Prova scritta di Elementi di Analisi Matematica 2 dell'1 settembre 2020

Parte A (Teoria)

[**T1**] Rispondere ad almeno una delle seguenti domande.

a) Siano a, b, f due funzioni reali continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e y_1, y_2 due soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Cosa vuol dire che y_1, y_2 sono indipendenti? Se y_1, y_2 sono indipendenti, qual è l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$?

b) Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Qual è il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}?$$

Giustificare la risposta.

[**T2**] Rispondere ad almeno una delle seguenti domande

a) Enunciare e dimostrare la **formula** fondamentale del calcolo integrale.

b) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per le serie.

Parte B (Esercizi)

[**E1**] Svolgere almeno uno dei seguenti esercizi:

a)Data la funzione definita dalla legge

$$G(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{3+t^2}\,\mathrm{dt}$$

i) calcolarne la derivata prima;

ii) scrivere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = 0$.

b) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = x^2 + 2y(2y - x)$$

determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0, 2)$, $(-2, -1)$ e $(2, -1)$.

[**E2**] Svolgere almeno uno dei seguenti esercizi:

a) Studiare il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{n^2}\right)^n$$

b) Determinare, se esiste, una primitiva della funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\log(x+2)}{x^2}$$

infinitesima per $x \to +\infty$.