Test di Strutture Discrete
16 Luglio 2020
SOLUZIONI

1. Se $B \setminus A = C \setminus A$ allora deve necessariamente essere vero che

   A. $B = C$

   B. $A \setminus C = A \setminus B$

   C. $B \cup A = C \cup A$ **(Risposta corretta)**

   D. $B \cap A = C \cap A$

   Giustificazione: *Se consideriamo i tre insiemi* $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1, 3\}$ *abbiamo che* $B \setminus A = C \setminus A = \{3\}$ *però*

   - $B \neq C$ *e quindi la risposta A è sbagliata;*
   - $A \setminus C = \{2\}$ *mentre* $A \setminus B = \{3\}$ *e quindi la risposta B è sbagliata;*
   - $B \cap A = \{1, 2\}$ *mentre* $C \cap A = \{1\}$ *e quindi anche la risposta D è sbagliata.*

   Dimostriamo che la risposta C è corretta osservando che per ogni coppia di insiemi X *e* Y *l'insieme unione* $X \cup Y$ *si ottiene aggiungendo agli elementi di* X *tutti gli elementi di* Y *che non sono già in* X. *Quindi* $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$ *da cui* $B \cup A = (B \setminus A) \cup A = (C \setminus A) \cup A = C \cup A$.

2. Il paradosso di Russell è basato sulla costruzione del seguente "insieme" S

   A. $S = \{X : X \not\subseteq X\}$

   B. $S = \{X : X \notin X\}$ **(Risposta corretta)**

   C. $S = \{X : X \subseteq X\}$

   D. $S = \{X : X \in X\}$

   Giustificazione: *Ricordiamo che il paradosso nasce dal considerare* S *come insieme e dalla conseguenza della sua definizione, a causa della quale avremmo che* $S \in S$ *se e solo se* $S \notin S$.

3. Sia S un insieme finito e R una relazione di equivalenza definita su S. Se le classi di equivalenza sono n, e se $[x]$ e $[y]$ sono 2 classi di equivalenza distinte, quali delle seguenti affermazioni è vera?

   A. xRy

   B. $n > |S|$

   C. $[x] \cap [y] = \emptyset$ **(Risposta corretta)**

   D. Tutte le affermazioni precedenti possono essere false, dipende dalla relazione R

   Giustificazione: *La definizione di relazione di equivalenza ci dice che due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte. Inoltre, il numero delle classi di equivalenza non può ovviamente superare il numero degli elementi dell'insieme su cui viene definita la relazione. Infine, se* $[x]$ *e* $[y]$ *sono* 2 *classi di equivalenza distinte, allora i loro rappresentanti* x, y *non sono in relazione* R *altrimenti le classi coinciderebbero.*

4. Sia data la seguente famiglia di insiemi

   $$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 7\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}\}$$

   Uno hitting set minimo per tale famiglia ha cardinalità

   A. 2

   B. 3

   C. 4 **(Risposta corretta)**

   D. 5

   Giustificazione: *La famiglia contiene* 4 *insieme a due a due disgiunti, ovvero* $\{4, 5\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}$. *Quindi, un qualunque hitting set deve avere almeno cardinalità* 4. *L'insieme* $\{5, 9, 2, 7\}$ *è un hitting set e quindi è un minimum hitting set.*

5. Quali delle seguenti uguaglianze è vera?

   A. $31 \bmod 7 = 4$

   B. $-31 \bmod 7 = 4$ **(Risposta corretta)**

   C. $-31 \bmod -7 = -4$

   D. $31 \bmod -7 = 4$

Giustificazione: *Ricordiamo che il modulo, per definizione, non è negativo. Quindi la C è sbagliata. D'altro canto* $31 = 4 \cdot 7 + 3$ *e quindi* $31 \bmod 7 = 3$, *ed inoltre* $31 = (-4) \cdot (-7) + 3$ *da cui* $31 \bmod -7 = 3$. *Quindi, la A e la D sono sbagliate. Infine, abbiamo che* $-31 = (-5) \cdot 7 + 4$ *che giustifica la B come risposta corretta.*

6. Se utilizziamo il Crivello di Eratostene per calcolare tutti i numeri primi compresi tra 2 e 400, l'ultimo numero primo di cui cancelliamo tutti i multipli, per poi fermarci, è

   A. 19 **(Risposta corretta)**

   B. 29

   C. 59

   D. 79

   Giustificazione: *Il crivello di Eratostene, applicato per calcolare tutti i numeri compresi tra* 2 *e* n *si ferma quando supera il valore di* $\sqrt{n}$. *Ovvero, cancella tutti i multipli di ogni primo che trova tra* 2 *e* $\sqrt{n}$, *che nel nostro caso è* 20. *Quindi, l'ultimo numero primo di cui cancella i multipli è* 19.

7. Quali dei seguenti è l'inverso di 35 modulo 13?

   A. 3 **(Risposta corretta)**

   B. 4

   C. 5

   D. L'inverso di 35 modulo 13 non esiste.

   Giustificazione: *Se moltiplichiamo* 35 *per* 3 *il valore* 105. *Calcoliamo la divisione intera* $105 \div 13$ *e otteniamo che* $105 = 8 \cdot 13 + 1$. *Quindi,* $(3 \cdot 35) \bmod 13 = 1$.

8. Se p e q sono due numeri primi gemelli tali che $3 < p < q$ allora esiste n tale che

   A. $p + 1 = 6n$ **(Risposta corretta)**

   B. $p + 1 = 5n + 1$

   C. $p + 1 = 4n + 2$

   D. $p + 1 = 2n + 4$

   Giustificazione: *Due numeri primi gemelli,* p, q *tali che* $3 < p < q$ *ci danno una sequenza di 3 interi consecutivi* $p, p+1, p+2 = q$. *Almeno* 1 *di questi* 3 *interi deve essere divisibile per* 2 *ed almeno* 1 *deve essere divisibile per* 3. *Dal momento che* p *and* $p + 2 = q$ *sono primi, allora* $p + 1$ *deve essere divisibile sia per* 2 *che per* 3 *e, di conseguenza, deve essere divisibile per* 6.

9. Il numero delle combinazioni di 6 elementi di classe 4 con ripetizione ossia $C^r_{6,4}$ è uguale a

   A. 70

   B. 84

   C. 126 **(Risposta corretta)**

   D. 210

   Giustificazione: *Il numero delle combinazioni di* n *elementi di classe* k *con ripetizione ossia* $C^r_{n,k}$ *è uguale a* $\binom{n+k-1}{k}$, *quindi nel nostro caso specifico* $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$.

10. All'esame scritto di Strutture Discrete si presentato 8 studenti, per la precisione 4 studenti e 4 studentesse. Se superano l'esame in 4 qual è la probabilità che a superarlo siano stati 2 studenti e 2 studentesse?

    A. $\frac{17}{35}$

    B. $\frac{1}{2}$

    C. $\frac{18}{35}$ **(Risposta corretta)**

    D. $\frac{2}{3}$

    Giustificazione: *Il numero dei casi possibili è* $\binom{8}{4} = 70$. *Il numero dei casi in cui a superarlo siano stati* 2 *studenti e* 2 *studentesse ci viene dato dal numero di possibili coppie di studenti moltiplicato per il numero di possibile coppie di studentesse, ossia* $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$. *Quindi, la probabilità che vogliamo trovare è* $\frac{36}{70} = \frac{18}{35}$

11. Se lanciamo 2 dadi, qual è la probabilità di avere come risultato 2 numeri uguali?

    A. $\frac{1}{5}$

    B. $\frac{1}{6}$ **(Risposta corretta)**

    C. $\frac{1}{9}$

    D. $\frac{1}{12}$

    Giustificazione: *Il numero dei casi possibili è ovviamente* 36 *e di questi solo* 6 *sono i casi in cui entrambi i dadi danno lo stesso risultato. Quindi, la probabilità che vogliamo trovare è* $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

12. In una scatola ci sono 10 lampadine, ma solo 3 di esse sono funzionanti. Se ne estraiamo 2, qual è la probabilità che almeno 1 delle 2 lampadine estratte sia funzionante?

   A. $\frac{5}{15}$

   B. $\frac{6}{15}$

   C. $\frac{7}{15}$

   D. $\frac{8}{15}$ **(Risposta corretta)**

   Giustificazione: *Calcoliamo la probabilità che entrambe le lampadine estratte siano non funzionanti. Il numero di possibili coppie di lampadine è* $\binom{10}{2} = 45$, *mentre il numero di possibile coppie di lampadine non funzionanti è* $\binom{7}{2} = 21$. *Quindi, la probabilità di estrarre due lampadine non funzionanti è* $\frac{21}{45}$. *La probabilità di "non" estrarre due lampadine entrambe non funzionanti, ossia la probabilità che almeno una delle due lampadine sia funzionante è allora* $1 - \frac{21}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

13. Sia dato un grafo G con 6 archi e nessun ciclo di lunghezza 3. Se M rappresenta la sua matrice di adiacenza, quali sono i possibili valori per la coppia (x, y) ?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

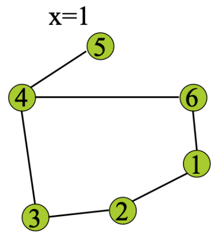
   A. $(0, 0)$

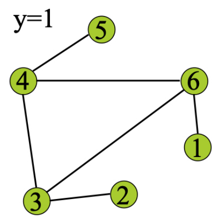
   B. $(0, 1)$

   C. $(1, 0)$ **(Risposta corretta)**

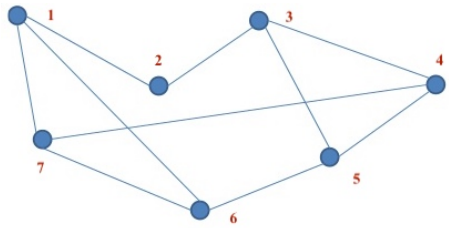
   D. $(1, 1)$

   Giustificazione: *Visto che il grafo ha* 6 *archi,* x *e* y *non possono essere uguali entrambi a* 0, *perché altrimenti il grafo avrebbe* 5 *archi, né possono essere entrambi uguali ad* 1 *perché altrimenti il grafo avrebbe* 7 *archi. Quindi, le risposte A e D sono sbagliate. In figura abbiamo i grafi risultanti per* $x = 1$ *e* $y = 1$. *Possiamo quindi facilmente vedere che per* $y = 1$ *si genera un ciclo di lunghezza* 3 *ossia* $3 - 4 - 6 - 3$. *Quindi* $y = 0$ *e quindi* $x = 1$.





14. Dato il grafo in figura, quanti archi bisogna aggiungere per avere un circuito euleriano?



   A. 0, il grafo è euleriano

   B. 1

   C. 2

   D. 3 **(Risposta corretta)**

   Giustificazione: *Il grafo ha* 6 *vertici di grado dispari, quindi non è euleriano. Per assicurarci che il grafo abbia un circuito euleriano, dobbiamo fare in modo che tutti i vertici abbiano grado pari. Aggiungiamo gli archi* $(1, 3), (4, 6), (5, 7)$ *e tutti i vertici avranno grado pari e quindi l'esistenza di un circuito euleriano è garantita dal teorema di Eulero.*

15. Dato il grafo utilizzato nella domanda precedente, se x è il numero minimo di archi da rimuovere per disconnettere il grafo, e y è il numero minimo di vertici da rimuovere per disconnettere il grafo, allora la coppia (x, y) è

   A. $(2, 2)$ **(Risposta corretta)**

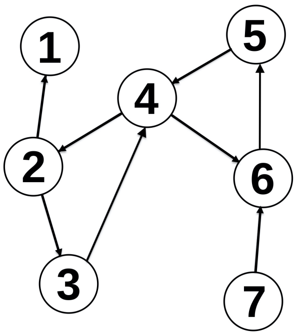
   B. $(3, 2)$

   C. $(2, 3)$

   D. $(3, 3)$

   Giustificazione: *Rimuovendo gli archi* $(1, 2)$ *e* $(2, 3)$ *si disconnette il grafo (il vertice* 2 *diventa un vertice isolato). Analogamente, rimuovendo i vertici* 1 *e* 2 *si disconnette il grafo, isolando il vertice* 2.

16. Dato il grafo orientato in figura quante sono le sue componenti fortemente connesse?



A. 1

B. 2

C. 3 **(Risposta corretta)**

D. 4

Giustificazione: *Ricordiamo che in un grafo orientato, una componente fortemente connessa è un insieme di vertici tali che per ogni coppia di vertici nell'insieme* (x, y) *esiste un cammino da* x *a* y *ed un cammino da* y *a* x. *Osservando il grafo, notiamo che i vertici* 1 *e* 7 *sono ognuno, da solo, in una componente fortemente conness. Per i rimanenti* 5 *vertici, ossia* $2, 3, 4, 5, 6$ *si può verificare facilmente che esiste un cammino da ognuno di essi ad ognuno degli altri (e viceversa).*