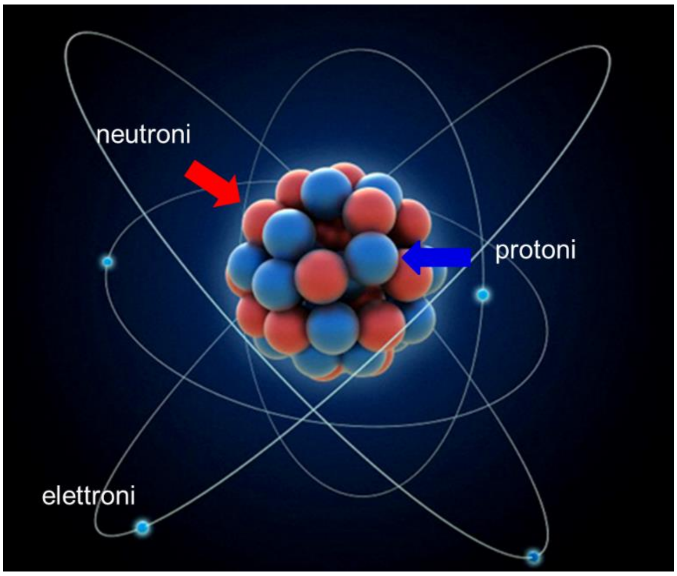
ESERCIZIO 2

L'ordine di grandezza di un atomo è 1 Å (1 Å = 10^{-10} m), mentre la dimensione del nucleo è 10^{-4} Å. Se volessimo disegnare su carta una mappa dell'atomo e scegliessimo di disegnare il nucleo con il diametro di 1 cm, a quale distanza dovremmo disegnare la nube di elettroni?



$$r_A = 10^{-10}\ m \qquad r_N = 10^{-14}\ m$$

$$r_A = 10^4\ r_N$$

Nel disegno:

$$R_N = 10^{-2}\ m \Rightarrow R_A = 10^4\ R_N = 10^4 \times 10^{-2}\ m = 10^2\ m$$

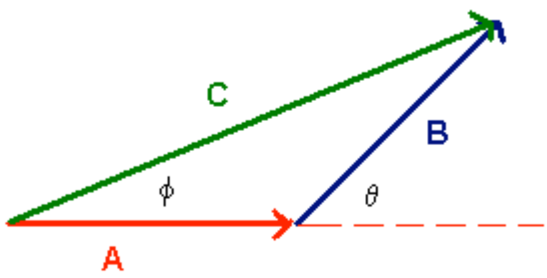
ESERCIZIO N.4

Un aeroplano viaggia per 200 Km verso Est, quindi per 300 Km in direzione Nord-Est inclinata di 60° rispetto ad Est. Determinare lo spostamento finale **C**.

Dati: A = 200 km = $200 \cdot 10^3$ m ; B = 300 km = $300 \cdot 10^3$ m ; $\vartheta = \pi/3$

Soluzione: Determinare C = |**C**| e φ

Risoluzione con metodo grafico (o geometrico)



Teorema del coseno o di Carnot

$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\pi - \vartheta)$

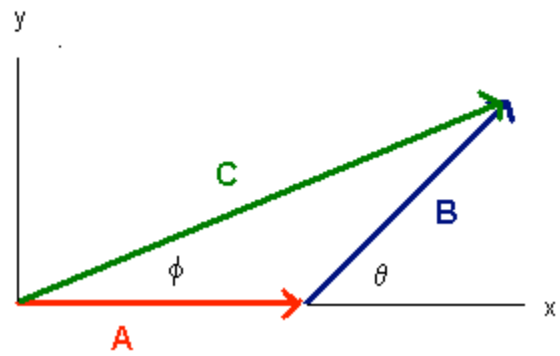
$$\boxed{\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cos(\pi - \vartheta)} = \\ &= \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \times 200 \times 300 \times \cos(2\pi/3)} = 436\,\text{km} \end{aligned}}$$

Teorema dei seni:

$$\boxed{\frac{\sin(\phi)}{B} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{C}}$$

$$\boxed{\phi = \arcsin\left(\frac{B}{C}\sin(\theta)\right) = \arcsin\left(\frac{300}{436}\sin(\pi/3)\right) = 0.64\ \text{rad}}$$

Risoluzione con metodo analitico



$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{C} = C_x\,\hat{\mathbf{i}} + C_y\,\hat{\mathbf{j}}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Rightarrow C_x = A_x + B_x \;\;;\;\; C_y = A_y + B_y$$

$A_x = A = 200$ km, $A_y = 0$

$B_x = B\cdot\cos(\theta) = 300\cdot\cos(\pi/3) = 150$ km; $B_y = B\cdot\sin(\theta) = 300\cdot\sin(\pi/3) = 260$ km

$C_x = 200 + 150 = 350$ km ; $C_y = 0 + 260 = 260$ km

$$\boxed{C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{350^2 + 260^2} = 436\ \text{km}}$$

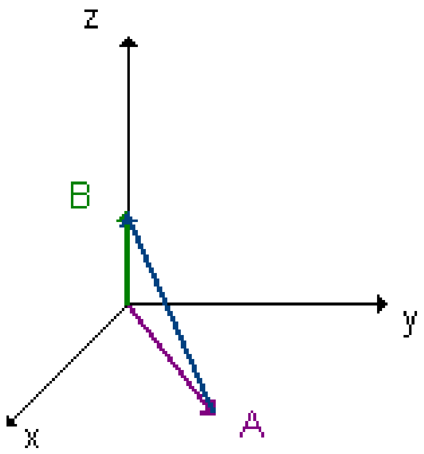
$$\boxed{\text{tg}(\phi) = \frac{C_y}{C_x}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi = \arctan\left(\frac{260}{350}\right) = 36.6^\circ}$$

ESERCIZIO N.8

Due forze costanti $\mathbf{F_1} = \hat{\mathbf{x}} + 2\,\hat{\mathbf{y}} + 3\,\hat{\mathbf{z}}$ (in N) e $\mathbf{F_2} = 4\,\hat{\mathbf{x}} - 5\,\hat{\mathbf{y}} - 2\,\hat{\mathbf{z}}$ (in newton), agiscono entrambe su una particella mentre questa si muove dal punto A≡(20,15,0) (in m) al punto B≡(0,0,7) (in m). Qual è il lavoro eseguito sulla particella?

Dati: $\mathbf{r_A} = 20\,\hat{\mathbf{x}} + 15\,\hat{\mathbf{y}} + 0\,\hat{\mathbf{z}}$ $\quad$ $\mathbf{r_B} = 0\,\hat{\mathbf{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} + 7\,\hat{\mathbf{z}}$



$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -20\,\hat{\mathbf{x}} + (-15)\,\hat{\mathbf{y}} + 7\,\hat{\mathbf{z}}\ (\mathrm{m})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (1+4)\,\hat{\mathbf{x}} + (2\text{-}5)\,\hat{\mathbf{y}} + (3\text{-}2)\,\hat{\mathbf{z}} = 5\,\hat{\mathbf{x}} + (-3)\,\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\ (\mathrm{N})$$

$$\boxed{L = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r} = F_x \cdot \Delta r_x + F_y \cdot \Delta r_y + F_z \cdot \Delta r_z =}$$

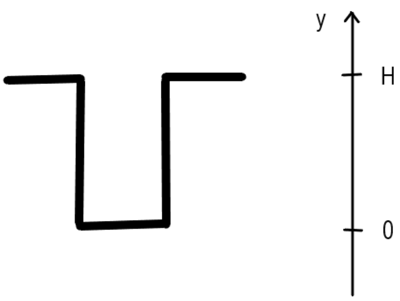
$$= [5\times(-20)] + [-3\times(-15)] + (1\times 7) = -100 + 45 + 7 =$$

$$\boxed{= -48\ \mathrm{J}}$$

CINEMATICA

Esercizio 10

Determinare la profondità di un pozzo sapendo che il tempo tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso, senza velocità iniziale, e quello in cui si ode il rumore, in conseguenza dell'urto del sasso con il fondo del pozzo, è ***t*=4.8 s**. Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma **la velocità del suono pari a 340 m/s**.



L'incognita è H

Leggi oraria del moto del sasso *(moto rettilineo unif. accelerato)*:

$$y_{sasso}(t) = H - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Detto t_1 il tempo di caduta del sasso: $y(t_1) = 0 \rightarrow$ $t_1 = \sqrt{2H/g}$

Legge oraria del suono *(moto rettilineo uniforme)*:

$$y_{suono}(t) = v_S\, t$$

Detto t_2 il tempo impiegato dal suono a percorrere il tratto H: $\rightarrow$ $t_2 = H / v_S$

Deve essere: $t_1 + t_2 = t = 4.8$ s

tenendo conto che $t_1, t_2 > 0$ e $t_1, t_2 < t$

Calcoliamo: $\sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{v_S} = t \rightarrow \sqrt{\frac{2H}{g}} = t - \frac{H}{v_S}$

imponendo che sia $(t - \frac{H}{v_S}) > 0$, ovvero $t > \frac{H}{v_S}$, ovvero $H < v_S\, t = 340 \times 4.8 = 1632$ m

$$\frac{2H}{g} = \left(t - \frac{H}{v_S}\right)^2$$

$$\frac{2H}{g} = t^2 - 2\frac{t}{v_S}H + \left(\frac{H}{v_S}\right)^2 \quad \rightarrow \quad H^2 - 2v_S\left(t + \frac{v_S}{g}\right)H + (v_S t)^2 = 0$$

$$H = v_S\left(t + \frac{v_S}{g}\right) \pm \sqrt{\left[v_S\left(t + \frac{v_S}{g}\right)\right]^2 - (v_S t)^2} \quad ,$$

$$H = v_S\left[\left(t + \frac{v_S}{g}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{v_S}{g}\right)^2 + 2\frac{v_S t}{g}}\right]$$

$$H = 340\left[\left(4.8 + \frac{340}{9.8}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{340}{9.8}\right)^2 + 2\,\frac{340 \times 4.8}{9.8}}\right]$$

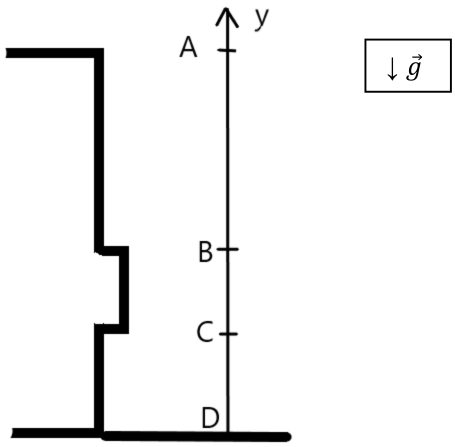
$H_1 = 99.5$ m ; $H_2 = 26756$ m

La soluzione H_2 è da scartare perché risulta $H_2 > 1632$ m

Il pozzo è profondo 99. 5 m → 1.0×10^2 m

CINEMATICA

Esercizio 11
Una sferetta di acciaio è lasciata cadere dal tetto di un edificio. Un uomo posto dietro una finestra alta h=1.2 m nota che la sferetta impiega un tempo Δt=0.125 s ad attraversare la luce della finestra. La sferetta continua la caduta fino ad urtare in modo completamente elastico il marciapiede e riappare sul davanzale della finestra dopo un tempo $\Delta t'$=2.00 s che è passata la prima volta cadendo. Calcolare l'altezza dell'edificio.



Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$y(t) = y_0 + v_0\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$v(t) = v_0 - g\, t$$

$y_0 = y_A = H$ *(da determinare)*

$y_B - y_C = h = 1.2$ m

$\Delta t_{BC} = \Delta t = 0.125$ s

$\Delta t_{CD} = \Delta t' /2 = 1.00$ s *(rimbalzo elastico)*

Nel nostro caso: $y(t) = H - \tfrac{1}{2} gt^2$ $\quad y_D = y(t_D) = H - \tfrac{1}{2}\, g\, t_D^2 = 0 \rightarrow$

$$H = \tfrac{1}{2}\, g\, t_D^2$$

Determiniamo t_D: $\quad t_D = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD} \quad \rightarrow$

dobbiamo determinare Δt_{AB}

$\Delta t_{AB} = t_B - t_A = t_B - 0 = t_B$ $\qquad$ *L'incognita è quindi t_B*

$$y_B = y(t_B) = H - \tfrac{1}{2}\, g\, t_B^2 \qquad y_C = y(t_C) = H - \tfrac{1}{2}\, g\, t_C^2$$

$$h = y_B - y_C = -\tfrac{1}{2}\, g\, t_B^2 + \tfrac{1}{2}\, g\, t_C^2 = \tfrac{1}{2}\, g\, (t_C^2 - t_B^2) = \tfrac{1}{2}\, g\, (t_C - t_B)\, (t_C + t_B)$$

ma $\quad \Delta t_{BC} = t_C - t_B = \Delta t$ e quindi $\quad t_C = \Delta t + t_B$

$$h = \tfrac{1}{2}\, g\, \Delta t\, (\Delta t + 2\, t_B) \qquad \rightarrow \qquad (\Delta t + 2\, t_B) = 2\, h / g\, \Delta t$$

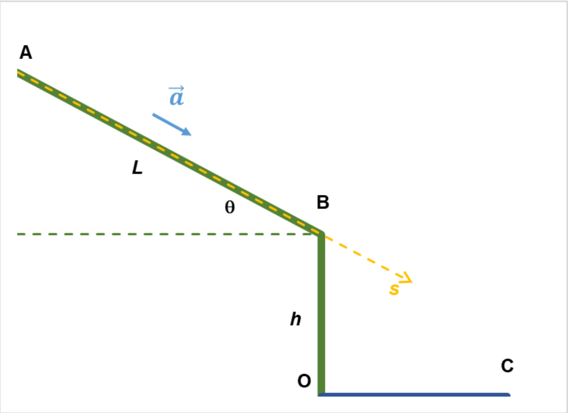
$$t_B = h / (g\, \Delta t) - \tfrac{1}{2}\Delta t = 1.2 / (9.8 \times 0.125) - 0.125 / 2 = 0.917 \text{ s}$$

$$t_D = 0.917 + 0.125 + 1.00 = 2.042 \text{ s}$$

$$H = \tfrac{1}{2}\, g\, t_D^2 = \tfrac{1}{2} \times 9.8 \times (2.042)^2 = 20.4 \text{ m} \rightarrow 20 \text{ m}$$

Esercizio 16

Un’automobile è parcheggiata su di una costa inclinata che sovrasta l’oceano, ad una **inclinazione di 37.0° rispetto all’orizzontale**. Il conducente negligente lascia la macchina senza marcia innestata ed il freno è difettoso. La macchina parte dalla quiete giù per la discesa con una **accelerazione costante di 4.00 m/s²** e percorre **50.0 m** per raggiungere il bordo dell’altura. Questa è a **30.0 m al di sopra dell’oceano**. Trovare: (a) la velocità dell’automobile quando raggiunge il bordo dell’altura, (b) la posizione dell’automobile rispetto alla base dell’altura quando l’automobile arriva al livello dell’oceano.



Moto rettilineo uniformemente accelerato:

$s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \rightarrow s(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2$;

$v(t) = v_0 + a\, t \rightarrow v(t) = a\, t$

$\rightarrow t = v/a \rightarrow L = \frac{1}{2}\, a\, (v_B/a)^2$

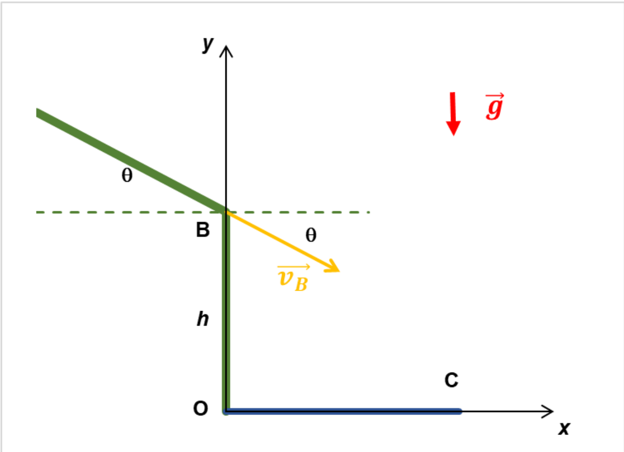
$\rightarrow v_B^2 = 2\, a\, L$

$$v_B = \sqrt{2aL} = \sqrt{2 \times 4.00 \times 50.0} = 20.0\ (m/s)$$

Moto parabolico

$$\begin{cases} x(t) = v_{B_x} t = v_B cos\theta\ t \\ y(t) = h + v_{B_y} t - \frac{1}{2} g t^2 = h - v_B sin\theta\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x/(v_B cos\theta) \\ y(t) = h - tg\theta\ x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_B cos\theta}\right)^2 \end{cases}$$



Al livello dell’oceano deve essere $y = 0$

$$h - tg\theta\ x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_B cos\theta}\right)^2 = 0$$

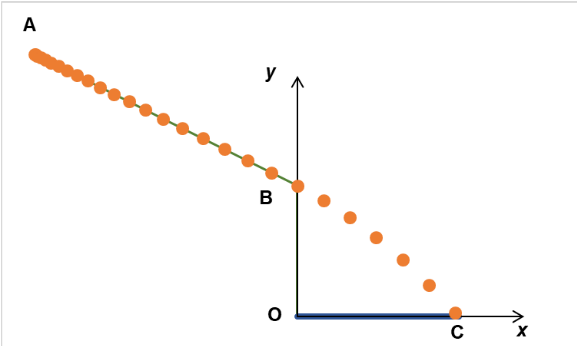
$$x^2 + \frac{2 v_B^2 sin\theta cos\theta}{g} x - \frac{2 v_B^2 cos^2\theta}{g} h = 0$$

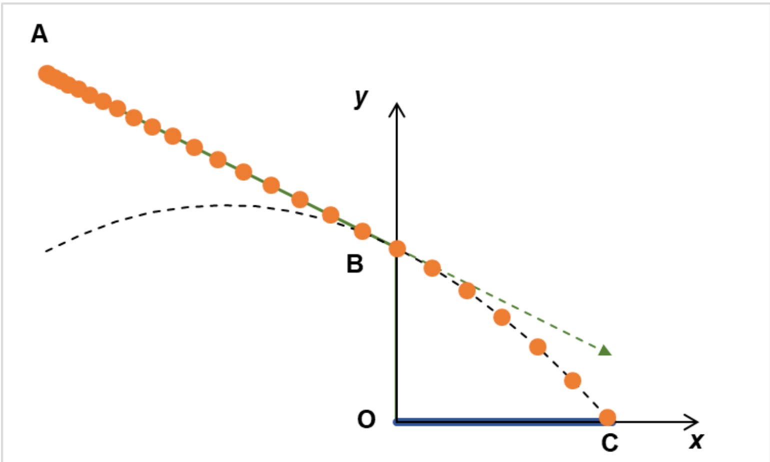
$$x = -\frac{v_B^2 sin\theta cos\theta}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_B^2 sin\theta cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{2v_B^2 cos^2\theta}{g}h}$$

Ha significato fisico solo la soluzione positiva

$$x_C = \frac{v_B^2 sin\theta cos\theta}{g}\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{v_B^2 sin^2\theta}}-1\right) = \frac{20^2 \times sin37 \times cos37}{9.80}\left(\sqrt{1+\frac{2\times 9.80\times 30}{(20\times sin37)^2}}-1\right)$$

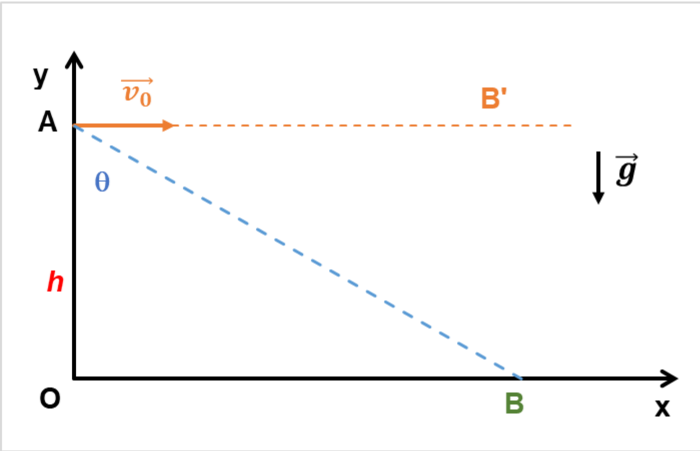
$$= 24.5\ m$$





CINEMATICA

Esercizio 17
Un aereo vola ad una **quota di 5.0 Km** con velocità orizzontale costante di **500 Km/h** verso un punto posto sopra al bersaglio. A quale angolo di mira θ deve essere sganciato un pacco di viveri per raggiungere il bersaglio?



$$tg\theta = \frac{x_B}{h}$$

Moto parabolico

Equazioni orarie:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il tempo di caduta del pacco t_{cad} : $y(t_{cad}) = h - \frac{1}{2} g t_{cad}^2 = 0$

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

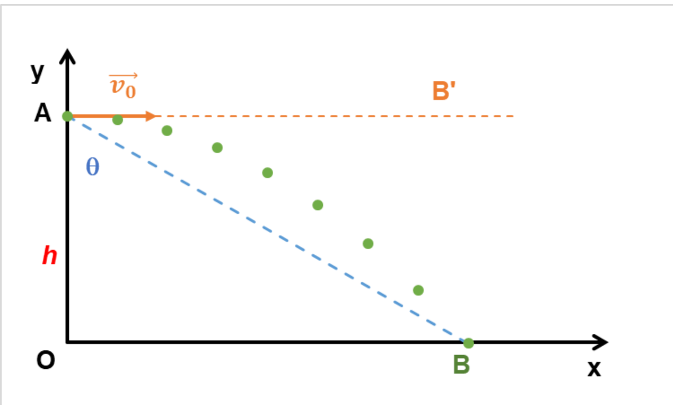
La posizione *x* del pacco dopo che è passato il tempo t_{cad} sarà:

$$x_B = x(t_{cad}) = v_0 t_{cad} = v_0 \sqrt{2h/g}$$

$$tg\theta = \frac{x_B}{h} = \frac{v_0 \sqrt{2h/g}}{h} = v_0 \sqrt{\frac{2}{gh}}$$

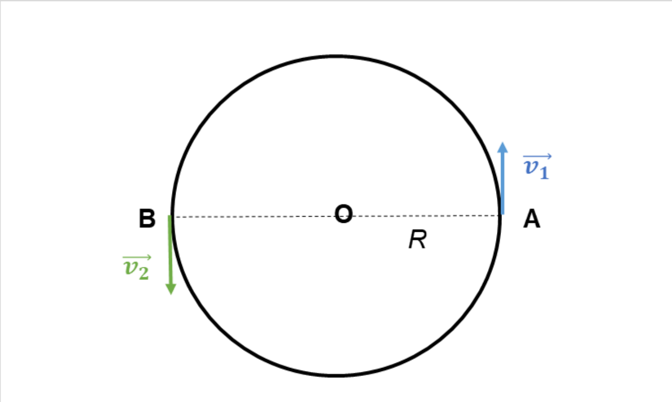
$$\theta = arctg(tg\theta) = arctg\left(v_0 \sqrt{\frac{2}{gh}}\right) = arctg\left(\frac{500 \times 10^3}{3600} \sqrt{\frac{2}{9.8 \times 5.0 \times 10^3}}\right) = 41.6°$$

$$\theta = 42°$$



CINEMATICA

Esercizio 19
Due ciclisti si esibiscono in una gara di inseguimento in una pista circolare di raggio **R=40 m**. Essi partono contemporaneamente, uno da A con **velocità costante v_1** e l'altro da B (A e B sono gli estremi di uno stesso diametro della circonferenza) con **velocità v_2=40 Km/h**. Trovare il valore di v_1 perché il primo ciclista raggiunga il secondo dopo aver percorso **2.5 giri di pista** e calcolare il tempo necessario.



Moto circolare uniforme

Equazioni orarie

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$\omega(t) = v/R = cost$$

$$\theta_A(t) = \theta_{A_0} + \omega_A t = 0 + \frac{v_1}{R} t$$

$$\theta_B(t) = \theta_{B_0} + \omega_B t = \pi + \frac{v_2}{R} t$$

All'istante t^*:

$$\begin{cases} \theta_A(t^*) = 2.5 \times 2\pi \\ \theta_A(t^*) = \theta_B(t^*) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{v_1}{R} t^* = 5\pi \\ \frac{v_1}{R} t^* = \pi + \frac{v_2}{R} t^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 5\pi R/t^* \\ 5\pi = \pi + \frac{v_2}{R} t^* \end{cases} ; \qquad \begin{cases} v_1 = 5\pi R/t^* \\ 4\pi = \frac{v_2}{R} t^* \end{cases} ; \qquad \begin{cases} t^* = 4\pi R/v_2 \\ v_1 = 5\pi R/t^* \end{cases}$$

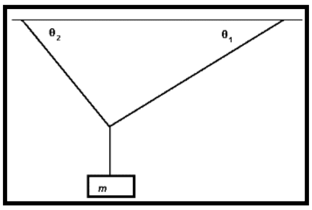
$$v_1 = \frac{5\pi R}{4\pi R/v_2} = \frac{5}{4} v_2 = \frac{5}{4} 40 = 50\ km/h$$

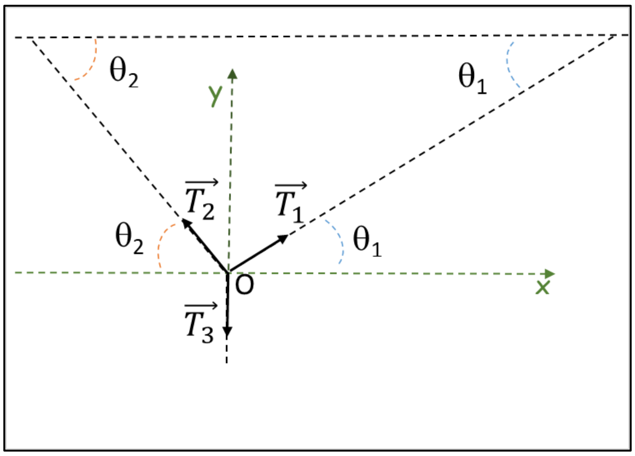
$$t^* = \frac{4\pi R}{v_2} = \frac{4\pi \times 40}{40 \times 10^3/3600} = 45\ s$$

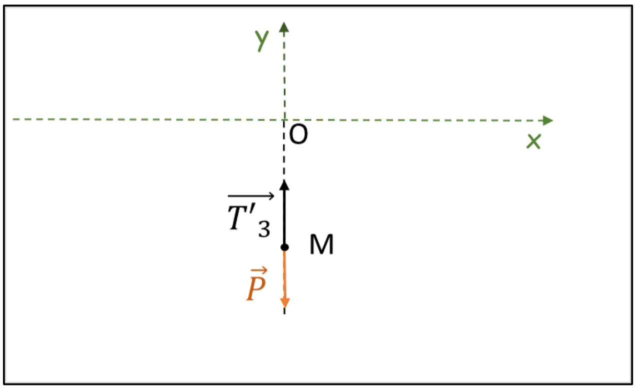
DINAMICA

Esercizio 20

Un sacco di cemento di massa **m = 32.5 kg**, è sostenuto da tre funi come è mostrato in figura. Due funi formano gli angoli **θ_1 = 10.0°** e **θ_2 = 25.0°** con l'orizzontale. Se il sistema è in equilibrio, determinare le tensioni **T_1, T_2** e **T_3** nelle funi.







Condizione di equilibrio: $\overrightarrow{F_{tot}} = 0$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0 \quad ; \quad \vec{P} + \vec{T'}_3 = 0$$

$$\begin{cases} T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0 \\ T_{1y} + T_{2y} + T_{3y} = 0 \end{cases} \quad ; \quad P_y + T'_{3y} = 0$$

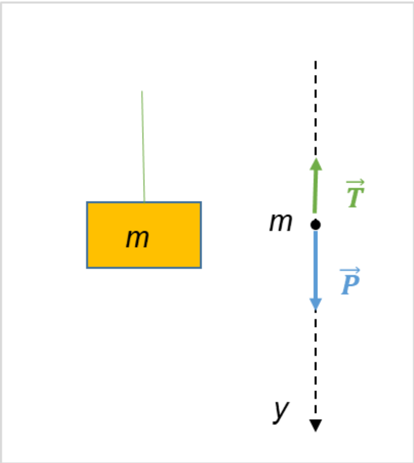
$$\begin{cases} T_1 cos\theta_1 - T_2 cos\theta_2 + 0 = 0 \\ T_1 sin\theta_1 + T_2 sin\theta_2 - T_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad -P_y + T'_3 = 0$$

$$\begin{cases} T_3 = T'_3 = P_y = P \\ T_2 = T_1 \dfrac{cos\theta_1}{cos\theta_2} \\ T_1 sin\theta_1 + T_1 \dfrac{cos\theta_1}{cos\theta_2} sin\theta_2 = T_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_3 = T'_3 = P_y = P = 32.5 \times 9.80 = 318\ N \\ T_1 = \dfrac{T_3}{sin\theta_1 + cos\theta_1 tg\theta_2} = \dfrac{32.5 \times 9.80}{sin(10) + cos(10)tg(25)} = 503\ N \\ T_2 = T_1 \dfrac{cos\theta_1}{cos\theta_2} = 503 \dfrac{cos(10)}{cos(25)} = 547\ N \end{cases}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Esercizio 21
Una massa ***m*=10 kg** deve essere calata dal secondo piano di una casa con una fune inestensibile e di massa trascurabile il cui **carico di rottura è F=70 N**. Può essere calata a velocità costante senza che la fune si spezzi? In caso contrario, con quale accelerazione minima dovrebbe essere calata?



2ª Legge della Dinamica:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

La cui componente scalare, nel sistema di riferimento introdotto, si scrive:

$$mg - T = m\,a$$

Per essere $v = cost \rightarrow a = 0 \rightarrow mg - T = 0 \rightarrow$

$$T = mg = 10 \times 9.8 = 98\,N > T_{max}$$

Deve esser $a \neq 0$

Determiniamo la minima accelerazione:

$$\begin{cases} T = mg - ma \\ T \leq T_{max} \end{cases}$$

$$mg - ma < T_{max}$$

$$-a \leq \frac{T_{max}}{m} - g$$

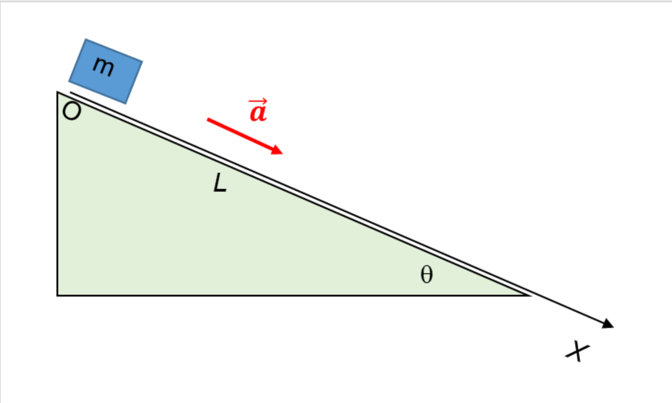
$$a \geq g - \frac{T_{max}}{m}$$

$$a_{min} = g - \frac{T_{max}}{m} = 9.8 - \frac{70}{10} = 2.8\,m/s^2$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Esercizio 22

Un blocco di **3.00 kg** parte da fermo dalla sommità di un **piano inclinato di 30.0°** rispetto all'orizzontale e scivola verso il basso percorrendo una **distanza di 2.00 m** lungo il piano **in 1.50 s**. Trovare: (a) l'accelerazione del blocco, (b) il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco e il piano.



Moto rettilineo uniformemente accelerato

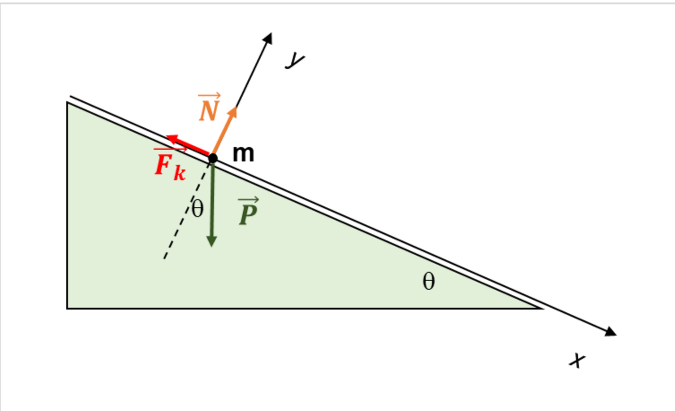
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Nel nostro caso

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

E quindi

$$a = \frac{2x(t)}{t^2} = \frac{2x(t = 1.50)}{(1.50)^2} = \frac{2L}{(1.50)^2} = \frac{2 \times 2.00}{(1.50)^2} = 1.78\ m/s^2$$

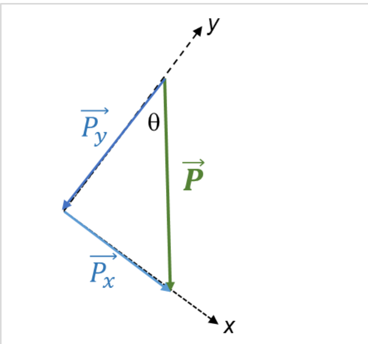


2ª legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_k} = m\vec{a}$$

Riscrivendo l'equazione per componenti:

$$\begin{cases} P_x + N_x + F_{k_x} = ma_x \\ P_y + N_y + F_{k_y} = ma_y \end{cases}$$



$$\begin{cases} Psin\theta + 0 - F_k = ma \\ -Pcos\theta + N + 0 = 0\,; \\ F_k = \mu_k N \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = Pcos\theta = mgcos\theta \\ mgsin\theta - \mu_k mgcos\theta = ma \end{cases}$$

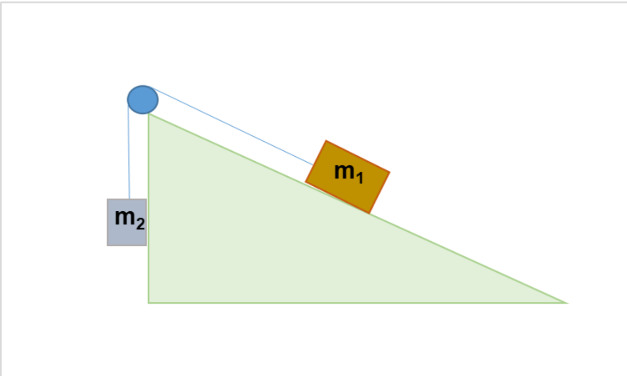
$$a = gsin\theta - \mu_k gcos\theta$$

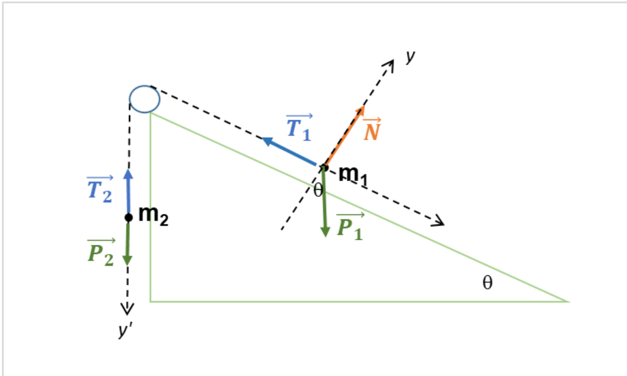
$$\mu_k = \frac{gsin\theta - a}{gcos\theta} = \frac{9.80 \times sin30° - 1.78}{9.80 \times cos30°} = 0.368$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Esercizio 23

Su un piano liscio inclinato di un angolo uguale a 30°, un blocco di massa 40 kg è collegato mediante una fune, attraverso una piccola carrucola senza attrito, a un secondo blocco sospeso di massa m_2 =30 kg. (a) Qual è l'accelerazione di ciascun blocco? (b) Qual è la tensione della fune?





2ª Legge di Newton:

$$\vec{P_1} + \vec{N} + \vec{T_1} = m_1\vec{a_1} \qquad \vec{P_2} + \vec{T_2} = m_2\vec{a_2}$$

Supponendo che m_1 salga e m_2 scenda, riscriviamo per componenti

$$\begin{cases} m_1 g sin\theta + 0 - T_1 = m_1(-a_1) \\ -m_1 g cos\theta + N + 0 = 0 \end{cases} \qquad m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

La fune è ideale ➔ $T_1 = T_2 = T$, $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} m_1 g sin\theta - T = -m_1 a \\ -m_1 g cos\theta + N = 0 \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

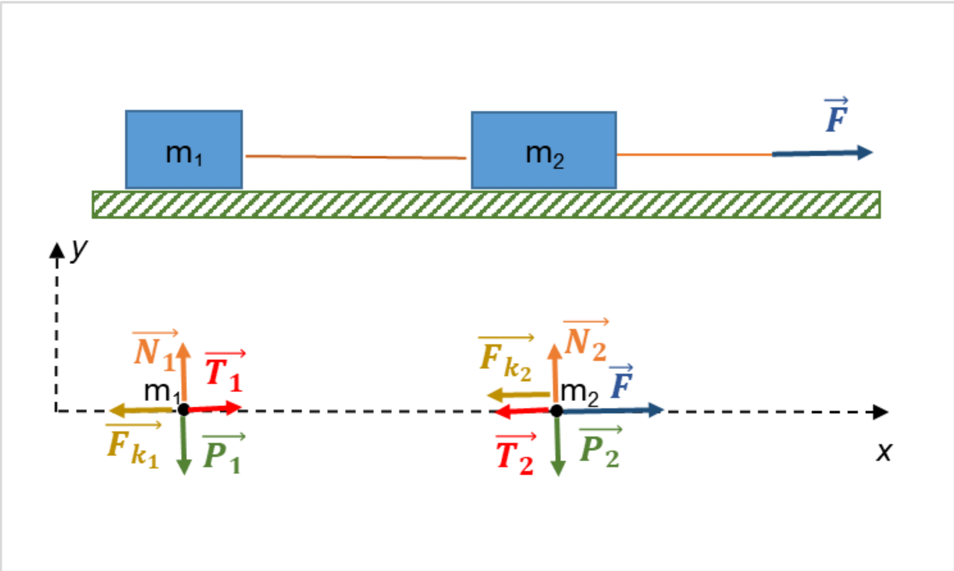
$$\begin{cases} N = m_1 g cos\theta \\ T = m_2 g - m_2 a \\ m_2 g - m_1 g sin\theta = (m_1 + m_2)a \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = m_1 g cos\theta = 40\times 9.8\times \cos(30°) = 339\ N \\ a = \dfrac{m_2 g - m_1 g sin\theta}{(m_1 + m_2)} = \dfrac{30\times 9.8 - 40\times 9.8\times \sin(30°)}{30 + 40} = 1.4\ m/s^2 \\ T = m_2 g - m_2 a = 30\times(9.8 - 1.4) = 252\ N \end{cases}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Esercizio 24

Due blocchi connessi da una fune leggera devono essere trascinati da una forza orizzontale F. Supponiamo che sia F=50 N, m_1 =10 kg, m_2 =20 kg e che il coefficiente di attrito cinetico tra ciascun blocco e la superficie sia μ_c =0.1. Determinare la tensione T della fune e l'accelerazione del sistema.



2ª Legge di Newton:

$$\vec{P_1} + \vec{N_1} + \vec{T_1} + \vec{F_{k_1}} = m_1\vec{a_1} \qquad \vec{P_2} + \vec{N_2} + \vec{T_2} + \vec{F_{k_2}} + \vec{F} = m_2\vec{a_2}$$

Riscriviamo per componenti

$$\begin{cases} T_1 - F_{k_1} = m_1 a_1 \\ -m_1 g + N_1 = 0 \\ F_{k_1} = \mu_K N_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} F - T_2 - F_{k_2} = m_2 a_2 \\ -m_2 g + N_2 = 0 \\ F_{k_2} = \mu_K N_2 \end{cases}$$

La fune è ideale ➔ $T_1 = T_2 = T$, $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \\ F_{k_1} = \mu_K m_1 g \end{cases} \qquad \begin{cases} N_2 = m_2 g \\ F_{k_2} = \mu_K m_2 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - \mu_K m_1 g = m_1 a \\ F - T - \mu_K m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

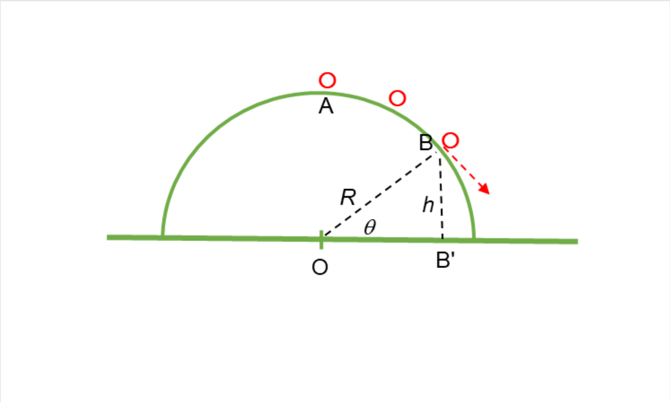
$$\begin{cases} T = m_1(a + \mu_K g) \\ F - \mu_K(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{F - \mu_K(m_1 + m_2)g}{(m_1 + m_2)} = \dfrac{F}{(m_1 + m_2)} - \mu_K g = \dfrac{50}{10 + 20} - 0.1 \times 9.8 = 0.69\ m/s^2 \\ T = m_1(a + \mu_K g) = 10 \times (0.69 + 0.1 \times 9.8) = 16.6\ N = 17\ N \end{cases}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esercizio 26
Una sferetta pesante, partendo dal vertice A di una semisfera liscia di raggio R = 60 cm, scivola sul profilo della semisfera sotto l'azione del suo peso. Di quanto dovrà abbassarsi la particella prima di schizzare via dalla sfera?

Man mano che scende la velocità aumenta.



Applicando il Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica

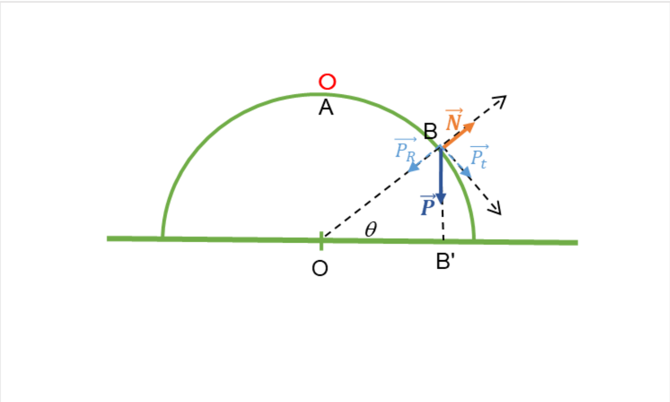
$$E_A = E_B$$

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Nel nostro caso: $\boxed{mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh}$

Per mantenere il moto sul profilo circolare deve esserci una forza centripeta (radiale):



$$F_R \geq m\frac{v^2}{R}$$

L'unica forza che ha componente radiale è la forza peso $\vec{P}$ e risulta

$$P_R = Pcos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = Psin\theta =$$

$$= P\frac{h}{R} = mg\frac{h}{R}$$

Per mantenere il moto sul profilo circolare deve quindi essere:

$$\begin{cases} mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \\ mg\frac{h}{R} \geq m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = 2gR - 2gh \\ h \geq \frac{v^2}{g} \end{cases}$$

$$h \geq 2R - 2h$$

$$3h \geq 2R$$

$$h \geq \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}60 = 40\ cm$$

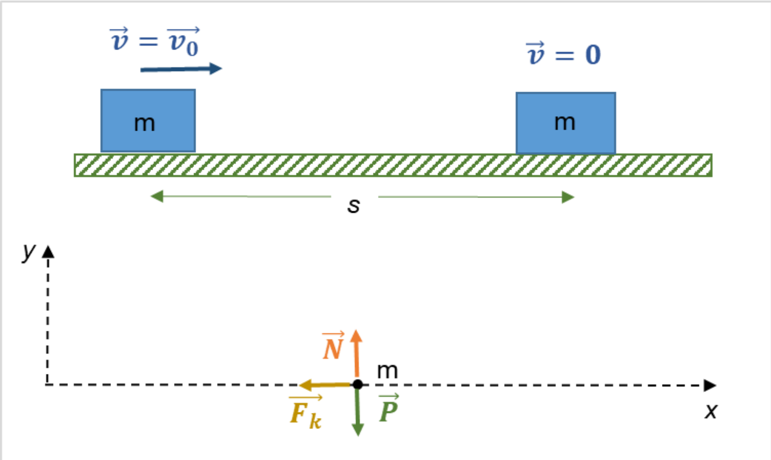
La sferetta schizzerà via quando si è portata alla quota h_{min}, ovvero si è abbassata di

$$R - h_{min} = 60 - 40 = 20\ cm$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esercizio 27

Un blocco di massa *m = 1.0 kg* viene lanciato con una velocità v_0 = 4.0 m/s lungo un piano orizzontale scabro e si arresta dopo aver percorso un tratto *s* = 136 cm. Determinare il coefficiente di attrito tra il piano e il blocco.



2ª Legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_k} = m\vec{a}$$

Riscriviamo per componenti

$$\begin{cases} -F_k = ma \\ -mg + N = 0 \\ F_k = \mu_K N \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg \\ F_k = \mu_K mg \\ -\mu_K mg = ma \end{cases} \qquad a = -\mu_K g$$

CINEMATICAMENTE

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + {}^1\!/_2\, at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$$

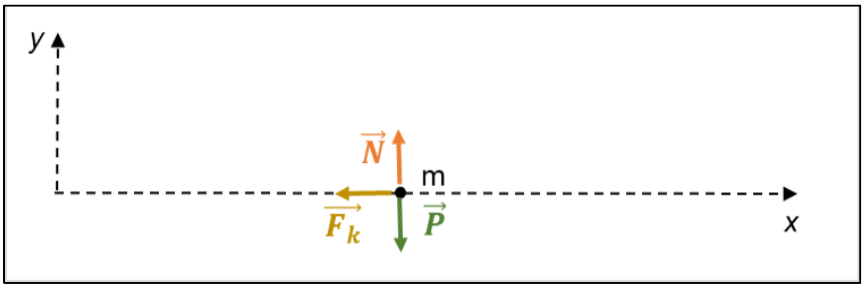
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Quando si ferma (*v=0*) lo spazio percorso è x-x_0=s, quindi:

$$-v_0^2 = -2\mu_K g s$$

$$\mu_K = \frac{v_0^2}{2gs} = \frac{4.0^2}{2 \times 9.8 \times 1.36} = 0.60$$

DINAMICAMENTE



Teorema dell'energia cinetica: $W_{tot} = \Delta K$

$$W_{tot} = W_{Attr} + W_{Peso} + W_{Norm} = W_{Attr}$$

essendo $\vec{P}$ e $\vec{N}$ ortogonali allo spostamento, risulta

$$W_{Peso} = \int_0^s \vec{P} \cdot \overrightarrow{dx} = 0 \quad ; \quad W_{Norm} = \int_0^s \vec{N} \cdot \overrightarrow{dx} =$$

$$W_{Attr} = \int_0^s \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^s F_k dx cos\pi = -\int_0^s \mu_k mgdx = -\mu_k mg \int_0^s dx = -\mu_k mgs$$

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

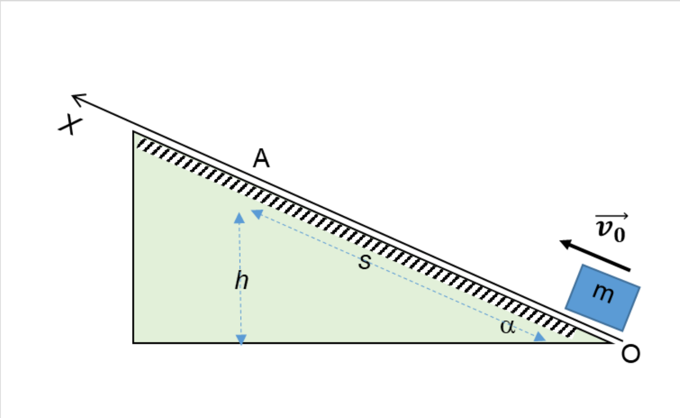
$$-\mu_k mgs = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\mu_K = \frac{v_0^2}{2gs} = \frac{4.0^2}{2 \times 9.8 \times 1.36} = 0.60$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esercizio 29

Un blocco di massa *m* =1 kg viene lanciato su per un piano inclinato scabro (μ=0.2) con velocità v_0=3 m/sec. Se l'angolo di inclinazione è α=30°, calcolare: (a) la distanza *s* percorsa dal blocco lungo il piano; (b) il tempo impiegato a percorrerla, nonché, il tempo complessivo di andata e ritorno; (c) l'energia trasformata in calore lungo l'intero percorso.



In presenza di forze non conservative (attrito):

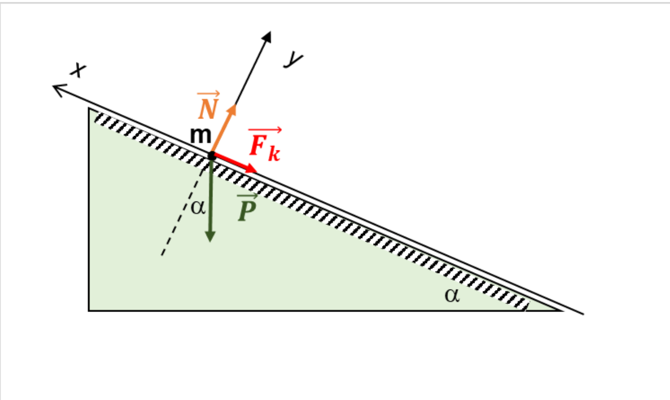
$$W_{NC} = E_{fin} - E_{in} =$$
$$= E_A - E_O =$$
$$= (U_A + K_A) - (U_O + K_O)$$

Poniamo $U_O = 0 \Rightarrow U_A = mgh$

Inoltre:

$$K_O = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad ; \quad K_A = 0$$

$$W_{NC} = \int_0^s \vec{F_k} \cdot \vec{dx} = \int_0^s F_k dx cos(\pi)$$



$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_k} = m\vec{a}$$

Riscrivendo per componenti:

$$\begin{cases} -Psin\alpha + 0 - F_k = ma \\ -Pcos\alpha + N + 0 = 0 \\ F_k = \mu_k N \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} N = Pcos\alpha = mgcos\alpha \\ F_k = \mu_k mgcos\alpha \end{cases}$$

2ª legge di Newton:

(a)

$$W_{NC} = -F_k \int_0^s dx = -F_k s = -\mu_k mgscos\alpha$$

$$-\mu_k mgscos\alpha = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu_k mgscos\alpha - mgssin\alpha = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)gs = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$s = \frac{v_0^2}{2(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)g} = \frac{3^2}{2\big(0.2\times\cos(30) + \sin(30)\big)9.8} = 0.68\ m \cong 0.7\ m$$

(b)

Salita: dalla componente *x* della equazione del moto

$$-Psin\alpha + 0 - F_k = ma$$

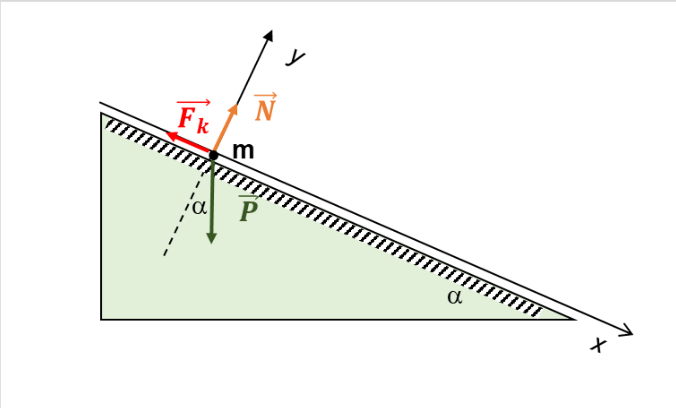
$$-mgsin\alpha - \mu_k mgcos\alpha = ma \quad \Rightarrow \quad a = a_s = -g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato (accel. negativa)

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)t$$

$v(t_s) = 0$ $\qquad v_0 - g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)t_s = 0$

$$t_s = \frac{v_0}{g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)} = \frac{3}{9.8\big(sin(30) + 0.2cos(30)\big)} = 0.455\ s \cong 0.5\ s$$



Discesa:

$$Psin\alpha + 0 - F_k = ma$$

$$mgsin\alpha - \mu_k mgcos\alpha = ma$$

$$a = a_d = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = x_0 + v_0 t + {}^{1}\!/_{2}\, at^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t^2$$

$$s = x(t_d) = \frac{1}{2} g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t_d^2$$

$$2s = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t_d^2$$

Utilizzando il risultato precedente del punto (a) : $2s = \frac{v_0^2}{(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)g}$

$$\frac{v_0^2}{(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)g} = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t_d^2$$

$$t_d^2 = \frac{v_0^2}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)g^2} = \frac{(v_0/g)^2}{(sin^2\alpha - \mu_k^2 cos^2\alpha)}$$

$$t_d = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{(sin^2\alpha - \mu_k^2 cos^2\alpha)}} = \frac{3}{9.8}\sqrt{\frac{1}{\big(sin^2(30) - 0.2^2 cos^2(30)\big)}} = 0.729\ s$$

$$t_{tot} = t_s + t_d = 0.455 + 0.729 = 1.18\ s \cong 1.2\ s$$

N.B.: t_s è diverso da t_d, entrambi diversi dal corrispondente tempo *t* nel caso di piano liscio

$$t = \frac{v_0}{g\ sin\alpha} = \frac{3}{9.8\ sin(30)} = 0.61\ s$$

(c) Calcoliamo la velocità v'_O alla fine della discesa : $v'_O = at_d$

Con

$$a = a_d = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)$$

$$v'^2_O = a^2 t_d^2 = g^2 (sin\alpha - \mu_k cos\alpha)^2 \frac{v_O^2}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)(sin\alpha - \mu_k cos\alpha) g^2} = v_O^2 \frac{(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)}$$

$$v'_O = v_0 \sqrt{\frac{(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)}}$$

In presenza di forze non conservative : $W_{NC} = \Delta K + \Delta U$

In questo caso , considerando complessivamente andata e ritorno, $\Delta U = 0$

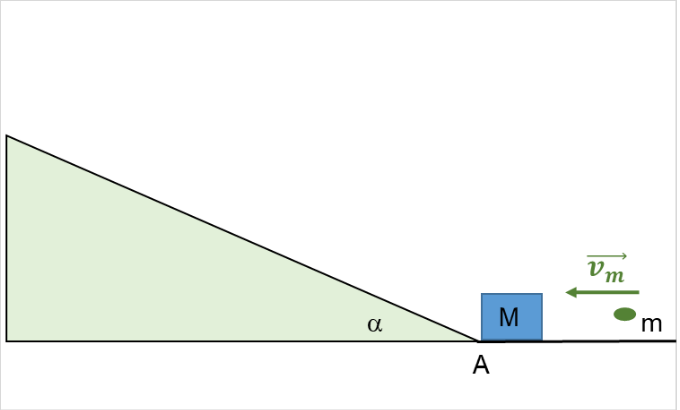
$$W_{NC} = \Delta K = \frac{1}{2} m v'^2_O - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\frac{(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)} - 1 \right]$$

$$W_{NC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 3^2 \left[\frac{\left(sin(30) - 0.2cos(30)\right)}{\left(sin(30) + 0.2cos(30)\right)} - 1 \right] = -2.32\, J \cong -2J$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Esercizio 33

Un proiettile di massa *m* = 12 g si muove orizzontalmente e colpisce, restandovi conficcato, una massa *M* = 3.0 kg fermo alla base di un piano inclinato liscio. In seguito all'urto il sistema delle due masse si muove su per il piano inclinato e si ferma ad una quota di 12 cm rispetto alla quota iniziale. Quale era la velocità iniziale del proiettile?



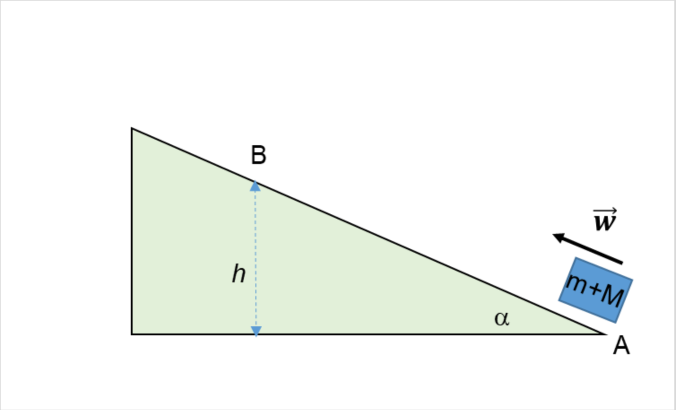
Urto completamente anelastico:

Conservazione della quantità di moto

$$m\vec{v_m} + M\vec{v_M} = (m+M)\vec{w}$$

Una sola componente scalare:

$$mv_m = (m+M)w$$



(m+M) sale lungo il piano inclinato liscio, fino a B.

Conservazione della Energia Meccanica

$U_A+K_A=U_B+K_B$

$$0 + \frac{1}{2}(m+M)w^2 = (m+M)gh + 0$$

$$\begin{cases} mv_m = (m+M)w \\ \frac{1}{2}(m+M)w^2 = (m+M)gh \end{cases}$$

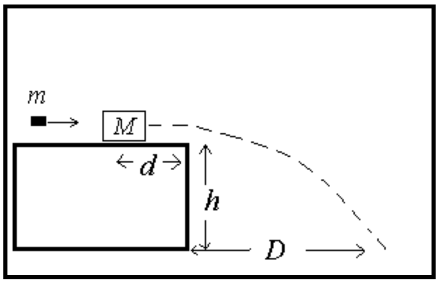
$$\begin{cases} v_m = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh} \\ w = \sqrt{2gh} \end{cases}$$

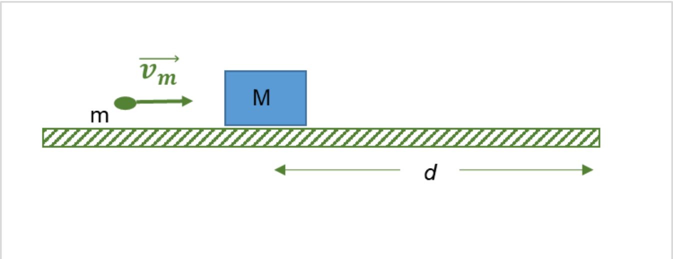
$$v_m = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh} = \frac{(12\times10^{-3}+3.0)}{12\times10^{-3}}\sqrt{2\times9.8\times12\times10^{-2}} = 385\ m/s$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Esercizio 34

Una pallottola di massa $m = 80.0$ g, viene sparata, con velocità $v_0 = 152$ m/s, contro un blocco di massa $M = 2.50$ kg, inizialmente in quiete ad una distanza $d = 20$ cm dal bordo di un tavolo alto $h = 1.00$ m. Il proiettile si conficca nel blocco e, dopo l'urto, il blocco cade dal tavolo. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra tavolo e blocco vale 0.70, calcolare: (a) la velocità del blocco quando abbandona lo spigolo del tavolo; (b) la distanza D dallo spigolo del tavolo a cui cade il blocco.





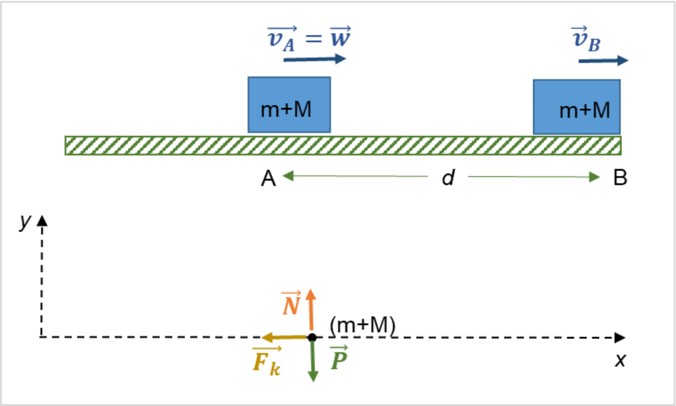
Urto completamente anelastico:

Conservazione della quantità di moto

$$m\vec{v_m} + M\vec{v_M} = (m+M)\vec{w}$$

Una sola componente scalare:

$$mv_0 = (m+M)w$$



Conservazione dell'Energia

In presenza di forze non conservative (attrito):

$$W_{NC} = \Delta U + \Delta K$$

In questo caso $\Delta U = 0$ ⇨

$$W_{NC} = \Delta K = K_B - K_A =$$
$$= \frac{1}{2}(m+M)v_B^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_A^2$$

Dalla 2ª legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_k} = m\vec{a}$$

E quindi

$$\begin{cases} N = P = (m+M)g \\ F_k = \mu_k N = \mu_k (m+M)g \end{cases}$$

$$W_{NC} = \vec{F_k} \cdot \vec{\Delta x} = -F_k \Delta x = -\mu_k (m+M)gd$$

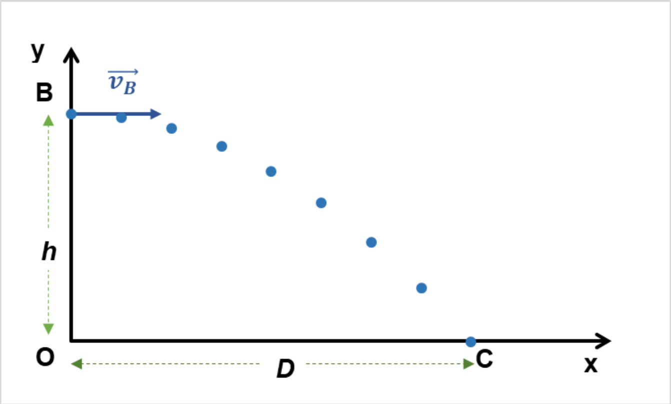
Sostituendo:

$$-\mu_k (m+M)gd = \frac{1}{2}(m+M)v_B^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_A^2$$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2\mu_k gd = w^2 - 2\mu_k gd$$

$$v_B = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{(m+M)}\right)^2 - 2\mu_k gd}$$

$$v_B = \sqrt{\left(\frac{80 \times 10^{-3} \times 152}{(80 \times 10^{-3} + 2.5)}\right)^2 - 2 \times 0.70 \times 9.8 \times 20 \times 10^{-2}} = 4.412\ m/s \cong 4.4\ m/s$$



Moto parabolico

Equazioni orarie:

$$\begin{cases} x(t) = v_B t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il tempo di caduta t_{cad} :

$$y(t_{cad}) = h - \tfrac{1}{2} g t_{cad}^2 = 0$$

$$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La posizione x dopo che è passato il tempo t_{cad} sarà:

$$D = x_C = x(t_{cad}) = v_B t_{cad} = v_B \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$D = 4.412 \sqrt{\frac{2 \times 1.0}{9.8}} = 1.99\, m \cong 2.0\, m$$

Alternativamente:
dalle equazioni orarie otteniamo l’equazione della parabola

$$\begin{cases} t = x/v_B \\ y = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_B}\right)^2 \end{cases}$$

Imponiamo che sia *y=0*

$$h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_B}\right)^2 = 0$$

$$x^2 = v_B^2 \frac{2h}{g}$$

e prendiamo solo la soluzione positiva

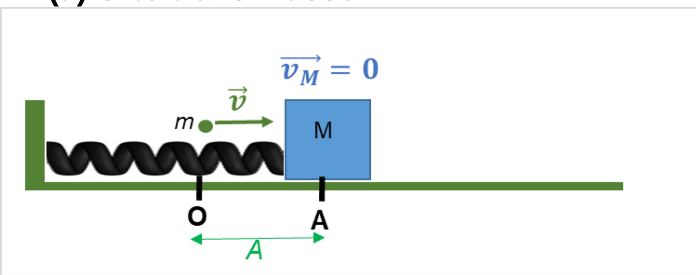
$$D = v_B \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Esercizio 36

Una massa M = 0.50 kg, poggiata su un piano orizzontale liscio, è collegata tramite una molla (k = 450 N/m) ad una parete rigida. Essa esegue delle oscillazioni armoniche di ampiezza A = 20 cm. Quando si trova nel punto di massima elongazione più lontano dalla parete, M viene colpita da una massa *m* = 0.10 kg che si muove con velocità v = 18 m/s lungo l'asse della molla. Dopo l'urto le due masse restano unite. Calcolare: (a) la velocità del sistema delle due masse subito dopo l'urto; (b) l'ampiezza A' delle oscillazioni dopo l'urto.

(a) Urto tra le masse



Urto completamente anelastico:

Conservazione della quantità di moto

$$m\vec{v} + M\vec{v_M} = (m+M)\vec{w}$$

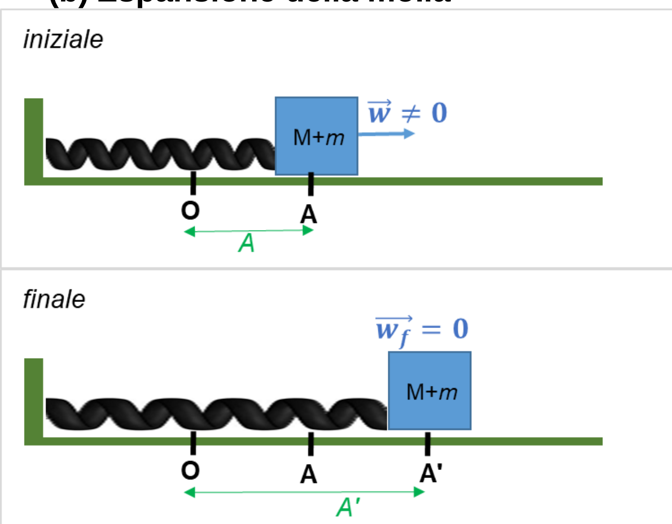
$\vec{v_M} = 0$ perché quando la molla è tutta espansa, M è ferma.

Una sola componente scalare:

$$mv = (m+M)w$$

$$w = \frac{m}{(m+M)}v = \frac{0.10}{(0.10+0.50)}18 = 3.0\ m/s$$

(b) Espansione della molla



Sono presenti solo forze conservative:

Conservazione dell'Energia Meccanica

ΔE =ΔU+ΔK=0

In questo caso:

$$\Delta U = U_{A'} - U_A = \frac{1}{2}k(A')^2 - \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Delta K = K_{A'} - K_A = 0 - \frac{1}{2}(m+M)w^2$$

Sostituendo in *ΔU+ΔK=0*:

$$\frac{1}{2}k(A')^2 - \frac{1}{2}kA^2 + 0 - \frac{1}{2}(m+M)w^2 = 0$$

$$(A')^2 = A^2 + \frac{(m+M)}{k}w^2$$

sostituiamo da sopra $w = \frac{m}{(m+M)} v$

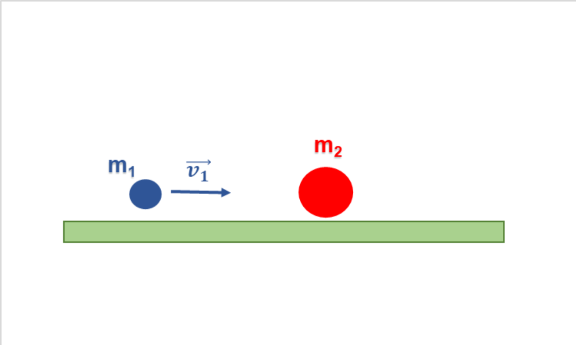
$$A' = \sqrt{A^2 + \frac{m^2}{(m+M)k} v^2}$$

$$A' = \sqrt{(0.20)^2 + \frac{(0.10)^2}{(0.10 + 0.50) \times 450} (18)^2} = 0.228\ m = 23\ cm$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Esercizio 37

Due sfere di massa *m* e *M* sono inizialmente in quiete e separate di poco. Una terza sfera di massa *m* si avvicina ad esse con velocità v_0, dalla parte della sfera di eguale massa e lungo la congiungente *m* con *M*. Si supponga di avere a che fare con urti elastici frontali. Si dimostri che (a) se è *M*<*m* avvengono due urti; se è *M*>*m* avvengono tre urti.



Urto elastico frontale Tra m_1 in moto con velocità v_1 e m_2 ferma:

Conservazione della quantità di moto e conservazione dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - w_1) = m_2 w_2 \\ m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2 w_2^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} m_1(v_1 - w_1) = m_2 w_2 \\ m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) = m_2 w_2^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} m_1(v_1 - w_1) = m_2 w_2 \\ v_1 + w_1 = w_2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - w_1) = m_2(v_1 + w_1) \\ w_2 = v_1 + w_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (m_1 + m_2) w_1 = (m_2 - m_1) v_1 \\ w_2 = v_1 + w_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} w_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 \\ w_2 = v_1 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 \end{cases}$$

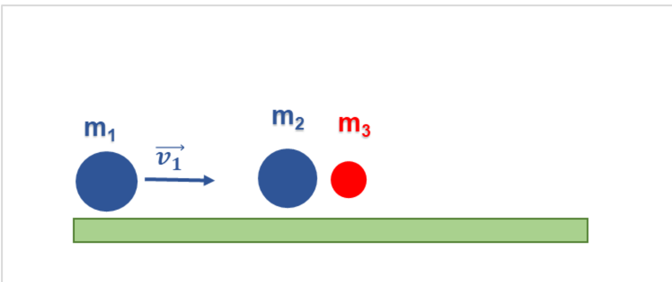
$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 \\ w_2 = \dfrac{2 m_1}{(m_1 + m_2)} v_1 \end{cases}$$

m₁ = m₂	***m₁ > m₂***	***m₁ < m₂***
$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = v_1 \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = \dfrac{(1 - m_2/m_1)}{(1 + m_2/m_1)} v_1 \cong v_1 \\ w_2 = \dfrac{2}{(1 + m_2/m_1)} v_1 \cong 2 v_1 \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = \dfrac{(m_1/m_2 - 1)}{(m_1/m_2 + 1)} v_1 \cong -v_1 \\ w_2 = \dfrac{2\, m_1/m_2}{(m_1/m_2 + 1)} v_1 \cong 0 \end{cases}$

(a)

$m_1 = m_2 = m$

$m_3 = M < m$



■ Urto tra m_1 in moto con velocità v_1 e m_2 inizialmente ferma:

$m_1 = m_2 = m$ ⇨ si scambiano la velocità:

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = v_1 \end{cases}$$

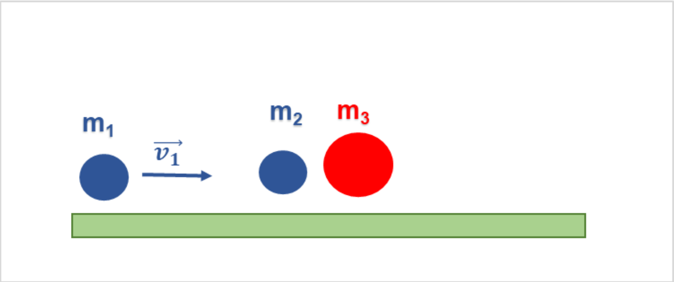
■ Urto tra $m_2=m$ in moto con velocità v_1 e $m_3 = M < m$ inizialmente ferma ➡ $\begin{cases} w_2 = \dfrac{(1 - M/m)}{(1 + M/m)} v_1 \cong v_1 \\ w_3 = \dfrac{2}{(1 + M/m)} v_1 \cong 2v_1 \end{cases}$ ➡ m_3 si allontana più velocemente, m_2 prosegue

In totale 2 urti

(b)

$m_1 = m_2 = m$

$m_3 = M > m$



■ Urto tra m_1 in moto con velocità v_1 e m_2 inizialmente ferma: $m_1 = m_2 = m$ ⇨ si scambiano la velocità: ➡ $\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = v_1 \end{cases}$

■ Urto tra $m_2=m$ in moto con velocità v_1 e $m_3 = M > m$ inizialmente ferma ➡ $\begin{cases} w_2 = \dfrac{(m/M - 1)}{(m/M + 1)} v_1 \cong -v_1 \\ w_3 = \dfrac{2\,m/M}{(m/M + 1)} v_1 \cong 0 \end{cases}$ ➡ m_3 rimane ferma e m_2 torna in dietro con velocità v_1.

■ Urto tra m_2 in moto con velocità $-v_1$ e m_1 inizialmente ferma: $m_1 = m_2 = m$ ⇨ si scambiano la velocità: ➡ $\begin{cases} w_1 = -v_1 \\ w_2 = 0 \end{cases}$ ➡ m_2 si ferma e m_1 si muove allontana con velocità $-v_1$

In totale 3 urti

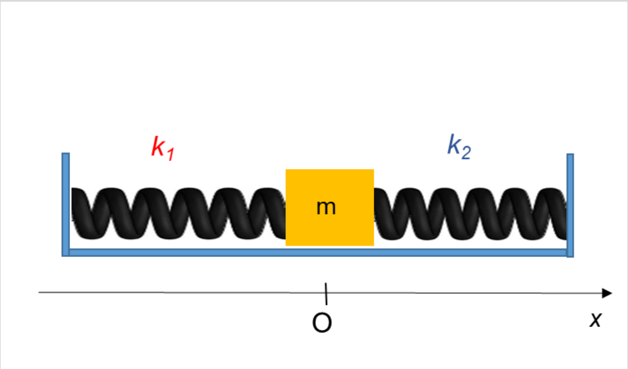
OSCILLATORE ARMONICO

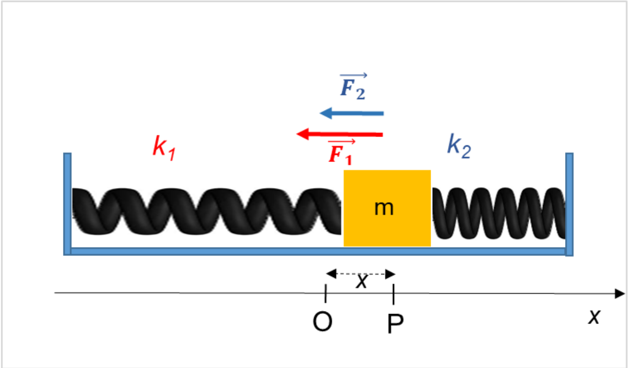
Esercizio 38

Due molle, di costante elastica k_1 e k_2 , sono attaccate, da due parti opposte, ad un blocco di massa m che può scivolare lungo una superficie orizzontale priva di attrito. Dimostrare che la frequenza di oscillazione del blocco è

$$\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$$

dove ν_1 e ν_2 sono le frequenze alle quali oscillerebbe il blocco se fosse collegato solamente o alla molla 1 o alla molla 2.





2ª Legge di Newton:

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = ma \\ N - P = 0 \end{cases}$$

$\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ sono paralleli e concordi ⇨ E' come se le due molle fossero attaccate dalla stessa parte (molle in parallelo)

Equazione del moto per la componente x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

L'effetto delle due molle in parallelo è uguale a quello di una unica molla (equivalente) di costante elastica:

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Il sistema oscilla con pulsazione propria:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

Ricordando che $\omega = 2\pi\nu$

$$\nu_0^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2$$

$$\nu_0 = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$$

OSCILLATORE ARMONICO

Esercizio 40

Un oscillatore armonico semplice con una frequenza angolare di 5.00 rad/s, al tempo $t = 0$ s ha compiuto uno spostamento dalla posizione di equilibrio di 25.0 cm e ha una velocità di –40.0 cm/s. Determinare l'ampiezza *A* dell'oscillazione e la costante di fase.

Equazione dell'oscillatore armonico semplice:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Soluzione:
$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

A e φ si determinano dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = x(t=0) = A\sin(\varphi) \\ v_0 = v(t=0) = A\omega_0\cos(\varphi) \end{cases}$$

che riscriviamo come:

$$\begin{cases} A\sin(\varphi) = x_0 \\ A\cos(\varphi) = v_0/\omega_0 \end{cases}$$

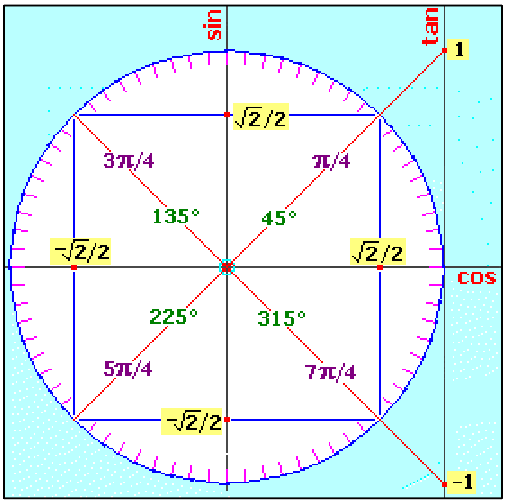
Da cui

$$\begin{cases} \mathrm{tg}(\varphi) = x_0\,\omega_0/v_0 \\ A = \sqrt{(x_0)^2 + (v_0/\omega_0)^2} \end{cases}$$

Nel nostro caso:

$$x_0 = 25 \times 10^{-2}\,m \quad ; \quad v_0 = -40 \times 10^{-2}\,m/s \quad ; \omega_0 = 5.0\,rad/s$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}(\varphi) = \dfrac{25 \times 10^{-2} \times 5.0}{-40 \times 10^{-2}} = -\dfrac{125}{40} = -3.125 \\ A = \sqrt{(x_0)^2 + (v_0/\omega_0)^2} = \sqrt{(25 \times 10^{-2})^2 + (40 \times 10^{-2}/5.0)^2} = 25.5 \times 10^{-2}\,m \end{cases}$$



<u>Osservazione</u>: $x_0 > 0$ e $v_0 < 0$ ⇨

$\sin(\varphi) > 0$ e $\cos(\varphi) < 0$

⇨ φ nel 2° quadrante

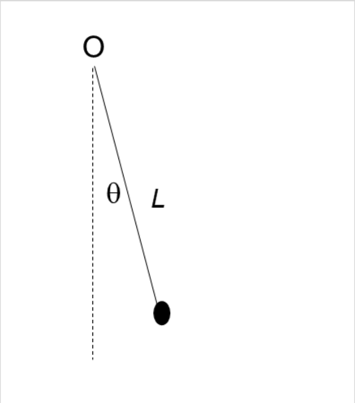
$$\varphi = \mathrm{arctg}(-3.125) = -1.26 + \pi$$

$$= 1.88\,rad = 108°$$

OSCILLATORE ARMONICO

Esercizio 41

Un pendolo semplice, di lunghezza 2.23 m e massa 6.74 kg, ha una velocità iniziale di 2.06 m/s quando si trova nella posizione di equilibrio. Nell'ipotesi che il pendolo compia un moto armonico semplice, determinare: (a) il periodo del moto, (b) l'energia totale e (c) il massimo angolo di spostamento.



Nell'ipotesi di oscillatore armonico semplice,

cioè per θ<<1 rad, ponendo $\omega_0^2 = {}^{g}/_{L}$

l'equazione del moto si scrive,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

la cui soluzione è:

$$\theta(t) = \theta_M \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

(a)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{{}^{g}/_{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.23}{9.80}} = 2.997s \cong 3.00\ s$$

(b)

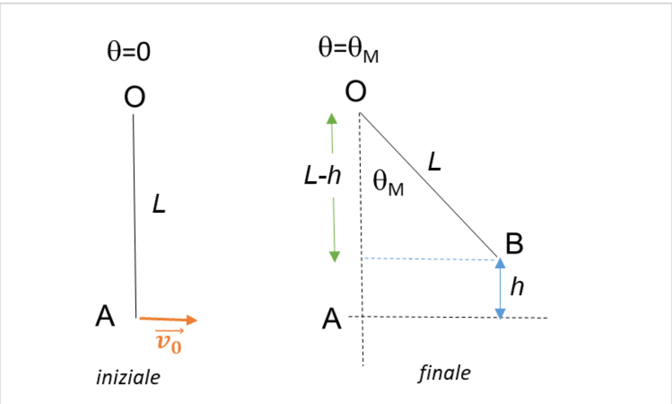
Durante il moto l'energia meccanica E = K + U si conserva e risulta:

E= U_{max}=U(θ=θ_M) oppure E=K_{max}=K(θ=0)

Utilizzando la seconda relazione:

$$E = K_{max} = K(\theta = 0) = \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \frac{1}{2}\,6.74 \times 2.06^2 = 14.3\ J$$

(c)



Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}\,mv_0^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \quad h = {}^{v_0^2}/_{2g}$$

$$\cos\theta_M = \frac{L-h}{L}$$

$$\theta_M = arccos\left(1 - \frac{h}{L}\right) = arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gL}\right) = arccos\left(1 - \frac{2.06^2}{2 \times 9.80 \times 2.23}\right) = 0.444\ rad$$

ALTERNATIVAMENTE

Oscillatore armonico semplice: $\theta(t) = \theta_M \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \theta_M\, \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Determiniamo θ_M dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 = L \left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_M \sin\varphi = 0 \\ L\omega_0\theta_M \cos\varphi = v_0 \end{cases}$$

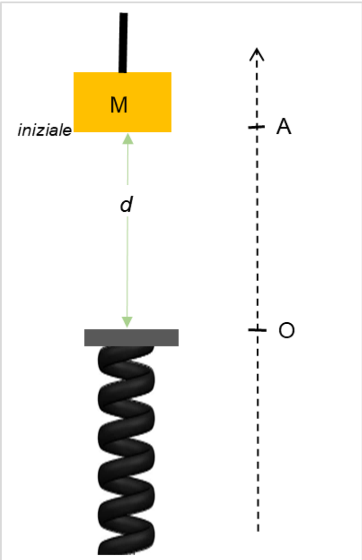
$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \theta_M = {}^{v_0}/_{L\omega_0} \end{cases}$$

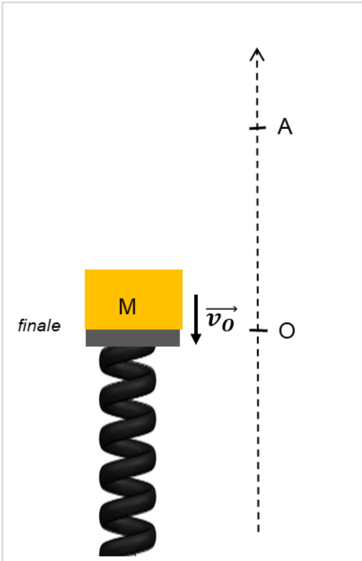
$$\theta_M = \frac{v_0}{L\omega_0} = \frac{v_0}{L\sqrt{{}^{g}/_{L}}} = \frac{v_0}{\sqrt{gL}} = \frac{2.06}{\sqrt{9.80 \times 2.23}} = 0.441\ rad$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esercizio 30

Il cavo di un ascensore di massa M = 2000 kg si spezza quando l'ascensore è fermo al primo piano a distanza d = 4.0 m da una molla di attenuazione di costante elastica k = 1.5×10^5 N/m. Un dispositivo di sicurezza agisce sulle guide in modo da far sviluppare una forza di attrito costante di 4900 N che si oppone al moto dell'ascensore. (a) Calcolare la velocità dell'ascensore prima che urti la molla. (b) Trovare di quale tratto si è compressa la molla.





(a)

In presenza di forze non conservative (attrito):

$$W_{NC} = E_{fin} - E_{in} =$$
$$= E_O - E_A =$$
$$= (U_O + K_O) - (U_A + K_A)$$

Poniamo $U_O = 0$ ⇨ $U_A = mgd$

Inoltre:

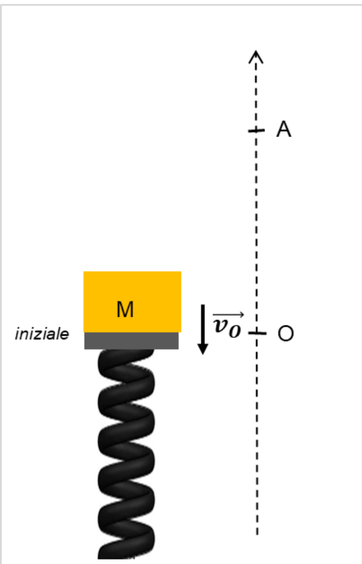
$$K_A = 0 \quad , \quad K_O = \frac{1}{2}mv_O^2$$

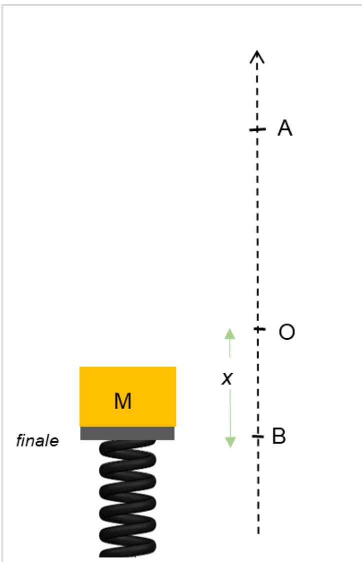
$$W_{NC} = \int_0^d \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^d F_k dx\cos(\pi) = -F_k \int_0^d dx = -F_k d$$

$$-F_k d = \left(0 + \frac{1}{2}mv_O^2\right) - (mgd + 0)$$

$$\frac{1}{2}mv_O^2 = mgd - F_k d$$

$$v_O = \sqrt{2d(g - F_k/m)} = \sqrt{2 \times 4.0 \times (9.8 - 4900/2000)} = 7.7\ m/s$$





(b)

$$W_{NC} = E_{fin} - E_{in} = E_B - E_O$$
$$= (U_B + K_B) - (U_O + K_O)$$

Poniamo $U_O = 0$ ⇨

$$U_B = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

Inoltre

$$K_B = 0 \quad , \quad K_O = \frac{1}{2}mv_O^2$$

$$W_{NC} = \int_0^x \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{dx} = -F_k x$$

Sostituendo in $W_{NC} = E_B - E_O$

$$-F_k x = \left(-mgx + \frac{1}{2}kx^2 + 0\right) - \left(0 + \frac{1}{2}mv_O^2\right)$$

$$-F_k x = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_O^2$$

Dal risultato precedente del punto (a): $\frac{1}{2}mv_O^2 = mgd - F_k d$

$$-F_k x = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 - (mgd - F_k d)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - (mg - F_k)x - (mg - F_k)d = 0$$

$$x^2 - \frac{2(mg - F_k)}{k}x - \frac{2(mg - F_k)d}{k} = 0$$

$$x = \frac{(mg - F_k)}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{(mg - F_k)}{k}\right)^2 + \frac{2(mg - F_k)d}{k}}$$

Ha significato fisico solo la soluzione positiva $x > 0$

$$x = \frac{(mg - F_k)}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{(mg - F_k)}{k}\right)^2 + \frac{2(mg - F_k)d}{k}}$$

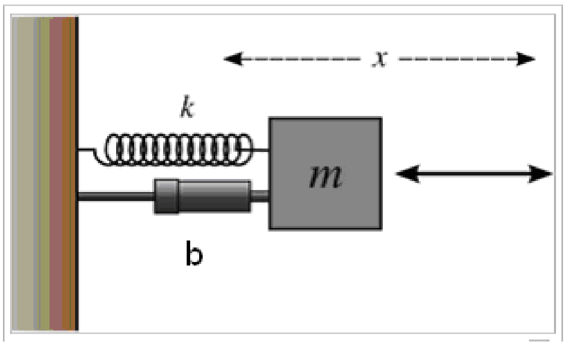
$$x = \frac{(mg - F_k)}{k}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2kd}{(mg - F_k)}}\right] =$$

$$= \frac{(2000 \times 9.8 - 4900)}{1.5 \times 10^5}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 1.5 \times 10^5 \times 4.0}{(2000 \times 9.8 - 4900)}}\right] = 1.39\ m = 1.4\ m$$

OSCILLATORE ARMONICO

Esercizio 42

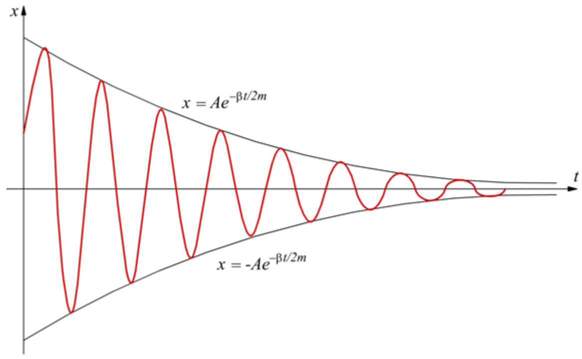
Un oscillatore armonico smorzato è costituito da un blocco (*m* = 2.00 kg), una molla (*k* = 10.0 N/m) e presenta una forza di smorzamento *F* = -*bv*. Inizialmente oscilla con una ampiezza di 25.0 cm, che scende a tre quarti di questo valore al termine di quattro oscillazioni complete. (a) qual è il valore di *b*? (b) Quanta energia è stata dissipata durante queste quattro oscillazioni?



Equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

con $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$



Soluzione, nella condizione di smorzamento debole (*presenza di oscillazioni*):

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}sin(\omega t + \varphi)$$

(a)

Consideriamo l'ampiezza dell'oscillazione $a(t) = Ae^{-\gamma t}$

Imponiamo la condizione:

$$a(t = 4T) = Ae^{-\gamma 4T} = \frac{3}{4}a(t = 0) = \frac{3}{4}A$$

$$e^{-\gamma 4T} = \frac{3}{4}$$

$$e^{\gamma 4T} = \frac{4}{3} \qquad 4\gamma T = ln(4/3)$$

Ricordiamo che $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}}$

$$\frac{8\pi\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}} = ln(4/3)$$

$$\frac{\gamma^2}{\omega_0^2 - \gamma^2} = \left(\frac{ln(4/3)}{8\pi}\right)^2$$

$$\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]\gamma^2=\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\omega_0^2$$

$$\gamma=\omega_0\sqrt{\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}=\sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}$$

$$b=2m\gamma=2m\sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}=2\times 2.00\sqrt{\frac{10.0}{2.00}\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/{}_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}=0.102\ kg/s$$

(b)

$$E=U_{max}=\frac{1}{2}k[\mathcal{A}(t)]^2$$

$$E_{iniz}=\frac{1}{2}k[\mathcal{A}(t=0)]^2=\frac{1}{2}kA^2$$

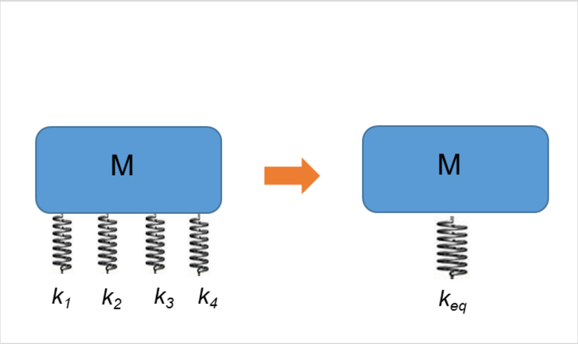
$$E_{fin}=\frac{1}{2}k[\mathcal{A}(t=4T)]^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{3}{4}A\right)^2=\frac{9}{16}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

$$En.dissipata=\Delta E=E_{fin}-E_{iniz}=\left(\frac{9}{16}-1\right)\left(\frac{1}{2}kA^2\right)=-\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

$$En.dissipata=-\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}10.0\times(25.0\times10^{-2})^2\right)=-0.137\ J$$

OSCILLATORE ARMONICO

Esercizio 43
Un'automobile di 997.7 kg trasporta quattro persone, di 81.6 kg ciascuna, lungo una strada ondulata. La distanza tra le ondulazioni è di 3.96 m. Si osserva che la macchina sobbalza con ampiezza massima quando la sua velocità è di 16.1 Km/h. Ad un certo punto la macchina si ferma e i quattro passeggeri scendono. Di quanto si alza la carrozzeria della macchina sulle proprie sospensioni in seguito alla diminuzione di peso?



La macchina è sostenuta verticalmente dalle 4 sospensioni delle ruote. E' equivalente ad un sistema massa-molla posto in verticale, con una molla di costante elastica

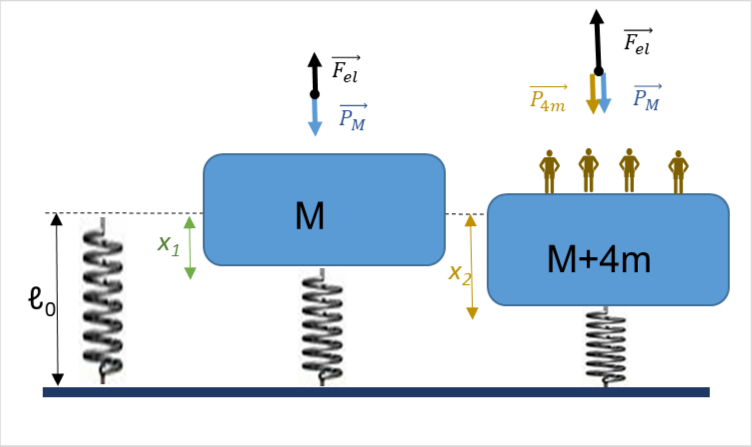
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

Quando le sospensioni sorreggono solo l'auto, in condizioni di equilibrio, la molla equivalente è compressa di un tratto x_1 tale che :

$$\overrightarrow{P_{mac}} + \overrightarrow{F_{molla}} = 0$$

$$Mg - k_{eq}x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{Mg}{k_{eq}}$$



Quando sull'auto sono presenti le 4 persone, in condizioni di equilibrio, la molla equivalente è compressa di un tratto x_2 tale che :

$$\overrightarrow{P_{mac}} + 4\overrightarrow{P_{persona}} + \overrightarrow{F_{molla}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M + 4m)g - k_{eq}x_2 = 0$$

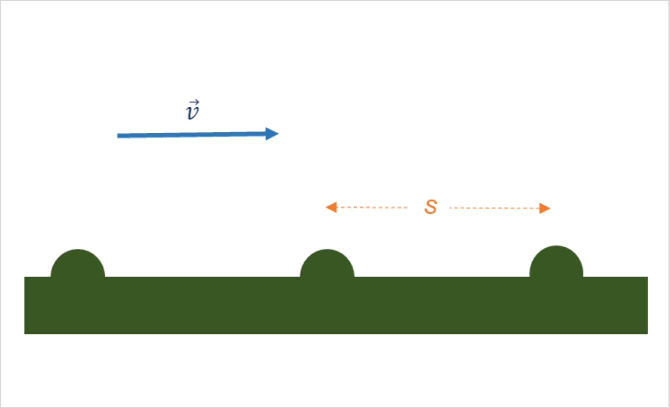
$$x_2 = \frac{(M + 4m)g}{k_{eq}}$$

Per cui quando le 4 persone scendono dall'auto, questa si solleva di Δx tal che:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{(M + 4m)g}{k_{eq}} - \frac{Mg}{k_{eq}} = \frac{4mg}{k_{eq}}$$

Per determinare k_{eq}, sfruttiamo la condizione di risonanza ($\gamma \to 0$):

ampiezza massima quando $\omega_{est} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{(M+4m)}}$



Detto T il tempo impiegato dall'auto a raggiungere l'ondulazione successiva, risulta:

$$\begin{cases} \omega_{est} = \dfrac{2\pi}{T} \\ v = \dfrac{s}{T} \end{cases}$$

$$\omega_{est} = 2\pi \frac{v}{s}$$

Allora

$$\sqrt{\frac{k_{eq}}{(M+4m)}} = 2\pi \frac{v}{s}$$

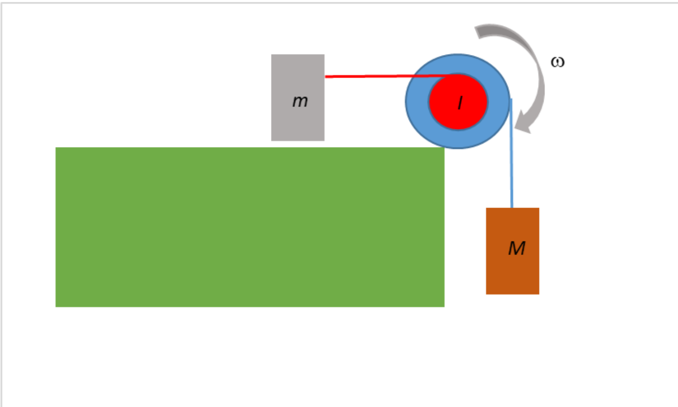
$$k_{eq} = (M+4m)\left(2\pi \frac{v}{s}\right)^2$$

$$\Delta x = \frac{4mg}{k_{eq}} = \frac{4mg}{(M+4m)}\left(\frac{s}{2\pi v}\right)^2$$

$$\Delta x = \frac{4 \times 81.6 \times 9.80}{(997.7 + 4 \times 81.6)}\left(\frac{3.96}{2\pi \times 16.1 \times 10^3 / 3600}\right)^2 = 0.04797\ m \cong 4.80\ cm$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 45
Su un piano orizzontale è posata una massa *m*=10 kg. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge su una puleggia di raggio r=20 cm. Questa è messa in rotazione dalla discesa, sotto l'azione del peso, di una massa *M*=4 kg, a cui è collegata da un filo avvolto su una puleggia di raggio R=50 cm, coassiale e rigidamente fissata alla precedente. Il momento di inerzia del sistema delle due pulegge rispetto al comune asse di rotazione vale I=6 kg·m^2. Calcolare: (a) la velocità v di *M* dopo che è scesa di *h*=1 m; (b) le tensioni dei due fili durante il movimento; (c) il valore di v se tra *m* e il piano ci fosse un coefficiente di attrito dinamico μ=0.25.



Rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria ➔ $\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$
Una puleggia è un cilindro pieno
(a) Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f$$

$$E_i = mg\,h + Mgh$$

$$E_f = \left(mgh + \frac{1}{2}mv_m^2\right) + \left(0 + \frac{1}{2}Mv_M^2\right) + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Le pulegge ruotano con la stessa velocità angolare ω, per cui punti a diversa distanza dall'asse di rotazione hanno diverse velocità lineari:

$$\omega = \frac{v_M}{R} = \frac{v_m}{r} \quad ; \quad v = v_M = \omega R \quad ; \quad v_m = \omega r = v\frac{r}{R}$$

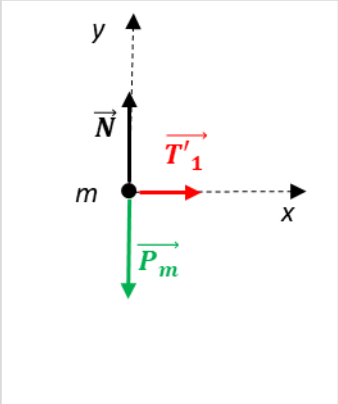
$$mg\,h + Mgh = mgh + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

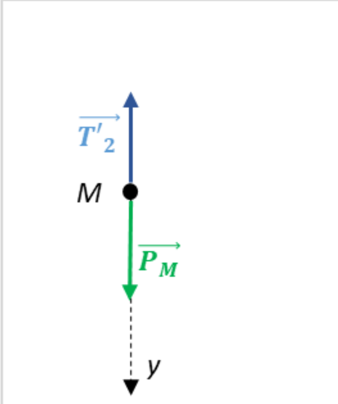
$$Mgh = \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

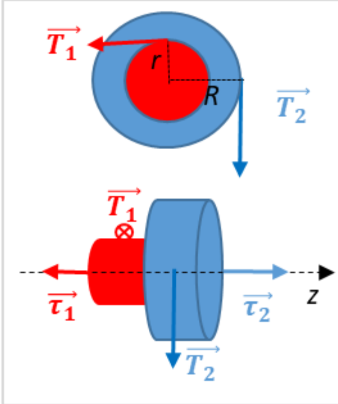
$$2Mgh = \left[m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}\right]v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2\times 4\times 9.8\times 1}{10\left(\frac{20}{50}\right)^2 + 4 + \frac{6}{0.5^2}}} = 1.6\ m/s$$

(b) Equazioni del moto:







$$\vec{P}_m + \vec{N} + \vec{T'}_1 = m\vec{a}_m$$

$$\begin{cases} T'_1 = ma_m \\ -P_m + N = 0 \end{cases}$$

$$\vec{P}_M + \vec{T'}_2 = M\vec{a}_M$$

$$P_M - T'_2 = Ma_M$$

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = I\vec{\alpha}$$

$$-T_1 r + T_2 R = I\alpha$$

Consideriamo che:

- le funi sono ideali, quindi:

$$T_1 = T'_1 \; ; \; T_2 = T'_2$$

- le pulegge ruotano con la stessa accelerazione angolare α quindi le accelerazioni tangenti saranno:

$$a_m = \alpha\, r \quad ; \quad a_M = \alpha\, R$$

Combinando le equazioni del moto

$$\begin{cases} T_1 = m\,\alpha\, r \\ Mg - T_2 = M\,\alpha\, R \\ -T_1 r + T_2 R = I\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = m\,\alpha\, r \\ T_2 = Mg - M\,\alpha\, R \\ -m\,\alpha\, r^2 + [Mg - M\,\alpha\, R]R = I\alpha \end{cases}$$

$$(I + m\,r^2 + M\,R^2)\,\alpha = MgR$$

$$\alpha = \frac{MgR}{I + m\,r^2 + M\,R^2}$$

$$T_1 = Mg\frac{mRr}{I + m\,r^2 + M\,R^2} = 4\times 9.8\frac{10\times 0.5\times 0.20}{6 + 10\times 0.2^2 + 4\times 0.5^2} = 5.3\ N$$

$$T_2 = Mg\left(1 - \frac{MR^2}{I + m\,r^2 + M\,R^2}\right) = 4\times 9.8\frac{10\times 0.5^2}{6 + 10\times 0.2^2 + 4\times 0.5^2} = 13\ N$$

(c) In presenza di forze non conservative

$$W_{NC} = E_f - E_i$$

La forza d' attrito è costante, quindi:

$$W_{NC} = \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{\Delta x} = -F_k \Delta x = -\mu_k m g \Delta x$$

Δx è lo spazio percorso da *m* quando *M* è scesa di *h*. Le due pulegge ruotano con la stessa velocità angolare, quindi hanno lo stesso spostamento angolare $\Delta\theta$ nello stesso tempo. Considerando i diversi raggi della puleggia su cui si avvolgono rispettivamente le funi e ricordando la definizione di angolo in radianti:

$$\Delta\theta = \frac{h}{R} = \frac{\Delta x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = h\frac{r}{R}$$

Sostituendo:

$$-\mu_k m g h \frac{r}{R} = \left(mgh + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - (mg\,h + Mgh)$$

$$Mgh - \mu_k m g h \frac{r}{R} = \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

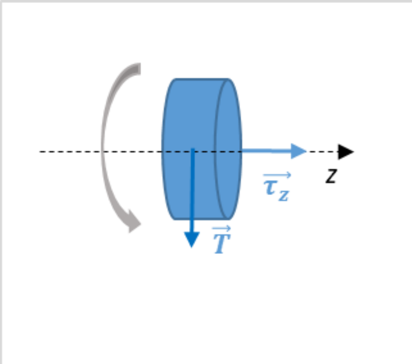
$$2Mgh - 2\mu_k m g h \frac{r}{R} = \left[m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}\right]v^2$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{M - \mu_k m\frac{r}{R}}{m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}}}$$

$$v = \sqrt{2\times 9.8\times 1\frac{4 - 0.25\times 10\frac{20}{50}}{10\left(\frac{20}{50}\right)^2 + 4 + \frac{6}{0.5^2}}} = 1.4\ m/s$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 46
Un volano di massa *M* = 2000 kg e raggio R = 50 cm viene posto in rotazione con accelerazione angolare costante attorno al suo asse e raggiunge la velocità angolare ω=10 rad/s in un intervallo di tempo t=40 s. Calcolare: (a) l'accelerazione angolare α del volano, (b) il momento meccanico τ necessario per porre in rotazione il volano, (c) il lavoro necessario per portarlo alla velocità angolare ω, (d) il numero di giri compiuti nel tempo t.



Rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria ➔

$$\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$$

(a) accelerazione angolare α=*cost* ➔ moto circolare uniformemente accelerato (*cinematica rotazionale*)

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega(t) - \omega_0}{t} = \frac{10}{40} = 0.25\ rad/s^2$$

(b) Un volano è un cilindro pieno ➔ $I_z = \frac{1}{2}MR^2$ $\qquad \tau = I_z\alpha$

$$\tau = I_z\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{\omega(t) - \omega_0}{t} = \frac{1}{2}2000\times(50\times10^{-2})^2\frac{10}{40} = 62.5\ Nm$$

(c) τ=cost ➔

$$W = \int \tau\, d\theta = \tau\,\Delta\theta$$

moto circolare uniformemente accelerato (*cinematica rotazionale*):

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

nel nostro caso

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega(t)}{t}t^2 = \frac{1}{2}\omega(t)t$$

$$W = \tau\,\Delta\theta = \left(\frac{1}{2}MR^2\frac{\omega(t)}{t}\right)\left(\frac{1}{2}\omega(t)t\right) = \frac{1}{4}MR^2\omega(t)^2 = \frac{1}{2}2000\times(50\times10^{-2})^2\times10^2 = 25\times10^3 J$$

(d) $\qquad 1\ giro \equiv 2\pi\ rad$

nel tempo t lo spostamento angolare è stato:

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega(t)}{t}t^2 = \frac{1}{2}\omega(t)t$$

$$\Downarrow$$

$$N.giri = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\omega(t)t}{2\pi} = \frac{1}{4}\frac{10\times40}{\pi} = 31.8 \simeq 32\ giri$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 47

Un motore elettrico mette in rotazione un volano costituito da un cilindro omogeneo di raggio R=0.5 m e spessore s=5 cm, costituito in acciaio (ρ=7.6 g/cc). Sapendo che il motore eroga una potenza costante $\mathcal{P}$ =1000 W e che all'istante iniziale t_0 la velocità di rotazione è n_0 =100 giri/min, calcolare: (a) gli intervalli di tempo necessari affinché, il volano raggiunga le velocità di rotazione n_1 =500 giri/min e n_2 =1000 giri/min; (b) l'accelerazione angolare cui è soggetto il volano in corrispondenza dei tre suindicati valori della velocità angolare.

Rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria

Un volano è un cilindro pieno ➔ $I_z = \frac{1}{2}MR^2$

$$M = \rho V = \rho A s = \rho(\pi R^2)s$$

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\rho(\pi R^4)s = \frac{1}{2}7.6\times 10^3 \times \pi \times 0.5^4 \times 5 \times 10^{-2} = 37.3\ kg\ m^2$$

Inoltre, considerando che

$$1\ giro = 2\pi\ rad$$
$$1\ min = 60\ s$$
$$\omega = n\frac{2\pi}{60}\ \ rad/s$$

(a) Per definizione:

$$\mathcal{P} = \frac{đW}{dt}$$

$$\mathcal{P} = cost\ \rightarrow \frac{đW}{dt} = cost = \frac{W}{\Delta t}$$

Dal Teorema dell'Energia Cinetica:

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2$$

Combinando:

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}I_z\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{n_f^2 - n_i^2}{\mathcal{P}}$$

$$\Delta t_1 = \frac{1}{2}I_z\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{n_1^2 - n_0^2}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}37.3\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{500^2 - 100^2}{1000} = 49\ s$$

$$\Delta t_2 = \frac{1}{2}I_z\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{n_2^2 - n_0^2}{\mathcal{P}} = \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_0^2}\Delta t_1 = \frac{1000^2 - 100^2}{500^2 - 100^2}\Delta t_1 = 202\ s$$

(b) La potenza è legata alla velocità angolare:

$$\mathcal{P} = \frac{đW}{dt} = \tau_z\frac{d\theta}{dt} = \tau_z\omega$$

$$\mathcal{P} = cost\ \rightarrow\ \tau_z\omega = cost$$

$$I_z \alpha \omega = cost = \mathcal{P}$$

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}}{I_z \omega} = \frac{\mathcal{P}}{I_z \frac{2\pi}{60} n} = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n}$$

$$\alpha_0 = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n_0} = \frac{60}{2\pi} \times \frac{1000}{37.3 \times 100} = 2.56\, rad/s^2$$

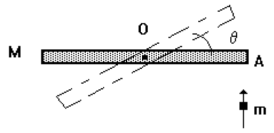
$$\alpha_1 = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n_1} = \frac{n_0}{n_1} \alpha_0 = \frac{100}{500} \alpha_0 = 0.51\, rad/s^2$$

$$\alpha_2 = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n_2} = \frac{n_0}{n_2} \alpha_0 = \frac{100}{1000} \alpha_0 = 0.26\, rad/s^2$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 48

Un'asta omogenea di massa *M* = 4.0 kg e lunghezza ℓ= 1.0 m in un piano orizzontale è libera di ruotare rispetto ad un asse verticale passante per il suo centro O. Contro l'estremo A dell'asta viene scagliato, in direzione ortogonale all'asta, un proiettile di massa *m* = 1.0 kg con velocità v = 5.0 m/s. Esso rimane conglobato nell'asta, la quale compie *N* = 20 giri prima di fermarsi. Si calcoli: (a) la velocità angolare ω dell'asta subito dopo l'urto; (b) il momento meccanico costante τ delle forze frenanti



(a) Urto completamente anelastico → Conservazione del momento angolare

$$L_{prima} = L_{dopo}$$

$$L_{prima} = L_{proiettile} = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = r\, mv = \frac{\ell}{2} mv$$

$$L_{dopo} = L_{asta+proiettile} = I_{tot}\omega$$

$$I_{tot} = I_{asta} + I_{proittile} = \frac{1}{12}M\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}M + m\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\frac{\ell}{2}mv = \left(\frac{1}{3}M + m\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \omega$$

$$\omega = \frac{mv}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)\frac{\ell}{2}} = \frac{1.0 \times 5.0}{\left(\frac{1}{3}4.0 + 1.0\right)\frac{1.0}{2}} = 4.3\ rad/s$$

(b) Teorema dell'Energia Cinetica

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2 = 0 - \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2$$

Momento meccanico costante e frenante $\Rightarrow$

$$W = -\int \tau\, d\theta = -\tau\, \Delta\theta$$

con $\Delta\theta = N\, 2\pi$

$$-\tau\, \Delta\theta = -\frac{1}{2}I_{tot}\omega^2$$

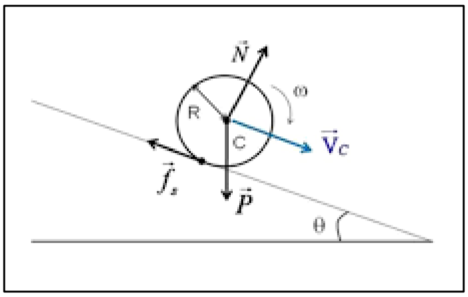
$$\tau = \frac{\frac{1}{2}I_{tot}\omega^2}{\Delta\theta} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}M + m\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]\left(\frac{mv}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)\frac{\ell}{2}}\right)^2}{2N\pi} = \frac{\frac{(mv)^2}{\frac{1}{3}M + m}}{4N\pi} =$$

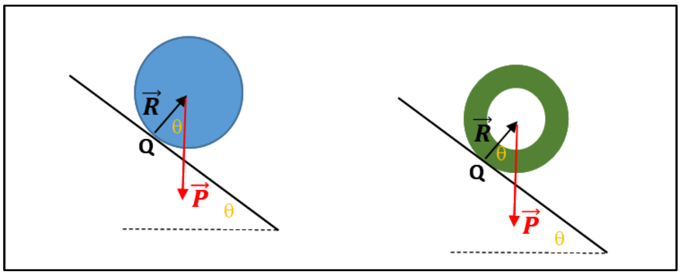
$$= \frac{1}{4N\pi}\frac{(mv)^2}{\left(\frac{1}{3}M + m\right)} = \frac{1}{4 \times 20\pi}\frac{(1.0 \times 5.0)^2}{\left(\frac{1}{3}4.0 + 1.0\right)} = 0.0426 = 4.3 \times 10^{-2}\ Nm$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 52

Due cilindri aventi la stessa massa *m*, uno pieno omogeneo di raggio R e l'altro cavo di raggio esterno R e raggio interno r=R/2, rotolano senza strisciare lungo un piano, inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Supponiamo che i due cilindri partano entrambi da fermi dalla quota *h*=6.0 m. (a) Quale dei due cilindri arriverà per primo alla fine del piano inclinato e quanto tempo impiegherà? (b) Quale sarà la distanza *x* tra i due cilindri quando il più veloce è arrivato alla fine del piano?





(a) I due cilindri partono entrambi da fermi e percorrono lo stesso tratto.

Il moto di traslazione (del Centro di Massa) è rettilineo uniformemente accelerato, quindi arriva prima il cilindro che si muove con a_{CM} maggiore.

Il moto di rotolamento puro lo possiamo considerare come un **moto di pura rotazione attorno all'asse di istantanea rotazione**, e trattandosi di rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria ➔

$$\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$$

Rispetto al polo Q l'unica forza che ha momento meccanico non nullo è la forza peso. I due cilindri hanno la stessa massa e lo stesso raggio esterno, quindi per entrambi risulta:

$$\vec{\tau}_Q = \vec{R} \wedge m\vec{g}$$

in forma scalare:

$$\tau_{pieno} = \tau_{cavo} = mgR\sin\theta$$

Per calcolare i momenti di inerzia, applichiamo il Teorema di Huygens-Steiner:

$$I_Q = I_{CM} + mR^2$$

per il cilindro pieno:

$$I_{pieno} = \left(\frac{1}{2}mR^2\right) + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

per il cilindro cavo:

$$I_{cavo} = \left[\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)\right] + mR^2 = \left\{\frac{1}{2}m\left[R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\right\} + mR^2 = \frac{7}{4}mR^2 > I_{pieno}$$

$$\tau_{pieno} = \tau_{cavo}$$

$$I_{pieno}\alpha_{pieno} = I_{cavo}\alpha_{cavo}$$

$$I_{pieno} < I_{cavo}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{pieno} > \alpha_{cavo}$$

Ricordando che

$$a_{CM} = \alpha R$$

risulta:

$$a_{pieno} > a_{cavo}$$

Arriva prima il cilindro pieno, che ha momento di inerzia minore

Dalla cinematica del moto rettilineo uniformemente accelerato del centro di massa:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

Il tempo t per percorrere il tratto s sarà, essendo:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

con

$$s = h/sin\theta$$

$$a = a_{pieno} = \alpha_{pieno}R = \frac{\tau}{I_{pieno}}R = \frac{mgRsin\theta}{\frac{3}{2}mR^2}R = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

$$t = \sqrt{\frac{2\ h/sin\theta}{\frac{2}{3}g\ sin\theta}} = \sqrt{\frac{3h}{g(sin\theta)^2}} = \frac{1}{\sin 30°}\sqrt{\frac{3 \times 6.0}{9.8}} = 2.7\ s$$

(b)

$$\Delta x = x_{pieno}(t) - x_{cavo}(t) = \frac{1}{2}a_{pieno}t^2 - \frac{1}{2}a_{cavo}t^2 = \frac{1}{2}(\alpha_{pieno} - \alpha_{cavo})Rt^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I_{pieno}} - \frac{\tau}{I_{cavo}}\right)Rt^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_{pieno}} - \frac{1}{I_{cavo}}\right)\tau Rt^2$$

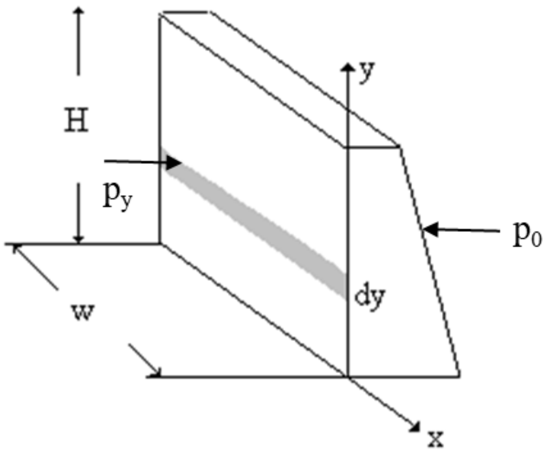
$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}mR^2} - \frac{1}{\frac{7}{4}mR^2}\right)(mgRsin\theta)R\left(\frac{1}{sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}\right)^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right)\frac{1}{mR^2}\right](mR^2 gsin\theta)\frac{3h}{g(sin\theta)^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{14-12}{21}\right)\frac{3h}{sin\theta} = \frac{1}{7}\frac{6.0}{0.5} = 2.3\ m$$

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 55
Dell'acqua arriva ad una altezza H di una diga di lunghezza w (vedi figura). (a) Determinare la forza risultante sulla diga. (b) Calcolare il momento totale esercitato dall' acqua dietro la diga, rispetto ad un asse passante per la base e parallelo alla diga.



(a) Per la Legge di Stevino, la pressione p_y esercitata dall'acqua sulla diga alla quota y rispetto al fondo risulta:

$$p_y = p_0 + \rho g(H - y)$$

Sull'altra faccia della diga, l'aria esercita una pressione costante p_0.
La forza risultante agente sul tratto di diga compreso tra y e y+dy, risulta:

$$dF_{tot} = (p_y - p_0)dS = (p_y - p_0)\, w\, dy = \rho g(H - y)\, w\, dy$$

La forza totale è quindi:

$$F_{tot} = \int dF_{tot} = \int_0^H \rho g(H-y)\, w\, dy = \rho g w\left[H\int_0^H dy - \int_0^H y\, dy\right] =$$
$$= \rho g w\left(H^2 - \frac{1}{2}H^2\right) = \rho g w\frac{H^2}{2} = \left(\rho g\frac{H}{2}\right)(wH) =$$
$$= (p_{H/2} - p_0)\, S$$

E' come se sull'intera superfice della diga agisse una pressione costante pari a quella agente a metà altezza totale dell'acqua.

(b) La forza risultante agente sul tratto di diga compreso tra y e y+dy, è perpendicolare alla superfice della diga. Il suo momento meccanico rispetto all'asse x vale

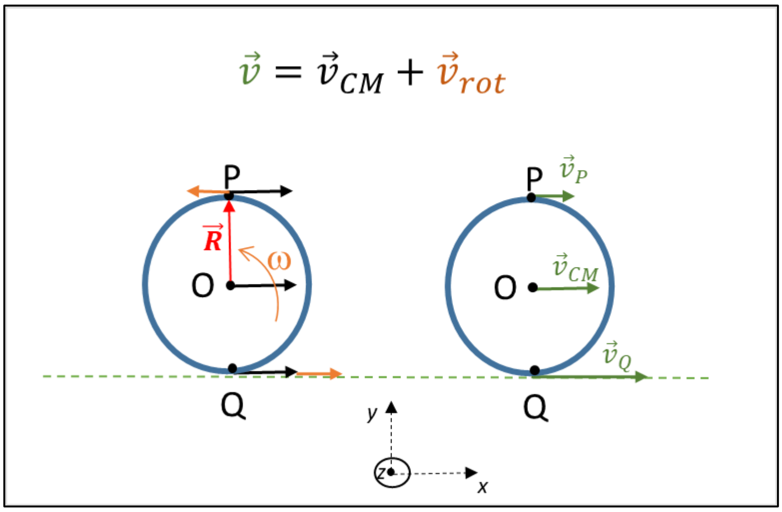
$$d\tau = \left|\vec{r} \wedge d\vec{F}_{tot}\right| = r\, dF_{tot} = y(p_y - p_0)\, dS = y\,[\rho g(H-y)](w\, dy)$$

$$\tau = \int d\tau = w\rho g\int_0^H (H-y)\, y\, dy = w\rho g\left[H\int_0^H y dy - \int_0^H y^2 dy\right] =$$
$$= w\rho g\left[H\frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3}\right] = w\rho g\frac{H^3}{6} = \frac{H}{3}\left(\rho g w\frac{H^2}{2}\right) = \frac{H}{3}F_{tot}$$

Ai fini del momento meccanico è come se la forza totale fosse applicata alla quota H/3.

Esercizio 54

Un giocatore di bocce lancia una boccia di raggio R=6 cm e massa m radente al terreno con velocità del centro di massa v_0=50 cm/s, imprimendogli una rotazione in senso contrario a quello di avanzamento con velocità angolare ω_0=1 rad/s. La boccia scivola e rotola sul terreno. Calcolare: (a) dopo quanto tempo t_0 cessa lo scivolamento, se il coefficiente di attrito del terreno è μ=0.8; (b) con quale velocità v_{CM} procede la boccia cessato lo scivolamento; (c) nel caso in cui v_0=50 cm/s, quale deve essere ω_0 perché la boccia, cessato lo scivolamento, si arresti; (d) quale deve essere, sempre con v_0=50 cm/s, il valore di ω'_0 della velocità angolare da imprimere alla boccia perché questa, cessato lo scivolamento, torni indietro con velocità v_1=30 cm/s.



$$\vec{v}_{CM} = v_{CM}\hat{x}$$

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0\hat{z}$$

$$\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{v}_{P_{rot}} = \omega_0\hat{z} \wedge R\hat{y} =$$

$$= \omega_0 R(-\hat{x})$$

$$\vec{v}_{Q_{rot}} = \omega_0 R(\hat{x})$$

$$\vec{N} + \vec{P} = 0$$

$$\vec{F}_{tot} \equiv \vec{f}_{att} = m\vec{a}_{CM}$$

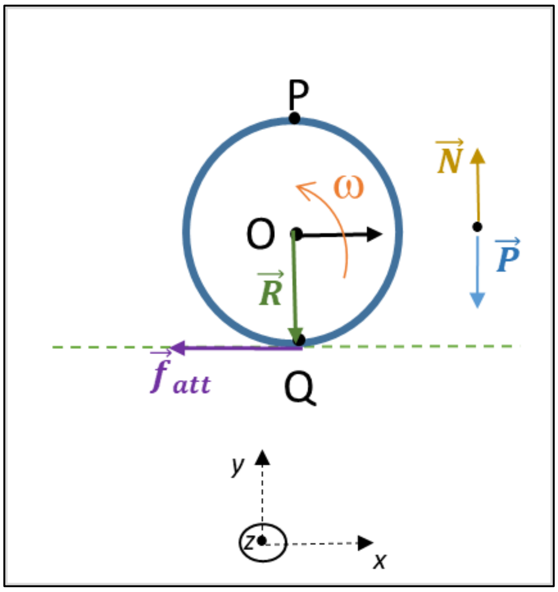
$$\vec{f}_{att} = \mu N(-\hat{x}) = \mu mg(-\hat{x})$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_f = \vec{R} \wedge \vec{f}_{att} =$$

$$= R(-\hat{y}) \wedge \mu mg(-\hat{x}) =$$

$$= \mu mgR(-\hat{z})$$

$$\Downarrow$$



La traslazione del Centro di Massa O dipende dalla forza di attrito dinamico e la rotazione attorno a O dipende dal momento meccanico della forza di attrito dinamico:

$$m\vec{a}_{CM} = \mu mg(-\hat{x})$$

$$\vec{a}_{CM} = \mu g(-\hat{x})$$

Il moto di traslazione è rettilineo uniformemente accelerato

$$\vec{v}_{CM}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_{CM}t = (v_0 - \mu gt)\hat{x}$$

Rotazione rigida attorno ad un asse che si muove parallelamente a CM

$$\vec{\tau}_f = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}_f}{I_{CM}} = \frac{\mu m g R}{I_{CM}}(-\hat{z})$$

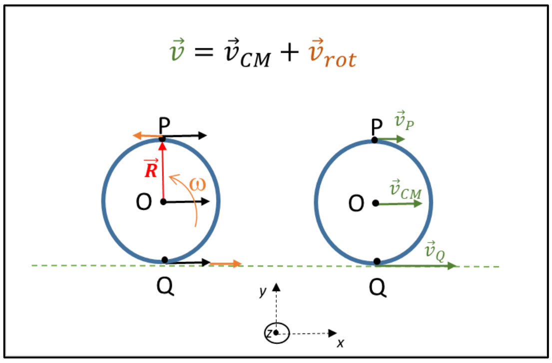
Per una sfera piena (boccia): $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$

$$\vec{\alpha} = \frac{\mu m g R}{\frac{2}{5}mR^2}(-\hat{z}) = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}(-\hat{z})$$

Moto circolare uniformemente accelerato:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t = \left(\omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t\right)\hat{z}$$

(a) lo scivolamento cessa quando il punto Q è fermo:



$$\vec{v}_Q(t_0) = \vec{v}_{CM}(t_0) + \vec{v}_{Q_{rot}}(t_0) =$$

$$= [v_{CM}(t_0) + \omega(t_0)R]\hat{x} = 0$$

$$v_Q(t_0) = v_{CM}(t_0) + \omega(t_0)R = 0$$

$$(v_0 - \mu g t_0) + \left(\omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t_0\right)R = 0$$

$$\left(\frac{5}{2}\mu g + \mu g\right)t_0 = v_0 + \omega_0 R$$

$$t_0 = \frac{v_0 + \omega_0 R}{\frac{7}{2}\mu g} = \frac{2}{7}\frac{0.5 + 1 \times 0.06}{0.8 \times 9.8} = 0.020\ s$$

(b) calcoliamo la velocità del Centro di Massa

$$v_{CM}(t_0) = v_0 - \mu g t_0 = v_0 - \mu g\,\frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g} = \left(1 - \frac{2}{7}\right)v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R$$

$$v_{CM}(t_0) = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R = \frac{5}{7}\,0.50 - \frac{2}{7}\,1 \times 0.06 = 0.34\frac{m}{s} = 34\ cm/s$$

In corrispondenza:

$$\omega(t_0) = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t_0 = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}\frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g} = \left(1 - \frac{5}{7}\right)\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}$$

$$\omega(t_0) = \frac{2}{7}\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} = \frac{2}{7} \times 1 - \frac{5}{7} \times \frac{0.50}{0.06} = -5.7\ rad/s$$

Si è invertito il senso della rotazione.

Da questo momento sarà sempre

$$v_Q = 0 \quad ; \quad v_{CM} = v_{CM}(t_0) = cost \quad ; \quad \omega = \omega(t_0) = cost$$

E agisce la forza di attrito statico

(c) Imponiamo che a $t=t_0$ risulti contemporaneamente:

$$v_Q(t_0) = 0 \quad e \quad v_{CM}(t_0) = 0$$

La prima condizione si realizza (vedi punto a) per

$$t_0 = \frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g}$$

Sostituendo nella seconda condizione (vedi punto b):

$$v_{CM}(t_0) = v_0 - \mu g t_0 = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R = 0$$

$$5v_0 - 2\omega_0 R = 0$$

$$\omega_0 = \frac{5}{2}\frac{v_0}{R} = \frac{5}{2} \times \frac{0.50}{0.06} = 21\,rad/s$$

(d) Imponiamo che a $t=t_0$ risulti contemporaneamente:

$$v_Q(t_0) = 0 \quad e \quad v_{CM}(t_0) = -v_1$$

La prima condizione si realizza (vedi punto a) per

$$t_0 = \frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega'_0 R}{\mu g}$$

Sostituendo nella seconda condizione (vedi punto b):

$$v_{CM}(t_0) = v_0 - \mu g t_0 = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega'_0 R = -v_1$$

$$\frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega'_0 R = -v_1$$

$$-2\omega'_0 R = -7v_1 - 5v_0$$

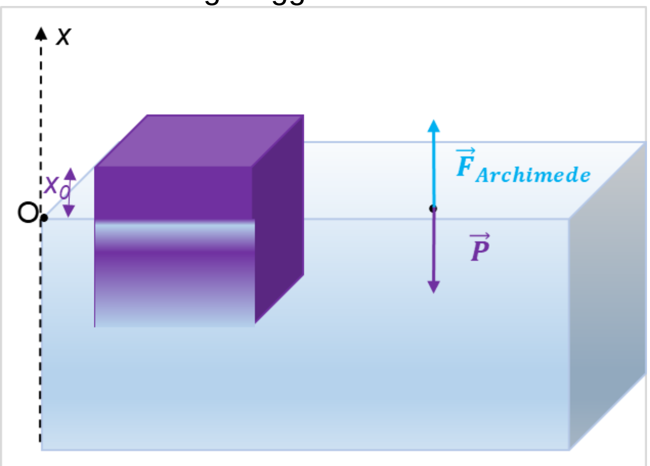
$$\omega'_0 = \frac{7v_1 + 5v_0}{2R} = \frac{7 \times 0.30 + 5 \times 0.50}{2 \times 0.06} = 38\,rad/s$$

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 56

Un cubo di massa m=100 kg e densità ρ_c =800 kg/m^3 galleggia in acqua. (a) Determinare la forza F che bisogna esercitare sulla faccia superiore del cubo affinché esso sia completamente immerso. (b) Se la forza F cessa di esistere, il cubo ritorna nella sua posizione di equilibrio con un moto oscillatorio. Determinare il periodo T delle oscillazioni, considerando trascurabile lo smorzamento.

Condizione di galleggiamento:



$$\vec{P} + \vec{F}_{Archimede} = 0$$

$$mg = m_{acqua} g$$

$$\rho_{cubo} V_{cubo} = \rho_{acqua} V_{immerso}$$

$$\rho_{cubo} S\,\ell = \rho_{acqua}\, S\,\ell_{immerso}$$

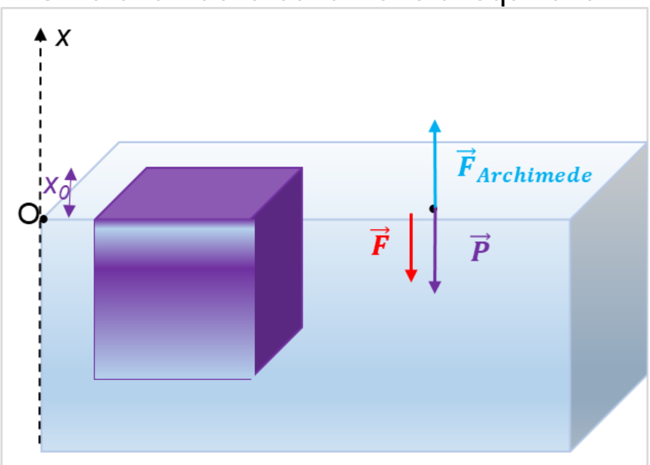
$$\ell_{immerso} = \ell \frac{\rho_{cubo}}{\rho_{acqua}}$$

$$x_0 = \ell_{emerso} = \ell - \ell_{immerso} = \ell\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_a}\right) = \ell \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_a}$$

con

$$\ell = \sqrt[3]{V_c} = \sqrt[3]{m/\rho_c} = \sqrt[3]{100/800} = 1/2 = 0.50\, m$$

(a) Applicando la forza F si ha una nuova condizione di equilibrio:



$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_{Archimede} = 0$$

con

$$V_{immerso} = V \qquad ; \qquad m_a = \rho_a V = \rho_a \frac{m}{\rho_c}$$

quindi

$$-F - P + F_{Archimede} = 0$$

$$F = F_{Archimede} - P$$

$$F = m_a g - mg = \frac{\rho_a}{\rho_c} mg - mg = mg\left(\frac{\rho_a}{\rho_c} - 1\right)$$

$$F = 100 \times 9.80\left(\frac{1000}{800} - 1\right) = 245\ N$$

(b) Rimossa la forza $\vec{F}$, l'equazione del moto diventa:

$$\vec{P} + \vec{F}_{Archimede} = m\vec{a}$$

$$-mg + m_a g = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

con $m_a = \rho_a V_{immerso}$

In queste condizioni il volume immerso $V_{immerso}$ varia durante il moto. Detto *x* la parte li lato emergente:

$$x = \ell_{emerso} \quad ; \quad V_{immerso} = S\ell_{immerso} = S(\ell - \ell_{emerso}) = S(\ell - x)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{m}(m - m_a) = 0$$

Osserviamo che:

$$m - m_a = \rho_c S\ell - \rho_a S(\ell - x) = -(\rho_a - \rho_c)S\ell + \rho_a Sx$$

$$= -\rho_a \frac{(\rho_a - \rho_c)}{\rho_a} S\ell + \rho_a Sx = -\rho_a S x_0 + \rho_a Sx = \rho_a S(x - x_0)$$

Sostituendo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{m}\rho_a S(x - x_0) = 0$$

equazione di un oscillatore armonico semplice che oscilla attorno al punto $x = x_0$, con pulsazione

$$\omega_0^2 = \frac{g}{m}\rho_a S = \frac{g}{\ell}\rho_a \frac{S\ell}{m} = \frac{g}{\ell}\frac{\rho_a}{\rho_c}$$

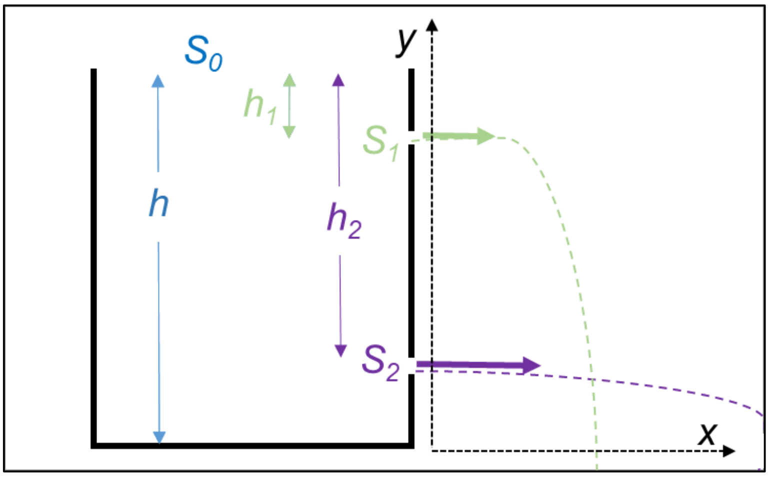
e periodo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\frac{\rho_c}{\rho_a}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.50}{9.8}\frac{800}{1000}} = 1.27\ s$$

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 57

Un recipiente cilindrico, appoggiato al suolo, è pieno di un liquido perfetto sino ad una quota h=0.6 m. Su una parete, sulla stessa verticale, sono praticati due fori, di sezione trascurabile rispetto a quella del recipiente, a quota h_1=0.1 m e h_2=0.4 m rispetto al pelo libero. Supponendo che il livello h del liquido sia mantenuto costante, calcolare in quali punti i due getti raggiungerebbero terra, e in quale punto eventualmente si intersecano.



Alla sezione S_0 il livello dell'acqua rimane costante, quindi $v_0 = 0$. Possiamo applicare il Teorema di Torricelli.

La velocità di efflusso dell'acqua dalle sezioni S_1 e S_2 risulta rispettivamente:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} > v_1$$

Le traiettorie paraboliche dei due getti d'acqua saranno differenti:

$$per\ il\ getto\ 1: \begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = (h - h_1) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = (h - h_1) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_1}\right)^2$$

$$per\ il\ getto\ 2: \begin{cases} x(t) = v_2 t \\ y(t) = (h - h_2) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = (h - h_2) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_2}\right)^2$$

e raggiungeranno terra nei punti x_1 e x_2 rispettivamente:

$$per\ il\ getto\ 1: \quad y(x_1) = (h - h_1) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_1}{v_1}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = v_1\sqrt{\frac{2(h - h_1)}{g}}$$

$$per\ il\ getto\ 2: \quad y(x_2) = (h - h_2) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_2}{v_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = v_2\sqrt{\frac{2(h - h_2)}{g}}$$

calcoliamo

$$x_1 = v_1\sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} = \sqrt{2gh_1}\sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} = 2\sqrt{h_1(h-h_1)} = 0.45\ m$$

$$x_2 = v_2\sqrt{\frac{2(h-h_2)}{g}} = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2(h-h_2)}{g}} = 2\sqrt{h_2(h-h_2)} = 0.56\ m$$

e si incroceranno nel punto x_i tale che:

$$y_1(x_i) = y_2(x_i)$$

$$(h-h_1) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_1}\right)^2 = (h-h_2) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_2}\right)^2$$

$$(h-h_1) - (h-h_2) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_1}\right)^2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}\right)x_i^2 = h_2 - h_1$$

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2gh_1} - \frac{1}{2gh_2}\right)x_i^2 = h_2 - h_1$$

$$\frac{1}{4}\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}x_i^2 = h_2 - h_1$$

$$x_i = 2\sqrt{h_1h_2} = 2\sqrt{0.1 \times 0.4} = 0.4\ m$$

e

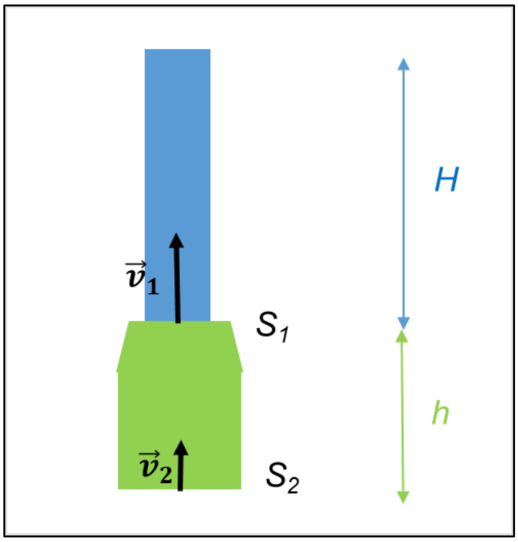
$$y_i = (h-h_1) - \frac{1}{2}g\frac{x_i^2}{v_1^2} = (h-h_1) - \frac{1}{2}g\frac{4h_1h_2}{2gh_1} = h - h_1 - h_2$$

$$y_i = 0.6 - 0.1 - 0.4 = 0.1\ m$$

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 58

Una fontana, progettata per sprizzare in aria un getto d' acqua alto 12 m, ha il foro terminale dell'ugello di uscita del diametro di 1 cm. Il tubo che vi porta l'acqua dalla pompa ha un diametro di 2 cm e la pompa è posta 3 m sotto il detto foro di uscita. Trascurando gli attriti, trovare la pressione che la pompa deve fornire, sapendo che essa pesca da un serbatoio alla pressione atmosferica.



Perché il getto d'acqua raggiunga l'altezza massima *H*, deve uscire dall'ugello S_1 con una velocità v_1 tale che:

(conservazione dell'energia meccanica)

$$E_{in} = E_{fin}$$

$$K_{in} = U_{fin}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgH$$

$$v_1 = \sqrt{2gH}$$

Applichiamo il Teorema di Bernoulli al tubo di flusso tra S_2 e S_1 *(prendiamo come quota di riferimento la quota di S_2)*

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh$$

Ricordando che $p_1 = p_0 = pressione\ atmosferica,$

la sovrappressione che la pompa agente a livello di S_2, prelevando da un serbatoio a pressione atmosferica, deve dare è

$$\Delta p = (p_2 - p_0) = (p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Determiniamo v_2 in funzione di v_1. La portata nel tubo di flusso tra S_2 e S_1 è costante, quindi:

$$S_2 v_2 = S_1 v_1$$

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2}v_1 = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{2gH}$$

Sostituendo:

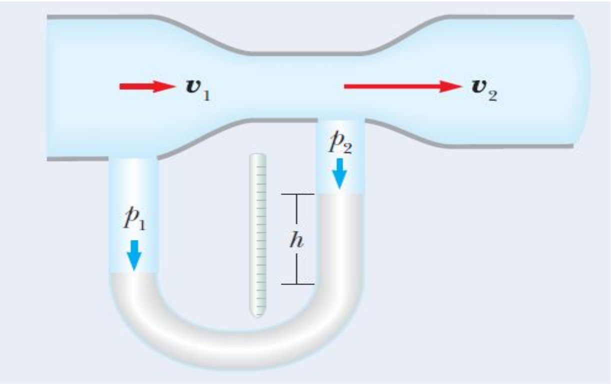
$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho 2gH + \rho gh - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 2gH$$

$$\Delta p = \rho g\left\{h + \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]H\right\}$$

$$\Delta p = 1000 \times 9.8\left\{3 + \left[1 - \left(\frac{\pi 0.5^2}{\pi 1^2}\right)^2\right]12\right\} = 1.4 \times 10^5\,\frac{N}{m^2} = 1.2\ atm$$

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 59
Lungo un condotto in cui scorre del greggio per la raffinazione c'è una strozzatura che forma un tubo di Venturi. Sui due bracci del manometro ad esso connesso la differenza d' altezza del greggio che li riempie è di 1.2 m. Se la sezione del tubo principale è di 50 cm^2 e quella della strozzatura di 20 cm^2, dire quanto greggio (in Kg) viene pompato ogni ora attraverso il condotto (Densità del greggio ρ=0.82 g/cm^3).



Per determinare la portata di massa:

$$\frac{dm}{dt} = \rho S v$$

dobbiamo prima determinare la velocità del fluido in una delle sezioni.
Applichiamo il Teorema di Bernoulli al tubo di flusso tra le sezioni S_2 e S_1 che si trovano alla stessa quota:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Tramite il tubo di Venturi valutiamo la differenza di pressione (p_1-p_2).
Infatti per la Legge di Stevino:

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

e considerando la costanza della portata di volume:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

otteniamo

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$

e quindi:

$$\frac{dm}{dt} = \rho S_1 v_1 = \rho S_1 \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$

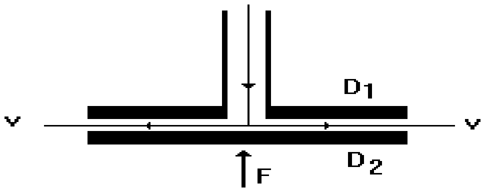
$$\frac{dm}{dt} = 0.82\ \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \times 50 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 1.2}{\left(\frac{50}{20}\right)^2 - 1}} = 8.68\ \ kg/s$$

$$\frac{dm}{dt} = 8.68\ \frac{kg}{s} = 8.68 \frac{1kg}{\frac{1}{3600}h} = 31.2 \times 10^3\ kg/h$$

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 60

Un disco D_1 di sezione S=50 cm^2 è saldato a un pezzo di tubo cilindrico aperto ai due estremi; se si pone a contatto del disco D_1, e al di sotto di esso, un secondo disco D_2 della stessa sezione e di massa M=20 g si osserva che, soffiando nel tubo, il disco D_2 aderisce al disco D_1, mentre, appena si smette di soffiare, il disco D_2 cade. Calcolare con quale velocità deve fluire l'aria nello spazio tra i due dischi, perché il secondo non cada. (Densità dell'aria ρ=1.3 mg/cm^3).



Per il Teorema di Bernoulli (trascurando gli effetti di differenza di quota)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost$$

Per la costanza della portata

$$Sv = cost$$

$$\Downarrow$$

Se la sezione S diminuisce, la velocità v aumenta e la pressione p diminuisce

La pressione p nella zona tra D_1 e D_2 diminuisce quando l'aria fluisce velocemente, mentre all'esterno la pressione p_0 rimane costante.

Su D_2 agirà una forza F, diretta verticalmente verso l'alto, di intensità:

$$F = (p_0 - p)S$$

che si oppone alla forza peso.

Applicando il terorema di Bernoulli all'aria che passa tra i due dischi:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0$$

Da cui:

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Perché il disco D_2 non cada deve essere:

$$F = (p_0 - p)S > P = Mg$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 S > Mg$$

$$v^2 > \frac{2Mg}{\rho S}$$

Per cui la minima velocità deve essere:

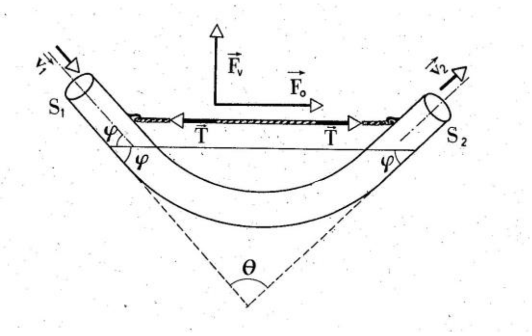
$$v_{min} = \sqrt{\frac{2Mg}{\rho S}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 10^{-3} \times 9.8}{1.3\frac{10^{-6}}{10^{-6}} \times 50 \times 10^{-4}}} = 7.76\ m/s$$

PARADOSSO IDRODINAMICO

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 61

In un tubo orizzontale scorre acqua con velocità v=8 m/s. Mediante una fune il tubo viene curvato di un angolo ϑ=90°. Se la portata di volume del condotto è Q=5 ℓ/s e la sezione S è costante, qual è la forza F necessaria per tenere incurvato il condotto e qual è la tensione T della fune?



Condotto a sezione costante, ma curvo

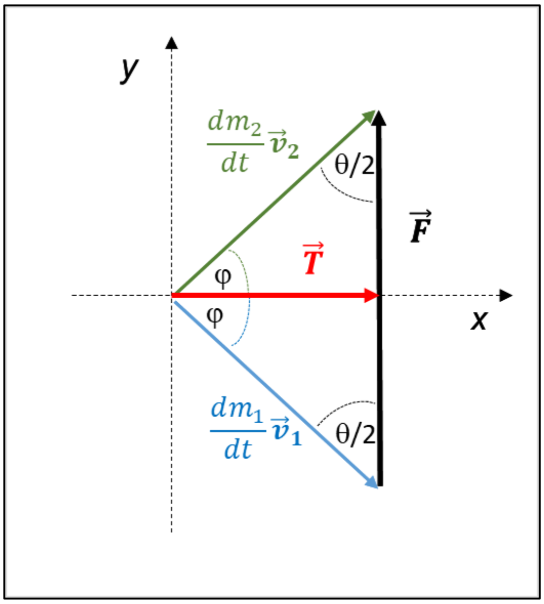
$$S_1 = S_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \rho S v$$

Dalla Legge del moto:

$$\vec{F} = \frac{dm_2}{dt}\vec{v}_2 - \frac{dm_1}{dt}\vec{v}_1 = \rho S v\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \rho Q\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$



$$F_y = \rho Q[v_2 sin\varphi - (-v_1 sin\varphi)]$$

$$= 2\rho Q v\ sin\varphi$$

$$F_x = \rho Q[v_2 cos\varphi - (v_1 cos\varphi)] = 0$$

$$T = \rho Q v\ cos\varphi$$

$$2\varphi + \theta = \pi$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Sostituendo:

$$\varphi = \frac{\pi - \pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$F = F_y = 2 \times 10^3 \times (5 \times 10^{-3}) \times 8\ sin\frac{\pi}{4} = 56.6\ N$$

$$T = 10^3 \times (5 \times 10^{-3}) \times 8 \times cos\frac{\pi}{4} = 28.3\ N$$

$\vec{F}$ è esercitata dal tubo sul fluido. Il fluido reagisce esercitando una forza $\vec{F'} = -\vec{F}$ sul tubo