

PARTE A (TEORIA)

[T1] Rispondere ad almeno una delle seguenti domande.

Quali fra le seguenti equazioni differenziali sono lineari?

☐ $y'' = \frac{y'}{x}$

☐ $y' = \log(xy)$

☐ $y' = y \log x$

☐ $y' = y \log x + \log y$

☐ $y'' + xe^y = e^x$

☐ $y' = 4y + e^{x^2}$

b) Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ aperto, una funzione dotata di derivate seconde miste in un punto $(x_0, y_0) \in X$. Quale relazione intercorre tra $f_{xy}(x_0, y_0)$ e $f_{yx}(x_0, y_0)$? Giustificare la risposta.

[T2] Enunciare e dimostrare almeno uno dei seguenti teoremi:

a) Caratterizzazione dell'integrale generale di un'equazione lineare a coefficienti costanti.

b) Relazioni tra continuità, esistenza delle derivate parziali prime e differenziabilità di una funzione in un punto.

PARTE B (ESERCIZI)

[E1] Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x.$$

b) Determinare gli eventuali estremi relativi della funzione

$$f(x, y) = x(\log^2 x + y^2).$$

Stabilire se sono anchepunti di estremo assoluto.

[E2] Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi.

a) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{ye^{2x}}{1 + e^{2x}} + e^{2x}.$$

b) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \log(2x^2 + y^4), \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$