DIPARTIMENTO
di MATEMATICA
e INFORMATICA

Anno Accademico 2018-2019

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU) [A-L]

26 Settembre 2019

Tempo a disposizione. 120 minuti.

---

1 Calcolare i seguenti limiti:

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}, \qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\sin\frac{5}{x}}{\cos\left(\frac{2}{x}\right)-1}.$$

2 Siano date le funzioni reali di una variabile reale definite dalle leggi

$$h(x) = x(\ln x - 1), \qquad k(x) = \sqrt{4x - x^2}.$$

(a) Dopo aver giustificato l'esistenza di un'unica retta tangente al grafico di h nel suo punto di ascissa $x = \sqrt{\mathrm{e}}$, scriverne l'equazione.

(b) Studiare la derivabilità della funzione k nel suo insieme di definizione e determinare l'equazione della retta tangente al grafico di k nel suo punto di ascissa $x = 4$.

3 Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x^2)}{x}.$$

Studiare f e tracciarne un grafico qualitativo.

26 Settembre 2019

Svolgimento della prova scritta

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Limite (a).* Il limite presenta la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applicando il Teorema di De L'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}\right).$$

Quest'ultimo limite presenta ancora la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applicando nuovamente il Teorema di De L'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\right) = \frac{0}{2} = 0.$$

Pertanto, il limite assegnato esiste e vale 0.

Limite (b). Posto $t = \frac{1}{x}$, per $x \to +\infty$ si ha $t \to 0$ e il limite diventa:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)\sin 5t}{\cos(2t) - 1} = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{\ln(1+t)\sin 5t}{1-\cos(2t)}\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{\frac{1}{4}\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{\sin 5t}{5t}5}{\frac{1-\cos(2t)}{(2t)^2}}\right) = -\frac{\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1\cdot 5}{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (a) h è derivabile in $x = \sqrt{e}$. Ricordando il significato geometrico di derivata prima di una funzione in un punto, si deduce che esiste un'unica retta tangente al grafico di h nel suo punto di ascissa $x = \sqrt{e}$. Tale retta ha equazione

$$y - h(\sqrt{e}) = h'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}).$$

Si ha

$$h(\sqrt{e}) = \sqrt{e}(\ln\sqrt{e} - 1) = -\frac{\sqrt{e}}{2},$$
$$h'(\sqrt{e}) = \left[\ln x - 1 + x\cdot\frac{1}{x}\right]_{x=\sqrt{e}} = [\ln x]_{x=\sqrt{e}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi la retta richiesta ha equazione

$$y + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{e})$$

cioè

$$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{e}.$$

(b) La funzione k è definita in $[0,4]$. Essa è derivabile in $]0,4[$ e in tale intervallo risulta

$$k'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

Risulta

$$\lim_{x\to 4^-} k'(x) = -\infty,$$

quindi k presenta in $x = 4$ un punto a tangente verticale. Ne viene che $x = 4$ è l'equazione della retta tangente al grafico di k nel punto $(4,0)$.

$\boxed{3}$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poiché per ogni $x \in$ dom f si ha

$$f(-x) = \frac{1 + \ln[(-x)^2]}{-x} = -\frac{1 + \ln(x^2)}{x}0 = -f(x),$$

se ne deduce che f è dispari e dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Ne viene che la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale (sia destro che sinistro) per f e la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale (sia destro che sinistro) per f.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x^2)}{x^2}.$$

Dunque, f è crescente in $[-\sqrt{\mathrm{e}}, 0[$ e in $]0, \sqrt{\mathrm{e}}]$, f è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{\mathrm{e}}]$ e in $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$. Quindi f ammette un minimo relativo in $x = -\sqrt{\mathrm{e}}$ ed il corrispondente punto è $(-\sqrt{\mathrm{e}}, -\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}})$; inoltre ammette un massimo relativo in $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ ed il corrispondente punto è $(\sqrt{\mathrm{e}}, \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}})$.

Infine, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$f''(x) = \frac{2[\ln(x^2) - 2]}{x^3}.$$

Dunque, f è convessa in $[-\mathrm{e}, 0[$ e in $[\mathrm{e}, +\infty[$ e concava in $]-\infty, -\mathrm{e}]$ e in $]0, \mathrm{e}]$. Ne viene che vi sono due punti di flesso: $F_1(\mathrm{e}, \frac{3}{\mathrm{e}})$ e $F_2(-\mathrm{e}, -\frac{3}{\mathrm{e}})$.