ANALISI

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-2x)^n$$

$x > 0 \Rightarrow$ A segni alterni

$x = 0 \Rightarrow \sum 1^n$ = diverge positivamente

$x < 0 \Rightarrow$ diverge positivamente

- Studiamo il caso in cui $\sum$ è a segni alterni

$\lim |(1-2x)|^n = +\infty$ non può convergere assolutamente

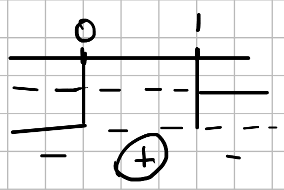
- Applico il criterio del rapporto su $\{|a_n|\}$

$$\lim \frac{|1-2x|^{n+1}}{|1-2x|^n} = |1-2x|$$

- per $x = 1 \Rightarrow |1-2x| = 1 \Rightarrow$ non posso applicare il criterio $(\ell = 1)$
- per $x > 1 \vee x < 0$ $|1-2x| < 1$ conv. $(\ell < 1)$
- per $0 < x < 1$ $|1-2x| > 1 \Rightarrow$ div pos $(\ell > 1)$

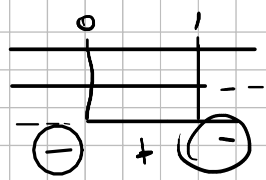
- Dobbiamo studiare $\sum (-1)^n \Rightarrow$ oscilla

1. $\begin{cases} -1 + 2x > 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1 \\ 1 - 2x > 1 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$



$0 < x < 1$

2. $\begin{cases} -1 + 2x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1 \\ 1 - 2x < 1 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$



$x < 0 \vee x > 1$

2. $-1 < 1 - 2x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x > -1 \Rightarrow -2x > -2 \Rightarrow x < 1 \\ 1-2x < 1 \Rightarrow -2x < 1-1 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$

1. $1 - 2x < -1 \vee 1 - 2x > 1$. $1 - 2x < -1 \Rightarrow -2x < -2 \Rightarrow x > 1$, $x < 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+3}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}$$

Segni alterni

- assoluta convergenza

$$\lim \left|\frac{n+1}{n+3}\right| = 1 \Rightarrow \text{non è a. c.}$$

- studiamo la monotonia

$$\frac{n+1}{n+3} \overset{?}{\geq} \frac{n+2}{n+4} \Rightarrow (n+1)(n+4) \overset{?}{\geq} (n+2)(n+3)$$

$$\Rightarrow \cancel{n^2} + \cancel{4n} + \cancel{n} + 4 > \cancel{n^2} + 3\cancel{n} + \cancel{2n} + 6 \qquad 4 > 6$$

crescente

$$\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim \left|\frac{n}{n^2+1}\right| = 0 \quad \text{potrebbe essere a.c}$$

$$\lim n^\alpha \frac{n}{n^2+1} \underset{\alpha=1}{=} 1 \qquad \begin{matrix}\alpha = 1 \\ \ell \leq 1\end{matrix} \Rightarrow \text{div. pos. (non è ass. conv.)}$$

- monotonia

$$\frac{n}{n^2+1} \overset{?}{\geq} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \Rightarrow n\left((n+1)^2+1\right) \overset{?}{\geq} (n+1)(n^2+1)$$

$$n(n^2+2+2n) > n^3 + n + n^2 + 1$$

$$\cancel{n^3} + 2n + 2n^2 \overset{?}{\geq} \cancel{n^3} + \cancel{n} + \cancel{n^2} + 1$$

- decrescente

$$n + n^2 > 1 \Rightarrow n^2 + n - 1 > 0 \text{ Vero}$$

$$\frac{(-1)^n}{n^2}$$

- $\lim_{n} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = \begin{smallmatrix} -0 \\ +0 \end{smallmatrix}$ converge

---

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

- a segni alterni
- assoluta convergenza

$\lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \varnothing$ potrebbe essere a.c

$\lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ siccome $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è asintotica alla serie armonica che div pos

$\Downarrow$

div. pos

NON è a.c.

- studio la monotonia

A sentimento, siccome $1/n$ è decrescente $\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è decr.

$\lim (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \begin{smallmatrix} +0 \\ -0 \end{smallmatrix}$ + Leibniz $\Rightarrow$ converge

decrescente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{1/n}$$

$$\boxed{\frac{1-\cos t}{t} = 0}$$

$$\frac{1-\cos t}{t^2} = 1/2$$

- serie a termini non negativi

$$\lim \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{1/n} = \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n} = 0 \Rightarrow \text{potrebbe convergere}$$

$$\lim \frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{1/n \cdot \frac{4}{n^3}} \cdot \frac{4}{n^3} \quad n^\alpha \qquad \alpha = 3 \quad \ell = \frac{1}{2} \qquad \text{converge}$$

$$1-\cos\frac{2}{n^2} \sim \frac{4}{n^4}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}\, x^n$$

- $\boxed{x=0 \Rightarrow \text{Converge con somma } 0}$
- se $x \neq 0$
  - se $x > 0 \Rightarrow$ t. positivi
  - se $\boxed{x<0} \Rightarrow$ segni alterni
- assoluta convergenza

$$\lim \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}} |x|^n \Rightarrow \boxed{\text{div. pos.}}$$ (non è ass. conv

- per $x > 0 \Rightarrow \sum a_n$ div. positivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}\, x^n$$

per $x<0$

monotonia: con t. della p. d. s. generalizzata

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \quad (<) \Rightarrow \text{se è vera è crescente}$$

CRESCENZA

$$a_{n+1} > a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^2}{(2n+2)\sqrt{(n+1)^5+6}}\,|x|^{n+1}}{\frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}\,|x|^{n}} = |x|$$

$|x| > 1$

$$\begin{cases} x>1 \\ -x>1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x>1 \\ x<-1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\forall\ x<-1 \lor x>1 \quad \text{crescente}}$$

$x<0$

- per $\boxed{x<-1}$ è crescente $\Rightarrow$ oscillante (per COROLLARIO 1)
- $-1<x<0$ è decrescente (Hyp: t. di Leibniz)

$$\lim \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}\, x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{n^5\left(1+\frac{6}{n^5}\right)}$$

$$n^2\sqrt{n^3(\ \ )}$$

~~$\Rightarrow$~~ $\boxed{\text{converge}}$

- $x=1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}}\,(-1)^n \qquad \frac{n^2}{(2n+1)\sqrt{n^5+6}} > \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\sqrt{(n+1)^5+6}} \Rightarrow$$

$$n^2\left[(2n+2)\sqrt{(n+1)^5+6}\right] > (n+1)^2\left((2n+1)\sqrt{n^5+6}\right)$$

$\Rightarrow$ decrescente

$$n^2 \ \cancel{<}\ (n+1)^2$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n^5+6}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^5+6}}\right]$$

$$\lim \frac{n^2}{(2n+1)(\sqrt{n^5+6})} = 0 \begin{array}{l} +0 \\ -0 \end{array} \Rightarrow 0 \;\; \Big/ \Rightarrow$$

x Leibniz

converge

decrescente