

Esercizi sulle funzioni reali di due variabili reali

INSIEMI DI DEFINIZIONE

Determinare il dominio A di ciascuna delle seguenti funzioni

- (1) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
- (2) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$
- (3) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- (4) $f(x, y) = \log_2(x^2 + y^2 - 4)$
- (5) $f(x, y) = \sqrt{3y - x} - \sqrt[4]{x - 2y^2}$
- (6) $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4)$.

Determinare poi l'interno, la frontiera e il derivato dell'insieme A .

LIMITI

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

- (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$
- (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$
- (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x \log y}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$
- (4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin x \sin y \log(x^4 + y^4)$
- (6) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y} \log(1+x)$
- (7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{x^4 + y^2}$
- (8) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x+3y}{x^2-y^2}$
- (9) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{3x^2+2y^2}$

CALCOLO DIFFERENZIALE

- (1) Sia f la funzione reale di due variabili reali definita dalla legge $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e sia $(x_0, y_0) = (2, -1)$. Calcolare $\nabla f(x_0, y_0)$. Determinare, poi, ∇f precisandone l'insieme di definizione.
- (2) Dire se le funzioni

$$a) u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad b) u(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x, \quad c) u(x, y) = x^3 + 3xy^2$$

soddisfano l'equazione $u_{xx} + u_{yy} = 0$, nota come *equazione di Laplace*

- (3) Verificare che la funzione $u(x, t) = e^{-t} \sin kx$ soddisfa l'equazione $u_t = \frac{1}{k^2} u_{xx}$, nota come *equazione del calore*

- (4) Verificare che le funzioni

$$a) u(x, t) = \sin x \sin t, \quad b) u(x, t) = \sin(x - t) + \log(x + t)$$

soddisfano l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$, nota come *equazione delle onde*

- (5) Verificare che la funzione $f(x, y) = |y| \log(1 + x)$ è differenziabile in $(0, 0)$
(6) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = x\sqrt{y - 3}$$

nel punto $(2, 12)$ e lungo il vettore $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

- (7) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = y^2\sqrt{2x - 3}$$

nel punto $(2, 1)$ e lungo il vettore $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- (8) Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = x\sqrt{y - 3}$$

e calcolarne, se esiste, la derivata direzionale nel punto $(1, 4)$ lungo la direzione della retta di equazione $4x + 3y - 7 = 0$.

- (9) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(|x| + |y|) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$.

- (10) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(y^2 + 1)}{2x^2 + 3y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

studiarne la continuità e l'esistenza delle derivate parziali prime nel punto $(0, 0)$.

- (11) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctg(x^2 y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) stabilire se è continua nel suo insieme di definizione;

(b) stabilire se è differenziabile nel suo insieme di definizione.

- (12) Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità in $(0, 0)$ delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{y^2 + |x|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

- (1) Determinare e classificare gli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni reali di due variabili reali:

- (a) $f(x, y) = xe^{y-x} - y$
- (b) $f(x, y) = 2x^3 + 3y^3 + 3x^2 - 36y$
- (c) $f(x, y) = x^3 - xy^2 + 2xy$
- (d) $f(x, y) = 4xy^2 + 4x^2y - 6xy + 5$
- (e) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 1 + (x + y)^2$

- (2) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

- i) determinarne gli eventuali estremi relativi in \mathbb{R}^2
- ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$.

- (3) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$$

- i) determinarne gli eventuali estremi relativi in \mathbb{R}^2
- ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

- (4) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

- i) determinarne gli eventuali estremi relativi in \mathbb{R}^2
- ii) determinarne gli eventuali estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$.

- (5) Determinare gli eventuali estremi relativi della funzione e precisare se sono anche estremi assoluti.

$$f(x, y) = x(\log^2 x + y^2)$$

e precisare se sono anche estremi assoluti.

- (6) Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = \log \frac{x}{x^2+y^2}$ nell'insieme $X = [1, 5] \times [-1, 4]$
- (7) Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = xy(x - y^2 + 1)$$

nell'insieme $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 1\}$.