L'applicazione*

$$f : V \to W$$

é lineare se e solo se $f(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Esempio 27.1 *Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita dalla seguente legge:*

$$f(x,y,z,t) = (2x - 3y + 4z - t, x + 2y + t, 3x - y + z + 4t).$$

Provare che f é lineare.

SVOLGIMENTO. Per il Teorema 27.1 bisogna verificare che $f(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posto $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$, abbiamo $f(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2) = (2(\lambda x_1 + \mu x_2) - 3(\lambda y_1 + \mu y_2) + 4(\lambda z_1 + \mu z_2) - (\lambda t_1 + \mu t_2), \lambda x_1 + \mu x_2 + 2(\lambda 1_1 + \mu y_2) + (\lambda t_1 + \mu t_2), 3(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) + 4(\lambda t_1 + \mu t_2)) = ((2\lambda x_1 - 3\lambda y_1 + 4\lambda z_1 - \lambda t_1) + (2\mu x_2 - 3\mu y_2 + 4\mu z_2 - \mu t_2), (\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + \lambda t_1) + (\mu x_2 + 2\mu y_2 + \mu t_2), (3\lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda z_1 + 4\lambda t_1) + (3\mu x_2 - \mu y_2 + \mu z_2 + 4\mu t_2)) = (2\lambda x_1 - 3\lambda y_1 + 4\lambda z_1 - \lambda t_1, \lambda x_1 + 2\lambda y_1 + \lambda t_1, 3\lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda z_1 + 4\lambda t_1) + (2\mu x_2 - 3\mu y_2 + 4\mu z_2 - \mu t_2, \mu x_2 + 2\mu y_2 + \mu t_2, 3\mu x_2 - \mu y_2 + \mu z_2 + 4\mu t_2) = \lambda(2x_1 - 3y_1 + 4z_1 - t_1, x_1 + 2y_1 + t_1, 3x_1 - y_1 + z_1 + 4t_1) + \mu(2x_2 - 3y_2 + 4z_2 - t_2, x_2 + 2y_2 + t_2, 3x_2 - y_2 + z_2 + 4t_2) = \lambda f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2, t_2) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v})$.

Definizione 27.2 *Un'applicazione lineare* $f : V \to W$ *é detta*

- *isomorfismo se é biunivoca;*
- *endomorfismo se* $V = W$*;*
- *automorfismo se é biunivoca e* $V = W$*.*

Il Teorema 26.12 può essere riformulato nella seguente maniera:

Teorema 27.2 *Sia* V *uno spazio vettoriale su un campo* $\mathbb{K}$ *finitamente generato e sia* $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *Per una base ordinata di* V*. Si definisca l'applicazione*

$$f_B \ : \ V \to \mathbb{K}^n$$

nel seguente modo: per ogni $\mathbf{v} \in V$ *si ha* $f_B(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ *se e solo se* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + \dots + v_n\mathbf{u}_n$ *(cioè* f_B *associa ad ogni vettore* $\mathbf{v} \in V$ *l'n-upla delle sue componenti nella base ordinata* B*). Allora* f_B *é un isomorfismo.*

Teorema 27.3 *Siano* V*,* W *e* U *tre spazi vettoriali finitamente generati sul campo* $\mathbb{K}$*. Siano dati i due isomorfismi*

$$f \ : \ V \to W \quad \text{e} \quad g \ : \ W \to U.$$

Allora

$$g \circ f \ : \ V \to U$$

é un isomorfismo.

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) L'applicazione $g \circ f$ é suriettiva. Infatti per la suriettività di g, comunque preso $\mathbf{u} \in U$ esiste $\mathbf{w} \in W$ tale che $g(\mathbf{w}) = \mathbf{u}$. Per la suriettività di f, esiste $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Quindi $\mathbf{u} = g(\mathbf{w}) = g[f(\mathbf{v})] = g \circ f(\mathbf{v})$.

L'applicazione $g \circ f$ é iniettiva. Infatti siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ con $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$. Per l'iniettività di f si ha $f(\mathbf{v}_1) \neq f(\mathbf{v}_2)$ e, per l'iniettività di g, $g[f(\mathbf{v}_1)] \neq g[f(\mathbf{v}_2)]$ cioè $g \circ f(\mathbf{v}_1) \neq g \circ f(\mathbf{v}_2)$.

L'applicazione $g \circ f$ é lineare. Infatti $g \circ f(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) = g[f(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2)] = g[\lambda f(\mathbf{v}_1) + \mu f(\mathbf{v}_2)] = g[\lambda f(\mathbf{v}_1)] + g[\mu f(\mathbf{v}_2)] = \lambda g[f(\mathbf{v}_1)] + \mu g[f(\mathbf{v}_2)] = \lambda g \circ f(\mathbf{v}_1) + \mu g \circ f(\mathbf{v}_2)$. ∎

Teorema 27.4 *Sia* $f : V \to W$ *un'applicazione lineare. Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se* $\mathbf{o}_V$ *é il vettore nullo di* V*, allora* $f(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$ *ove* $\mathbf{o}_W$ *denota il vettore nullo di* W*.*
2. *Se* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ *e* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *allora* $f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + \lambda_n f(\mathbf{u}_n)$*.*
3. *Se* V' *é un sottospazio vettoriale di* V*, allora* $f(V')$ *é un sottospazio vettoriale di* W*.*
4. *Se* W' *é un sottospazio vettoriale di* W*, allora* $f^{-1}(W')$ *é un sottospazio vettoriale di* V*.*

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** Le proprietà 1 e 2 seguono direttamente dalla definizione di applicazione lineare. Infatti si ha $f(\mathbf{o}_V) = f(0\mathbf{u}) = 0f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}_W$ e $f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = f(\lambda_1\mathbf{u}_1) + f(\lambda_2\mathbf{u}_2) + \ldots + f(\lambda_n\mathbf{u}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{u}_2) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{u}_n)$.

Proviamo la proprietà 3. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in f(V')$ proviamo che $\lambda\mathbf{u}' + \mu\mathbf{v}' \in f(V')$. Se $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in f(V')$, allora esistono $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V'$ tali che $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$ e $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$. Poichè V' é un sottospazio vettoriale di V, si ha $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in V'$ e quindi $\lambda\mathbf{u}' + \mu\mathbf{v}' = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) \in f(V')$.

Proprietà 4. Basta provare che per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in f^{-1}(W')$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si ha $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in f^{-1}(W')$.

Poichè $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \in W'$ e W' é un sottospazio vettoriale di W, si ha $f(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v}) \in W'$. Dunque $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in f^{-1}(W')$ come richiesto. ▮

Definizione 27.3 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Dicesi immagine di f l'insieme $Im\, f = f(V) = \{f(\mathbf{v}) \mid \forall\ \mathbf{v} \in V\}$.*

Definizione 27.4 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Dicesi nucleo di f l'insieme $Ker\, f = f^{-1}(\mathbf{o}_W) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V \text{ e } f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W\}$.*

Dalle proprietà 3 e 4 del Teorema 27.4 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 27.1 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:*

1. *$Im\, f$ é un sottospazio vettoriale di W;*
2. *$Ker\, f$ é un sottospazio vettoriale di V;*
3. *se $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é un insieme di generatori di V, allora*

$$f(A) = \{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$$

é un insieme di generatori di $Im\, f$.

Teorema 27.5 *Siano $f : V \to W$ e $g : V \to W$ due applicazioni lineari fra i due sottospazi V e W entrambi di dimensione finita. Sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ una base ordinata di V, Se $f(\mathbf{u}_i) = g(\mathbf{u}_i)$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ allora le due applicazioni coincidono, cioè $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Per ogni $\mathbf{v} \in V$, posto $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n$, si ha $f(\mathbf{v}) = f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{u}_2) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{u}_n) = \lambda_1 g(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 g(\mathbf{u}_2) + \ldots + \lambda_n g(\mathbf{u}_n) = g(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = g(\mathbf{v})$. ▮

Teorema 27.6 *L'applicazione lineare $f : V \to W$ é iniettiva se e solo se $Ker\, f = \{\mathbf{o}_V\}$.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Necessità. Sia f iniettiva e sia $\mathbf{v} \in Ker\, f$ con $\mathbf{v} \neq 0$. Si ha $f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W$ e, per la linearità di f, $f(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$. Quindi $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{o}_V)$ che contraddice l'potesi che f è iniettiva.

Sufficienza. Sia $Ker\, f = \{\mathbf{o}_V\}$ e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tali che $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$. Allora $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{o}_W$ e, per l'ipotesi $Ker\, f = \{\mathbf{o}_V\}$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{o}_V$. ∎

Teorema 27.7 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra i due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, V e W. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se f é iniettiva allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2) \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti.*

2. *Se $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2) \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Proviamo la 1). Supponiamo che

$$\lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{o}_W.$$

Per la linearità di f,

$$f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{o}_W$$

cioè $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n \in Ker\, f$. Essendo, per ipotesi, f iniettiva si ha, in virtù del Teorema 27.6, $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}_V$. Da cui segue, avendo supposto che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono indipendenti, che $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Proviamo la 2). Dall'uguaglianza $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}_V$, applicando la f otteniamo $\lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{o}_W$ dalla quale si deduce che $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, perchè $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. ∎

Corollario 27.2 *Se $f : V \to W$ é un'applicazione lineare iniettiva e B é una base di V, allora $f(B)$ é una base di $Im\, f$.*

Esempio 27.2 *Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z, t) = (2x - y + z, x + 2z, 4x - 3y - z)$. Determinare base e dimensione di $Ker\, f$ e $Im\, f$.*

SVOLGIMENTO. Per definizione $Ker\, f$ coincide con le soluzioni (x, y, z, t) del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x - y + z + 0t = 0 \\ x + 0y + 2z + 0t = 0 \\ 4x - 3y - z + 0t = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to R_3 - 3R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + 2R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \overline{-1} & 1 & 0 \\ \underline{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $Ker\, f$ é dato dalle soluzioni (x, y, z, t) del sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -z \\ x = -2z \end{cases},$$

cioè $Ker\, f = \{(-2z, -3z, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$. Abbiamo $(-2z, -3z, z, t) = (-2z, -3z, z, 0) + (0, 0, 0, t) = z(-2, -3, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$. Quindi $Ker\, f = Span(\{(-2, -3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$. Poiché

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -2R_2 - 3R_1} \\ \boxed{R_3 \to 2R_3 + R_1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix},$$

una base di $Ker\, f$ é data da $\{(-2, -3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e $dim\, Ker\, f = 2$.

Essendo $Im\, f = \{(2x - y + z, x + 2z, 4x - 3y - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, possiamo scrivere $(2x - y + z, x + 2z, 4x - 3y - z) = (2x, x, 4x) + (-y, 0, -3y) + (z, 2z, -z) = x(2, 1, 4) + y(-1, 0, -3) + z(1, 2, -1)$. Quindi $Im\, f = Span(\{(2, 1, 4), (-1, 0, -3), (1, 2, -1)\})$. Poiché

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to R_3 - 3R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + 2R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \overline{-1} & 1 \\ \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

una base di $Im\, f$ é data da $\{(2, 1, 4), (-1, 0, 3)\}$ e $dim\, Im\, f = 2$.

Teorema 27.8 *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita definiti su un campo $\mathbb{K}$. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$dim\, V = dim\, Ker\, f + dim\, Im\, f.$$

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Supponiamo innanzitutto che $dim\, Ker\, f = 0$, cioè $Ker\, f = \{\mathbf{o}_V\}$. In tal caso, per il Teorema 27.6, f é iniettiva e per il Corollario 27.2, l'immagine mediante la f di una base di V é una base di $Im\, f$. Quindi $dim\, Im\, f = dim\, V$ e si ha la tesi.

Sia $dim\, Ker\, f = \dim\, V$. Allora $Ker\, f = V$ e quindi $Im\, f = \{\mathbf{o}_W\}$ e il teorema é provato.

Sia infine $dim\, Ker\, f = r$, $1 \leq r < dim\, V = n$. Siano $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_r\}$ una base di $Ker\, f$ e $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base di V che estende B (questa base esiste per il Teorema 26.7). Proviamo che $f(B' \setminus B) = \{\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é una base di $Im\, f$. Per ogni $\mathbf{v} \in Im\, f$ esiste un vettore $\mathbf{w} \in V$ tale che $f(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ e quindi $\mathbf{v} = f(\mathbf{w}) = f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{u}_r + \lambda_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{u}_r) + f(\lambda_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = \mathbf{o}_W + \lambda_{r+1}f(\mathbf{u}_{r+1}) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{u}_n) = \lambda_{r+1}f(\mathbf{u}_{r+1}) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{u}_n)$. Cioè $Span(\{f(\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, f(\mathbf{u}_n)\}) = Im\, f$.

Proviamo adesso che $\{f(\mathbf{u}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\}$ é linearmente indipendente. Sia

$$\mu_{r+1}f(\mathbf{u}_{r+1}) + \mu_{r+2}f(\mathbf{u}_{r+2}) + \ldots + \mu_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{o}_w,$$

allora

$$f(\mu_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \mu_{r+2}\mathbf{u}_{r+2} + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n) = \mathbf{o}_w,$$

$$\mu_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \mu_{r+2}\mathbf{u}_{r+2} + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n \in Ker\, f = Span(B),$$

$$\mu_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \mu_{r+2}\mathbf{u}_{r+2} + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n = \nu_1\mathbf{u}_1 + \nu_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \nu_r\mathbf{u}_r,$$

$$\mu_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \mu_{r+2}\mathbf{u}_{r+2} + \ldots + \mu_n\mathbf{u}_n - \nu_1\mathbf{u}_1 - \nu_2\mathbf{u}_2 - \ldots - \nu_r\mathbf{u}_r = \mathbf{o}_V$$

e quindi, essendo B' una base di V,

$$-\nu_1 = -\nu_2 = \ldots = -\nu_r = \mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \ldots = \mu_n = 0,$$

e, in particolare, $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \ldots = \mu_n = 0$. ∎

28 Matrici e Applicazioni Lineari.

Siano V e W due spazi lineari sullo stesso campo $\mathbb{K}$ aventi rispettivamente dimensione n e m e basi $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$. Vale il seguente teorema.

Teorema 28.1 *Un'applicazione lineare $f : V \to W$ si può assegnare, rispetto le basi A e B, nei seguenti tre modi equivalenti:*

(1) *mediante la legge*
$$f(\mathbf{v}) = f((x_1, x_2, \ldots, x_n)_A) = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n, \ldots \\ \ldots, a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n)_B;$$

(2) *mediante la matrice*
$$M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

(detta la matrice associata all'applicazione lineare f rispetto le basi A e B) ponendo

$$(f(\mathbf{v}))^T = (f((x_1, x_2, \dots, x_n)_A))^T = \left(M_f^{A,B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}_A \right)_B ;$$

(3) *mediante le immagini dei vettori della base A espresse in base B:*

$f(\mathbf{v}_1) = f((1, 0, 0, \dots, 0, 0)_A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})_B,$
$f(\mathbf{v}_2) = f((0, 1, 0, \dots, 0, 0)_A) = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m})_B,$
....
$f(\mathbf{v}_n) = f((0, 0, 0, \dots, 0, 1)_A) = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})_B,$

ponendo $f(\mathbf{v}) = f((x_1, x_2, \dots, x_n)_A) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{v}_n).$

Dimostrazione. **(Dimostrazione obbligatoria)** L'equivalenza fra (1) e (2) segue immediatamente dal prodotto fra matrici.

Se la legge di f é quella in (1), allora i valori di $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$, ..., $f(\mathbf{v}_n)$ coincidono con quelli dati in (3). Proviamo ora il viceversa: sia f assegnata mediante le (3), allora la sua legge é quella espressa dalla (1). Infatti si ha
$f(\mathbf{v}) = f((x_1, x_2, \dots, x_n)_A) = f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{v}_n) = x_1 f((1, 0, 0, \dots, 0, 0)_A) + x_2 f((0, 1, 0, \dots, 0, 0)_A) + \dots + x_n f((0, 0, 0, \dots, 0, 1)_A) = x_1 (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})_B + x_2 (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m})_B + \dots + x_n (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})_B =$
$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n, \dots, a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n)_B.$

Le precedenti uguaglianze provano anche che se f é assegnata mediante le (3), allora la sua matrice associata coincide con quella data in (2).

Sia infine f assegnata mediante la sua matrice associata $M_f^{A,B}$ data in (2). Allora

$$(f(\mathbf{v}_1))^T = (f((1, 0, \dots, 0)_A))^T = \left(M_f^{A,B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}_A \right)_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1m} \end{pmatrix}_B ,$$

$$(f(\mathbf{v}_2))^T = (f((0, 1, \dots, 0)_A))^T = \left(M_f^{A,B} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}_A \right)_B = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2m} \end{pmatrix}_B ,$$

....

$$(f(\mathbf{v}_n))^T = (f((0,0,\dots,1)_A))^T = \left(M_f^{A,B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}_A \right)_B = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nm} \end{pmatrix}_B .$$

∎

Ricordando quanto detto alle pagine 137 e 146 e negli Esempi 26.5 e 26.6, si ha

Corollario 28.1 *$Im\, f = Span\left\{(f(\mathbf{v}_1))^T, f(\mathbf{v}_2))^T, \dots, f(\mathbf{v}_n))^T\right\}$, pertanto*

$$dim\, Im\, f = rango\, M_f^{A,B}.$$

Esempio 28.1 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla legge

$$f(\mathbf{v}) = f((x,y,z)_A) = (x-y, x-z, y-z, x+y+z)_B$$

essendo $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ rispettivamente le basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Si ha

$(x,y,z)_A = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$, e

$(x-y, x-z, y-z, x+y+z)_B = (x-y)\mathbf{w}_1 + (x-z)\mathbf{w}_2 + (y-z)\mathbf{w}_3 + (x+y+z)\mathbf{w}_4 = x(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_4) + y(-\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_4) + z(-\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_4) = x(1,1,0,1)_B + y(-1,0,1,1)_B + z(0,-1,-1,1)_B$.

Per la linearità di f, $f((x,y,z)_A) = f(x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3) = xf(\mathbf{v}_1)+yf(\mathbf{v}_2)+zf(\mathbf{v}_3)$. Pertanto $f(\mathbf{v}_1) = (1,1,0,1)_B, f(\mathbf{v}_2) = (-1,0,1,1)_B$ *e* $f(\mathbf{v}_3) = (0,-1,-1,1)_B$.

Viceversa, posto $f(\mathbf{v}_1) = (1,1,0,1)_B$, $f(\mathbf{v}_2) = (-1,0,1,1)_B$ e $f(\mathbf{v}_3) = (0,-1,-1,1)_B$, abbiamo $f((x,y,z)_A) = f(x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3) = xf(\mathbf{v}_1) + yf(\mathbf{v}_2) + zf(\mathbf{v}_3) = x(1,1,0,1)_B + y(-1,0,1,1)_B + z(0,-1,-1,1)_B = (x-y, x-z, y-z, x+y+z)_B$.

Si osservi infine che

$$M_f^{A,B} = \left((f(\mathbf{v}_1))^T \mid (f(\mathbf{v}_2))^T \mid (f(\mathbf{v}_3))^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione della seguente proposizione viene lasciata al lettore come facile esercizio.

Proposizione 28.1 *Siano V, W e U tre spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ aventi rispettivamente dimensioni n, m e p e basi A, B e C.*

- *Se f e φ sono due applicazioni lineari da V in W, con matrici associate $M_f^{A,B}$ e $M_\varphi^{A,B}$, allora all'applicazione lineare $f+\varphi$ resta associata la matrice $M_f^{A,B}+M_\varphi^{A,B}$.*

- *Sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Se f é un'applicazione lineare da V in W, con matrice associata $M_f^{A,B}$, allora all'applicazione lineare λf resta associata la matrice $\lambda M_f^{A,B}$.*

- *Se f é un isomorfismo fra V e W (quindi $m=n$), con matrice associata $M_f^{A,B}$, allora all'applicazione lineare λf^{-1} resta associata la matrice $\lambda\left(M_f^{A,B}\right)^{-1}$.*

- *Se $f: V \to W$ e $\varphi: W \to U$ sono due applicazioni lineari, aventi rispettivamente matrici associate $M_f^{A,B}$ e $M_\varphi^{B,C}$, allora all'applicazione lineare $\varphi \circ f$ resta associata la matrice $M_\varphi^{B,C} M_f^{A,B}$.*

Esempio 28.2 Si considerino le basi $A = (\mathbf{v}_1 = (1,2,2), \mathbf{v}_2 = (1,1,0), \mathbf{v}_3 = (1,0,1))$ e $B = (\mathbf{w}_1 = (1,1), \mathbf{w}_2 = (1,0))$ di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, rispettivamente. Assegnamo, in tutti e tre i modi, un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

1. Come equazione $f((x,y,z)_A) = (x-y, z-x)_B$.

2. Come matrice
$$M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Assegnando i valori, nella base B, assunti dalla f nei vettori della base A:
$$f(1,2,2) = f((1,0,0)_A) = (1,-1)_B,$$
$$f(1,1,0) = f((0,1,0)_A) = (-1,0)_B,$$
$$f(1,0,1) = f((0,0,1)_A) = (0,1)_B.$$

Esempio 28.3 *Siano $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, A e B definite come nell'Esempio 28.2. Determinare $M_f^{E_3,E_2}$ e l'equazione di f rispetto le basi canoniche.*

SVOLGIMENTO. Occorre determinare, nella base E_2, i valori di $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$ e porre $M_f^{E_3,E_2} = ((f(\mathbf{e}_1))^T \mid (f(\mathbf{e}_2))^T \mid (f(\mathbf{e}_1))^T)$.

Passo primo. Si determinano i vettori $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ nella base A. Procedendo come nel paragrafo 26,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -3R_2 + 2R_3} \\ \boxed{R_1 \to -3R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to R_1 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \leftrightarrow R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \\ \hline R_2 \longrightarrow -\frac{1}{3}R_2 \\ \hline R_3 \longrightarrow -\frac{1}{3}R_3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Quindi

$$\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)_A = -\frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)_A = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{e}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)_A = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_3.$$

Passo secondo. Essendo $f\left((x,y,z)_A\right) = (x-y, z-x)_B$, si ha

$$f(\mathbf{e}_1) = f\left(\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right)_A\right) = M_f^{A,B} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}_A = (-1,1)_B,$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)_A\right) = M_f^{A,B} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}_A = (0,-1)_B,$$

$$f(\mathbf{e}_3) = f\left(\left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)_A\right) = M_f^{A,B} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}_A = (1,0)_B.$$

Passo terzo. Si determinano $(-1,1)_B$, $(0,-1)_B$ e $(1,0)_B$ nella base E_2. Bisogna quindi cercare la matrice di cambiamento di base P^{B,E_2}. Per quanto detto nel paragrafo 26, si deve ridurre la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{85}$$

in modo che la matrice di ordine 2 prima della | coincida con I_2. In tal caso la (85) soddisfa questo requisito. Quindi

$$P^{B,E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed essendo

$$P^{B,E_2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_{E_2},\ P^{B,E_2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_{E_2},\ P^{B,E_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{E_2},$$

abbiamo $(-1,1)_B=(0,-1)_{E_2}$, $(0,-1)_B=(-1,0)_{E_2}$, $(1,0)_B=(1,1)_{E_2}$.

Si osservi che avremmo potuto determinare $(-1,1)_B$, $(0,-1)_B$ e $(1,0)_B$ nella base E_2 più semplicemente procedendo nel seguente modo:

$(-1,1)_B=-\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=-(1,1)+(1,0)=(0,-1)=(0,-1)_{E_2}$,

$(0,-1)_B=0\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2=0(1,1)-(1,0)=(-1,0)=(-1,0)_{E_2}$,

$(1,0)_B=\mathbf{w}_1+0\mathbf{w}_2=(1,1)+0(1,0)=(1,1)=(1,1)_{E_2}$.

Abbiamo quindi

$$M_f^{E_3,E_2}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

e l'equazione della f é

$$f\left((x,y,z)_{E_3}\right)=M_f^{E_3,E_4}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{E_3}=(-y+z,-x+z)_{E_2}.$$

Nel caso specifico (stiamo cercando la matrice di f relativa alle basi canoniche), proponiamo un altro modo per determinare $M_f^{E_3,E_2}$ che ci consente di evitare l'esplicita determinazione dei vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ nella base A. Infatti possiamo scrivere

$f\left((1,2,2)_{E_3}\right)=f\left((1,0,0)_A\right)=(1,-1)_B=(1,1)_{E_2}-(1,0)_{E_2}=(0,1)_{E_2}$;

$f\left((1,1,0)_{E_3}\right)=f\left((0,1,0)_A\right)=(-1,0)_B=-(1,1)_{E_2}=(-1,-1)_{E_2}$;

$f\left((1,0,1)_{E_3}\right)=f\left((0,0,1)_A\right)=(0,1)_B=(1,0)_{E_2}$.

Ed essendo
$f\left((1,2,2)_{E_3}\right)=f(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3)$, $f\left((1,1,0)_{E_3}\right)=f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, $f\left((1,0,1)_{E_3}\right)=f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)$,

$$\begin{cases}f(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3)=(0,1)_{E_2}\\f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=(-1,-1)_{E_2}\\f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)=(1,0)_{E_2}\end{cases},$$

$$\begin{cases}f(\mathbf{e}_1)+2f(\mathbf{e}_2+2f(\mathbf{e}_3)=(0,1)_{E_2}\\f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2)=(-1,-1)_{E_2}\\f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_3)=(1,0)_{E_2}\end{cases}.$$

Risolviamo il sistema precedente (nelle incognite $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ e $f(\mathbf{e}_3)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & (0,1) \\ 1 & 1 & 0 & (-1,-1) \\ 1 & 0 & 1 & (1,0) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & (0,1) \\ 1 & 1 & 0 & (-1,-1) \\ -1 & 2 & 0 & (-2,1) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & (0,1) \\ 1 & 1 & 0 & (-1,-1) \\ 0 & 3 & 0 & (-3,0) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & (6,3) \\ -3 & 0 & 0 & (0,3) \\ 0 & 3 & 0 & (-3,0) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & (6,6) \\ -3 & 0 & 0 & (0,3) \\ 0 & 3 & 0 & (-3,0) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & (0,3) \\ 0 & 3 & 0 & (3,0) \\ 0 & 0 & 6 & (6,6) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (0,-1) \\ 0 & 1 & 0 & (-1,0) \\ 0 & 0 & 1 & (1,1) \end{array}\right).$$

Quindi $f(\mathbf{e}_1) = (0,-1)$, $f(\mathbf{e}_2) = (-1,0)$, $f(\mathbf{e}_3) = (1,1)$ e

$$M_f^{E_3,E_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 28.4 *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalla matrice*

$$M_f^{E_3,E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Studiare f.*
2. *Verificare che*

   $$A = ((1,2,1),(1,2,0),(0,1,1)) \quad \text{e} \quad B = ((1,1,2,2),(3,1,3,1),(1,1,0,0),(2,0,1,1))$$

   sono due basi rispettivamente in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^4$.
3. *Determinare $M_f^{A,B}$.*
4. *Determinare la legge di f rispetto le basi A e B.*

SVOLGIMENTO. **Punto 1**. Per determinare le dimensioni di $Ker\, f$ e di $Im\, f$ occorre trovare il rango di $M_f^{E_3,E_4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$M_f^{E_3,E_4}$ ha rango 3, quindi $dim\, Im\, f = 3$ e $dim\, Ker\, f = 3 - 3 = 0$. Ne segue $Ker\, f = \{(0,0,0)_{E_3}\}$ e $C = ((1,1,1,-1)_{E_4}, (1,-1,1,0)_{E_4}, (2,-1,0,1)_{E_4})$ é una base di $Im\, f$. Per trovare l'equazione di $Im\, f$, consideriamo il generico vettore $(x,y,z,t)_{E_4} \in Im\, f$. Esso deve essere combinazione lineare dei vettori della base C. Pertanto la seguente matrice deve avere rango 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & t \end{array}\right). \tag{86}$$

Per il metodo di riduzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & z-x \\ -1 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & 3 & 2t+2y+2x \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & 4t+x+4y+3z \end{array}\right),$$

Dovendo essere 3 il rango della (86), dobbiamo porre

$$4t + x + 4y + 3z = 0$$

che é l'equazione di $Im\, f$.

Punto 2. Si verifica facilmente che le seguenti matrici hanno rango 3 e 4, rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto A e B sono due basi.

Punto 3. Calcoliamo ora $M_f^{A,B}$. Si ha:

$f\left((1,0,0)_A\right) = f\left((1,2,1)_{E_3}\right) = (5,-2,3,0)_{E_4}$,

$f\left((0,1,0)_A\right) = f\left((1,2,0)_{E_3}\right) = (3,-1,3,-1)_{E_4}$,

$f\left((0,0,1)_A\right) = f\left((0,1,1)_{E_3}\right) = (3,-2,1,1)_{E_4}$.

Adesso bisogna esprimere in base B i vettori $(5,-2,3,0)_{E_4}$, $(3,-1,3,-1)_{E_4}$ e $(3,-2,1,1)_{E_4}$. Cerchiamo la matrice di cambiamento di base $P^{E_4,B}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -12 & -4 & -8 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -4 & -8 & -5 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Pertanto

$$P^{E_4,B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$P^{E_4,B} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{E_4} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 2 \end{pmatrix}_B, \; P^{E_4,B} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{E_4} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_B \text{ e}$$

$$P^{E_4,B} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{E_4} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}_B,$$

abbiamo

$$f\left((1,0,0)_A\right) = (5,-2,3,0)_{E_4} = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, 2\right)_B,$$

$$f\left((0,1,0)_A\right) = (3,-1,3,-1)_{E_4} = \left(-\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}, 0\right)_B,$$

$$f\left((0,0,1)_A\right) = (3,-2,1,1)_{E_4} = \left(-\frac{3}{4}, 0, -\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)_B \quad \text{e quindi}$$

$$M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 2 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Punto 4. L'equazione di f rispetto le basi A e B é

$$f\left((x, y, z)_A\right) = M_f^{A,B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_A = \left(-\frac{7}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}z, \frac{3}{2}x + 2y, -\frac{7}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{4}z, 2x + \frac{5}{2}z\right)_B.$$

Esempio 28.5 *Siano* $A = (\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (2, 2))$, $C = (\mathbf{u}_1 = (3, 3), \mathbf{u}_2 = (1, 0))$,
$B = (\mathbf{w}_1 = (1, 2, 3, 3), \mathbf{w}_2 = (2, 2, 0, 0), \mathbf{w}_3 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{w}_4 = (1, 1, 1, 1))$,
$D = (\mathbf{z}_1 = (-1, -1, 1, 1), \mathbf{z}_2 = (0, 1, 1, 1), \mathbf{z}_3 = (0, 0, 1, 1), \mathbf{z}_4 = (0, 0, 0, 1))$.

1. *Verificare che A e C sono due basi in $\mathbb{R}^2$ e che B e D sono due basi in $\mathbb{R}^3$.*

2. *Assegnata l'applicazione f avente matrice associata*

$$M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

determinare $M_f^{C,D}$.

SVOLGIMENTO. Il quesito 1 si verifica facilmente. Risolviamo il quesito 2. Determiniamo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ nella base A (in altre parole determineremo la matrice $P^{C,A}$):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Abbiamo quindi $P^{C,A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, cioè

$$\mathbf{u}_1 = \left(0, \frac{3}{2}\right)_A, \qquad \mathbf{u}_2 = (-1, 1)_A.$$

Poichè $f\left((x, y)_A\right) = M_f^{A,B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_A = (-x + y, x + 3y, 2x - y, x + 2y)_B$, si ha

$f(\mathbf{u}_1) = f\left((0, \frac{3}{2})_A\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)_B,$

$f(\mathbf{u}_2) = f\left((-1, 1)_A\right) = (2, 2, -3, 1)_B.$

Ora, determiniamo $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)_B$ e $(2, 2, -3, 1)_B$ in base D. A tale scopo cerchiamo la matrice di cambiamento di base $P^{B,D}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Pertanto

$$P^{B,D} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)_B = \left(-12, 3, 15, \frac{3}{2}\right)_D, \quad (2, 2, -3, 1)_B = (-2, 7, -1, 3)_D$$

e

$$M_f^{C,D} = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ 3 & 7 \\ 15 & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Nell'Esempio 28.5 abbiamo determinato $M_f^{C,D}$, supposta nota la $M_f^{A,B}$. Il metodo mostrato in questo esempio é, ovviamente, del tutto generale. Possiamo formulare meglio il metodo usato in modo da mettere in evidenza il legame intercorrente fra le matrici di cambiamento di base e le matrici associate all'applicazione lineare f.

Teorema 28.2 (Metodo per determinare la matrice associata $M_f^{C,D}$ qualora si supponga nota la $M_f^{A,B}$.)

Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n ed m, rispettivamente. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Se A e C sono due basi di V e B e D sono due basi di W, si ha

$$M_f^{C,D} = P^{B,D} M_f^{A,B} P^{C,A}. \tag{87}$$

e

$$M_f^{A,B} = P^{D,B} M_f^{C,D} P^{A,C}. \tag{88}$$

Dimostrazione. Si vuole determinare la matrice associata $M_f^{C,D}$ qualora si supponga nota la $M_f^{A,B}$ e viceversa. Siano $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{v} \in W$ tali che

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}. \tag{89}$$

Posto

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)_A = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)_C \quad \text{e}$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)_B = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)_D,$$

possiamo scrivere la (89) nei due seguenti modi (a seconda che si consideri la matrice associata alla f espressa rispetto le basi A, B oppure C, D):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}_B = M_f^{A,B} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix}_A \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}_D = M_f^{C,D} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u'_m \end{pmatrix}_C . \tag{90}$$

Ricordando che $P^{C,A}$ é la matrice di cambiamento dalla base C alla base A in V e $P^{B,D}$ é la matrice di cambiamento da B a D in W, si ha

$$P^{C,A} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u'_m \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix}_A \quad \text{e} \quad P^{B,D} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}_D .$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}_D = P^{B,D} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}_B = P^{B,D} M_f^{A,B} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix}_A = P^{B,D} M_f^{A,B} P^{C,A} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u'_m \end{pmatrix}_C$$

da cui

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}_D = P^{B,D} M_f^{A,B} P^{C,A} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u'_m \end{pmatrix}_C \tag{91}$$

Confrontando la (91) con la seconda delle (90) si ottiene la (87). Dalla (87) si ricava,

$$M_f^{A,B} = \left(P^{B,D}\right)^{-1} M_f^{C,D} \left(P^{C,A}\right)^{-1} = P^{D,B} M_f^{C,D} P^{A,C}$$

e quindi 88 resta provata. ∎

Nell'Esempio 28.5 abbiamo già determinato le seguenti matrici

$$M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{C,A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } P^{B,D} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la (87) si ha

$$M_f^{C,D} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ 3 & 7 \\ 15 & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Si consideri adesso l'endomorfismo

$$f \ : \ V \to V.$$

Per quanto detto sopra (ove si suppone $W = V$, $B = A$ e $D = C$) si hanno le uguaglianze

$$M_f^{C,C} = P^{A,C} M_f^{A,A} P^{C,A} \ \text{ e } \ M_f^{A,A} = P^{C,A} M_f^{C,C} P^{A,C}$$

che possiamo scrivere

$$M_f^{C,C} = (P^{C,A})^{-1} M_f^{A,A} P^{C,A} \ \text{ e } \ M_f^{A,A} = (P^{A,C})^{-1} M_f^{C,C} P^{A,C}. \tag{92}$$

Pertanto $M_f^{A,A}$ si ottiene dalla $M_f^{C,C}$ attraverso il prodotto $H^{-1} M_f^{C,C} H$ essendo, nel nostro caso, $H = P^{A,C}$. Analogamente $M_f^{C,C}$ si ottiene dalla $M_f^{A,A}$ attraverso il prodotto $H^{-1} M_f^{C,C} H$ ove si ponga $H = P^{C,A} = \left(P^{A,C}\right)^{-1}$. Possiamo generalizzare quanto detto nel seguente modo.

Definizione 28.1 *Due matrici $A, B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $H \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ di ordine n tale che $B = H^{-1} A H$.*

Proposizione 28.2 *Per ogni $A, B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ si consideri la seguente relazione $\mathcal{S}$: $A \,\mathcal{S}\, B$ se e solo se A e B sono simili. $\mathcal{S}$ é una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Proprietà riflessiva: per ogni $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ é $A \,\mathcal{S}\, A$. Infatti $A = I_n^{-1} A I_n$.

Proprietà simmetrica: se $A \,\mathcal{S}\, B$ allora $B \,\mathcal{S}\, A$. Infatti se $A \,\mathcal{S}\, B$ esiste $H \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ tale che $A = H^{-1}BH$ da cui $HA = BH$, $HAH^{-1} = B$, $\left(H^{-1}\right)^{-1} AH^{-1} = B$ cioè $B \,\mathcal{S}\, A$.

Proprietà transitiva: se $A \,\mathcal{S}\, B$ e $B \,\mathcal{S}\, C$ allora $A \,\mathcal{S}\, C$. Poichè $A \,\mathcal{S}\, B$ esiste una matrice invertibile H_1 tale che $A = H_1^{-1}BH_1$; poichè $B \,\mathcal{S}\, C$ esiste una matrice invertibile H_2 tale che $B = H_2^{-1}CH_2$. Sostituendo nell'uguaglianza precedente avremo $A = H_1^{-1}H_2^{-1}CH_2H_1$. Ponendo $H = H_2H_1$ e ricordando che $H^{-1} = H_1^{-1}H_2^{-1}$ si ottiene $A \,\mathcal{S}\, C$. ▮

Vale il seguente teorema.

Teorema 28.3 *Due matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ sono simili se e solo se sono associate ad uno stesso endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ rispetto a basi opportune.*

Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ nasce quindi il problema di decidere se esse sono simili oppure no. In generale questo é un problema difficile.

29 Autovalori ed autovettori

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Ovviamente $Ker\, f$ e $Im\, f$ sono entrambi sottospazi dello stesso spazio V e, più in generale, ogni vettore o sottospazio del dominio V di f si trova anche nel suo codominio (che é ancora V). Pertanto possono esistere sottospazi W di V tali che $f(W) = W$ oppure $f(W) \subseteq W$. Possono anche esistere vettori $\mathbf{v} \in V$ tali che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ o, più in generale, $f(\mathbf{v}) \in Span(\{\mathbf{v}\})$.

Definizione 29.1 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore per f se esiste un vettore $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.*

Definizione 29.2 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Un vettore $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, si dice autovettore per f se esiste un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. In tal caso diremo che $\mathbf{v}$ é un autovettore associato all'autovalore λ.*

Si noti che il vettore nullo $\mathbf{o}$ pur soddisfacendo l'equazione $f(\mathbf{o}) = \lambda\mathbf{o}$ qualunque sia $\lambda \in \mathbb{K}$ non é un autovettore.

Esempio 29.1 *Sia $\mathcal{A} = (\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 1))$ una base di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo assegnato mediante $f(\mathbf{u}_1) = (1, 1)$, $f(\mathbf{u}_2) = (2, 2)$. Cercare gli autovalori e gli autovettori per f.*

SVOLGIMENTO. In base alla definizione di autovalore bisogna cercare i $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste un $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq (0, 0)$, tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Essendo f assegnato mediante le immagini della base A cominciamo con esprimere $\mathbf{v}$ in base A: $\mathbf{v} = (a, b) = \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1) = (\alpha + \beta, \beta)$, da cui $\alpha = a - b$ e $\beta = b$. Quindi $\mathbf{v} = (a - b)\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ e $f(\mathbf{v}) = f((a - b)\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) = (a - b)f(\mathbf{u}_1) + bf(\mathbf{u}_2) = (a - b)(1, 1) + b(2, 2) = (a + b, a + b)$. Pertanto l'equazione $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ diventa $(a + b, a + b) = \lambda(a, b)$, da cui

$$\begin{cases} a + b = \lambda a \\ a + b = \lambda b \end{cases}, \qquad \begin{cases} (1 - \lambda)a + b = 0 \\ a + (1 - \lambda)b = 0 \end{cases}.$$

Per essere λ un autovalore, il precedente sistema deve avere soluzioni (a, b) diverse dalla banale. Quindi deve essere

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

le cui soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ danno gli autovalori cercati.

All'autovalore $\lambda = 0$ corrispondono gli autovettori $(a, -a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Infatti essi sono le soluzioni diverse dalla banale del sistema

$$\begin{cases} (1 - \lambda)a + b = 0 \\ a + (1 - \lambda)b = 0 \end{cases}$$

per $\lambda = 0$. Analogamente gli autovettori corrispondenti a $\lambda = 2$ sono dati da (a, a) per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Esempio 29.2 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo definito, rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^2$, dalla legge $f(x, y) = (x + 2y, -x - y)$. Verificare che f non ammette autovettori.*

SVOLGIMENTO. Se $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fosse un autovettore per f, allora $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ed esisterebbe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$ ovvero $(\alpha + 2\beta, -\alpha - \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$. Quindi il sistema

$$\begin{cases} (1 - \lambda)\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha - (1 + \lambda)\beta = 0 \end{cases} \tag{93}$$

dovrebbe ammettere soluzioni diverse dalla banale. Il che implica

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -11 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi $\lambda^2 + 1 = 0$ per qualche $\lambda \neq 0$. Impossibile.

Osservazione. La stessa legge f, applicata allo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ sul campo $\mathbb{C}$, risulta un endomorfismo su $\mathbb{C}^2$ che ha autovalori.

Teorema 29.1 *Sia $f : V \to V$ un isomorfismo. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ é un autovalore per f se e solo se λ^{-1} é un autovalore per f^{-1}.*

Teorema 29.2 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora l'applicazione*

$$f_\lambda = f - \lambda i_V \ : \ V \to V$$

definita da $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v}$ é un endomorfismo.

Teorema 29.3 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ é un autovalore per f se e solo se l'endomorfismo f_λ non é iniettivo.*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Necessità. Supponiamo che λ sia un autovalore per f. Allora esiste $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$; ovvero $f(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{o}$. Quindi $\mathbf{v} \in Ker\, f_\lambda$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Per il Teorema 27.6, f_λ non é iniettivo.

Sufficienza. Supponiamo che f_λ non sia iniettivo. Allora $Ker\, f_\lambda \neq \{\mathbf{o}\}$. Quindi esiste almeno un $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{v} \in Ker\, f_\lambda$. Ovvero $f_\lambda(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, $f(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{o}$, $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ il che prova che λ é un autovalore per f. ∎

Definizione 29.3 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore per f. Dicesi autospazio associato all'autovalore λ, e si denota con V_λ, l'insieme dei vettori $\mathbf{v} \in V$ tali che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Cioè*

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}.$$

Notiamo che V_λ é costituito dal vettore nullo $\mathbf{o}$ e da tutti gli autovettori associati a λ. Inoltre V_λ é un sottospazio di V poiché $V_\lambda = Ker\, f_\lambda$. Osserviamo infine che se $\lambda = 0$ é un autovalore per f si ha $V_0 = Ker\, f$ in quanto $f_0 = f$.

Teorema 29.4 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ r suoi autovalori distinti. Per $i = 1, 2, \ldots, r$ sia $\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i}$. Allora gli autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ sono linearmente indipendenti.*

Teorema 29.5 *Siano $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_r}$ autospazi distinti di un endomorfismo $f : V \to V$. Allora $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_r}$ é diretta.*

Teorema 29.6 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Allora ogni endomorfismo di V ammette al più n autovalori.*

Definizione 29.4 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita n e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore per f. Dicesi molteplicità geometrica di λ, e si denota con g_λ, la dimensione dell'autospazio V_λ associato a λ; cioè $g_\lambda = dim\, V_\lambda$.*

Teorema 29.7 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f : V \to V$ un endomorfismo i cui autovalori distinti sono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori distinti é al più n. Cioè $g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} + \ldots + g_{\lambda_r} \leq n$.*

30 Ricerca degli autovalori e degli autospazi ad essi associati

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Fissata una base A per V resterà associata la matrice $M_f^{A,A}$. Consideriamo l'endomorfismo $f_\lambda = f - \lambda i_V$, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Ricordando la Proposizione 28.1, la matrice ad esso associata rispetto alla stessa base A sarà $M_{f_\lambda}^{A,A} = M_{f-\lambda i_V}^{A,A} = M_f^{A,A} + M_{-\lambda i_V}^{A,A} = M_f^{A,A} - \lambda M_{i_V}^{A,A} = M_f^{A,A} - \lambda I_n$. Abbiamo quindi il seguente teorema.

Teorema 30.1 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n e sia A una base di V. Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ é un autovalore per f se e solo se*

$$|M_f^{A,A} - \lambda I_n| = 0.$$

Definizione 30.1 *Sia M una matrice quadrata di ordine n su $\mathbb{K}$. Si chiama polinomio caratteristico di M, e si denota con $\Psi_M(x)$, il determinante della matrice $M - xI_n$, cioè*

$$\Psi_M(x) = |M - xI_n|.$$

Nel caso in cui $M = M_f^{A,A}$ (cioè M é la matrice associata ad un endomorfismo f rispetto ad una stessa base A) $\Psi_{M_f^{A,A}}(x)$ si chiama il polinomio caratteristico di f e si indica con $\Psi_f(x)$.

La definizione di $\Psi_f(x)$ sembra essere mal posta, in quanto sembra che $\Psi_f(x)$ dipenda non solo dall'endomorfismo f ma anche dalla base A fissata. Vale però il seguente teorema.

Teorema 30.2 *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n e siano A e B due basi di V. Posto $D = M_f^{A,A}$ e $C = M_f^{B,B}$ si ha che D e C hanno lo stesso polinomio caratteristico, cioè $\Psi_D(x) = \Psi_C(x)$.*

Esempio 30.1 *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ sul campo $\mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo individuato dalle assegnazioni*

$$f(\mathbf{v}_1) = (2,3,3), f(\mathbf{v}_2) = (2,-1,0), f(\mathbf{v}_3) = (0,2,1)$$

dove $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$ formano una base A di $\mathbb{R}^3$. Verificare che $\Psi_{M_f^{E_3,E_3}}(x) = \Psi_{M_f^{A,A}}(x) = \Psi_f(x)$ e determinare inoltre gli autovalori per f.

SVOLGIMENTO. Per le assegnazioni date si ha

$$M_f^{A,E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare $\Psi_{M_f^{E_3,E_3}}(x)$ é necessario calcolare la matrice $M_f^{E_3,E_3}$. Per la (87) (vedasi Teorema 28.2) abbiamo

$$M_f^{E_3,E_3} = P^{E_3,E_3} M_f^{A,E_3} P^{E_3,A}. \tag{94}$$

Essendo $P^{E_3,E_3} = I_3$, é sufficiente calcolare $P^{E_3,A}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Quindi

$$P^{E_3,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e, per la (94),

$$M_f^{E_3,E_3} = I_3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\Psi_{M_f^{E_3,E_3}}(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 2 \\ 2 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2-2x+2).$$

Determiniamo ora $\Psi_{M_f^{A,A}}(x)$. In tal caso dobbiamo calcolare $M_f^{A,A}$. Per la (87) (vedasi Teorema 28.2) abbiamo

$$M_f^{A,A} = P^{E_3,A} M_f^{A,E_3} P^{A,A}$$

e quindi

$$M_f^{A,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\Psi_{M_f^{A,A}}(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 3 & -1 \\ 0 & -1-x & 1 \\ 1 & -4 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2-2x+2)$$

e, secondo le previsioni del Teorema 30.2,

$$\Psi_{M_f^{E_3,E_3}}(x) = \Psi_{M_f^{A,A}}(x) = \Psi_f(x) = (2-x)(x^2-2x+2)$$

é il polinomio caratteristico cercato.

Ricordando il Teorema 30.1, gli autovalori per f sono le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione $\Psi_f(x) = (2-x)(x^2-2x+2) = 0$ la cui unica soluzione é $x = 2$.

La ricerca degli autospazi associati agli autovalori per l'endomorfismo $f : V \to V$ (si ricordi che V é uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$) si fa tenendo presente che, se $\lambda \in \mathbb{K}$ é un autovalore, allora é $V_\lambda = Ker(f_\lambda)$. Per cui V_λ va calcolato con gli usuali metodi per la ricerca del nucleo di una applicazione lineare, applicati all'endomorfismo f_λ. Quindi le componenti rispetto alla base A di V dei vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_A \in V_\lambda$ sono date dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(M_f^{A,A} - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (95)$$

per cui, in particolare,

$$dim\, V_\lambda = n - r(M_f^{A,A} - \lambda I_n),$$

ove $r(M_f^{A,A} - \lambda I_n)$ denota il rango della matrice $M_f^{A,A} - \lambda I_n$ (vedasi Definizione 15.5).

Esempio 30.2 *Sia f l'endomorfismo definito nell'Esempio 30.1. Determinare, nella base A, i vettori dell'autospazio V_2 associato all'unico autovalore per f.*

SVOLGIMENTO. In virtù della (95), é sufficiente risolvere il sistema

$$(M_f^{A,A} - 2I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$V_2 = \{(x_2, x_2, 3x_2)_A \mid \forall x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Essendo $r(M_f^{A,A} - 2I_3) = 2$,

$$dim\, V_2 = 3 - r(M_f^{A,A} - 2I_3) = 1.$$

Una base di V_2 é data dal vettore $(1, 1, 3)_A$.

31 Un'applicazione degli autovettori: il motore di ricerca Google

Il presente paragrafo é la (libera) traduzione italiana dell'articolo Searching the web with eigenvectors *di Herbert S. Wilf, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104-6395 (April 13, 2001).*

Come potremmo misurare l'importanza di un sito web? Un sito é importante se altri importanti siti web si connettono ad esso (questa definizione potrebbe apparire un circolo vizioso ma, per il momento, non preoccupiamocene). Supponiamo che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esprimano, rispettivamente, la misura dell'importanza dei siti $1, 2, \ldots, n$. Cioè

$$x_i = \textit{importanza} \text{ del sito } i.$$

Vogliamo che *l'importanza di ogni sito web sia proporzionale alla somma delle importanze di tutti gli altri siti che si connettono ad esso.* Si ottiene un sistema di n equazioni in n incognite che potrebbe assomigliare, per esempio, al seguente:

$$\begin{cases} x_1 = k(x_{14} + x_{97} + x_{541}) \\ x_2 = k(x_{14} + x_{1003} + x_{3224} + x_{10029}) \\ \ldots = \ldots \\ x_n = k(x_1 + x_{23} + x_{10098} + x_{10099}) \end{cases}. \tag{96}$$

Il significato del precedente sistema é immediato: la prima equazione ci dice che i siti 14, 97 e 541 si connettono al sito 1 e la sua *importanza* x_1 é data dal prodotto di una costante positiva di proporzionalità k per la somma delle *importanze* dei siti che si connettono ad 1. La seconda equazione esprime il fatto che solamente 14, 1003, 3224 e 10029 si connettono al sito 2 e la sua *importanza* x_2 é uguale al prodotto della costante di proporzionalità k per la somma delle *importanze* dei siti che si connettono ad 1. E così via.

Riassumendo, se per ogni coppia $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, poniamo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il sito } j \text{ si connette col sito } i \\ 0 & \text{se il sito } j \text{ non si connette col sito } i \end{cases},$$

il sistema (96) può essere scritto nel seguente modo

$$\begin{cases} x_1 = k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = k(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) \\ \ldots = \ldots \\ x_n = k(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) \end{cases} \tag{97}$$

ove si ponga $a_{ij} = 1$ per ogni coppia $(i,j) \in \{(1,14),(1,97),(1,541),(2,14),(2,1003),(2,3224),(2,10029),\ldots,(n,1),(n,23),(n,10098),(n,10099)\}$ e $a_{ij} = 0$ per ogni coppia (i,j) tale che x_{ij} non appare al secondo membro di (96).

Ovviamente, attribuendo valori diversi (ma sempre 0 o 1) ai coefficienti a_{ij}, (97) esprime, in generale, l'*importanza* che ogni sito ha in funzione dei rimanenti. Si noti che in (97) valgono sempre le uguaglianze $a_{ii} = 0$ per ogni $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Posto

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

il sistema (97) può essere formulato nel seguente modo

$$\mathbf{x} = kA\mathbf{x},$$

o, equivalentemente,

$$A\mathbf{x} = \frac{1}{k}\mathbf{x}. \tag{98}$$

Ricordando che A può essere vista come la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (tale che $M_f^{E_n,E_n} = A$) la (98) diventa

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{k}\mathbf{x}. \tag{99}$$

Il *vettore delle importanze* é quindi una soluzione $\mathbf{x}$ della (99). Dunque il vettore delle importanze é un particolare autovettore corrispondente ad un opportuno autovalore positivo $\frac{1}{k}$. Possiamo allora procedere, per esempio, trovando tutti gli autovettori di f e poi sceglierne uno avente tutte le componenti positive.

Il motore di ricerca Google usa una variante di questa idea (descritta dettagliatamente dagli inventori di Google, Sergey Brin e Lawrence Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine*, Computer Networks and ISDN Systems, **30** (1998), 107-117). L'utente invia una richiesta al motore Google ed ottiene in risposta una lista di siti in ordine decrescente di importanza. Questo, in genere, fa risparmiare tempo prezioso nella ricerca. L'idea di usare gli autovettori per determinare il vettore delle importanze é dovuta a Kendall e Wei intorno al 1950. Sebbene si possa usare in molti altri campi questo metodo é diventato famoso grazie alle applicazioni web. Il lettore interessato può studiare i lavori originali:

- M.G. Kendall, *Further contributions to the theory of paired comparisons*, Biometrics **11** (1955), p. 43.
- T.H. Wei, *The algebraic foundations of ranking theory*, Cambridge University Press, London 1952.

Per finire illustriamo questa idea nel caso in cui si vuole trovare il vettore delle squadre di calcio dopo che esse hanno finito il torneo. Precisiamo che non stiamo cercando la classifica finale in base ai risultati delle partite ma una diversa classifica della bravura delle squadre ritenendo che una squadra é brava non solo se ha vinto ma anche se ha vinto squadre anch'esse brave (ecco il circolo vizioso che ritorna!).

Consideriamo un torneo fra sei squadre ad un solo turno in cui ogni partita non può finire pari (quindi una delle due squadre deve vincere e l'altra perdere). Per ogni $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, $i \neq j$, poniamo $a_{ij} = 1$ se la squadra i vince con la squadra j e $a_{ij} = 0$ se la squadra i perde con la squadra j. Ovviamente $a_{ii} = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, 6$. A torneo finito riassumiamo i risultati nella seguente tabella

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Se poniamo $x_i =$ *bravura* della squadra i, abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = k(a_{12}x_2 + a_{15}x_5) \\ x_2 = k(a_{23}x_3 + a_{25}x_5) \\ x_3 = ka_{31}x_1 \\ x_4 = k(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{46}x_6) \\ x_5 = k(a_{53}x_3 + a_{54}x_4) \\ x_6 = k(a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{65}x_5) \end{cases}$$

che, espresso in forma matriciale, diventa

$$\mathbf{x} = kA\mathbf{x},$$

ovvero

$$A\mathbf{x} = \frac{1}{k}\mathbf{x}$$

e quindi, anche questo problema, diventa quello della ricerca di un'opportuno autovalore con un opportuno autovettore ad esso associato. Questo problema oggi é risolto in tempi brevissimi dai programmi di calcolo a disposizione. Nel nostro caso, la matrice A definita in

(100) ha un solo autovalore reale positivo $\frac{1}{k} = 2.0427$ cui possiamo associare l'autovettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3113 \\ 0.2591 \\ 0.1524 \\ 0.6173 \\ 0.3768 \\ 0.5383 \end{pmatrix}.$$

Quindi, concordemente al vettore delle *bravure*, la classifica finale in base alla *bravura* é, nell'ordine,

$$4, \quad 6, \quad 5, \quad 1, \quad 2, \quad 3.$$

Si noti che, in base al punteggio, avremmo avuto al primo posto con punti 4 le squadre 4 e 6, al secondo posto con punti 2 le squadre 1, 2, e 3.

32 Endomorfismi semplici

Alla fine del Paragrafo 29 abbiamo visto che se $f : V \to V$ é un endomorfismo i cui autovalori distinti sono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, allora

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r} \subseteq V.$$

É naturale chiedersi quando vale l'uguaglianza nella precedente inclusione. In tal caso, essendo

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r} = V$$

sarà possibile costruire in V una base formata da autovettori: basterà prendere l'unione di basi prese da ciascun sottospazio V_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Definizione 32.1 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice semplice se esiste una base di V formata da autovettori.*

Teorema 32.1 *Un endomorfismo $f : V \to V$ é semplice se e solo se esiste una base A di V tale che la matrice $M_f^{A,A}$ risulti una matrice diagonale (si veda la Definizione 10.4).*

Dimostrazione. (Dimostrazione facoltativa) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo semplice. Allora esiste una base $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ per V con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ autovettori per f. Per definizione di autovettore, esistono n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti) tali che

$$f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Segue subito

$$M_f^{A,A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Viceversa, sia $f : V \to V$ un endomorfismo per cui esiste una base di V $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ tale che

$$M_f^{A,A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ne segue

$$f(\mathbf{v}_i) = \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

e quindi i vettori $\mathbf{v}_i$ della base A sono autovettori ed f risulta semplice. ∎

Teorema 32.2 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n e sia $f : V \to V$ un endomorfismo avente n autovalori distinti. Allora f é semplice.*

Definizione 32.2 *Sia λ un autovalore per l'endomorfismo $f : V \to V$. Dicesi molteplicità algebrica di λ, e si denota con m_λ, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico di f.*

Teorema 32.3 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo avente un autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ di molteplicità algebrica m_λ. Allora*

$$1 \leq g_\lambda = dim\, V_\lambda \leq m_\lambda.$$

In altre parole la molteplicià geometrica é minore od uguale a quella algebrica.

Teorema 32.4 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo i cui autovalori distinti sono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *f é semplice;*
2. *$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$;*
3. *$dim\, V = dim\, V_{\lambda_1} + dim\, V_{\lambda_2} + \ldots + dim\, V_{\lambda_r}$;*
4. *ogni radice λ del polinomio caratteristico $\Psi_f(x)$ sta in $\mathbb{K}$ e $g_\lambda = dim\, V_\lambda = m_\lambda$.*

Esempio 32.1 *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $f(\mathbf{v}_1) = h\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = (h-2)\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ e $f(\mathbf{v}_3) = (2h+4)\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$, dove $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 0)$. Determinare i valori del parametro reale h per cui f é semplice ed in tali casi trovare una base di autovettori.*

SVOLGIMENTO. Innanzitutto si osservi che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

quindi $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ é una base per $\mathbb{R}^3$ e $f(\mathbf{v}_1) = (h, 0, 0)_A$, $f(\mathbf{v}_2) = (h-2, 2, 0)_A$, $f(\mathbf{v}_3) = (2h+4, 4, -2)_A$. Quindi

$$M_f^{A,A} = \begin{pmatrix} h & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_f(x) = \left| \begin{pmatrix} h & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} h-x & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2-x & 4 \\ 0 & 0 & -2-x \end{pmatrix} \right| = (h-x)(2-x)(-2-x).$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $-2, 2, h$ che possono essere semplici o doppie a seconda che $h \neq \pm 2$ oppure $h = \pm 2$.

Caso $h = -2$**.** Gli autovalori sono $-2, 2$ e si ha $m_{-2} = 2$ e $m_2 = 1$. Bisogna quindi controllare se $g_{-2} = m_{-2}$, essendo $g_{-2} = dim\, V_{-2} = 3 - r\left(M_f^{A,A} - (-2)I_3\right)$.

$$M_f^{A,A} - (-2)I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ il cui rango é 2.}$$

Quindi $g_{-2} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-2}$ e l'endomorfismo **non** é semplice. Pertanto non esiste una base di autovettori.

Caso $h = 2$**.** Gli autovalori sono $-2, 2$ con molteplicità algebrica $m_{-2} = 1$ e $m_2 = 2$. Bisogna quindi controllare se $g_2 = m_2$, essendo $g_2 = dim\, V_2 = 3 - r\left(M_f^{A,A} - 2I_3\right)$.

$$M_f^{A,A} - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

il cui rango é 1. Quindi $g_2 = 3 - 1 = 2 = m_2$ e l'endomorfismo é semplice ed esiste una base di autovettori. Essa é data dall'unione di una base di V_2 con una di V_{-2}.

Ricerca di una base per V_2. Si ha che $(x_1, x_2, x_3)_A \in V_2$ se e solo se

$$\left(M_f^{A,A} - 2I_3\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = 0.$$

Quindi
$$V_2 = \{(x_1, x_2, 0)_A \mid \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$
Pertanto $((1,0,0)_A, (0,1,0)_A)$ é una base per V_2.

Ricerca di una base per V_{-2}. Si ha che $(x_1, x_2, x_3)_A \in V_2$ se e solo se

$$\left(M_f^{A,A} - (-2)I_3\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -2x_3 \end{cases}.$$

Quindi
$$V_{-2} = \{(-2x_3, -x_3, x_3)_A \mid \forall x_3 \in \mathbb{R}\}.$$
Pertanto una sua base é $((-2,-1,1)_A)$.

In conclusione una base di autovettori é data da

$$D = ((1,0,0)_A, (0,1,0)_A, (-2,-1,1)_A).$$

Si noti che, per il Teorema 32.1, si ha

$$M_f^{D,D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proviamo quest'ultimo risultato cercando la matrice $M_f^{D,D}$ mediante il Teorema 28.2. Si ha
$$M_f^{D,D} = P^{A,D} M_f^{A,A} P^{D,A}.$$
Cerchiamo le matrici di cambiamento di base $P^{A,D}$ e $P^{D,A}$ mediante il metodo di pagina 160. Si osservi che $A = ((1,0,0)_A, (0,1,0)_A, (0,0,1)_A)$. Pertanto

$$P_f^{D,A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo $P^{A,D}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

quindi

$$P_f^{A,D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_f^{D,D} = P^{A,D} M_f^{A,A} P^{D,A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Caso $h \neq \pm 2$. In tal caso si hanno tre autovalori distinti $-2, 2, h$ e quindi l'endomorfismo é semplice (cfr. Teorema 32.2). Cerchiamo le basi dei tre autospazi V_2, V_{-2} e V_h.

Ricerca di una base per V_2. Si ha che $(x_1, x_2, x_3)_A \in V_2$ se e solo se

$$\left(M_f^{A,A} - 2I_3\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} h-2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$V_2 = \left\{ (x_1, -x_1, 0)_A \mid \forall x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una sua base é quindi $(1, -1, 0)_A$.

Ricerca di una base per V_{-2}. Si ha che $(x_1, x_2, x_3)_A \in V_{-2}$ se e solo se

$$\left(M_f^{A,A} - (-2)I_3\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} h+2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{h+6}{h+2} x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}.$$

Quindi

$$V_{-2} = \left\{ \left(\frac{h+6}{h+2} x_2, x_2, -x_2 \right)_A \mid \forall x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una sua base é quindi $\left(\frac{h+6}{h+2}, 1, -1\right)_A$.

Ricerca di una base per V_h. Si ha che $(x_1, x_2, x_3)_A \in V_h$ se e solo se

$$\left(M_f^{A,A} - hI_3\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2-h & 4 \\ 0 & 0 & -2-h \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$V_h = \{(x_1, 0, 0)_A \mid \forall x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Una sua base é quindi $(1, 0, 0)_A$.

In conclusione una base di autovettori é data da

$$D = \left((1, -1, 0)_A, \left(\frac{h+6}{h+2}, 1, -1\right)_A, (1, 0, 0)_A\right).$$

Si noti che, per il Teorema 32.1, si ha

$$M_f^{D,D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Proviamo quest'ultimo risultato cercando la matrice $M_f^{D,D}$ mediante il Teorema 28.2. Si ha

$$M_f^{D,D} = P^{A,D} M_f^{A,A} P^{D,A}.$$

Cerchiamo le matrici di cambiamento di base $P^{A,D}$ e $P^{D,A}$ mediante il metodo di pagina 160. Si osservi che $A = ((1, 0, 0)_A, (0, 1, 0)_A, (0, 0, 1)_A)$. Pertanto

$$P_f^{D,A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+6}{h+2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo $P^{A,D}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{h+6}{h+2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{h+6}{h+2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2h+8}{h+2} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{h+6}{h+2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{2h+8}{h+2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{2h+8}{h+2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ quindi}$$

$$P_f^{A,D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{2h+8}{h+2} \end{pmatrix},$$

$$M_f^{D,D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2h+8}{h+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+6}{h+2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

33 Matrici diagonalizzabili

In questo paragrafo risponderemo alle due seguenti domande:

1. Data una matrice quadrata di ordine n ad elementi in un campo $\mathbb{K}$, é essa simile ad una matrice diagonale? (cfr Definizione 10.4).

2. Se M é simile (cfr. Definizione 28.1) ad una matrice diagonale D, qual'é una matrice invertibile H che ne permette la diagonalizzazione, cioè tale che $D = H^{-1}MH$?

Definizione 33.1 *Una matrice quadrata M di ordine n e ad elementi nel campo $\mathbb{K}$ si dice diagonalizzabile se é simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice invertibile H per cui $H^{-1}MH$ é diagonale.*

Com'é noto ad ogni matrice M di ordine n e ad elementi nel campo $\mathbb{K}$ si può associare l'endomorfismo

$$f \ : \ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$$

tale che, fissata una base A in $\mathbb{K}^n$,

$$M_f^{A,A} = M.$$

Quindi f é così definita

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)_A = \left(\left(M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}\right)^T\right)_A.$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 33.1 *Sia A una base di di $\mathbb{K}^n$. La matrice $M \in \mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ é diagonalizzabile se e solo se l'endomorfismo associato $f \ : \ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tale che $M_f^{A,A} = M$ é semplice. In questo caso, detta D una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di f, la matrice cambiamento di base $P^{D,A}$ permette la diagonalizzazione. Cioè $P^{A,D}MP^{D,A}$ é una matrice diagonale che ha come elementi sulla diagonale principale gli autovalori di f (si ricordi che $P^{A,D}$ é l'inversa di $P^{D,A}$).*

Esempio 33.1 *Data la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ é diagonalizzabile in $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$.

SVOLGIMENTO. Si tratta di studiare la semplicità di M. Per fare ciò calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\Psi_M(x) = \begin{vmatrix} 1-x & \alpha \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 - \alpha.$$

Essendo $\Delta = 1 + 4\alpha$, abbiamo i seguenti casi:

1. Se $\alpha < -\frac{1}{4}$ allora $\Delta < 0$ e il polinomio caratteristico non ha radici reali. Quindi M non é diagonalizzabile.

2. Se $\alpha > -\frac{1}{4}$ allora $\Delta > 0$ e il polinomio caratteristico ha due radici reali e distinte. Quindi M é diagonalizzabile.

3. Se $\alpha = -\frac{1}{4}$ allora $\Delta = 0$ e il polinomio caratteristico ha la radice $\frac{3}{2}$ con molteplicità 2. D'altra parte

$$r \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2} & \alpha \\ 1 & 2-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 1$$

per cui

$$g_{\frac{3}{2}} = dim\, V_{\frac{3}{2}} = 2 - 1 = 1 < 2 = m_{\frac{3}{2}},$$

cioè φ_A non é semplice. Pertanto M non é diagonalizzabile.

Esempio 33.2 *Dire se la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare la matrice H che permette la diagonalizzazione.

SVOLGIMENTO. M é diagonalizzabile se e solo se é semplice l'endomorfismo $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $M_f^{E,E} = M$. Il polinomio caratteristico é

$$\Psi_M(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 4.$$

Quindi si hanno i due autovalori distinti 2 e -2 e f é semplice. La matrice che permette la diagonalizzazione é data dalla matrice di cambiamento di base $P^{D,E}$, essendo D una base di autovettori. D si ottiene dall'unione di una base di V_2 con una di V_{-2}.

Base per V_2:

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 1 \\ 3 & 1-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $V_2 = \{(x_1, 3x_1)_E \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é $(1,3)_E$.

Base per V_{-2}:

$$\begin{pmatrix} -1+2 & 1 \\ 3 & 1+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $V_{-2} = \{(x_1, -x_1)_E \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é $(1,-1)_E$.

Quindi $D = ((1,3)_E, (1,-1)_E)$ é una base di autovettori. Ricordando il metodo di pagina 160, la matrice che permette la diagonalizzazione é

$$P^{D,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che, per il Teorema 32.1, si ha

$$M_f^{D,D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proviamo quest'ultimo risultato cercando $M_f^{D,D}$ mediante il Teorema 28.2. Si ha

$$M_f^{D,D} = P^{E,D} M_f^{E,E} P^{D,E}.$$

Calcoliamo $P^{E,D}$ col metodo di pagina 160.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right), \text{ quindi}$$

$$P_f^{E,D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix},$$

$$M_f^{D,D} = P^{E,D} M_f^{E,E} P^{D,E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Metodo per calcolare la potenza di una matrice diagonalizzabile. Sia $M \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$ una matrice diagonalizzabile. In questo caso per calcolare la potenza M^k invece di fare il prodotto $M \cdot M \cdots M$ k volte, possiamo usare il seguente metodo molto *più rapido* del precedente. Per la Definizione 33.1, esiste una matrice invertibile H tale che $H^{-1}MH = D$, ove D é una matrice diagonale. Ne segue $M = HDH^{-1}$. Pertanto

$$M^k = \underbrace{(HDH^{-1}) \cdot (HDH^{-1}) \cdots (HDH^{-1})}_{k \text{ volte}} = HD(H^{-1}H)D(H^{-1}H)D \cdots (H^{-1}H)DH,$$

quindi

$$M^k = HD^kH^{-1}.$$

Si osservi che l'utilità della precedente formula dipende dal fatto che, per il Teorema 10.2, il calcolo della potenza di una matrice diagonale é immediato.

Esempio 33.3 *Sia*

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare M^{79}.

Come visto nell'Esempio 33.2, M é diagonalizzabile e la matrice H che permette la diagonalizzazione é

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sempre nello stesso esempio abbiamo determinato

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

ed abbiamo verificato l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{79} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{79} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{79} & 0 \\ 0 & (-2)^{79} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Esempio 33.4 *Sia*

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -3 \\ 5 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare M^5.

SVOLGIMENTO. Vediamo se M é diagonalizzabile. Cioè se l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $M_f^{E,E} = M$ é semplice. Il polinomio caratteristico é

$$\Psi_M(x) = \begin{vmatrix} 6-x & -7 & -3 \\ 5 & -6-x & -3 \\ -1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x^2-1)(2-x).$$

Quindi, avendosi i tre autovalori distinti -1, 2 e -1, f é semplice. La matrice H che permette la diagonalizzazione é data dalla matrice di cambiamento di base $P^{D,E}$, essendo D una base di autovettori. D si ottiene dall'unione delle basi di V_{-1}, V_2 e V_1.

Base per V_{-1}:

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & -3 \\ 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $V_{-1} = \{(x_1, x_1, 0)_E \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é $(1,1,0)_E$.

Base per V_2:

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 5 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $V_2 = \{(-x_3, -x_3, x_3)_E \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é $(-1,-1,1)_E$.

Base per V_1:

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & -3 \\ 5 & -7 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $V_1 = \{(2x_2, x_2, x_2)_E \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é $(2,1,1)_E$.

Quindi $D = ((1,1,0)_E, (-1,-1,1)_E, (2,1,1))$ é una base di autovettori. Ricordando il metodo di pagina 160, la matrice che permette la diagonalizzazione é

$$H = P^{D,E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo H^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \text{ quindi}$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -3 \\ 5 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue

$$M^5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

34 Similitudine fra matrici

Come osservato alla fine del paragrafo 28, il problema di determinare se due matrici di ordine n sono simili (cfr. Definizione 28.1) oppure no é difficile. In questo paragrafo daremo una *parziale* risposta a questo problema.

In virtù dei Teoremi 28.3 e 30.2, due matrici simili A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico (non é detto però che vale il viceversa!). Quindi un primo metodo di controllo consiste nel calcolare i due polinomi caratteristici $\Psi_A(x)$ e $\Psi_B(x)$:

- Se $\Psi_A(x) \neq \Psi_B(x)$ allora A e B **non sono** simili.
- Se $\Psi_A(x) = \Psi_B(x)$ allora A e B **possono** essere simili.

Esempio 34.1 *Provare che le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sono a due a due simili.

SVOLGIMENTO. Si verifica immediatamente che A, B e C hanno lo stesso polinomio caratteristico $x^2 - 6x + 8$. Gli autovalori sono 2 e 4. Si noti anche che A é una matrice diagonale avente gli autovalori nella diagonale principale. Per provare che A e B (risp. A e C) sono simili é sufficiente provare che B (risp. C) é diagonalizzabile. Infatti, per il Teorema 33.1, se B (risp. C) é diagonalizzabile allora é possibile determinare una matrice invertibile H_1 (risp. H_2) tale che $A = H_1^1 B H_1$ (risp. $A = H_2^1 C H_2$). In particolare se F (risp. G) é una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di φ_B (risp. φ_C, H_1 (risp. H_2) coincide con la matrice di cambiamento di base P^{F,E_2} (risp. P^{G,E_2}).

Ricordiamo che
$$M_{\varphi_B}^{E_2,E_2} = B$$
e che 2 e 4 sono i due autovalori di φ_B.

I vettori di V_2 si ottengono risolvendo il sistema
$$\begin{pmatrix} 0-2 & -2 \\ 4 & 6-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi $V_2 = \{(-x_2, x_2)_{E_2} \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(-1, 1)$.

I vettori di V_4 si ottengono risolvendo il sistema
$$\begin{pmatrix} 0-4 & -2 \\ 4 & 6-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Quindi $V_4 = \{(x_1, -2x_1)_{E_2} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(1, -2)$.

Pertanto $F = ((-1, 1), (1, -2))$. É immediato verificare che $H_1 = P^{F,E_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Cerchiamo $P^{E_2,F}$.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$ Quindi $H_1^{-1} = P^{E_2,F} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

É immediato verificare che $P^{E_2,F} B P^{F,E_2} = A$. Infatti
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così provato che A e B sono simili. Proviamo ora la similitudine fra A e C. Ricordiamo che
$$M_{\varphi_C}^{E_2,E_2} = C$$
e che 2 e 4 sono i due autovalori di φ_C.

I vettori di V_2 si ottengono risolvendo il sistema
$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $V_2 = \{(x_1, 0)_{E_2} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(1, 0)$.

I vettori di V_4 si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 \\ 0 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $V_4 = \{(x_1, 2x_1)_{E_2} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(1, 2)$.

Pertanto $G = ((1,0),(1,2))$. É immediato verificare che $H_2 = P^{G,E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Cerchiamo $P^{E_2,G}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$. Quindi $H_2^{-1} = P^{E_2,G} = \begin{pmatrix} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

É immediato verificare che $P^{E_2,G} C P^{G,E_2} = A$. Infatti

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

La similitudine fra B e C segue immediatamente dalla Proposizione 28.2.

Come conseguenza del Teorema 33.1, se una matrice A é diagonalizzabile sarà simile a matrici diagonali in cui gli elementi della diagonale sono gli autovalori di φ_A (con la dovuta molteplicità). D'altra parte, se A é diagonalizzabile, cioè simile ad una matrice diagonale D, ogni matrice simile ad A é diagonalizzabile alla stessa matrice D: infatti, se $H^{-1}AH = D$ (con D diagonale) e B é simile ad A, sarà $A = Q^{-1}BQ$ da cui avremo

$$D = H^{-1}AH = H^{-1}Q^{-1}BQH = (QH)^{-1}BQH$$

cioè B é diagonalizzabile a D.

Così, date due matrici $A, B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{K})$, per verificare se sono simili si può procedere nel seguente modo:

1. Se A e B sono diagonalizzabili basta controllare se sono simili ad una stessa matrice diagonale, in altri termini se i loro polinomi caratteristici $\Psi_A(x)$ e $\Psi_B(x)$ hanno le stesse radici con la stessa molteplicità; in caso affermativo A e B sono simili e possiamo determinare la matrice che individua la similitudine; infatti da

   $$H^{-1}AH = D \quad \text{e} \quad Q^{-1}BQ = D$$

   segue

   $$H^{-1}AH = Q^{-1}BQ$$

   da cui

   $$A = HQ^{-1}BQH^{-1} = \left(QH^{-1}\right)^{-1} B \left(QH^{-1}\right).$$

   Ovviamente, in caso contrario, cioè se A e B sono diagonalizzabili a matrici differenti, per l'osservazione precedente, A e B non saranno simili.

2. Se A é diagonalizzabile e B non lo é (o viceversa), allora A e B non sono simili.

3. Se A e B sono entrambe non diagonalizzabili con questi strumenti non siamo in grado di decidere in maniera semplici se esse sono simili o no. Un calcolo diretto sarà necessario per dare la dovuta risposta (si veda l'Esempio 34.3).

Esempio 34.2 *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire se A é simile a B o F o G ed in caso affermativo trovare una matrice invertibile H che produce tale similitudine.

SVOLGIMENTO. Vediamo dapprima se A é diagonalizzabile. Per quanto visto precedentemente basterà controllare la semplicità di φ_A. Si ha $\Psi_A(x) = (2-x)[(3-x)^2 - 1]$ per cui φ_A ammette gli autovalori 2 e 4 con $m_2 = 2$ e $m_4 = 1$. Poichè il rango della matrice

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é 1, si ha $m_2 = g_2 = dim\, V_2 = 3 - r(A - 2I_3) = 2$ cioè φ_A é semplice, quindi A é diagonalizzabile, ad esempio alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per cui adesso basterà controllare se le matrici B, F e G sono diagonalizzabili (alla stessa matrice D).

Per quanto riguarda B abbiamo $\Psi_B(x) = -x^3 + 8x^2 - 20x + 16$ per cui gli autovalori di φ_B sono 2 e 4 con $m_2 = 2$ e $m_4 = 1$ ma il rango di

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

é 2 per cui $g_2 = 1 < m_2 = 2$ così B non é diagonalizzabile, e quindi non é simile ad A.

Per quanto riguarda F abbiamo $\Psi_F(x) = (4-x)[(3-x)^2 - 1]$ per cui gli autovalori di φ_F sono 2 e 4 con $m_2 = 1$ e $m_4 = 2$ e quindi, indipendentemente dal fatto che φ_F sia semplice o meno, F non può essere simile ad A (si noti che gli autovalori sono gli stessi ma la molteplicità é diversa).

Per quanto riguarda G abbiamo $\Psi_G(x) = (2-x)(x^2-6x+8)$ per cui gli autovalori di φ_G sono 2 e 4 con $m_2 = 2$ e $m_4 = 1$ inoltre il rango di

$$G - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

é 1 per cui $g_2 = m_2 = 2$; in definitiva, G é diagonalizzabile alla stessa matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e quindi G é simile ad A.

Per trovare in questo caso una matrice invertibile H tale che $G = H^{-1}AH$ basterà trovare matrici diagonalizzanti T e Q per A e G, per cui $T^{-1}AT = D$ e $Q^{-1}GQ = D$ da cui $G = QT^{-1}ATQ^{-1} = H^{-1}AH$ dove $H = TQ^{-1}$.

Per avere T bisogna trovare una base di autovettori per φ_A:

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3)_{E_3} \mid x_1 + x_2 = 0\},$$

$$V_4 = \{(x_1, x_2, x_3)_{E_3} \mid x_1 = x_2 = x_3\}$$

per cui una base di autovettori sarà

$$((1,-1,0),(0,0,1),(1,1,-1))$$

quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per avere Q troviamo una base di autovettori per φ_G:

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3)_{E_3} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$V_4 = \{(x_1, x_2, x_3)_{E_3} \mid x_1 = x_2 + x_3 = 0\}$$

per cui una base di autovettori sarà

$$((1,0,-1),(0,1,-1),(0,-2,1))$$

quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Così una matrice H che fornisce la similitudine fra A e G sarà

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 34.3 *Dire quali fra le seguenti matrici di* $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sono simili e, quando lo sono, trovare le matrici invertibili che realizzano questa similitudine.

SVOLGIMENTO. Calcoliamo i polinomi caratteristici delle tre matrici: $\Psi_A(x) = (x-3)^2$, $\Psi_B(x) = x^2 - 6x + 5$, $\Psi_C(x) = (x-3)^2$. La matrice B, avendo un polinomio caratteristico diverso da quello di A e di C, non é simile a nessuna delle altre due matrici. Per quanto riguarda A e C, poichè $r(A - 3I_2) = r(C - 3I_2) = 1$, tali matrici sono entrambe non diagonalizzabili. Cerchiamo tuttavia una matrice invertibile

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tale che $A = H^{-1}CH$, ovvero $HA = CH$. Avremo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

che conduce al sistema lineare

$$\begin{cases} 4a + b = 3a \\ -a + 2b = 3b \\ 4c + d = a + 3c \\ -c + 2d = b + 3d \end{cases}, \quad \begin{cases} b = -a \\ d = a - c \end{cases}$$

e poichè H deve essere invertibile, occorre che $ad - bc = a^2 \neq 0$. In definitiva, ponendo per esempio $a = 1$ e $c = 0$ (da cui $b = -1$ e $d = 1$), A e C sono simili e

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indice analitico