UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica

Anno Accademico 2016-2017

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **6 CFU**

12 Giugno 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia dato il seguente insieme numerico:

$$A = \left\{ \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare, al variare del parametro reale k, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Determinare l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(e^{x^2-1}\right)^n}.$$

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^{|x|}-1)\ln(1+x^2)}{x} + 2\sin x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Provare che f è continua e derivabile nel suo insieme di definizione.

(b) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 0$.

4 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln^2(1-x)}.$$

Studiare f e tracciarne il grafico.

12 Giugno 2017

Svolgimento della prova scritta (6 CFU)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Dal momento che il parametro k compare solo nella base del logaritmo, deve essere

$$k^2 - 2k - 2 > 0 \ \wedge \ k^2 - 2k - 2 \neq 1,$$

cioè

$$k \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Adesso, in forza della monotonia della funzione logaritmica, occorre distinguere i casi:

$$0 < k^2 - 2k - 2 < 1 \qquad \text{e} \qquad k^2 - 2k - 2 > 1.$$

- Sia $0 < k^2 - 2k - 2 < 1$ ossia $-1 < k < 1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3} < k < 3$. Tenendo conto la successione
$$\left\{2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona crescente, e che il logaritmo con la base compresa tra 0 e 1 è decrescente, per composizione si conclude che la successione
$$\left\{\log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona decrescente. Quindi:
$$\max A = \log_{k^2-2k-2} 4, \qquad \inf A = \lim_{n\to+\infty} \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right) = -\infty.$$
Quindi A ammette estremo superiore che, in particolare, è massimo e ammette estremo inferiore che però non è minimo.
- Sia $k^2 - 2k - 2 > 1$ ossia $k < -1$, $k > 3$. Tenendo conto la successione
$$\left\{2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona crescente, e che il logaritmo con la base maggiore di 1 è crescente, per composizione si conclude che la successione
$$\left\{\log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona crescente. Quindi:
$$\min A = \log_{k^2-2k-2} 4, \qquad \sup A = \lim_{n\to+\infty} \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$
Quindi A ammette estremo inferiore che, in particolare, è minimo e ammette estremo superiore che però non è massimo.

$\boxed{2}$ Bisogna imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n \neq 0 \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

La prima condizione equivale a richiedere $x \geq -2$. Per quanto riguarda la seconda condizione, osserviamo che

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \mathrm{e}^{x^2-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1.$$

Quindi certamente $]-1,1[\not\subseteq \mathscr{D}_f$.

Infine, scriviamo per esteso la terza condizione:

$$\mathbb{R} \ni \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n = \mathrm{e}^{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \vee x \geq 1.$$

Concludendo, si ha:

$$\mathscr{D}_f = [-2,-1] \cup [1,+\infty[.$$

$\boxed{3}$ (a) Evidentemente f è continua e derivabile in ogni punto $x \neq 0$. Proviamo che f è continua in $x = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{(\mathrm{e}^{|x|}-1)\ln(1+x^2)}{x} + 2\sin x \right] \\ &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{(\mathrm{e}^{|x|}-1)}{|x|} |x| x \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + 2\sin x \right] = 0 = f(0). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la derivabilità, procediamo con la definizione calcolando il limite del rapporto incrementale relativo ad f e al punto $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[(\mathrm{e}^{|x|}-1)\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + 2\frac{\sin x}{x} \right] = 2 = f'(0).$$

(b) L'equazione della retta tangente richiesta è

$$y = f'(0)(x-0) + f(0),$$

cioè

$$y = 2x.$$

$\boxed{4}$ **Insieme di definizione.** Si ricava facilmente che

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 1[.$$

Segno. Si vede subito che

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f.$$

Osserviamo, in particolare, che il punto $(0,0)$ appartiene al grafico di f.

Comportamento di f agli estremi di $\mathscr{D}_f$. Si ha:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale sinistro per il grafico di f.

Osserviamo che il grafico di f non ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$ giacché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{3}}}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x} = 0.$$

Monotonia di f. Si trova subito che

$$f'(x) = \frac{-2}{3(1-x)\sqrt[3]{\ln(1-x)}}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}.$$

Quindi f è crescente in $]0,1[$ ed è decrescente in $]-\infty,0[$. Inoltre

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0.$$

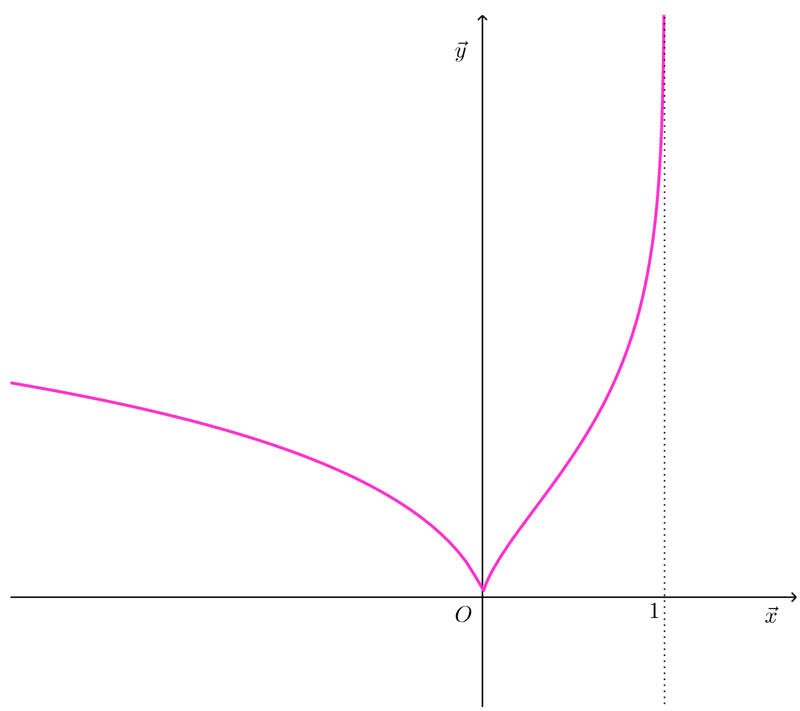
In $(0,0)$ si ha un minimo relativo (e assoluto) con tangente verticale (il punto $x=0$ è un punto di cuspide).

Concavità e convessità di f. Si trova subito che

$$f''(x) = -\frac{2(3\ln(1-x)+1)}{9(1-x)^2\left(\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}\right)^2}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}.$$

Quindi f è convessa in $]\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}},1[$ ed è concava in $]-\infty,\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}}[$. In $x=\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}}$ si localizza un punto di flesso.

Grafico di f. Nella figura seguente è riportato il grafico di f.



Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **9 CFU**
12 Giugno 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia dato il seguente insieme numerico:

$$A = \left\{ \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare, al variare del parametro reale k, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Determinare l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(e^{x^2-1}\right)^n}.$$

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln^2(1-x)}.$$

Studiare f e tracciarne il grafico.

4 Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2e^{-x}+e^{-2x}}} dx$$

12 Giugno 2017
Svolgimento della prova scritta (9 CFU)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Dal momento che il parametro k compare solo nella base del logaritmo, deve essere

$$k^2 - 2k - 2 > 0 \ \wedge \ k^2 - 2k - 2 \neq 1,$$

cioè

$$k \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Adesso, in forza della monotonia della funzione logaritmica, occorre distinguere i casi:

$$0 < k^2 - 2k - 2 < 1 \qquad \text{e} \qquad k^2 - 2k - 2 > 1.$$

- Sia $0 < k^2 - 2k - 2 < 1$ ossia $-1 < k < 1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3} < k < 3$. Tenendo conto la successione
$$\left\{2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona crescente, e che il logaritmo con la base compresa tra 0 e 1 è decrescente, per composizione si conclude che la successione
$$\left\{\log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona decrescente. Quindi:
$$\max A = \log_{k^2-2k-2} 4, \qquad \inf A = \lim_{n\to+\infty} \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right) = -\infty.$$
Quindi A ammette estremo superiore che, in particolare, è massimo e ammette estremo inferiore che però non è minimo.
- Sia $k^2 - 2k - 2 > 1$ ossia $k < -1$, $k > 3$. Tenendo conto la successione
$$\left\{2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona crescente, e che il logaritmo con la base maggiore di 1 è crescente, per composizione si conclude che la successione
$$\left\{\log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
è monotona crescente. Quindi:
$$\min A = \log_{k^2-2k-2} 4, \qquad \sup A = \lim_{n\to+\infty} \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$
Quindi A ammette estremo inferiore che, in particolare, è minimo e ammette estremo superiore che però non è massimo.

$\boxed{2}$ Bisogna imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n \neq 0 \\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

La prima condizione equivale a richiedere $x \geq -2$. Per quanto riguarda la seconda condizione, osserviamo che

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \mathrm{e}^{x^2-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1.$$

Quindi certamente $]-1,1[\not\subseteq \mathscr{D}_f$.

Infine, scriviamo per esteso la terza condizione:

$$\mathbb{R} \ni \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)^n = \mathrm{e}^{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \vee x \geq 1.$$

Concludendo, si ha:

$$\mathscr{D}_f = [-2,-1] \cup [1,+\infty[.$$

$\boxed{3}$ **Insieme di definizione.** Si ricava facilmente che

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 1[.$$

Segno. Si vede subito che

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f.$$

Osserviamo, in particolare, che il punto $(0,0)$ appartiene al grafico di f.

Comportamento di f agli estremi di $\mathscr{D}_f$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale sinistro per il grafico di f.

Osserviamo che il grafico di f non ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$ giacché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{3}}}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x} = 0.$$

Monotonia di f. Si trova subito che

$$f'(x) = \frac{-2}{3(1-x)\sqrt[3]{\ln(1-x)}}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}.$$

Quindi f è crescente in $]0,1[$ ed è decrescente in $]-\infty,0[$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0.$$

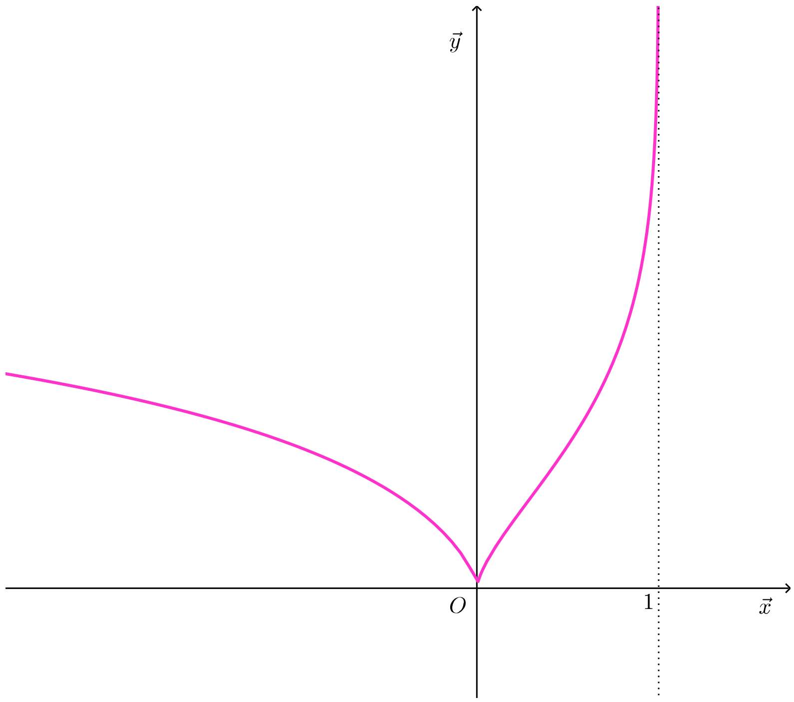
In $(0,0)$ si ha un minimo relativo (e assoluto) con tangente verticale (il punto $x = 0$ è un punto di cuspide).

Concavità e convessità di f. Si trova subito che

$$f''(x) = -\frac{2(3\ln(1-x)+1)}{9(1-x)^2\left(\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}\right)^2}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}.$$

Quindi f è convessa in $]\frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}-1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}, 1[$ ed è concava in $]-\infty, \frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}-1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}[$. In $x = \frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}-1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$ si localizza un punto di flesso.

Grafico di f. Nella figura seguente è riportato il grafico di f.



$\boxed{\mathbf{4}}$ Denotato con I l'integrale assegnato, si ha:

$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{(1-e^{-x})^2}}\,dx = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{|1-e^{-x}|}\,dx.$$

Poiché risulta

$$|1-e^{-x}| = \frac{|e^x-1|}{e^x} = \frac{1-e^x}{e^x} \quad \text{per } -2\ln 2 \le x \le -\ln 2,$$

si ha:

$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{e^x \ln(1-e^x)}{1-e^x}\,dx.$$

Posto $1-e^x = t$, si ricava $e^x = 1-t$ da cui $e^x\,dx = -dt$.

Per $x = -2\ln 2 = -\ln 4$ si ha $t = \frac{3}{4}$ e per $x = -\ln 2$ si ha $t = \frac{1}{2}$. Allora:

$$I = -\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left[\ln^2\frac{3}{4} - \ln^2 2\right].$$

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2016-2017
Corso di Laurea in Informatica (L-31)
Prova scritta per i corsi di Analisi Matematica (MAT/05) di **12 CFU**
12 Giugno 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Sia dato il seguente insieme numerico:

$$A = \left\{ \log_{k^2-2k-2} \left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}} \right),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare, al variare del parametro reale k, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

2 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln^2(1-x)}.$$

Studiare f e tracciarne il grafico.

3

- Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}.$$

- Studiare, al variare del parametro reale λ, il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)n}.$$

4 Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}} \mathrm{d}x$$

12 Giugno 2017

Svolgimento della prova scritta (12 CFU)

1 Dal momento che il parametro k compare solo nella base del logaritmo, deve essere

$$k^2 - 2k - 2 > 0 \ \wedge \ k^2 - 2k - 2 \neq 1,$$

cioè

$$k \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Adesso, in forza della monotonia della funzione logaritmica, occorre distinguere i casi:

$$0 < k^2 - 2k - 2 < 1 \qquad \text{e} \qquad k^2 - 2k - 2 > 1.$$

- Sia $0 < k^2 - 2k - 2 < 1$ ossia $-1 < k < 1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3} < k < 3$. Tenendo conto la successione

$$\left\{2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è monotona crescente, e che il logaritmo con la base compresa tra 0 e 1 è decrescente, per composizione si conclude che la successione

$$\left\{\log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è monotona decrescente. Quindi:

$$\max A = \log_{k^2-2k-2} 4, \qquad \inf A = \lim_{n\to+\infty} \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right) = -\infty.$$

Quindi A ammette estremo superiore che, in particolare, è massimo e ammette estremo inferiore che però non è minimo.

- Sia $k^2 - 2k - 2 > 1$ ossia $k < -1$, $k > 3$. Tenendo conto la successione

$$\left\{2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è monotona crescente, e che il logaritmo con la base maggiore di 1 è crescente, per composizione si conclude che la successione

$$\left\{\log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è monotona crescente. Quindi:

$$\min A = \log_{k^2-2k-2} 4, \qquad \sup A = \lim_{n\to+\infty} \log_{k^2-2k-2}\left(2 + \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$

Quindi A ammette estremo inferiore che, in particolare, è minimo e ammette estremo superiore che però non è massimo.

2 **Insieme di definizione.** Si ricava facilmente che

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 1[.$$

Segno. Si vede subito che

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f.$$

Osserviamo, in particolare, che il punto $(0,0)$ appartiene al grafico di f.

Comportamento di f agli estremi di $\mathscr{D}_f$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale sinistro per il grafico di f.

Osserviamo che il grafico di f non ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$ giacché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{3}}}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x} = 0.$$

Monotonia di f. Si trova subito che

$$f'(x) = \frac{-2}{3(1-x)\sqrt[3]{\ln(1-x)}}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}.$$

Quindi f è crescente in $]0,1[$ ed è decrescente in $]-\infty, 0[$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0.$$

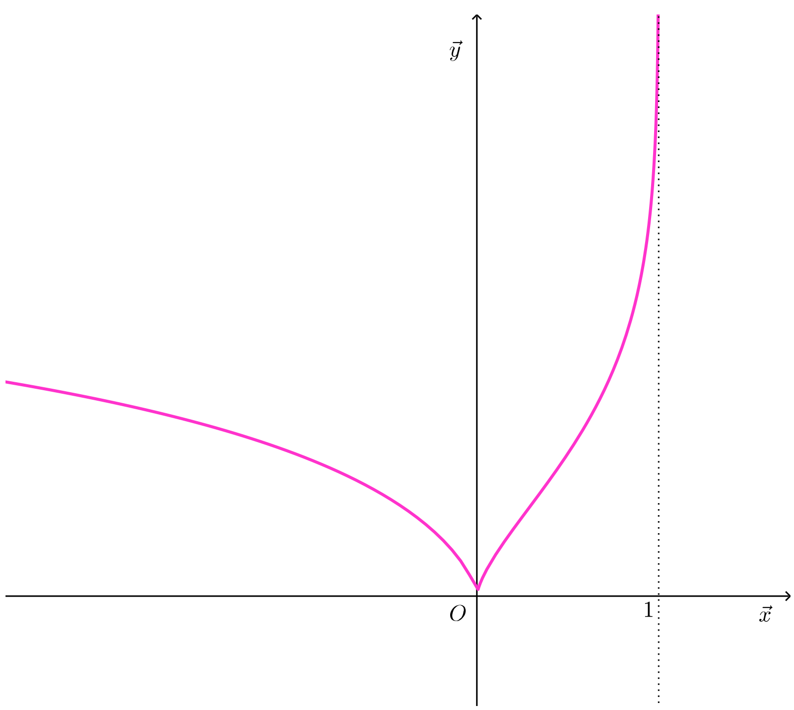
In $(0,0)$ si ha un minimo relativo (e assoluto) con tangente verticale (il punto $x = 0$ è un punto di cuspide).

Concavità e convessità di f. Si trova subito che

$$f''(x) = -\frac{2(3\ln(1-x)+1)}{9(1-x)^2\left(\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}\right)^2}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}.$$

Quindi f è convessa in $]\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}}, 1[$ ed è concava in $]-\infty, \frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}}[$. In $x = \frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}}$ si localizza un punto di flesso.

Grafico di f. Nella figura seguente è riportato il grafico di f.



$\boxed{3}$

- Osserviamo preliminarmente che la serie è a termini positivi. Avvalendosi, ad esempio, del Teorema di De L'Hôpital, si prova subito che
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$
Da ciò e dai limiti notevoli
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$
si deduce la seguente stima asintotica del termine generale a_n della serie assegnata:
$$a_n \asymp \frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$
Dal confronto asintotico con la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$
che, come è noto, diverge positivamente, si deduce che la serie assegnata diverge positivamente.

- Si tratta di una serie a termini di segno alterno. Conviene dunque studiarne dapprima la convergenza assoluta applicando il criterio della radice.
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)n}} &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)}\\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}\\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)}\begin{cases}<1 & \text{se } \lambda<0\vee\lambda>1\\ >1 & \text{se } 0<\lambda<1\\ =1 & \text{se } \lambda=0\vee\lambda=1\end{cases}
\end{aligned}$$
Per $0<\lambda<1$ la serie non converge assolutamente; poiché il suo termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza, la serie non converge neppure semplicemente; per $\lambda<0\vee\lambda>1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; infine, per $\lambda=0$ e $\lambda=1$ il criterio non fornisce alcuna informazione. In entrambi i casi, la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n+1}\right).$$
La successione di termine generale $a_n:=\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è infinitesima e monotona decrescente, in quanto, dal fatto che la funzione $x\mapsto\sin x$ per $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ è monotona crescente, si ha:
$$\frac{1}{(n+1)+1}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)<\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)=a_n.$$

Pertanto, per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz; tuttavia, essa non converge assolutamente, per confronto asintotico con la serie armonica.

$\boxed{4}$ Denotato con I l'integrale assegnato, si ha:

$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-\mathrm{e}^x)}{|1-\mathrm{e}^{-x}|}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché risulta

$$|1-\mathrm{e}^{-x}| = \frac{|\mathrm{e}^x - 1|}{\mathrm{e}^x} = \frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \quad \text{per } -2\ln 2 \le x \le -\ln 2,$$

si ha:

$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x \ln(1-\mathrm{e}^x)}{1-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Posto $1-\mathrm{e}^x = t$, si ricava $\mathrm{e}^x = 1-t$ da cui $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Per $x = -2\ln 2 = -\ln 4$ si ha $t = \frac{3}{4}$ e per $x = -\ln 2$ si ha $t = \frac{1}{2}$. Allora:

$$I = -\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left[\ln^2\frac{3}{4} - \ln^2 2\right].$$

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica

Anno Accademico 2016-2017

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta per il corso di Formazione Analitica 2 (MAT/05) di **6 CFU**

12 Giugno 2017

Tempo a disposizione. 120 minuti.

1

- Stabilire il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \arctan\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}.$$

- Studiare, al variare del parametro reale λ, il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)n}.$$

2 Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x$$

3 Sia data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\mathrm{e}^{-nx}\right), \qquad x \in [0, +\infty[.$$

(a) Studiare la convergenza puntuale di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, +\infty[$ e determinare la funzione limite f.

(b) Stabilire, giustificando la risposta, se la convergenza è uniforme in $[0, +\infty[$.

(c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

4 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Determinare gli eventuali estremi relativi di f.

12 Giugno 2017

Svolgimento della prova scritta (9 CFU)

$\boxed{\mathbf{1}}$

- Osserviamo preliminarmente che la serie è a termini positivi. Avvalendosi, ad esempio, del Teorema di De L'Hôpital, si prova subito che
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$
Da ciò e dai limiti notevoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$
si deduce la seguente stima asintotica del termine generale a_n della serie assegnata:
$$a_n \asymp \frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$
Dal confronto asintotico con la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$
che, come è noto, diverge positivamente, si deduce che la serie assegnata diverge positivamente.

- Si tratta di una serie a termini di segno alterno. Conviene dunque studiarne dapprima la convergenza assoluta applicando il criterio della radice.
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)n}} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)} \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}} \\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{(\lambda^2-\lambda)} \begin{cases} <1 & \text{se } \lambda<0 \vee \lambda>1 \\ >1 & \text{se } 0<\lambda<1 \\ =1 & \text{se } \lambda=0 \vee \lambda=1 \end{cases}
\end{aligned}$$
Per $0<\lambda<1$ la serie non converge assolutamente; poiché il suo termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza, la serie non converge neppure semplicemente; per $\lambda<0 \vee \lambda>1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; infine, per $\lambda=0$ e $\lambda=1$ il criterio non fornisce alcuna informazione. In entrambi i casi, la

serie diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right).$$
La successione di termine generale $a_n := \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è infinitesima e monotona decrescente, in quanto, dal fatto che la funzione $x \mapsto \sin x$ per $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ è monotona crescente, si ha:
$$\frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \sin\left(\frac{1}{n+2}\right) < \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = a_n.$$
Pertanto, per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz; tuttavia, essa non converge assolutamente, per confronto asintotico con la serie armonica.

2 Denotato con I l'integrale assegnato, si ha:
$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{(1-e^{-x})^2}}\,dx = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{|1-e^{-x}|}\,dx.$$
Poiché risulta
$$|1-e^{-x}| = \frac{|e^x-1|}{e^x} = \frac{1-e^x}{e^x} \quad \text{per } -2\ln 2 \le x \le -\ln 2,$$
si ha:
$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{e^x \ln(1-e^x)}{1-e^x}\,dx.$$
Posto $1 - e^x = t$, si ricava $e^x = 1 - t$ da cui $e^x\,dx = -dt$.

Per $x = -2\ln 2 = -\ln 4$ si ha $t = \frac{3}{4}$ e per $x = -\ln 2$ si ha $t = \frac{1}{2}$. Allora:
$$I = -\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left[\ln^2\frac{3}{4} - \ln^2 2\right].$$

3 (a) Si osserva che se $x = 0$, si ha $f_n(0) = 0$ e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0.$$
In generale, fissato $x > 0$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x.$$
Si conclude, quindi, che la funzione limite è
$$f(x) = x, \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$
(b) Occorre vedere se
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$
dove
$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|.$$
Osserviamo che, sebbene le funzioni f_n e f siano continue in $[0, +\infty[$, ciò non garantisce l'esistenza del massimo assoluto della funzione $|f_n(x) - f(x)|$ in $[0, +\infty[$ in quanto tale

intervallo non è limitato. Si ha:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} x\mathrm{e}^{-nx}$$

e quindi

$$g_n'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt[3]{n}}(1 - nx).$$

Da ciò segue che

$$g_n'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - nx \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{n}.$$

Essendo

$$g_n(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = 0,$$

si può affermare che in $x = \frac{1}{n}$ le funzioni $g_n(x)$ ammettono massimo assoluto, pertanto:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0,+\infty[} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}n^{\frac{4}{3}}},$$

da cui

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

cioè la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in $[0, +\infty[$.

(c) Da quanto trovato nel punto precedente, si deduce che la convergenza è uniforme anche in $[0, \pi] \subset [0, +\infty[$. Ciò autorizza il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Pertanto:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$

4 Cerchiamo dapprima i punti stazionari di f, cioè i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 + 4x - 4y) = (0, 0).$$

Da tale uguaglianza discende il sistema:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

e sommando le due equazioni:

$$\begin{cases} 4(x^3 + y^3) = 0 \\ 4x^3 - 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ 4x^3 - 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x(x^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti

$$A(0,0), \qquad B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \qquad C(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

La matrice hessiana è:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$H(B) = H(C) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Poiché $|H(B)| = |H(C)| = 384 > 0$ e $f_{xx}(B) = f_{xx}(C) = 20 > 0$, i punti B e C sono di minimo relativo. Inoltre, dal momento che

$$H(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

si ha $|H(A)| = 0$. Si tratta dunque di un caso ambiguo. Per esaminarlo, proviamo a studiare la funzione f lungo rette passanti per A.

Per la restrizione di f all'insieme dei punti del tipo $y = x$, il punto è di minimo relativo, infatti in tal caso

$$f(x, x) = 2x^4$$

e ovviamente $x = 0$ è un punto di minimo relativo.

Invece, se $y = -x$, allora

$$g(x) := f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2.$$

Essendo $g'(x) = 8x^3 - 16x$, $g''(x) = 24x^2 - 16$, allora $g''(0) = -16 < 0$ e quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

Concludiamo, dunque, che il punto A è un punto di sella.