DIPARTIMENTO
di MATEMATICA
e INFORMATICA

Anno Accademico 2019-2020

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU) [A-L]

3 Febbraio 2020

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Determinare tutti i numeri complessi z che verificano la seguente equazione:

$$(\sqrt{3}+i)^5 + 16z^3 = 0.$$

2 Calcolare i seguenti limiti:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^3}, \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2+3n+7} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 1).$$

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \left|x^2-1\right|^3.$$

Studiare f e tracciarne un grafico qualitativo.

3 Febbraio 2020

Svolgimento della prova scritta

1 Si ha

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}+i)^5=2^5e^{i\frac{5}{6}\pi}.$$

Pertanto, l'equazione proposta diventa

$$16z^3=-2^5e^{i\frac{5}{6}\pi}=2^5e^{i\frac{5}{6}\pi}e^{i\pi}=2^5e^{i\frac{11}{6}\pi} \quad \Rightarrow \quad z^3=2e^{i\frac{11}{6}\pi}.$$

Da ciò segue subito che

$$z=\sqrt[3]{2e^{i\frac{11}{6}\pi}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{11}{6}\pi+2k\pi}{3}}, \qquad k=0,1,2.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione assegnata sono i seguenti numeri complessi:

$$z_0=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{11}{18}\pi}, \qquad z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{23}{18}\pi}, \qquad z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{35}{18}\pi}.$$

2 (a) Il limite presenta la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applicando il Teorema di De L'Hôpital, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3\cos^2 x}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3\cos^2 x}(1+\cos x)\frac{1-\cos x}{x^2}\right]=-\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Dunque, per il Teorema di De L'Hôpital, il limite proposto vale pure $-\frac{1}{3}$.

(b) Si ponga

$$a_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n^2+3n+7}, \qquad \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1.$$

Si vede subito che

$$\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=0, \qquad \lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=0,$$

quindi il limite assegnato esiste e vale 0.

3 L'insieme di definizione di f è $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$. Poiché

$$f(x) = |x^2 - 1|^3 = \left|(x^2 - 1)^3\right|,$$

conviene studiare la funzione $g(x) = (x^2 - 1)^3$. Il grafico di f si otterrà a partire da quello di g ribaltando rispetto all'asse x le parti del grafico di f per cui $g(x) < 0$. Dal momento che g un polinomio, non ammette asintoti di alcun tipo. Inoltre,

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty.$$

Si ha:

$$g'(x) = 3(x^2 - 1)^2 2x = 6x(x^2 - 1)^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risulta $g'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1 \vee x = 0$ e $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Dunque g è decrescente in $]-\infty, 0]$ ed è crescente in $[0, +\infty[$. Ne viene che i punti del grafico di g aventi ascisse $x = \pm 1$ sono punti di flesso a tangente orizzontale e il punto di ascissa $x = 0$ è punto di minimo (assoluto). Infine,

$$g''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Studiando il segno di g'' si deduce che g è convessa in $]-\infty, -1]$, $[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}]$, $[1, +\infty[$ ed è concava in $[-1, -\frac{\sqrt{5}}{5}]$ e in $[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1]$. Quindi, ai flessi a tangente orizzontale individuati sopra, si aggiungono i punti di flesso a tangente obliqua aventi ascisse $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Avvalendosi del Teorema sul limite della derivata si vede subito che f è derivabile in $x = \pm 1$ e risultando $f'(\pm 1) = 0$, tali punti risultano di minimo assoluto per f.