Appunti di Lezione: Strutture Discrete

Parte IV: Grafi ed Alberi

V. Cutello

Contenuti I

Contenuti II

- Il problema del commesso viaggiatore
- Grafi planari
- Colorazione di un grafo
- Alberi

2 Caso Studio: Problemi combinatori su grafi

- Colorazione di un grafo
- Problemi $\mathcal{NP}$-hard e $\mathcal{NP}$-completi
- MFVS

STRUTTURE DISCRETE

PARTE 4: Grafi ed Alberi

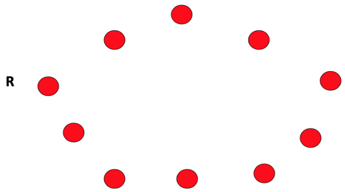
1: Teoria dei Grafi

Introduzione: il problema delle strette di mano

- Iniziamo questa parte del corso con un problema.
  - Roberto e la moglie Giulia hanno organizzato una cena a casa loro ed invitano altre 4 coppie sposate di amici.
  - Alcuni si salutano stringendosi la mano (ovviamente mogli e mariti non si stringono la mano).
  - Alla fine della festa, Roberto chiede a ciascuno a quante persone abbia stretto la mano e riceve nove risposte differenti.
- Domande:
  - Quante persone hanno stretto la mano a Roberto?
  - Quante persone hanno stretto la mano a Giulia?
  - Roberto e Giulia hanno stretto la mano alle stesse persone?

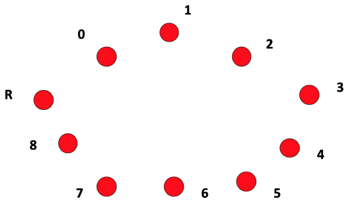
Introduzione: il problema delle strette di mano

Per provare a rispondere alle domande, ci aiutiamo con un disegno.



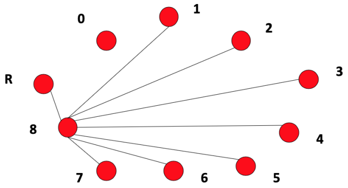
- Indichiamo ciascuna persona con un cerchietto rosso.
- Le persone coinvolte sono 10 e quindi dobbiamo disegnare 10 cerchietti.
- Una di queste persone è Roberto, indicato con una R.

Introduzione: il problema delle strette di mano



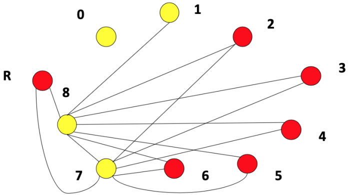
- Poiché ogni persona può stringere la mano ad al più 8 persone, e Roberto riceve 9 risposte differenti deduciamo che queste risposte siano: $0, 1, 2, \ldots, 8$.
- Etichettiamo ciascun cerchietto con uno dei numeri precedenti.
- Il numero x identifica univocamente la persona che ha scambiato x strette di mano.

Introduzione: il problema delle strette di mano



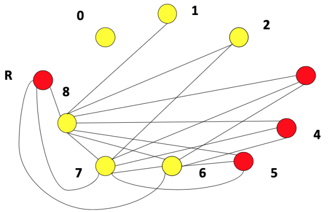
- Disegniamo un segmento per collegare due cerchietti se le persone che rappresentano si sono strette la mano.
- Dobbiamo quindi disegnarne 8 che partono dal cerchietto 8.
- Poiché nessun segmento può toccare il cerchietto 0, il cerchietto 8 è collegato a tutti i cerchietti numerati da 1 a 7 ed al cerchietto R.
- Infine, poiché 8 non può aver stretto la mano al suo coniuge allora i cerchietti $(8, 0)$ rappresentano una coppia.

Introduzione: il problema delle strette di mano



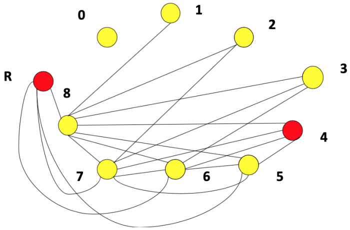
- Il 7 deve essere collegato ad altri 7 cerchietti. E' già collegato ad 8 e quindi dobbiamo collegarlo ad altri 6 cerchietti.
- Ovviamente, non possiamo collegarlo a 0 ed 1 (collegato già ad 8) e quindi sono: $2, 3, 4, 5, 6, R$.
- Poiché 7 non può aver stretto la mano al suo coniuge allora $(7, 1)$ rappresentano una coppia.

Introduzione: il problema delle strette di mano



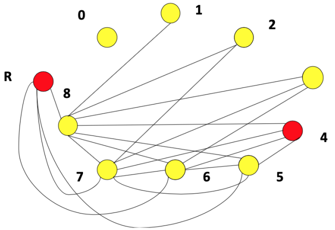
- Il 6 deve essere collegato ad altri 6 cerchietti. E' già collegato ad 8 e 7 e quindi dobbiamo collegarlo ad altri 4 cerchietti.
- Ovviamente, non possiamo collegarlo a 0 ed 1 (collegato già ad 8) e 2 (già collegato a 8 e 7) quindi sono: $3, 4, 5, R$.
- Poiché 6 non può aver stretto la mano al suo coniuge, e date le coppie $(8, 0)$ e $(7, 1)$ allora $(6, 2)$ rappresentano una coppia.

Introduzione: il problema delle strette di mano



- Il 5 deve essere collegato ad altri 5 cerchietti. E' già collegato ad 8, 7 e 6 quindi dobbiamo collegarlo ad altri 2 cerchietti.
- Ovviamente, non possiamo collegarlo a 0, 1, 2 e neanche a 3 (già collegato a 6, 7 e 8) quindi rimangono solo: 4, *R*.
- Poiché 6 non può aver stretto la mano al suo coniuge, e date le coppie $(8, 0)$, $(7, 1)$ e $(6, 2)$ allora $(5, 3)$ rappresentano una coppia.

Introduzione: il problema delle strette di mano

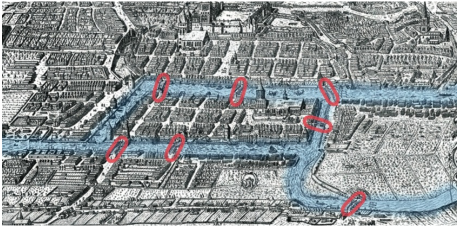


- Allora Giulia corrisponde al cerchietto 4, e ora possiamo allora rispondere a tutte le domande:
  - Quante persone hanno stretto la mano a Roberto? Risposta: 4
  - Quante persone hanno stretto la mano a Giulia? Risposta: 4
  - Roberto e Giulia hanno stretto la mano alle stesse persone? Risposta: Si.

Introduzione: il problema delle strette di mano

- Abbiamo imparato che strutturando bene l'informazione ricevuta, si può essere in grado di rispondere a domande apparantemente impossibili.
- Avete notato che il numero di persone che hanno stretto la mano un numero dispari di volte, è un numero pari? Ritorneremo su questo punto, quando parleremo del "Teorema delle strette di mano".

I sette ponti di Königsberg

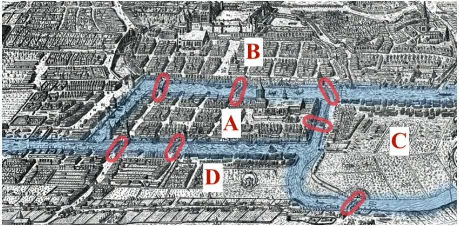


I sette ponti di Königsberg nel 1736

- Le Teoria dei Grafi inizia, in pratica, con un problema "reale" riguardante i 7 ponti di Königsberg, città russa sul Baltico oggi conosciuta con il nome di Kaliningrad, e che nel 1724 diede i natali al filosofo Kant.
- La città è attraversata dal fiume Pregel e presenta due isolette che nel 1700 erano connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti.
- Nel 1736, Eulero era in visita in città e venne a sapere (leggenda dice) che gli abitanti di Königsberg non riuscivano a risolvere il seguente problema:

"*E' possibile farsi una passeggiata che attraversi ogni ponte una e una sola volta?*".

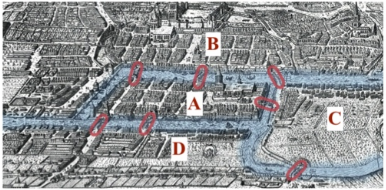
I sette ponti di Königsberg

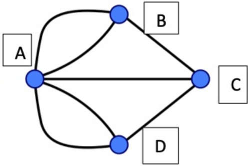


I sette ponti di Königsberg nel 1736

- Eulero affrontò il problema, dimostrando che la passeggiata ipotizzata non era possibile
- Come prima cosa notò che la scelta del percorso per uscire da un ponte ed entrare dentro un altro dentro la stessa area era irrilevante.
- L'unica cosa importante è la sequenza dei ponti percorsi.
- Così formalizzò il problema in termini astratti che tenevano conto solo delle 4 aree della città e i ponti che le congiungevano.

I sette ponti di Königsberg





Il grafo dei sette ponti

- Così Eulero pone le basi della Teoria dei Grafi.
- Ogni area è rappresentata con un cerchietto (vertice o nodo)
- Ogni ponte diventa una connessione, arco, che unisce i due vertici (aree) collegate dal ponte.
- Della sua soluzione e dei "cammini euleriani" in un grafo parleremo in seguito.

Definizione formale di grafo non orientato

- Diamo adesso la definizione formale di grafo semplice non orientato

Definizione

Un grafo semplice non orientato, denotato con $G = (V, E)$ consiste di

- *un insieme finito, non vuoto $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ i cui elementi sono chiamati vertici o nodi del grafo, e di*
- *un insieme finito $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, i cui elementi sono sottoinsiemi di V di cardinalità due, ovvero $e_k = \{i, j\}$ con $i, j \in V$. Tali elementi sono detti archi del grafo.*
- *I due nodi che caratterizzano l'arco sono detti "estremi dell'arco" e si dicono adiacenti.*
- *Un arco che ha come estremo il nodo i si dice "incidente" ad i.*
- *Un vertice che non è l'estremo di alcun arco si dice "isolato".*

- Notiamo che il grafo dei ponti di Eulero, non è un grafo semplice non orientato, secondo la definizione data sopra, perché ci sono più archi per la stessa coppia di vertici.

Definizione formale di grafo orientato

- Diamo adesso la definizione formale di grafo semplice orientato o diretto, detto anche "digrafo".

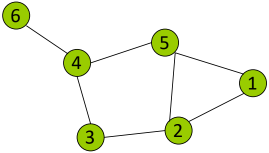
Definizione

Un grafo semplice orientato, denotato con $G = (V, E)$ consiste di

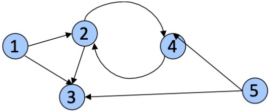
- *un insieme finito, non vuoto $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ i cui elementi sono chiamati vertici o nodi del grafo, e di*
- *un insieme finito $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, i cui elementi sono coppie ordinate di elementi di V, ovvero $e_k = (i, j)$ con $i, j \in V$.*
- *Anche in questo caso, i due nodi che caratterizzano l'arco sono detti "estremi dell'arco" e si dicono adiacenti, ed inoltre*
- *un arco che ha come estremo il nodo i, indipendentemente dal verso dell'arco, si dice "incidente" ad i.*

- Una menzione speciale per gli archi del tipo (i, i), ossia archi orientati da un nodo verso se stesso. Tali archi vengono detti "cappi."

Rappresentazione sul piano



Grafo non orientato



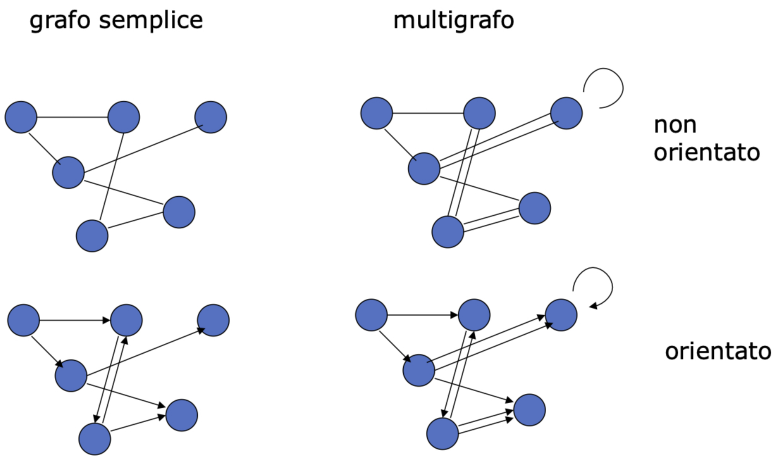
Grafo Orientato

- I grafi, come già visto, si possono rappresentare nel piano tramite punti e linee (segmenti).
- Nel caso di grafi orientati, possiamo rappresentare un arco tramite una freccia orientata da un nodo verso un altro nodo.

Multigrafi

- I grafi, orientati e non, che hanno più di un arco che collega coppie di nodi sono detti "multigrafi."
- Il grafo dei sette ponti di Königsberg è un esempio di multigrafo.
- Per grafi semplici si intendono anche i grafi orientati senza cappi.
- Per il resto di questa parte del corso, a meno che non sia esplicitato diversamente, quando parleremo di grafi, intenderemo sempre grafi semplici e senza cappi.

Esempi di grafi



Grado di un nodo

- Dato un grafo $G = (V, E)$ il grado di un nodo $v \in V$, denotato con $\delta(v)$, è il numero di archi ad esso incidenti, ossia il numero di vertici ad esso adiacenti

$$\delta(v) = \{e \in E : v \in e\}.$$

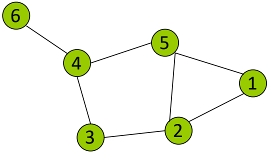
- se $G = (V, E)$ è un digrafo definiamo due nozioni diverse di grado di un nodo.
  - Il grado in ingresso di un nodo $v \in V$, denotato con $\delta^-(v)$, è il numero di archi orientati che "entrano" in v ossia

$$\delta^-(v) = \{e \in E : e = (w, v) \text{ per qualche } w \in V\}.$$

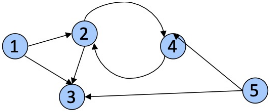
  - Il grado in uscita di un nodo $v \in V$, denotato con $\delta^+(v)$, è il numero di archi orientati che "escono" da v ossia

$$\delta^+(v) = \{e \in E : e = (v, w) \text{ per qualche } w \in V\}.$$

Gradi di un nodo: Esempi



Grafo non orientato



Grafo Orientato

- Nel caso del grafo non orientato abbiamo:

$$\delta(1) = 2, \delta(2) = 3, \delta(3) = 2, \delta(4) = 3, \delta(5) = 3, \delta(6) = 1$$

- Nel caso del grafo orientato abbiamo:

$$\delta^-(1) = 0, \delta^-(2) = 2, \delta^-(3) = 3, \delta^-(4) = 2, \delta^-(5) = 0$$

$$\delta^+(1) = 2, \delta^+(2) = 2, \delta^+(3) = 0, \delta^+(4) = 1, \delta^+(5) = 2$$

Gradi di un nodo: Esempi

- Notiamo che la somma di tutti i gradi nel caso del grafo non orientato è

$$\delta(1)+\delta(2)+\delta(3)+\delta(4)+\delta(5)+\delta(6)=2+3+2+3+3+1=14$$

ovvero il doppio del numero di archi, che è 7.

- Nel caso del grafo orientato abbiamo:

$$\delta^-(1)+\delta^-(2)+\delta^-(3)+\delta^-(4)+\delta^-(5)=0+2+3+2+0=7$$

$$\delta^+(1)+\delta^+(2)+\delta^+(3)+\delta^+(4)+\delta^+(5)=2+2+0+1+2=7$$

ovvero la somma dei gradi in ingresso è uguale alla somma dei gradi in uscita, e la somma totale è il doppio del numero degli archi del grafo.

Gradi di un nodo

- Riflettiamo su quanto detto riguardo ai grafi non orientati.
- La ragione per cui la somma dei gradi di ogni nodo è il doppio del numero degli archi si intuisce subito: perché ogni arco contribuisce al grado totale 2 volte, una per ognuno dei vertici su cui incide. Il ragionamento intuitivo è lo stesso che abbiamo fatto sul problema delle strette di mano.
- Questo ci porta a concludere che il seguente teorema, detto anche Teorema delle strette di mano (Handshaking Theorem) è vero

Teorema (Handshaking Theorem)

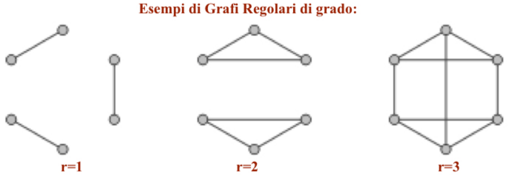
Sia $G = (V, E)$ un grado non orientato, allora la somma dei gradi di ogni vertice è uguale al doppio del numero degli archi, ossia $2|E|$.

- Corollario immediato del teorema è il seguente

COROLLARIO

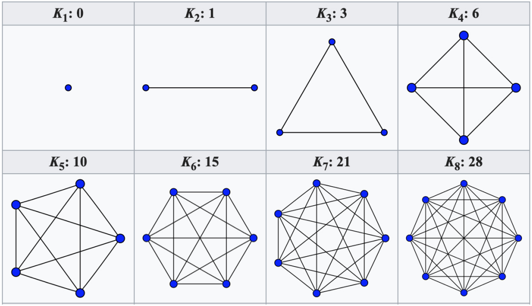
Sia $G = (V, E)$ un grado non orientato, il numero dei vertici di grado dispari è un numero pari.

Grafi Regolari



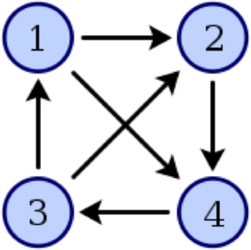
- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato.
- Se i vertici del grafo hanno tutti lo stesso grado r allora diciamo che G è regolare di grado r.
- Dalla definizione di grado regolare e tenuto conto del Handshaking Theorem abbiamo che
  1. $$|V| = \frac{2|E|}{r}$$
  2. Se r è dispari allora $|V|$ è pari, ovvero un grafo regolare di grado dispari contiene un numero pari di vertici.

Grafi Completi



- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diciamo che G è <u>completo</u> se ogni coppia di vertici è connessa da un arco.
- Ne deduciamo allora che se $|V| = n$ il numero di archi del grafo completo è $\binom{n}{2}$ ovvero il numero di tutte le possibili coppie di vertici.
- Un grafo completo con n vertici viene denotato con K_n (si pensa che il simbolo "K" sia usato in onore del matematico polacco Kuratowski, di cui parleremo a breve).
- Inoltre, per ogni n, K_n è un grafo regolare di grado $n - 1$.

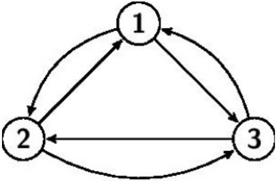
Torneo



Torneo con quattro vertici

- Sia $G = (V, E)$ un grafo completo. Il grafo orientato ottenuto assegnando uno dei due possibili versi ad ogni arco di G, si dice Torneo.
- Il nome torneo deriva dall'interpretazione del grafo come il risultato di un campionato dove ogni giocatore gioca contro ogni altro giocatore esattamente una volta ed il pareggio non è consentito.
- L'arco tra ogni coppia è orientato dal vincitore al perdente.

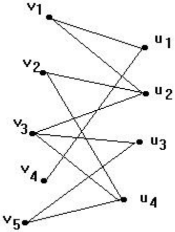
Grafi Orientati Completi



Digrafo completo con 3 *vertici*

- La definizione di grafo completo si estende anche ai grafi orientati.
- Sia $G = (V, E)$ un digrafo. Diciamo che G è <u>completo</u> se ogni coppia ordinata di vertici è connessa da un arco, ovvero se per ogni coppia di vertici $i, j \in V$ abbiamo $(i, j) \in E$ e $(j, i) \in E$.
- Ne deduciamo allora che se $|V| = n$ il numero di archi del digrafo completo è $n(n-1)$ ovvero il numero di tutte le possibili coppie ordinate di vertici.

Grafi Bipartiti

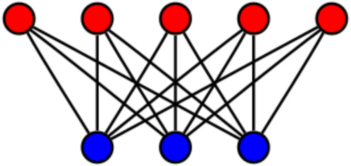


Grafo bipartito con 9 *vertici*

$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *e* $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diciamo che G è <u>bipartito</u> se possiamo partizionare l'insieme dei vertici in 2 insiemi, V_1 e V_2 in maniera tale che tutti gli archi di G hanno come estremi un vertice in V_1 e l'altro vertice in V_2.

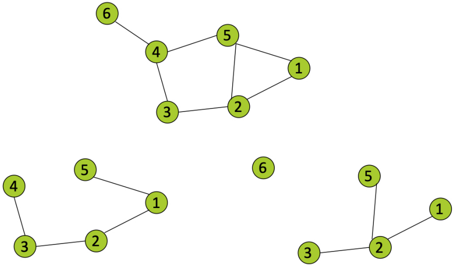
Grafi Bipartiti Completi



Grafo bipartito completo: $K_{5,3}$

- Un grafo bipartito $G = (V, E)$ si dice completo se data la partizione dei vertici V_1 e V_2 esiste un arco per ogni coppia di vertici $v \in V_1$ e $u \in V_2$.
- Un grafo bipartito completo si indica con $K_{n,m}$ dove $n = |V_1|$ e $m = |V_2|$.

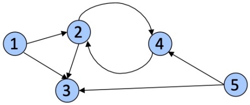
Sottografo

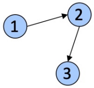


Grafo non orientato e due possibili sottografi

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diciamo che $G' = (V', E')$ è un <u>sottografo</u> di G se
  - $V' \subseteq V$
  - $E' \subseteq E$ ed inoltre per ogni arco $(u, v) \in E'$ i suoi estremi u, v appartengono entrambi a V'.

Sottografo

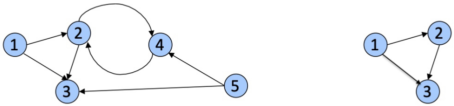




Grafo orientato ed un suo sottografo

- La stessa definizione data per i grafi non orientati si può dare per i grafi orientati.
- Sia $G = (V, E)$ un digrafo. Diciamo che $G' = (V', E')$ è un sottografo di G, ovviamente anch'esso orientato, se
  - $V' \subseteq V$
  - $E' \subseteq E$ ed inoltre per ogni arco $(u, v) \in E'$ i suoi estremi u, v appartengono entrambi a V'.

Sottografo indotto



Sottografo indotto dalla eliminazione dei vertici 4 *e* 5

- Dalla definizione data di sottografo, sia per i grafi orientati che per quelli non orientati, si evince la seguente definizione di sottografo indotto
  - Sia $G = (V, E)$ un grafo (digrafo). Sia $V' \subseteq V$. Il sottografo indotto da V' è i sottografo $G = (V', E'$ ottenuto eliminando da G tutti i vertici non appartenenti a V' e tutte gli archi incidenti ad almeno uno dei vertici eliminati.

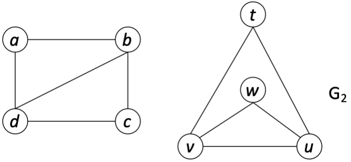
Grafi Isomorfi

- Chiediamoci in che senso due grafi possono essere considerati uguali?
- Ricordiamo che la proprietà caratteristica di un grafo è il modo in cui i vertici sono collegati dagli archi.
- Diamo allora la seguente definizione

Definizione (Isomorfismo tra grafi)

Due grafi, sia entrambi orientati che entrambi non orientati, $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ si dicono isomorfi se esiste una applicazione biunivoca f dall'insieme dei vertici V_1 nell'insieme dei vertici V_2 tale che $(f(u), f(v))$ è un arco di E_2 se e solo se (u, v) è un arco di E_1.
La biiezione f è detta isomorfismo.

Grafi Isomorfi: Esempio



Grafi isomorfi

- Consideriamo i due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ così definiti:
  - $V_1 = \{a, b, c, d\}$
  - $E_1 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
  - $V_2 = \{t, u, v, w\}$
  - $E_1 = \{(t, u), (t, v), (u, v), (u, w), (v, w)\}$
- La funzione $f : V_1 \to V_2$ tale che

$$f(a) = t, f(b) = v, f(c) = w, f(d) = u$$

è un isomorfismo.

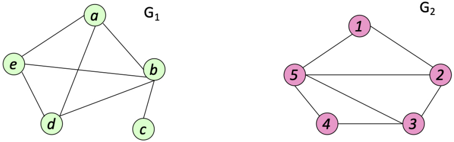
Grafi Isomorfi

- Come immediata conseguenza della definizione di isomorfismo abbiamo che se i due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ sono isomorfi allora

$$|V_1| = |V_2| \text{ e } |E_1| = |E_2|$$

- Altra conseguenza di un isomorfismo f tra G_1 e G_2 è che se $f(u) = v$ allora $\delta(u) = \delta(v)$ nel caso di grafo non orientato, e $\delta^+(u) = \delta^+(v)$ e $\delta^-(u) = \delta^-(v)$ nel caso di grafi orientati (digrafi).
- Inoltre, possiamo anche dire che se due grafi sono isomorfi, allora dato un sottografo del primo esiste un sottografo del secondo a cui è isomorfo (utilizzando la stessa funzione di isomorfismo).
- Anche se due grafi hanno lo stesso numero di nodi e di archi non è detto che siano isomorfi.
- Potrebbe, infatti, non esistere una biezione tra l'insieme dei vertici che conserva la relazione tra gli archi (porta archi in archi).

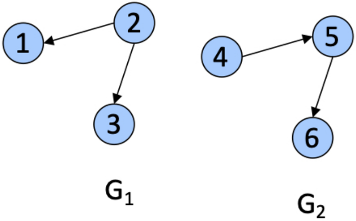
Grafi non Isomorfi: Esempio



Grafi non isomorfi: Esempio

- Consideriamo i due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ in figura.
- Possiamo subito trovare 2 motivi per dire che non sono isomorfi:
  1. Il grafo G_1 ha un vertice c tale che $\delta(c) = 1$. Tutti i vertici di G_2, invece, hanno grado maggiore o uguale a 2.
  2. Il sottografo di G_1 ottenuto eliminando il vertice c è un K_4 ovvero un grafo completo con 4 vertici. Nessuno dei 5 sottografi di G_2 con 4 vertici è un grafo completo.

Grafi orientati non Isomorfi: Esempio



Grafi orientati non isomorfi: Esempio

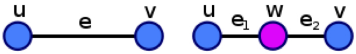
- Consideriamo i due grafi orientati G_1 e G_2 in figura.
- I grafi hanno lo stesso numero di vertici e lo stesso numero di archi.
- Però non sono isomorfi perché nel grafo G_2 il vertice 5 ha grado in uscita 2 mentre nessun vertice in G_1 ha lo stesso grado in uscita.
- Notiamo anche che se invertiamo il verso dell'arco $(2, 1)$ in G_1 e quindi otteniamo un arco che va da 1 a 2 allora i due grafi diventano isomorfi.

Omeomorfismi: suddivisione

- Chiediamoci adesso in che senso due grafi possono essere interpretati come aventi la stessa forma.
- Cominciamo con la seguente definizione

Definizione (Suddivisione di un arco)

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e sia $e = (u, v)$ un arco di G. Una suddivisione dell'arco $e = (u, v)$ è ottenuta introducendo un nuovo vertice w e sostituendo in G l'arco (u, v) con gli archi $e_1 = (u, w)$ e $e_2 = (w, v)$.



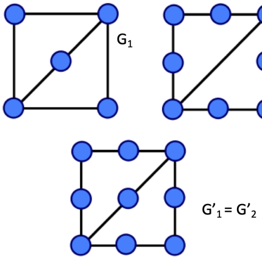
Suddivisione di un arco: Esempio

Omeomorfismi: suddivisione

- Diamo adesso la definizione di omeomorfismo tra grafi.

Definizione (Omeomorfismo tra grafi)

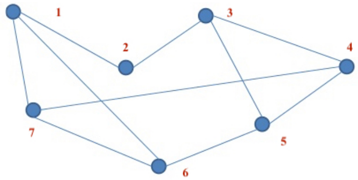
Due grafi non orientati, $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ si dicono omeomorfi se attraverso una serie di suddivisioni di archi di G_1 e G_2 si possono ottenere due grafi G'_1 e G'_2 che sono isomorfi.

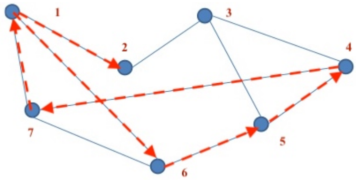


Grafi omeomorfi: Esempio

Percorso

- Un percorso (diretto) in un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ è una sequenza di nodi $v_1, \ldots, v_k$ adiacenti, ossia tali che per ogni $1 \leq i < k$ (v_i, v_{i+1}) è un arco del grafo.
- Il nodo v_1 è detto nodo origine del percorso ed il nodo v_k è detto nodo destinazione.
- I nodi v_i con $1 < i < k$ sono detti nodi intermedi del percorso.
- Possiamo definire un percorso anche tramite un sequenza di archi $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ dove per ogni $1 \leq j < k-1$ gli archi e_j e e_{j+1} hanno un vertice in comune.
- La lunghezza di un percorso è il numero di archi che lo compongono, quindi nel nostro caso $k - 1$.

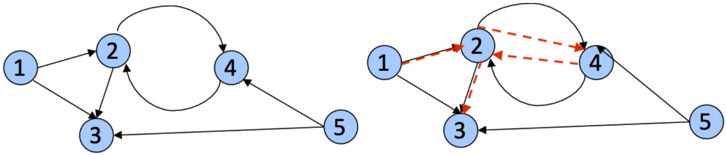




Esempio di Percorso: $1, 6, 5, 4, 7, 1, 2$

Percorso

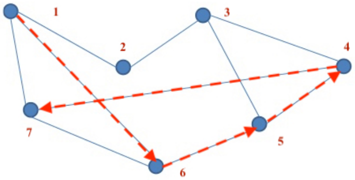
- La figura che segue mostra un esempio di percorso orientato
- Ovviamente essendo il grafo orientato, ogni arco si può percorrere solo seguendo il suo verso.



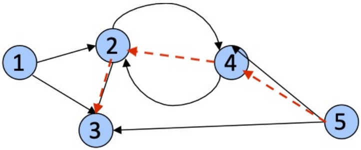
Esempio di Percorso orientato: $1, 2, 4, 2, 3$

Cammino

- Un percorso (diretto) in un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ ossia una sequenza di nodi $v_1, \ldots, v_k$ adiacenti, tali che per ogni $1 \leq i < k$ (v_i, v_{i+1}) è un arco del grafo, viene detto cammino se tutti i nodi sono diversi.



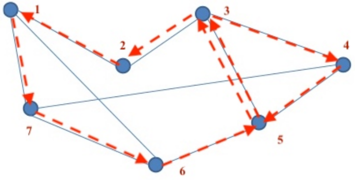
Cammino: $1, 6, 5, 4, 7$



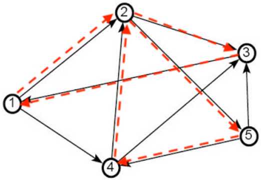
Cammino diretto: $5, 4, 2, 3$

Circuito

- Un circuito (diretto) (loop) in un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ è un percorso chiuso, ovvero un percorso $v_1, \ldots, v_k$ tale che $v_1 = v_k$.



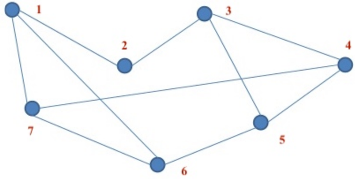
Circuito: $1, 7, 6, 5, 3, 4, 5, 3, 2, 1$



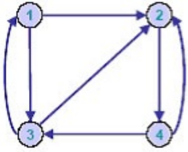
Circuito diretto: $1, 2, 5, 4, 2, 3, 1$

Ciclo

- Un ciclo (diretto) in un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ è un cammino chiuso, ovvero un cammino $v_1, \ldots, v_k$ tale che $v_1 = v_k$ e dove, per definizione di cammino, tutti i vertici sono diversi.
- Se il grafo è non orientato, il numero minimo di vertice per formare un ciclo è 3, nell'esempio in figura è il ciclo $3, 4, 5, 3$.
- Se il grafo è orientato, 2 vertici sono sufficienti, nell'esempio in figure è il ciclo $1, 3, 1$.



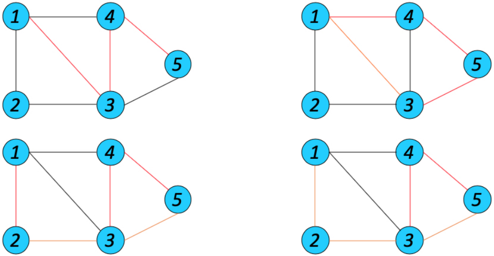
Grafo non orientato



Grafo orientato

Riepilogando

- Riepilogo veloce per grafi non orientati
  - $(1, 3, 4, 5)$ è un cammino di lunghezza 3
  - (13541) è un ciclo di lunghezza 4
  - (1235432) è un percorso di lunghezza 6
  - (12354321) è un circuito di lunghezza 7



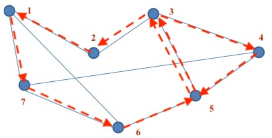
Cammini e cicli

- Come si può facilmente notare anche dagli esempi di riepilogo appena visti, abbiamo che
  - Dato un percorso da un nodo v ad un nodo w possiamo costruire un cammino da v a w
  - Dato un circuito possiamo costruire un ciclo.
- Le due affermazioni si dimostrano entrambe utilizzando tale ragionamento (che usiamo solo nel primo caso). Ovvero,
- se abbiamo un percorso da un nodo v ad un nodo w e non abbiamo ripetizione di nodi, allora abbiamo già un cammino;
- altrimenti per ogni sottosequenza di nodi nel percorso del tipo $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j = v_i$ possiamo eliminare i nodi intermedi, e così facendo eliminare tutte le ripetizioni di nodi e costruire un cammino.

Cammini e cicli

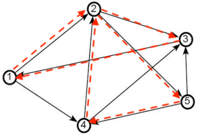
- Vediamo degli esempi riguardanti circuiti e cicli

Circuito: 1, 7, 6, ***5, 3, 4, 5***, 3, 2, 1



Ciclo: 1, 7, 6, 5, 3, 2, 1

Circuito diretto: 1, ***2, 5, 4, 2***, 3, 1



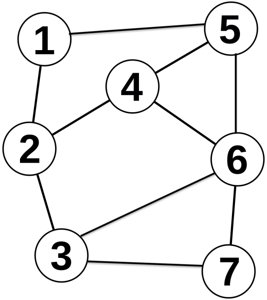
Ciclo diretto: 1, 2, 3, 1

Grafi aciclici

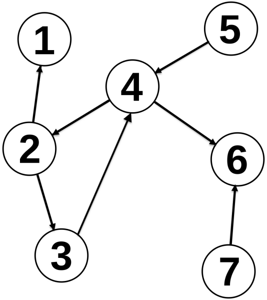
- Diamo adesso una delle definizione fondamentali e più importanti in termini di applicazioni

Definizione (Grafo Aciclico)

Un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ si dice aciclico se non possiede cicli.



Grafo aciclico



Digrafo Aciclico

Vertici connessi

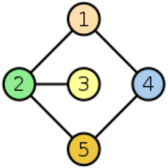
- Dato un grafo $G = (V, E)$, diciamo che due vertici v, w sono connessi se esiste un cammino da u a v.
- Si può dimostrare facilmente che la connessione tra vertici è una relazione di equivalenza.
- Quindi l'insieme V si può partizionare in classi di equivalenza, dove in ogni classe ci sono vertici collegati da un cammino

Definizione (Componenti connesse)

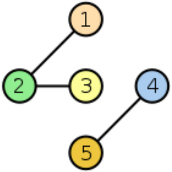
Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ la partizione indotta dalla relazione di connessione tra i vertici. Sia $G = (V_i, E_i)$ il sottografo indotto da V_i per ogni $i = 1, \ldots k$. Tali sottografi si chiamano componenti connesse di G.

Componenti connesse: esempi

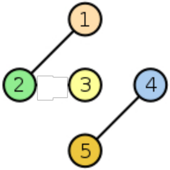
- Vediamo alcuni esempi



Grafo con 1 *comp. connessa*



Grafo con 2 *comp. connesse*



Grafo con 3 *comp. connesse*

Grafo connesso

- Diamo allora la definizione di grafo connesso

Definizione (Grafo connesso)

Un grafo si dice connesso se ha una sola componente connessa, cioè se dati comunque due vertici in V, i due vertici sono connessi.

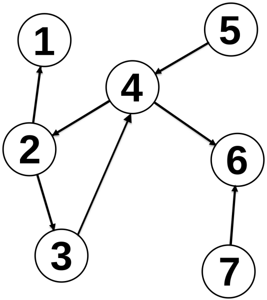
- Per quanto riguarda i digrafi (grafi orientati) diamo prima una definizione di connessione debole

Definizione (Digrafo debolmente connesso)

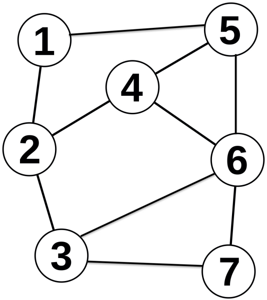
Un digrafo $G = (V, E)$ si dice debolmente connesso, se il grafo non orientato ottenuto eliminando da G l'orientamento degli archi (detto anche grafo sottostante) è connesso.

Grafo connesso: esempio

- Vediamo un esempio di grafo orientato debolmente connesso



Grafo orientato debolmente connesso



Grafo sottostante connesso

Digrafo fortemente connesso

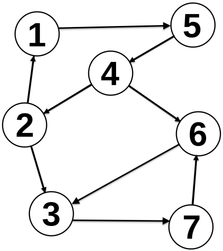
- Per i grafi orientati esiste una definizione di connessione forte.
- Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, diciamo che due vertici v, w sono fortemente connessi se esiste sia un cammino da u a v che un cammino da v ad u.
- Anche in questo caso, si può dimostrare facilmente che la connessione forte tra vertici è una relazione di equivalenza.
- Quindi l'insieme V si può partizionare in classi di equivalenza, dove in ogni classe ci sono vertici collegati da un cammino in entrambe le direzioni.

Definizione (Componenti fortemente connesse)

Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ la partizione indotta dalla relazione di connessione forte tra i vertici. Sia $G = (V_i, E_i)$ il sottografo indotto da V_i per ogni $i = 1, \ldots k$. Tali sottografi si chiamano componenti fortemente connesse di G.

Componenti fortemente connesse

- Nell'esempio in figura, i vertici $1, 2, 4, 5$ formano un ciclo, nello specifico $1 - 5 - 4 - 2 - 1$. Quindi, sono ovviamente in una stessa componente fortemente connessa.
- Analogamente, i vertici $3, 6, 7$ formano il ciclo $3 - 7 - 6 - 3$. Quindi, sono in una stessa componente.
- Dal vertice 2 c'è un arco (e quindi un cammino) al vertice 3, ma non c'è alcun cammino dal vertice 3 al vertice 2.
- Quindi il grafo ha due componenti fortemente connesse, formate dai due insiemi di vertici $V_1 = \{1, 2, 4, 5\}$ e $V_2 = \{3, 6, 7\}$

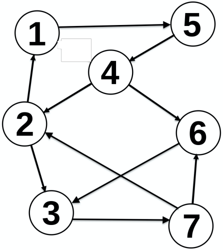


Digrafo fortemente connesso

Definizione (Grafo fortemente connesse)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato. G si dice fortemente connesso se ha una sola componente fortemente connessa.

- Utilizzando l'esempio precedente, se aggiungiamo al grafo l'arco ordinato $(7, 2)$ otteniamo un grafo fortemente connesso.



Grafi k-connessi

Definizione

Sia dato un grafo $G = (V, E)$.

- *Il grafo G si dice k-connesso rispetto agli archi se dati comunque due vertici $u, v \in V$ esistono k cammini ad archi disgiunti tra u, v.*
- *Il grafo G si dice k-connesso rispetto ai vertici se dati comunque due vertici $u, v \in V$ esistono k cammini a nodi disgiunti tra u, v.*

- Dalla definizione di k-connessione rispetto agli archi si deduce che per disconnettere il grafo è necessario rimuovere almeno k archi.
- Dalla definizione di k-connessione rispetto ai vertici si deduce che per disconnettere il grafo è necessario rimuovere almeno k vertici.

Problema per gli informatici

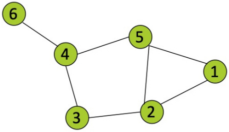
- I grafi sono una struttura matematica che presenta enormi vantaggi quando si tratta di progettare software per risolvere particolari problemi.
- Ma se vogliamo usare la nozione di grafo come "struttura dati" dobbiamo trovare un modo per rappresentare un grafo, utilizzando le strutture dati tipicamente disponibili in un linguaggio di programmazione.
- La scelta, come vedremo, è abbastanza naturale, ossia utilizzare array bidimensionali (matrici) o array di arrays (liste) per rappresentare un grafo.

Rappresentazione di un grafo come matrice

- Sia dato un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$.
- L'informazione del grafo è contenuta nell'insieme di archi E che ci dice se due vertici sono connessi da un arco oppure no.
- Supponiamo allora che $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Costruiamo una matrice quadrata M di dimensione $n \times n$ così fatta
  - $M[i, j] = 1$ se i vertici i e j sono connessi da un arco.
  - $M[i, j] = 0$ se i vertici i e j non sono connessi da un arco.
- La matrice M viene detta matrice di adiacenza del grafo.

Rappresentazione di un grafo come matrice

- Vediamo un esempio.
- il grafo contiene 6 vertici, quindi costruiamo una matrice M di dimensione 6×6.
- Le righe della matrice corrispondono ai vertici del grafo
- Le colonna della matrice corrispondono agli archi del grafo.
- La matrice è a valori 0-1 e la somma degli 1 in ogni riga è il grado del nodo corrispondente.



Grafo non orientato

M=

0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0

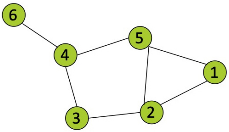
Matrice corrispondente

Rappresentazione di un grafo come matrice

- Notiamo inoltre che la diagonale principale ha solo valori 0 poiché non vi è un arco da un vertice a se stesso.
- Dato che il grafo è non orientato, la matrice è simmetrica, ossia, per ogni i e j

$$M[i,j] = M[j,i].$$

  Tale considerazione non vale come vedremo nel prossimo esempio, se il grafo è orientato.
- Considerazione utilissima nelle applicazioni: verificare se esiste un arco che unisce 2 vertici può essere fatto in tempo costante



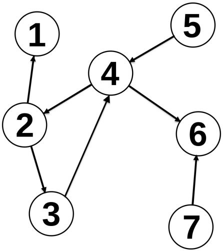
Grafo non orientato

$$M= \begin{array}{|cccccc|} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Matrice corrispondente

Rappresentazione di un grafo orientato come matrice

- Vediamo adesso un esempio con un grafo orientato
- In questo caso abbiamo un grafo con 7 vertici e quindi la matrice avrà dimensione 7×7.



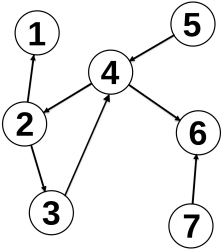
Grafo orientato

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice corrispondente

Rappresentazione di un grafo orientato come matrice

- Allora, come prima, Le righe della matrice corrispondono ai vertici del grafo
- Le colonna della matrice corrispondono agli archi del grafo.
- La matrice è a valori 0-1 e la somma degli 1 in ogni riga è il grado in uscita del nodo corrispondente.
- La somma degli 1 in ogni colonna, indica il grado in entrata del nodo corrispondente
- La matrice non è simmetrica



Grafo orientato

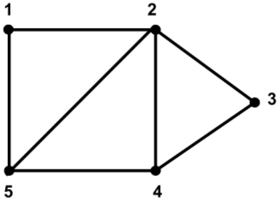
M=

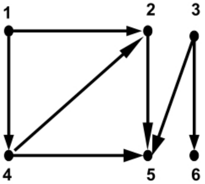
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Matrice corrispondente

Rappresentazione dei grafi: esercizio

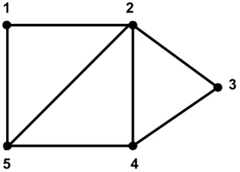
- Un semplice esercizio
- Costruire le matrici di adiacenza per i due grafi dati, *G* non orientato e *D* orientato.
- Dimensioni: 5×5 e 6×6.

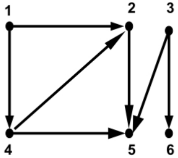




Rappresentazione dei grafi: soluzione dell'esercizio

- Denotiamo con A_G la matrice di adiacenza del grafo G e con A_D la matrice di adiacenza del grafo D.

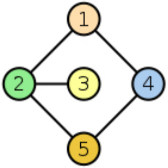


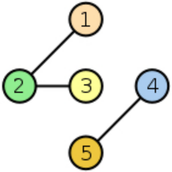


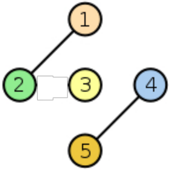
$$A_G = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}, \qquad A_D = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Matrici e componenti connesse

- Costruiamo la matrice di adiacenza dei seguenti grafi che hanno rispettivamente $1, 2$ e 3 componenti connesse







$$M1=\begin{array}{|ccccc|}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{array}\quad M2=\begin{array}{|ccccc|}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{array}\quad M3=\begin{array}{|ccccc|}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{array}$$

Matrici e componenti connesse

- Come si può vedere, *M2* e *M3* consistono di blocchi quadrati di dimensione diverse
- Ogni blocco corrisponde ad una componente connessa ed ha dimensione $k \times k$ se k è il numero di vertici della componente
- Gli altri blocchi sono fatti tutti di 0.
- Ovviamente il motivo è che i vertici di una componente non sono connessi da archi con vertici di altre componenti.

$$M1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrici e cicli in un digrafo

- Una semplice applicazione del Pigeonhole Principle ci fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'esistenza di un ciclo in un grafo diretto $G = (V, E)$.
- Vale infatti il seguente

Teorema

Sia $G = (V, E)$ *un grafo orientato e, per ogni vertice* $i \in V$ *siano* $\delta^+(i)$ *e* $\delta^-(i)$ *rispettivamente il grado in uscita ed in entrata di* i. *Se*

1. *per ogni* $i \in V$ $\delta^+(i) > 0$, *oppure se*
2. *per ogni* $i \in V$ $\delta^-(i) > 0$

allora il grafo G contiene un ciclo.

Matrici e cicli in un digrafo

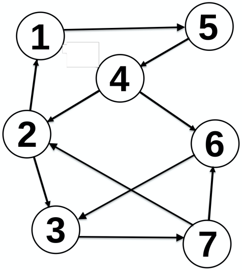
Dimostrazione

Dimostriamo il primo caso. La dimostrazione del secondo caso è analoga.
Prendiamo un vertice i_0. Dal momento che $\delta^+(i) > 0$ esiste un vertice i_1 tale che vi è un arco da i_0 a i_1.
Lo stesso discorso vale per i_1. Quindi esiste un vertice i_2 tale che vi è un arco da i_1 ad i_2.
Iteriamo questo processo sino a quando non abbiamo una sequenza $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n$ di $n + 1$ vertici tali che ognuno è connesso da un arco al successivo.
Se $|V| = n$ per il Pigeonhole Principle almeno 2 di questi $n + 1$ vertici devono coincidere.
Questo dimostra il teorema.
$\triangle$

Matrici e cicli in un digrafo

- Vediamo un esempio.
- Il grafo in figura possiede diversi cicli e, in particolare, un ciclo che coinvolge tutti i vertici: $1 - 5 - 4 - 6 - 3 - 7 - 2 - 1$.
- Come si può facilmente calcolare dalla matrice di adiacenza, il grado in uscita di ogni vertice è maggiore di zero.

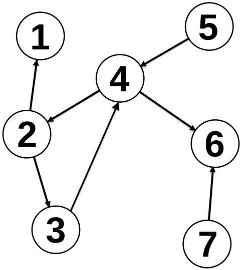
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrici e cicli in un digrafo

- Il grafo in figura è un esempio di grafo che possiede un ciclo $2-3-4-2$ ma per il quale non è vero che tutti i vertici hanno grado in uscita maggiore di zero, o grado in ingresso maggiore di zero.
- Ecco perché la condizione del teorema è sufficiente ma non è necessaria.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrici e cicli in un digrafo

- La condizione del teorema diventa anche necessaria, se non parliamo di tutto il grafo ma di un sottografo.
- Ossia, se riscriviamo il teorema in questo modo

Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato. Allora G possiede un ciclo se e solo se esiste un sottoinsieme $V' \subseteq V$, tale che il sottografo indotto $G = (V', E')$ verifica la seguente proprietà: per ogni vertice $i \in V'$ siano $\delta^+(i)$ e $\delta^-(i)$ rispettivamente il grado in uscita ed in entrata di i in G', allora

1. *per ogni $i \in V$, $\delta^+(i) > 0$, oppure*
2. *per ogni $i \in V$, $\delta^-(i) > 0$*

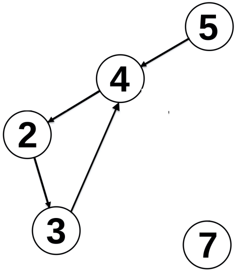
Matrici e cicli in un digrafo

- Questo nuovo teorema ci fornisce un algoritmo (non molto efficiente) per verificare l'esistenza di un ciclo in un grafo dato.
- Agiamo in questo modo
  - Sia M la matrice del grafo, e $M-(i)$ la matrice ottenuta da M eliminando la riga i-esima e la colonna i-esima. Sia, inoltre, $dim(M)$ la dimensione della matrice, ossia il suo numero di righe (o colonne).
  - Se tutti i vertici del grafo hanno grado in uscita > 0 oppure grado in entrata > 0, terminiamo e diciamo che il grafo possiede un ciclo;
  - Altrimenti, prendiamo un vertice i con grado in uscita $= 0$ oppure con grado in entrata $= 0$ e lo eliminiamo dal grafo. Ciò facendo, eliminiamo da M la riga e la colonna i-esima, ottenendo una nuova matrice $M = M-(i)$.
  - Se $dim(M) = 1$ ci fermiamo e diciamo che il grafo è aciclico.

Matrici e cicli in un digrafo

- Rivediamo l'esempio di prima.
- I vertici 1 e 6 hanno grado in uscita uguale a 0, quindi in due passi consecutivi dell'algoritmo su descritto eliminiamo le righe 1 e 6 e le colonne 1 e 6 ottenendo, dopo i 2 passi, una nuova matrice quadrata di dimensione 5, corrispondente al sottografo in figura
- Notiamo che le righe e le colonne della nuova matrice corrispondono, nell'ordine, ai vertici rimasti. Quindi la riga 1 al vertice 2, la riga 2 al vertice 3, etc.

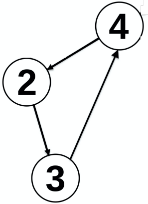
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrici e cicli in un digrafo

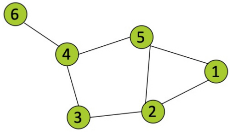
- I successivi due passi dell'algoritmi ci fanno prima eliminare il vertice 7 che ha grado in uscita ed in ingresso entrambi uguali a 0 e poi eliminare il vertice 5 che ha grado in entrata uguale a 0.
- Otteniamo così il sottografo in figura che verifica la condizione del teorema e quindi possiede un ciclo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Percorsi tra nodi

- Se riprendiamo l'esempio già visto della rappresentazione di un grafo come matrice, possiamo notare che la matrice ci dice se esiste un arco tra 2 vertici, ma ciò coincide anche con l'informazione
- "Esiste un percorso (cammino) di lunghezza 1 che unisce due vertici".
- Se volessimo cercare percorsi più lunghi?
- Nell'esempio, tra i nodi 6 e 5 non esiste un percorso di lunghezza 1, però ne esiste uno di lunghezza 2.
- Tra i nodi 4 e 2 esistono 2 percorsi di lunghezza 2.
- Come trovare tali percorsi più lunghi?



Grafo non orientato

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

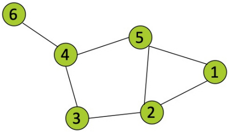
Matrice corrispondente

Percorsi tra nodi

- Il percorso di lunghezza 2 tra i nodi 6 e 5 passa per il nodo 4. Quindi, come si può notare, abbiamo il valore 1 nella quarta colonna della riga 6 ed un 1 nella quinta colonna della riga 4. però ne esiste uno di lunghezza 2.
- Moltiplicando la riga 6 per la colonna 5 come si fa nell'operazione di moltiplicazioni tra matrici, abbiamo

$$0 * 1 + 0 * 1 + 0 * 0 + 1 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0 = 1$$

ossia il valore 1 in posizione $(6, 4)$ viene moltiplicato per il valore 1 in posizione $(4, 5)$



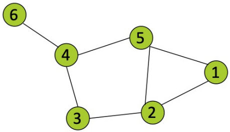
Grafo non orientato

$$M = \begin{array}{|cccccc|} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Matrice corrispondente

Percorsi tra nodi

- Il risultato finale del prodotto $M \times M$ è in figura
- Notiamo, ad esempio, $M^2[3,5] = 2$. Ci sono due cammini di lunghezza 2 tra 3 e 5: $3 - 4 - 5$ e $3 - 2 - 5$
- E gli altri valori sono giusti? In particolare, sono giusti i valori sulla diagonale principale?

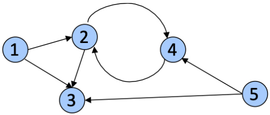


$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice Prodotto

Percorsi tra nodi: grafo orientato

- Vediamo adesso un esempio con un grafo orientato.
- Nell'esempio, tra i nodi 1 e 4 non esiste un percorso di lunghezza 1, però ne esiste uno di lunghezza 2.
- Analogamente, tra i nodi 5 e 2 non esiste un percorso di lunghezza 1, però ne esiste uno di lunghezza 2.



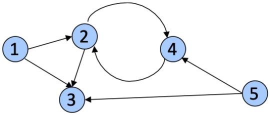
Grafo orientato

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice corrispondente

Percorsi tra nodi: grafo orientato

- Se calcoliamo il prodotto $M \cdot M$ troviamo il numero di percorsi di lunghezza 2 per ogni coppia di nodi.



$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Percorsi tra nodi

- E se volessimo trovare, per ogni coppia di nodi, il numero di percorsi di lunghezza 3?
- Data la matrice di adiacenza M, il quadrato della matrice M^2 ci dice quanti sono i percorsi di lunghezza 2 per ogni coppia di vertici.
- Quindi, se vogliamo trovare quanti sono i percorsi di lunghezza 3 dal vertice i al vertice j, cerchiamo i percorsi di lunghezza 2 da i ad ogni altro vertice k e poi verifichiamo se c'è un arco che porta da k a j.
- $M^2[i,k]$ sono i percorsi di lunghezza 2 da i a k, se c'è un arco da k ad j, ovvero $M[k,j] = 1$, abbiamo trovato $M[i,k]$ percorsi di lunghezza 3 da i a j.
- Analogamente, per $h \neq k$, $M^2[i,h]$ sono i percorsi di lunghezza 2 da i a h, se c'è un arco da h ad j, ovvero $M[h,j] = 1$, abbiamo trovato altri $M[i,h]$ percorsi di lunghezza 3 da i a j.
- Quindi, il numero di percorsi di lunghezza 3 da i a j è dato dalla somma

$$\sum_{k=1}^{n} M^2[i,k] \cdot M[k,j]$$

  ossia il prodotto della riga i della matrice M^2 e della colonna j della matrice M
- Quindi, la matrice M^3 contiene il numero di percorsi di lunghezza 3 per ogni coppia di vertici.

Percorsi tra nodi

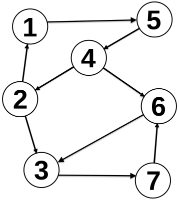
- Vale il seguente teorema che si può dimostrare facilmente per induzione sulla lunghezza dei percorsi cercati, generalizzando quanto appena visto.

Teorema

Sia dato un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ e sia M la sua matrice di adiacenza. Il numero di percorsi di lunghezza $k \geq 1$ per ogni coppia di vertici i e j è dato dal valore della matrice

$$M^k[i, j]$$

Percorsi tra nodi: Esempio

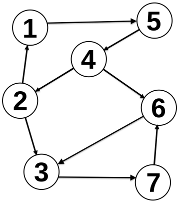


- Dato il grafo in figura, quanti sono i percorsi di lunghezza 4 che collegano ogni coppia di nodi?
- Dobbiamo produrre la matrice di adiacenza M e poi calcolare M^4.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Percorsi tra nodi: Esempio

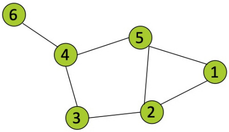
$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Qual è il percorso di lunghezza 4 da 1 a se stesso?
- Quali sono i 2 percorsi di lunghezza 4 da 1 a 3?
- Quali sono i 2 percorsi di lunghezza 4 da 4 a 6?
- Quali sono i 2 percorsi di lunghezza 4 da 5 a 7?

Rappresentazione di un grafo con liste di adiacenza

- Sia dato un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ con $|V| = n$.
- La rappresentazione di un grafo con la matrice di adiacenza, come abbiamo visto, è semplice e facilmente implementabile.
- La dimensione della matrice è n^2 e questo è sicuramente uno spreco di memoria se il grafo è "sparso", ossia se il numero di archi è relativamente basso.
- Nell'esempio già visto, il grafo ha 6 vertici e 7 archi, eppure la sua rappresentazione è una matrice di dimensione 36.
- Possiamo fare di meglio.



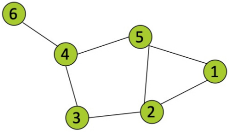
Grafo non orientato

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

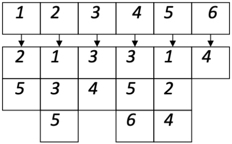
Matrice corrispondente

Rappresentazione di un grafo con liste di adiacenza

- Dato un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ con $|V| = n$ associamo al grafo una lista (array) di dimensione n, ossia il numero dei nodi, ed ogni elemento della lista è a sua volta una lista (tipicamente implementata come lista concatenata) dove mettiamo, in sequenza non ordinata, tutti i vertici collegati al vertice corrispondente.
- Utilizzando il grafo in esempio, costruiamo le liste di adiacenza come in figura, che ha bisogno di $n + 2|E|$ valori



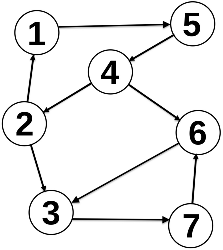
Grafo non orientato



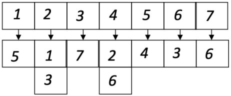
Liste di adiacenza

Rappresentazione di un grafo con liste di adiacenza

- Utilizziamo adesso un grafo orientato con 7 vertici e 9 archi.
- La matrice di adiacenza ha 49 ingressi mentre l'implementazione con liste di adiacenza ha solo bisogno di $n + |E|$ ossia $7 + 9 = 16$ valori.



Grafo orientato



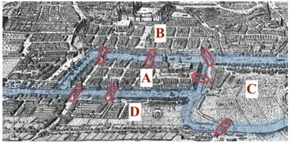
Liste di adiacenza

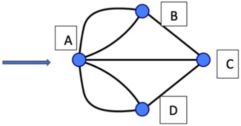
Breve confronto tra le rappresentazioni

- Abbiamo visto che le liste di adiacenza ci fanno risparmiare memoria.
- Però, il tempo per verificare se c'è un arco che unisce due vertici i e j è costante nel caso della matrice, mentre nelle liste di adiacenza dobbiamo andare (in tempo costante) ad $L[i]$ e poi scorrere la lista concatenata connessa. Dal momento che $L[i]$ potrebbe anche contenere tutti i nodi, il tempo di verifica non è più costante, ma dovremmo poter fare sino a n controlli.
- Per calcolare il grado di un nodo, nel caso di grafo non orientato, con la matrice di adiacenza dobbiamo sommare tutti gli elementi della riga (quindi sommare n elementi), mentre nel caso della lista di adiacenza andiamo in genere più velocemente. Immaginate per esempio un vertice che ha un solo arco connesso.
- Calcolare il grado in ingresso di un nodo, nel caso di grafo orientato, invece è molto più veloce nel caso di matrice, dove dobbiamo semplicemente sommare tutti i valori della colonna corrispondente al nodo. Nel caso di liste di adiacenza, invece, dobbiamo scorrere tutte le liste di tutti i nodi e contare quante volte il nodo in questione appare.

Circuito Euleriano

- Ritorniamo ad Eulero ed il problema dei 7 ponti





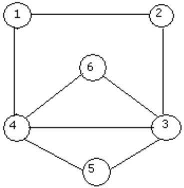
- Diamo la seguente definizione, che ovviamente prende il nome da Eulero

Definizione

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. Un circuito euleriano di G è un circuito che passa per tutti i vertici di G e per ogni arco esattamente una sola volta.
Un grafo si dice euleriano, se possiede un circuito euleriano.

Circuito Euleriano: Esempio

- Il seguente grafo possiede un circuito euleriano?



- Risposta: si! Eccolo: 1 – 2 – 3 – 5 – 4 – 3 – 6 – 4 – 1

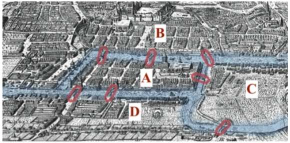
Circuito Euleriano: Teorema di Eulero

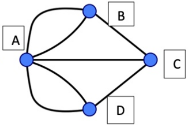
- Grazie al lavoro di Eulero sul problema dei 7 ponti, decidere se un grafo è euleriano è un problema semplice.
- Vale infatti il seguente teorema

Teorema

Un grafo $G = (V, E)$ è euleriano se e solo se è connesso ed i suoi vertici hanno tutti grado pari.

- Ecco allora perché la risposta al problema dei 7 ponti è negativa
- In questo caso, infatti, addirittura tutti i vertici hanno grado dispari.



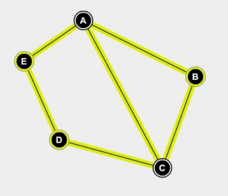


Cammino Euleriano

- Se invece parliamo di cammino e non di circuito (ciclo) allora vale una variante del teorema
- Vale infatti il seguente teorema

Teorema

Un grafo $G = (V, E)$ possiede un cammino euleriano se e solo se è connesso ed i suoi vertici, tranne al più 2 hanno tutti grado pari. I due vertici di grado dispari, saranno il primo e l'ultimo vertice del cammino



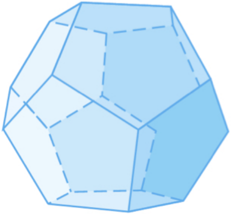
- Il grafo in figura ha infatti 2 vertici di grado dispari 1 e 3 ma possiede un cammino che passa per tutti gli archi una ed una sola volta: $A - B - C - D - E - A - C$

Cammino Hamiltoniano

- Il Teorema di Eulero appena visto, risponde alla domanda: "Esiste un percorso di G che passa per ogni arco esattamente una sola volta ?"
- La domanda complementare è ovviamente: "Esiste un cammino di G che passa per ogni vertice esattamente una sola volta ?"
- In questo caso parliamo di "cammino" e non di "percorso" perché non può esserci ripetizione di vertici.

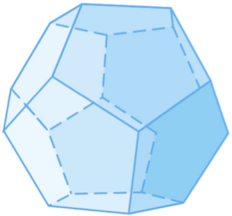
Cammino Hamiltoniano

- Il problema fu posto, per la prima volta, nel 1859 dal matematico irlandese William Rowan Hamilton che introdusse tale problema utilizzando un dodecaedro, ovvero uno dei 5 solidi platonici, con 12 identiche facce pentagonali, 20 vertici e 30 spigoli.
- Ogni vertice, nel problema di Hamilton, corrispondeva, ad una città, per esempio: Londra, Parigi, Roma, New York, etc.
- Il problema era quello di partire da una città e girare il mondo visitando ogni città una sola volta e ritornando alla città di partenza (quindi un ciclo nello specifico)

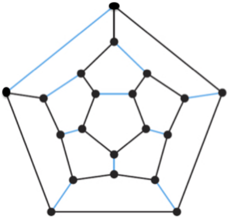


Cammino Hamiltoniano

- Un altro modo di vedere il problema è il seguente:
- Immaginate di allargare a sufficienza la faccia pentagonale su cui si posa il dodecaedro e di schiacciare tutto il resto sul piano e dentro la faccia.
- Si ottiene così l'immagina in figura (in nero gli archi del ciclo richiesto)



Dodecaedro



Dodecaedro schiacciato su una faccia

Cammino Hamiltoniano

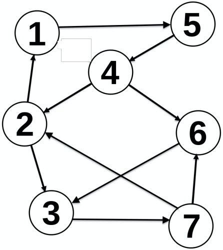
- Diamo allora la seguente definizione

Definizione

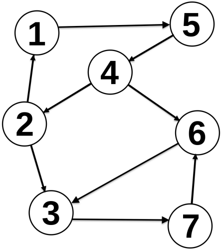
Sia $G = (V, E)$ un grafo (digrafo) connesso. Un cammino hamiltoniano di G è un circuito che passa una ed una sola volta per tutti i vertici di G. Se il cammino è chiuso, ovvero se è un ciclo, tale ciclo si dice ciclo Hamiltoniano. Un grafo si dice hamiltoniano, se possiede un ciclo hamiltoniano

Cammino Hamiltoniano: esempi

- Abbiamo visto l'esempio del dodecaedro come grafo non orientato.
- Vediamo adesso degli esempi con grafi orientati:
- Il grafo A è hamiltoniano, perché possiede il ciclo hamiltoniano $1-5-4-6-3-7-2-1$
- Il grafo B è ottenuto da A eliminando l'arco $(7,2)$ e come conseguenza non possiede un ciclo hamiltoniano.



A: Grafo Hamiltoniano



B: Grafo non Hamiltoniano

Grafi Hamiltoniani

- Sfortunatamente, non esiste un teorema semplice, come quello di Eulero per i cammini di Eulero, che ci fornisce un criterio per determinare se un grafo è hamiltoniano.
- Il problema dell'esistenza di un ciclo hamiltoniano fa parte di una "numerosissima" famiglia di problemi per i quali non ci sono soluzioni, ossia algoritmi, veloci.
- Per un informatico "veloce" ha solo un significato: polinomiale.
- Ossia il numero dei "passi" dell'algoritmo è misurabile con una funzione polinomiale nella dimensione del problema: nel caso di un grafo, la dimensione è data dalle cardinalità di V e E.
- Di problemi come questo, ne vedremo presto tanti altri.

Grafi pesati

- In molte applicazioni in cui si usano i grafi come strutture dati, risulta naturale e necessario introdurre un concetto di peso, o costo, sugli archi oppure sui vertici.
- Diamo quindi la seguente definizione

Definizione

Un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ si dice pesato se è data un'applicazione

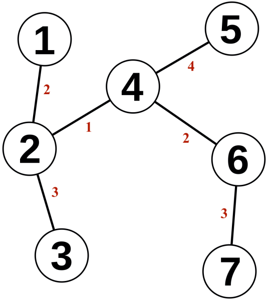
$$c : E \to \Re$$

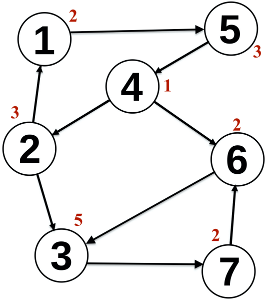
oppure

$$c : V \to \Re$$

Grafi pesati

- I pesi (costi, valori) possono essere associati agli archi, ai nodi od ad entrambi.
- Nella rappresentazione grafica di un grafo, il peso di un arco o di un nodo si scrive vicino all'arco od al nodo.





Grafi pesati e cammini

- Dato un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ pesato, con $c : E \rightarrow \Re$ oppure $c : V \rightarrow \Re$, il costo α di un cammino p $v_1, v_2, \ldots, v_k$ è
  - la somma dei costi associati ai suoi archi, cioè

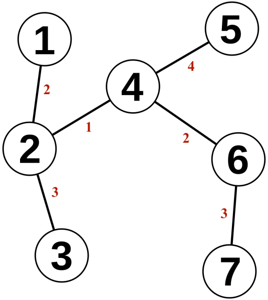
$$\alpha = c(v_1, v_2) + c(v_2, v_3) + \ldots + c(v_{k-1}, v_k)$$

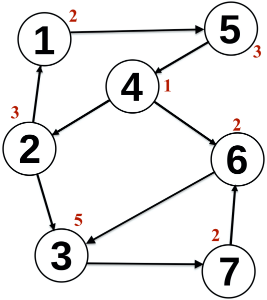
    oppure
  - la somma dei costi associati ai suoi vertici, cioè

$$\alpha = c(v_1) + c(v_2) + \ldots + c(v_k)$$

Grafi pesati e cammini

- Nei grafi dell'esempio: il costo del cammino $5 - 4 - 2 - 1$ è
  - per il grafo non orientato con peso sugli archi $4 + 1 + 2 = 7$
  - per il grafo orientato con peso sui vertici: $3 + 1 + 3 + 2 = 9$.





Cammini minimi e massimi

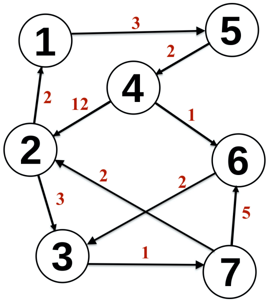
- Dato un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ pesato, con funzione $c : E \to \Re$ oppure $c : V \to \Re$, si dice cammino di costo minimo (shortest path) dal vertice v al vertice w quel cammino (se esiste) che ha costo, rispetto alla funzione c, minimo.
- Dato un grafo (digrafo) $G = (V, E)$ pesato, con funzione $c : E \to \Re$ oppure $c : V \to \Re$, si dice cammino di costo massimo (longest path) dal vertice v al vertice w quel cammino (se esiste) che ha costo, rispetto alla funzione c, massimo.

Cammini minimi e massimi

- Notiamo che visto che parliamo di cammini, non abbiamo ripetizioni di vertici o archi e quindi ha senso parlare di costi minimi (anche in presenza di valori negativi di c) o massimi (anche in presenza di valori positivi di c).
- Se la funzione c è costante (in particolare uguale ad 1) il cammino di costo minimo coincide con il cammino con il minor numero di archi (o vertici)
- mentre il cammino di costo massimo coincide con il cammino con il maggior numero di archi (o vertici).

Grafi pesati e cammini: esercizio

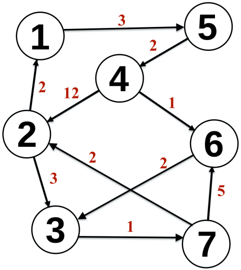
- Dato il grafo in figura
  - Qual è il cammino di costo minimo dal vertice 1 al vertice 2?
  - Qual è il cammino di costo minimo dal vertice 2 al vertice 6?



Rappresentazione grafi pesati

- Se assumiamo di avere una funzione peso sugli archi, e che i pesi siano tutti positivi, allora la rappresentazione più semplice per un grafo o digrafo pesato è quella di una matrice, dove però
  - invece di mettere 1 mettiamo il peso dell'arco
  - e mettiamo, come nel caso non pesato, 0 ad indicare che l'arco manca.
- Vediamo, come esempio, la matrice di adiacenza del digrafo in figura

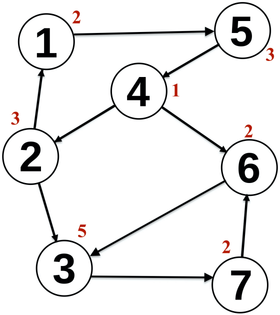
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$



Rappresentazione grafi pesati

- Se invece abbiamo una funzione peso sui vertici, la soluzione più semplice è
  - costruire la matrice di adiacenza M ed inoltre
  - creare un vettore C di lunghezza V dove possiamo scrivere il peso di ogni vertice.
- Vediamo, come esempio, la matrice di adiacenza del digrafo in figura

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

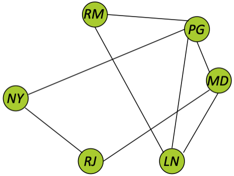


Grafi pesati e cammini: esercizio

- Le seguenti coppie di città sono collegate da una linea aerea, che fornisce un servizio di A/R.
  - Parigi-New York, New York-Rio de Janeiro, Roma-Londra, Parigi-Londra, Rio de Janeiro-Madrid, Madrid-Parigi, Madrid-Londra.
- Qual è la strada più breve (numero di scail) da NY a Roma ?
- Quella più lunga?
- Trovare (se esiste) un cammino che tocchi tutte le città, ossia un cammino hamiltoniano.
- Trovare (se esiste) un ciclo che tocchi tutte le città, ossia un ciclo hamiltoniano.
- Trovare (se esiste) un ciclo euleriano, ossia che percorre tutte le tratte una sola volta.
- Il grafo è k-connesso? Se si, qual è il valore massimo di k?

Grafi pesati e cammini: esercizio

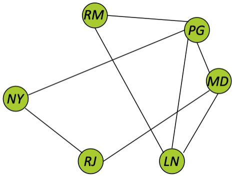
- Rappresentiamo il problema graficamente ed abbiamo il grafo ⇒



- Rispondiamo alle domande
  - Qual è la strada più breve (numero di scali) da NY a Roma ? Risposta: NY-PG-RM.
  - Quella più lunga? Risposta: NY-RJ-MD-LN-PG-RM
  - Trovare (se esiste) un cammino che tocchi tutte le città. Risposta: vedi la risposta alla domanda precedente.
  - Trovare (se esiste) un ciclo che tocchi tutte le città. Risposta: RM-PG-NY-RJ-MD-LN-RM
  - Trovare (se esiste) un ciclo euleriano, ossia che percorre tutte le tratte una sola volta. Rispondiamo dopo.
  - Il grafo è k-connesso? Se si, qual è il valore massimo di k? Il grado minimo di ogni vertice è 2 e quindi il grafo è 2-connesso.

Grafi pesati e cammini: esercizio

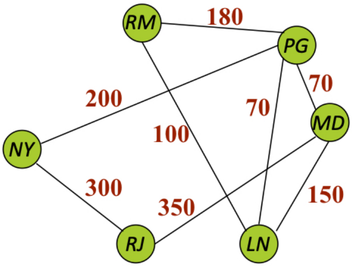
- Esiste un ciclo euleriano?



- Il Teorema di Eulero ci dice che un grafo ha un ciclo euleriano se e solo se tutti i vertici hanno grado pari.
- I vertici LN e MD hanno grado dispari quindi la risposta è no.
- Però sono solo 2 i vertici di grado dispari e quindi possiamo utilizzare l’altro teorema di Eulero che ci dice che possiamo trovare un cammino euleriano che comincia da uno dei due vertici e finisce nell’altro.
- Ecco il cammino: LN-PG-NY-RJ-MD-PG-RM-LN-MD
- Notiamo che se eliminiamo l’arco LN-MD, allora tutti i vertici hanno grado pari ed il circuito euleriano è quello dato sopra, tolto l’ultimo vertice.

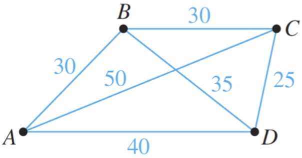
Grafi pesati e cammini: esercizio

- Supponiamo adesso di considerare il costo dei voli.
- Per esempio abbiamo i costi dati in figura dal grafo pesato.
  - Qual è il costo minimo per andare da RM a NY?
  - Qual è il costo minimo per andare da RM a PG?
  - Un commesso viaggiatore che per lavoro avesse la necessità di visitare tutte le città e ritornare al punto di partenza, quanto dovrebbe pagare in biglietti aerei?



Il problema del commesso viaggiatore

- Il problema del commesso viaggiatore, conosciuto con l'abbreviazione TSP (Traveling Salesman Problem) è caratterizzato come il problema di trovare un circuito hamiltoniano che minimizza il costo (distanza) totale per un grafo pesato, dove ad ogni arco è associato un peso positivo.
- Per esempio consideriamo il grafo in figura
- Se un commesso viaggiatore deve attraversare tutti e 4 i nodi, partendo da A e tornando ad A, qual è il percorso che minimizza il costo totale, che supponiamo, per esempio, siano distanze in KM?



Il problema del commesso viaggiatore

- Possiamo risolvere il problema analizzando tutti i circuiti hamiltoniani
- Troviamo così che sono 2 i circuiti hamiltoniani di costo minimo.

Circuito	Distanza Totale
ABCDA	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
ABDCA	$30 + 35 + 25 + 50 = 140$
ACBDA	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
ACDBA	$50 + 25 + 35 + 30 = 140$
ADBCA	$40 + 35 + 30 + 50 = 155$
ADCBA	$40 + 25 + 30 + 30 = 125$

Il problema del commesso viaggiatore

- Si potrebbe pensare di usare tale tecnica per risolvere, in generale, il problema del TSP.
- Facciamo però un piccolo esempio con un grafo di 30 vertici.
- Scegliendone uno qualunque come punto iniziale (e finale), dobbiamo controllare tutti i possibili cammini, ossia tutte le permutazioni dei rimanenti 29 vertici diviso 2 (perché ?)

$$\frac{29!}{2} \sim 4,42 \cdot 10^{30}$$

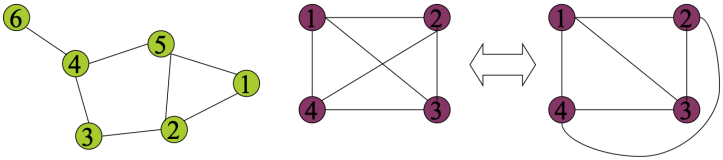
- Anche ammesso di poter trovare ed analizzare ognuna di tali permutazioni in un nanosecondo 10^{-9} ossia 1 miliardo al secondo, servirebbero circa $4,42 \cdot 10^{21}$ secondi.
- 60 secondi al minuti, 3600 secondi ogni ora, 86400 secondi al giorno, $31.536.000 = 3,1 \cdot 10^7$ secondi in anno.
- Servirebbero quindi circa $\frac{4,42 \cdot 10^{30}}{3,1 \cdot 10^7}$ anni. Ossia circa 10^{14}, circa diecimila miliardi di anni, per finire il lavoro.

Il problema del commesso viaggiatore: idee migliori?

- Purtroppo nessuno ha avuto ad oggi un’idea migliore.
- Ci sono però grandi quantità di algoritmi che trovano buone soluzioni in tempi "umani".
- Così come ci sono tantissimi problemi della stessa natura, intrinsecamente difficile, del TSP.
- In seguito ne citeremo altri.

Grafi Planari

- Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Diciamo che G è planare se può essere raffigurato (disegnato) in un piano in modo che non si abbiano archi che si intersecano.
- Altrimenti il grafo si dice non planare.



Esempi di grafi planari

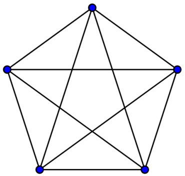
Grafi Planari: Kuratowski

- Fu il matematico polacco Kazimierz Kuratowski a fornire una caratterizzazione matematica dei grafi planari. A lui si deve il seguente teorema, noto oggi con il suo nome.

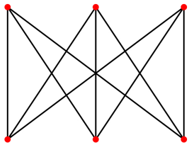
Teorema (Teorema di Kuratowski)

Un grafo è planare se e solo se non contiene alcun sottografo che sia omeomorfo a di K_5 *o a* $K_{3,3}$.

- Quindi il grafo completo con 5 vertici ed il grafo bipartito completo con 3 in ognuna delle due partizioni, sono la "radice" della non planarità.



K_5



$K_{3,3}$

Grafi Planari

- Entrambi i grafi K_5 e $K_{3,3}$ si possono disegnare con una sola intersezione di archi (provateci) e quindi, per entrambi, possiamo dire che se togliamo un solo arco, il grafo ottenuto è planare.
- Il Teorema di Kuratowski ci fornisce anche una metodologia per verificare se un grafo è planare oppure no. Ma è una metodologia computazionalmente molto complessa.
- Vi sono comunque algoritmi "lineari", quindi molto veloci, che riescono a decidere se un grafo è planare oppure no. Sono veloci ma molto complessi.
- In molti casi tali algoritmi non solo forniscono la risposta "booleana" ma anche il disegno sul piano del grafo.

Grafi Planari

- Criteri molto più semplici per decidere se un grafo "non è planare" (quindi condizioni necessarie ma non sufficienti per la planarità) sono i seguenti
- ed entrambi ci confermano che K_5 e $K_{3,3}$ non sono planari.

Teorema

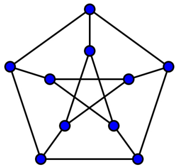
Se $G = (V, E)$ *è un grafo connesso e planare, se* $|V| \geq 3$ *allora* $|E| \leq 3|V| - 6$.

Teorema

Se $G = (V, E)$ *è un grafo connesso e planare, se* $|V| > 3$ *e non ci sono cicli di lunghezza* 3 *allora* $|E| \leq 2|V| - 4$.

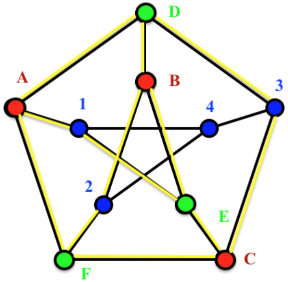
Esempio

- Il grafo, chiamato grafo di Petersen, in figura è planare? Ovvero possiamo disegnarlo in maniera tale che non ci siano intersezioni tra gli archi?
- Si tratta di un grafo non orientato con 10 vertici e 15 archi. Quindi non possiamo applicare i 2 teoremi appena visti.
- Ricorrendo al teorema di Kuratowski, scopriamo che non è planare perché ha un sottografo omeomorfo a $K_{3,3}$.
- Riuscite a trovarlo?



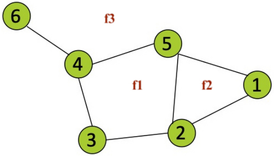
Esempio

- In figura vediamo il sottografo del grafo di Petersen, omeomorfo a $K_{3,3}$.
- I due insiemi sono $V_1 = \{A, B, C\}$ e $V_2 = \{D, E, F\}$.
- Abbiamo gli archi $(A, D), (A, F), (B, D), (B, E), (C, E), (C, F)$
- I tre "archi" mancanti del $K_{3,3}$ sono cammini disgiunti
    - $(A, E) \sim (A, 1), (1, E)$
    - $(B, F) \sim (B, 2), (2, F)$
    - $(C, D) \sim (C, 3), (3, D)$

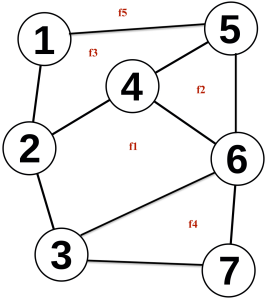


Formula di Eulero

- Se prendiamo un grafo planare connesso e lo disegniamo sul piano senza fare intersecare i suoi archi, oltre ai vertici ed agli archi, possiamo anche contare le facce sul piano, ovvero sia il numero di regioni chiuse delimitate da archi del grafo che, anche, la regione esterna (infinita).
- Per esempio i grafi in figura hanno rispettivamente 3 e 5 facce



Grafo con 3 *facce*



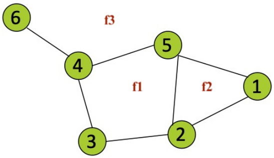
Grafo con 5 *facce*

Formula di Eulero

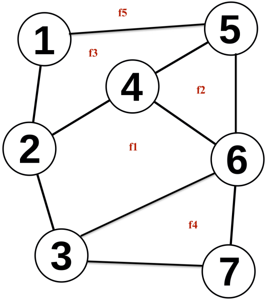
- Se indichiamo con v il numero dei vertici, e il numero degli archi e con f il numero delle facce vale la seguente formula, detta formula di Eulero:

$$v - e + f = 2$$

- Verifichiamola sui due grafi:
  - Per il primo grafo, $v = 6$, $e = 7$ e $f = 3$ e $6 - 7 + 3 = 2$.
  - Per il secondo grafo, $v = 7$, $e = 10$ e $f = 5$ e $7 - 10 + 5 = 2$.



Grafo con 3 *facce*



Grafo con 5 *facce*

Formula di Eulero

- Vogliamo dimostrare la formula di Eulero. Procediamo per passi. Prima dimostriamo il seguente

Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso con $|V| \geq 3$. Supponiamo che $\delta(v) \geq 2$ per ogni v. Allora v possiede un ciclo.

Dimostrazione

Ordiniamo i vertici e chiamiamoli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ con $n = |V| \geq 3$. Partiamo allora dal vertice v_1 e costruiamo un cammino il più lungo possibile senza ripetizione di vertici. Supponiamo, senza ledere la generalità del discorso, che il cammino più lungo senza ripetizione di vertici sia $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Se $k = n$ allora abbiamo trovato un cammino hamiltoniano. In ogni caso, dal vertice v_k possiamo ancora raggiungere un altro vertice, visto che il suo grado è almeno 2. Dal momento che ci siamo fermati, vuol dire che possiamo raggiungere un vertice già visto, quindi uno tra $v_1, \ldots, v_{k-2}$ il che dimostra l'esistenza di un ciclo.
$\triangle$

Formula di Eulero

- Dimostriamo adesso il seguente

Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso e aciclico. Allora $|E| = |V| - 1$.

Dimostrazione

Dimostriamo il teorema per induzione su $|V.|$
Il teorema è banalmente vero se $|V| \leq 2$. Supponiamo allora $|V| \geq 3$.
Essendo il grafo connesso ed aciclico, deve esistere un vertice di grado 1 altrimenti il grafo avrebbe un ciclo, per quanto dimostrato prima, oppure sarebbe disconnesso, avendo almeno un vertice con grado 0.
Prendiamo allora un vertice v di grado 1 e rimuoviamolo dal grafo assieme all'arco su esso incidente. Il grafo indotto da $V \setminus \{v\}$ è connesso, altrimenti dovremmo avere 2 vertici, u, w che sono connessi solo da un cammino passante per v, ossia $u, \ldots, u', v, w', \ldots, w$ ma ciò implicherebbe che v ha grado maggiore di 1.
Quindi, tale grafo indotto è connesso ed aciclico e quindi per induzione ha $|V| - 2$ archi. Aggiungendo v e l'arco ad esso incidente, abbiamo quindi che $|E| = |V| - 1$.
$\triangle$

Formula di Eulero

- Dimostriamo adesso la formula di Eulero

Teorema

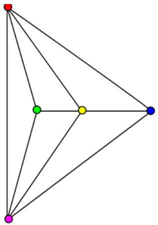
Sia $G = (V, E)$ un grafo planare connesso, con v vertici, e archi e f facce. Allora $v - e + f = 2$.

Dimostrazione

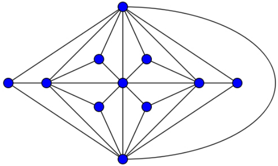
Se il grafo possiede un ciclo, allora togliamo uno degli archi che completa tale ciclo. Il numero di archi e di facce si abbassa allora di una unità. In questo modo, la quantità $v - e + f$ rimane invariata.
Ripetiamo tali sottrazioni di archi, sino a quando non eliminiamo tutti i cicli dall'albero, ovviamente mantenendolo connesso.
A questo punto, avremo ottenuto un grafo connesso ed aciclico con $e = v - 1$ e ovviamente $f = 1$ visto che non ci sono cicli. Quindi, $v - e + f = 2$.
$\triangle$

Grafi planari massimali o triangolari

- Un grafo planare si dice massimale, o triangolare, se è planare e se aggiungendo un nuovo arco ad una qualunque coppia di vertici (non connessi da un arco ovviamente), il grafo non è più planare.
- Un grafo planare massimale è tale che tutte le sue facce, inclusa quella esterna, sono definite da tre archi.
- Ogni grafo planare massimale con v vertici ha allora esattamente $3v - 6$ archi e $2v - 4$ facce.



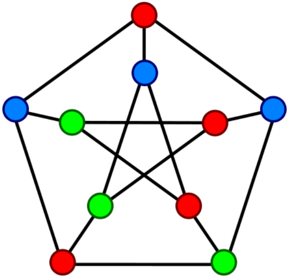
Grafo massimale con 5 *vertici*



Grafo massimale con 11 *vertici*

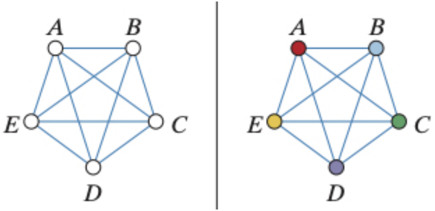
Colorazione di un grafo

- Uno dei problemi più interessanti in teoria dei grafi, e utilissimo in molte applicazioni, è quello di colorare il grafo.
- Colorare un grafo vuol dire assegnare un'etichetta, un colore, ad ogni vertice del grafo in maniera tale che due vertici collegati da un arco, abbiano colori distinti.
- In figura, possiamo vedere una colorazione del grafo di Petersen con 3 colori.
- Un grafo G è k-colorabile se è possibile colorare i suoi vertici, rispettando il vincolo su descritto, utilizzando al più k colori.
- Il numero cromatico di un grafo G, tradizionalmente denotato con $\chi(G)$ è il numero minimo di colori necessari per colorare il grafo.



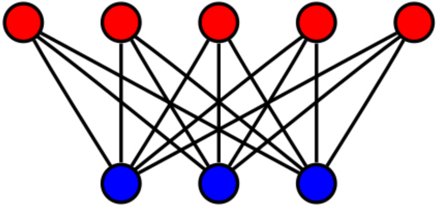
Colorazione di un grafo completo

- Se abbiamo un grafo completo K_n per definizione ogni vertice è connesso da un arco ad ogni altro vertice.
- Quindi, se il grafo ha n vertici servono n colori distinti per colorare il grafo.
- Possiamo quindi concludere che per ogni n, $\chi(K_n) = n$.
- In figura possiamo vedere una colorazione di K_5.



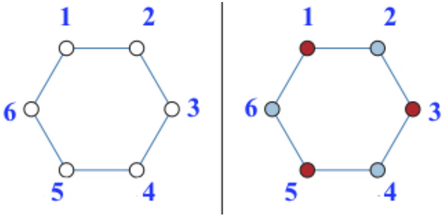
Colorazione di un grafo bipartito

- Se abbiamo un grafo bipartito $G = (V, E)$ sappiamo che l'insieme dei vertici è partizionato in due insiemi V_1 e V_2 e tutti gli archi del grafo connettono un vertice in V_1 con un vertice in V_2.è connesso da un arco ad ogni altro vertice.
- Quindi, se assegniamo ad ogni vertice in V_1 lo stesso colore, e ad ogni vertice in V_2 un colore diverso da quello dei vertici in V_1 ma, di nuovo, lo stesso colore per tutti i vertici di V_2, la colorazione è legale.
- Tutti i grafi bipartiti sono allora 2-colorabili.
- In effetti, dire che è un grafo è 2-colorabile e dire che è bipartito è la stessa cosa.
- In figura, $K_{5,3}$ colorato.



Colorazione di un ciclo semplice

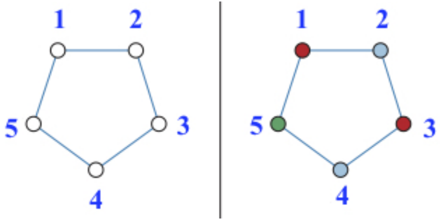
- Supponiamo di avere un grafo $G = (V, E)$ che consiste di un semplice ciclo. Denotiamolo con C_n.
- Ossia, abbiamo $v_1, \ldots, v_n$ vertici e gli archi sono $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \cdots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$
- Ovviamente, servono almeno 2 colori.
- Se coloriamo v_1 rosso e v_2 azzurro, possiamo dare a v_3 il colore rosso etc.
- Quindi, tutti i dispari *rossi* ed i pari *azzurro*.
- In figura, una colorazione di C_6.



Colorazione di un ciclo semplice

- Quanto visto però funziona solo se n è pari.
- Infatti, se n è dispari l'arco $(v_n, v_1$ collegherebbe due nodi rossi.
- In figura, il grafo C_5 colorato con 3 colori.
- Quindi, in caso di cicli semplici, possiamo dire che C_n è 2-colorabile se n è pari, mentre è 3-colorabile se n è dispari.
- Visto che in entrambi i casi non possiamo fare di meglio, abbiamo allora che

$$\chi(C_n) = 2 + n \bmod 2$$



Colorazione ottimale di un grafo

- Una colorazione ottimale di un grafo G è una colorazione dei vertici di G che usa il numero minimo possibile di colori, ossia $\chi(G)$.
- Sfortunatamente, così come per il problema del commesso viaggiatore, non esistono algoritmi veloci per trovare $\chi(G)$. Ci sono però alcuni risultati per casi speciali, e risultati che ci danno un limite superiore a $\chi(G)$.

Teorema (Teorema di Brooks)

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso con n vertici, e siano $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_n$ i gradi dei vertici del grafo in ordine decrescente. Allora $\chi(G) \leq \delta_1 + 1$.

Dimostrazione

Il Teorema si può facilmente dimostrare per induzione. Se togliamo infatti il vertice di grado maggiore v_1, rimaniamo con un grafo con un vertice in meno e colorabile, per ipotesi induttiva, con al più $\delta_2 + 1 \leq \delta_1 + 1$ colori. Quando aggiungiamo il vertice tolto, il caso peggiore è che i δ_1 vertici a lui connessi, siano tutti di colore diverso e quindi gli dobbiamo dare il colore rimasto dei $\delta_1 + 1$.
$\triangle$

Teorema di Brooks: versione forte

- Si può comunque dimostrare che gli unici casi in cui servono $\delta_1 + 1$ colori sono il caso del grafo completo K_n (ogni vertice ha grado $n - 1$) ed il caso del ciclo semplice C_n con n dispari (ogni vertice ha grado 2).
- Abbiamo quindi una versione forte del teorema di Brooks.

Teorema (Teorema di Brooks, versione forte)

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso con n vertici, e siano $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_n$ i gradi dei vertici del grafo in ordine decrescente. Se G non è un grafo completo e G non è un ciclo semplice con numero dispari di vertici, allora $\chi(G) \leq \delta_1$.

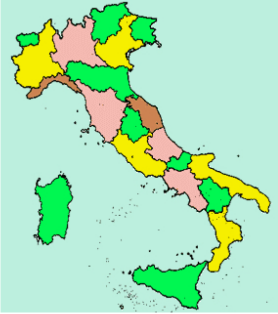
Teorema dei 4 colori

- Alla fine del XIX secolo, colorando la mappa delle contee inglesi, ci si accorse che le si poteva sempre colorare utilizzando al più quattro colori, in maniera tale che contee confinanti avessero colori diversi.
- Ci vollero circa 100 anni per dimostrare, attraverso l'uso esteso di computers, che le mappe geografiche potevano essere sempre colorate utilizzando al più 4 colori. Tale teorema è diventato famoso con il nome di Teorema dei 4 colori.
- Prima di vederne la formulazione in termini di grafi, vediamo come esempio, l'Italia e le 20 regioni.

Colorare l’Italia

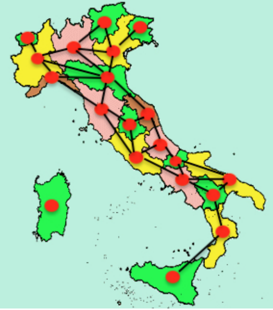
- La Sicilia e la Sardegna non confinano con nessun’altra regione e, tra di loro, quindi le possiamo colorare con lo stesso colore
- La Calabria, per distinguerla meglio dalla Sicilia, la coloriamo con un colore diverso.
- La Basilicata, confina con la Calabria, quindi deve avere un colore diverso, ma può avere quello della Sicilia.
- La Puglia e la Campania, confinano tra loro e con la Calabria, quindi tutti colori diversi. ... etc.

$\Longrightarrow$



Grafo delle regioni

- Possiamo costruire un grafo planare utilizzando le regioni dell'Italia.
- Ad ogni regione associamo un vertice
- Due vertici sono connessi da un arco se le due regioni corrispondenti confinano.



Colorazione grafo planare

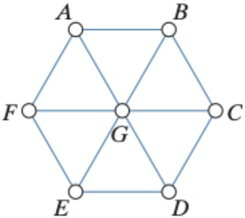
- Generalizzando quanto visto per l'Italia, il problema della colorazione di una mappa è equivalente al problema della colorazione di un grafo planare.
- Possiamo allora descrivere il teorema dei 4 colori come segue:

Teorema (Teorema dei 4 colori)

Sia $G = (V, E)$ un grafo planare, allora $\chi(G) \leq 4$.

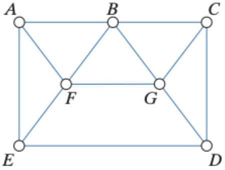
Colorazione: esercizio 1

- Sia dato il grafo G in figura.
- Il grafo è planare, quindi $\chi(G) \leq 4$.
- Ma qual è il valore esatto di $\chi(G)$?



Colorazione: esercizio 2

- Sia dato il grafo *G* in figura.
- Il grafo è planare, quindi $\chi(G) \leq 4$.
- Qual è il valore esatto di $\chi(G)$?



Progetti (esercizi) di Programmazione: 1

- Generate in maniera casuale un grafo G con 30 vertici. Ciò può essere fatto in maniera molto semplice:
    - Definite una matrice quadrata, array bidimensionale, 30x30 di interi.
    - Inizializzate a 0 tutti gli elementi della diagonale principale: ossia $A[i, i] = 0$ per ogni i.
    - agli elementi della matrice triangolare superiore, date un valore intero casuale 0 o 1: per esempio $A[i, j] = rand()\%2$;
    - agli elementi della matrice triangolare inferiore, date il valore simmetrico, ossia $A[i, j] = A[j, i]$ per $i > j$.
- Colorate il grafo, ossia assegnate ad ogni vertice un'etichetta $0, 1, \ldots, 29$ (che memorizzate in una array a parte) in maniera tale da soddisfare il vincolo che nodi connessi da un arco hanno colori diversi.
- Date un giudizio al vostro programma ed algoritmo di colorazione.

Progetti (esercizi) di Programmazione: 2

- Generate in maniera casuale un grafo pesato G con 30 vertici. Modifichiamo quanto detto prima:
  - Definite una matrice quadrata, array bidimensionale, $30x30$ di interi.
  - Inizializzate a 0 tutti gli elementi della diagonale principale: ossia $A[i,i] = 0$ per ogni i.
  - agli elementi della matrice triangolare superiore, date un valore intero casuale da 1 o 100: per esempio $A[i,j] = rand()\%100 + 1$ per $i < j$.
  - agli elementi della matrice triangolare inferiore, date il valore simmetrico, ossia $A[i,j] = A[j,i]$ per $i > j$.
- Avete generato un grafo pesato dove ogni coppia di nodi ha un arco con un certo peso positivo.
- Risolvete il problema del commesso viaggiatore, ossia trovate un ciclo semplice dal nodo 0 a se stesso di peso complessivo "minimo"
- Date un giudizio al vostro programma ed algoritmo.

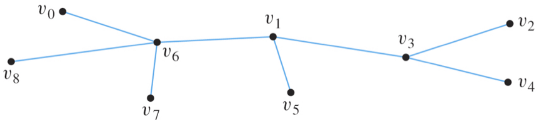
Definizione di Albero libero

- Diamo la seguente definizione

Definizione

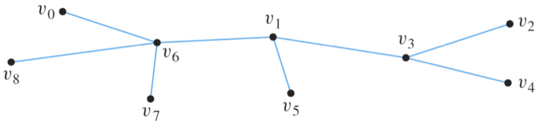
Un albero libero è un grafo $G = (V, E)$ connesso e aciclico

- Quindi per quanto dimostrato, un albero libero con $|V|$ vertici ha esattamente $|V| - 1$ archi.
- Inoltre, dal momento che è connesso, ogni vertice ha grado almeno 1 e deve esistere almeno un vertice di grado 1 altrimenti per quanto già dimostrato il grafo avrebbe un ciclo.
- In figura abbiamo un albero libero con 9 vertici.



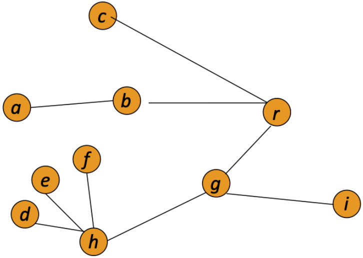
Alberi: terminologia

- Sia T un albero libero.
- Se T ha un vertice oppure 2 allora tutti i vertici sono detti vertici terminali.
- Se T ha più di 2 vertici, i vertici di grado 1 sono detti terminali o foglie, mentre i vertici di grado maggiore di 1 sono detti vertici interni.
- Il grafo in figura ha 6 foglie e 3 nodi interni.



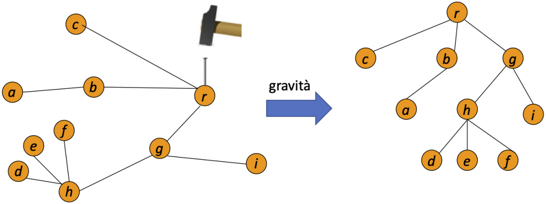
Alberi: terminologia

- Una foresta è un insieme di uno o più alberi, quindi un grafo $G = (V, E)$ aciclico ma non necessariamente connesso.
- Ogni componente connessa del grafo G è un albero della foresta.
- Se T ha solo 1 o 2 vertici allora tutti i vertici sono detti vertici terminali.
- Se T ha più di 2 vertici, i vertici di grado 1 sono detti terminali o foglie, mentre i vertici di grado maggiore di 1 sono detti vertici interni.
- Il grafo in figura ha 6 foglie e 3 nodi interni.



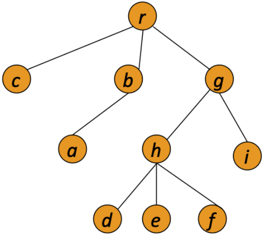
Alberi radicati

- Dato un albero libero, T se scegliamo un nodo e lo denotiamo come "radice", e
- immaginiamo di piantarlo con un chiodo su una lavagna verticale, mentre tutti gli altri nodi cadono per gravità
- otteniamo così un albero radicato, o semplicemente albero.



Alberi radicati: terminologia

- Dato un albero T l'altezza di un albero è la lunghezza del cammino più lungo dalla radice ad una foglia
- I nodi sottostanti un nodo e collegati ad esso da un arco, sono detti figli del nodo, ed il nodo sovrastante è detto genitore
- Il fattore di ramificazione dell'albero è il numero massimo di figli che ognuno dei nodi ha.
- L'albero in figura ha altezza 3, e fattore di ramificazione 3.
- La radice ha 3 figli, il nodo g ha 2 figli, le foglie sono caratterizzate come i nodi che non hanno figli, nell'esempio c, a, d, e, f, i.



Alberi

- Per altre definizioni e proprietà vedere Progr. 2 (per quest'anno).

STRUTTURE DISCRETE

PARTE 4: GRAFI e ALBERI

3: Caso Studio: Problemi combinatori su grafi

Problemi combinatori su grafi

- Abbiamo già parlato del problema della colorazione di un grafo o del problema del commesso viaggiatore per un grafo pesato.
- Abbiamo anche detto che tali problemi, ad oggi, non hanno alcuna soluzione accettabile, ossia non abbiamo alcun "algoritmo" che risolva tali problemi in tempi accettabili, ovvero un numero di operazioni che sia caratterizzabile come polinomiale rispetto alla dimensione del grafo (numero dei vertici e numero degli archi).
- Chiariamo un po' meglio tali concetti anche introducendo altri problemi.

Numero cromatico

- Ritorniamo al problema della colorazione di un grafo $G = (V, E)$.
- Abbiamo definito come numero cromatico del grafo $\chi(G)$ il numero minimo di colori necessari e sufficienti per colorare il grafo.
- Abbiamo due domande di natura diversa ma che si rispondono a vicenda:
  1. Dato un grafo $G = (V, E)$ posso colorarlo utilizzando al più k colori?
  2. Dato un grafo $G = (V, E)$ qual è il suo numero cromatico, ovvero il minimo numero di colori necessari e sufficienti per colorarlo?
- La prima è una domanda la cui risposta è booleana: vero o falso. Quindi è un problema di decisione.
- La seconda domanda è invece un problema di "ottimizzazione", ossia una domanda del tipo "cerca il valore minimo tale che . . . "
- E' evidente che se riesco a rispondere alla prima ho una risposta per la seconda, e viceversa.
- E' anche evidente che se riesco a rispondere "velocemente" alla prima, allora riesco a rispondere velocemente anche alla seconda e viceversa.

Come colorare un grafo

- Supponiamo quindi di voler trovare una colorazione per un dato grafo $G = (V, E)$, o meglio ancora la colorazione ottimale per il grafo, ovvero usando $\chi(G)$ colori.
- Nessuno conosce un algoritmo efficiente per trovare la colorazione ottimale. Notate il termine "efficiente"
- Un algoritmo di sicuro esiste per trovare la colorazione ottimale, ed è il seguente

  Poni $n = |V|$
  Per $k = 1$ ad n
      verifica se G si può colorare con k colori.
      Se si termina.

Come colorare un grafo

- Come verificare se un grafo si può colorare con k colori?
- Ecco un algoritmo

Genera una permutazione dei vertici di G :
$v_1, v_2, \ldots, v_n$
sia $c = 1$ il primo dei k colori;
Per $i = 1$ ad n
    colora i del colore c se possibile
    altrimenti se $c = k$
        termina e passa alla permutazione successiva
        altrimenti passa al colore successivo $c = c + 1$
        colora v_i con questo colore c;

Come colorare un grafo

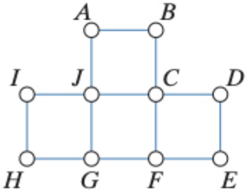
- L'algoritmo appena presentato funziona perfettamente
- Se G è colorabile con k colori ci trova anche la colorazione
- Il problema è che dobbiamo mettere in conto la possibilità di dover controllare tutte le $n!$ permutazioni dei vertici
- Per $n = 100$ abbiamo circa 9^{157} permutazioni.
- Calcolate, come esercizio, quanto tempo ci vuole per controllare tutte queste permutazioni anche avendo a disposizione un computer in grado di controllare 10 miliardi di permutazioni al secondo.
- Problema generale: NESSUNO conosce un algoritmo migliore che dia sempre la risposta ottimale.
- Allora che fare?

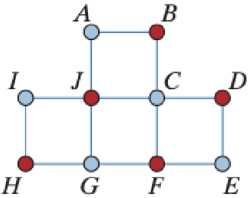
Come colorare un grafo

- Se il grafo è piccolo, diciamo $n \leq 10$ possiamo anche provare l'algoritmo prima descritto
- Se il grafo è planare, abbiamo già una risposta, ovvero sappiamo già che il numero cromatico è al più 4.
- In generale, l'unica cosa che possiamo fare è rinunciare all'ottimalità e provare a trovare una colorazione qualunque, che si spera sia buona.
- Per fare ciò, si usano algoritmi di approssimazione.
- Ne descriviamo adesso uno che appartiene alla categoria degli algoritmi "greedy" (golosi o avidi).

Algoritmo "greedy" per la colorazione

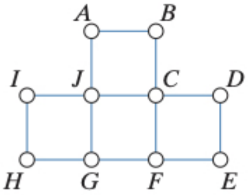
- Descriviamo l'idea e l'algoritmo utilizzando il grafo in figura.
- Cominciamo con un vertice qualunque, per esempio A e lo coloriamo con il colore 1 che supponiamo sia blue.
- Spostiamoci sul vertice successivo B. Non possiamo colorarlo blue perché connesso con A e quindi lo coloriamo con il colore successivo, che supponiamo sia il rosso.
- Spostiamoci sul vertice successivo C. Non possiamo colorarlo rosso perché connesso con B. Potremmo anche colorarlo con un terzo colore, per esempio verde, però vogliamo minimizzare il numero dei colori usati. E dal momento che non è connesso ad A lo coloriamo blue.
- Continuiamo così sino alla fine e troviamo il grafo colorato in figura.

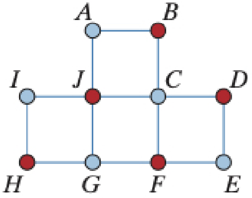




Algoritmo "greedy" per la colorazione

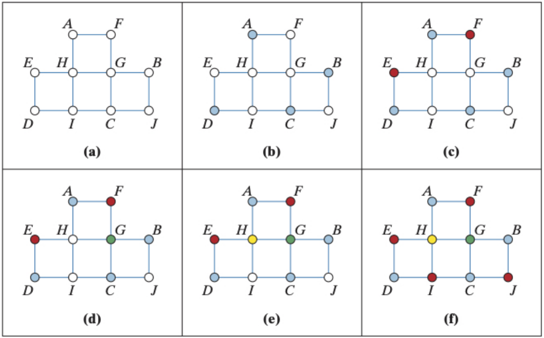
- Tra l'altro abbiamo trovato una colorazione ottimale, perché ovviamente meno di 2 colori non potevamo usare.
- L'algoritmo è "greedy" perché ad ogni passo cerca di fare la scelta migliore, ovvero, nello specifico cerca di usare uno dei colori già usati.
- Abbiamo risolto il problema generale?
- Purtroppo no. Siamo stati fortunati, l'ordine dei nodi che abbiamo scelto (la permutazione) è stata buona.





Algoritmo "greedy" per la colorazione

- Una permutazione diversa (rappresentata dai vertici in ordine alfabetico) potrebbe darci una colorazione diversa e non ottimale.
- In figura vedete che dopo avere colorato A, B, C, D blue, E e F rosso, siamo costretti a dare a G un terzo colore.
- Addirittura con questa permutazione sfortunata, troviamo che servono ben 4 colori per colorare il grafo.

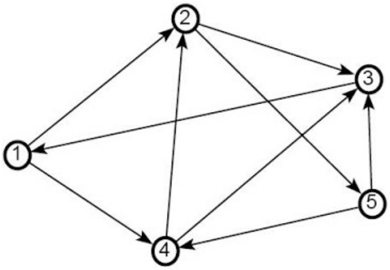


Definizione informale

- Il problema della colorazione di un grafo nella sua versione decisionale ossia:
  1. Dato un grafo $G = (V, E)$ posso colorarlo utilizzando al più k colori?
- appartiene ad una classe di problemi detti $\mathcal{NP}$-hard.
- Senza entrare nella definizione formale della classe, i problemi $\mathcal{NP}$-hard sono sostanzialmente problemi per i quali nessuno ad oggi conosce soluzioni algoritmiche "polinomiali".
- La classe di problemi $\mathcal{NP}$-hard è da un lato molto ricca e, dall'altro, gode della proprietà che se si trova una soluzione polinomiale per uno solo di essi, allora si è trovata una soluzione per tutti.
- Ad oggi, per tutti i problemi $\mathcal{NP}$-hard, gli unici algoritmi che conosciamo sono tutti esponenziali. A meno di non cercare soluzioni approssimate.
- Tra i problemi $\mathcal{NP}$-hard distinguiamo quelli $\mathcal{NP}$-completi. Sono quei problemi per i quali si può verificare velocemente se un tentativo di soluzione è corretta oppure no.
- Vediamo adesso altri esempi di problemi $\mathcal{NP}$-hard sui grafi, e vedremo come, per tali problemi, la ricerca di una soluzione si basa sempre sulla ricerca di una permutazione "buona" dell'insieme dei vertici.

Rendere aciclico un grafo

- Vediamo adesso un altro problema $\mathcal{NP}$-hard sui grafi.
- Supponiamo sia dato un grafo $G = (V, E)$.
- Se il grafo contiene dei cicli, vogliamo eliminare dei vertici, in maniera tale da ottenere un grafo aciclico.
- Ovviamente, se li eliminiamo tutti tranne 1 abbiamo un grafo aciclico.
- Vogliamo invece rendere il grafo aciclico eliminando il minor numero possibile di vertici.
- Per esempio, dato il grafo in figura quanti vertici dobbiamo eliminare per renderlo aciclico?

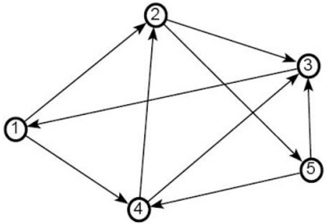


Rendere aciclico un grafo

- Il problema che abbiamo descritto è conosciuto come il problema della ricerca di un Feedback Vertex Set minimo (MFVS).
- Un Feedback Vertex Set è, ovviamente, un insieme di vertici la cui rimozione rende il grafo aciclico.
- Come trovare un FVS?
- Semplice: controlliamo tutte le permutazioni dei vertici del grafo.
- Per ogni permutazione, togliamo i vertici uno alla volta seguendo l'ordine della permutazione e ci fermiamo quando otteniamo un grafo aciclico.i
- Soluzione semplice ma improponibile.
- Dato che il problema è $\mathcal{NP}$-hard sappiamo di non poter fare di meglio. Possiamo provare con un algoritmo di approssimazione greedy.

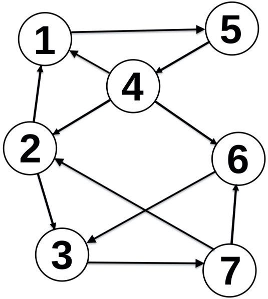
Algoritmo greedy per il MFVS

- Una buona idea di base potrebbe essere la seguente: ordina i vertici in maniera decrescente rispetto al loro grado complessivo: grado in ingresso sommato al grado in uscita $\delta(v) = \delta^-(v) + \delta^+(v)$.
- Elimina uno dei vertici di grado massimo, ricalcola i gradi e continua finché non si ha un grafo aciclico.
- Per il grafo in figura: $\delta(2) = \delta(3) = \delta(4) = 4$ e $\delta(1) = \delta(5) = 3$.
- Eliminiamo il vertice 2 ricalcoliamo i gradi ed otteniamo $\delta(3) = \delta(4) = 3$ e $\delta(1) = \delta(5) = 2$.
- Eliminiamo il vertice 3 ed otteniamo un grafo aciclico.
- In effetti, non potevamo fare di meglio.



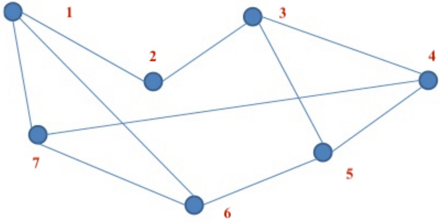
Algoritmo greedy per il MFVS

- Vediamo quest'altro esempio.
- Per il grafo in figura: $\delta(2) = \delta(4) = 4$ sono i vertici di grado massimo.
- Se eliminiamo 2 i vertici di grado massimo sono $\delta(4) = \delta(7) = \delta(6) = 3$.
- Eliminiamo 6 e vertice di grado massimo sono $\delta(4) = \delta(1) = \delta(5) = 2$.
- Eliminiamo uno qualunque di questi ultimi ed il grafo è aciclico.
- Potevamo fare di meglio?
- Si. Bastava eliminare 4 e 7.



Altri problemi $\mathcal{NP}$-hard su grafi

- I problemi $\mathcal{NP}$-hard su grafi sono tantissimi.
- Ricordiamone subito due che abbiamo già visto: il problema dell'esistenza di un ciclo hamiltoniano, ed il problema del commesso viaggiatore.
- Vediamone altri altrettanto interessanti e famosi:
  1. Problema del massimo insieme indipendente: ossia, trovare il massimo sottoinsieme di vertici non connessi tra di loro da alcun arco.
  2. Problema del vertex cover: ossia trovare un sottoinsieme di cardinalità minima C dei nodi di un grafo $G = (V, E)$ tale che tutti gli archi in E abbiano almeno un estremo in C.
- Per il grafo in figura, trovare un insieme indipendente massimale ed un vertex cover minimo.



Permutazioni

- Tutti i problemi visti si possono caratterizzare in questo modo
  1. Trova une permutazione dell'insieme dei vertici .... che ti dia il risultato migliore.
- Questa visione dei problemi ci consente anche di produrre algoritmi detti randomizzati
  - Genera una permutazione a caso e verifica.
  - Se non hai trovato una soluzione, continua altrimenti ti fermi.
- Abbiamo allora due problemi apparentemente semplici da risolvere con le quali terminiamo il corso:
  1. Come trovare una permutazione casuale, garantendo che tutte le permutazioni abbiano la stessa probabilità
  2. Come generare tutte le permutazioni. A tale domanda, per la quale esistono algoritmi "non banali" che ci porterebbero via un bel po' di tempo, non rispondiamo anche perché generare tutte le permutazioni potrebbe non avere alcun senso se parliamo di insiemi di elementi sufficientemente numerosi.

Permutazioni equiprobabili

- Data un'array di interi $A = [0, 1, 2, \ldots, n-1]$ una permutazione casuale dell'array si può ottenere in questo modo (pseudo-codice)
  - for $i = 0, i++, i < n-1$
  - scegli un intero casuale k tale che $i \leq k \leq n-1$;
  - scambia i valori di $A[i]$ e $A[k]$.
  - stampa in output l'array A così modificata
- Domanda: qual è la probabilità che il valore 0 si trovi in posizione i per $0 \leq i \leq n-1$?
- Domanda: qual è la probabilità che il valore j si trovi in posizione i per $0 \leq i \leq n-1$?
- Se la risposta alle due domande è sempre la stessa, ossia $\frac{1}{n}$ allora tutte le permutazioni sono equiprobabili.

Permutazioni equiprobabili

- Domanda: qual è la probabilità che il valore 0 si trovi in posizione i per $0 \leq i \leq n-1$?
  - Risposta: $\frac{1}{n}$ perché tale è la probabilità che al primo passo, sia proprio i l'intero casuale scelto.
- Domanda: qual è la probabilità che il valore j si trovi in posizione i per $0 \leq i \leq n-1$?
  - La probabilità che l'intero j si trovi in posizione i è uguale al prodotto delle probabilità che non sia in una posizione minore di i per la probabilità che sia in posizione i. Vediamo un esempio per $j = 3$ e $i = 5$.

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{1}{n-4} = \frac{1}{n}$$

    Quindi, in generale,

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-i+1}{n-i+2} \cdot \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n}$$

FINE QUARTA PARTE

Grafi ed Alberi