DIPARTIMENTO
di MATEMATICA
e INFORMATICA

Anno Accademico 2018-2019

Corso di Laurea in Informatica (L-31)

Prova scritta di **Elementi di Analisi Matematica 1** (6 CFU) [A-L]

26 Giugno 2019

Tempo a disposizione. 120 minuti.

$\boxed{1}$ Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)}{\sqrt{x-1}}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione X di f.
(b) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di X specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.
(c) Determinare l'insieme dei punti di accumulazione di X.

$\boxed{2}$ Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$\left|e^{z^2+\ln 3}\right| = \left[2 + e^{2\pi i} - \frac{\operatorname{Im} z}{i}\right]^2.$$

ì

$\boxed{3}$ Sia data la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt{2x+5}\, e^{-x}.$$

(a) Studiare f e tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Determinare, se esistono, il minimo ed il massimo assoluti di f sugli intervalli

$$I_1 = \left[-\frac{5}{2}, 0\right[, \qquad I_2 = [-1, +\infty[.$$

(c) Determinare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

26 Giugno 2019

Svolgimento della prova scritta

1 (a) $X = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{2-x} > 0,\ x - 1 > 0\right\} =]1, 2[$.
(b) $\inf X = 1$, $\sup X = 2$, non esiste $\min X$, non esiste $\max X$.
(c) $DX = [1, 2]$.

2 Sia $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Osservato che $e^{2\pi i} = 1$, l'equazione assegnata si riscrive come segue:

$$\left|e^{x^2-y^2+2xyi} \cdot e^{\ln 3}\right| = \left[4 - \frac{y \cdot i}{i \cdot i}\right]^2$$

cioè

$$3|e^{x^2-y^2+2xyi}| = (3 + iy)^2,$$

ovvero $3e^{x^2-y^2} = 9 - y^2 + 6yi$ o anche

$$3e^{x^2-y^2} + 0 \cdot i = 9 - y^2 + 6yi.$$

Per definizione, due numeri complessi in forma algebrica sono uguali se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria. Alla luce di ciò, se ne deduce il sistema:

$$\begin{cases} 3e^{x^2-y^2} = 9 - y^2 \\ 0 = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3e^{x^2} = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2} = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \ln 3 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\ln 3} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Se ne deduce che i numeri complessi $z_1 = -\sqrt{\ln 3} + 0 \cdot i$ e $z_2 = \sqrt{\ln 3} + 0 \cdot i$ sono le uniche soluzioni dell'equazione assegnata.

3 (a) $\operatorname{dom} f = [-\frac{5}{2}, +\infty[$. La funzione è non negativa nel suo insieme di definizione (precisamente, si annulla solo se $x = -\frac{5}{2}$. Inoltre, f è continua in $\operatorname{dom} f$. Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

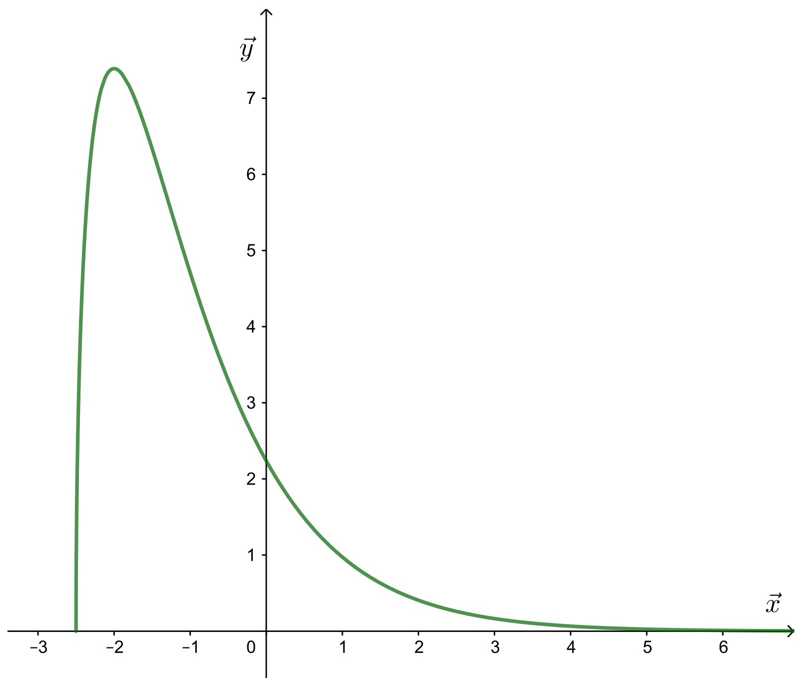
dunque l'asse $\vec{x}$ è asintoto orizzontale (destro) per il grafico di f. Inoltre,

$$f'(x) = -\frac{2e^{-x}(x+2)}{\sqrt{2x+5}}, \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}.$$

Si vede subito che il punto $x = -\frac{5}{2}$ è un punto di flesso a tangente verticale per f. Studiando il segno di f' si vede facilmente che f è crescente in $[-\frac{5}{2}, -2]$ e decrescente in $[-2, +\infty[$ e che f ammette un punto di massimo assoluto in $x = -2$ e tale massimo vale $f(-2) = e^2$. Infine,

$$f''(x) = \frac{2e^{-x}(2x^2+8x+7)}{(2x+5)^{3/2}}, \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}.$$

Studiando il segno di f'' si deduce facilmente che f è convessa in $[\frac{1}{\sqrt{2}} - 2, +\infty[$ ed è concava in $[-\frac{5}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - 2[$. Dunque il punto di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2$ è un punto di flesso per f.



(b) Si ha:

$$\min_{I_1} f = 0, \quad \text{per } x = -\frac{5}{2}; \qquad \max_{I_1} f = e^2, \quad \text{per } x = -2;$$
$$\text{non esiste } \min_{I_2} f = 0; \qquad \max_{I_2} f = e, \quad \text{per } x = -1.$$

(c) Se $k = 0$, l'equazione $f(x) = k = 0$ ammette una sola soluzione ($x = -\frac{5}{2}$); se $0 < k < e^2$, l'equazione $f(x) = k$ ammette due soluzioni reali distinte; se $k = e^2$, l'equazione $f(x) = k = e^2$ ammette una sola soluzione (ovviamente è $x = -2$); se $k < 0 \vee k > e^2$, l'equazione $f(x) = k$ non ammette soluzioni.