UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Dipartimento di Matematica e Informatica

Anno Accademico 2016-2017

**Corso di Laurea in Informatica** (L-31)

Seconda prova in itinere di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU)

5 Giugno 2017

---

*Tempo a disposizione.* 120 minuti.

---

**1** Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = 5e^x + \arctan(4x^3 + 1).$$

(a) Provare che $f$ è invertibile in $\mathbb{R}$.
(b) Determinare l'insieme di definizione della funzione inversa $f^{-1}$.
(c) Calcolare, se esiste, $(f^{-1})'(5 + \frac{\pi}{4})$.

**2** Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{|x|^5}}{|x| + 2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Studiare la continuità e la derivabilità di $f$ nel suo insieme di definizione.
(b) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x = 1$.

**3** Dimostrare che per ogni $x \in [0, +\infty[$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\ln(1 + x) \leq \frac{x}{\sqrt{1 + x}}.$$

**4** Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 4} \left(x - \ln|x + 1|\right).$$

Studiare $f$ e tracciarne il grafico.

*5 Giugno 2017*
**Svolgimento della prova scritta**

**1** (a) La funzione $f$ assegnata è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Si ha:

$$f'(x) = 5e^x + \frac{12x^2}{1+(4x^3+1)^2}.$$

Evidentemente $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f$ è strettamente monotona in $\mathbb{R}$ e dunque è ivi invertibile.

(b) L'insieme di definizione della funzione inversa $f^{-1}$ di $f$ in $\mathbb{R}$ è il codominio della funzione $f$. Sfruttando la continuità di $f$ e il teorema dei valori intermedi generalizzato, si deduce che tale codominio è l'intervallo

$$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[ = \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$$

quindi $\mathscr{D}_{f^{-1}} = \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

(c) Si vede subito che l'equazione $f(x) = 5 + \frac{\pi}{4}$ è verificata se e solo se $x = 0$. Quindi per il teorema di derivazione delle funzioni inverse, avendosi $f'(0) = 5$, si ottiene

$$f^{-1}\left(5+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}.$$

**2** (a) La funzione $f$ è banalmente continua in tutto il suo insieme di definizione $\mathbb{R}$. Inoltre, $f$ è derivabile sicuramente per ogni $x \neq 0$. Resta da studiare, quindi, la derivabilità solo nel punto $x = 0$. Procediamo, ad esempio, con la definizione di derivata costruendo il limite del rapporto incrementale di $f$ relativo al punto $x = 0$. Si ha:

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\sqrt[3]{|x|^5}}{|x|+2}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{|x|^{\frac{2}{3}}}{x(|x|+2)}.$$

Procedendo con il calcolo dei limiti destro e sinistro, si trova che il suddetto limite vale 0, quindi $f$ è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

(b) Per ogni $x > 0$ si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{x+2}$$

e

$$f'(x) = \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{x+2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{(x+2)^2}$$

da cui $f'(1) = \frac{4}{9}$.
Inoltre, $f(1) = \frac{1}{3}$. La retta tangente al grafico di $f$ in $x = 1$ ha quindi equazione

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{4}{9}x - \frac{1}{9}.$$

**3** Provare la disuguaglianza assegnata equivale a far vedere che

$$f(x) := \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}} < 0, \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Con facili conti si trova che

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}, \qquad \forall x \in [0, +\infty[$$

e si prova che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty[$ e, in particolare, $f'(x) = 0$ in $[0, +\infty[$ se e solo se $x = 0$.

Ne viene dunque che $f$ è decrescente in $[0, +\infty[$ e in $x = 0$ si localizza un punto di massimo assoluto, quindi

$$f(x) \leq f(0) = 0, \qquad \forall x \in [0, +\infty[,$$

da cui la validità della disuguaglianza.

**4** **Insieme di definizione.** Si impongono le seguenti condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ |x+1| > 0 \end{cases}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\mathscr{D}_f = ]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[.$$

Può tornare utile riscrivere la funzione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x - \ln|x+1| & \text{se } x < -2 \vee x > 2 \\ -(x - \ln|x+1|) & \text{se } -2 < x < 2 \wedge x \neq -1 \end{cases}.$$

In tal modo, tracceremo il grafico di $g(x) = x - \ln|x+1|$ nel suo dominio naturale $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e in $]-2, -1[\cup]-1, 2[$ considereremo solo il suo simmetrico rispetto all'asse $\vec{x}$.

**Comportamento di $g$ agli estremi di $\mathscr{D}_g$.** Si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to -1^\pm} g(x) = +\infty.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale per il grafico di $g$ (e quindi di $f$).

Al fine di precisare meglio il grafico di $f$, osserviamo che

$$\lim_{x \to -2^\pm} f(x) = \pm 2 \pm \ln 3, \qquad \lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \pm 2 \pm \ln 3.$$

Quindi per $f$, $x = \pm 2$ sono due punti di discontinuità di prima specie.

**Monotonia di $g$.** Si trova subito che

$$g'(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_g.$$

Quindi $g$ è crescente in $]-\infty, -1[$ e in $[0, +\infty[$ ed è decrescente in $]-1, 0[$. La funzione $g$ ammette come unico estremo relativo (non assoluto) il punto $x = 0$ che, alla luce di quanto trovato, è un punto di minimo (ed è di massimo relativo per $f$).

**Concavità e convessità di $g$.** Si trova subito che

$$g''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad \forall x \in \mathscr{D}_g.$$

Quindi $g$ è convessa nel suo insieme di definizione.

**Grafico di $f$.** Nella figura seguente è riportato in magenta il grafico di $f$. La parte tratteggiata in azzurro indica i rami del grafico di $g$ dei quali è stato considerato il simmetrico rispetto all'asse $x$.