Indice

1 Insiemi 5
1.1 Introduzione 5
1.1.1 Terminologia e simboli 5
1.1.2 Quantificatori: $\exists$, $\forall$. 6
1.1.3 Altri simboli. 6
1.2 Primi elementi di Teoria degli Insiemi 7
1.2.1 Nozione di Insieme. 7
1.2.2 Rappresentazione degli Insiemi. 7
1.2.3 Universo, Insieme vuoto 9
1.2.4 Relazioni tra Insiemi 9
1.3 Operazioni Booleane 11
1.3.1 Intersezione 12
1.3.2 Unione 12
1.3.3 Differenza 13
1.3.4 Differenza Simmetrica 13
1.3.5 Differenza complementare 13
1.3.6 Complemento 14
1.3.7 Il Complemento dell'unione 14
1.4 Identitá booleane 16
1.4.1 Equivalenze 16
1.4.2 Implicazioni 16
1.4.3 Leggi di *De Morgan* 16
1.4.4 Interdefinibilitá di $\neg$, $\cap$ e $\neg$, $\cup$ 17
1.4.5 Relazioni tra la Differenza simmetrica e Complemento 18
1.4.6 Leggi di associativitá degli operatori booleani 19
1.5 Algebre booleane di insiemi 20
1.5.1 Esempi 20

2 Insiemi Numerici 21
2.1 Introduzione 21
2.2 Gli operatori 21
2.3 Numeri Naturali 22
2.4 Assiomi dei Numeri Reali 23
2.5 I sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ 24
2.5.1 Insieme dei numeri naturali. 24

2.5.2 Insieme dei numeri interi relativi. 25
2.5.3 Insieme dei numeri razionali. 25
2.6 Le operazioni permesse in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 25
2.6.1 Operazioni sui numeri naturali. 25
2.6.2 Operazioni sui numeri interi relativi. 26
2.6.3 Operazioni sui numeri frazionari. 26
2.6.4 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ non soddisfano l'assioma di completezza. 26
2.6.5 Non soddisfare l'assioma di completezza cosa comporta ? 27
2.7 Rappresentazione degli insiemi numerici sulla retta 27
2.7.1 Rappresentazione dei numeri interi, interi relativi e frazionari. 28
2.7.2 Rappresentazione dei numeri frazionari. 28
2.7.3 Retta e Numeri Reali. 28
2.8 Intervalli sulla retta . 29
2.8.1 Intervalli limitati. 29
2.8.2 Intervalli illimitati. 29
2.9 Intorno di un punto . 30
2.10 Massimi e minimi di un insieme numerico . 30
2.10.1 Massimo di un insieme numerico. 30
2.10.2 Minimo di un insieme numerico. 31
2.11 Maggiorante e minorante di un insieme numerico . 32
2.12 Insiemi limitati . 33
2.13 Estremi di un insieme numerico 33
2.13.1 Estremo superiore. 33
2.13.2 Estremo inferiore. 33
2.13.3 Esempi. 34
2.14 Gli insiemi numerici formati da coppie ordinate 36
2.15 Prodotto Cartesiano 39

3 Elementi di algebra matriciale 41
3.1 Determinanti e matrici inverse 42
3.2 Trasformazioni lineari 45
3.3 Equazioni lineari 46

4 Funzioni 49
4.1 Applicazione o Funzione 49
4.1.1 Grafico di una funzione. 51
4.1.2 Funzione Iniettiva. 51
4.1.3 Funzione Suriettiva. 52
4.1.4 Funzione Biiettiva. 52
4.1.5 Funzioni pari, dispari, periodiche. 53
4.1.6 Funzioni Monotone. 53
4.1.7 Funzioni limitate. 54
4.1.8 Punti di Massimo e minimo assoluto. 54
4.1.9 Punti di Massimo e minimo relativi. 55
4.2 Composizione di funzioni 55
4.2.1 Casi Patologici. 57

4.3 Esempi di funzioni . 58
4.3.1 Funzioni lineari. 58
4.3.2 Funzioni identitá. 58
4.3.3 Funzioni Quadratiche. 59
4.3.4 Funzione modulo o valore assoluto. 59
4.3.5 Funzione segno di x. 60
4.3.6 Funzione parte intera di x. 61
4.3.7 Funzione floor o funzione pavimento. 62
4.3.8 Funzione Heavyside. 62
4.4 Funzioni per le Scienze della Vita. 63
4.4.1 Funzioni Trigonometriche . 63
4.4.2 Funzione Esponenziale 66
4.4.3 Funzione Logaritmo 67
4.4.4 Il numero di Napier 67
4.5 Funzione inversa 68
4.6 Operazioni tra funzioni 70
4.6.1 Quattro casi interessanti. 71

5 Successioni e Serie Numeriche 73
5.1 Successioni 73
5.1.1 Successioni Monotone. 74
5.2 Concetto di Limite 74
5.2.1 Punto di Accumulazione. 76
5.2.2 Punti di Accumulazione particolari. 77
5.2.3 Funzioni limitate e non limitate. 77
5.3 Limiti di successioni 77
5.3.1 Successioni infinitesime ed infinitamente grandi. 79
5.4 Teoremi sui Limiti di successioni 81
5.4.1 Successioni Estratte. 81
5.5 Operazioni sui limiti delle successioni . 83
5.6 Serie Numeriche 89
5.7 Serie a termini non negativi. 95
5.8 Serie a termini positivi. 97
5.9 Serie a termini di segno alterno. 99

6 Limiti e Continuitá delle funzioni 101
6.1 Limiti delle funzioni . 101
6.1.1 Definizione di limite per $x \to x_0$. 102
6.1.2 Definizione di limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. 104
6.1.3 Operazioni sui limiti. 108
6.1.4 Teoremi sui limiti delle funzioni . 109
6.2 Continuitá di una funzione 111
6.2.1 Continuitá nel punto. 111
6.2.2 Continuitá nell'intervallo 112
6.2.3 Operazioni tra funzioni continue 112
6.2.4 Funzioni Uniformemente Continue. 113
6.3 Proprietá delle funzioni continue 114

6.4 Punti di discontinuitá delle funzioni 115
6.4.1 Punti di discontinuitá eliminabile. 116
6.4.2 Funzione monotone. 117
6.5 Infinitesimi ed infiniti 117
6.5.1 Ordine degli infinitesimi ed infiniti. 118
6.5.2 Infinitesimi e infiniti: Teoremi. 121

7 Derivate delle funzioni 123
7.1 Concetto di derivata 123
7.1.1 Interpretazione geometrica della derivata. . . . 124
7.1.2 Punti angolisi e cuspidali. 126
7.1.3 Primi esempi di derivate. 126
7.1.4 Derivate Fondamentali. 128
7.1.5 Regole di Derivazione. 128
7.1.6 Derivate delle funzioni composte. 129
7.1.7 Derivate delle funzioni composte ed esempi. . 130
7.1.8 Differenziale. 131
7.2 Teoremi del calcolo differenziale 132
7.2.1 Funzioni a derivata nulla. 133
7.2.2 Funzioni Primitive. 134
7.3 Limiti di forme indeterminate 135
7.3.1 Regola di l'Hopital - Esempi. 139
7.4 Asintoti dei diagrammi 140
7.5 Funzioni Crescenti e Decrescenti 142
7.6 Massimi e minimi di una funzione 143
7.6.1 Massimi e minimi relativi di una funzione. . . . 143
7.6.2 Massimi e minimi assoluti di una funzione. . . . 144
7.7 Concavitá, Convessitá, Flessi 144
7.8 Formula di Taylor 146

8 Integrali 147
8.1 Misurabilitá 147
8.2 Integrale definito. 150
8.2.1 Proprietá degli Integrali definiti. 151
8.2.2 Estensione del Concetto di Integrale. 154
8.3 Funzioni Integrali e funzioni primitive. 154
8.4 Integrali Indefiniti. 156
8.5 Integrali Indefiniti immediati. 157
8.6 Metodi di integrazione Indefinita. 158
8.6.1 Integrazione per decomposizione e somma. . . . 158
8.6.2 Integrazione di funzioni razionali. 159
8.6.3 Integrazione per parti. 161
8.6.4 Integrazione per sostituzione. 161
8.7 Integrali Impropri. 162
8.7.1 Integrali Impropri di I tipo. 162
8.7.2 Integrali Impropri di II tipo. 164
8.8 Metodi numerici. 164

8.8.1 Metodo del Trapezio. 166
8.8.2 Metodo di Simpson. 167

9 Equazioni non lineari 169
9.1 Braketing 171
9.2 Metodi per la ricerca degli zeri 173
9.2.1 Metodi Chiusi 174
9.2.2 Metodi Aperti 178

10 Equazioni differenziali 181
10.1 Equazioni del I ordine a variabili separabili . . . 182
10.2 Proprietà delle equazioni differenziali 182
10.3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine . . 186
10.4 Equazioni differenziali lineari del I ordine a coefficienti costanti 187
10.5 Equazione differenziale del II ordine a coefficienti costanti 191

11 Applicazioni alle Scienze Farmaceutiche 199
11.1 Crescita Esponenziale e Modelli di decadimento . . 200
11.1.1 Tempo di dimezzamento e raddoppiamento. . . 201
11.1.2 Crescita di organismi. 202
11.1.3 Culture biologiche. 202
11.1.4 Assorbimento di un farmaco. 204
11.2 Velocitá di una reazione chimica 208
11.2.1 Reazione non reversibile. 209
11.3 Concentrazione di una soluzione 211

12 Cenni di Statistica e Probabilitá 215
12.1 Statistica 215
12.2 Terminologia e Definizioni 216
12.2.1 Esempi. 219
12.3 Statistica Descrittiva 220
12.3.1 Organizzazione e Rappresentazione dei dati. . . 220
12.3.2 Distribuzione di frequenza. 222
12.4 Probabilità 222
12.5 Momenti della funzione di densità 227
12.5.1 Media. 228
12.5.2 Varianza. 230
12.6 Distribuzione normale 231

Premessa

Gli studenti dei corsi di studio legati alle Scienze della Vita si chiedono spesso il motivo per il quale nei loro corsi di studio siano inseriti corsi di matematica.

La domanda, considerata l'esperienza che i nostri giovani allievi maturano durante il lungo periodo scolastico é assolutamente legittima. In tutti gli anni del liceo, ma anche in quelli precedenti, *l'odiata matematica* è, ma non sempre, forse legata allo studio della fisica e dell'astronomia. Solo con qualche docente illuminato allo studio della chimica; mai allo studio della biologia o delle altre scienze della vita.

Eppure se nel corso degli anni di liceo si insegnasse allo studente a scoprire le scienze naturali partendo dall'osservazione della natura invece di *indottrinarlo* con una scienza preconfezinata da altri allora lo studente scoprirebbe facilmente che non si puó progredire nella conoscenza senza due strumenti fondamentali: una struttura logica ed uno strumento di analisi quantitativa.

La logica é il fondamento del pensiero umano nella cultura occidentale. Lo studio della logica appartiene infatti alla filosofia. La matematica é una applicazione della logica; forse la madre di tutte le applicazioni della logica: una Scienza Logica.

Ma la matematica é anche uno strumento di analisi quantitativa, uno strumento per *far di conto*, per trasformare le sensazioni di comparazione (piú grande, piú piccolo) in misure che confrontino grandezze. Questo strumento nasçe e cresce con il progredire dell'*homo sapiens*. Dapprima per confrontarsi con l'ambiente (misurare le distanze o la stazza dei carnivori nemici), poi per convivere in societá (misurare i territori ed i confini), infine per misurare il progredire ed imparare a conoscere la natura.

L'allevatore che conosce il ciclo riproduttivo della pecora e le sue esigenze alimentari, riesce con poco sforzo a prevedere la crescita del suo gregge negli anni ed a stimare le risorse di pascolo di cui avrá bisogno. Lo fa, senza accorgersene, con strumenti di calcolo elementari, ma pur sempre strumenti di calcolo.

Quando le regole che controllano il processo naturale sono sufficientemente conosciute l'uso dello strumento matematico permette di prevedere l'evoluzione del fenomeno. Questo permette di pianificare gli interventi, di programmare in tempo le azioni da fare.

Quindi per i fenomeni naturali *semplici* dei quali le regole (*le leggi*) sono state facilmente conosciute (come le leggi fisiche della meccanica) l'uso della matematica è giunto quasi contestualmente.

Laddove invece il fenomeno naturale é piú complesso (*i processi biologici*) occorrerá piú tempo per avere un numero sufficiente di informazioni quantitative che permettano l'uso dello strumento matematico in modo estensivo. I progressi delle conoscenze nelle Scienze Biologiche degli ultimi 30 anni hanno chiaramente fatto vedere che i primi secoli del secondo millennio saranno quelli in cui le conoscenze sulle Scienze della Vita esploderanno. Grazie a questo crescerá in modo esponenziale anche l'uso dello strumento matematico nella conoscenza della Biologia.

Un lettore distratto potrebbe pensare che siamo arrivati alla fine della corsa. In realtá la complessitá delle strutture biologiche é ancora poca cosa rispetto a quella degli organismi viventi, intesi come entitá che si evolvono in un ambiente in continuo divenire. Le conoscenze che abbiamo oggi, e che probabilmente avremo nei prossimi secoli, saranno troppo limitate per tentare di avere un approccio razionale alla conoscenza di questa meravigliosa realtá. Anche la matematica di oggi forse non é ancora pronta per questa sfida.

Se alla fine di queste righe il lettore vorrá fermarsi per qualche minuto a riflettere su questi spunti, allora forse scoprirá una nuova avventura della mente: l'avventura della conoscenza.

Se questo accadrá la nostra missione, risvegliare la voglia di conoscere, sará compiuta.

Questo volume é stato possibile anche grazie al contributo di amici e collaboratori che hanno costantemente fornito suggerimenti, osservazioni ed utili commenti. Per questo continuo sforzo il nostro ringraziamento ad Annamaria Barbagallo, Francesco Pappalardo e Marzio Pennisi.

Catania, ottobre 2011 SM & MARJ

Organizzazione del volume

L'obiettivo del volume é quello di riproporre gli argomenti di matematica che gli studenti hanno studiato durante gli anni del liceo, con lo scopo di abituarli ad utilizzare le proprie capacitá logiche sugli argomenti classici della matematica.

I concetti sono prima introdotti in modo intuitivo e successivamente formalizzati in modo esatto. Il ragionamento logico puó basarsi solo su concetti e proposizioni definite in modo esatto per evitare che il processo logico sia inficiato da interpretazioni liguistiche.

I linguaggi delle scienze devono sempre essere esatti per evitare di utilizzare termini eguali per oggetti diversi. Nella matematica, che non é una scienza che deriva dalla natura, questo é particolarmente semplice in quanto le entitá della matematica non devono *confrontarsi* con alcuna realtá naturale. Il risultato di questo processo di costruzione del linguaggio matematico é un linguaggio *arido* e assolutamente diverso dal linguaggio naturale.

Lo studente iscritto al primo anno del Corso di Laurea in Farmacia, Scienze Naturali, Scienze Biologiche avrá una naturale repulsione per questo tipo di linguaggio. Questo accade solo perché non sono loro noti gli strumenti con cui le Scienze della Vita stanno cercando di costruire linguaggi simili a quello della Matematica: le Ontologie. Queste sono strutture di concetti e relazioni del tutto simili a quelle costruite per la matematica ma i cui termini derivano

dalle esperienze delle discipline biologiche. Inoltre essendo queste ontologie derivate dalla conoscenza della Biologia, che notoriamente cresce, esse hanno il problema che periodicamente occorre rivederle alla luce delle nuove conoscenze ed il linguaggio va parzialmente ricostruito. Al confronto di queste costruzioni il linguaggio della matematica é un gioco da bambini!

Il volume inizia con la Teoria Elementare degli Insiemi. Il capitolo § 1 é dedicato allo studio degli insiemi numerici. Nel § 2 si studia la classe particolare di insiemi i cui elementi hanno una relazione di ordine, i numeri. Il Cap. § 3 esamina una classe di oggetti, le matrici, che rivestono un peculiare ruolo. Il Cap. § 4 é dedicato al concetto di funzione ed alle proprietá elementari delle funzioni. Una particolare classe di funzioni, le successioni, sono studiate nel Cap. § 5. In questo capitolo viene introdotto il concetto di limite e vengono studiate anche le Serie numeriche. I limiti delle funzioni e le loro proprietá sono approfondite nel Cap. § 6 dove viene altresí data la definizione di funzione continua e sue principali proprietá. Il Cap. ?? si occupa della nozione di derivata, dell'uso della derivata per lo studio dell'andamento della funzione e dei teoremi relativi. Il concetti di misurabilitá di un insieme piano e di integrale definito ed indefinito sono esaminati nel Cap. § 8. Il Cap. 9 é dedicato allo studio delle equazioni non lineari mediante tecniche conseguite dalla teoria delle funzioni continue. Il Cap. § 10 presenta le equazioni differenziali elementari con particolare attenzione a quelle che vengono utilizzate per modellare processi biologici ed ambientali. Il penultimo capitolo, Cap. § 11, é dedicato alle applicazioni nelle scienze della vita. Il volume si chiude con il Cap. § 12 che presenta un cenno di Statistica e Probabiliá.

Capitolo 1

Teoria elementare degli Insiemi

1.1 Introduzione

1.1.1 Terminologia e simboli

La matematica, come ogni altra disciplina scientifica, utilizza oltre al linguaggio comune un proprio *linguaggio* che serve a rendere con precisione e brevitá le proposizioni riguardanti gli enti di cui si occupa. Esso fa largo uso di simboli di cui ora ricorderemo brevemente il significato.

Abbreviazioni e loro significato

- **C.N.** significa condizione necessaria, cioé la condizione deve essere soddisfatta affinché la proposizione sia vera;
- **C.S.** significa condizione sufficiente, cioé se soddisfatta garantisce la veridicitá della proposizione;
- **C.N.S.** significa condizione necessaria e sufficiente. Una condizione affinché si verifichi una condizione é necessaria e sufficiente se e solo se la proposizione é vera. Molto spesso si usa la espressione *se e solo se* per esprimere la equivalenza tra due proposizioni.
- **c.v.d.** significa, com'é usuale, come volevasi dimostrare e si suole scrivere a conclusione di una dimostrazione.

Altri connettivi logici sono $\vee$ oppure e= AND ed $\wedge$ oppure o= OR. Quando all'interno delle proposizioni faremo uso della congiunzione e oppure della disgiunzione o intenderemo con esse rispettivamente l'intersezione logica e l'unione logica.

Implicazioni. Definiamo in questa sezione altri simboli che spesso useremo, le implicazioni: $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
Siano P e Q due proposizioni. Diremo che *P implica Q* se ogni volta che P é vera lo é anche Q e scriveremo $P \Rightarrow Q$.
Tale scrittura si legge equivalentemente nei modi seguenti: *P implica Q*, oppure *da P segue Q*, oppure *C.N. perché sia P vera é che lo sia Q*, oppure *C.S. perché Q sia vera é che lo sia P*.

Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ si scrive $P \Leftrightarrow Q$ e si dice che *P equivale a Q* (oppure *C.N.S. affinché P sia vera é che Q sia vera, P vale se e soltanto se vale Q*).

In alcuni casi si usa anche scrivere *P sse Q*, intendendo con questo *P é vera se e solo se é vera Q*.

1.1.2 Quantificatori: $\exists$, $\forall$.

Il quantificatore universale ed il quantificatore esistenziale sono rispettivamente:

1. $\forall$: per ogni, qualunque sia.
2. $\exists$: esiste (almeno un). $\exists!$ UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

Anch'essi si usano frequentemente eperché rendono piú rapido e preciso il linguaggio.
La negazione é sempre data dal segno / sopra il simbolo in questione.
Ad esempio, $\nexists$ significa *non esiste (alcun)*; analogamente la negazione di uguaglianza é indicata con il simbolo $\neq$.

Il metodo scientifico Il metodo scientifico comunemente usato in matematica consiste nel precisare senza ambiguitá i presupposti (le regole del gioco), che non possono essere cambiati nel corso dell'elaborazione della teoria, e del dedurre, con passaggi logici, da tali presupposti il maggior numero di informazioni.
I presupposti vengono chiamati Postulati o Assiomi; ATTO DI FEDE, VERA SENZA DIMOSTRAZIONI
Da questi, mediante dimostrazioni logiche, vengono dedotti i risultati nella forma di Teoremi (corollari, proposizioni).

1.1.3 Altri simboli. tale che :

Non possiamo fare a meno di ricordare i seguenti simboli, di cui nel seguito approfondiremo caratteristiche e proprietá: $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, $\Re$ l'insieme dei numeri reali, $\Re^+$ l'insieme dei numeri reali positivi, $\mathbb{N}_0$, l'insieme dei numeri naturali e lo zero, $\Re^-$ l'insieme dei numeri reali negativi, $\Re_0^+$ l'insieme dei numeri reali positivi ed il numero zero, $\Re_0^-$ l'insieme dei numeri reali negativi ed il numero zero.

$\mathbb{N}$ naturali $\quad \mathbb{N}_0 \rightarrow$ Naturali incluso lo zero.
$\mathbb{Q}$ razionali
$\mathbb{R}$ reale.

1.2 Primi elementi di Teoria degli Insiemi

1.2.1 Nozione di Insieme.

La nozione di insieme viene spesso utilizzata nella vita di tutti i giorni; si parla dell' insieme:

- degli iscritti ad un corso di laurea
- delle stelle in cielo
- dei punti di un piano

Un insieme é semplicemente una collezione di oggetti detti elementi dell'insieme.
Gli insiemi sono completamente caratterizzati dai loro elementi: due insiemi sono uguali (cioé sono lo stesso insieme) se contengono gli stessi elementi. Questa affermazione viene detta principio di estensionalitá.
In questa sezione ci occuperemo principalmente degli insiemi, delle operazioni che si possono fare sugli insiemi e, piú in generale, di come da alcuni insiemi se ne possono ottenere altri.

1.2.2 Rappresentazione degli Insiemi.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole A, B, C, ...
Gli elementi che fanno parte degli insiemi si indicano con le lettere minuscole a, b, c, ...
Per descrivere e precisare quali siano gli elementi di un insieme si possono utilizzare varie rappresentazioni:

- rappresentazione tabulare;
- rappresentazione grafica;
- rappresentazione caratteristica

Rappresentazione Tabulare.

- **Esempio 1.1** *L'insieme A formato dalle cifre del numero 1100, la sua rappresentazione tabulare é:*

$$A = \{0, 1\}.$$

- **Esempio 1.2** *L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione tabulare:*

$$B = \{a, e, i, o, u\}.$$

Definizione 1.1 *Un insieme si dice finito quando é possibile scriverne la rappresentazione tabulare e tale scrittura ha termine. In caso contrario si dice infinito.*

Rappresentazione grafica. EULERO - VENN

La rappresentazione grafica di un insieme consiste nel racchiudere i suoi elementi in una linea chiusa.

• **Esempio 1.3** *Esempio 1. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione grafica:*

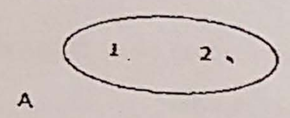


Figura 1.1: Rappresentazione Grafica dell'Esempio 1.3

• **Esempio 1.4** *L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:*

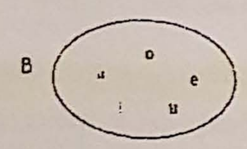


Figura 1.2: Rappresentazione Grafica: Esempio 1.4

Rappresentazione caratteristica.

La rappresentazione caratteristica di un insieme consiste nel *caratterizzare* i suoi elementi *con una proprietá comune* detta appunto proprietá caratteristica.

• **Esempio 1.5** *L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione caratteristica:*

$$A = \{\textit{numeri interi compresi tra } -1 \textit{ e } 2\}$$

o equivalentemente

$x \in \mathbb{N}_0$

$$A = \{x : x \textit{ numero intero}, 0 \leq x < 2\}$$

• **Esempio 1.6** *L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:*

$$A = \{\textit{vocali dell'alfabeto italiano}\}$$

o equivalentemente

$$A = \{x : x = \textit{vocale dell'alfabeto italiano}\}$$

1.2.3 Universo, Insieme vuoto

L'Universo U.

Ragionando sulle proprietá e caratteristiche degli insiemi é bene fissare di volta in volta un universo di oggetti, denotato di solito con $\mathbb{U}$, e considerare solamente insiemi che contengono solo elementi di tale universo. Tipiche scelte di *universi distinti* sono:

- $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali;
- $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi (cioé $\mathbb{N}$ e $-1, -2, \ldots$);
- $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ l'insieme dei numeri razionali positivi, e l'insieme dei numeri razionali negativi;
- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ l'insieme dei numeri reali, l'insieme dei numeri reali positivi, e l'insieme dei numeri reali negativi;
- $\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^-$, l'insieme dei numeri reali positivi e lo zero, e l'insieme dei numeri reali negativi e lo zero.
  Ricordiamo che I numeri positivi sono strettamente maggiori di 0. In numeri negativi strettamente minori di 0.
- $\mathbb{U}$ L'insieme degli eventi possibili di esperimento aleatorio come, ad esempio, il lancio di un dado o di una moneta.

Insieme Vuoto.

Definizione 1.2 *Si definisce insieme vuoto l'insieme privo di elementi; si indica con il simbolo $\emptyset$.*

Nel caso degenere in cui l'universo é vuoto allora esso coincide con l'insieme vuoto.

1.2.4 Relazioni tra Insiemi

Simboli e significato.

In questa sezione diamo la definizione dei principali simboli della Teoria degli insiemi.

SIMBOLO DI APPARTENENZA: $\in$

Se a denota un elemento dell'Universo e Q un insieme, scriveremo $a \in Q$ per specificare che a appartiene a Q.
Scriveremo $a \notin Q$ per indicare a non appartiene a Q.
Scriveremo $a; b \in Q$ per abbreviare: $a \in Q$ e $b \in Q$.

INSIEMI UGUALI: A = B.

Definizione 1.3 *Due insiemi A e B si dicono uguali quando sono costituiti dagli stessi elementi, cioé ogni elemento di uno é anche elemento dell'altro.*

In questo caso si scrive: A = B.

INSIEMI DIVERSI: $A \neq B$.

Definizione 1.4 *Se due insiemi A e B non sono eguali allora si dice che A e B sono diversi e si scrive:* $A \neq B$.

INSIEMI DISGIUNTI:

Definizione 1.5 *Se nessun elemento di A appartiene a B, allora si dice che A e B sono disgiunti.*

- Esempio 1.7 *Se* $A = \{r, t\}$ *e* $B = \{t, r\}$, *allora* $A = B$.
- Esempio 1.8 *Se* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{a, d, e\}$, *allora* $A \neq B$.
- Esempio 1.9 *Se* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{m, n, t\}$, *allora A e B sono disgiunti.*

INCLUSIONE - *simbolo:* $\subseteq$.

Definizione 1.6 *L'insieme B é un sottoinsieme di A se ogni elemento di B appartiene anche ad A. Si dice anche che B é incluso in A, in tal caso si scrive* $B \subseteq A$.

Se B non é un sottoinsieme di A scriveremo $B \nsubseteq A$.

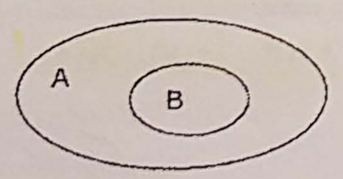


Figura 1.3: Inclusione e Sottoinsiemi

CATENA DI INCLUSIONI.
Talvolta nel linguaggio formale per indicare che $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ si scrive per brevitá una *catena di inclusioni* $A \subseteq B \subseteq C$

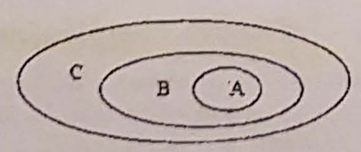


Figura 1.4: Catena di inclusioni

UGUAGLIANZA E DOPPIA INCLUSIONE.
Si noti che se $A = B$ allora, ovviamente, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Viceversa, se si ha simultaneamente $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora A e B hanno gli stessi elementi e quindi, per il principio di estensionalitá, $A = B$.

Abbiamo quindi che $A \subseteq B \subseteq A$ se e solo se $A = B$.

INCLUSIONI BANALI.
É immediato verificare che le inclusioni $A \subseteq A$ e $A \subseteq \mathbb{U}$ valgono per ogni insieme A.
Anche $\emptyset \subseteq A$ vale $\forall\ A \subseteq \mathbb{U}$. Infatti $\emptyset \subseteq A$ significa che ogni elemento di $\emptyset$ é un elemento di A. Se ció non fosse vero dovremmo essere in grado di trovare un controesempio, cioé un elemento di $\emptyset$ che non appartiene a A. Ma $\emptyset$ non ha elementi sicché tale controesempio non puo esistere.

$\Downarrow$

ASSERTO 1.1 *Ogni insieme possiede sicuramente due sottoinsiemi: sé stesso e l'insieme vuoto.*

INCLUSIONE STRETTA $\subset$.

Definizione 1.7 *Si definisce sottoinsieme proprio di un insieme A ogni suo sottoinsieme non vuoto, distinto da A.*

Il generico insieme $B \neq \emptyset$ si dirá quindi sottoinsieme proprio di A, e si scriverá $B \subset A$, se

$$B \subseteq A \text{ e } B \neq A$$

Si puo dire, in modo equivalente, che:
$B \subset A$ se $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$ ed $\exists\, \bar{a} \in A : \bar{a} \notin B$

1.3 Operazioni Booleane

Gli operatori sugli insiemi prendono il nome di operatori booleani binari sugli insiemi dal nome del matematico Boole considerato il fondatore della logica matematica. Questi operatori sono indicati con i simboli ed i nomi di seguito indicati:

- $* \cap *$: Intersezione
- $* \cup *$: Unione
- $* \setminus *$: Differenza
- $* \Delta *$. Differenza simmetrica

Il principale operatore che lavora su un singolo operando (*operatore unario*) é

- $\neg *$: il complemento.

1.3.1 Intersezione

Definizione 1.8 *Si definisce intersezione tra due insiemi* A *e* B, *l'insieme formato dagli elementi comuni ad* A *e* B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\}.$$

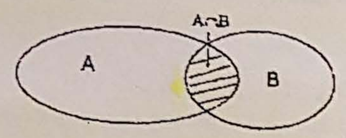


Figura 1.5: Intersezione tra Insiemi

1.3.2 Unione

Definizione 1.9 *Si definisce unione tra due insiemi* A *e* B, *l'insieme formato dagli elementi e appartengono ad* A, *a* B *oppure ad entrambi, cioé ad almeno uno degli insiemi* A *e* B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ oppure \ x \in B\}.$$

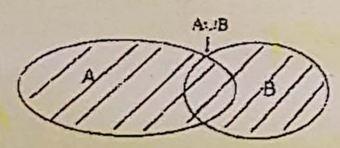


Figura 1.6: Unione di Insiemi

Ovviamente:

- Se A e B non hanno elementi comuni allora $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B \supseteq A$ e $A \cup B \supseteq B$
- $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.

Le definizioni di intersezione e unione possono essere estese al caso in cui si considerano più di due insiemi.

1.3.3 Differenza

Definizione 1.10 *Si definisce insieme differenza tra due insiemi* A *e* B, *l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad* A *e che non appartengono a* B.

$$A \backslash B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B\}.$$

In termini di operazioni booleane tra insiemi si può scrivere: $A \backslash B = A \cap (\neg B)$

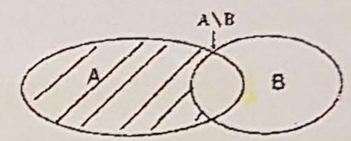


Figura 1.7: Differenza tra Insiemi

1.3.4 Differenza Simmetrica

Definizione 1.11 *La differenza simmetrica tra* A *e* B *é l'insieme degli elementi che: appartengono a* A *e non appartengono a* B *oppure che appartengono a* B *ma non appartengono ad* A. *Viene denotata con* $A \triangle B$.

$$A \triangle B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B, \ oppure \ , x \in B \ e \ x \notin A\}.$$

Valgono, come si vede banalmente dalla figura, le due relazioni seguenti:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \qquad A \triangle B = (A \cup B) \backslash (B \cap A).$$

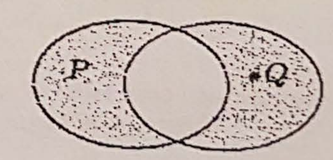


Figura 1.8: Differenza Simmetrica

1.3.5 Differenza complementare

Definizione 1.12 *Si definisce differenza complementare tra due insiemi, l'insieme* A *ed un suo sottinsieme* B, $B \subset A$, *l'insieme formato dagli elementi che appartengono a* A *ma non a* B.
L'operatore binario differenza complementare tra insiemi viene indicato con il simbolo $* - *$.

$$A - B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B, B \subset A\}$$

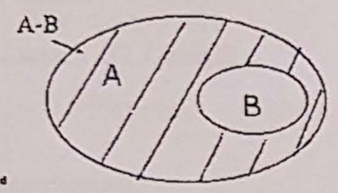


Figura 1.9: Differenza Complementare

1.3.6 Complemento

Definizione 1.13 *Dato un insieme A e l'Universo* $\mathbb{U}$ *si definisce complemento di A, l'insieme differenza* $\mathbb{U} \backslash A$.
Tale insieme viene denotato con

$$\neg A \equiv C(A) \equiv A^C = \mathbb{U} \backslash A$$

Dire che un elemento x dell'universo appartiene al complemento di A è equivalente a dire che x non appartiene ad A:

$$x \in \neg A \iff x \notin A.$$

1.3.7 Il Complemento dell'unione

É facile verificare le seguenti identitá:

$$\neg (A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B).$$

Questa relazione, come vedremo in seguito, é anche nota come *prima legge di De Morgan.*

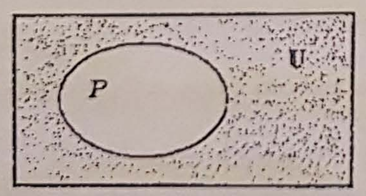


Figura 1.10: Complemento

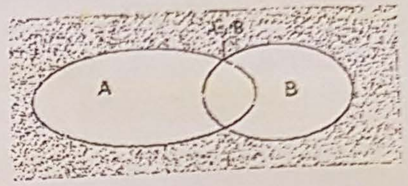


Figura 1.11: Complemento della Unione

Esempi

- Esempio 1.10

$$\begin{aligned} &Se: A = \{a, b, c, d\} \ e \ B = \{a, d, f\} \\ &\Rightarrow A \cap B = \{a, d\} \ e \\ &A \cup B = \{a, b, c, d, f\}. \end{aligned}$$

- Esempio 1.11

$$\begin{aligned} &Se: A = \{1, 2, 3, 4\} \ e \ B = \{1, 3, 5\} \\ &\Rightarrow A \cap B = \{1, 3\} \ e \\ &A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

- Esempio 1.12 *Siano A e B gli insiemi dei punti di due rette non parallele, r ed s, giacenti su uno stesso piano:*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R} : y = mx + q, m, q \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R} : y = nx + p, n, p \in \mathbb{R}\}$$

essendo $m \neq n$. *Allora* $A \cap B$ *é l'insieme formato dal punto di intersezione.*

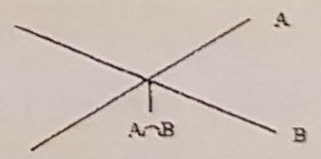


Figura 1.12: Insieme intersezione di due rette non parallele

Se le rette r ed s fossero state parallele, cioé $m = n$, allora $A \cap B = \emptyset$.

- Esempio 1.13

$$\begin{aligned} &Se: A = \{1, 2, 3, 4\} \ e \ B = \{1, 3\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A - B = \{2, 4\}. \end{aligned}$$

1.4 Identitá booleane

Definizione 1.14 *Dicesi Identitá Booleana una eguaglianza tra insiemi che vale per ogni insieme in ogni universo.*

Le seguenti identitá booleane valgono in *qualsiasi* universo e *qualsiasi* siano gli insiemi A e B.

1) $\neg\neg A = A$
2) $A \triangle B = B \triangle A \rightarrow \triangle$ é un operatore commutativo.
3) $A \cup B = B \cup A \rightarrow \cup$ é un operatore commutativo.
4) $A \cap B = B \cap A \rightarrow \cap$ é un operatore commutativo.
5) $A \setminus B = A \cap \neg B \rightarrow \setminus$ é un operatore non commutativo.

1.4.1 Equivalenze

Definizione 1.15 *Diremo che due espressioni sono equivalenti se una di esse implica l'altra e viceversa; e questa proprietá vale per ogni insieme e per ogni possibile universo.*

Per indicare che due espressioni sono equivalenti si usa il simbolo $\Longleftrightarrow$ che sintetizza l'espressione *se e solo se*.

- Esempio 1.14 $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$
- Esempio 1.15 $A \triangle B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$.

1.4.2 Implicazioni

Definizione 1.16 *Date due proposizioni A e B diremo che A implica B, e scriveremo $A \Longrightarrow B$, se accade che B é vera se A é vera, e questo vale per ogni insieme e per ogni possibile universo.*

Il simbolo $\Longrightarrow$ viene usato per abbreviare l'espressione *se ... allora*.

- Esempio 1.16

$$A = \emptyset \Longrightarrow A \subset B.$$

1.4.3 Leggi di *De Morgan* ORALE

Le seguenti due identitá prendono il nome di Prima e Seconda Legge di De Morgan:

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$
$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B.$$

Verifichiamo graficamente la prima, da destra a sinistra. Sovrapponendo le due figure otteniamo

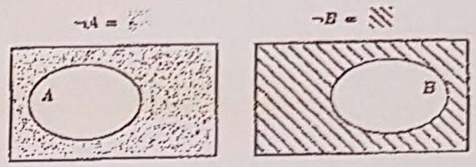


Figura 1.13: Prima Legge di De Morgan

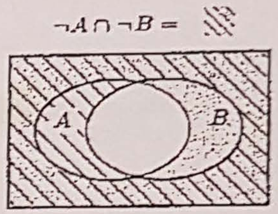


Figura 1.14: Seconda Legge di De Morgan

Seconda Legge di De Morgan: derivazione dalla prima Osserviamo che la seconda legge di De Morgan si puó considerare conseguenza della prima. Infatti, dalla prima legge si ha:

$$\forall\ P, Q \Longrightarrow \neg(P \cup Q) = \neg P \cap \neg Q.$$

Prendendo il complemento di entrambi i membri dell'equaglianza, si ha

$$\neg\neg(P \cup Q) = \neg(\neg P \cap \neg Q).$$

Semplificando la doppia complementazione, si ottiene

$$(P \cup Q) = \neg(\neg P \cap \neg Q).$$

Questa relazione vale *per ogni* insieme P e Q in *qualsiasi* universo. Quindi, in particolare, vale per gli insiemi: $P = \neg A$ e $Q = \neg B$. Sostituendo si ottiene:

$$(\neg A \cup \neg B) = \neg(\neg\neg A \cap \neg\neg B),$$

Semplificando la doppia complementazione a destra, si ottiene:

$$(\neg A \cup \neg B) = \neg(A \cap B)$$

che é la seconda Legge di De Morgan.

1.4.4 Interdefinibilitá di $\neg, \cap$ e $\neg, \cup$

Le leggi di De Morgan permettono di esprimere l'intersezione tramite l'unione ed il complemento e viceversa l'unione tramite l'intersezione ed il complemento.

Queste leggi possono infatti essere scritte nella forma:

$$A \cup B = \neg(\neg A \cap \neg B)$$
$$A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B).$$

METODO PER DESCRIVERE

1.4.5 Relazioni tra la Differenza simmetrica e Complemento

Le due relazioni che seguono stabiliscono uno stretto rapporto tra la differenza simmetrica ed il complemento.

$$A \triangle B = \neg A \triangle \neg B \quad (\star)$$
$$\neg(A \triangle B) = \neg A \triangle B \quad (\star\star).$$

La dimostrazione segue immediatamente in modo diretto.
Iniziamo dalla prima identitá $(\star)$:

$$A \triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee ((x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

L'insieme $\neg A \triangle \neg B$ é dato da:

$$\neg A \triangle \neg B = \{x : (x \in \neg A \wedge x \notin \neg B) \vee (x \notin \neg A \wedge x \in \neg B)\}$$
$$\text{ma, } \forall X \text{ e } \forall U, \ x \notin X \Leftrightarrow x \in \neg X \text{ quindi}$$
$$(\neg A) \triangle (\neg B) = \{x : (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\}.$$

Tenendo presente che la congiunzione logica $\vee$ é commutativa si perviene alla prima relazione.

La seconda relazione $(\star\star)$ la proviamo da destra verso sinistra.

$$\neg A \triangle B = \{x : (x \in \neg A \wedge x \notin B) \vee (x \notin \neg A \wedge x \in B)\}$$
$$\text{ma, } \forall X \text{ e } \forall U, \ \text{se } x \notin X \Leftrightarrow x \in \neg X$$
$$\text{quindi } = \{x : (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\}.$$

Cioé x non appartiene a nessuno degli insiemi A e B oppure appartiene ad entrambi.
Se $x \in \neg(A \triangle B)$, come si puó vedere prendendo il complemento della figura che rappresenta la differenza simmetrica, $x \in A \cap B$ oppure $x \notin A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in \neg(A \triangle B)$. Ció prova la seconda relazione.

Possiamo derivare le due identitá anche in modo indiretto.
Per la prima identitá $(\star)$ ricordiamo che:

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (B \cap A)$$
$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Ricordando poi che $A \backslash B = A \cap \neg B$, possiamo riscrivere le relazioni precedenti come segue:

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap \neg(B \cap A) \qquad (\alpha)$$
$$A \triangle B = (A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg A) \qquad (\beta).$$

Dalla (α) otteniamo:

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap (\neg B \cup \neg A) \qquad (\gamma).$$

Dato che quest'ultima uguaglianza vale per ogni A e B e per ogni U essa é verificata anche per $\neg A$ e $\neg B$. Sostituendo $A \to \neg A$ e $B \to \neg B$ si ottiene:

$$\neg A \triangle \neg B = (\neg A \cup \neg B) \cap (\neg\neg B \cup \neg\neg A).$$

Cancellando la doppia complementazione, utilizzando la proprietá commutativa dell'intersezione e confrontando con (γ), si ha:

$$\neg A \triangle \neg B = (B \cup A) \cap (\neg A \cup \neg B) = A \triangle B,$$

ció prova la prima identitá.
Per verificare la seconda identitá $(\star\star)$ dobbiamo mostrare che:

$$\neg A \triangle B = \neg(A \triangle B).$$

Pertanto, per la definizione di differenza simmetrica

$$\neg A \triangle B = (\neg A \cup B) \cap (\neg B \cup A).$$

Iniziamo con il ricordare che $A \backslash B = A \cap (\neg B)$. Da questa segue, guardando ad esempio la figura della differenza, $\neg(A \backslash B) = \neg A \cup B$.
Dalle relazioni precedenti si ottengono sia l'espressione per $A \triangle B$ che quella per il suo complemento:

$$A \triangle B = (A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg A)$$
$$\neg(A \triangle B) = \neg((A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg A)).$$

Ricordando la prima legge di De Morgan, $\neg(P \cup Q) = \neg P \cap \neg Q$, ed identificando $P = (A \cap \neg B)$ e $Q = (B \cap \neg A)$, si ottiene:

$$\neg((A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg A)) = \neg(A \cap \neg B) \cap \neg(B \cap \neg A) =$$
$$(\neg A \cup B) \cap (\neg B \cup A),$$

dove si sono utilizzate le espressioni per il complemento delle differenze $A \backslash B$ e $B \backslash A$ racchiuse tra parentesi a destra.

1.4.6 Leggi di associativitá degli operatori booleani

La seguenti identitá si chiamano Leggi di Associativitá:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

L'associativitá dell'unione e della intersezione sono semplici da verificare.
Lo studente verifichi l'associativitá della differenza simmetrica utilizzando i diagrammi di Venn. Grazie a queste identitá si possono omettere alcune parentesi.

• **Esempio 1.17** *Le cinque espressioni che seguono sono tutte equali tra loro. L'ultima é, ovviamente, la piú semplice da scrivere:*

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) \cup (C \cup D) = \\
&= ((A \cup B) \cup C) \cup D = \\
&= A \cup ((B \cup C) \cup D) = \\
&= A \cup (B \cup (C \cup D)) = \\
&= A \cup B \cup C \cup D.
\end{aligned}
$$

1.5 Algebre booleane di insiemi

Fissiamo un universo arbitrario ma non vuoto $\mathbb{U}$.
Un'algebra booleana su $\mathbb{U}$ é una *collezione* di insiemi $\mathcal{B}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $\emptyset$ e $\mathbb{U}$ appartengono a $\mathcal{B}$.
2. Se A appartiene a $\mathcal{B} \Longrightarrow$ anche $\neg A$ appartiene a $\mathcal{B}$.
   Si dice che $\mathcal{B}$ é chiuso rispetto alla complementazione.
3. Se A_1, A_2 appartengono a $\mathcal{B} \Longrightarrow$ anche $A_1 \cap A_2$ appartiene a $\mathcal{B}$.
   Si dice che $\mathcal{B}$ é chiuso rispetto alla intersezione.
4. Se A_1, A_2 appartengono a $\mathcal{B} \Longrightarrow$ anche $A_1 \cup A_2$ appartiene a $\mathcal{B}$.
   Si dice che $\mathcal{B}$ é chiuso rispetto alla unione.

1.5.1 Esempi

Se $\mathcal{B}$ é la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{U}$ allora $\mathcal{B}$ é un'algebra booleana.
Questa collezione di insiemi viene spesso denotata $P(\mathbb{U})$, la lettera P sta per parti.
Se $\mathcal{B}$ contiene solo gli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{U}$ allora $\mathcal{B}$ é un'algebra booleana.
Tra questi due estremi esistono generalmente molte altre possibilitá. Vediamo alcuni esempi:

- La collezione contenente i tre insiemi $\emptyset$, $\mathbb{U}$, $\{0\}$ é un'algebra booleana su $\mathbb{U} = \{0, 1, 2\}$. Anche la collezione contenente gli insiemi $\emptyset$, $\mathbb{U}$, $\{0\}$, $\{1\}$ é un'algebra booleana su $\mathbb{U} = \{0, 1, 2\}$.
- L'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contengono tutto $\mathbb{Q}$ o sono disgiunti da $\mathbb{Q}$ é un'algebra booleana su $\mathbb{R}$;
- Un insieme di dice finito se contiene un numero finito di elementi, cofinito se il suo complemento é finito. L'insieme dei sottoinsiemi finiti e cofiniti di $\mathbb{N}$ é un'algebra booleana su $\mathbb{N}$.

Capitolo 2

Insiemi Numerici

2.1 Introduzione

Una classe di insieme di particolare interesse é rappresentata dagli insiemi numerici. Come é noto tali insiemi si distinguono in: insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$), insieme degli interi relativi ($\mathbb{Z}$), insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ ed insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$). Tali insiemi godono della proprietá seguente:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Nella rappresentazione insiemistica appare evidente che ciascuna classe é un ampliamento di quella che la precede.

All'interno di ciascuno di tali insiemi verranno poi definite le operazioni elementari e successivamente quelle piú complesse.

2.2 Gli operatori

Operatore Unario.

Definizione 2.1 *Chiameremo Operatore Unario su un insieme numerico* X *una qualsiasi legge* $*$ *che associa ad un qualsiasi elemento dell'insieme, cioé* $\forall a \in X$, *un altro elemento numero* $c = *a$, $c \in D$, $X \subseteq D$.

Gli operatori numerici unari piú utilizzati sono: l'opposto di un numero, l'inverso di un numero la elevazione a potenza, il logaritmo, gli operatori trigonometrici.

Operatore binario.

Definizione 2.2 *Chiameremo operatore binario su un insieme numerico* Y *una qualsiasi legge* $*$ *che associa ad una qualsiasi coppia di elementi dell'insieme, cioé* $\forall a, b \in Y$, *un altro elemento dello stesso insieme* $c = a * b$, $c \in Y$.

Gli operatori numerici binari elementari sono:
somma, sottrazione, prodotto e *divisione*,
rappresentati rispettivamente con i simboli

$$+, \quad -, \quad \cdot, \quad :$$

∗ **Osservazione 2.1** *Taluni operatori, sia unari che binari, sono definibili in modo particolare (o non sono definibili) negli insiemi numerici piú ristretti* $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ *o sutto l'insieme dei numeri reali* $\mathbb{R}$.

• **Esempio 2.1** *L'opposto non é definibile all'interno dei numeri naturali* $\mathbb{N}$.

• **Esempio 2.2** *Dati i numeri interi,* $a, b \in \mathbb{Z}$, $a = 2$ *e* $b = -3$ *l'operazione di divisione tra questi numeri é definibile all'interno dei numeri interi a condizione di prendere il massimo intero contenuto nell'operazione classica di divisione. Cosí:*

$$a/b = 0 \qquad b/a = -1$$

$b \neq 0$

∗ **Nota 2.1** *Quest'ultimo esempio é di notevole importanza quando si opera con le macchine calcolatrici elettroniche per la diversa rappresentazione in macchina dei numeri interi e di quelli reali.*

2.3 Numeri Naturali

La definizione dei numeri naturali si puó derivare dagli assiomi di Peano Questo insieme numerico traduce l'azione naturale del contare.
L'insieme dei numeri naturali é l'insieme infinito, indicato con il simbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Gli operatori binari definiti su tale insieme sono quelli elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione), quelli unari sono l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice (nei limiti sopra descritti).
In primo luogo occorre ricordare l' **ordine** con il quale devono essere svolte le operazioni che si trovano nella medesima espressione.
Il corretto ordine di priorità decrescente é il seguente:
1: parentesi
2: potenze e radici
3: moltiplicazioni e divisioni
4: addizioni e sottrazioni.

• **Esempio 2.3** $3 + 4 \cdot (3 + 2)^2 = 3 + 4 \cdot 5^2 = 3 + 4 \cdot 25 = 3 + 100 = 103$.

Le quattro operazioni fondamentali soddisfano le seguenti proprietá.

Addizione

- Proprietá commutativa: $a + b = b + a$;
- Proprietá associativa: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.

Sottrazione

- Proprietá invariantiva: $a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$.

Moltiplicazione

- Proprietá commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$;
- Proprietá associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$;
- Proprietá distributiva rispetto alla somma $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Divisione

- Proprietá invariantiva: $a : b = (a : c) : (b : c) = (a \cdot c) : (b \cdot c)$;
- Proprietá distributiva rispetto alla somma: $(a + b) : c = a : c + b : c$.

∗ **Nota 2.2** *In una frazione la proprietá distributiva della divisione rispetto alla somma é applicabile solo al dividendo (numeratore) e non al divisore (denominatore).*

• **Esempio 2.4** $\frac{6+9}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3}$, *mentre* $\frac{24}{4+8} \neq \frac{24}{4} + \frac{24}{8}$.

Le proprietá dell'elevamento a potenza e dell'estrazione di radice verranno trattati piú avanti. Partendo dai numeri naturali, $\mathbb{N}$, con successivi ampliamenti delle classi numeriche, si possono definire le classi dei numeri relativi, $\mathbb{Z}$, dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e quindi dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Un altro modo per descrivere gli insiemi numerici é quello di postulare l'esistenza dell'insieme dei numeri reali e le relative proprietá, per poi restringersi agli insiemi dei numeri razionali, relativi ed interi.

2.4 Assiomi dei Numeri Reali

I numeri reali e le loro proprietá possono derivarsi dal postulato e dagli assiomi che seguono.

Postulato.

Esiste un insieme numerico, che chiameremo insieme dei numeri reali ed indicheremo con $\mathbb{R}$, nel quale é possibile effettuare, con opportune regole, le quattro operazioni elementari $(+, -, \cdot, /)$.

Assiomi dei numeri reali.

- **Assiomi relativi alle operazioni**

1. Proprietá associativa,
2. Proprietá commutativa;
3. Proprietá distributiva;
4. Esistenza degli elementi neutri: 0 e 1;
5. Esistenza degli opposti: a e $-a$;
6. Esistenza degli inversi: a e $a^{-1} = 1/a = \frac{1}{a}$.

- **Assiomi relativi all'ordinamento**

7. Dicotomia: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
8. Proprietá asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$.

- **Assioma di completezza**

9. Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietá che $a \leq b$, comunque si scelgano un elemento a di A e b di B.

   Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano $a \in A$ e $b \in B$.

   In modo sintetico, siano:

$$A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ tali che } \forall a \in A \wedge \forall b \in B, \ a \leq b$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } a \leq c \leq b, \forall a \in A \wedge \forall b \in B.$$

2.5 I sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

2.5.1 Insieme dei numeri naturali.

Come conseguenza degli assiomi dei numeri reali possiamo affermare che apparterranno ad $\mathbb{R}$ anche tutti i numeri che sono il risultato di operazioni elementari tra due numeri reali.

$$\Downarrow$$

In particolare, apparterranno ad $\mathbb{R}$ i numeri interi positivi $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1)$ che possono ottenersi dall'assioma 4 con l'operazione somma ripetuta piú volte.

Tale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri naturali, come é noto si indica con

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

2.5.2 Insieme dei numeri interi relativi.

Analogamente utilizzando gli assiomi 4 e 5 é possibile costruire un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dagli elementi di $\mathbb{N}$, dai loro opposti e dall'elemento nullo 0. Tale insieme prende il nome di **insieme dei numeri interi relativi** e si indica con:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}.$$

2.5.3 Insieme dei numeri razionali.

Dati due qualunque numeri interi relativi, $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$, il numero risultante dall'operazione della divisione m/n si chiama **numero razionale**.

L'insieme dei numeri razionali costituito dai numeri cosí costruiti viene indicato con $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} \ \ m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\}.$$

Risulta che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Essendo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, su di essi sono definite le operazioni idotte da $\mathbb{R}$. Essi peró non soddisfano tutti gli assiomi dei numeri reali. In particolare:

- In $\mathbb{N}$ non valgono gli assiomi 4 (esistenza dello 0), 5 (esistenza degli opposti), 6 (esistenza degli inversi con l'eccezione del numero 1) e 9 (assioma di completezza).
- In $\mathbb{Z}$ non valgono gli assiomi 6 (esistenza degli inversi con l'eccezione del numero 1) e 9 (assioma di completezza).
- In $\mathbb{Q}$ valgono tutti gli assiomi di operazione e ordinamento ma non vale l'assioma 9 (assioma di completezza).

2.6 Le operazioni permesse in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

2.6.1 Operazioni sui numeri naturali.

Esaminiamo qui di seguito le consequenze di quanto sopra.

In $\mathbb{N}$ non esiste l'opposto né l'inverso di alcun numero.

$$\Downarrow$$

In $\mathbb{N}$ si possono sempre eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione ma non é in genere possibile eseguire le operazioni inverse di sottrazione e divisione, cioé

$$\forall\, m,n \in \mathbb{N},\ \exists\, r \in \mathbb{N} : \ r = m+n,$$
$$\forall\, m,n \in \mathbb{N},\ \exists\, r \in \mathbb{N} \quad r = m \cdot n,$$
ma
$$\forall\, m,n \in \mathbb{N},\ \nexists\, r \in \mathbb{N} \quad r = m-n,$$
$$\forall\, m,n \in \mathbb{N},\ \nexists\, r \in \mathbb{N} \quad r = \frac{m}{n}$$

2.6.2 Operazioni sui numeri interi relativi.

Escluso 1, in $\mathbb{Z}$ non esiste l'inverso di alcun numero.

$$\Downarrow$$

Questo si traduce dicendo che in $\mathbb{Z}$ é in genere possibile eseguire le operazioni di addizione, sottrazione e prodotto ma non di divisione, cioé

$\forall m,n \in \mathbb{Z},\ \exists\ r \in \mathbb{Z}\ \ r = m-n,$

$\forall m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,\ \nexists\ r \in \mathbb{Z}\ \ r = \frac{m}{n}$

2.6.3 Operazioni sui numeri frazionari.

L'insieme $\mathbb{Q}$ soddisfa tutti gli assiomi di operazione e di ordinamento di $\mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

Ció si traduce dicendo che in $\mathbb{Q}$ é possibile eseguire tutte le 4 operazioni elementari.

2.6.4 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ non soddisfano l'assioma di completezza.

L'assioma di completezza, applicato ad $\mathbb{R}$, in modo sintetico afferma quanto segue. Siano:

$$A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ tali che } \forall a \in A \ \wedge\ \forall b \in B\ \ a \leq b$$
$$\Downarrow$$
$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } a \leq c \leq b,\ \forall a \in A \ \wedge\ \forall b \in B.$$

Se lo applichiamo rispettivamente ad $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ notiamo subito che in questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ esso non é soddisfatto.
Ció é semplice per gli insiemi $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{Z}$.

Consideriamo, ad esempio: $A, B \subset \mathbb{N}$ definiti come:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 6\} \tag{2.1}$$
$$B = \{y \in \mathbb{N} : 7 \leq y \leq 10\}. \tag{2.2}$$

Questi insiemi soddisfano le ipotesi dell'assioma di completezza.
Si nota subito che

$$\nexists z \in \mathbb{N} : x \leq z \leq y\ \ \forall x \in A,\ \forall y \in B, \tag{2.3}$$

infatti non esiste alcun numero naturale compreso tra 6 e 7.

Analogamente si puó ragionare per due sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$

Provare che l'assioma di completezza non vale nel caso dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ risulta piú complesso ed omettiamo la dimostrazione.

2.6.5 Non soddisfare l'assioma di completezza cosa comporta ?

Negli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ é possibile seguire solo una parte delle operazioni elementari.

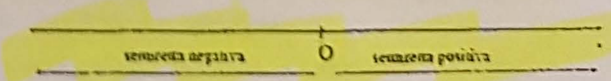
In $\mathbb{Q}$ é invece possibile eseguire tutte le operazioni elementari. Per effetto della non validita dell'assioma di completezza in $\mathbb{Q}$ non é possibile eseguire, in generale, calcoli quali la estrazione di radice o il calcolo dei logaritmi.Ovviamente, a maggior ragione, questi non sono in generale possibili neanche in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

2.7 Rappresentazione degli insiemi numerici sulla retta

Si consideri lo *spazio metrico unidimensionale* rappresentato da retta orientata r sulla quale é stato fissato un punto origine O. Consideriamo inoltre un segmento u che rappresenta l'unitá di misura sulla retta.

$$\Downarrow$$

- L'orientamento della retta definisce il verso di percorrenza: crescente, decrescente.
- L'origine O divide la retta in due semirette: la semiretta positiva sul lato del verso crescente, e la semiretta negativa sul lato opposto.
- L'unitá di misura u permette di misurare le distanze sulla retta.



2.7.1 Rappresentazione dei numeri interi, interi relativi e frazionari.

La rappresentazione dei numeri sulla retta è una corrispondenza tra un elemento x dell'insieme numerico ed un punto P della retta.
Gli elementi neutri (*assioma 4*) 0 ed 1 sono rappresentati rispettivamente dall'origine O e dal punto P_1 la cui distanza dall'origine, nella semiretta positiva, è uguale ad $1 \cdot u$.

Per rappresentare il numero intero positivo $n \in \mathbb{N}$ basterà prendere nella semiretta positiva il punto P_n che si trova ad una distanza $n \cdot u$ dall'origine O.
Il suo opposto, $-n \in \mathbb{Z}$, sarà rappresentato dal punto P_{-n} che si trova nella semiretta negativa alla stessa distanza $n \cdot u$ dall'origine O. Si noti che benché gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ siano infiniti essi non ricoprono interamente la retta r

$$\Downarrow$$

la corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ ed i punti della retta è una corrispondenza univoca ma *non biunivoca*.

2.7.2 Rappresentazione dei numeri frazionari.

In modo assolutamente analogo, preso un elemento $m/n \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, esso sarà rappresentato dal punto P che si trova ad una distanza $m/n \cdot u$ dall'origine, rispettivamente nella semiretta positiva se $m/n > 0$ e nella semiretta negativa se $m/n < 0$.

Gli elementi di $\mathbb{Q}$ ricoprono interamente la retta r ?

La risposta é NO.

La dimostrazione tuttavia esula dai nostri scopi.
Anche in questo caso la corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{Q}$ ed i punti della retta è una corrispondenza univoca. I punti P della retta r che non corrispondono ai elementi di $\mathbb{Q}$ sono detti numeri irrazionali. Esempi notevoli di numeri irrazionali sono: $\sqrt{2} = 1,4141\ldots$, $\pi = 3,14\ldots$, $e = 2,7182\ldots$.

e → Nepero

2.7.3 Retta e Numeri Reali.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere messo in corrispondeza biunivoca con i punti della retta r : ad ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ corrisponde un unico punto P della retta r e viceversa.

• **Nota 2.3** *Nel seguito, anche se non esplicitamente menzionato, ci riferiremo sempre all'insieme dei numeri reali.*

2.8 Intervalli sulla retta

2.8.1 Intervalli limitati.

Definizione 2.3 *Dicesi intervallo limitato un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi sono compresi tra due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

Definizione 2.4 *A seconda che i numeri a e b appartengono o no all'intervallo, si danno definizioni leggermente diverse:*

- *Intervallo chiuso e limitato:*
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
- *Intervallo aperto e limitato:*
$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
- *Intervallo aperto a sinistra e limitato:*
$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
- *Intervallo aperto a destra e limitato:*
$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

2.8.2 Intervalli illimitati.

Definizione 2.5 *Dicesi intervallo illimitato un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi sono maggiori (aperto a destra) o minori (aperto a sinistra) di un numero reale $a \in \mathbb{R}$ assegnato.*

Gli intervalli illimitati possono essere aperti o chiusi, dal lato in cui sono limitati. Le respettive definizioni si deducono facilmente dalle precedenti.

• **Esempio 2.5** *Definire un intervallo illimitato a destra, limitato a sinistra dal numero a ed ivi aperto. Soluzione:*

$$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$$

ovvero

$$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

• **Esempio 2.6** *Definire un intervallo illimitato a destra e chiuso a sinistra. Soluzione*

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}$$

2.9 Intorno di un punto

Definizione 2.6 *Si definisce intorno di un punto x_0 di raggio δ, e lo indicheremo con $I_{x_0}(\delta)$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}$:*

$$I_{x_0}(\delta) = \{\, x \in \mathbb{R} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ x \neq x_0 \,\}. \tag{2.4}$$

ovvero

$$I_{x_0}(\delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta). \tag{2.5}$$

Esercizi

♠ Esercizio 2.1 *Siano assegnati gli insiemi:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 8\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 7\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\}.$$

Calcolare l'insieme $A \cap B \cap C$.
Suggerimento: $\{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\} = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$.

♠ Esercizio 2.2 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 1, 4\}.$$

Calcolare gli insiemi $A - B$ *e* $B - A$.

2.10 Massimi e minimi di un insieme numerico

2.10.1 Massimo di un insieme numerico.

Sia $A \in \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali.

Definizione 2.7 *Diremo che $M \in A$ é un massimo dell'insieme A, se M é maggiore o eguale ad ogni elemento di A. Sinteticamente:*

$$A \in \mathbb{R}, \quad M \text{ massimo di } A \tag{2.6}$$

$$\Updownarrow$$

Se l' intervallo è aperto non ammette Massimo

$$M \in A \ \wedge \ M \geq a, \forall a \in A. \tag{2.7}$$

∗ Nota 2.4 *Per indicare che M é il massimo di A scriveremo: $M = \max A$*

2.10.2 Minimo di un insieme numerico.

Sia $A \in \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali.

Definizione 2.8 *Diremo che $m \in A$ é un minimo dell'insieme A, se m é minore o eguale ad ogni elemento di A. Sinteticamente*

$$A \in \mathbb{R}, \quad m \text{ minimo di } A \tag{2.8}$$

$$\Updownarrow$$

$$m \in A \ \wedge \ m \leq a, \forall a \in A. \tag{2.9}$$

∗ Nota 2.5 *Per indicare che m é il minimo di A scriveremo: $m = \min A$.*

É utile osservare che non tutti gli insiemi sono dotati di massimo e minimo.

• Esempio 2.7 *Sia A l'insieme dei numeri reali positivi*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \quad x > 0\},$$

si osservi che

$$\nexists \min A \ \text{ e } \ \nexists \max A,$$

infatti:

$\nexists M \in A : M > x, \forall x \in A \Rightarrow$ *non esiste il massimo.*

- $0 < x, \forall x \in A$ *ma* $0 \notin A \Rightarrow 0$ *non é un minimo di A. Quindi non esiste il minimo.*

Unicitá del Massimo e del minimo ORALE

TEOREMA 2.1 *Il massimo e minimo di un insieme numerico, se esistono, sono unici.*

Dimostrazione. La tesi del teorema viene si dimostra per assurdo. Supponiamo, per assurdo, che A sia dotato di due massimi: $M_1 = \max A$ e $M_2 = \max A$, con $M_1 \neq M_2$.
Allora valgono contemporaneamente le proprietà:

1a) $M_1 \in A$;
2a) $M_1 \geq a \ \forall a \in A$;
3a) ; se $M_2 \in A \Rightarrow M_1 \geq M_2$.

1b) $M_2 \in A$;
2b) $M_2 \geq a \ \forall a \in A$;
3b) se $M_1 \in A \Rightarrow M_2 \geq M_1$.

Dalle 3a) e 3b) deve aversi contemporaneamente: PROPRIETA' ANTISIM.

$$M_1 \geq M_2 \text{ e } M_2 \geq M_1 \text{ da cui} \Rightarrow \quad M_1 = M_2. \quad \text{c.v.d.}$$

• Esempio 2.8 *Consideriamo l'insieme numerico:*

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = \tfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, \dots\}.$$

Si verifica abbastanza facilmente che:

1. *max* B = 1 *(ovvio !);*
2. $\nexists$ *min* B.

La asserzione 2 può essere provata in modo abbastanza semplice.
Supponiamo, per assurdo, che sia $m = \min B$.
Basterá allora trovare un intero ν tale che sia $\frac{1}{\nu} < m$ per provare che m non é il minimo. $\nu \to \mathbb{N}$
Il valore di tale intero è dato da qualunque ν tale che $\nu > [\frac{1}{m}] + 1$, dove con la scrittura $[\star]$ si intende il *massimo intero contenuto in* $\star$.
Il ragionamento sopra esposto può ripetersi qualunque sia m assunto come ipotesi (per assurdo) come minimo: $\Rightarrow$ non esiste il minimo dell'insieme B.

2.11 Maggiorante e minorante di un insieme numerico

Definizione 2.9 *Un numero reale L si dirá maggiorante per un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *se esso é maggiore o uguale ad ogni elemento di* A, *cioé:*

$$L \text{ maggiorante di A} \iff L \geq a, \forall\, a \in A. \tag{2.10}$$

Definizione 2.10 *Un numero reale l si dirá minorante per un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *se esso é minore o uguale ad ogni elemento di* A, *cioé:*

$$l \text{ minorante di A} \iff l \leq a, \forall\, a \in A. \tag{2.11}$$

* **Osservazione 2.2** *Il massimo e minimo di un insieme, se esistono, sono anche rispettivamente un maggiorante ed un minorante dell'insieme.*

NON é vero il viceversa.

* **Osservazione 2.3** *Un insieme di numeri reali non ammette sempre maggioranti o minoranti.*

• Esempio 2.9 *Sia dato l'insieme* $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

$\Downarrow$

1. $\nexists$ *min* A;
2. $\nexists$ *max* A;
3. $\exists$ *minoranti di* A *(ad esempio tutti i numeri negativi);*
4. $\nexists$ *maggioranti di* A.

2.12 Insiemi limitati

Definizione 2.11 *Un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *di numeri reali si dice limitato superiormente se ammette un maggiorante.*

Definizione 2.12 *Un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *di numeri reali si dice limitato inferiormente se ammette un minorante.*

Definizione 2.13 *Un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *di numeri reali si dice limitato se é limitato sia superiormente che inferiormente, cioé :*

$$A \text{ limitato} \iff \exists\, l, L \in \mathbb{R} : l \leq a \leq L, \forall\, a \in A.$$

♠ **Esercizio 2.3** *Provare che se un insieme* A *ammette un maggiorante* L *allora l'insieme dei maggioranti di* A *é infinito e dotato di minimo.*

2.13 Estremi di un insieme numerico

2.13.1 Estremo superiore.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente ($\Rightarrow$ ammette maggioranti).

Definizione 2.14 *Si dice che* $e_{sup} \in \mathbb{R}$ *é l'estremo superiore di* A, *e scriveremo* $e_{sup} = \sup A$, *se* e_{sup} *é il minimo dell'insieme dei maggioranti di* A, *cioé:*

$$e_{sup} = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1. & e_{sup} \geq a,\ \forall\, a \in A, \\ 2. & \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \bar{a} \in A : e_{sup} - \epsilon < a. \end{cases} \tag{2.12}$$

2.13.2 Estremo inferiore.

Sia $A \in \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali non vuoto e limitato inferiormente ($\Rightarrow$ ammette minoranti).

Definizione 2.15 *Si dice che* $e_{inf} \in \mathbb{R}$ *é l'estremo inferiore di* A, *e scriveremo* $e_{inf} = \inf A$, *se* e_{inf} *é il massimo dell'insieme dei minoranti di* A, *cioé:*

$$e_{inf} = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1. & e_{inf} \leq a,\ \forall\, a \in A \\ 2. & \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \bar{a} \in A : e_{inf} + \epsilon > \bar{a}. \end{cases} \tag{2.13}$$

TEOREMA 2.2 *Sia* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, *un insieme di numeri reali non vuoto, valgono le seguenti proposizioni:*

- *se* A *é limitato superiormente*
  $\Longrightarrow$ A *ammette estremo superiore;*

- *se* A *é limitato inferiormente*
  $\Longrightarrow$ A *ammette estremo inferiore.*

Convenzione. Se $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, é un insieme di numeri reali non vuoto e non limitato superiormente, allora si pone:

$$\sup A = +\infty.$$

Allo stesso modo, se $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, é un insieme di numeri reali non vuoto e non limitato inferiormente, allora si pone:

$$\inf A = -\infty$$

$$\Downarrow$$

In forza della precedente convenzione possiamo dire che:

Ogni insieme di numeri reali diverso dall'insieme vuoto ammette sia l'estremo inferiore che l'estremo superiore.

In particolare

- se é limitato superiormente, ammette estremo superiore finito;
- se é limitato inferiormente, ammette estremo inferiore finito;

2.13.3 Esempi.

- Esempio 2.10 *Consideriamo l'insieme dei numeri reali positivi:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Si puó affermare che:

- $\nexists$ *min* A *e* $\nexists$ *max* A;
- $\exists$ *minoranti di* A *e* $\nexists$ *maggioranti di* A.

Inoltre:

- *inf* $A = 0$ *e sup* $A = +\infty$.

- Esempio 2.11 *Sia* Z_p *l'nsieme dei numeri interi relativi pari:*

$$Z_p = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}.$$

Si puó affermare che:

- $\nexists$ *min* Z_p *e* $\nexists$ *max* Z_p,
- $\nexists$ *minoranti di* Z_p *e* $\nexists$ *maggioranti di* Z_p.

Inoltre:

- *inf* $Z_p = -\infty$ *e sup* $Z_p = +\infty$.

- Esempio 2.12 *Sia*

$$B = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}.$$

Si puó affermare che:

- $\nexists$ *min* B *e* $\exists$ *max* $B = 1$;
- $\exists$ *minoranti di* B *e* $\exists$ *maggioranti di* B.

Inoltre:

- *inf* $B = 0$ *e sup* $A =$ *max* $A = 1$.

- Esempio 2.13 *Sia*

$$C = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}.$$

Si puó affermare che:

$\exists$ *min* $C = 0$ *e* $\nexists$ *max* C;

- $\exists$ *minoranti di* C *e* $\exists$ *maggioranti di* C;

Inoltre:

- *inf* $C =$ *min* $C = 0$ *e* $\exists$ *sup* $A = 1$.

- Esempio 2.14 *Si consideri .*

$$C = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\}.$$

Si puó facilmente provare che:

- $\exists$ *inf* $C = 1$ *e* $\nexists$ *min* C;
- $\exists$ *minoranti di* C *e* $\exists$ *maggioranti di* C.

Inoltre:

- $\exists$ *sup* $C = 2$ *e* $\exists$ *max* $C = 2$.

• **Esempio 2.15** . *Consideriamo i due insiemi numerici:*

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 6x - 7 \leq 0\}$$
$$E_2 = \{x \in \mathbb{R} \quad -x^2 + 12x - 27 > 0\}.$$

Calcolare : $E_1 \cap E_2$ *ed* $E_1 \cup E_2$.

Soluzione. Per risolvere l'esercizio occorre conoscere gli elementi dei due insiemi, cioé risolvere le due disequazioni che definiscono gli insiemi. Inziamo da E_1.

$$x^2 - 6x - 7 \leq 0 \Rightarrow x^1_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^1_1 = -1,\ x^1_2 = 7 \Longrightarrow E_1 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 7\}.$$

Per E_2 si ha:

$$-x^2 + 12x - 27 > 0 \Rightarrow x^2_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-108}}{-2} = \frac{-12 \pm 6}{-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2_1 = 3,\ x^2_2 = 9 \Longrightarrow E_2 = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 9\}.$$

Quindi:

$$E_1 \cap E_2 = \{x \in \mathbb{R}\ 3 < x \leq 7\}$$
$$E_1 \cup E_2 = \{x \in \mathbb{R}\ -1 \leq x < 9\}.$$

2.14 Gli insiemi numerici formati da coppie ordinate

Sino ad ora abbiamo considerato insiemi, numerici e non, formati da una collezione di oggetti singoli. Esistono tuttavia casi nei quali l'elemento caratterizzante l'insieme puó essere costituito esso stessa da una collezione ordinata di oggetti. Un esempio é l'insieme dei coniugi residenti in italia. Per rappresentare questo insieme occorre considerare una **coppia ordinata**, ad esempio (nome marito, nome moglie) oppure (occupazione marito, occupazione moglie) o altro. L'estensione al caso generale di una **n-pla ordinata** é ovvio.
Nel caso degli insiemi numeri si considerano spesso n-ple ordinate di numeri reali per rappresentare oggetti diversi. In modo particolare

ci interessano gli insiemi formati da coppie o terne di numeri reali del tipo:

n-upla $(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots)$

$$(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2, x_3). \tag{2.14}$$

Consideriamo l'insieme numerico:

$$\mathrm{D} = \{(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

É possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme D ed i punti del piano. Per far ció occorre introdurre nel piano un sistema di riferimento e le unitá di misura.

Questo problema fu risolto per primo dal matematico e filosofo francese René Descartes (1596-1650), piú noto con il nome di Cartesio.

Si considerano nel piano due rette orientate non parallele (normalmente si prendono due rette mutuamente ortogonali), denominate assi cartesiani, su ciascuna delle quali si introduce una unitá di misura (solitamente la stessa unitá di misura).
Le due rette vengono dette assi cartesiani: asse delle ascisse ed asse delle ordinate.
Il punto O di incontro delle due rette viene scelto come l'origine di misura delle distanze su ciascuna delle rette.
Il piano **segnato** dagli assi cartesiani viene cosí diviso in 4 quadranti. Convenzionalmente si indicherá con il nome di **primo quadrante** quello che contiene i semiassi positivi degli assi cartesiani.
I quadranti si numerano a partire dal primo in senso antiorario.
Preso un generico punto P del piano si conducono da esso le rette parallele ai due assi cartesiani e si individuano i punti, P_x e P_y, nelle quali tali rette incontrano gli assi.
Le due distanze dall'origine, rispettivamente sull'asse delle ascisse e quello delle ordinate, rappresentano la coppia ordinata (x_1, x_2), piú spesso indicate con (x, y), dell'insieme D sopra definito.

Viceversa, presa una coppia ordinata $(x, y) \in \mathrm{D}$ questa individua nel piano segnato dagli assi cartesiani Oxy(u) i punti P_x, sull'asse delle ascisse, e P_y, sull'asse delle ordinate, e conseguentemente il punto P del piano.

In tal modo si é stabilita una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del piano cartesiano Oxy(u) e le coppie di numeri reali. Chiameremo

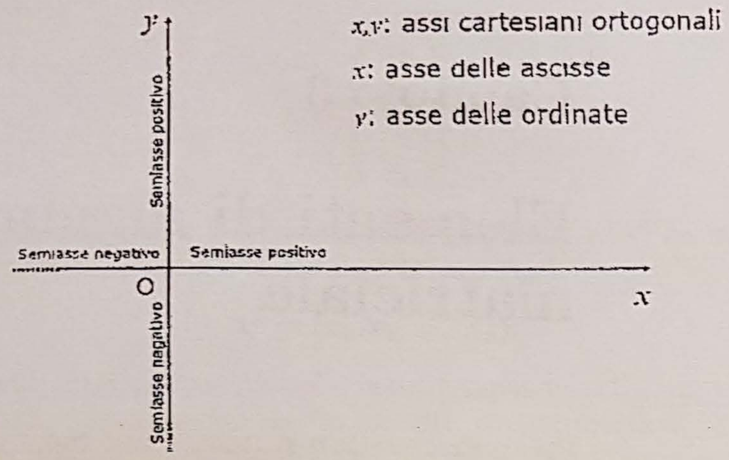


Figura 2.1: Assi Cartesiani

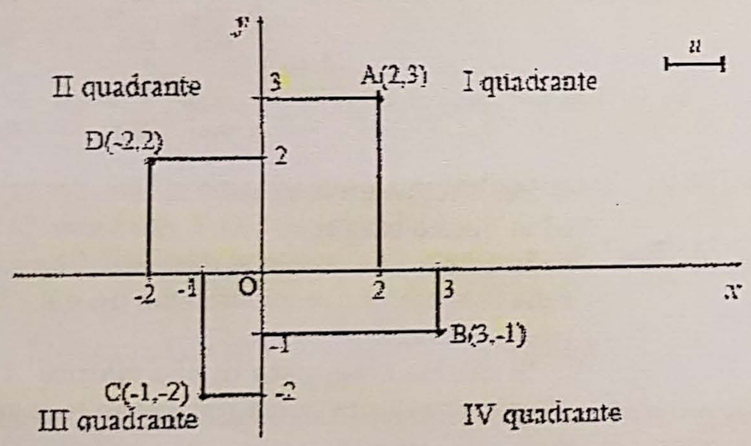


Figura 2.2: Quadranti del piano segnato da assi Cartesiani

- il numero x, l'ascissa del punto P
- il numero y, l'ordinata del punto P
- i numeri x e y, le coordinate del punto P
- diremo che P ha coordinate (x, y) con la scrittura $P(x, y)$.

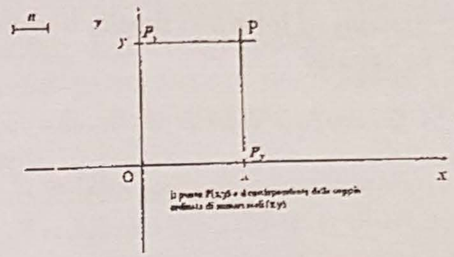


Figura 2.3: Coordinate Cartesiane

2.15 Prodotto Cartesiano

Dati due oggetti a e b di un generico universo $\mathbb{U}$, la scrittura (a, b) prende il nome di coppia ordinata di a e b; a é detta prima coordinata e b é detta seconda coordinata.
Valgono le seguenti proprietá:

1. $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$;
2. $(a, b) \neq (b, a) \ \forall\, a, b : \ a \neq b$.

Focalizzeremo nel seguito la nostra attenzione al caso $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.

Definizione 2.16 *Dati due insiemi* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$ *si chiama prodotto cartesiano di* A *e* B, *e si indica con* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, *l'insieme:*

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{\, (a, b), a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B} \,\}. \tag{2.15}$$

Si osservi che, in generale, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$ come segue ovviamente dalla proprietá 2 sopra enunciata.

∗ **Nota 2.6** *É importante sottolineare che nelle definizioni di coppia ordinata e prodotto cartesiano é fondamentale l'ordine con cui si scrivono gli oggetti e gli insiemi.*
Osserviamo inoltre che la definizione di prodotto cartesiano si generalizza a 3 o piú insiemi.

- **Esempio 2.16** . *Siano* $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ *e* $\mathrm{B} = \{1, 2\}$, *allora:*

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$$
$$\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}.$$

É anche possibile rappresentare il prodotto cartesiano di due o piú insiemi in forma di tabella o mediante una matrice, di cui parleremo in seguito.

• **Esempio 2.17** *Se* $A, B = \mathbb{R}$ *si ha quindi che*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ &\dots \\ \mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Elementi di algebra matriciale

Per **matrice** $m \times n$ si intende una tabella di mn numeri disposti in m righe ed n colonne. Tale matrice si suole indicare con $\mathcal{A}$. Se a_{ij} è l'elemento della riga i-esima e della colonna j-esima, allora:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Per abbreviare la notazione si scrive equivalentemente $\mathcal{A}=(a_{ij})$, ed in questo caso si suppone che i vari da 1 ad m e j vari da 1 ad n. Se accade che $m = n$ si dice che $\mathcal{A}$ è **quadrata**. Gli elementi a_{ij} della matrice che considereremo da qui in avanti, saranno numeri reali.

Si chiama **trasposta** di una matrice $\mathcal{A}$ $m \times n$ la matrice $\mathcal{A}^T$ di dimensione $n \times m$ le cui righe sono le colonne di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

La matrice $\mathcal{A}$ è detta **simmetrica** se $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$. Le matrici simmetriche sono necessariamente quadrate. Si osservi che $(\mathcal{A}^T)^T = \mathcal{A}$ per *qualunque* matrice $\mathcal{A}$. Molto spesso si deve considerare un vettore n-dimensionale $\mathbf{x}$ come una matrice $n \times 1$ avente n righe ed 1

colonna:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

In quanto tale, $\mathbf{x}$ è chiamato **vettore colonna**. $\mathbf{x}^T$ ha una riga ed n colonne, per cui è chiamato **vettore riga**:

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.4}$$

Gran parte dell'utilità delle matrici dipende dalla seguente definizione di moltiplicazione fra matrici, che permette di combinare due matrici ottenendone una sola, ed in modo da preservare le relazioni lineari.

Se $\mathcal{A}=(a_{ij})$ è una matrice $m \times n$ e $\mathcal{B}=(b_{ij})$ è una matrice $n \times p$, allora il prodotto $\mathcal{AB}$ è la matrice $\mathcal{C}=(c_{ij})$ di dimensione $m \times p$, i cui elementi sono dati da:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p.$$

La moltiplicazione matriciale è *associativa*, infatti: $\mathcal{A}(\mathcal{BC})=(\mathcal{AB})\mathcal{C}$. La moltiplicazione matriciale *non* è commutativa.

Il lettore dovrebbe verificare che accade: $(\mathcal{AB})^T=\mathcal{B}^T\mathcal{A}^T$

3.1 Determinanti e matrici inverse

In generale è possibile definire il determinante, denotato con $\det(\mathcal{A})$, per una qualunque matrice quadrata. Sia data una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ del tipo:

$$(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

Scegliamo n suoi elementi in maniera tale che due di essi non appartengano né alla stessa riga, né alla stessa colonna. Il prodotto di questi n elementi é del tipo:

$$a_{b_1 c_1}\, a_{b_2 c_2} \ldots a_{b_n c_n},$$

per quanto supposto sia i numeri b_i che i numeri c_i, $i = 1, \ldots, n$, sono tutti diversi tra loro. I due raggruppamenti di indici $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono due permutazioni degli indici $1, 2, \ldots, n$. Si definisce quindi permutazione un qualunque modo di disporre ordinatamente gli elementi.

Data una permutazione dei numeri naturali $12...n$, e fissati due numeri distinti i e j compresi fra 1 ed n, si dice che la permutazione ha una inversione in i, j se nella permutazione i numeri compaiono in ordine opposto a quello naturale, ovvero se il maggiore dei due compare a sinistra del minore.

Una permutazione dei numeri naturali $1, 2, .., n$ detta di classe pari o di classe dispari a secondo che il numero totale di inversioni che presenta pari o dispari, osserviamo che la permutazione $12n$, che non presenta inversioni, si considera di classe pari.

Consideriamo la permutazione *fondamentale:* $a_{1c_1}\, a_{2c_2} \ldots a_{nc_n}$, cioé quella ottenuta in modo tale che il primo fattore appartiene alla prima riga della matrice, il secondo alla seconda riga, e così via. I prodotti distinti che si possono formare sono tanti quante sono le permutazioni dei numeri $1, 2, \ldots, n$, ovvero $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, tale quantitá viene detta n *fattoriale*.

Si definisce determinante della matrice quadrata la somma degli $n!$ prodotti $a_{1c_1}\, a_{2c_2} \ldots a_{nc_n}$, presi ciascuno con il proprio segno o con il segno opposto a secondo che esso é di classe pari o di classe dispari. Si definisce quindi:

$$\det\mathcal{A} = \sum_{1}^{n!} (-1)^p\, a_{1,c_1}\, a_{2,c_2} \ldots a_{n,c_n} \tag{3.6}$$

essendo p il numero di inversioni contenute nelle permutazioni $c_1\, c_2 \ldots c_n$.

Un determinante $n \times n$ può essere sviluppato nei minori secondo qualunque sua riga o colonna, e quindi può essere espresso come somma di multipli di determinanti $(n-1) \times (n-1)$. Continuando questo processo possiamo alla fine ricondurci al calcolo di (forse parecchi) determinanti 2×2 o 3×3, di cui ora daremo la definizione.

Il determinante di una matrice $\mathcal{A}$ di dimensioni 2×2 risulta essere così definito:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{3.7}$$

Analogamente, un determinante 3×3 risulta essere così definito:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb. \tag{3.8}$$

Si osservi ora che possiamo ricondurci al calcolo iterativo di determinanti di ordine 2 raccogliendo a fattor comune gli elementi della prima riga:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \tag{3.9}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

I determinanti 2×2 così ottenuti vengono chiamati *minori* del determinante 3×3. Questo processo è chiamato *sviluppo* del determinante 3×3 nei minori secondo la prima riga.

Lo sviluppo nei minori può essere effettuato secondo qualunque riga o colonna. Si noti che compare un segno "-" in ogni termine il cui minore è ottenuto eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima, quando $i + j$ è un numero dispari, invece compare il segno "+" quando $i + j$ è pari.. Ad esempio possiamo sviluppare il determinante precedente in minori lungo la seconda colonna nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

Naturalmente questo valore coincide con quello ottenuto in precedenza.

Per i determinanti è possibile enunciare le seguenti proprietà:

- se due righe di un determinante si scambiano fra loro, il determinante cambia di segno;
- se due righe di un determinante sono uguali il determinante ha valore nullo;
- se un multiplo di una riga è sommato ad un'altra riga, il determinante rimane inalterato.

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due matrici $n \times n$ allora $\det(\mathcal{A}^T)=\det(\mathcal{A})$. Inoltre $\det(\mathcal{AB})=\det(\mathcal{A})\det(\mathcal{B})$.

Si dice che la matrice quadrata $\mathcal{A}$ è **singolare** se $\det(\mathcal{A})=0$. Se $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ si dice che $\mathcal{A}$ è **non singolare**.

La matrice identità $n \times n$ è la matrice:

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

Ovviamente $\mathcal{I}$ commuta con ogni matrice $n \times n$: $\mathcal{IA}=\mathcal{AI}=\mathcal{A}$. Inoltre accade che $\det(\mathcal{I})=1$. L'inversa di una matrice quadrata $\mathcal{A}$ *non singolare* è una matrice quadrata non singolare, $\mathcal{A}^{-\infty}$, che soddisfa:

$$\mathcal{AA}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}. \tag{3.13}$$

Inoltre, ogni matrice quadrata non singolare $\mathcal{A}$ ha un'inversa $\mathcal{A}^{-1}$ ed essa é *unica*. L'inversa soddisfa le seguenti relazioni:

$$\det(\mathcal{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathcal{A})}, \tag{3.14}$$

$$(\mathcal{A}^{-1})^T = (\mathcal{A}^T)^{-1} \tag{3.15}$$

3.2 Trasformazioni lineari

Una funzione F il cui dominio è lo spazio m-dimensionale $\mathbb{R}^m$ e la cui immagine è contenuta nello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ è chiamata **trasformazione lineare** da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ se soddisfa la condizione:

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

per tutti i punti x e y di $\mathbb{R}^m$ e tutti i numeri reali λ e μ. A tale trasformazione lineare F corrisponde una matrice $\mathcal{F}$ di dimensione $n \times m$ tale che, per tutti i valori di $x \in \mathbb{R}^m$, si ha:

$$F(x) = \mathcal{F}x,$$

ovvero, espresso in termini delle componenti di x :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Si suole dire che $\mathcal{F}$ è una rappresentazione matriciale della trasformazione lineare F. Se $m = n$ $\mathcal{F}$ è una matrice quadrata, in questo caso $\mathcal{F}$ è non singolare se e solo se F è biunivoca e ha l'intero insieme $\mathbb{R}^m$ come immagine.

La composizione di trasformazioni lineari è ancora una trasformazione lineare e quindi avrà una rappresentazione matriciale. La motivazione reale su cui si basa la definizione di moltiplicazione matriciale è che la rappresentazione matriciale di una *composizione* di trasformazioni lineari è il *prodotto* delle matrici individuali che rappresentano le trasformazioni della composizione.

Se F è una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{F}$ di dimensione $n \times m$, e se G è una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^p$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{G}$ di dimensione $p \times n$, allora la composizione

$$G \circ F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = G(F(x_1, x_2, \ldots, x_m))$$

è essa stessa una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^p$, rappresentata dalla matrice $\mathcal{GF}$ di dimensione $p \times m$. Risulta cioè:

$$G(F(x)) = \mathcal{GF}x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

3.3 Equazioni lineari

Un sistema di n equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.17}$$

può essere scritto in modo compatto come una singola equazione matriciale:

$$\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b},$$

dove:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Confrontiamo l'equazione $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ con l'equazione $ax = b$, per una sola incognita x. La equazione $ax = b$ ha l'unica soluzione $x = a^{-1}b$, purché $a \neq 0$. Analogamente il sistema lineare $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ha una unica soluzione data da:

$$\mathrm{x} = \mathcal{A}^{-1}\mathrm{b},$$

a condizione che $\mathcal{A}$ sia non singolare. Per verificare quest'ultima affermazione moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$, a sinistra per $\mathcal{A}^{-1}$. Se $\mathcal{A}$ è singolare, allora il sistema $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ può avere oppure può non avere una soluzione, a seconda del vettore b, e se una soluzione esiste, allora non sarà unica.

Consideriamo il caso $\mathrm{b} = 0$, b viene definito vettore nullo. Allora, qualunque vettore x perpendicolare a tutte le righe di $\mathcal{A}$, soddisferà il sistema. Siccome le righe di $\mathcal{A}$ giacciono in uno spazio di dimensione minore di n (poiché il $\det(\mathcal{A})=0$) vi sarà almeno una retta di tali vettori x. Quindi la soluzione di $\mathcal{A}\mathrm{x} = 0$ non è unica se $\mathcal{A}$ è singolare. Lo stesso deve valere per il sistema $\mathcal{A}^T\mathrm{y} = 0$: esisteranno vettori y non nulli che soddisfano l'equazione se $\mathcal{A}$ è singolare. Ma allora, se il sistema $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ha qualche soluzione x, si deve avere:

$$(\mathrm{y} \bullet \mathrm{b}) = \mathrm{y}^T\mathrm{b} = \mathrm{y}^T\mathcal{A}\mathrm{x} = (\mathrm{x}^T\mathcal{A}^T\mathrm{y})^T = (\mathrm{x}^T 0)^T = (0).$$

Quindi, $\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ può avere soluzioni solo per quei vettori b che sono perpendicolari a *ogni soluzione* y di $\mathcal{A}^T\mathrm{y} = 0$.

Enunciamo ora, per concludere questo capitolo, un risultato di una certa importanza nella risoluzione dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

Regola di Cramer. Sia $\mathcal{A}$ una matrice non singolare $n \times n$. Allora, la soluzione x del sistema lineare:

$$\mathcal{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

ha componenti date da

$$x_1 = \frac{\det(\mathcal{A}_1)}{\det(\mathcal{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathcal{A}_2)}{\det(\mathcal{A})}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(\mathcal{A}_n)}{\det(\mathcal{A})},$$

dove $\mathcal{A}_j$ è la matrice $\mathcal{A}$ in cui la j-esima colonna è stata sostituita dal vettore colonna b.

Capitolo 4

Funzioni

4.1 Applicazione o Funzione

Il concetto di funzione, di una o piú variabili, viene utilizzato implicitamente nella vita quotidiana, come qui di seguito si mostra.

- Funzioni di una variabile
  - la temperatura dell'atmosfera T dipende dall'altitudine h, $T = T(h)$; h → INDIPENDENTE
  - la lunghezza C della circonferenza dipende dalla lunghezza del raggio r, $C = C(r)$;
  - l'area A del cerchio dipende dal quadrato del raggio r, $A = A(r)$.
- Funzioni di due variabili
  - l'area A di un rettangolo dipende dalla lunghezza dei lati a e b, $A = A(a,b)$.

Applicazione o Funzione

Definizione 4.1 *Siano dati due insiemi* A *e* B. *Si definisce funzione o applicazione da* A *in* B *la terna* (A, B, f), *dove* f *é una legge che associa ad ogni elemento di* A *uno ed uno solo elemento di* B. *Si scrive:*

USARE QUESTA NOTAZIONE ← $f : A \to B$ $\qquad$ $A \xrightarrow{f} B$

oppure

$$x \to f(x) \qquad\qquad x \to y = f(x).$$

f definita in A a valori in B

Nomenclatura

A si chiama *dominio o insieme di definizione* di f e si indica anche con D_f. D → dominio

B si chiama *insieme di arrivo* di f. B → codominio

$x \in A$ é detta *variabile indipendente* o *argomento*;

$y \in B$ é detta *variabile dipendente* o *valore* o *immagine* di x.

$f(A)$ é detto *codominio* o *insieme dei valori* o *insieme delle immagini* di f. Questo é l'insieme definito da:

$$f(A) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\} \subseteq B.$$

• **Esempio 4.1** *Siano* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Possiamo definire una funzione mediante assegnazione diretta delle immagini degli elementi di* A:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 2$$

ottenendo come codominio $f(A) = \{1, 2, 3\}$.

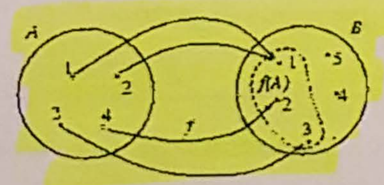


Figura 4.1: Un Esempio di Applicazione o funzione

• **Esempio 4.2** *La legge che associa ad ogni individuo il suo gruppo sanguigno é una funzione:*

$$f_1 : I = \{x : \text{ é un individuo}\} \to \{A, AB, B, 0\}.$$

• **Esempio 4.3** *La legge che associa ad ogni numero naturale il suo doppio:*

$$f_2 : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \to 2n \text{ definisce } f_1(\mathbb{N}) = \text{ numeri pari.}$$

4.1.1 Grafico di una funzione.

Sia data una funzione $f : A \to B$. Si definisce *grafico della funzione* f l'insieme G_f definito da:

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Nel caso in cui $A, B \subset \mathbb{R}$ questo insieme rappresenta una curva nel piano (x, y).

Non tutte le curve nel piano possono essere grafici di funzioni.

Infatti la caratteristica della funzione, ad un sol valore, é la unicitá, cioé $\forall x \in A \exists$ uno ed un solo $y = f(x)$.

Il grafico in figura 4.2 rappresenta il grafico di una funzione in quanto soddisfa la condizione di unicitá; quello in figura 4.3non rappresenta un grafico di funzione in quanto non soddisfa la condizione di unicitá. Si vede infatti, in questo secondo caso, che esistono dei valori di x ai quali corrispondono piú valori della y.

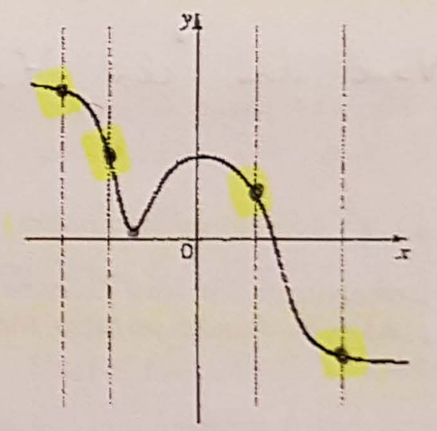


Figura 4.2: Grafico che rappresenta una funzione

4.1.2 Funzione Iniettiva.

Definizione 4.2 *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice iniettiva se:*

$$\forall x', x'' \in A, \; x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x''). \tag{4.1}$$

Ció significa che valori distinti della variabile indipendente x corrispondono valori distinti della $f(x)$.

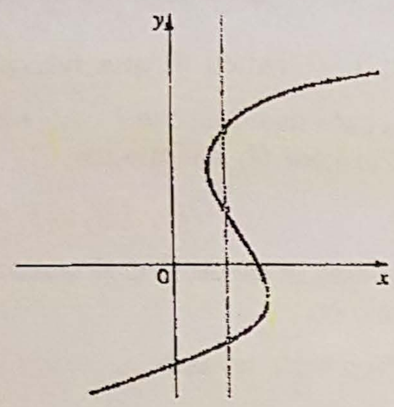
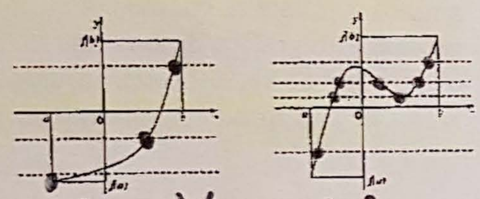


Figura 4.3: Grafico che non rappresenta una funzione



• Vuol dire che $\forall x$ si ha una $f(x)$ distinta

Figura 4.4: Grafico di funzione iniettiva (sinistra) e non iniettiva (destra)

4.1.3 Funzione Suriettiva.

Definizione 4.3 *Una funzione $f : A \to B$ si dice suriettiva se $f(A) = B$. Risulta pertanto che l'insieme immagine, o codominio, é B.*

• **Esempio 4.4** . *Siano $f, g : [a, b] \to [a, b]$ due funzioni. Il grafico di sinistra rappresenta f che risulta essere suriettiva, mentre quello di destra rappresenta la funzione g che non é suriettiva.*

4.1.4 Funzione Biiettiva.

Definizione 4.4 *Diremo che $f : A \to B$ é una funzione biiettiva se f é sia iniettiva che suriettiva.*

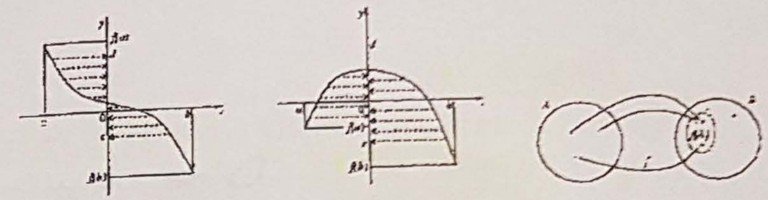


Figura 4.5: Grafico di funzione non iniettiva (sinistra), non suriettiva (centro), non iniettiva né suriettiva.

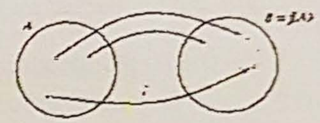


Figura 4.6: Grafico di funzione biiettiva.

4.1.5 Funzioni pari, dispari, periodiche.

Si consideri la generica funzione $f : A \to B$.
Si dice che $f(x)$ é una funzione é:

$$\text{pari se } f(x) = f(-x), \ \forall x \in A \tag{4.2}$$
$$\text{dispari se } f(x) = -f(-x), \ \forall x \in A \tag{4.3}$$
$$\text{periodica di periodo T se } f(x+T) = f(x), \ \forall x \in A. \tag{4.4}$$

4.1.6 Funzioni Monotone.

Definizione 4.5 *Si dice che $f : A \to B$ é crescente (non decrescente) se :*

$$\forall x', x'' \in A, x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'') \ \textit{crescente} \tag{4.5}$$
$$\forall x', x'' \in A, x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'') \ \textit{non decrescente.} \tag{4.6}$$

Definizione 4.6 *Si dice che $f : A \to B$ é decrescente (non crescente) se :*

$$\forall x', x'' \in A, x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'') \ \textit{decrescente} \tag{4.7}$$
$$\forall x', x'' \in A, x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'') \ \textit{non crescente.} \tag{4.8}$$

Definizione 4.7 *Si definiscono funzioni monotone le funzioni crescenti, non decrescenti, decrescenti o non crescenti.*

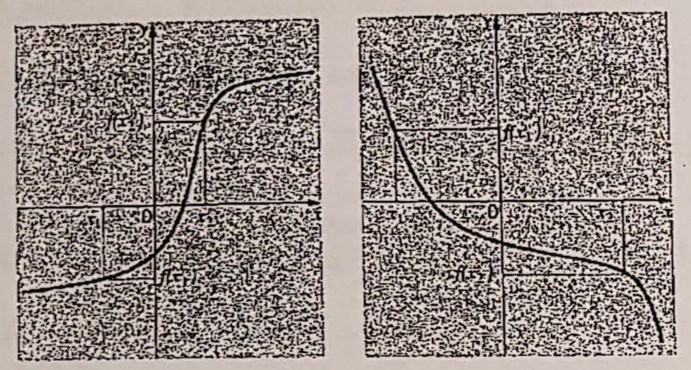


Figura 4.7: Grafico di funzione crescente (sinistra) e decrescente (destra).

4.1.7 Funzioni limitate.

Definizione 4.8 *La funzione $f : A \to B$ si dice*

limitata superioremente se: $\forall x \in A, \exists k \in \mathbb{R} : f(x) \leq k$ (4.9)

limitata inferiormente se: $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{R} : m \leq f(x)$ (4.10)

limitata se: $\forall x \in A, \exists k, m \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq k.$ (4.11)

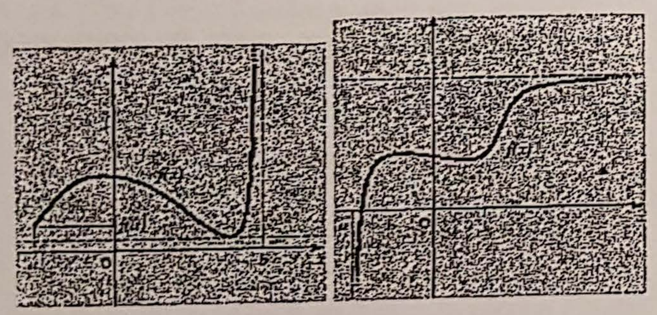


Figura 4.8: Grafico di funzione limitata inferiormente (sinistra) o superiormente (destra).

4.1.8 Punti di Massimo e minimo assoluto.

Si consideri la generica funzione $f : A \to B$. Si definisce $x_0 \in A$ punto di massimo assoluto per f se:

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in A. \tag{4.12}$$

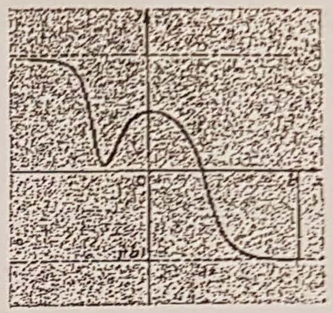


Figura 4.9: Grafico di funzione limitata superiormente e inferiormente.

Analogamente si definisce $x_0 \in A$ un punto di minimo assoluto per f se:

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in A. \tag{4.13}$$

* **Osservazione 4.1** *Una funzione f non può avere più di un punto di massimo e minimo assoluto.*

4.1.9 Punti di Massimo e minimo relativi.

Si consideri la generica funzione $f : A \to B$.
Si dice che $x_0 \in A$ è punto di massimo relativo per f se:

$$\exists\, I_\delta(x_0) \qquad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cup \{x_0\}. \tag{4.14}$$

Analogamente si dice che $x_0 \in A$ è punto di minimo relativo per f se:

$$\exists\, I_\delta(x_0) \qquad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cup \{x_0\}. \tag{4.15}$$

* **Osservazione 4.2** *Una funzione f può avere più di un punto di massimo e minimo relativo.*

4.2 Composizione di funzioni

Siano date due funzioni :

$$f : X \to B, \quad e \quad g : Y \to Z,$$

cioè equivalentemente le funzioni:

$$y = f(x), \;\; x \in X, \; y \in B, \quad e \quad z = g(y), \;\; y \in Y, \;\; z \in Z.$$

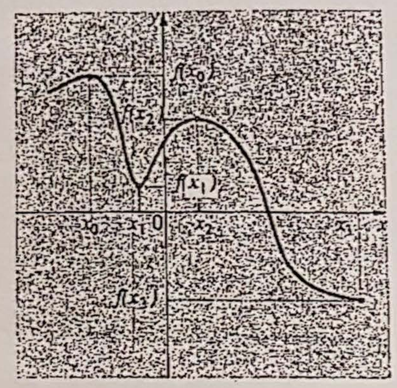


Figura 4.10: Punti di massimo e minimo, assoluti e relativi.

Se $Y \cap f(X) \neq \emptyset$ allora ha senso considerare la funzione composta:

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ con } x \in \bar{X} \tag{4.16}$$

$$\text{essendo} \tag{4.17}$$

$$\bar{X} = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}, \tag{4.18}$$

cioé l'insieme dei valori $x \in X$ tali che $f(x) \in Y$.

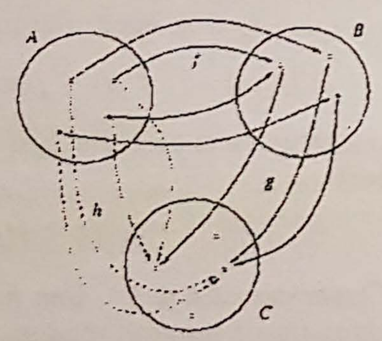


Figura 4.11: Composizione di funzioni.

- **Esempio 4.5** *Siano assegnate:*

$$y = f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in A, \quad A = [0, +\infty)$$
$$z = g(y) = y + 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

L'immagine della prima funzione é contenuta in $\mathbb{R}$, *cioé* $f(A) \subset \mathbb{R}$. *É quindi possibile considerare la funzione composta:*

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1.$$

Il dominio della funzione composta $g(f(x))$ *é l'immagine della funzione* f, *cioé* $f(A)$. *Esso quindi potrebbe non coincidere con il dominio della funzione* $g(y)$ *iniziale ma, come in questo caso, con una restrizione (cioé un sottoinsieme) dello stesso. Si ha quindi*

$$g(y) = y + 1 \; y \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{dominio di } g(y) = D_g = \mathbb{R}$$
$$y = \sqrt{x} \in A \Rightarrow \text{immagine di } f(x) = f(A) = [0, \infty).$$

osserviamo pertanto che

$$[0, \infty) \subset \mathbb{R} \Rightarrow D_{(g \circ f)(x)} \neq f(A).$$

4.2.1 Casi Patologici.

Possono verificarsi casi patologici, si consideri a tal proposito il seguente esempio.

- **Esempio 4.6** *calcolare la composizione delle seguenti due funzioni:*

$$y = f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
$$z = g(y) = \frac{1}{y}, \; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Si ottiene quindi:

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Da quanto appena scritto si sarebbe tentati di dire che $D_{(g \circ f)(x)} = \mathbb{R}$ ma questa affermazione é errata.
Nel caso in esame infatti $f(x)$ é non definita in $x = 0$ e tale deve essere $(g \circ f)(x)$ perché altrimenti la composizione non sarebbe possibile in quel punto.

4.3 Esempi di funzioni

4.3.1 Funzioni lineari.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = a\,x + b \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{4.19}$$

che prende il nome di **funzione lineare**. Si vede subito che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = ax + b\}. \end{aligned}$$

Nel piano cartesiano é rappresentata dalla retta di equazione

$$y = ax + b.$$

Inoltre:

- se $a > 0$ allora $f(x)$ é monotona crescente;
- se $a < 0$ allora $f(x)$ é monotona decrescente;
- se $a = 0$ allora $f(x)$ é la funzione costante $f(x) = b$.
- la funzione $f(x)$ é non limitata, cioé non ammette né massimo né minimo assoluto.

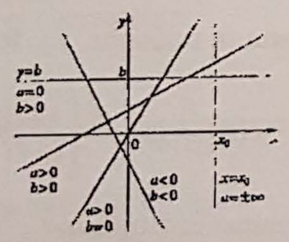


Figura 4.12: Funzioni lineari.

4.3.2 Funzioni identitá.

Unaparticolare funzione lineare si ottiene per i valori $a = 1$, $b = 0$. In questo caso $y = f(x) = x$, la funzione risulta una applicazione dall'insieme A in sé stesso, cioé:

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}.$$

La funzione identitá sull'insieme A si indica con id_{A}.
Si vede subito che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x\} \text{che é la prima bisettrice} \end{aligned}$$

pertanto si nota facilmente che id_{A} é non una funzione limitata.

4.3.3 Funzioni Quadratiche.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = a\,x^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \tag{4.20}$$

essa prende il nome di **funzione quadratica**. Si osserva che:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) &\subset \mathbb{R} \\ G_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = ax^2 + bx + c\}. \end{aligned}$$

tale funzione nel piano cartesiano é rappresentata dalla parabola di equazione

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Si ha inoltre che:

- se $a > 0$ la funzione $f(x)$ é limitata inferiormente, decrescente in $(-\infty, -b/2a)$ e crescente in $(-b/2a, +\infty)$;
- se $a < 0$ la funzione $f(x)$ é limitata superiormente, crescente in $(-\infty, -b/2a)$ e decrescente in $(-b/2a, +\infty)$.

4.3.4 Funzione modulo o valore assoluto.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

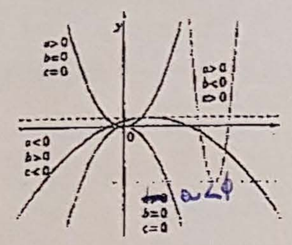


Figura 4.13: Funzioni quadratiche

essa prende il nome di **funzione valore assoluto** o **funzione modulo**. Si vede subito che:

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$$
$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = |\, x \,|\}.$$

Inoltre si ha che:

- é úna funzione pari;
- non é limitata superiormente;
- é crescente in $(0, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0)$.

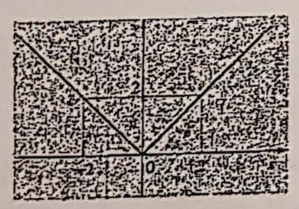


Figura 4.14: Funzione valore assoluto.

4.3.5 Funzione segno di x.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \frac{|\, x \,|}{x}, \tag{4.21}$$

prende il nome di **funzione segno di x**. Si osservi che:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}.$$

Inoltre si ha che:

- é úna funzione dispari;
- é limitata;
- é costantemente uguale ad 1 per $x > 0$ e, per $x < 0$, é costantemente uguale a -1.

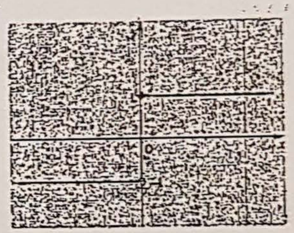


Figura 4.15: Funzione Segno.

4.3.6 Funzione parte intera di x.

Si considera la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x & \text{se } x \geq 0 \\ inf\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

prende il nome di **funzione parte intera di x**. Si nota subito che:

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}.$$

Inoltre:

- é úna funzione non decrescente;
- non é limitata.

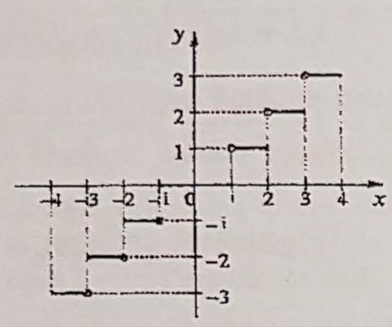


Figura 4.16: Funzione parte intera

4.3.7 Funzione floor o funzione pavimento.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}, \qquad (4.22)$$

prende il nome di **funzione floor o funzione pavimento**. Risulta

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}.$$

Inoltre:

- é úna funzione non decrescente;
- non é limitata.

Il grafico é simile a quello della funzione parte intera.

4.3.8 Funzione Heavyside.

La Funzione Heavyside é una applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Si nota subito che:

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}.$$

Inoltre:

- é úna funzione non decrescente;
- é limitata.

4.4 Funzioni per le Scienze della Vita.

Molti fenomeni biologici e farmacologici sono rappresentati da leggi di crescita, si pensi ad esempio alla crescita della massa tumorale, o leggi di decadimento, come, ad esempio, la concentrazione del farmaco negli organi.

Per questo motivo richiamiamo le funzioni che *tipicamente* rappresentano questi andamenti: le funzioni trigonometriche, la funzione esponenziale e la funzione logaritmica.

4.4.1 Funzioni Trigonometriche

Si definiscono equazioni *trascendenti* quelle in cui figurano funzioni trigonometriche, esponenziali o logaritmiche. Soffermiamoci su quelle trigonometriche, cioé sulle funzioni *seno*, *coseno* e *tangente* di un arco x che, d'ora innanzi misureremo in *radianti*.

Richiameremo alcuni loro valori particolari:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

gli altri valori si calcolano mediante l'uso di tavole trigonometriche. Ricordiamo inoltre le seguenti relazioni note, da intendersi per i valori di x ed y per cui hanno senso ed in cui, per convenzione, abbrevieremo le funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente in x, rispettivamente con $sen\ x$, $cos\ x$ e $tg\ x$:

$$sen\,(x + 2\,k\,\pi) = sen\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$cos\,(x + 2\,k\,\pi) = cos\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$tg\,(x + k\,\pi) = tg\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$sen\,(-x) = -sen\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$cos\,(-x) = cos\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$tg\,(-x) = -tg\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$sen\,(x) = sen\,(\pi - x) = cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = -cos\,(\frac{\pi}{2} + x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$cos\,(x) = -cos\,(\pi - x) = sen\,(\frac{\pi}{2} - x) = sen\,(\frac{\pi}{2} + x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alcune identitá

$$sen^2 x + cos^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}; \ tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}, \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Formule di addizione e sottrazione

$$sen(x \pm y) = sen\,x\,cos\,y \pm cos\,x\,sen\,y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
$$cos(x \pm y) = cos\,x\,cos\,y \mp sen\,x\,sen\,y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Formule di duplicazione

$$sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos\,x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$cos\,2x = cos^2 x - sen^2 x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Formule di bisezione

$$sen^2 x = \frac{1 - cos\,2x}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$cos^2 x = \frac{1 + cos\,2x}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$tg^2 x = \frac{1 - cos\,2x}{1 + cos\,2x}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Altre identitá

$$cos\,x = \left(\frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + (tg\,x)^2}}, \ \forall x \neq \pi + 2k\pi, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$sen\,x = \left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{tg\,x}{\pm\sqrt{1 + (tg\,x)^2}}, \ \forall x \neq \pi + 2k\pi, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$sen^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}, \ \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$
$$cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}, \ \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Identitá sulle somme espresse mediante i prodotti

$$sen(x + y) + sen(x - y) = 2\,sen\,x\,cos\,y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$sen(x + y) - sen(x - y) = 2\,cos\,x\,sen\,y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$cos(x + y) + cos(x - y) = 2\,cos\,x\,cos\,y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$cos(x - y) - cos(x + y) = 2\,sen\,x\,sen\,y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Formule di Prostaferesi

Prima Formula di Prostaferesi

$$senx + seny = 2\,sen\,\frac{x + y}{2}\,cos\,\frac{x - y}{2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Seconda Formula di Prostaferesi

$$senx - seny = 2\,cos\,\frac{x + y}{2}\,sen\,\frac{x - y}{2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Terza Formula di Prostaferesi

$$cosx + cosy = 2\,cos\,\frac{x + y}{2}\,cos\,\frac{x - y}{2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Quarta Formula di Prostaferesi

$$cosx - cosy = -2\,sen\,\frac{x + y}{2}\,sen\,\frac{x - y}{2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4.4.2 Funzione Esponenziale

Una funzione esponenziale é una funzione della forma

$$f(x) = a^x \quad \text{essendo} \quad a \text{ una costante positiva.} \tag{4.23}$$

∗ **Nota 4.1** *Si faccia attenzione a non confondere la funzione esponenziale con la funzione potenza $g(x) = x^a$ dove la variabile indipendente é la base e non l'esponente della potenza.*

Se $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ ovvero $x \in \mathbb{Q}$ il significato della funzione esponenziale é ben noto. Lo richiamiamo per facilitá:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^n &= \Pi_{i=1}^n a \quad n \in \mathbb{N} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad n \in \mathbb{N} \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ in generale, cioé x é un numero reale, ad esempio $x = \pi$, il significato di a^x non é una nozione elementare la cui definizione esatta esula dai nostri obiettivi.

Tuttavia osserviamo che se $f(x) = a^x$ ed x é un numero reale *puro* (ovvero $x \notin \mathbb{N}$, $x \notin \mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{Q}$ allora si puó scrivere $x = \pm A, b_1 b_2 \ldots b_n, \ldots$. Sia r_n il numero razionale che si ottiene da x trascurando le cifre dopo la $n-$esima, cioé: $r_1 = \pm A, b_1$, $r_2 = \pm A, b_1 b_2, \ldots$ $r_n = \pm A, b_1 b_2, \ldots b_n$.
La successione di numeri razionali $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e tende ad x.
La potenza ad esponente reale a^x si definisce, quindi, come segue:

$$a^x := \lim_{r_n \to x} a^{r_n} \tag{4.24}$$

cioé il limite cui tende la funzione a^{r_n} quando r_n tende ad x.

∗ **Osservazione 4.3** *Si noti che la scrittura ha senso in quanto x é un punto di accumulazione per l'insieme $\mathbb{Q}$ anche se $x \notin \mathbb{Q}$*

Le funzioni esponenziali soddisfano le seguenti note identitá. **Leggi degli esponenti.** Assegnati due numeri reali $a > 0$ e $b > 0$, allora $\forall x, r \in \mathbb{R}$ si ha:

$$i)\ a^0 = 1 \qquad ii)\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad iii)\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$iv)\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad v)\ (a^x)^y = a^{xy} \qquad vi)\ (ab)^x = a^x b^x$$

Inoltre:

$$\text{Se } a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

$$\text{Se } 0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

4.4.3 Funzione Logaritmo

Considerato un numero reale $a > 0$ e $a \neq 1$, la funzione $f(x) = a^x$ é monotona, quindi invertibile. La sua funzione inversa é la *funzione logaritmica.*

Definizione 4.9 ***Funzione Logaritmica o logaritmo.*** *Assegnato il numero reale $a > 0$ ed $a \neq 1$, al variare di x in $\mathbb{R}^+$, la funzione $y = \log_a x$, chiamata logaritmo di x in base a é la funzione inversa di a^x, ovvero:*

$$y = \log_a x \iff x = a^y \ \forall x > 0 \ a > 0, a \neq 1. \tag{4.25}$$

Si noti che $x \in]0, \infty[$ mentre $y \in \mathbb{R}$. Inoltre valgono le proprietá di composizione delle funzioni inverse:

$$\log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0. \tag{4.26}$$

Anche per i logaritmi valgono alcune identitá fondamentali note come **Leggi dei logaritmi.**

Dati due numeri reali $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, si ha:

$$i)\ \log_a 1 = 0 \qquad ii)\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$iii)\ \log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x \qquad iv)\ \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$$

$$v)\ \log_a(x^y) = y \log_a x \qquad vi)\ \log_a x = \frac{\log_b}{\log_b a}$$

Inoltre:

$$\text{se } a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty,$$

$$\text{se } 0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

4.4.4 Il numero di Napier

Si consideri la successione di termine generale $s_n = (1 + 1/n)^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Tale successione é crescente ma limitata. Essa ammette

pertanto un limite finito.
Si puó provare che:

$$s_1 = 2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Il numero di Napier o Neper (John Neper 1550-1617), indicato con la lettera e é il limite della successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\ldots \tag{4.28}$$

Il numero e é un numero reale; essendo $e > 0$ puó essere utilizzato come base di una funzione esponenziale. Essendo inoltre $e \neq 1$ puó anche essere utilizzato come base di un logaritmo.

4.5 Funzione inversa

Definizione 4.10 *Sia f : $A \to B$, $B \equiv f(A)$ una funzione biiettiva, quindi biunivoca. Esiste pertanto la funzione inversa*

$$f^{-1} : B \to A \tag{4.29}$$

$$y \to f^{-1}(y) = x, \tag{4.30}$$

tale che $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Proprietá delle funzioni inverse.

1. La funzione composta della funzione inversa, f^{-1}, con la funzione stessa, f, é la funzione identitá sul dominio di A di f:

$$f^{-1} \circ f = id_A. \tag{4.31}$$

Analogamente, la funzione composta della funzione f con la sua inversa, f^{-1}, é la funzione identitá sul dominio di B di f^{-1}:

$$f \circ f^{-1} = id_B \tag{4.32}$$

2. Dire che f é dotata di funzione inversa equivale a dire che l'equazione $y = f(x)$, $\forall y \in B$, ha un'unica soluzione $x \in A$.

3. Dal punto di vista geometrico, f ha inversa se il suo grafico G_f é intersecato dalle rette parallele all'asse delle x una sola volta (fig. 4.17);

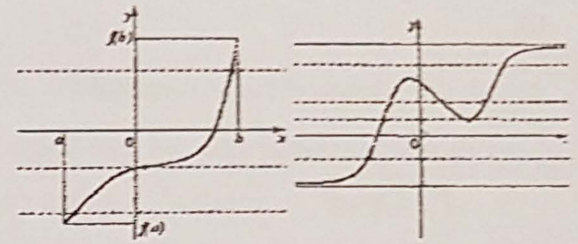


Figura 4.17: funzione invertibile (destra) e non invertibile (sinistra)

4. I grafici di f e della sua inversa f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$ (fig. 4.18), cioé se $(a, b) \in G_f$, allora $(b, a) \in G_{f^{-1}}$. Infatti:

$$(a, b) \in G_f \Rightarrow b = f(a) \Rightarrow f^{-1}(b) = a \Rightarrow (b, a) \in G_{f^{-1}}.$$

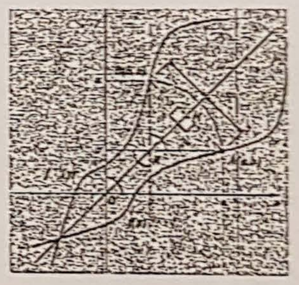


Figura 4.18: Simmetrie nel grafico della funzione inversa

5. Il dominio di f^{-1} é B e quindi f^{-1} si applica agli elementi $y \in B$, ossia y é la variabile indipendente per f^{-1} ed x é quella dipendente.
Per disegnarne il grafico nello stesso riferimento cartesiano in cui si disegna il grafico di $f(x)$ occorre non confondere il ruolo delle variabili; in tale riferimento i valori della variabile indipendente sono sull'asse delle ascisse e quelli delle variabili dipendenti sull'asse delle ordinate, senza riguardo al nome che esse hanno nell'espressione delle funzioni.
Come regola pratica, per disegnare il grafico della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$, basta riguardare f^{-1} come una nuova funzione g che ha la stessa espressione di f^{-1}, ma con i nomi delle

variabili scambiati e disegnare quindi $y = g(x)$. Questo equivale esattamente a dar nome x alla variabile indipendente di f^{-1} e y a quella dipendente.

6. Considerando la figura 4.18 sia $A = (a, b)$ un punto del grafico di f. Allora per ottenere le coordinate del corrispondente punto B sul grafico di f^{-1} basta osservare che i due triangoli di vertici A, H, R e H, B, R sono uguali e rettangoli, quindi l'ascissa di B b e l'ordinata di B $b + \overline{BR} = b + \overline{AR} = a$.

7. Per trovare l'espressione della funzione inversa $f^{-1}(y)$ di una funzione reale invertibile $y = f(x)$ occorre esplicitare l'espressione rispetto ad x.

4.6 Operazioni tra funzioni

Descriviamo le principali operazioni che coinvolgono una o piú funzioni. Sia $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definiamo:

- funzione prodotto della funzione f per uno scalare $k \in \mathbb{R}$ la funzione
$$g : A \to B, \quad g(x) = k\, f(x);$$
- funzione *opposta* della funzione f quella che si ottiene dal caso precedente per $k = -1$;
- funzione *inversa* della funzione f, la funzione
$$g : (A \setminus \{x : f(x) = 0\}) \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

* **Osservazione 4.4** *Naturalmente sono stati esclusi dal dominio della funzione inversa i valori di x che annullano il denominatore cioé l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$.*

Si considerino due funzioni
$$f : A \to A', \; A, A' \subseteq \mathbb{R}$$
e
$$g : B \to B', \; B, B' \subseteq \mathbb{R}$$
tali che $A \cap B \neq \emptyset$.
Per ogni $x \in A \cap B$ é possibile definire:

- la somma (differenza) delle funzioni f e g come la funzione
$$h : A \cap B \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = f(x) \pm g(x);$$
- il prodotto delle funzioni f e g come la funzione
$$p : (A \cap B) \to \mathbb{R}, \qquad p(x) = f(x)g(x);$$
- il rapporto tra le funzioni f e g come la funzione
$$r : A \cap (B \setminus \{x : g(x) = 0\}) \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

* **Osservazione 4.5** *Anche in quest'ultimo caso si sono esclusi dal dominio della funzione r i valori che annullano il denominatore, cioé l'insieme $\{x : g(x) = 0\}$.*

4.6.1 Quattro casi interessanti.

É interessante considerare quattro *operazioni* che si possono fare su una funzione reale $f(x,)$ che per comoditá consideriamo definita in un intervallo, cioé $A = [a, b]$, trasformandola in una nuova funzione $g(x)$, definita anch'essa in un intervallo $B = [c, d]$ non necessariamente uguale ad $[a, b]$, mediante una costante $k \in R$:

1. **Traslazione verticale:** $g(x) = f(x) + k$.
Questa operazione non cambia il dominio di f, *ovvero* $[c, d] = [a, b]$, mentre $f(A) \neq g(B)$.

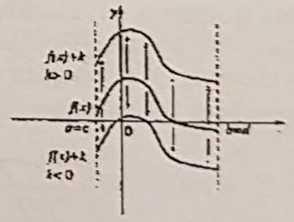


Figura 4.19: Traslazione verticale: $g(x) = f(x) + k$.

2. **Traslazione orizzontale:** $g(x) = f(x + k)$.
Questa operazione cambia il dominio di f :$[c, d] = [a+k, b+k]$. Essa é quindi possibile se é possibile definire la funzione f nel nuovo dominio. Si osservi che l'immagine delle due funzioni, é in generale, diversa: $f(A) \neq g(B)$.

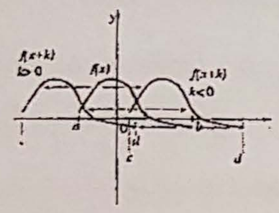


Figura 4.20: Traslazione orizzontale: $g(x) = f(x + k)$.

3. **Trasformazione di scala:** $g(x) = kf(x)$.
Questa operazione non cambia il dominio di f, $[c, d] = [a, b]$, Essa é quindi sempre possibile. L'immagine delle due funzioni, é in generale, diversa: $f(\mathrm{A}) \neq g(\mathrm{B})$.

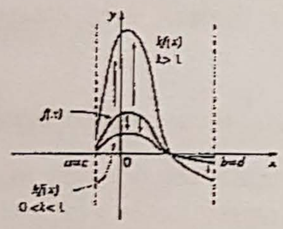


Figura 4.21: Trasformazione di scala: $g(x) = kf(x)$.

4. **Dilatazione o contrazione:** $g(x) = f(k\,x)$.
Questa operazione cambia il dominio di f, $[c, d] = [ka, kb]$. Essa é quindi possibile se é lecito definire la funzione f nel nuovo dominio. L'immagine delle due funzioni é in generale diversa: $f(\mathrm{A}) \neq g(\mathrm{B})$.

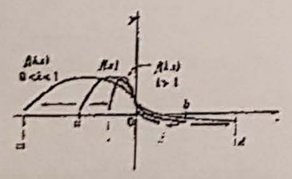


Figura 4.22: Dilatazione / contrazione: $g(x) = f(kx)$.

Capitolo 5

Successioni e Serie Numeriche

5.1 Successioni

Si consideri un particolare tipo di funzioni, denotate con $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e denominate **successioni**, che sono delle applicazioni dall'insieme dei numeri naturali al'insieme dei numeri reali, si denoti tale funzione con il seguente simbolo:

$$s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Si noti che, essendo il dominio l'insieme dei numeri naturali, l'immagine della applicazione viene naturalmente costruita come un insieme ordinato di numeri reali.

- **Esempio 5.1** *Si consideri la funzione s_n definita dalla legge:*

$$s_n = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il dominio di s_n é, banalmente, l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Consideriamo l'immagine di s_n, cioé $s_n(\mathbb{N})$, e notiamo facilmente che:

1. *al variare di $n \in \mathbb{N}$, l'immagine di s_n genera l'insieme numerico ordinato che puó indicarsi come:*

$$\frac{1}{n} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\};$$

2. *l'immagine di s_n é un insieme numerico non finito, limitato, dotato di massimo (non di minimo) ed il cui estremo inferiore é $inf(s_n(\mathbb{N})) = 0$.*

• **Esempio 5.2** *Si consideri la funzione s_n definita dalla legge:*

$$s_n = \log(\frac{1}{n}), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il dominio di s_n é, banalmente, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Considerata l'immagine di s_n, cioé $s_n(\mathbb{N})$, si nota facilmetne che:

1. *al variare di $n \in \mathbb{N}$ l'immagine di s_n genera l'insieme numerico ordinato che ~~piú~~ si puó denotare con:*

$$\log(\frac{1}{n}) = \{0, \log(\frac{1}{2}), \log(\frac{1}{3}), \ldots, \log(\frac{1}{n}), \ldots\};$$

2. *l'immagine di s_n é un insieme numerico non finito, non limitato superiormente e dotato di minimo (tale minomo é 0).*

5.1.1 Successioni Monotone.

É possibile applicare alle successioni le nozioni di crescenza, non decrescenza, decrescenza, non crescenza che riprendiamo data la loro importanza. Una successione si definisce:

- monotona **crescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \text{ risulta } \ y_{n_2} > y_{n_1}; \tag{5.2}$$

- monotona **non decrescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \text{ risulta } \ y_{n_2} \geq y_{n_1}; \tag{5.3}$$

- monotona **decrescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \text{ risulta } \ y_{n_2} < y_{n_1}; \tag{5.4}$$

- monotona **non crescente** se

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1 \ \text{ risulta } \ y_{n_2} \leq y_{n_1}. \tag{5.5}$$

5.2 Concetto di Limite

Una funzione é, come giá definita, una terna (A, B, f) formata da un dominio o insieme di definizione A, un insieme di arrivo B ed una legge f che associa a ciascun valore della variabile indipendente $x \in A$,uno ed un sol valore della variabile indipendente $y \in B$ appartenente al codominio della funzione.
É lecito porsi le seguenti domande:

- assegnato un valore x_0 appartenente o meno al dominio D_f della funzione quale valore assumerá la variabile dipendente quando la variabile indipendente $x \in D_f$ si avvicina quanto si vuole ad x_0 ?
- se $x_0 \in D_f$ il valore assunto dalla funzione nel quesito precedente sará eguale o distinto al valore $f(x_0)$ assunto dalla funzione in x_0 ?

Ci si chiede, innanzitutto, se il punto x_0 che si sceglie puó essere arbitrario o deve soddisfare a qualche requisito.

Per rendersi conto delle caratteristiche che serve richiedere al punto x_0 consideriamo il caso seguente.

• **Esempio 5.3** *Sia $f(x)$ la funzione definita come segue:*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\, x \geq 2, \\ -x & se\, x \leq -2. \end{cases}$$

Il dominio della funzione é $D_f = (-\infty, 2| \cup |2, +\infty)$.
Scegliendo il punto $x_0 = 0$, $x_0 \notin D_f$ poniamoci la prima delle domande precedenti.
Si osservi che la frase *quando la variabile indipendente $x \in D_f$ si avvicina quanto si vuole ad x_0* non ha molto senso. Infatti nell'esempio la variabile indipendente non potrá mai avvicinarsi al punto $x_0 = 0$ in quanto la funzione é definita per valori della x ben distanti dal punto stesso.

Questo puó essere legato al fatto che $x_0 \notin D_f$?

La risposta é negativa.

Per convincersi di ció si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2, \\ -x & \text{se } x \leq -2 \\ -1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione é identica alla precedente ma include nella definizione il punto x_0 assegnangli il valore $f(x_0) = -1$.
Come si vede l'aver incluso x_0 in D_f non ha eliminato il problema.
Quello che si deve richiedere é che vicino quanto si vuole ad x_0 si possano trovare valori di $x \in D_f$.
Si desidera nel seguito formalizzare questi concetti.

5.2.1 Punto di Accumulazione.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme numerico ed $x_0 \in \mathbb{R}$ un numero reale eventualmente non appartenente ad A.

Definizione 5.1 *Si definisce il punto x_0 punto di accumulazione per l'insieme A se, comunque si prenda un intorno di x_0, esso contiene almeno un punto $a \in A$, cioé:*

$$x_0 \text{ di accumulazione se } \forall I_\delta(x_0),\ \exists a \in A \cap I_\delta(x_0). \tag{5.6}$$

∗ **Nota 5.1** *La richiesta che l'intorno contenga almeno un punto é equivalente a richiedere che ne contenga infiniti (la dimostrazione si esegue per assurdo).*

Definizione 5.2 *Si definisce insieme derivato di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei suoi punti di accumulazione. Tale insieme si indica con A' o DA. Ci si chiede come capire se un insieme contiene punti di accumulazione, per tale motivo si enunciano i seguenti risultati.*

TEOREMA 5.1 *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato ed infinito ammette sempre almeno un punto di accumulazione.*

TEOREMA 5.2 *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente (superiormente) ammette "$-\infty$" ("$+\infty$") come punto-di-accumulazione.*

∗ **Nota 5.2** *La dimostrazione é semplice. Occorre tuttavia definire il concetto di intorno di "$+\infty$" come un qualunque intervallo del tipo $(m, +\infty)$. Analogamente si dice intorno di "$-\infty$" un qualunque intervallo del tipo $(-\infty, m)$.*

• **Esempio 5.4** *Consideriamo il noto insieme numerico:*

$$A = \{x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}. \tag{5.7}$$

É facile convincersi che: $\forall x \in A \Rightarrow x \notin A'$, cioé x non é un punto di accumulazione.
É facile provare che il punto $x = 0$, che non appartiene all'insieme A, é un punto di accumulazione per A.

Dimostrazione. Comunque si prenda un intorno $I_\delta(0)$, tutti gli infiniti elementi dell'insieme A tali che $1/n < \delta$ appartengono al suddetto intorno, la tesi é quindi provata.

• **Esempio 5.5** *Sia assegnato l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$, cioé l'intervallo aperto a sinistra $]0, 1]$.*
É facile convincersi che:

- *tutti i punti dell'insieme sono di accumulazione;*
- *il punto $x = 0$ é di accumuazione per l'insieme.*

∗ **Nota 5.3** *Si osservi che in questo caso $B \subset B'$, cioé l'insieme dei punti di accumulazione é piú ampio dell'insieme stesso.*

5.2.2 Punti di Accumulazione particolari.

Puó accadere, ed anche abbastanza spesso, che l'intorno $I_\delta(x_0)$ contenga elementi del dominio A solamente nel semintervallo sinistro $]x_0 - \delta, x_0]$ o in quello destro $[x_0, x_0 + \delta[$.

In questi casi il concetto del *tendere a ...* potrá applicarsi solo a quell'intervallo che contiene punti del dominio della funzione.
Si parlerá allora di limite sinistro o di limite destro, a seconda che la variabile indipendente tenda a x_0 da sinistra o da destra e si indicheranno con la scrittura x_{0-} e x_{0+} rispettivamente.

5.2.3 Funzioni limitate e non limitate.

Sia data una generica funzione $f : A \to B$. L'immagine $f(A)$ é un sottoinsieme numerico. Come tutti gli insiemi numerici $f(A)$ puó essere limitato o non limitato. In quest'ultimo caso puó accadre che *al tendere di* x ad un particolare x_0 la funzione $|f(x)|$ assuma valori sempre piú grandi.

Puó quindi accadere che *al tendere di* x ad un particolare x_0 la funzione non tenda ad un valore finito ma, come si dice, diverge a $+\infty$, cioé diverge positivamente, oppure diverge a $-\infty$, cioé diverge negativamente.

5.3 Limiti di successioni

Si consideri una successione numerica $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Il dominio della successione é rappresentato dall'insieme dei numeri

naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
Tale insieme, considerato come sottinsieme di $\mathbb{R}$, é non-finito, cioé contiene infiniti elementi e si ha che:
- non ammette punti di accumulazione al finito (*in quanto tra due generici numeri naturali successivi esistono infiniti numeri reali non appartenenti ad* $\mathbb{N}$;
- come osservato in precedenza, "$+\infty$" é un punto di accumulazione.

Ha allora senso chiedersi che valore assumerá il termine generico della successione quando n tende a $+\infty$.

Prima di addentrarsi nelle definizione formale cerchiamo di capire cosa puó accadere per $n \to +\infty$. Si possono verificare 3 casi:

1. il termine y_n tende ad un valore finito l;
2. il termine y_n diventa infinitamente grande positivamente (o negativamente). cioé $y_n \to +\infty$ oppure $y_n \to -\infty$;
3. il termine y_n non tende ad alcun valore ma *oscilla* in modo regolare o irregolare.

Adesso cerchiamo di dare significato alle espressioni utilizzate. Dire che al tendere di $n \to +\infty$ il termine y_n tende ad un valore finito l significa che valore di n, allora il valore di y_n si avvicina sempre piúad l.

Questo significa che se $n_2 > n_1$ allora $| y_{n_2} - l | \leq | y_{n_1} - l |$, cioé la differenza $| y_n - l |$ diventa sempre piú piccola all'aumentare del valore di di n.
Si osservi che si é considerato il valore assoluto della differenza $y_n - l$ in quanto interessa la distanza tra i valori di y_n ed l e questa non dipende dal fatto che sia $y_n \geq l$ o viceversa.
Si é ora in grado di formalizzare quanto detto nella definizione di limite finito di una successione.

Definizione 5.3 *Data una successione numerica $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}$, si dice che essa converge ad un limite finito l e si scrive:*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l \tag{5.8}$$

se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \forall\, n > \nu \ \text{ risulta } \ | y_n - l | < \epsilon. \tag{5.9}$$

Si puó modificare questa definizione per rappresentare il secondo caso.

Definizione 5.4 *Data una successione numerica $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}$, si dice che essa diverge* **positivamente** *e si scrive:*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \tag{5.10}$$

se

$$\forall \kappa > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \forall\, n > \nu \ \text{ risulta } \ y_n > \kappa. \tag{5.11}$$

Definizione 5.5 *Data una successione numerica $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}$, si dice che essa* **diverge negativamente** *e scriveremo*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \tag{5.12}$$

se

$$\forall \kappa > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \forall\, n > \nu \ \Rightarrow \ y_n < -\kappa \tag{5.13}$$

Si dice che una **successione** $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é **regolare** se accade che:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l \ \text{ oppure } \ \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \ \text{ oppure } \ \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty. \tag{5.14}$$

Se non accade nessuno dei precedenti casi la successione si dice **irregolare o oscillante**. Un esempio di successione oscillante é il seguente:

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Essa assume alternativamente i valori -1 ed 1, indefinitamente.

5.3.1 Successioni infinitesime ed infinitamente grandi.

Si definisce che una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é **infinitesima** se accade che:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0. \tag{5.15}$$

Una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **infinitamente grande** se accade che:

$$\lim_{n\to\infty} | y_n | = +\infty. \tag{5.16}$$

∗ **Nota 5.4** *Si osservi che se una successione é divergente allora essa é infinitamente grande ma non é vero il viceversa.*

Una successione puó essere infinitamente grande senza essere divergente positivamente o negativamente. Un esempio é fornito dalla successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-n)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che assume alternativamente valori negativi e positivi progressivamente crescenti:

$$\{-1, 4, -9, 16, -25, \ldots\}.$$

É facile provare che le successioni nel seguito indicate sono regolari ed ammettono i relativi limiti:

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{n+1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = 1 \tag{5.17}$$

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\log n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty \tag{5.18}$$

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\log(\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty \tag{5.19}$$

Altrettanto semplice é provare che le successioni nel seguito indicate sono non regolari.

- $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\cos(\pi n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

• **Esempio 5.6** *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$. Data la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

$$y_n = n^\alpha \{1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha, \ldots, n^\alpha, \ldots\}.$$

Assegnato comunque un numero reale $\kappa > 0$ si consideri il minimo intero maggiore di $\kappa^{\frac{1}{\alpha}}$, cioé $\nu = \lceil \kappa^{\frac{1}{\alpha}} \rceil$.
É possibile osservare che $\forall\, n > \nu$ si ha:

$$n^\alpha > \nu^\alpha > (\kappa^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = \kappa.$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty.$$

• **Esempio 5.7** *Il limite della successione dell'esempio precedente cambia se si considera il caso di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0$. Infatti, dato un qualunque numero reale $\epsilon > 0$, si consideri il minimo intero maggiore di $\epsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, (il minimo intero é $\nu = \lceil \epsilon^{\frac{1}{\alpha}} \rceil$), che risulta essere:*

$$|\epsilon^{\frac{1}{\alpha}}| + 1,$$

e si osservi che $\forall\, n > \nu$ si ha:

$$: n^\alpha < \nu^\alpha < (\epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = \epsilon.$$

Ne segue che:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0.$$

5.4 Teoremi sui Limiti di successioni

TEOREMA 5.3 *Ogni successione regolare ha un unico limite.*

Dimostrazione. Proveremo il teorema solo nel caso di limite finito. Supponiamo, per assurdo, che la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette due limiti distinti $l_1 \neq l_2$. Allora:

i) $\forall \epsilon > 0\ \exists \nu_1 \in \mathbb{N}: \forall n > \nu_1$ risulta $|y_n - l_1| < \epsilon$ ovvero $l_1 - \epsilon < y_n < l_1 + \epsilon$
ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \nu_2 \in \mathbb{N}: \forall n > \nu_2$ risulta $|y_n - l_2| < \epsilon$ ovvero $l_2 - \epsilon < y_n < l_2 + \epsilon$.

Da ció segue che, fissato $\nu = max\{\nu_1, \nu_2\}$, le due relazioni precedenti valgono contemporaneamente per ogni $\epsilon > 0$. Questo peró non é possibile per tutti i valori di ϵ tali che:

$$\epsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

in quanto per tali valori di ϵ si ha:

$$]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset,$$

gli intervalli sono cioé disgiunti, per cui $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non puó appartenere contemporaneamente ad entrambi.

5.4.1 Successioni Estratte.

Si consideri una successione di numeri naturali a due a due distinti tra loro e disposti in ordine crescente:

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

e sia:

$$z_k = y_{n_k}.$$

I numeri $\{z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots\}$ formano una successione che prende il nome di **successione estratta** dalla successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vale allora il seguente risultato.

TEOREMA 5.4 *Se la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un limite, finito o infinito, ogni successione estratta da essa ammette lo stesso limite.*

TEOREMA 5.5 *Ogni successione convergente é un insieme numerico limitato ed esistono due numeri reali h e k tali che $\exists \nu \in \mathbb{N}$: $\forall n > \nu$ risulta: $h \leq y_n \leq k$. Si ha inoltre:*

$$h \leq \lim_{n\to+\infty} y_n \leq k. \tag{5.20}$$

TEOREMA 5.6 *(dei Carabinieri). Siano assegnate tre successioni numeriche $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tre successioni numeriche tali che:*

$$\lim_{n\to+\infty} y'_n = \lim_{n\to+\infty} y''_n = l \tag{5.21}$$

$$y'_n \leq y_n \leq y''_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.22}$$

allora anche la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente allo stesso limite l, cioé:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l. \tag{5.23}$$

TEOREMA 5.7 *(del confronto). Siano $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, due successioni numeriche tali che:*

$$\lim_{n\to+\infty} y'_n = +\infty \qquad |-\infty| \tag{5.24}$$

ed inoltre

$$\exists\, \nu \in \mathbb{N} : \; y'_n \leq y_n, \;\; \forall n > \nu, \tag{5.25}$$

allora anche la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente positivamente (negativamente), cioé:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty \qquad |-\infty|. \tag{5.26}$$

TEOREMA 5.8 *(della permanenza del segno). Sia data la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se risulta:*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l > 0 \qquad |<0| \tag{5.27}$$

allora :

$$\exists\, \nu \in \mathbb{N} : \; \forall n > \nu, \;\; y_n > 0 \qquad |<0|. \tag{5.28}$$

TEOREMA 5.9 *(Criterio di convergenza di Cauchy) Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga é che, comunque si assegni un numero reale $\epsilon > 0$ sia possibile determinare un indice naturale ν tale che per ogni coppia di indici naturali e m ed n entrambi maggiori di ν risulti:*

$$|\, y_n - y_m \,| < \epsilon. \tag{5.29}$$

In modo sintetico il criterio di convergenza di Cauchy si esprime come segue.
C.N.S affinché la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente é che

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists\, \nu \in \mathbb{N} \; : \; \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > \nu \text{ risulti } \; |\, y_n - y_m \,| < \epsilon. \tag{5.30}$$

5.5 Operazioni sui limiti delle successioni

Definizione 5.6 *Siano $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni e c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ due costanti reali. La successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale: $y_n = c_1\, y'_n + c_2\, y''_n$ si dice* **combinazione lineare** *delle successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

TEOREMA 5.10 *Se le successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti anche la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, e si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = c_1 \lim_{n\to+\infty} y'_n + c_2 \lim_{n\to+\infty} y''_n. \tag{5.31}$$

Se si considerano $c_1 = c$ e $c_2 = 0$, ovvero $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$ oppure $c_2 = -1$, dal teorema precedente seguono i seguenti risultati.

COROLLARIO 5.10.1 *Siano $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti e $c \in \mathbb{R}$. Allora si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} c\, y'_n = c \lim_{n\to+\infty} y'_n \tag{5.32}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\, y'_n + y''_n \,) = \lim_{n\to+\infty} y'_n + \lim_{n\to+\infty} y''_n. \tag{5.33}$$

Definizione 5.7 *Siano $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. La successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale:*

$$u_n = y'_n \cdot y''_n$$

si dice **successione prodotto** *delle successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

TEOREMA 5.11 *Se le successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti anche la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} y'_n \lim_{n\to+\infty} y''_n. \tag{5.34}$$

Definizione 5.8 *Siano $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. La successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale:*

$$v_n = \frac{y'_n}{y''_n},\ y''_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

si dice successione rapporto delle successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

TEOREMA 5.12 *Se le successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti e se si ha*

$$y''_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} y''_n \neq 0,$$

allora anche la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} y'_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y''_n}. \tag{5.35}$$

∗ **Osservazione 5.1** *La condizione $y''_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é necessaria per definire la successione rapporto mentre la condizione $\lim\limits_{n\to+\infty} y''_n \neq 0$ é necessaria per la validitá del teorema.*

Si osservi che la seconda condizione potrebbe non verificarsi anche se la prima é sempre valida.

• **Esempio 5.8** *Si considerino le successioni $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale: $y'_n = \frac{n+1}{n}$ ed $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale : $y''_n = e^{-n}$.*
É facile provare che $y''_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ma: $\lim\limits_{n\to+\infty} y''_n = 0$.
Inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} y'_n = 1$.
Le ipotesi del teorema non sono verificate ed anche la tesi non vale. Infatti:

$$v_n = \frac{y'_n}{y''_n} = \frac{n+1}{n}\, e^n \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty. \tag{5.36}$$

∗ **Osservazione 5.2** *Vedremo nel seguito in quali casi é possibile estendere i risultati visti in precedenza ed i casi nei quali invece si puó avere che il limite di una successione somma, prodotto o rapporto di altre successioni dia come risultato una forma indeterminata.*

Consideriamo dapprima la combinazione lineare $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di due successioni, $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che, il cui termine generale, per semplicitá e senza perdita di generalitá, possiamo scrivere come $u_n = y'_n + y''_n$. Valgono i due teoremi che seguono.

TEOREMA 5.13 *Se la successione $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente positivamente e la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pur non essendo necessariamente convergente, ammette un estremo inferiore finito h, allora anche la successione combinazione lineare di termine generale $u_n = y'_n + y''_n$ é divergente positivamente, cioé:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty. \tag{5.37}$$

Dimostrazione. Essendo infatti, per n sufficientemente grande, $y'_n > k$ allora sará possibile trovare un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ sia $y'_n + y''_n > k + h$. Ció prova l'asserto.

In maniera analoga vale il seguente risultato.

TEOREMA 5.14 *Se la successione $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente negativamente e la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pur non essendo convergente, ammette un estremo superiore finito h, allora anche la successione combinazione lineare di termine generale $u_n = y'_n + y''_n$ é divergente negativamente, cioé:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty. \tag{5.38}$$

Dimostrazione. *Mutatis mutandis* la dimostrazione usa le stesse argomentazioni logiche del teorema precedente.

Se invece la successione $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge positivamente e la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge negativamente ne consegue che nulla puó dirsi sulla successione somma.
La scrittura *formale*, ma non sostanziale,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (y'_n + y''_n) = \text{"}\infty - \infty\text{"} \tag{5.39}$$

é una *forma indeterminata*.

Consideriamo la successione prodotto di termine generale $u_n = y'_n \cdot y''_n$.
Sulla base dei ragionamenti esposti per i teoremi precedenti si può facilmente provare che valgono i seguenti risultati.

TEOREMA 5.15 *Se la successione $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale y'_n é infinitesima e la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pur non essendo necessariamente convergente ammette un estremo superiore finito h, allora anche la successione prodotto di termine generale u_n é infinitesima, cioé:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

TEOREMA 5.16 *Se la successione $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é infinitamente grande e la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pur non essendo necessariamente convergente ammette un estremo inferiore positivo finito h, allora anche la successione di termine generale $|\, y'_n \; y''_n \,|$ é infinitamente grande, cioé:*

$$\lim_{n\to+\infty} |\, y'_n \cdot y''_n \,| = +\infty. \tag{5.40}$$

Dall'esame del segno della successione di termine generale $y'_n \cdot y''_n$ si potrá decidere, caso per caso, se tale prodotto sia divergente positivamente o negativamente.

* Nota 5.5 *Il lettore studi il comportamento del modulo della successione prodotto nel caso in cui le successioni y'_n e y''_n divergono rispettivamente positivamente e negativamente.*

Consideriamo il caso in cui $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia infinitesima e $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente (positivamente o negativamente).
É chiaro che nulla potrá dirsi sulla successione di termine generale il prodotto $y'_n \cdot y''_n$ in quanto il fatto che un termine sia molto grande puó essere compensato, in misura maggiore o minore a seconda dei casi, dal fatto che l'altro é molto piccolo.
La scrittura *formale*, ma non sostanziale,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (y'_n \cdot y''_n) = \text{"}0 \cdot \infty\text{"} \tag{5.41}$$

si dice che é una *forma indeterminata*.

Esaminiamo ora i casi della successione rapporto tra due successioni, cioé la successine di termine generale: $u_n = y'_n / y''_n$.
Consideriamo dapprima il caso in cui $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia infinitesima, ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} y''_n = 0.$$

Valgono allora i seguenti due teoremi.

TEOREMA 5.17 *Se la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é infinitesima e la successione $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un valore non nullo $l \neq 0$, allora la successione rapporto di termine generale u_n é infinitamente grande, cioé:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\, \frac{y'_n}{y''_n} \,\right| = +\infty. \tag{5.42}$$

Dall'esame del segno della successione prodotto di termine generale $y'_n \cdot y''_n$ si potrá decidere, caso per caso, se tale rapporto sia divergente positivamente o negativamente.

TEOREMA 5.18 *Se la successione $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é infinitesima e la successione $\{|\, y'_n \,|\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha un estremo inferiore positivo, allora la successione rapporto di termine generale u_n é infinitamente grande, cioé:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\, \frac{y'_n}{y''_n} \,\right| = +\infty. \tag{5.43}$$

Anche in questo caso dall'esame del segno dei termini $y'_n \cdot y''_n$ si potrá decidere, caso per caso, se tale rapporto sia divergente positivamente o negativamente.

Se invece $\lim_{n\to+\infty} y'_n = 0$ nulla puó dirsi sul comportamento della successione rapporto in quanto il tendere a zero della successione al numeratore puó compensare o meno, a seconda dei casi, il tendere a zero del denominatore.
La scrittura *formale*, ma non sostanziale,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y'_n}{y''_n} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \tag{5.44}$$

si suole anche dire *forma indeterminata*.

Esaminiamo ora il caso in cui uno dei termini del rapporto $\frac{y'_n}{y''_n}$ é divergente (positivamente o negativamente) e l'altro limitato superiormente in valore assoluto. Vale il seguente risultato.

TEOREMA 5.19 *Siano $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed $\{y''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni ed h un opportuno numero positivo, tali che:*

1. *se* $\lim_{n\to\infty} y'_n = +\infty \ |-\infty|$ *e* $|\, y''_n \,| < h \forall n \in \mathbb{N}$, *allora:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{y'_n}{y''_n} \right| = +\infty; \tag{5.45}$$

2. *se* $|\, y'_n \,| < h \forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to+\infty} y''_n = +\infty \ |-\infty|$ *allora:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{y'_n}{y''_n} \right| = 0. \tag{5.46}$$

∗ Nota 5.6 *Dall'esame del segno di y'_n y''_n si potrá poi decidere, caso per caso, se tale rapporto sia divergente positivamente o negativamente.*

Dimostrazione.

1. Per ipotesi $\forall k > 0 \, \exists \nu \cdot \forall n > \nu \quad y'_n > k$ e $h > 0$.
   Allora, si ha che, per ogni $k' = k/h > 0, \exists \nu' \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \frac{y'_n}{y''_n} \right| \geq \left| \frac{y'_n}{h} \right| > \frac{k}{h} = k'. \tag{5.47}$$

2. Per ipotesi $\forall k > 0 \, \exists \nu : \forall n > \nu \quad y''_n > k$ e $h > 0$.
   Allora, dalla sequenza di disequazioni, si vede che $\forall k'' = h/k > 0, \exists \nu' \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\left| \frac{y'_n}{y''_n} \right| \leq \left| \frac{h}{y''_n} \right| < \frac{h}{k} = k''. \tag{5.48}$$

da cui l'asserto.

Rimane infine da esaminare il caso in cui y'_n e y''_n sono entrami divergenti.
Anche in questo caso nulla puó dirsi, in generale, sull'andamento della successione rapporto in quanto la crescita del numeratore puó

o meno essere compensata dalla crescita del denominatore.
La scrittura *formale*, ma non sostanziale,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y'_n}{y''_n} ='' \frac{\infty}{\infty}'' \tag{5.49}$$

é anch'essa una *forma indeterminata*.

∗ Nota 5.7 *Si vedrá nel seguito, studiando i limiti delle funzioni, come in alcuni casi le forme indeterminate si possano risolvere con l'introduzione del concetto di ordine degli infinitesimi e degli infiniti.*

5.6 Serie Numeriche

Nel quinto secolo a. C. il filosofo greco presocratico Zenone di Elea (489 a. C. - 431 a. C.) ci mostra con, il paradosso di Zenone che qui di seguito enunciamo, un primo esempio di serie, evidenziando le sue notevoli abilitá logiche e dialettiche nel difendere la tesi del suo maestro Parmenide, il quale sosteneva che il movimento non altro che una illusione.

Achille, simbolo di rapiditá, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre 10 volte piú veloce della tartaruga e le concede 10 metri di vantaggio.

Achille corre quei 10 metri e la tartaruga percorre 1 metro, Achille percorre quel metro e la tartaruga percorre 1 decimetro, Achille percorre quel decimetro e la tartaruga percorre 1 centimetro; Achille percorre quel centimetro e la tartaruga percorre 1 millimetro, Achille percorre quel millimetro e la tartaruga percorre 1 decimo di millimetro, e cosí via all'infinito, in modo che Achille puó correre per sempre senza raggiungerla.

Gli infiniti intervalli impiegati ogni volta da Achille per raggiungere la tartaruga diventano sempre piú piccoli, ed il limite della loro somma converge.

Una somma di infiniti elementi o, piú precisamente, il limite di una somma di infiniti elementi non é necessariamente infinito. Ad esempio, la somma di tutte quantitá che si possono ottenere dimezzando ogni volta un intero:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \tag{5.50}$$

é sempre inferiore ad uno.

Il barista intelligente ce lo dimostra quando un gruppo infinito di matematici entra nel suo bar chiedendo dell'acqua minerale; il primo ne chiede mezzo litro, il secondo $\frac{1}{4}$ di litro, il terzo $\frac{1}{8}, \ldots$ il barista porta un litro d'acqua affermando, correttamente, che tutti possono avere ció che hanno chiesto!

Osserviamo che, arrivati alla richiesta numero n, la somma sará pari ad ad 1 meno la frazione di ordine n, ad esempio alla terza richiesta, la somma é uguale a:

$$1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}.$$

Quello che abbiamo visto in (5.50) é un esempio di SERIE.

In generale la serie generalizza la somma nel caso in cui si devono sommare infiniti termini.

Possiamo dare pertanto la definizione di *Serie di numeri reali.*

La notazione:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

si definisce *Serie di numeri reali.*

Ponendo

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

la *somma parziale n-esima* o *ridotta di posto n,* si dice che la serie *di termine generale* a_n é convergente se tale é la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali, cioé se:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$$

ed ha per *Somma* s, si scrive

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

La successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che *diverge positivamente,* o *diverge a* $+\infty$, o ha per somma $+\infty$ se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Del tutto analogo il caso di divergenza a $-\infty$.

Se una serie converge oppure diverge a $+\infty$ oppure ancora diverge a $-\infty$ si dice *Regolare,* senon accade nessuno dei precedenti tre casi si dice *Indeterminata.*

Per *carattere di una serie* si intende la sua convergenza, divergenza o indeterminatezza.

tornando al paradosso di Zenone questo serví molto allo sviluppo della Analisi Matematica a patire dal XVIII secolo, contribuendo alla nascita di alcuni concetti fondamentali, come quello di serie.

Naturalmente Zenone era convinto che Achille poteva raggiungere la tartaruga, ma non riuscí a trovare l'errore nel ragionamento da lui proposto.

Allo scopo di trovare l'errore consideriamo due punti materiali A e T che si rincorrono con Moto Rettilineo Uniforme su un percorso non limitato. Dato che il moto rettilineo si svolge lungo una retta, fissati in esso origine, unitá di misura e verso, il moto del punto é descrivibile mediate una sola coordinàta $s(t)$ variabile solo al variare del tempo t.

La funzione

$$t \to s(t)$$

é la legge oraria del moto. Per ogni valore di t si definisce inoltre la *velocitá istantanea* $v(t)$, ponendo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\,s(t)}{d\,t}$$

dove t e $t + \Delta t$ sono due valori della variabile indipendente. Siano v_A e v_T le due velocitá rispettivamente di Achille é della tartaruga e sia d la *distanza* iniziale tra loro.

Lo spazio $s_A(t)$ che intercorre tra la posizione iniziale di Achille, $A \equiv 0$, e la sua posizione al tempo t é:

$$s_A(t) = v_A \quad t$$

e lo spazio $s_T(t)$ che intercorre tra la posizione iniziale di Achille $A \equiv 0$ e la posizione $T(t)$ della tartaruga al tempo generico t risulta:

$$s_T(t) = d + v_T \cdot t.$$

Si puó inoltre osservare che

$$s_A(t_n) = s_T(t_{n-1}), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi si ricava:

$$v_A \quad t_n = s_A(t_n) = s_T(t_{n-1}) = d + v_T \cdot t_{n-1}$$

quindi:

$$t_n = \frac{d + v_T \cdot t_{n-1}}{v_A}; \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A questo punto Zenone considera gli intervalli ti tempo $t_n - t_{n-1}$ ed afferma che la somma di tutti gli infiniti intervalli di tempo é infinita; ció equivale a dire che A non raggiunge T. Calcoliamo gli intervalli di tempo:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{v_T}{v_A}(t_{n-1} - t_{n-2}), \qquad \forall n \geq 2,$$

da cui:

$$t_n - t_{n-1} = (\frac{v_T}{v_A})^{n-1} \cdot t_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La somma, o serie, degli intervalli di tempo é data da:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(t_n - t_{n-1}) = t_1 \cdot \Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{v_T}{v_A})^{n-1},$$

quest'ultima serie é la serie geometrica di ragione:

$$0 < \frac{v_T}{v_A} < 1.$$

Scopriamo quindi che l'errore di Zenone é stato considerare infinita la somma della serie, essa infatti é finita e vale:

$$t_1 \cdot \frac{1}{1 - (\frac{v_T}{v_A})} = \frac{v_A - t_1}{v_A v_T} = \frac{d}{v_A - v_T}$$

Quindi Achille raggiunge la tartaruga al tempo:

$$t = \frac{d}{v_A - v_T}$$

e successivamente A supera T.

Fondamentale é stato supporre che A e T si sono mossi di moto rettilineo uniforme.

Zenone non conosceva ancora la somma di una serie geometrica, da qui la sue errata deduzione (che A non supera T) dovuta al fatto che immaginava la somma di infiniti intervalli di tempo come infinita.

Tra le piú note serie vi é la *Serie Geometrica di ragione* h:

$$1 + h + h^2 + ... + h^n + ..., h \in \mathbb{R}$$

che a seconda del valore assunto da h presenta tutti i casi sopra menzionati, infatti:

$$s_n = 1 + h + h^2 + ... + h^n = \frac{1 - h^n}{1 - h}$$

e risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{cases} \nexists, \ se & h \leq 1 \\ = \frac{1}{1-h}, \ se & -1 < h < 1 \\ = +\infty, se & h \geq 1 \end{cases}$$

quindi la serie risulta rispettivamente non regolare (se $h \leq -1$), convergente (per $-1 < h < 1$) o divergente positivamente (per $h \geq 1$).

Si osservi che se i termini di una serie sono non negativi la successione delle somme parziali risulta non decrescente, quindi regolare. Si puó inoltre affermare che una serie a termini positivi é regolare, precisamente puó essere convergente ad un numero positivo oppure divergente positivamente. La somma di una serie a termini positivi, convergente, é maggiore di ogni sua somma parziale ed é l'*estremo superiore* (non il massimo dell'insieme) dell'insieme costruito dalle somme parziali.

Precisiamo ancora che se la somma di infiniti numeri é un numero reale, il termine generale tende a zero, cioé é *infinitesima*, di ció ne riparleremo in seguito.

Il viceversa é falso, cioé:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$$

é convergente. Considerando infatti la serie:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

il suo termine generale tende a zero, ma se si considera la somma parziale:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty, per\, n \to \infty$$

si puó quindi concludere che l'essere il termine generale a_n infinitesimo é condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie.

Sussistono i seguenti teoremi.

TEOREMA 5.20 *Il carattere di una serie non muta se si cambiano un numero finito di termini di una serie.*

Considerata la serie:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

e quella ottenuta da essa sostituendo i primi μ termini

$$b_1 + ... + b_\mu + a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + ...$$

denotiamo con s_n ed s_μ le rispettive somme parziali, osserviamo che:

$$s_\mu = s_n - (a_1 + a_2 + ... + a_\mu) + (b_1 + b_2 + ... + b_\mu) = s_n - s_\mu + s_\mu$$

da cui segue che le due successioni $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{s_\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ hanno lo stesso carattere. Quanto appena provato mostra che trascurando un numero finito di termini il carattere di una serie non cambia.

Data una serie convergente:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

denotata con s_n la sua somma parziale di posto n e con s la sua somma, si definisce

$$r_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} + ...$$

il *resto* della serie dopo l'n-esimo o semplicemente resto n-esimo. Questa quantitá indica l'*errore* che si commette quando per somma della serie si assume la somma dei suoi primi n termini.
Si deduce quindi la seguente proprietá.

TEOREMA 5.21 *Se la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, il resto n-esimo, r_n, é infinitesimo.*

Di notevole utilitá risulta il seguente risultato.

TEOREMA 5.22 *Date due serie:*

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \qquad e \qquad \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$$

rispettivamente convergenti ad A e B. Allora, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$$

converge ad: $\alpha A + \beta B$.

Dato che non é sempre facile determinare il limite della somma parziale, per studiare il carattere di una serie si usano alcuni criteri di convergenza di cui qui di seguito ricordiamo i principali.

TEOREMA 5.23 *(Criterio di Cauchy). Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie:*

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$$

sia convergente é che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;\; \forall n > \nu \; \forall p \in \mathbb{N}$$

risulta:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Da ció si deduce, scegliendo $p = 1$, il seguente risultato.

TEOREMA 5.24 *Condizione necessaria affinché la serie:*

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$$

sia convergente é che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia infinitesima.

Oltre la serie vista in precedenza:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

anche la *Serie Armonica*

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

dimostrano che il precedente teorema non é invertibile.

Sussiste inoltre il seguente teorema, molto utile nella determinazione della convergenza di una serie.

5.7 Serie a termini non negativi.

TEOREMA 5.25 *Data la serie a termini non negativi:*

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$$

e la successione limitata $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, allora la serie

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... a_n b_n + ...$$

é convergente.

Considerate due serie

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \qquad e \qquad \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$$

con

$$0 \leq a_n \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per quanto osservato in un precedente teorema, dato che il carattere di una serie non muta se si cambiano un numero finito di termini di una serie, potremo nel seguito supporre, equivalentemente, che l'ultima catena di disuguaglianze sia valida definitivamente.

La serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ si dirá *minorante* la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ ovvero, quest'ultima *maggiorante* la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$.

TEOREMA 5.26 *(Criterio del confronto). Considerate due serie a termini non negativi:*

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \qquad e \qquad \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$$

tali che la serie di termine generale b_n sia maggiorante la serie di termine generale a_n. Risulta che se $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, tale sará anche la serie

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$$

e se la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, positivamente, anche la serie

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$$

é divergente positivamente.

Infine, se due serie sono convergenti, denotate con s_A ed s_B le rispettive somme, risulta:

$$s_A \leq s_B.$$

Una serie si dice *assolutamente convergente* se:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

é convergente.

Si osserva facilmente che, come conseguenza del precedente Teorema del confronto che se una serie é assolutamente convergente, é convergente e risulta:

$$|\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

TEOREMA 5.27 *(Criterio della radice). Sia data una serie, $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, a termini non negativi. Se $\exists k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1$ ed $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tali che*

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq k, \ \forall n > \nu$$

la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, risulta convergente.

Se $\exists v \in \mathbb{N}$, tale che:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1, \ \forall n > \nu$$

la serie diverge positivamente.

Considerata la serie a termini non negativi

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n,$$

se la successione

$$\{(a_n)^{\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é convergente e risulta:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l < 1,$$

allora la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Se invece

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l > 1,$$

la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Se infine

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

nulla puo' dirsi.

5.8 Serie a termini positivi.

TEOREMA 5.28 *Data la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e se $\exists k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ tale che:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k, \quad n \in \mathbb{N}$$

allora la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, é convergente.

Se invece:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

allora la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, é divergente positivamente.

Molto utile risulta come sua immediata conseguenza il seguente risultato.

TEOREMA 5.29 *Considerata la serie* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, *con* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *se la successione:* $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e risulta:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1,$$

allora la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Se invece:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$$

allora la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, *é divergente positivamente. Se infine:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

nulla puó dirsi.

TEOREMA 5.30 *(Criterio di Raabe). Assegnata la serie* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, *con* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *se* $\exists k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ *tale che:*

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Se invece:

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente positivamente.*

Da ció si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 5.31 *Assegnata la serie* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, *con* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *tale che:* $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e risulta:*

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1} - 1}) = l,$$

se accade che $l > 1$, *allora la serie* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Se $l < 1$ *la serie* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente positivamente.*

Se infine $l = 1$ *nulla puó dirsi sul carattere della serie.*

5.9 Serie a termini di segno alterno.

Definiamo serie a termini di segno alterno una serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

Ad esempio la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$$

é detta *Serie armonica a segni alterni.*

Una condizione sifficiente per la convergenzza di una serie a termini alternati é il seguente risultato.

TEOREMA 5.32 *Data la serie*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...$$

se la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é a termini positivi, decrescente e convergente a zero, allora la serie a termini di segno alterno é convergente e, se* S *é la sua somma, risulta:*

$$|S - n| < a_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

della serie.

In virtú del teorema appena enunciato la serie armonica generalizzata risulta convergente, infatti la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dei valori assoluti dei suoi termini é decrescente ed infinitesima.

02/04/19

Capitolo 6

Limiti e Continuitá delle funzioni

6.1 Limiti delle funzioni

Dopo aver discusso sui limiti di quelle particolari funzioni note con il nome di successioni si definisce, qui di seguito, il concetto di limite per una funzione.
Considereremo nel seguito $A, B \subset \mathbb{R}$ ed

$$f : A \to B. \tag{6.1}$$

Da quanto visto in precedenza sui *punti di accumulazione* ci si puó aspettare che:

1. una funzione definita in un dominio limitato puó ammettere infiniti punti di accumulazione al finito;
2. una funzione definita in un dominio non limitato ammettere come punti di accumulazione uno, o entrambi, i punti all'infinito

Si definiscono quindi, qui di seguito, i limiti delle funzioni per:

1. il generico punto di accumulazione al finito, x_0 ,
2. i punti all'infinito, $" - \infty"$,$" + \infty"$.

6.1.1 Definizione di limite per $x \to x_0$.

Data la funzione $f : A \to B$ ed un suo punto di accumulazione $x_0 \in A'$ si dice che:

1. la funzione ammette un limite finito l_s per x che tende a x_0 da sinistra (**limite sinistro**), e si scrive:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = l_s \tag{6.2}$$

se accade che

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ . \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\ \text{ risulta } \ | f(x) - l_s | < \epsilon \tag{6.3}$$

2. la funzione ammette un limite finito l_d per x che tende a x_0 da destra (**limite destro**), e si scrive:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = l_d \tag{6.4}$$

se accade che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ : \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\ \text{ risulta } \ | f(x) - l_d | < \epsilon. \tag{6.5}$$

3. la funzione ammette un limite finito l_d per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{6.6}$$

se accade che

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) \quad \text{cioé se} \quad l_s = l_d \tag{6.7}$$

oppure se accade che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \text{ risulta } \ | f(x) - l_d | < \epsilon. \tag{6.8}$$

TEOREMA 6.1 *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché una funzione ammetta un limite finito per x che tende ad x_0 é che essa ammetta il limite sinistro, l_s, e limite destro, l_d, e che tali limiti siano equali.*

4. la funzione diverge positivamene |negativamente| da sinistra per x che tende a x_{0-} e si scrive:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = +\infty \ |-\infty| \quad \text{se accade che} \tag{6.9}$$

$$\forall \kappa > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\ \text{ risulta } \ f(x) > \kappa [f(x) < -\kappa| \tag{6.10}$$

5. la funzione diverge positivamene |negativamente| da destra per x che tende a x_{0+} e si scrive:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = +\infty \ |-\infty| \quad \text{se accade che} \tag{6.11}$$

$$\forall \kappa > 0 \ \exists \ \delta > 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\backslash x_0 \ \ f(x) > \kappa \ \ [f(x) < -\kappa| \tag{6.12}$$

6. la funzione diverge positivamente |negativamente| per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ |-\infty| \tag{6.13}$$

se accade rispettivamente che

$$\forall \kappa > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash x_0 \ \text{ risulta } f(x) > \kappa \tag{6.14}$$

ovvero

$$\forall \kappa > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash x_0 \ \text{ risulta } f(x) < -\kappa \tag{6.15}$$

(6.16)

7. la funzione $f(x)$ é infinatemente grande in x_0- e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} | f(x) | = +\infty \tag{6.17}$$

se accade che

$$\forall \kappa > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash \{x_0\} \ \text{ risulta } \ | f(x) | > \kappa. \tag{6.18}$$

* **Nota 6.1** *Valgono le stesse considerazioni fatte per le successioni.*

6.1.2 Definizione di limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Con le definizioni precedenti sono state stabilite tutte le definizioni nei casi in cui il punto di accumulazione x_0 sia un punto finito. Rimane da esaminare il caso in cui il punto di accumulazione sia "$-\infty$" o "$+\infty$".
Prima di addentrarsi nelle definizioni formali si osservi che questo caso é assolutamente analogo a quello delle successioni - con l'unica differenza che per le successioni l'unico caso possibile é $n \to +\infty$ - esaminato in precedenza. Essendo le definizioni molto simili a quelle giá esaminate, useremo una presentazione piú compatta.

Definizione 6.1 *Data una funzione f definita in un insieme non limitato $A \subseteq \mathbb{R}$ diremo rispettivamente che ammette limite finito, diverge positivamente, diverge negativamente, é infinitamente grande per x che tende a $+\infty$ e scriveremo rispettivamente:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad se \forall \epsilon > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x > \bar{x} \ risulta\ |\ f(x) - l\ | < \epsilon \tag{6.19}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad se \forall \kappa > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x > \bar{x} \ risulta\ f(x) > \kappa \tag{6.20}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad se \forall \kappa > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x > \bar{x} \ risulta\ f(x) < -\kappa \tag{6.21}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |\ f(x)\ | = \infty \quad se \forall \kappa > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x > \bar{x} \ risulta\ |\ f(x)\ | > \kappa \tag{6.22}$$

Definizione 6.2 *Data una funzione f definita in un insieme non limitato $A \subseteq \mathbb{R}$ diremo rispettivamente che ammette limite finito, diverge positivamente, diverge negativamente, é infinitamente grande per x che tende a $-\infty$. e scriveremo rispettivamente:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad se \forall \epsilon > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x < \bar{x} \ risulta\ |\ f(x) - l\ | < \epsilon \tag{6.23}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad se \forall \kappa > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x < \bar{x} \ risulta\ f(x) > \kappa \tag{6.24}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad se \forall \kappa > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x < \bar{x} \ risulta\ f(x) < -\kappa \tag{6.25}$$

$$\lim_{x\to-\infty} |\ f(x)\ | = \infty \quad se \forall \kappa > 0\ \exists \bar{x} \quad \forall x < \bar{x} \ risulta\ |\ f(x)\ | > \kappa. \tag{6.26}$$

Esempio 6.1 *Sia $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ la funzione costante.*
Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono punti di accumulazione.
Preso comunque $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

egualmente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c.$$

Infatti, nel caso del limite ad un generico numero reale x_0, si ha che, assegnato comunque $\epsilon > 0$, la relazione

$$|\ f(x) - c\ | < \epsilon$$

cioé:

$$-\epsilon < f(x) - c < \epsilon$$

si riduce, essendo $f(x) = c$, a:

$$-\epsilon < \epsilon$$

che é sempre vera comnque si prenda $\delta > 0$.

♠ **Esercizio 6.1** *Provare similmente il limite per $x \to \infty$ ed il limite per $x \to -\infty$.*

• **Esempio 6.2** *Sia $f(x) = segn(x) = \frac{|x|}{x}$, é definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ ed ha come immagine l'insieme $\{-1, 1\}$.*
É immediato verificare che $x = 0$ é un punto di accumulazione del dominio ma non appartiene al dominio della funzione. Si ha che:

- *$\forall\, x < 0$ la funzione é costante e vale $segn(x) = -1$,*
- *$\forall\, x > 0$ la funzione é costante e vale $segn(x) = +1$.*

Ne segue:

$$\lim_{x\to 0-} segn(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 0+} segn(x) = +1.$$

Pertanto il limite destro e sinistro sono distinti, ció implica che non esiste il limite della funzione per x che tende a 0.

• **Esempio 6.3** *Sia $f(x) = ax + b$, dove $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, una generica funzione lineare.*
Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono punti di accumulazione.
Considerato un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = ax_0 + b.$$

Nel caso $x \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & se\ a > 0 \\ -\infty & se\ a < 0. \end{cases}$$

Nel caso $x \to -\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & se\ a > 0 \\ +\infty & se\ a < 0. \end{cases}$$

• **Esempio 6.4** *Sia $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione esponenziale con esponente un numero naturale.*
Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono punti di accumulazione.
Considerato un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^n.$$

Nel caso $x \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Nel caso $x \to -\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & per\ n\ dispari \\ +\infty & per\ n\ pari. \end{cases}$$

• **Esempio 6.5** *Sia $f(x) = (\frac{1}{x})^n = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione esponenziale con esponente intero negativo.*
L'insieme dei punti di accumulazione é l'unione del dominio, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e del punto $\{0\}$, cioé tutti i punti di $\mathbb{R}$.
Considerato un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^n.$$

Nel caso $x_0 = 0$ si ha, per n pari:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty,$$

mentre, per n dispari:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty.$$

Quindi la funzione $f(x) = (\frac{1}{x})^n = x^{-n}$ per n dispari non ammette limite al tendere di x a 0.
Nei casi $x \to +\infty$ ed $x \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

∗ **Nota 6.2** *Oltre alla dimostrazione formale é facile convincersi di questo risultato nel caso particolare $n = 1$.*

• **Esempio 6.6** *Limiti di un Polinomio: $P_n(x)$.*
Consideriamo il generico polinomio di grado n, $n \in \mathbb{N}$.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

equivalentemente nella forma

$$P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0 = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

Tutti i punti del dominio $D_f = \mathbb{R}$ sono punti di accumulazione.
É facile provare che, preso comunque un numero $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

Consideriamo adesso il polinomio nella forma (6.6).
Nel caso $x \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Nel caso $x \to -\infty$, si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{per } n \text{ dispari} \\ +\infty & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

La dimostrazione di questo risultato si ottiene facilmente utilizzando i teoremi riguardanti le operazioni sui limiti che vedremo qui di seguito.

6.1.3 Operazioni sui limiti.

In precedenza sono state considerate le operazioni tra funzioni e definite nuove funzioni chiamate funzione somma, differenza, prodotto e rapporto delle funzioni date. Il dominio delle funzioni definite poteva sottostare ad alcune restrizioni. Nella maggior parte dei casi esso era semplicemente la intersezione dei domini delle funzioni che erano prese in considerazione nell'operazione in esame, con la esclusione, nel caso del rapporto, di quei punti del dominio in cui si annulla la funzione al denominatore. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite nello stesso dominio A e sia $x_0 \in A'$ un punto di accumulazione di A (finito o infinito.) Considerati due numeri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e se $l, m \in \mathbb{N}$ sono tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m \tag{6.27}$$

si ha:

1. il limite della combinazione lineare $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ é dato da:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) &= c_1 \lim_{x \to x_0} f(x) + c_2 \lim_{x \to x_0} g(x) \\ &= c_1 l + c_2 m. \end{aligned} \tag{6.28}$$

∗ **Nota 6.3** *Il caso della funzione prodotto ottenuta moltiplicando la funzione data per uno numero reale si ottiene dalla precedente relazione per $c_2 = 0$, la somma di due funzioni si ottiene per $c_1 = c_2 = 1$ e la funzione differenza per $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$;*

2. il limite del prodotto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é dato da:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l \cdot m \tag{6.29}$$

3. il limite del rapporto $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, che ha significato solo se $m = \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, é dato da:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{m} \tag{6.30}$$

4. il limite della funzione potenza (intera) $h(x) = f(x)^{\frac{n}{k}}$ é dato da:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)^{\frac{n}{k}}] = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\frac{n}{k}} = [l]^{\frac{n}{k}} \tag{6.31}$$

a condizione che sia:

a) $l > 0$ per n pari;
b) $l \neq 0$ per n dipari.

Estensioni. I teoremi precedenti si estendono inoltre a tutti i casi:

$$\lim_{x \to x_{0-}} \qquad \lim_{x \to x_{0+}} \tag{6.32}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \qquad \lim_{x \to -\infty} \tag{6.33}$$

Si possono altresi estendere ai limiti delle funzioni i tutti i teoremi precedentemente

6.1.4 Teoremi sui limiti delle funzioni

TEOREMA 6.2 *Se una funzione f ammette limite per $x \to x_0$ (finito o infinito), allora tale limite é unico. Teorema (dei Carabinieri). Siano f, f_1, f_2 definite rispettivamente nei domini A, A_1, A_2. Denotato con $B' = A' \cup A'_1 \cup A'_2 \neq \emptyset$ l'insieme comune ai rispettivi insiemi derivati e, detto $X \subseteq B'$, accade che:*

1. $x_0 \in X$,

2. $\forall x \in X$ *si verifica che* $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$;

3. *le due funzioni* f_1, f_2 *sono entrambe convergenti, per* $x \to x_0$, *allo stesso limite* l :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

TEOREMA 6.3 *(della permanenza del segno). Se una funzione ammette un limite non nullo per* $x \to x_0$ *allora esiste un intorno di* x_0 *nel quale la funzione mantiene lo stesso segno del limite, cioé se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \quad |<0| \text{ allora}$$
$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in |x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0 \quad |<0|$$

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in |x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \text{ risulta } l - \epsilon < f(x) < \epsilon + l. \tag{6.34}$$

Scegliendo, tra tutti gli ϵ arbitrari, quelli tali che $l - \epsilon > 0$ ne segue l'asserto.

* **Nota 6.4** *Il caso in cui sia* $l < 0$ *é una banale estensione. Altrettanto semplice é il caso in cui sia* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l > 0 \quad |<0|$ *oppure* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l > 0 \quad |<0|$.
La dimostrazione é lasciata per esercizio.

TEOREMA 6.4 *(Criterio di convergenza di Cauchy per* $x \to x_0$*). Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione* f *sia convergente per* $x \to x_0$ *é che:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in I_\delta(x_0), \quad x', x'' \neq x_0 \tag{6.35}$$
$$\text{risulta } | f(x') - f(x'') | < \epsilon. \tag{6.36}$$

%textbfTeorema.

TEOREMA 6.5 *(Criterio di convergenza di Cauchy per* $x \to +\infty$ *e per* $x \to -\infty$*). Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione* f *sia convergente per* $x \to +\infty \quad |-\infty|$ *é che:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists x^* \quad \forall x', x'' > x^* \quad \text{risulta} \quad | f(x') - f(x'') | < \epsilon \tag{6.37}$$
$$| \forall \epsilon > 0 \exists x^* \quad \forall x', x'' < x^* \quad \text{risulta} \quad | f(x') - f(x'') | < \epsilon |. \tag{6.38}$$

6.2 Continuitá di una funzione

Come premessa, diamo la seguente definizione.

Punto interno.

Definizione 6.3 *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un insieme numerico, si definisce che il punto* $x_0 \in A$ *é un punto interno ad* A *se esiste un intorno completo di* x_0 *costituito tutto da elementi di* A, *cioé se:*

$$\exists \delta > 0 : A \cup I_\delta(x_0) = A. \tag{6.39}$$

Siamo ora in grado di rispondere alla seconda domanda che ci eravamo posti in precedenza *Quando,* $x \to x_0$, *la funzione* f *puó tendere ad un valore* $l \neq f((x_0)$.

6.2.1 Continuitá nel punto.

Continuitá nel punto x_0.

Definizione 6.4 *Si dice che una funzione* f, *definita in un intervallo* (a, b) *é continua nel punto* $x_0 \in |a, b|$, *interno all'intervallo* (a, b), *se accade che:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.40}$$

* **Osservazione 6.1** *Come si puó notare questa volta nell'indicare il dominio si é ora usato, invece del generico insieme* A, *un intervallo. Il motivo é che, nella maggior parte dei casi, le funzioni sono definite in un solo intervallo con la eventuale esclusione di qualche punto di esso. É ovvio che quanto diremo sugli intervalli si puó ripetere, facendo attenzione a non cadere in trappole matematiche per domini generici costituiti dalla unione di diversi intervalli.*

Punto di frontiera. %textbfDefinizione.

Definizione 6.5 *Sia A $\subseteq \mathbb{R}$ un insieme numerico, si dice che il punto x_0 é un punto di frontiera (o punto estremo) di A se comunque si prenda un intorno completo di x_0, $I_\delta(x_0)$ esso contiene punti appartenenti ad A e punti non appartenenti ad A.*

Continuitá nel punto x_0 di frontiera o estremo.

Definizione 6.6 *Si dice che che una funzione f, definita in un intervallo (a, b), é continua nei punti di frontiera a, b dell'intervallo $|a, b|$, se accade che:*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \tag{6.41}$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a). \tag{6.42}$$

∗ **Nota 6.5** *Si noti che puó accadere che la funzione sia continua in uno solo dei punti di frontiera.*

6.2.2 Continuitá nell'intervallo

Continuitá nell'intervallo.

Definizione 6.7 *Una funzione f definita nell'intervallo (a, b) (aperto o chiuso) é ivi continua se essa é continua per ogni $x \in (a, b)$, cioé se:*

$$\forall x^* \in |a, b| \Rightarrow \lim_{x \to x^*} = f(x^*) \tag{6.43}$$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \tag{6.44}$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a). \tag{6.45}$$

6.2.3 Operazioni tra funzioni continue

Considerate le funzioni continue valgono i teoremi seguenti di cui si suggerisce di provare le dimostrazioni usando le stesse tecniche adoperate in precedenza per i limiti.

TEOREMA 6.6 *Siano f e g tali che possano essere definite la funzione combinazione lineare, la funzione prodotto e la funzione rapporto. Siano inoltre c_1 e c_2 due costanti reali. Se f e g sono continue in x_0 allora risultano anche continue in x_0 le funzioni:*

1. $h_c(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$
2. $h_p(x) = f(x) \cdot g(x)$
3. $h_r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
   Infatti se $g(x_0) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che $\forall x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow g(x) \neq 0$, quindi $h_r(x)$ é ivi definibile ed é anche continua in x_0.

COROLLARIO 6.6.1 *Il teorema precedente puó estendersi a tutti i punti in cui sono continue le funzioni f e g. Quindi se f e g sono continue in un comune intervallo (a, b) sono ivi continue anche la funzione combinazione lineare, la funzione prodotto e, con le ovvie restrizioni sui punti in cui $g(x) = 0$, anche la funzione rapporto.*

TEOREMA 6.7 *Sia f una funzione definita in un insieme A e continua in $x_0 \in$ A e sia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset$ A una successione numerica convergente ad x_0, allora:*

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0). \tag{6.46}$$

∗ **Nota 6.6** *Il risultato del teorema puó altresí scriversi come*

$$\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n),$$

cioé nelle ipotesi del teorema é possibile invertire il segno di limite con quello di funzione.

6.2.4 Funzioni Uniformemente Continue.

La continuitá é una proprietá che vale puntualmente, cioé una proprietá locale, che puó valere per tutti i punti di un intervallo. Si tratta, in questo caso della estensione *globale* di una proprietá locale.
Vediamo, qui di seguito, una proprietá naturalmente globale.

Definizione 6.8 *Una funzione f definita in un intervallo (a, b) si dice uniformemente continua in (a, b) se:*

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall\, x', x'' \in (a, b)\ ,\ |\, x' - x''\, | < \delta \\ &\qquad \textit{risulta} \quad |\ f(x') - f(x'')\ | < \epsilon. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Per le funzioni unformemente continue valgono le seguenti proprietá.

TEOREMA 6.8 *Una funzione uniformemente continua in un intervallo (a, b) é anche continua in (a, b).*

TEOREMA 6.9 *Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $|a, b|$ é ivi anche uniformemente continua.*

TEOREMA 6.10 *Una funzione continua in un intervallo chiuso non limitato e convergente all'infinito é ivi uniformemente continua.*

TEOREMA 6.11 *Una funzione uniformemente continua in un intervallo aperto e limitato $|a, b|$ puó essere prolungata in una funzione continua nell'intervallo chiuso $|a, b|$.*

6.3 Proprietá delle funzioni continue

Esamineremo qui di seguito alcune proprietá delle funzioni continue che, si ritiengono, molto importanti.

TEOREMA 6.12 *(Teorema della permanenza del segno). Se una funzione f definita nell'intervallo (a, b) é continua e positiva /negativa/ in $x_0 \in (a, b)$, esiste un intorno del punto x_0, $I_\delta(x_0)$, nel quale la funzione f é ancora positiva /negativa/.*

Dimostrazione. Il teorema é una conseguenza di quello analogo dimostrato per i limiti.

TEOREMA 6.13 *(Teorema di esistenza degli zeri).*
Sia f una funzione definita in un intervallo (a, b), se essa é continua in un punto x_0 tale che, comunque si prenda un intorno del punto x_0, $I_\delta(x_0)$, essa assume sempre in tale intorno sia valori positivi che valori non positivi, allora si ha $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Il teorema é una conseguenza del teorema precedente. Infatti se, per assurdo, fosse $f(x_0) > 0$ allora dovrebbe esistere un intorno di x_0 per i punti del quale deve aversi $f(x) > 0$. Poiché ció non é, per le ipotesi del presente teorema, si deve escludere che sia $f(x_0) > 0$. ed assumere che sia $f(x_0) \leq 0$.
Ragionando in modo analogo si deve escludere che sia $f(x_0) < 0$ ed assumere che sia $f(x_0) \geq 0$.
Ma, se contemporaneamente valgono le relazioni $f(x_0) \leq 0$ e $f(x_0) \geq 0$, dal postulato n. 8 dei numeri reali segue $f(x_0) = 0$. Q.E.D.

TEOREMA 6.14 *Una funzione f continua nell'intervallo (a, b) non puó ivi assumere due valori α e β (supponiamo sia $\alpha < \beta$) senza assumere tutti i valori dell'intervallo $[\alpha, \beta]$.*

TEOREMA 6.15 *(Teorema di Weierstrass). Una funzione f continua nell'intervallo chiuso e limitato $|a, b|$ é ivi sempre dotata di minimo, m, e massimo, M.*

TEOREMA 6.16 *Una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $|a, b|$ assume tutti i valori dell'intervallo $|m, M|$.*

Dimostrazione. Il teorema segue immediatamente dai teoremi 3 e 4.

TEOREMA 6.17 *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $|a, b|$. Detti $f(a) \neq f(b)$ i valori assunti dalla funzione agli estremi (per fissare le idee supponiamo $f(a) < f(b)$) e detto s un numero reale compreso tra questi, cioé $f(a) < s < f(b)$, allora esiste un $\bar{x} \in |a, b|$ per il quale risulta $f(\bar{x}) = s$.*

Dimostrazione. Il teorema discende immediatamente dai teoremi 3 e 5.

COROLLARIO 6.17.1 *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $|a, b|$. Detti m e M rispettivamente il minimo e massimo ivi assunti dalla funzione ed s un numero reale compreso tra questi, cioé $m < s < M$, allora esiste $\bar{x} \in |a, b|$ per il quale risulta $f(\bar{x}) = s$.*

Dimostrazione. Il teorema é immediata conseguenza dei teoremi 3 e 5.

6.4 Punti di discontinuitá delle funzioni

Definizione 6.9 *Sia f una funzione definita in un intervallo (a, b) e sia $c \in (a, b)$. Se:*
i) f é non dotata di limite in c, cioé se $\nexists \lim_{x \to c} f(x)$,
oppure:
ii) se pur essendo convergente, si ha:

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c), \tag{6.48}$$

allora c si dice punto singolare o punto di discontinuitá della funzione $f(x)$.

6.4.1 Punti di discontinuitá eliminabile.

Nel caso in cui valga la (6.48) vedremo qui di seguito come si può eliminare

1. Se vale la condizione (6.48) allora basta definire la funzione:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \neq c \\ f(c) & x = c. \end{cases} \tag{6.49}$$

2. Se, invece f é definita per $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ e $\lim_{x \to c} f(x) = L$, allora é possibile definire una nuova funzione detta **estensione continua o prolungamento per continuitá** nel modo seguente:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \forall\, x \in (a,b),\ x \neq c \\ L & x = c. \end{cases} \tag{6.50}$$

1. **Discontinutá di I specie**
   Sia f una funzione definita in (a,b) e sia $c \in (a,b)$.
   Si dice che c é un punto di discontinuitá di I specie se la funzione, non dotata di limite in c, é dotata di limite destro e sinistro distinti, cioé:

$$\lim_{x \to c-} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to c+} f(x) = l_2, \quad \text{e} \quad l_1 \neq l_2. \tag{6.51}$$

2. **Discontinutá di II specie**
   Si dice che c é un punto di discontinuitá di II specie se almeno uno (o entrambi) dei limiti destro o sinistro di f, per $x \to c$, non esistono.
3. **Punto di infinito**
   Si dice infine che c é un punto di infinito della funzione se $f(x)$ é divergente a destra oppure a sinistra oppure ancora da entrambi i lati.

• **Esempio 6.7** *Sia f la funzione definita in $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dalla relazione:*

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}.$$

Considerato il punto $c = 1$ del dominio della funzione f si definisce:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} & \forall\, x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = 1. \end{cases}$$

La funzione $F(x)$ é il prolungamento per continuitá della funzione f nel punto $x = 1$.

6.4.2 Funzione monotone.

Sono state giá date le definizioni di funzioni crescente, non decrescente, decrescente e non crescente. Si vogliono stabilire ora alcune proprietá di queste funzioni monotone.

TEOREMA 6.18 *I punti di discontinuitá di una funzione monotona sono tutti di I specie.*

TEOREMA 6.19 *Se f é una funzione monotona nell'intervallo $[a,b]$ ed assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ ed $f(b)$, allora $f(x)$ é continua in $\forall x \in [a,b]$.*

TEOREMA 6.20 *Se $a \in \mathbb{R}$ é una costante reale, le funzioni:*

$$x^a, \quad a^x, \quad \log_a x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x$$

sono continue in ogni intervallo limitato che non contenga punti in cui queste non sono definite.

6.5 Infinitesimi ed infiniti

Analogamente a quanto si é visto con le successioni si danno qui di seguito le seguenti definizioni.
Definizioni.

1. Una funzione f si dice **infinitesima** in un punto x_0 (finito o infinito) se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0; \tag{6.52}$$

2. Una funzione f si dice **infinitamente grande** in un punto x_0 (finito o infinito) se:

$$\lim_{x \to x_0} |\, f(x) \,| = +\infty. \tag{6.53}$$

6.5.1 Ordine degli infinitesimi ed infiniti.

Consideriamo le funzioni f e g entrambe infinitesime in x_0 (finito o infinito) e, supposto che sia $\forall x \neq x_0 \;\; g(x) \neq 0$, si consideri la funzione rapporto:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Possono presentarsi quattro casi distinti:

1. Se accade che la funzione h é convergente in x_0 ed il limite é una quantitá finita diversa da zero, cioé se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \neq 0, \tag{6.54}$$

allora f e g sono:

infinitesimi dello stesso ordine in x_0.

2. Se accade che la funzione h é infinitesima in x_0, cioé se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0, \tag{6.55}$$

allora $f(x)$ si dice:

infinitesima di ordine superiore rispetto a $g(x)$ in x_0.

3. Se accade che la funzione h é infinitamente grande x_0, cioé se:

$$\lim_{x \to x_0} \mid h(x) \mid = +\infty, \tag{6.56}$$

allora $f(x)$ si dice:

infinitesima di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ in x_0.

4. Se accade che la funzione h non ammette limite in x_0, cioé se:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} h(x), \tag{6.57}$$

allora si dice che:

$f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi non paragonabili in x_0.

Estensione delle definizioni. Definizioni analoghe possono essere date per le funzioni infinitamente grandi in x_0.
In tal caso si parla di **infiniti** dello stesso ordine, di ordine inferiore o superiore.

1. le funzioni f e g sono **infiniti dello stesso ordine** in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \neq 0 \tag{6.58}$$

2. la funzione f é in x_0 **infinito di ordine superiore** rispetto a g se:

$$\lim_{x \to x_0} \mid h(x) \mid = +\infty \tag{6.59}$$

3. la funzione f é in x_0 **infinito di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0. \tag{6.60}$$

4. le funzioni f e g sono **infiniti non paragonabili** in x_0 se:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} h(x). \tag{6.61}$$

Ordine dell'infinitesimo (infinito). Siano g una funzione positiva in x_0 ed $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \neq 0, \tag{6.62}$$

allora la f si dice infinitesima (infinito) di ordine α rispetto a g in x_0.

Si osservi che:

- se $|\alpha| < 1 \Rightarrow f$ é infinitesimo | infinito | di ordine inferiore rispetto a g in x_0,
- se $|\alpha| = 1 \Rightarrow f$ e g sono infinitesimi | infiniti | dello stesso ordine in x_0,
- se $|\alpha| > 1 \Rightarrow f(x)$ é infinitesimo | infinito | di ordine superiore rispetto a g in x_0,

Se per α grande a piacere la f é un infinitesimo o un infinito di ordine superiore (inferiore) rispetto a $[g]^\alpha$ allora si dice che f é un infinitesimo | infinito | di ordine infinitamente grande (piccolo) rispetto a g.

• **Esempio 6.8** *Le funzioni* $f(x) = 5x^2 - 3x$ *e* $g(x) = 2x^2 + 12x$, *sono chiaramente infinitesime in* $x_0 = 0$. *Consideriamo:*

$$h(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x^2 + 12x} \quad \textit{ed ottenamo che:}$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x(5x-3)}{x(2x+12)} = -\frac{3}{12}$$

$$\Longrightarrow \quad f, g \textit{ infinitesimi dello stesso ordine.}$$

• **Esempio 6.9** *Le funzioni* $f(x) = (x-3)^3$ *e* $g(x) = 6(x-3)^2 + 4(x-3)$ *sono chiaramente infinitesime in* $x_0 = 3$. *Considero:*

$$h(x) = \frac{(x-3)^3}{6(x-3)^2 + 4(x-3)} \quad \textit{e ottengo che:}$$

$$\lim_{x \to 3} h(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-3)^2}{(x-3)[6(x-3)+4]} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{6x-14} = 0$$

allora $f(x)$ *é infinitesimo di ordine superiore rispetto a* $g(x)$.

• **Esempio 6.10** *Le funzioni* $f(x) = 6(x-3)^2 + 4(x-3)$ *e* $g(x) = (x-3)^3$ *sono infinitesime in* $x_0 = 3$. *Considerata:*

$$h(x) = \frac{6(x-3)^2 + 4(x-3)}{(x-3)^3} \quad \textit{si ottiene che:}$$

$$\lim_{x \to 3} |\, h(x) \,| = \lim_{x \to 3} \left| \frac{(x-3)[6(x-3)+4]}{(x-3)(x-3)^2} \right| = +\infty \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \textit{é infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } g(x).$$

• **Esempio 6.11** *Le funzioni* $f(x) = \sin x$ *e* $g(x) = x$ *sono infinitesime in* $x_0 = 0$. *Proviamo che sono infinitesime dello stesso ordine e che*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Per $|\, x \,| < \frac{\pi}{2}$ *si ha:*

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \textit{dividendo per } |\sin x|$$

$$1 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{\cos x} \right| \quad \textit{da cui il limite, per } x \to 0,$$

$$\lim_{x \to 0} 1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}.$$

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textit{c.v.d.}$$

essendo $\cos x$ *continua e non nulla in* $x = 0$.

• **Esempio 6.12** *Le fuzioni* $f(x) = 1 - \cos x$ *e* $g(x) = x$ *sono infinitesime in* $x_0 = 0$. *Proviamo che:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ $f(x) = 1 - \cos x$ *é un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad* x.

6.5.2 Infinitesimi e infiniti: Teoremi.

TEOREMA 6.21 *Se* f_1, g_1, f_2, g_2 *sono quattro funzioni tutte infinitesime per* $x \to x_0$ *e se* g_1, g_2 *sono infinitesime di ordine superiore rispettivamente rispetto ad* f_1, f_2, *si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Dimostrazione. É possibile scrivere:

$$\frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1 + \frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}}$$

e per le ipotesi del teorema:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1+\frac{g_1(x)}{f_1(x)}}{\frac{1+g_2(x)}{f_2(x)}} = 1, \quad \text{da cui l'asserto.}$$

Con analogo procedimento si posso dimostrare i seguenti teoremi relativi agli *infiniti*.

TEOREMA 6.22 *Se f e g sono due infiniti per $x \to x_0$, di cui il primo di ordine superiore rispetto al secondo, anche la loro somma é un infinito.*

TEOREMA 6.23 *Se f_1, g_1, f_2, g_2 sono quattro funzioni tutte infinitamente grandi per $x \to x_0$ e se g_1, g_2 sono di ordine superiore rispettivamente rispetto ad f_1, f_2, si ha:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

ammesso che esistano i precedenti limiti.

Capitolo 7

Derivate delle funzioni

7.1 Concetto di derivata

La conoscenza della derivata é di fondamentale importanza per conoscere l'andamento della funzione. La derivata di una funzione é una quantitá che *misura* la rapiditá con cui la funzione varia al variare della variabile indipendente.

Sia f una funzione reale definita in (a,b) e siano $x, x_0 \in (a,b)$. Definizioni. Si pone:

- **incremento della funzione** f, corrispondente al passaggio da x_0 ad x, la differenza

$$\Delta f = f(x) - f(x_0); \tag{7.1}$$

- **incremento della variabile indipendente**, la differenza:

$$\Delta x = x - x_0, \tag{7.2}$$

- **rapporto incrementale**, la quantitá:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{7.3}$$

Definizione 7.1 *Si definisce **derivata della funzione** f **nel punto** x_0 il limite, se esiste ed é finito, del rapporto incrementale al tendere di $x \to x_0$, cioé:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{7.4}$$

ovvero

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{7.5}$$

Osserviamo che la derivata é un concetto puntuale come il limite. Se la funzione ammette derivata in x_0 allora si dice **derivabile** in x_0.

Se, inoltre, la funzione f é derivabile in tutti i punti, ovviamente solo interni, dell'intervallo allora si dice: **derivabile nell'intervallo** $]a,b[$. **Definizione.** Se una funzione f é dotata di derivata prima in ogni punto dell'intervallo, allora risulta definita una nuova funzione che chiameremo **funzione derivata prima** e si indica, equivalentemente, con

$$Df(x), \quad f'(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{df}{dx}. \tag{7.6}$$

TEOREMA 7.1 *Se una funzione f é derivabile in un punto x_0 appartenente al dominio della funzione, allora f é continua in x_0.*

Dimostrazione. Per ipotesi la funzione é derivabile in un punto x_0, quindi esiste finito il limite del rapporto incrementale che indicheremo con λ. Dalla definizione di limite si ha:

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\ \forall x\in I_\delta(x_0)$$

$$\text{risulta}\quad \lambda-\epsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\lambda+\epsilon$$

Detto $L=max\{\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon\}$ si ha

$$f(x)-f(x_0)<L\,|\,x-x_0\,|\quad\forall\ |\,x-x_0\,|<\delta$$

$$\Rightarrow\ f(x)-f(x_0)<L\,|\,x-x_0\,|<L\delta\quad\text{se si considera } L\delta<\epsilon$$

$$\text{si ha:}\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\qquad \text{c.v.d.}$$

7.1.1 Interpretazione geometrica della derivata.

Nella figura (7.1) l'incremento della funzione e della variabile indipendente sono indicati con Δy e Δx rispettivamente. Le quantitá Δy e Δx sono i cateti del triangolo rettangolo chiuso dalla ipotenusa P_0P. Un risultato di trigonometria afferma che: *la lunghezza di un cateto é eguale alla lunghezza dell'altro per la tangente dell'angolo α opposto al primo cateto.* Ne consegue quindi:

$$\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

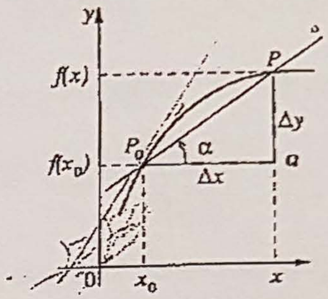


Figura 7.1: Significato geometrico della derivata

Passando al limite per $x\to x_0$ la retta secante su cui giace l'ipotenusa P_0P tende alla retta tangente alla curva $y=f(x)$.
Detto β l'angolo che tale retta tangente forma con l'asse delle x, si ha:

$$\tan\beta=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

L'equazione della retta s passante per i punti $P_0=(x_0,f(x_0))$ e $P=(x,f(x))$ é data da:

$$\frac{Y-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}=\frac{X-x_0}{x-x_0}\ \Rightarrow\ Y-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Passando al limite per $x\to x_0$ in entrambi i membri della precedente uguaglianza, si ottiene l'equazione della retta tangente in x_0:

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(X-x_0).$$

La derivata della funzione f nel punto x_0 é il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto x_0.

Rette tangenti verticali - Assegnata una funzione f non derivabile in x_0, precisamente sia $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\ [-\infty]$.
La trattazione geometrica prima svolta può ripetersi in modo assolutamente analogo. Tuttavia il passaggio al limite non é possibile in quando il limite del rapporto incrementale diverge a $+\infty\ [-\infty]$.
É facile tuttavia riconoscere che in questo caso la retta tangente ala curva $y=f(x)$ nel punto di ascissa x_0 é la retta parallela all'asse Y di equazione $X=x_0$.

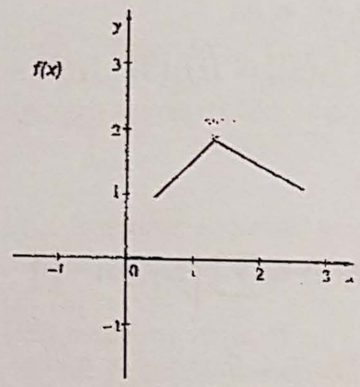


Figura 7.2: Punto angoloso

7.1.2 Punti angolisi e cuspidali.

Punti angolosi - Si dice che il punto x_0 appartenente al dominio di una funzione f é un **punto angoloso** se f é non derivabile nel punto x_0 ed esistono finiti e distinti i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lambda',\ \text{e}\ \lim_{x\to x_0+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lambda''\ \text{con}\ \lambda'\neq\lambda''. \qquad (7.7)$$

Punti cuspidali o cuspidi - Si dice che il punto x_0 appartenente al dominio di una funzione f é un **punto cuspidale o cuspide** se f é non derivabile nel punto x_0 e si verifica uno dei seguenti casi:

$$(a)\qquad \lim_{x\to x_0-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\infty\ \text{e}\ \lim_{x\to x_0+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=+\infty \qquad (7.8)$$

oppure

$$(b)\qquad \lim_{x\to x_0-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=+\infty\ \text{e}\ \lim_{x\to x_0+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\infty. \qquad (7.9)$$

7.1.3 Primi esempi di derivate.

Mostriamo qui di seguito alcuni esempi semplici di derivate.

1. $f(x)=c,\ \ c\in\mathbb{R},\ costante\ \Rightarrow\ f'(x)=0.$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=0\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\Delta f/h=0$

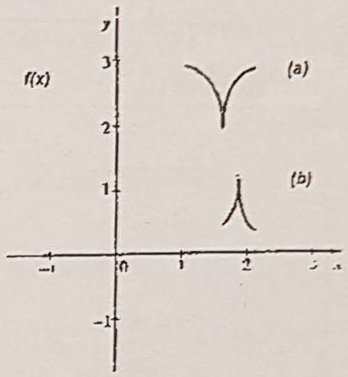


Figura 7.3: Punto cuspidale

2. $f(x)=x\ \ \Rightarrow\ \ f'(x)=1.$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=h\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\Delta f/h=1$

3. $f(x)=a\cdot x,\ \ a\in\mathbb{R},\ costante\ \Rightarrow\ f'(x)=a.$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=a\cdot h\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\Delta f/h=a$

4. $f(x)=ax+b,\ \ a,b\in\mathbb{R},\ costanti\ \Rightarrow\ f'(x)=a.$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=ah\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\Delta f/h=a.$

5. $f(x)=x^2\ \ \Rightarrow\ \ f'(x)=2x.$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2hx+h^2-x^2=2h(x+h)\ \Rightarrow$ $\lim_{h\to 0}\Delta f/h=\lim_{h\to 0}2(x+h)=2x.$

6. $f(x)=1/x\ \ \Rightarrow\ \ f'(x)=-1/x^2\ \ \forall x\neq 0.$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=-\frac{h}{x(x+h)}\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\Delta f/h=$ $\lim_{h\to 0}-\frac{h}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}.$

7. $f(x)=\sqrt{x}\ \ \Rightarrow\ \ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \ \forall x>0$
   Infatti: $\Delta f=f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}=(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$ $\frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\Delta f/h=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

8. $f(x)=|\,x\,|\ \ \Rightarrow\ \ f'(x)=segn(x).$
   Infatti: i) se $x>0,\Rightarrow|\,x\,|=x;\ \ f'(x)=1,$
   ii) se $x<0,\Rightarrow|\,x\,|=-x,\ \ f'(x)=-1\ \Rightarrow\ f'(x)=segn(x).$
   Nota. La funzione $f(x)=|\,x\,|$ non é derivabile in $x=0$. Tale punto, é facile riconoscere, è un punto angoloso.

7.1.4 Derivate Fondamentali.

funzione	derivata	Note
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
x^0	0	
x^1	1	
x^2	$2x$	
x^{-1}	$-\frac{1}{x^2}$	
$x^{1/2}$	$\frac{1}{2x^{1/2}}$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\forall\alpha \in \mathbb{R}$ e solo se $x^\alpha, x^{\alpha-1}$ hanno senso.
a^x	$a^x \ln_e a$	$\forall a > 0$
e^x	e^x	caso particolare del prec.
a^{-x}	$-a^{-x}\ln_e a$	$\forall a > 0$
e^{-x}	$-e^{-x}$	caso particolare del prec.
$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}\log_a(e)$	$\forall a > 0, a \neq 1, x \neq 0$
$\log_e \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$

7.1.5 Regole di Derivazione

TEOREMA 7.2 *Siano f_1 ed f_2 due funzioni reali derivabili in un generico intervallo (a,b) e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ due costanti reali, allora:*

$$\frac{d}{dx}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 D f_1(x) + c_2 D f_2(x), \ \forall x \in (a,b), \tag{7.10}$$

In generale

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i D f_i(x), \ \forall x \in (a,b). \tag{7.11}$$

TEOREMA 7.3 *Siano f_1 ed f_2 due funzioni reali derivabili in un generico (a,b), si ha:*

$$D[f_1(x)\cdot f_2(x)] = Df_1(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot Df_2(x), \ \forall x \in (a,b). \tag{7.12}$$

In generale

$$D\prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[Df_i(x)\prod_{j=1;j\neq i}^{n} f_j(x), \ \forall x \in (a,b).\right] \tag{7.13}$$

TEOREMA 7.4 *Siano f e g due funzioni reali derivabili in un generico intervallo (a,b), allora il loro rapporto é derivabile in tutti i punti di (a,b) nei quali $g(x) \neq 0$, e vale:*

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}, \tag{7.14}$$

da cui il caso particolare

$$D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{Dg(x)}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \tag{7.15}$$

TEOREMA 7.5 *La funzione inversa di una funzione reale di variabile reale, continua é anch'essa continua.*

TEOREMA 7.6 *Una funzione reale crescente, o decrescente, definita in un intervallo $[a,b]$, é invertibile in tale intervallo.*

TEOREMA 7.7 *Sia f una funziona reale crescente, o decrescente, definita in un intervallo $[a,b]$, ed ivi derivabile.*
Se $f'(x) \neq 0, \forall x \in [c,d] \subseteq [a,b]$ allora anche la funzione inversa di f detta φ o f^{-1} é derivabile e si ha:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \forall x \in [c,d]. \tag{7.16}$$

7.1.6 Derivate delle funzioni composte.

Richiamiamo i criteri con i quali é possibile definire una funzione composta.
Siano date due funzioni:
$y : \mathrm{A} \to \mathrm{B}, \ y = y(x)$ e $z : \mathrm{B} \to \mathrm{C}, \ z = z(y)$,
allora é lecito considerare la funzione composta:

$$z[y(x)] : \mathrm{A} \to \mathrm{C}, \quad \text{essendo:} \quad (z \circ y)(x) = z[y(x)].$$

Per tale funzione valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 7.8 *Una funzione reale di variabile reale, composta per mezzo di due funzioni continue é anch'essa continua.*

TEOREMA 7.9 *Una funzione reale di variabile reale, $u = F[\varphi(x)]$, composta per mezzo di due funzioni derivabili é anch'essa derivabile e la sua derivata é eguale al prodotto delle derivate delle funzioni componenti, cioé:*

$$D\,F[\varphi(x)] = F'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x). \tag{7.17}$$

7.1.7 Derivate delle funzioni composte ed esempi.

Si considerino derivate delle funzioni ed esempi, calcolati per tutti i valori della variabile x per cui abbiamo significato le relazioni qui di seguito trattate.

1. $D\,[f(x)]^\alpha = \alpha[f(x)]^{\alpha-1}\ f'(x)$.
   Quindi, se $f(x) = [3x^2 + 5x + 2]^3$, ponendo $f(y) = y^3$, $y = [3x^2 + 5x + 2]$, ne segue
   $$f'(x) = 3[3x^2 + 5x + 2]^2 \cdot (6x + 5).$$

2. $D\ \log[y(x)] = \frac{y'(x)}{y(x)}$.
   Quindi se $f(x) = \log(x^2 + 1)$ ponendo $f = f(y) = \log(y)$ e $y = y(x) = x^2 + 1$ e $f = f[y(x)]$, ne segue
   $$Df == \frac{1}{y} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

3. $De^{\varphi(x)} = e^{y(x)} \cdot \varphi'(x)$.
   Quindi se $f(x) = e^{(5x^2+1)}$, ponendo $f(x) = e^{\varphi(x)}$, $\varphi(x) = 5x^2 + 1$, si ha: $Df(x) = e^{(5x^2+1)} \cdot (10x)$.

4. Se $f(x) = \sin(\varphi(x))$, allora $Df(x) = \varphi'(x) \cdot \cos(\varphi(x))$.

5. Se $f(x) = \cos(\varphi(x))$, allora $Df(x) = \varphi'(x) \cdot (-\sin(\varphi(x)))$.

6. Data la funzione: $u = |\ f(x)\ |^{g(x)}$, calcolare Du.
   Adoperando il seguente espediente:
   $$u(x) = |\ f(x)\ |^{g(x)} = e^{\log(f(x))^{g(x)}} = \\ = e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$
   si ha, quindi:
   $$\begin{aligned} D[f(x)]^{g(x)} &= D\ |\ e^{g(x)\cdot\log(f(x))}\ | = \\ &= e^{g(x)\log(f(x))} \cdot D[\ g(x) \cdot \log(f(x))\ | = \\ &= |\ f(x)^{g(x)}| \cdot \left[\ g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\ \right] \end{aligned} \tag{7.18}$$

- Esempio 7.1 *Se $f(x) = x^x$, allora:*
  $$f'(x) = x^x \cdot |\ 1 \cdot \log x\ +\ x/x\ | = x^x[\log x + 1].$$

7.1.8 Differenziale.

Approssimazioni per piccole variazioni.

Concetto di differenziale Sia f una funzione reale derivabile nell'intervallo (a, b). Si considerino la quantitá:

$$\omega = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) \tag{7.19}$$

É noto, data l'ipotesi di derivabilitá della funzione f, che:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \omega = 0. \tag{7.20}$$

Riscriviamo ora la (7.19) nella forma:

$$\Delta f = f'(x)\Delta x\ +\ \omega\Delta x \tag{7.21}$$

Definizione 7.2 *Si definisce differenziale della funzione $y = f(x)$, e si indica con dy o df, la quantitá:*

$$dy\ =\ df\ = f'(x)\Delta x, \tag{7.22}$$

da cui

$$\Delta f = \ df\ + \omega\Delta x. \tag{7.23}$$

É facile convincersi che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{1}{\omega} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{df}{\omega \, \Delta x} \right| = +\infty. \tag{7.24}$$

Quindi la quantitá $\omega \Delta x$ é un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δf e df. Ne consegue la seguente affermazione.

ASSERTO 7.1 *L'incremento Δf ed il differenziale df differiscono per un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, ovvero $\Delta f = df + O((\Delta x)^2)$.*

Questo giustifica il fatto che si usa spesso la eguaglianza approssimata $\Delta f \approx df$. Inoltre, essendo: $\Delta f = f(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, si ha:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + O(sup). \tag{7.25}$$

Trascurando l'infinitesimo di ordine superiore si ottiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{7.26}$$

La formula trovata permette di calcolare la funzione continua nel punto $x + \Delta x$, conoscendo semplicemente il valore della funzione e della derivata prima nel generico punto x.

Interpretazione geometrica del differenziale. Per comprendere il significato geometrico del differenziale si consideri l'equazione della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel generico punto $\bar{x}$, cioé:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y = f(x) + f'(x)(X - x).$$

Se lungo la retta tangente si vuole calcolare la y nel punto $x + \Delta x$ si ha:

$$y(x + dx) = f(x) + f'(x)((X + \Delta x) - x) \tag{7.27}$$
$$= f(x) + f'(x)\Delta x = f(x) + df \tag{7.28}$$

$\Rightarrow$ df rappresenta l'incremento dell'ordinata sulla retta tangente alla curva quando si passa da x a $x + d\Delta x$.

7.2 Teoremi del calcolo differenziale

I teoremi che seguono sono detti, per la loro importanza nelle applicazioni, teoremi fondamentali del calcolo differenziale.

TEOREMA 7.10 *(di Lagrange). Sia f una funzione reale definita e continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'aperto $]a, b[$. Allora:*

$$\exists \xi \in]a, b[: \quad f(b) - f(a) = (b - a) f(\xi). \tag{7.29}$$

Interpretazione geometrica. Osserviamo innanzitutto che la corda che unisce i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ forma con l'asse delle x un angolo α la cui tangente é:

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.30}$$

Il teorema di Lagrange afferma pertanto che esiste una tangente alla curva $G_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$ parallela alla corda che passa per gli estremi A e B. Il punto di tangenza é il punto $P = (\xi, f(\xi))$.

TEOREMA 7.11 *(di Rolle). Sia f una funzione reale definita e continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'aperto $]a, b[$, e sia $f(a) = f(b)$. Allora:*

$$\exists \, \xi \in]a, b[: \; f'(\xi) = 0. \tag{7.31}$$

Il teorema afferma quindi che esiste almeno un punto ξ, interno all'intervallo $]a, b[$, in cui la derivata della funzione f sia nulla.

Il teorema di Rolle é una conseguenza del teorema di Lagrange. Infatti se $f(a) = f(b)$ allora $\tan \alpha = 0$. Teorema (di Cauchy). Siano f e g due funzioni reali definite e continue nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$.
Se f' e g' non si annullano contemporaneamente ~~e $g(a) \neq g(b)$~~ allora:

$$\exists \, \xi \in]a, b[: \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{7.32}$$

7.2.1 Funzioni a derivata nulla.

Una una funzione costante ha derivata identicamente nulla, ci si chiede se é vero o no il contrario.
In generale non é sempre vero, é possibile una risposta affermativa con il seguente teorema, conseguenza del teorema di Lagrange.

TEOREMA 7.12 *Sia f una funzione reale definita in un intervallo (a,b) ed ivi derivabile. Se la derivata prima della funzione f é identicamente nulla nell'intervallo (a,b), allora é ivi costante, cioé:*

$$se\ f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow\ f(x)=const\ \ \forall x\in(a,b). \quad (7.33)$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di Lagrange, $\forall x', x''\in(a,b)$, si ha:

$$f(x')-f(x'')=0,$$

quindi:

$$f(x')=f(x'')=mboxcostante.$$

* Osservazione 7.1 *Se la funzione f non e' definita in un intervallo il viceversa non é sempre vero, infatti la funzione:*

$$f:|-\infty,0|\cup|0,+\infty|$$

che vale identicamente 0 in $|-\infty,0|$ ed 1 in $|0,+\infty|$, ha derivata prima nulla, pur non essendo una funzione costante. Ció perche' l'unione di due intervalli non é un intervallo.

7.2.2 Funzioni Primitive.

Definizione 7.3 *Siano date due funzioni F ed f entrambe reali e definite nello stesso intervallo (a,b). Si dice che la funzione F é una primitiva della funzione f se:*

$$F'(x)=f(x),\ \ \forall x\in(a,b),$$

cioé se la derivata di $F(x)$ é eguale a $f(x)$ in (a,b).

TEOREMA 7.13 *Se F é una primitiva di f in (a,b), allora tutte e sole le funzioni primitive di $f(x)$ sono della forma:*

$$F(x)+c, \quad (7.34)$$

dove c é una costante arbitraria.

Dimostrazione. Siano F_1 oltre ad F, un'altra primitiva di f, e g la funzione definita dalla legge:

$$g(x)=F(x)-F_1(x).$$

Tale funzione ha derivata nulla in (a,b), infatti

$$g'(x)=F'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Per il teorema precedente, si ha quindi:

$$F_1(x)=F(x)+c\ \ \forall x\in(a,b) \qquad c.v.d. \quad (7.35)$$

7.3 Limiti di forme indeterminate

Nella trattazione dei limiti, degli infinitesimi ed infiniti, si sono incontrate forme funzionali nelle quali non era predicibile il valore finito o meno del limite. Queste erano state chiamate *forme indeterminate*. Siamo ora in grado di affrontare queste situazioni mediante alcuni teoremi, che enunciamo, ma non dimostriamo.

TEOREMA 7.14 *(Primo teorema di l'Hopital). Siano f e g due funzioni reali definite e derivabili in un intervallo (a,b). Sia $x_0\in(a,b)$ un punto di tale intervallo tale che:*

$$f(x_0)=g(x_0),$$

sia:

$$g'(x)\neq 0\ \ \forall x\neq x_0$$

ed inoltre esiste il limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \ Allora\ anche\ il\ \ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \quad (7.36)$$

é ben determinato e vale la relazione:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.37)$$

TEOREMA 7.15 *(Estensione del primo teorema di l'Hopital). Il risultato del primo teorema di l'Hopital sussiste anche nelle seguenti ipotesi: f e g due funzioni reali definite e derivabili in un intervallo (a,b), continue per $x\neq x_0$ ed infinitesime per $x\to x_0$, essendo x_0 punto al finito o all'infinito. Se, infine:*

$$\exists\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.38)$$

TEOREMA 7.16 *(Secondo Teorema di l'Hopital). Siano f e g due funzioni reali definite e derivabili in un intervallo (a,b), $x \neq x_0$. Siano le funzioni infinitamente grandi per $x \to x_0$. Se inoltre $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ e se esiste:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora, esiste anche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale la seguente uguaglianza:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.39}$$

Il primo e secondo teorema di l'Hopital, si compendiano nel seguente unico enunciato.

Regola dell'Hospital.

Se al tendere di x verso un punto, finito o infinito, due funzioni f e g reali definite e derivabili nello stesso intervallo, sono entrambe infinitesime o entrambe infinitamente grandi, la ricerca del limite del rapporto delle due funzioni, $\frac{f}{g}$, puó essere ricondotta a quello del limite del rapporto delle loro derivate, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se quest'ultimo esiste, esiste anche il primo ed i due limiti sono eguali.

Questa regola risolve il problema delle forme indeterminate che si presentano nella forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Si noti che se il limite $x \to x_0$ del rapporto $\frac{f'}{g'}$ é ancora una forma indeterminata, nulla vieta, se per le funzioni f' e g' sono soddisfatte le ipotesi della regola di l'Hopital, di considerare il limite del rapporto $\frac{f''}{g''}$ e riapplicare la regola di l'Hopital.

Tuttavia, oltre alle forme indeterminate la cui soluzione si puó ottenere direttamente mediante la regola di l'Hopital, esistono anche altre forme indeterminate che non sembrano a prima vista riconducibili a tale regola. Queste sono le forme:

$$"0 \cdot \infty",$$

$$"\infty - \infty",$$

e quelle che provengono dal calcolo del limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}.$$

Vedremo che per lo studio delle forme indeterminate del tipo "$0 \cdot \infty$" e "$\infty - \infty$" ci si puó sempre ricondurre alla regola di l'Hopital.

Forma "$0 \cdot \infty$"

Siano f e g due funzioni reali definite e derivabili in un intervallo generico (a,b), x_0 punto di accumulazione (finito o infinito) di (a,b), tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty. \tag{7.40}$$

Considerata la funzione $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ per la quale, ovviamente, si ha; $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \tag{7.41}$$

si vede quindi che lo studio del limite é ricondotto alla regola di l'Hopital.

Forma indeterminata: "$\infty - \infty$"

Siano f e g due funzioni reali definite e derivabili in un intervallo generico (a,b), x_0 punto di accumulazione (finito o infinito) di (a,b), tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \tag{7.42}$$

e per le quali si vuole studiare il

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)].$$

Riscrivendo la differenza nella forma:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}, \tag{7.43}$$

si osserva che il limite viene ricondotto alla regola di l'Hopital.

Forme indeterminate che originano da $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$

Come osservato in precedenza, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, é lecito scrivere:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} \tag{7.44}$$

Si possono presentare diversi casi.

(a) $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}$.

In tal caso, per la continuitá della funzione esponenziale, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^l. \tag{7.45}$$

Se poi $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 allora $l = f(x_0)^{g(x_0)}$

(b) $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) =$" $0\cdot\infty$"

In questo caso non é possibile applicare il procedimento descritto in precedenza.

Questa situazione puó presentarsi nei seguenti tre casi:

b1) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to 0^0$

b2) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to \infty^0$

b3) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \to 1^\infty$.

Tali casi si risolvono considerando, equivalentemente, la funzione $g(x)\ln f(x)$ in una forma piú idonea per l'applicazione della regola di l'Hopital. Riscriviamo $g(x)\ln f(x)$ nei tre casi:

$$\text{b1)}\quad g(x)\ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \textit{oppure} \quad g(x)\ln f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \tag{7.46}$$

$$\text{b2)}\quad g(x)\ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \textit{oppure} \quad g(x)\ln f(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \tag{7.47}$$

$$\text{b3)}\quad g(x)\ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \tag{7.48}$$

Osservazione. Osserviamo che, a differenza delle forme esaminate nei casi precedenti (b1), (b2) e (b3), possono pure presentarsi

nei limiti del tipo in esame espressioni del tipo:

$$\text{“ } 0^{+\infty} \text{ ”} \qquad \text{“ } \infty^{\infty} \text{ ”} \tag{7.49}$$

Queste non sono da considerarsi forme indeterminate, dovendosi ovviamente porre:

$$\text{“ } 0^{+\infty} \text{ ”} = \text{“ } \infty^{-\infty} \text{ ”} = 0 \qquad \text{“ } 0^{-\infty} \text{ ”} = \text{“ } \infty^{+\infty} \text{ ”} = \infty. \tag{7.50}$$

7.3.1 Regola di l'Hopital - Esempi.

• Esempio 7.2 *Si voglia calcolare:* $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x$, *per* $\alpha > 0$.

Il limite si presenta nella forma "$0\cdot(-\infty)$" *Si ha:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x^\alpha}{\alpha} \\ &= 0\end{aligned}$$

• Esempio 7.3 *Si voglia calcolare:* $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}$, *essendo* $\alpha > 0$.

Il limite si presenta nella forma "$\infty\cdot 0$".

Sia n il piú piccolo numero intero maggiore o eguale ad α, quindi $n \geq \alpha$ ed applicando n-volte la regola di l'Hopital, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}}{e^x} = 0$$

$= 0$ che segue immediatamente dall'osservare che: $\alpha - n \leq 0$.

∗ Nota 7.1 *Il risultato cui si é pervenuti, e che vale $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Il limite dell'esempio precedente si puó scrivere come segue:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

ed affermare quindi che per $x \to +\infty$, e^{-x} é un infinitesimo di ordine infinitamente grande rispetto ad $\frac{1}{x}$

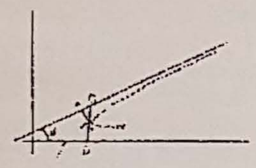


Figura 7.4: Asintoti obliqui.

7.4 Asintoti dei diagrammi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo non limitato, per fissare le idee sia tale intervallo del tipo : $(a, +\infty)$.

Definizione 7.4 *Si dice che una retta r di equazione $y = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$ é un asintoto per il diagramma della funzione $f(x)$ se la distanza d tra la retta ed il punto del diagramma di ascissa x tende a 0 al tendere di x a $+\infty$.*

Similimente, se si considera la funzione definita in un intervallo del tipo $(-\infty, b)$ si dice che la retta r di equazione $y = mx + n$ é un asintoto per il diagramma della funzione $f(x)$ se la distanza d tra la retta ed il punto del diagramma di ascissa x tende a 0 al tendere di x a $-\infty$.

Per calcolare d si consideri il triangolo PAQ, rettangolo in A. La distanza d é rappresentata dal segmento AP ortogonale alla retta r. Si indichi con α l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x e che corrisponde all'angolo in P del triangolo PAQ. Dalle formule trigonometriche sui triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{AP} = \overline{PQ} \cos\alpha \tag{7.51}$$

$$d = |f(x) - y| \cos\alpha = |f(x) - mx - n| \cos\alpha. \tag{7.52}$$

TEOREMA 7.17 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la retta r di equazione $y = mx + n$ sia un asintoto per il grafico della funzione reale f definita in $(a, +\infty)$ (similmente in $(-\infty, b)$) é che risulti:*

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0. \tag{7.53}$$

Dal teorema appena enunciato, e precisamente dalla (7.53) si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right] = 0, \tag{7.54}$$

da cui segue che il coefficiente angolare ed il termine noto dell'asintoto sono dati rispettivamente da:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{7.55}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]. \tag{7.56}$$

Casi particolari.

1) **Asintoti obliqui.** Gli asintoti obliqui si ottengono nel caso in cui $m \neq 0$.

2) **Asintoti orizzontali.** Gli asintoti orizzontali si ottengono per $m = 0$. Se, per fissare le idde, $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$, allora l'asintoto é una retta parallela all'asse x ed ha equazione $y = n$, essendo:

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x). \tag{7.57}$$

In tal caso si parla di asintoto orizzontale destro. Analogamente, per $x \to -\infty$, in tal caso si parla di asintoto orizzontale sinistro.

3) - **Asintoti verticali.** La retta $y = mx+n$ non puó mai essere parallela all'asse y. Infatti, *non possono esistere asintoti verticali per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$.* Al finito, cioé per $x \to x_0$, si dice che il diagramma di f ha un asintoto verticale in x_0 se il punto x_0 é un *punto di infinito* per la funzione f, cioé se acccade una o entrambe delle seguenti condizioni:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty. \tag{7.58}$$

Un asintoto verticale $x = x_0$ si dice *asintoto destro* se accade:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \textit{oppure} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \tag{7.59}$$

Il discorso é del tutto analogo nel caso $x \to x_0^-$, in tal caso la retta $x = x_0$ si definisce *asintoto sinistro.*

7.5 Funzioni Crescenti e Decrescenti

Lo studio della derivata prima permette di dare informazioni sull'andamento, crescente o decrescente, della funzione in un punto e in un intervallo. Ricordiamo, per prima cosa, la definizione di funzione crescente e decrescente.

Definizione 7.5 *Diremo che una funzione reale di variabile reale f é crescente (non decrescente) in un punto x_0 appartenente al dominio, se:*

$$\exists I_\delta(x_0) =]x_0-\delta, x_0[\cup]x_0, x_+\delta[: \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\Rightarrow f(x) < (\leq) f(x_0)$$
$$e\ \forall x \in]x_0, x_o+\delta[\ \Rightarrow f(x) > (\geq) f(x_0).$$

La definizione di funzione decrescente (non crescente) in x_0 si ottiene invertendo nella precedente definizione il verso delle disequazioni. Se le diseguaglianze scritte sopra non valgono in senso stretto la funzione si dice rispettivamente non decrescente e non crescente.

TEOREMA 7.18 *Se una funzione reale di variabile reale f definita e derivabile in un punto x_0 ha derivata prima positiva (negativa) in x_0, cioé:*

$$f'(x_0) > 0 \qquad (f'(x_0) < 0),$$

allora essa é crescente (decrescente) in x_0.

Dimostrazione. Invero essendo, per fissare le idee, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$, per il teorema di permanenza del segno é possibile trovare un $\delta > 0$ tale che,per ogni incremento Δx : $\forall |\Delta x| < \delta$, si abbia $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$, cioé:

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$$

che prova l'asserto quando si considera $\Delta x > 0$, analogamente:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$$

quando si considera $\Delta x < 0$.
L'estensione al caso delle funzioni decrescenti é ovvia e pertanto lasciata al lettore. Il teorema non é invertibile, si noti che le disuguaglianze del successivo teorema non sono in senso stretto.

TEOREMA 7.19 *Se f é una funzione reale di variabile reale, crescente /decrescente/ in un punto x_0 appartenente all'insieme di definizione, allora $\exists \delta > 0$: $\forall x \in I_\delta(x_0)$ $f'(x) \geq 0$ /$f'(x) \leq 0$/.*

Per avere una condizione che sia necessaria e sufficiente affinché una funzione sia crescenta alla condizione $f'(x) \geq 0$,
si deve aggiungere dell'altro. Precisamente vale il seguente risultato.

TEOREMA 7.20 *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché la funzione reale f definita e derivabile in un intervallo (a, b) sia in tale intervallo crescente /decrescente/ é che:*

A) $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b) \qquad [f'(x) \leq 0]$

B) $\nexists(\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \qquad f'(x) \equiv 0,\ \forall x \in (\alpha, \beta)$.

7.6 Massimi e minimi di una funzione

7.6.1 Massimi e minimi relativi di una funzione.

Definizione 7.6 *Si dice che un punto x_0 interno all'intervallo (a, b),é un punto di massimo /minimo/ relativo per una funzione reale f, definita in (a, b), se si puó trovare un suo intorno nel quale sia, per ogni x dell'intorno, $f(x) \leq f(x_0)$ /$f(x) \geq f(x_0)$/, cioé:*

$$\exists I_\delta : \forall x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \qquad [f(x) \geq f(x_0)] \tag{7.60}$$

Definizione 7.7 *Si dice che x_0 é un punto di massimo /minimo/ relativo proprio se:*

$$\exists I_\delta : \forall x \in I_\delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) \qquad [f(x) > f(x_0)]. \tag{7.61}$$

TEOREMA 7.21 *Sia f una funzione reale di variabile reale, dotata di derivata seconda in un punto x_0 appartenente al dominio della funzione. Condizione <u>necessaria</u> affinché x_0 sia di massimo /minimo/ relativo é che risulti:*

$$f'(x_0) = 0,\ ed\ f''(x_0) \leq 0 \qquad [f''(x_0) \geq 0]. \tag{7.62}$$

* Nota 7.2 *Il teorema precedente non é invertibile, infatti la funzione $f(x) = x^3$ ha in $x = 0$ derivata prima e seconda nulla, ma il punto non é né di massimo né di minimo per la funzione.*

TEOREMA 7.22 *Sia f una funzione reale di variabile reale, dotata di derivata seconda in un punto x_0 appartenente al dominio della funzione. Condizione sufficiente affinché f in x_0 abbia un massimo /minimo/ relativo é che risulti:*

$$f'(x_0) = 0, \text{ ed} \qquad f''(x_0) < 0 \qquad [f''(x_0) > 0]. \tag{7.63}$$

∗ Nota 7.3 *Rimarrebbe da esaminare il caso in cui $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Il risultato del teorema generale, che omettiamo, si ottiene con lo studio delle derivate successive alla derivata seconda.*

7.6.2 Massimi e minimi assoluti di una funzione.

Sia f una funzione reale definita in un intervallo $[a, b]$. Per il teorema di Wierstrass essa é dotata ivi dotata di massimo e minimo assoluti.
Quanto visto in precedenza permette di fissare la ricerca del massimo e minimo assoluti come segue.

1. Si cercano i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x)$ nell'aperto $]a, b[$; indichiamo tali punti rispettivamente con $\{x_{M_1}, x_{M_2}, \ldots, x_{M_n}\}$ e $\{x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}\}$;
2. si calcolano i valori della funzione neigli estremi: $f(a)$ e $f(b)$;
3. si trova il punto di massimo assoluto cercando il valore di x per cui risulta $\max\{f(a), f(b), f(x_{M_1}), f(x_{M_2}), \ldots, f(x_{M_n})\}$;
4. si trova il punto di minimo assoluto cercando il valore di x per cui risulta $\min\{f(a), f(b), f(x_{m_1}), f(x_{m_2}), \ldots, f(x_{m_k})\}$.

7.7 Concavitá, Convessitá, Flessi

Sebbene il concetto di concavitá e convessitá possa sembrare naturale é opportuno formulare tale nozione in linguaggio matematico.

Definizione 7.8 *Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in (a, b) e derivabile in $x_0 \in]a, b[$. Consideriamo la retta t tangente al grafico della funzione nel punto x_0. Tale retta divide il piano in due semipiani. Indichiamo con Π_0' quello superiore e con Π_0'' quello inferiore. Diremo che:*

A) $f(x)$ volge la concavitá /convessitá/ nel verso dell'asse y se

$$\exists I_\delta(x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow P = (x, f(x)) \in \Pi_0' \qquad \textit{concavitá}$$
$$\exists I_\delta(x_0) \; : \; \forall x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow P = (x, f(x)) \in \Pi_0'' \qquad \textit{convessitá}$$

B) Nel caso in cui non si verificano le condizioni precedenti diremo che x_0 é un punto di flesso. Piú precisamente si dice che x_0 é un punto di flesso proprio se:

$$\exists I_\delta(x_0) \; : \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[, \; P = (x, f(x)) \in \Pi_0'$$
$$\wedge \; \forall x \in]x_0, x_0 + \delta] \; P = (x, f(x)) \in \Pi_0''$$

o viceversa

$$: \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[, \; P = (x, f(x)) \in \Pi_0''$$
$$\wedge \; \forall x \in]x_0, x_0 + \delta] \; P = (x, f(x)) \in \Pi_0'$$

diremo che $f(x)$ ha un flesso in x_0.

Valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 7.23 *Sia f una funzione reale di variabile reale dotata di derivata seconda in un punto x_0 appartenente all'insieme di definizione della funzione. Se $f''(x_0) \neq 0$ allora il diagramma di $f(x)$ volge nel punto x_0 la concavitá ovvero la convessitá nel verso dell'asse y secondo che sia rispettivamente $f''(x_0) > 0$ ovvero $f''(x_0) < 0$.*

TEOREMA 7.24 *(Condizione Necessaria). Sia f una funzione reale di variabile reale dotata di derivata seconda in un punto x_0 appartenente all'insieme di definizione della funzione. Condizione necessaria affinché x_0 sia un punto di flesso del diagramma di $f(x)$ é che risulti $f''(x_0) = 0$.*

TEOREMA 7.25 *Sia f una funzione reale di variabile reale dotata di derivata seconda in un punto x_0 appartenente all'insieme di definizione della funzione. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ allora x_0 é un punto di flesso proprio del diagramma di $f(x)$.*

7.8 Formula di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b) ed ivi derivabile almeno n-volte; detto x_0 un punto qualsiasi di (a, b) sussiste la formula:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \\ + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(\xi)$$

cioé

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(\xi) \qquad (7.64)$$

dove ξ é un punto compreso tra x_0 ed x. Il termine

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(\xi) \qquad (7.65)$$

viene indicato con il nome di *Termine complementare* della formula di Taylor.

Si noti che se $|x - x_0| < 1 \Rightarrow \frac{(x-x_0)^n}{n!} << 1$ e pertanto il termine é un infinitesimo sia per $x \to x_0$ che per $n \to \infty$.

La formula di Taylor risulta particolarmente utile in quanto permette, nell'intorno del punto x_0, di approssimare una generica funzione mediante una funzione polinomiale $P_n(x - x_0)$.
Se la formula é troncata al primo termine allora si ha una approssimazione lineare della funzione. Possiamo riscrivere la formula di Tayolor in termini dell'incremento della funzione Δf e del differenziale df. Ricordando che

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \qquad\qquad df = f'(x_0)(x - x_0)$$

si ha

$$\Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} [d^n f]_{x=x_0+\theta\Delta x} \qquad (7.66)$$

Questa scrittura é una precisazione della formula $\Delta f = df + \omega \Delta x$ vista in precedenza.

Capitolo 8

Integrali

8.1 Misurabilitá

Il concetto di integrale é legato a quello di misura di un insieme di punti. Di questi tipi di insiemi si sono in precedenza definiti l'unione, l'intersezione, la differenza. Si vogliono ora introdurre nuove nozioni da utilizzare per gli insiemi di punti nel piano.

Definizione 8.1 *(Insieme limitato). SI dice che un insieme di punti del piano Π é limitato se esiste un cerchio C che lo contiene.*
Si consideri un insieme A del piano Π e si indichi con $P \in A$ un generico punto di tale insieme.

Definizione 8.2 *(Punto interno). Si dice che P é un punto interno ad A se esiste un cerchio C_P di centro P tutto costituito di punti di A, cioé se $\exists\ C_P \subset \Pi : C_P \subset A$ o, equivalentemente, $C_P \cup A = A$.*

Definizione 8.3 *(Punto esterno). Si dice che P é un punto esterno ad A se esiste un cerchio C_P di centro P tutto costituito da punti non appartenenti ad A, cioé se $\exists\ C_P \subset \Pi : C_P \cap A = \emptyset$.*

Definizione 8.4 *(Punto di frontiera). Si dice che un punto Q, appartenente o non appartenente all'insieme A, é un punto di frontiera se esso non é né interno né esterno ad A, ovvero se comunque si prenda un cerchio C_Q di centro Q esso é sempre costituito sia da punti appartenenti ad A che da punti non appartenenti ad A, cioé se $\forall\ C_Q \subset \Pi \quad C_Q \cap A \neq \emptyset$ o, equivalentemente, $A \subset C_Q \cup A$, $C_Q \subset C_Q \cup A$.*

L'insieme dei punti di frontiera di un insieme A viene detto **frontiera di A** e si indica con ∂A.

∗ **Osservazione 8.1** *I concetti visti per gli insiemi nello spazio 2-dimensionale del piano si estendono agli insiemi negli spazi 1-dimensionali (la retta), 3-dimensionali ed, in generale, n-dimensionali, $n \in \mathbb{N}$.*

Definizione 8.5 *(Poligono). Si definisce poligono ogni insieme del piano Π la cui frontiera é costituita da un numero finito di segmenti di rette.*

Area dei Poligoni. Dalla geometria elementare é noto come effettuare la misura, ovvero il calcolo dell'area del poligono. **Misura per un insieme di punti del piano.** Si vuole estendere il concetto di misura, cioé il calcolo dell'area, ad un generico insieme del piano.

Per tale motivo nel seguito si distingueranno gli insiemo dotati di punti interni da quelli che non hanno punti interni.

Insieme limitato e dotato di punti interni.

Sia A un insieme del piano Π limitato e dotato di punti interni. Si considerino gli insiemi:

$$I = \{\text{poligoni contenuti in } A\}; \tag{8.1}$$
$$E = \{\text{poligoni contenenti } A\}; \tag{8.2}$$
$$M_I = \{\text{aree dei poligoni di } I\}; \tag{8.3}$$
$$M_E = \{\text{aree dei poligoni di } E\}. \tag{8.4}$$

Denotati con $P \in I$ e $Q \in E$ due generici poligoni e con m_P, m_Q le rispettive aree, risulta evidente che $\forall P \in I, \forall Q \in E \quad \Rightarrow \quad P \subseteq Q$ ed $m_P \leq m_Q$.
Ne consegue che gli insiemi numerici M_I e M_Q sono separati, cioé:

$$M_I \cap M_Q = \emptyset.$$

Definizione 8.6 *(Misurabilitá di A secondo Jórdan). Diremo che l'insieme A é misurabile secondo Jordan se l'insieme numerico delle aree dei poligoni contenuti e quello delle aree dei poligoni contenenti A sono contigui.*

Definizione 8.7 *(Misura di A secondo Jordan). Si definisce misura di A secondo Jordan l'elemento di separazione tra M_I e M_E. La misura di A si denota con mis(A) e viene anche detta area di A.*

Insieme privo di punti interni.

Sia A un insieme del piano Π privo di punti interni. In questo caso non esistono poligoni contenuti in A. Se, tuttavia, l'insieme numerico delle aree dei poligoni contenti A ha come estremo inferiore il valore zero, allora la misura di A é eguale a zero, cioé mis$(A)= 0$.

• **Esempio 8.1** *Si consideri l'insieme costituito dai punti di un segmento di retta. É immediato costruire l'insieme dei poligoni contenenti tale segmento e verificare che l'insieme numerico delle loro aree ha come estremo inferiore zero.*

Proprietá della misura.

La misura cosí costruita gode delle seguenti proprietá:

1. Siano A e B due insiemi limitati e misurabili, con $A \subseteq B$, allora si ha $area(A) \leq area(B)$.
2. Siano A e B due insiemi limitati e misurabili, senza punti interni in comune, ovvero $[(A \setminus \partial A) \cap (B \setminus \partial B)] = \emptyset$, allora si ha:
$$area\ (A \cup B) = area\ A + area\ B. \tag{8.5}$$
3. Siano A e B due insiemi limitati e misurabili, allora anche la loro intersezione, $A \cap B$, e la loro unione, $A \cup B$, lo sono.
4. Siano A e B due insiemi limitati e misurabili, con $B \subseteq A$, allora:
$$area\ (A - B) = area\ A - area\ B. \tag{8.6}$$

∗ **Nota 8.1** *Le definizioni e le proprietá sopra esposte si possono estendere agli insiemi su una retta. Tali insiemi sono intervalli singoli o pluri-intervalli, cioé piú intervalli privi di punti comuni. Intervalli e pluri-intervalli sono misurabili in modo elementare.*

8.2 Integrale definito.

Preliminarmente alla definizione di integrale definito occorre fornire qualche nozione.

Rettangoloide. Sia f una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato $|a, b|$ ed ivi non negativa, ovvero $f(x) \geq 0, \forall x \in |a, b|$.
Si definisce **Rettangoloide di base $|a, b|$ relativo alla funzione** $f(x)$, l'insieme dei punti del piano che soddisfano le diseguaglianze:

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq f(x). \tag{8.7}$$

TEOREMA 8.1 *Il rettangoloide relativo ad una funzione continua é un insieme misurabile.*

Dimostrazione. Suddividiamo l'intervallo $|a, b|$ in un numero finito n intervalli mediante i capisaldi $x_0 = a < x_1 < \ldots x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. In ogni intervallo $|x_i, x_{i+1}|$ la funzione, per ipotesi, é continua, pertanto ivi dotata, per il teorema di Weierstrass, di minimo m_i e massimo M_i.
Per ciascun intervallo si considerino i rettangoli R_{m_i} ed R_{M_i} che hanno per base l'intervallo $|x_i, x_{i+1}|$ ed altezza rispettivamente m_i e M_i.
É immediato convincersi che il rettangoloide realtivo alla funzione f relativo all'intervallo $|a, b|$ contiene ogni rettangoloide R_{m_i}, mentre é contenuto in ogni rettangoloide R_{M_i}. Definiamo inoltre:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i \qquad S \quad = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i \tag{8.8}$$

rispettivamente le aree dei rettangoloidi contenuti e contenenti il rettagoloide relativo alla funzione f e ad $|a, b|$. Essendo:

$$(x_{i+1} - x_i)m_i \leq (x_{i+1} - x_i)M_i \qquad \forall i = 0, \ldots n-1, \tag{8.9}$$

ne segue:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i \tag{8.10}$$

cioé:

$$s \leq S. \tag{8.11}$$

Al variare della decomposizione, $s$ed Sdescrivono due insiemi numerici disgiunti.
Si puó dimostrare che, i due insiemi numerici, al variare in tutti i modi possibili della decomposizione in intervalli parziali dell'intervallo $|a, b|$, sono contigui.

Si definisce **Integrale definito**, relativo alla funzione f ed all'intervallo |a,b|, e si denota con:

$$\int_{|a,b|} f(x)\, dx \tag{8.12}$$

l'elemento di separazione degli insiemi numerici $\{s\}$ ed $\{S\}$, al variare comunque della decomposizione dell'intervallo |a,b|.

8.2.1 Proprietá degli Integrali definiti.

L'integrale definito gode di alcune proprietá notevoli che sono evidenziate dai teoremi che seguono.

Definizione 8.8 *Nel caso particolare in cui la funzione f, continua in $|a, b|$, sia ivi positiva, l'integrale definito é l 'area del rettangoloide relativo alla funzione f ed all'intervallo $|a, b|$.*

∗ **Osservazione 8.2** *L'insieme dei punti del diagramma, o grafico, di una funzione continua f ha misura nulla.*

Proprietá Distributiva.

TEOREMA 8.2 *Siano f_1 ed f_2 due funzioni reali definite e continue in $|a, b|$, entrambe ivi non negative. Siano inoltre c_1 e c_2 due costanti reali, si ha:*

$$\int_{|a,b|} |\, c_1\, f_1(x) + c_2\, f_2(x)\, |dx = c_1 \int_{|a,b|} f_1(x)\, dx + c_2 \int_{|a,b|} f_2(x).dx \tag{8.13}$$

COROLLARIO 8.2.1 *(Integrali di funzioni negative). Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo $|a, b|$ ed ivi negativa, cioé $f(x) < 0$, $\forall x \in |a, b|$, allora:*

$$\int_{|a,b|} f(x)\, dx = -\int_{|a,b|} |\, f(x)\, |\, dx. \tag{8.14}$$

Infatti, la funzione $g(x) = |\, f(x)\, | = c_1\, f(c)$, *per* $c_1 = -1$. *Quindi:*

$$\int_{[a,b]} |\, f(x)\, |\, dx = \int_{[a,b]} g(x)\, dx = \int_{[a,b]} c_1\, f(x)\, dx = c_1 \int_{[a,b]} f(x)\, dx. \tag{8.15}$$

Proprietá Additiva.

TEOREMA 8.3 *Sia f una funzione definita e continua in un intervallo $[a,b]$ e sia $c \in [a,b]$, allora:*

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,c]} f(x)\, dx + \int_{[c,b]} f(x)\, dx. \tag{8.16}$$

Teorema della Media.

TEOREMA 8.4 *Sia f una funzione definita e continua in un intervallo $[a,b]$ e siano m e M rispettivamente il minimo ed il massimo della funzione in $[a,b]$, allora:*

$$m(b-a) \;\leq\; \int_{[a,b]} f(x)\, dx \;\leq\; M(b-a). \tag{8.17}$$

Inoltre, esiste almeno un punto $\xi \in [a,b]$, tale che:

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = (b-a) f(\xi). \tag{8.18}$$

Interpretazione Geometrica. La interpretazione geometrica del secondo asserto del teorema precedente é che, data una funzione continua f definita in un intervallo $[a,b]$, esista almeno un rettangolo con altezza compresa tra il minimo ed massimo della funzione f, tale che la sua area sia uguale all'area del rettangoloide relativo alla funzione f e ad $[a,b]$.

Valgono inoltre i seguenti teoremi.

TEOREMA 8.5 *Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, allora ne segue che:*

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx \geq 0 \tag{8.19}$$

TEOREMA 8.6 *Siano f e g funzioni reali definite e continue in un intervallo $[a,b]$ e sia $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Allora, ne segue:*

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx \geq \int_{[a,b]} g(x)\, dx. \tag{8.20}$$

TEOREMA 8.7 *Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo $[a,b]$. Allora vale la diseguaglianza:*

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\, dx \right| \;\leq\; \int_{[a,b]} |f(x)|\, dx. \tag{8.21}$$

Dimostrazione. Ricordiamo la seguente diseguaglianza:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Quindi, per il teorema precedente ne segue che

$$-\int_{[a,b]} |f(x)|\, dx \;\leq\; \int_{[a,b]} f(x)\, dx \;\leq\; \int_{[a,b]} |f(x)|\, dx \tag{8.22}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{[a,b]} f(x)\, dx \right| \;\leq\; \int_{[a,b]} |\, f(x)\, |\, dx, \qquad c.v.d. \tag{8.23}$$

TEOREMA 8.8 *Sia f una funzione reale definita, continua e non negativa in un intervallo $[a,b]$. Sia inoltre $[a',b'] \subseteq [a,b]$, un generico sottointervalo di $[a,b]$, allora:*

$$\int_{[a',b']} f(x) d(x) \leq \int_{[a,b]} f(x) d(x). \tag{8.24}$$

Area di un dominio normale.

Definizione 8.9 *Siano f e g due funzioni reali definite e continue in $[a,b]$ con $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b]$. Si definisce* **dominio normale** *rispetto all'asse x l'insieme delle coppie (x,y) che soddisfano le disequazioni:*

$$a \leq x \leq b, \qquad\qquad g(x) \leq y \leq f(x). \tag{8.25}$$

Si puó provare che l'area del dominio normale é data da:

$$\int_{[a,b]} |\, f(x) - g(x)\, |\, dx. \tag{8.26}$$

8.2.2 Estensione del Concetto di Integrale.

Consideriamo una funzione f reale definita e continua in un intervallo $|\alpha, \beta|$. Siano inoltre $a, b \in |\alpha, \beta|$.

Definizione 8.10 *Si definisce integrale definito della funzione f tra a e b, la seguente quantitá:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)\,dx & se\ a < b\,; \\ 0 & se\ a = b\,; \\ -\int_{[b,a]} f(x)\,dx & se\ a > b. \end{cases} \tag{8.27}$$

I numeri reali a e b prendono rispettivamente il nome di limite, o estremo, inferiore e superiore dell'integrale.

Valgono, con il significato della estensione appena detta, i teoremi visti in precedenza.

TEOREMA 8.9 *Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo $|\alpha, \beta|$. Per ogni scelta di a, b e $c \in |\alpha, \beta|$, allora:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{8.28}$$

TEOREMA 8.10 *Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo $|\alpha, \beta|$. Allora, se $a, b \in |\alpha, \beta|$, esiste un punto $\xi \in |a, b|$, per il quale si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a). \tag{8.29}$$

8.3 Funzioni Integrali e funzioni primitive.

Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo $|\alpha, \beta|$ e siano x_0, $x \in |\alpha, \beta|$. Supponiamo inoltre che, in:

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt, \tag{8.30}$$

siano x_0 fissato ed x variabile.

Definizione 8.11 *Al variare di $x \in |\alpha, \beta|$ la quantitá appena definita risulta una funzione della variabile x che viene indicata con il nome di Funzione Integrale. Tale funzioen la denoteremo come segue:*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt. \tag{8.31}$$

∗ Osservazione 8.3 *Nella definizione di funzione integrale (8.30), alla funzione f é attribuita, non la variabile x come finora visto, ma essa appare come funzione della variabile t, cioé come $f(t)$. Si tratta ovviamente della stessa funzione, cioé della stessa legge che associa ad un valore $t \in |\alpha, \beta|$ il valore della funzione f. Per tale equivalenza si suole dire che la variabile di integrazione é muta, intendendo il fatto che che il valore della funzione non dipende dal nome specifico che viene assegnato alla variabile indipendente ma solo dalla legge f e dal dominio $|\alpha, \beta|$.*

Per la funzione integrale $F(x)$ é banale il seguente risultato.

∗ Osservazione 8.4 *Se F é la funzione integrale definita in (8.31) allora $F(x_0) = 0$.*

Inoltre é possibile provare il seguente teorema.

TEOREMA 8.11 *La funzione F definita in (α, β) dalla (8.31), é ivi continua e derivabile e la sua derivata é:*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (\alpha, \beta). \tag{8.32}$$

Definizione 8.12 *(Primitiva). Data una funzione reale f definita e continua in un intervallo (α, β). Si definisce primitiva della funzione f ogni funzione F tale che:*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (\alpha, \beta). \tag{8.33}$$

Per le funzioni primitive valgono i seguenti risultati.

TEOREMA 8.12 *Ogni funzione reale f, se é continua in un intervallo (α, β) é ivi dotata di una funzione primitiva.*

TEOREMA 8.13 *Tutte e sole le primitive di funzione reale f definita in un intervallo (α, β) sono della forma:*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt + c, \qquad \forall x \in (\alpha, \beta), \tag{8.34}$$

essendo c una costante arbitraria.

Dimostrazione. Siano infatti F e G due arbitrarie primitive della funzione f, si consideri la funzione differenza:

$$H(x) = F(x) - G(x), \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Dall' ipotesi, banalmente, si ha:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Ricordando infine che se una funzione ha derivata identicamente nulla in un intervallo essa é costante, ne segue:

$$H(x) = F(x) - G(x) = c \;\Rightarrow\; F(x) = G(x) + c \qquad \text{c.v.d.}$$

COROLLARIO 8.13.1 *Se* $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$ *allora si ha* $G(x_0) = c$, *da cui:*

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt. \tag{8.35}$$

Da quanto sopra discende la seguente utile osservazione. Il problema del calcolo definito fra due elementi a e b dell'intervallo di definizione (α, β) di una funzione reale e continua f, si riduce a quello della ricerca di una qualsiasi primitiva di tale funzione. Detta G una tale funzione primitiva di f, allora si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; G(b) - G(a). \tag{8.36}$$

8.4 Integrali Indefiniti.

Si é visto in precedenza che tutte e sole le funzioni primitive di f sono date nella forma:

$$F(x) + c \quad \text{essendo } c \quad \text{una costante arbitraria.}$$

L'insieme formato dalla totalitá delle primitive di una funzione f prende il nome di **Integrale Indefinito** della funzione f e si scrive:

$$\int f(x)\, dx. \tag{8.37}$$

Aggiungiamo ora alcuni osservazioni e proprietá che permettono di comprendere meglio i concetti sopra esposti.

∗ **Osservazione 8.5** *L'integrale definito é un numero reale, oppure* $+\infty$ *oppure ancora* $-\infty$. *L'integrale indefinito é un insieme, i cui elementi si ottengono calcolando una funzione (funzione primitiva) ed aggiungendo ad essa una costante reale arbitraria, cioé variano al variare della costante in* $\mathbb{R}$.

8.5 Integrali Indefiniti immediati.

Gli integrali indefiniti immediati possono ricavarsi dalla tabella delle derivate fondamentali (7.1.4) leggendola a destra il termine da porre sotto segno di integrale ed a sinistra il risultato dell'integrazione indefinita. Riportiamo nel seguito alcuni di questi integrali notevoli. Come specificato in precedenza, l'integrale indefinito é un insieme quindi le uguaglianze tra indegrali indefiniti sono da intendersi come uguaglianze insiemistiche. Il significato con cui deve intendersi nella sottostante tabella l'insieme della colonna di destra é quello di considerare come suoi elementi la somma di una funzione con una costante che variare in $\mathbb{R}$.

$$1)\ \int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c; \quad \text{per } \alpha \neq -1 \tag{8.38}$$

$$2)\ \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c \tag{8.39}$$

$$3)\ \int a^x\, dx = a^x \cdot \log_a e + c \tag{8.40}$$

$$4)\ \int e^x\, dx = e^x + c \tag{8.41}$$

$$5)\ \int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c \tag{8.42}$$

$$6)\ \int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c \tag{8.43}$$

$$7)\ \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + c \tag{8.44}$$

$$8)\ \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + c \tag{8.45}$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + c \tag{8.46}$$

$$= -\arccos(x) + c \tag{8.47}$$

8.6 Metodi di integrazione Indefinita.

Il calcolo di un integrale indefinito di una funzione può rivelarsi un problema non immediato. A differenza del processo di derivazione, che anche se implica una lunga elaborazione giunge alla determinazione della derivata, il calcolo dell'integrale potrebbe, malgrado l'applicazione delle tecniche note, non giungere al calcolo dell'integrale.

Nel presente paragrafo accenniamo alcuni dei principali metodi di integrazione per permettere il calcolo dell'integrale nelle situazioni piú semplici.

8.6.1 Integrazione per decomposizione e somma.

Siano date due funzione f_1 ed f_2 reali di variabile reale e due costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

L' integrale della funzione combinazione lineare é dato da:

$$\int \Big[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \Big] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx$$

ed i casi particolari:

$$\int c_1 f(x) dx = c_1 \int f(x) dx$$

$$\int \Big[f_1(x) + f_2(x) \Big] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

$$\int \Big[f_1(x) - f_2(x) \Big] dx = \int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx.$$

Il risultato si puó banalmente generalizzare:

$$\int \sum_{i=1}^{n} c_i \, f_i(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \int f_i(x) \, dx + c \qquad (8.48)$$

L'estensione permette di calcolare in modo semplice l'integrale di

un generico polinomio di grado n. Infatti:

$$\int \Big[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 \Big] dx = \int \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \int x^i \, dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + c.$$

8.6.2 Integrazione di funzioni razionali.

Siano $N_n(x)$ e $D_m(x)$ due polinomi a coefficienti reali rispettivamente di grado n ed m, $n > m$. Consideriamo la funzione $f(x) = N_n(x)/D_m(x)$. Essendo $n > m$ possiamo effettuare la divisione tra i due polinomi:

$$f(x) = \frac{N_n(x)}{D_m(x)} = Q_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{D_m(x)} \qquad (8.49)$$

dove $Q(x)$ é un polinomio di grado $n - m$ ed $R(x)$ é il resto. Allora

$$\int f(x) \, dx = \int Q_{n-m}(x) \, dx + \int \frac{R(x)}{D_m(x)} \, dx \qquad (8.50)$$

Il calcolo del primo integrale, cioé di $\int Q_{n-m}(x) \, dx$, si puo trattare usando la formula di integrazione per decomposizione e somma, vista in precedenza.

Il secondo integrale, in cui il grado del numeratore é inferiore a quello del denominatore, é invece non é immediato ed è di questo che ci occuperemo. Occorre, per prima cosa, calcolare le radici dell'equazione $D_m(x) = 0$.

Supponiamo dapprima che tali radici siano tutte *radici reali semplici*, cioé che $D_m(x)$ si possa fattorizzare nel seguente modo:

$$D_m(x) = (x - x_1) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m).$$

Si devono quindi determinare le costanti reali $A_1, A_2, \ldots, A_m$ soddisfacenti la seguente relazione:

$$\frac{R(x)}{D_m(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \ldots + \frac{A_m}{(x - x_m)}.$$

Tali costanti si possono calcolare riducendo il secondo membro allo stesso denominatore del primo membro ed uguagliandoi coefficienti dei termini omologhi Il problema della integrazione è dunque risolto

perché si calcola l'integrale di ciascun addendo al secondo membro. Si perviene quindi alla seguente uguaglianza:

$$\int \frac{R(x)}{D_m(x)}dx = A_1 \int \frac{1}{(x-x_1)}dx + A_2 \int \frac{1}{(x-x_2)}dx + \\ + \ldots + A_m \int \frac{1}{(x-x_m)}dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{R(x)}{D_m(x)}dx = A_1 \int \frac{1}{(x-x_1)}dx + A_2 \int \frac{1}{(x-x_2)}dx + \\ + \ldots + A_m \int \frac{1}{(x-x_m)}dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

Se $D_m(x)$ ha una *radice reale doppia*, ad esempio x_1, cioé $D_m(x)$ si possa fattorizzare nel seguente modo:

$$D_m(x) = (x-x_1)^2 \cdot (x_1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{m-1}),$$

il calcolo é ricondotto sia ad integrali del tipo precedente, ad eccezione per il primo che diventa:

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^2}dx = -\frac{1}{(x-x_1)} + c.$$

Similmente il discorso si puó ripetere per piú radici doppie, ad esempio $x_1, x_2, \ldots x_s$, secondo gli ordini $b_1, b_2, \ldots, b_s, s < m$, ed anche per radici con molteplicitá maggiore di 2.

Trattiamo infine il caso in cui il polinomio $D_m(x)$ non abbia redici reali, per semplicitá considereremo solo il caso in cui $R(X) = 1$ ed $D_m(x)$ sia un polinomio di secondo grado $m = 2$. Il caso di gradi superiori al secondo si riconducono ad esso e trattano in modo simile.

Sia pertanto $D_2(x) = x^2 + px + q$. Risulta:

$$D_2(x) = (x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4},$$

si ha quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}dx}{1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2}$$

da cui segue che:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

8.6.3 Integrazione per parti.

Siano f e g due funzione reali di variabile reale definite e derivabili in uno stesso insieme di definizione.

Vale allora la seguente formula:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

• **Esempio 8.2** *Si calcoli il seguente integrale* $\int xe^x\, dx$. *Ponendo:*

$$g(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^x$$
$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

si ha:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int (1 \cdot e^x)\, dx = x\, e^x - e^x = (x-1)\, e^x + c.$$

8.6.4 Integrazione per sostituzione.

Sia f una funzione reale di variabile reale integrabile nel suo insieme di definizione.

Nell'integrale $\int f(x)\, dx$ si effettui la sostituzione $x = \varphi(t)$ essendo quest'ultima una funzione derivabile nel suo insieme di definizione, φ' sia la sua derivata, ed inoltre sia dotata di funzione inversa $t = \psi(x)$. Si ha:

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt\right]_{t=\psi(x)}$$

Questa formula é nota come Formula di integrazione per sostituzione.

• **Esempio 8.3** *Calcolare* $\int e^{ax}\, dx$. *Posto:* $t = a \cdot x$, *si ottiene:*

$$\int e^{ax}\, dx = \left[\int e^t \frac{1}{a}\, dt\right]_{t=ax} = \frac{1}{a}\left[\int e^t\, dt\right]_{t=ax} = \frac{1}{a}\left[e^t\right]_{t=ax} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} + c.$$

8.7 Integrali Impropri.

La definizione di integrale definito data precedentemente é valida se la funzione é continua in un intervallo chiuso e limitato $|a, b|$. Si vuole ora estendere tale definizione al caso in cui .

i) l'intervallo possa essere non limitato superiormente e/o inferiormente;
ii) la funzione sia generalmente continua, cioé contenga in numero finito di punti di discontinuitá.

8.7.1 Integrali Impropri di I tipo.

Definizione 8.13 *(Integrale Improprio di I tipo). Sia dapprima una funzione f definita e continua in un generico intervallo $|a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Si definisce integrale improprio di I tipo relativo alla funzione f in $|a, \infty)$, il limite finito dell'integrale della funzione f esteso all'intervallo $|a, r|$, per r che tende a $+\infty$, cioé :*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} \int_a^r f(x)dx. \tag{8.51}$$

In questo caso la funzione si dirá integrabile in $|a, \infty)$.
Nel caso in cui tale integrale non esiste o diverge allora la funzione si dice non integrabile in $|a, \infty)$.

La definizione si estende naturalmente al caso in cui si consideri l'integrale di una funzione continua nell'intervallo $(-\infty, b|$ o nell'intervallo non limitato $(-\infty, +\infty)$. Si ha:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{r \to -\infty} \int_r^b f(x)dx \tag{8.52}$$

e:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \tag{8.53}$$

$$= \lim_{r \to -\infty} \int_r^0 f(x)dx + \lim_{r \to +\infty} \int_0^r f(x)dx. \tag{8.54}$$

• Esempio 8.4 . *Calcolare l'integrale relativo alla funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $|1, +\infty)$.*

Si ha:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{1}{x^2}dx =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} \left[-\frac{1}{r}\right]_1^r =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} (-\frac{1}{r} + 1) = 1.$$

• Esempio 8.5 . *Calcolare l'integrale relativo alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $|1, +\infty)$. Si ha:*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{1}{x}dx =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} \Big[\ln(x)\Big]_1^r =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} \ln(r) = 1.$$

• Esempio 8.6 *Calcolare l'integrale relativo alla funzione $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ in $|1, \infty)$. Si ha:*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} 2 \int_0^r \frac{1}{1+x^2}dx =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} 2 \Big[\arctan(x)\Big]_1^r =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} \arctan(r) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

• Esempio 8.7 *Calcolare l'integrale relativo alla funzione $f(x) = \cos(x)$ in $|1, \infty)$. Si ha:*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \cos(x)dx =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} \Big[\sin(x)\Big]_1^r =$$
$$= \lim_{r \to +\infty} \sin(r), \text{ che non esiste.}$$

8.7.2 Integrali Impropri di II tipo.

Definizione 8.14 *(Integrali Improprio di II tipo). Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo del tipo $]a, b]$ ed infinitamente grande per $x \to a$.*
Si definisce integrale improprio di II tipo relativo alla funzione f, il limite, se esiste finito, dell'integrale esteso all'intervallo limitato $[r, b]$, e si scrive:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to a+} \int_r^b f(x)dx. \tag{8.55}$$

In caso contrario la funzione non é integrabile.

Similmente se f é definita e continua in $[a, b[$ ed infinitamente grande per $x \to b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to b-} \int_r^b f(x)dx. \tag{8.56}$$

Se la funzione f ha un numero finito di punti di infinito, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ contenuti nell'intervallo $[a, b]$, allora basterá dividere tale intervallo insottointervalli, cioé considerare:

$$[a, b] = [a, c_1[\cup]a_1, c_2[\cup]c_2, a_2[\cup \ldots \cup]c_n, b], \tag{8.57}$$

ed applicare il teorema di decomposizione in somma degli integrali.

8.8 Metodi numerici.

Abbiamo giá visto, nel teorema Si é giá visto(8.36) come si procede per il calcolo di un integrale definito in modo esatto. Questo calcolo implica tuttavia la conoscenza di una primitiva della funzione integranda che potrebbe rappresentare un problema non sempre immediato.

L'ultimo argomento di questo capitolo è dedicato al calcolo approssimato degli integrali definiti relativi a funzioni reali continue definite in intervalli chiusi e limitati.

La definizione stessa di integrale definito ci permette di intuire un metodo per una prima stima del valore dell'integrale. Infatti, dividendo l'intervallo di integrazione $[a, b]$ in n sottointervalli mediante i capisaldi $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, é possibile

calcolare, nel modo esposto in precedenza, le aree dei rettangoloidi $R_m = \cup_{i=1}^n R_{m_i}$ ed $R_m = \cup_{i=1}^n R_{M_i}$ rispettivamente contenuto e contenente il rettangoloide relativo alla funzione f ed all'intervallo $[a, b]$.
L'area del rettangoloide della funzione $f(x)$ é quindi compresa tra le aree dei due rettangoloidi R_m ed R_M, cioé:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i = S. \tag{8.58}$$

Ne consegue che, fissato un valore di tolleranza ϵ, possiamo procere a successive suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ sino a quando

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i) \leq \epsilon \tag{8.59}$$

Il procedimento risulta molto dispendioso dal punto di vista computazionale in quanto richiede che per ogni sottointervallo si proceda al calcolo del massimo e del minimo assoluto della funzione nel sottontervallo considerato.

Il tecniche per il calcolo approssimato di un integrale definito vengono usualmente chiamate **Quadrature Numeriche**. Questo studio é dominio di quella branca dell'analisi denominata *Analisi Numerica* il cui studio esula dagli obiettivi di questo corso. É tuttavia importante sottolineare che l'analisi numerica non solo studia sempre nuovi metodi numerici ma fornisce, e questa é la parte importante, una stima dell'errore che si compie nell'effettuare la approssimazione. In questo modo si puó controllare la buona qualitá della approssimazione.

Tuttavia alcuni dei risultati delle Quadrature Numeriche posso essere introdotte, come vedremo, in modo semplice.

Il principio generale a cui si ispirano le tecniche per la quadratura numerica che saranno esaminate é quello di dividere l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di sottointervalli. In ciascun sottointervallo la funzione viene calcolata in un numero finito di punti (ad esempio in tre punti) ed approssimata mediante polinomi di diverso ordine. Il calcolo dell'integrale viene quindi eseguito sul polinomio che approssima la funzione in ciascun sottointervallo. Una formulazione generale di questo approccio viene fonita in un insieme di regole note come *le formule di Newton-Cotes*. Ne esamineremo, qui di seguito, solo alcune.

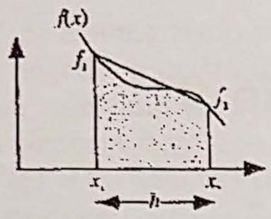


Figura 8.1: Metodo del Trapezio

Supponiamo di dividere l'intervallo $|a, b|$ in n di sottointervalli: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. L'approssimazione dell'integrale viene sempre presentata per il generico sottointervallo $|x_i, x_{i+1}|$.

8.8.1 Metodo del Trapezio.

Il primo metodo é il piú semplice ed intuitivo e rappresenta la formula di Newton-Cotes a due punti. L'approssimazione consiste nel calcolare l'area del trapezio che si ottiene interpolando la funzione assegnata con la retta, cioé con un polinomio di ordine uno, passante per i punti $(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, di indice $i = 1$ ed $i = 2$, come mostrato in figura. L'approssimazione é data da:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \frac{1}{2}h(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi), \qquad (8.60)$$

essendo $f_i \equiv f(x_i)$, $f_{i+1} \equiv f(x_{i+1})$ ed $h = (x_{i+1} - x_i)$.
Il primo termine al secondo membro rappresenta, banalmente, l'area di un trapezio che ha per basi i valori f_i, f_{i+1} ed altezza h. Il secondo termine é l'errore che si commette nella approssimazione. Questo dipende dalla derivata seconda della funzione calcolata in un punto $\xi \in |x_i, x_{i+1}|$ e da h^3. Detto M un maggiorante per la quantitá $f''(\xi)$, si ottiene un maggiorante dell'errore in funzione di h. Se $h < 1$ allora $h^3 \ll 1$, il secondo termine diviene quindi trascurabile rispetto al primo.

Si osservi che, dovendo calcolare l'integrale in tutto l'intervallo $|a, b|$, sommando i contributi di ciascun sottointervallo, si calcolara due volte il valore della funzione in tutti i punti x_i esclusi gli estremi

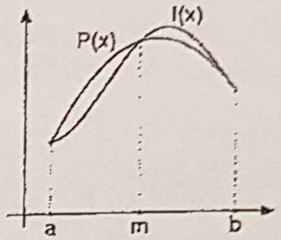


Figura 8.2: Regola di Simpson

$x_0 = a$ e $x_n = b$ Per evitare questo si usa una *formula composita*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i). \qquad (8.61)$$

8.8.2 Metodo di Simpson.

Questo metodo, e piú spesso chiamato noto anche come Regola di Simpson, dal nome del suo inventore il matematico Thomas Simpson (1710-1761). É una formula di Newton-Cotes nella quale la approssimazione della funzione viene effettuata mediante un polinomio quadratico del secondo ordine. Ció significa approssimare l'andamento della funzione con un arco invece che con una retta, come nel metodo del trapezio. Nel caso della Regola di Simpson si usano i *Polinomi interpolatori di Lagrange del terzo ordine* per interpolare la funzione in tre punti equispaziati di due sottointervalli consecutivi. Si osservi che, a differenza del metodo del trapezio, il metodo di Simpson richiede che l'intervallo $|a, b|$ venga suddiviso in un numero pari di intervalli. Per questo motivo conviene indicare il numero di intervalli con $2n$.

Nella figura (8.2) gli estremi sono indicati con a e b ed il loro punto medio con m. Nella divisione in sottointervalli basta porre $a = x_i$, $m = x_{i+1}$ e $b = x_{i+2}$. L'approssimazione dell'integrale é data da:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} dx = \frac{h}{3}\Big[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\Big] + R_i \qquad (8.62)$$

dove $h = (x_{i+1} - x_i) = (b - a)/2n$ ed R_i é l'errore nell'intervallo in considerazione (identificato dall'indice dell'estremo inferiore) dato

da:

$$R_n = \frac{1}{90} h^5 \cdot f^{(4)}(\xi), \tag{8.63}$$

essendo $\xi \in [x_i, x_{i+2}]$ ed $f^{(4)}$ la derivata quarta della funzione f. Denotato M un maggiorante di $f^{(4)}$ si ottiene un maggiorante dell'errore R_i in funzione di h. Se $h < 1$, risulta $h^5 \ll 1$ e l'errore diviene trascurabile rispetto al primo termine.

Anche in questo caso, dato che si vuole calcolare l'integrale in tutto l'intervallo $[a, b]$, sommando i contributi di ciascun sottointervallo si calcolaranno due volte i valori della funzione nei capisaldi intermedi. Per evitare ció si usa la *formula composita*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \tag{8.64}$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2} + f_{2n})\Big] - R_n \tag{8.65}$$

che puó scriversi in forma compatta come

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}\Big[f_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} f_{2j} + 4\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1}, + f_{2n}\Big] \tag{8.66}$$

essendo R_n l'errore della formula composita:

$$R_n = \frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in [a, b]. \tag{8.67}$$

Capitolo 9

Equazioni non lineari

Premessa.

Studiare la esistenza di soluzioni di una generica equazione ed eventualmente calcolarle, é uno dei problemi per i quali la risoluzione in forma analitica esiste solo in un numero limitato di casi. Quelli piú noti sono le equazioni polinomiali di primo e secondo grado ed alcuni tipi di equazioni trigonometriche.

In generale la soluzione di una equazione del tipo $f(x) = 0$ puó trovarsi graficamente individuando i punti nei quali il grafico della funzione $y = f(x)$ incontra l'asse delle x, di equazione $y = 0$. Il generico punto x_i nel quale $f(x_i) = 0$ viene detto uno zero dell'equazione $f(x) = 0$.

É facile convincersi che, in generale, detta f una funzione continua in (a, b), l'equazione $f(x) = 0$ puó:

- non ammettere soluzioni; in questo caso il grafico della funzione $y = f(x)$ giace nel semipiano formato da primo e secondo quadrante oppure il grafico giace nel semipiano formato da terzo e quarto quadrante, non ammettono soluzione ad esempio le equazioni $x^2 + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ oppure $-2 + \sin(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- ammettere una sola soluzione, ad esempio $2x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- ammettere un numero finito di soluzioni, ad esempio $x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- ammettere un numero infinito, ma numerabile, di soluzioni, ad esempio $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

In tutti i casi in cui esiste un punto x_0 per cui $f(x_0) = 0$, la continuitá della funzione garantisce che esiste un intorno del punto x_0

nel quale la funzione $f(x)$ assume valori sempre positivi a sinistra di x_0 [destra] e sempre negativi a destra di x_0 [sinistra] di x_0.

Inoltre , se esiste un intervallo $(\alpha, \beta) \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ allora per il teorema degli zeri esiste almeno un punto $\xi \in (\alpha, \beta)$ tale che sia $f(\xi) = 0$. Risulta evidente la generalizzazione espressa dal seguente:

∗ **Osservazione 9.1** *Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo (a, b). Se esiste un intervallo $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tale che $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ allora, per il teorema degli zeri, esistono un numero dispari di punti $x_i \in (\alpha, \beta)$, $i \in \mathbb{N}$ tali che sia $f(x_i) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un numero pari di zeri, e, per fissare le idee supponiamo che siano due: x_1 ed x_2. senza perdita di generalitá si puó supporre che $x_1 < x_2$ e che sia $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$. Allora si ha:

$$\forall x \in [\alpha, x_1[\;\; f(x) < 0; \forall x \in [x_1, x_2[, f(x) > 0; \forall x \in [x_2, \beta], f(x) < 0.$$

Ma si é pervenuti ad un assurdo in quanto per ipotesi $f(\beta) > 0$.

La soluzione analitica di una equazione fornisce un metodo per la individuazione di tutti gli zeri della equazione. Basti pensare, ad esempio, al noto metodo per trovare le soluzioni di una equazione polinomiale di secondo grado del tipo $ax^2+bx+c = 0$. Per risolverla occorre:

a) verifcare che sia $a \neq 0$ altrimenti il problema si riduce alle soluzioni di una equazione di primo grado;

b) se accade che $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $= 0$ > 0, si ha, rispettivamente, che l'equazione non ammette soluzioni, ammette due soluzioni coincidenti o due soluzioni distinte. In quest'ultimo caso *il metodo analitico fornisce una relazione per individuare gli zeri della soluzione.*

A differenza di quella analitica la metodologia numerica per la ricerca degli zeri di una equazione *non permette di conoscere a priori il numero di zeri dell'equazione, né fornisce una relazione generale per il calcolo di tutti gli zeri.*

Tuttavia, individuata una regione del dominio della funzione f nella quale é ragionevole ritenere che esista un solo zero dell'equazione, ad esempio mediante il grafico della funzione o metodi equivalenti, la metodologia numerica permette di costruire una successione di valori $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che, per alcuni metodi, é possibile dimostrare

essere convergente al valore dello zero. La ricerca degli zeri dell'equazione deve pertanto essere fatta singolarmente per ciascuno degli zeri.

Ci proponiamo adesso di mostrare alcuni metodi numerici per la soluzione di questo problema iniziando dalla individuazione delle regioni nelle quali é ragionevole ritenere che esista uno zero della equazione.

9.1 Braketing

Con il termine di **Braketing** si intendono le tecniche, per lo piú euristiche, con le quali si individua una regione del dominio della funzione nella quale la funzione ha almeno un punto di zero. Per questa fase iniziale é opportuno utilizzare tutti gli strumenti analitici a disposizione per studiare l'andamento di una funzione f in modo da ottenere il maggior numero di informazioni possibili.

Se una funzione reale f é definita in un dominio non limitato, quindi in insiemi del tipo $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ oppure $(-\infty, +\infty)$, la prima cosa da fare é studiare il comportamento della funzione all'infinito. Se per $x \to \infty$ accade, rispettivamente, che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) < 0 \tag{9.1}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0 \tag{9.2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0 \tag{9.3}$$

allora, i teoremi sui limiti ci garantiscono che la funzione avrá sempre almeno uno zero nel suo dominio.

Le metodologie possibili per la ricerca delle regioni che contengono uno, ed un solo, zero dell'equazione $f(x) = 0$ sono tipicamente costruite *ad hoc* sul problema in esame. Nel seguito, come esempio, considereremo due approcci abbastanza comuni:

i) metodi tabellari;

ii) metodi grafici.

I metodi tabellari

I metodi tabellari consistono nel produrre una tabella di valori della funzione in un numero finito di punti, tipicamente equidistanti, del dominio verificando se la funzione assume agli estremi degli

intervalli valori discordi. Questi metodi possono ovviamente essere applicati solo se il dominio della funzione é limitato. Nel caso di un dominio non limitato allora occorre far uso delle informazioni sull'andamento della funzione all'infinito e costruire la tabella in sottodomini limitati scelti opportunamente. Se, ad esempio, é noto che per $x \to +\infty$ si ha: $f(x) \to +\infty$ oppure $f(x) \to l > 0$, allora é certo che esiste una punto $\bar{x}$ tale che $\forall x > \bar{x}$ la funzione assumesempre valori positivi. Sará allora possibile, per il nostro scopo, restringere il dominio illimitato ad un dominio limitato nel quale $\bar{x}$ é un estremo.
Il metoto tabellare puó essere indicativo dell'esistenza di uno zero ma non permette di escludere la esistena di zeri in un intervallo del tipo $[(x_h, x_{h+1})]$. Infatti, non é possibile escludere che la funzione in quell'intervallo abbia un numero pari di zeri e quindi sia $f(x_h)f(x_{h+1}) > 0$. Se la funzione é *smooth*, cioé non rapidamente oscillante, il metodo dovrebbe fornire indicazioni attendibili sulle regioni interessate alla esistenza di uno zero. Se invece la funzione é rapidamente oscillante l'indicazione puó essere erronea.

I metodi grafici

I metodi grafici hanno come obiettivo ricavare informazioni studiando il grafico di una funzione f.
1) Il metodo grafico piú semplice é quello che costruisce il grafico della funzione. Anche in questo caso se la funzione é definita in un dominio non limitato occorre utilizzare le informazioni sul suo comportamento asintotico.
2) Se la funzione é esprimibile come somma di due funzioni, ovvero $f(x) = f_1(x) -?+ vero?Verificareeeeeeeeeef_2(x)$ allora l'equazione $f(x) = 0$ puó scriversi come $f_1(x) = f_2(x)$. Questa scrittura individua i punti x per i quali i grafici delle funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si incontrano. É allora possibile graficare, sullo stesso diagramma cartesiano le due funzioni $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ ed individuare la regione nella quale le due curve si incontrano.
Si osservi infine che una generica curva di equazione $y = h(x)$ rappresenta il luogo dei punti $P(x, h(x))$, pertanto i punti della curva sono le soluzioni dell'equazione $g(x) = y - h(x) = 0$. La curva, quindi, divide il piano cartesiano in due regioni caratterizzate dalla proprietá che in ciascuna di esse la funzione $g(x)$ é rispettivamente positiva o negativa. Questa proprietá puó tornare utile nella ricerca della regione che contiene uno zero.

9.2 Metodi per la ricerca degli zeri

I metodi per la soluzione di equazioni non lineari si distinguono in **metodi chiusi** e **metodi aperti**. Un metodo numerico per la ricerca degli zeri é un procedimento, o algoritmo, per costruire una successione numerica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge al valore dello zero.

Sebbene dal punto di vista teorico sia importante provare che la successione delle $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga, non é praticamente possibile, né pensabile, calcolare tutti i termini della successione numerica. Ogni procedimento iterativo necessita che sia definito un criterio per decidere quanti termini della successione numerica é neessario calcolare (*criterio di arresto*). Questo, come vedremo in seguito, dipende dal tipo di procedimento iterativo. In generale si potrebbe richiedere che il valore della funzione nel termine x_i-mo, trovato dalla iterazione *i-ma*, disti da zero meno di un valore di tolleranza ϵ prefissato, ad esempio $f(x_i) < \epsilon$, per $\epsilon = 10^{-6}$. Tuttavia é facile rendersi conto che questo criterio potrebbe essere fallace perché dipende dalla rapiditá con cui la funzione in esame si avvicina a zero. Il lettore potrá facilmente verificare che lo stesso valore di ϵ dará risposte diverse per le funzioni $f(x) = (x - x_0)$, $f(x) = (x - x_0)^2$, $f(x) = (x - x_0)^4$ tutte nulle in un punto x_0. **Ordine di un metodo.** Si consideri una funzione reale $f \in C[a, b]$, cioé continua in un intervalo $[a, b]$, dove é definita, che abbia uno zero semplice $\xi \in [a, b]$ in tale intervallo, cioé uno zero di molteplicit 1 di f, ció significa che f pu essere scritta nella forma $f(x) = (x - \xi)g(x)$, essendo g una funzione tale che $g(\xi)$ é diverso da zero. In generale, la molteplicit di uno zero di una funzione f in un punto ξ quel numero naturale n per il quale esiste una funzione g tale che $f(x) = (x - \xi)^n g(x)$ con $g(\xi)$ é diverso da zero.

Come precedentemente affermato un metodo numerico costruisce una successione di punti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ che converge adl punto ξ. L'errore al generico passo n é la distanza dal *valore vero* ξ:

$$e_n = | x_n - \xi |. \tag{9.4}$$

Definizione 9.1 *Si dice che una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, generata dal metodo numerico, converge a ξ con ordine $p \geq 1$ se:*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}, c > 0 : | x_{k+1} - \xi | \leq c| x_k - \xi |^p, \ \forall k \geq k_0. \tag{9.5}$$

In questo caso il metodo si dice di ordine p.

∗ **Osservazione 9.2** *Se $p = 1$ il metodo é noto come metodo lineare. Per avere la convergenza deve necessariamente essere $c < 1$. In questo caso c é detto* ***fattore di convergenza.***

Definizione 9.2 *Si definisce* ***velocitá di convergenza*** *di un metodo il numero di iterazioni necessarie al raggiungimento della soluzione, cioé al punto di zero con la precisione richiesta.*

∗ **Osservazione 9.3** *In generale la convergenza dipende dalla scelta del guess iniziale x_0, cio del primo valore da fissare nel costruire una successione di punti $x_{n n\in\mathbb{N}}$ convergente ad ξ. I risultati di convergenza valgono solo localmente, cio per un opportuno intorno dello zero semplice ξ.*

I metodi per i quali la convergenza non dipende dal *guess* iniziale si dicono di *globale*

L'ordine del metodo é legato alla rapiditá con cui si raggiunge la soluzione con la precisione voluta.

Risulta utile nella pratica il seguente concetto di velocitá di convergenza.

I metodi chiusi, detti anche *braketing methods*, sono quelli che si basano sul teorema di esistenza degli zeri. Tali metodi richiedono la conoscenza di due punti x_1, x_2 tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. La convergenza alla soluzione di questi metodi é garantita. Se nell'intervallo in esame esistepiú di uno zero, il metodo ne trova solamente uno. Tuttavia, trovato il primo zero é possibile riformulare il problema in uno o piú intervalli, che non contengo no lo zero trovato e ripetere il procedimento di ricerca degli zeri.

I metodi aperti non fanno riferimento al teorema di esistenza degli zeri e non richiedono la individuazione di un intervallo $x_1, x_2 \in |a, b|$ tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. I metodi aperti non hanno una convergenza garantita. Essi possono convergere o no; se convergono hanno tuttavia una velocitá di convergenza.

9.2.1 Metodi Chiusi

Pre-processing. Sia f una funzione reale definita in un intervallo $|a, b|$ ed ivi continua. Supponiamo di aver individuato con uno dei metodi sopra esposti una regione nella quale sia $f(a) \cdot f(b) < 0$. Siamo allora nelle condizioni di applicabilitá del teorema degli zeri e possiamo pertando utilizzare un metodo chiuso.

Metodo di Bisezione.

Sia $f \in C(a, b)$ una funzione reale definita e continua in (a, b) e sia $f(a)f(b) < 0$.
Applicando il teorema degli zeri si ha che $\exists \xi \in |a, b|$: $f(\xi) = 0$.
Fissata la tolleranza ϵ il metodo di bisezione consiste nel costruire una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, di valori approssimati tali che, se nell'intervallo esiste un solo zero, essa converge alla soluzione del problema. La sequenza dei valori x_n viene costruita con l'algoritmo che segue.

1. Si fissino il primo elemento della successione, $i = 0$, $a_0 = a$ e $b_0 = b$;

2. il valore x_0 della successione é il punto medio: $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;

3. Se $|a_0 - b_0| < \epsilon$ allora l'iterazione si arresta ed x_0 é il punto cercato.
   Altrimenti, se $|a_0 - b_0| \geq \epsilon$ si procedecon passo successivo;

4. si calcolila funzione nei 3 punti $f(a_0), f(b_0), f(x_0)$;
   si calcolino $f(a_0) \cdot f(x_0)$ e $f(b_0) \cdot f(x_0)$;

5. si identifichi il nuovo intervallo in cui si trova, per il teorema di esistenza degli zeri, il candidato punto di zero:

   - Se $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$
     l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (a_0, x_0) e ponendo $a_0 = a_0$ e $b_0 = x_0$ si continui il ciclo dal punto (6) ;

   - se invece $f(b_0) \cdot f(x_0) < 0$
     l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (x_0, b_0) ponendo $a_0 = x_0$ e $b_0 = b_0$ si continui il ciclo dal punto (6);

6. si aumenti man mano di una unitá il contatore dei termini della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ delle iterazioni, e si continui il processo iterativo dal punto (2).

Quando il processo iterativo si arresta per effetto del controllo posto al punto (3), il punto ξ per cui $f(\xi) = 0$ si trova all'interno dell'ultimo intervallo.

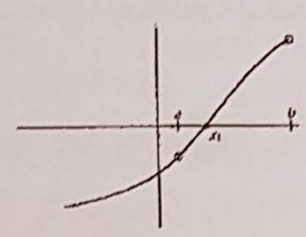


Figura 9.1: Approssimazioni con il Metodo di Bisezione

É interessante analizzare come decresce l'ampiezza Δ_n dell'intervallo entro cui si trova ξ al procedere delle iterazioni.

$$\begin{aligned}
\text{iteraz. n}=0 &\rightarrow \Delta_0 = (b-a)/2^0\\
\text{iteraz. n}=1 &\rightarrow \Delta_1 = \Delta_0/2 = (b-a)/2^1\\
\text{iteraz. n}=2 &\rightarrow \Delta_2 = \Delta_1/2 = (b-a)/2^2\\
\text{iteraz. n}=3 &\rightarrow \Delta_3 = \Delta_2/2 = (b-a)/2^3\\
\text{iteraz. n}=4 &\rightarrow \Delta_4 = \Delta_3/2 = (b-a)/2^4\\
\text{iteraz....} &\rightarrow \ldots\ \ldots\ \ldots\\
\text{iteraz. n}=\text{n} &\rightarrow \Delta_n = \Delta_{n-1}/2 = (b-a)/2^n
\end{aligned}$$

É allora possibile calcolare l'errore alla n-ma iterazione:

$$|e_n| = |\ \xi - x_n\ | \leq h^n \cdot (b-a). \tag{9.6}$$

Il metodo é quindi lineare con un fattore di convergenza $c = \frac{1}{2}$.

Metodo della Tangente

Il metodo della tangente, detto pure **Regula Falsi** é un metodo chiuso. La costruzione della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, é analoga a quella vista per il metodo di Bisezione. Il termine generale della successione é dato dal punto di incontro della retta che congiunge gli estremi dell'intervallo nel quale, alla k-ma iterazione, si trova il punto di zero ξ.

Detto $[a_n, b_n]$ l'intervallo alla n-ma iterazione, con $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, l'equazione della retta condotta dagli estremi di tale intervallo é:

$$\frac{y - f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \tag{9.7}$$

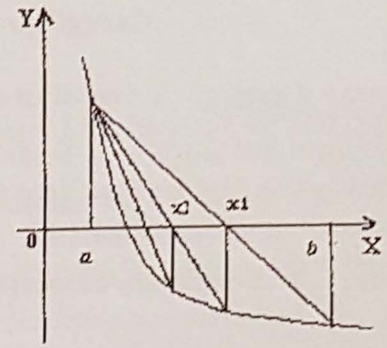


Figura 9.2: Approssimazioni con il Metodo della Secante o Regula Falsi

Il punto di intersezione di tale retta con l'asse x, di equazione $y = 0$, é dato da:

$$x_n = a_n - f(a_n)\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}. \tag{9.8}$$

Il metodo consiste ora nel sostituire il valore di x_n al punto (2) della iterazione del metodo di Bisezione. Si puó provare che $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

L'altra differenza con il metodo di Bisezione riguarda il *criterio di arresto* della iterazione. Infatti dalla figura 9.2 é facile evincere che, nel caso del metodo della tangente, non é l'intervallo che contiene il punto ξ a decrescere progressivamente ma é il punto x_n ad avvicinarsi sempre piú al punto ξ. Infatti il punto x_n si troverá sempre a sinistra di ξ se la funzione volge la convessitá nel verso delle y positive o sempre a destra se la funzione volge la concavitá nel verso delle y positive.

Come detto in precedenza la strategia di arresto della iterazione basata sulla condizione $f(x_n) \leq \epsilon$ potrebbe essere fallace se la funzione ha sempre valori prossimi a zero. Per evitare questo possibile inconveniente occorre *eliminare* il peso del valore della funzione e considerare solo le variazioni rispetto alla iterazione. Dato che il metodo converge allora $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, quindi per il criterio di convergenza di Cauchy sulle successioni si ha che:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\nu \cdot \forall n > \nu \Rightarrow\ |x_{n+1} - x_n| < \epsilon \tag{9.9}$$

É facile vedere che questo equivale a richiedere che:

$$\forall n > \nu \Rightarrow\ |\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1| < \epsilon. \tag{9.10}$$

Il criterio *ragionevole* é quindi richiedere che sia: $|\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1| < \epsilon$. Concettualmente ció equivale a dire che il punto x_n non progredisce piú verso il punto ξ. Con questo criterio il Metodo Regula Falsi genera la successione delle $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ con il seguente algoritmo.

1. Si fissino $a_0 = a$, $b_0 = b$ ed il primo elemento della successione, $n = 0$

2. il valore $x_n k$ della successione é il punto medio: $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$.

3. Se $n \geq 1 \wedge |x_n/x_{n-1} - 1| < \epsilon$ allora l'iterazione si arresta ed x_n é il punto cercato.
   In caso contrario, cioé se $|x_n/x_{n-1} - 1| \geq \epsilon$, si procede con il passo successivo.

4. Si calcoli la funzione nei 3 punti $f(a_n), f(b_n), f(x_n)$; e quindi i prodotti $f(a_n) \cdot f(x_n)$ e $f(b_n) \cdot f(x_n)$.

5. Si identifichi il nuovo intervallo in cui si trova, per il teorema di esistenza degli zeri, il candidato punto di zero:

   - se $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$
     l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (a_n, x_n), ponendo $a_n = a_n$ e $b_n = x_n$ si continui il ciclo dal punto (6);

   - se invece $f(b_n) \cdot f(x_n) < 0$
     l'intervallo in cui si trova il punto di zero é (x_n, b_n), ponendo $a_n = x_n$ e $b_n = b_n$ si continui il ciclo dal punto (6);

6. si aumenti di una unitá il contatore dei termini della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ delle iterazioni, $n = n + 1$ e si continui il processo iterativo dal punto (2).

9.2.2 Metodi Aperti

I metodi aperti derivano per la maggior parte dal Teorema del Punto fisso la cui trattazione esula dagli scopi di questa presentazione. Essi non garantiscono in generale la convergenza della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ alla soluzione ξ. Tuttavia se il *guess* iniziale é abbastanza prossimo al valore di ξ allora un metodo aperto converge molto piú rapidamente di un metodo chiuso.

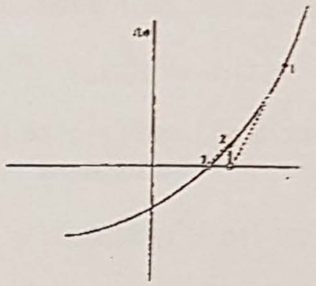


Figura 9.3: Approssimazioni successive con il Metodo di Newton - Raphson

Metodo di Newton. Il Metodo di Newton-Raphson utilizza dalla formula di Taylor. Si suppone di assegnareun *guess* iniziale x_0 molto prossimo al punto di zero ξ della funzione. Approssimando la funzione f nel punto ξ mediante la formula di Taylor, si ha:

$$0 = f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(\xi - x_0)^2 + O[(\Delta x)^3] \tag{9.11}$$

Assumendo che il guess iniziale sia molto prossimo a ξ, sappiamo che solo i primi termini della formula di Taylor sono importanti. Possiamo quindi trascurare i termini quadratici e superiori e considerare solamente la approssimazione lineare. Risolvendo rispetto a ξ si ha la prima approssimazione x_1.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{9.12}$$

Ricordando quanto giá osservato sul significato geometrico del differenziale si comprende che il Metodo di Newton-Raphson calcola il punto di intersezione tra la retta tangente alla curva in x_0 e l'asse delle x. Questo punto é assunto come nuovo guess ed il procedimento ripetuto, cioé:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \tag{9.13}$$

Il metodo ha un ordine di convergenza quadratico ed é molto veloce. Occorre tuttavia fornire un buon guess iniziale e garantirsi che la funzione non abbia derivata nulla nella regione di ricerca.

Ad esempio, la figura 9.3 mostra i passi di convergenza per la equazione:

$$f(x) = x \cdot \sin(\pi x) - e^{-x} = 0.$$

Capitolo 10

Equazioni differenziali

Si desidera affrontare il problema di determinare una funzione incognita $y(x)$ conoscendo la sua relazione con le sue prime n derivate ($n \in \mathbb{N}$), $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente.

Una tale realzione si chiama **equazione differenziale** di ordine n. Ogni funzione $y(x)$ che la soddisfa si dice una soluzione o un integrale della equazione differenziale.

Esempi di equazioni differenziali sono:

$$y' = y \sin^2(x) \tag{10.1}$$

$$5(y')^2 + y/x = 0 \tag{10.2}$$

$$y'' + 8y' - 7y = 0 \tag{10.3}$$

$$y^{(iv)} + 5y = 6 \tag{10.4}$$

dove (10.1) e (10.2) sono equazioni differenziali del I ordine, (10.3) è del III ordine e (10.4) è del IV ordine.

L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che figurano nella equazione differenziale.

La forma più generale di una equazione differenziale di ordine n è una scrittura del tipo:

$$f[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)] = 0 \tag{10.5}$$

dove $f[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)]$ è una funzione arbitraria delle variabili specificate.

Integrare una equazione differenziale significa trovare tutte i possibili integrali, ovvero tutte le funzioni $y(x)$ che la soddisfano.

10.1 Equazioni del I ordine a variabili separabili

siano $X(x)$ e $Y(y)$ due funzioni continue, rispettivamente delle variabili x e y. Si consideri l'equazione differenziale del I ordine:

$$y' = X(x)Y(y). \tag{10.6}$$

Per risolverla, si procede come segue. Si dividono entrambi i membri per $Y(y)$, supponendo $Y(y) \neq 0$, per ogni valore di y per cui la funzione Y é definita:

$$\frac{y'}{Y(y)} = X(x),$$

integrando ambo i membre rispetto alla variabile x, si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'dx}{Y(y)} &= \int X(x)dx \text{ quindi,} \\ \int \frac{dy}{Y(y)} &= \int X(x)dx. \end{aligned}$$

Denotate con:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int \frac{dy}{Y(y)} \text{ una primitiva di } 1/Y(y) \text{ e} \\ g(x) &= \int X(x)dx \text{ una primitiva di } X(x) \end{aligned}$$

si ha che:

$$f(y) = g(x) + c, \qquad \text{essendo } c \text{ una costante reale.}$$

Se la funzione f ammette una funzione inversa, sia essa $y = \phi(\cdot)$, si ottiene:

$$y = \phi[g(x) + c],$$

che rappresenta la soluzione cercata della (10.6).

10.2 Proprietà delle equazioni differenziali

Mostreremo alcune importanti proprietà delle equazioni differenziali lineari riferendoci, per semplicità, ad equazioni del secondo ordine. Quanto mostrato vale tuttavia per un ordine n qualsiasi.

Si consideri l'equazione differenziale lineare:

$$y'' = a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{10.7}$$

essendo $a_1(x), a_2(x)$ ed $f(x)$ sono funzioni note. Si definisce la sua equazione *omogenea associata*:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{10.8}$$

Siano ora $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due integrali della 10.8. Per tali funzioni, quindi:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima per c_1 e la seconda per c_2, essendo esse due costanti arbitrarie, e sommando membro a membro si ottiene:

$$[c_1y_1'' + c_2y_2''] + a_1[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_2[c_1y_1 + c_2y_2] = 0, \tag{10.9}$$

ne segue che la funzione $y_0 = c_1y_1 + c_2y_2$ è anch'essa soluzione della equazione omogenea associata.

Inoltre, è possibile mostrare che se le funzioni y_1 e y_2 soddisfano alla condizione di essere linearmente indipendenti, tutte e sole le soluzioni della equazione omogenea associata sono della forma:

$$y_0 = c_1y_1 + c_2y_2, \tag{10.10}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Considerata la matrice avente come prima riga quella composta da y_1 e y_2 e come seconda riga quella formata da y_1' ed y_2, se il determinante di tale matrice non é identicamente nullo si dice che gli integrali y_1 ed y_2 sono linearmente indipendenti.

TEOREMA 10.1 *Se il determinante definito sopra non é identicamente nullo, cioé se:*

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq,$$

tutte e sole le soluzioni della equazione omogenea associata sono date dalla funzione:

$$y_0 = c_1y_1 + c_2y_2,$$

che prende il nome di integrale generale della equazione omogenea associata.

Consideriamo ora l'equazione differenziale in forma completa:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Siano y ed $\hat{y}$ due soluzioni di questa equazione. Per essa si ha quindi che:

$$y'' + a_1 y + a_2 y = f(x)$$
$$\hat{y}'' + a_1 \hat{y}' + a_2 \hat{y} = f(x).$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$(y - \hat{y})'' + a_1(y - \hat{y})' + a_2(y - \hat{y}) = 0,$$

cioè la funzione $y = y - \hat{y}$ è una soluzione della equazione omogenea associata. Ma poiché, come abbiamo visto, tutte e sole le soluzioni della omogenea associata sono delle forma (10.10) allora è possibile trovare le costanti c_1 e c_2 in modo tale che:

$$y = y - \hat{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

da cui:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \hat{y}. \tag{10.11}$$

Si osservi inoltre che, per ogni scelta delle costanti reali c_1 e c_2 il secondo membro è una soluzione dell'equazione completa. Infatti, detto $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ si ha:

$$y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0 = 0$$
$$\hat{y}'' + a_1 \hat{y}' + a_2 \hat{y} = f(x),$$

sommando

$$(y_0 + \hat{y})'' + a_1(y_0 + \hat{y})' + a_2(y_0 + \hat{y}) = f(x)$$

La (10.11) viene quindi chiamata *integrale generale della equazione differenziale in forma completa* ed ogni integrale che si ottiene dallla precedente equazione assegnando dei valori alle costanti c_1 e c_2 si chiama *integrale particolare della equazione differenziale in forma completa.*

Mostriamo adesso un'altra utile proprietà.

TEOREMA 10.2 *Siano assegnate due equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti e due funzioni reali f e ϕ, tali che le equazioni si differenziano solo per il temine noto:*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{10.12}$$
$$z'' + a_1 z' + a_2 z = \phi(x). \tag{10.13}$$

Denotate con $\bar{y}, \bar{z}$ rispettivamente una soluzione della 10.12 ed una soluzione della 10.13 e con k_2, k_2 due costanti reali, allora:

$$\tilde{y} = k_1 \bar{y}(x) + k_2 \bar{z}(x)$$

è una soluzione particolare della equazione:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = k_1 f(x) + k_2 \phi(x).$$

Dimostrazione. Sostituiamo le funzioni $\bar{y}$ e $\bar{z}$ rispettivamente nella 10.12 e nella 10.13 e moltiplichiamo la prima di esse per k_1 e la seconda per k_2. Quindi, sommando membro a membro si ha:

$$(k_1 \bar{y} + k_2 \bar{z})'' + a_1(k_1 \bar{y} + k_2 \bar{z})' + a_2(k_1 \bar{y} + k_2 \bar{z}) = k_1 f + k_2 \phi.$$

Posto $\theta = k_1 y + k_2 z$, la precedente equazione prova che la soluzione dell'equazione:

$$\theta'' + a_1 \theta' + a_2 \theta = k_1 f(x) + k_2 \phi(x)$$

è data da:

$$\theta = k_1 \bar{y}(x) + k_2 \bar{z}(x)$$

ció conclude la dimostrazione. □

* **Osservazione 10.1** *La soluzione generale*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \hat{y}$$

essendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ arbitrarie, rappresenta infinite soluzioni in quanto ha due costanti arbitrarie. Inoltre, se imponiamo due vincoli o condizioni iniziali del tipo:

$$y(x_0) = \alpha \quad y'(x_0) = \beta$$

si prova che esiste una ed una sola soluzione che soddisfa le condizioni richieste.

Questi tipi di problemi sono quelli che si incontrano nella Meccanica Classica.

10.3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Siano a_1 ed f due funzioni reali di variabile reale, definite nello stesso insieme di definizione ed ivi integrabili. Una equazione differenziale lineare del primo ordine é una scrittura del tipo:

$$y' + a_1(x)y = f(x), \tag{10.14}$$

e l a sua equazione omogenea associata:

$$y' + a_1(x)y = 0 \tag{10.15}$$

Osserviamo che la (10.15) è una equazione a variabili separabili. Quindi:

$$\frac{y'}{y} = -a_1(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a_1(x)dx \Rightarrow \log|y| = -\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt + c,$$

al variare della costante reale arbitraria c.

Posto $c = \log c_1$:

$$y(x) = c_1 e^{|-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt|}$$

si ottiene la forma più generale della soluzione di una equazione differenziale lineare del primo ordine.

Per trovare la soluzione della (10.14) occorre trovare in integrale particolare. Il metodo che si usa é il seguente, che prende il nome di **Metodo di variazione della costante arbitraria**.

Indichiamo con $y_1 = e^{|-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt|}$ la soluzione della equazione omogenea associata. Cerchiamo una soluzione della equazione completa che sia del tipo:

$$y = \gamma(x)y_1(x),$$

essendo $\gamma(x)$ una nuova funzione della variabile reale x dotata di derivata prima.

Derivando si ottiene:

$$y'(x) = \gamma'(x)y_1(x) + \gamma(x)y_1'(x).$$

Sostituendo nella (10.14) si ha:

$$[\gamma'(x)y_1(x) + \gamma(x)y_1'(x)] + a_1[\gamma(x)y_1(x)] = f(x),$$

da cui

$$\gamma(x)[y_1'(x) + a_1y_1(x)] + \gamma'(x)y_1(x) = f(x),$$

ma $y_1'(x) + a_1y_1(x) \equiv 0$ essendo $y_1(x)$ soluzione della equazione omogenea associata, pertanto:

$$\gamma'(x)y_1(x) = f(x)$$

$$\gamma'(x) = \frac{f(x)}{y_1(x)}$$

$$\gamma(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}dt + c_1.$$

Quindi, avendo travato le funzioni γ ed y_1, si puó scrivere la soluzione generale, dato che essa é somma della soluzione omogenea e di una soluzione particolare. Infatti in questo caso la soluzione della omogenea è c_1y_1 e quella particolare è $\gamma(x)y_1(x)$. Si ha pertanto:

$$y(x) = c_1y_1(x) + y_1\int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1}dt =$$

$$= y_1(x)[c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt] =$$

$$= e^{|-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt|} \cdot |c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t) \cdot e^{[\int_{x_0}^{t} a_1(\xi)d\xi]}dt|.$$

* **Osservazione 10.2** *Si noti che la soluzione particolare per cui $y(x_0) = \alpha$ si ottiene ponendo $c_1 = \alpha$. Infatti $e^{|-\int_{x_0}^{x_0} a_1(t)dt|} = 1$ e $\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$ da cui l'asserto.*

10.4 Equazioni differenziali lineari del I ordine a coefficienti costanti

Un caso interessante e molto comune nelle applicazioni è quello in cui $a_1(x)$ =costante. In tal caso conviene seguire un procedimento diverso. La equazione diventa:

$$y' + a_1y = f(x), \tag{10.16}$$

e la equazione omogenea associata è:

$$y' + a_1y = 0. \tag{10.17}$$

Cerchiamo una soluzione della (10.17) che sia della forma:

$$y_1(x) = e^{\alpha x},$$

essendo α una costante arbitraria da calcolare in modo tale che sia soddisfatta la equazione omogenea associata scritta subito sopra.

Si ha che: $y_1'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ e, sostituendo nella (10.17), otteniamo:

$$\alpha e^{\alpha x} + a_1 e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha + a_1)e^{\alpha x} = 0 \text{ ció é vero se:}$$
$$\alpha + a_1 = 0, \text{ quindi}$$
$$\alpha = -a_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1 = e^{-a_1 x}$$

Per calcolare una soluzione particolare della (10.16) si ricorre al metodo generale. Possiamo osservare che la soluzione generale vista in precedenza:

$$y = e^{\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dt\right]}\left[c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{\left[\int_{x_0}^{t} a_1(s)ds\right]}dt\right],$$

nel caso $a_1 =$ costante si riduce a:

$$y = e^{-a_1 x}\left[c_1 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{a_1 t}dt\right].$$

La difficoltà nel calcolo dell'integrale $\int_{x_0}^{x} f(t)dt\, e^{a_1 t}dt$ dipende da $f(x)$. Studieremo pertanto , qui di seguito, solo alcuni casi particolari. Casi particolari. $|f(x) = e^{\beta x}, f(x) = 1, f(x) = e^{-a_1 x}|$.

Se $f(x) = e^{\beta x}$ dalla formula generale, posto $x_0 = 0$, si ha per $a_1 + \beta \neq 0$

$$\int_0^x f(t)\, e^{a_1 t}dt = \int_0^x e^{(\beta + a_1)t}dt = \frac{1}{a_1+\beta}e^{(\beta+a_1)x} - \frac{1}{a_1+\beta},$$

$$\text{quindi } y = e^{-a_1 x}\left[c_1 + \frac{1}{\beta + a_1}e^{(\beta+a_1)} - \frac{1}{a_1+\beta}\right].$$

$$\text{posto } c = c_1 - \frac{1}{a_1+\beta} \text{ si ha:}$$

$$y = ce^{-a_1 x} + \frac{1}{\beta + a_1}e^{\beta x}$$

Allo stesso risultato si perviene cercando una soluzione del tipo $y = ke^{\beta x}$, della equazione:

$$y' + a_1 y = e^{\beta x},$$

dove k é una costante reale da determinare. Infatti, posto:

$$y = ke^{\beta x},$$
$$y' = k\beta e^{x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k\beta e^{\beta x} + a_1 k e^{\beta x} = e^{\beta x},$$
$$\text{quindi } k(a_1 + \beta) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{a_1+\beta}.$$

Pertanto l'integrale particolare è:

$$\bar{y} = \frac{1}{a_1+\beta}e^{\beta x}$$

che, sommato all'integrale della omogenea associata

$$y = c_1 e^{a_1 x},$$

fornisce il seguente integrale generale:

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + \frac{1}{a_1+\beta}e^{\beta x}.$$

Se $\beta = 0$, l'equazione si riduce a:

$$y' + a_1 y = 1,$$

che ammette l'integrale particolare

$$\bar{y} = \frac{1}{a_1},$$

da cui:

$$y = c_1 e^{a_1 x} + \frac{1}{a_1}.$$

Caso $a_1 + \beta_1 = 0$, cioè $\beta = -a_1$. In questo caso per cercare l'integrale particolare si pone:

$$y = kxe^{-a_1 x}, \text{ quindi:} \qquad y' = ke^{-a_1 x} - ka_1 xe^{-a_1 x}$$

che sostituite nella equazione

$$y' + a_1 y = e^{-a_1 x} \text{ permettono di ottenere:}$$
$$ke^{-a_1 x} - ka_1 xe^{-a_1 x} + ka_1 xe^{-a_1 x} = e^{-a_1 x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ke^{-a_1 x} = e^{-a_1 x} \Rightarrow k = 1.$$

Pertanto l'integrale genererale è:

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + x e^{-a_1 x} = (c_1 + x) e^{-a_1 x}$$

Caso particolare $|f(x) = \sin \gamma x, f(x) = \cos \gamma x|$
Si desidera calcolare l'integrale particolare dell'equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti:

$$y' - a_1 y = \sin \gamma x \qquad \gamma \in \Re. \tag{10.18}$$

Ponendo:

$$\bar{y} = k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x, \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \bar{y}' = \gamma k_1 \cos \gamma x - \gamma k_2 \sin \gamma x$$

si calcolino quindi k_1 e k_2. Sostituendo nella (10.18) si ha:

$$\gamma k_1 \cos \gamma x - \gamma k_2 \sin \gamma x + a_1 k_1 \sin \gamma x + a_1 k_2 \cos \gamma x = \sin \gamma x,$$
$$\text{da cui:} \quad \sin \gamma x |a_1 k_1 - \gamma k_2| + \cos \gamma x |\gamma k_1 + a_1 k_2| = \sin \gamma x,$$

che è soddisfatta se:

$$\begin{cases} a_1 k_1 - \gamma k_2 & = 1 \\ \gamma k_1 + a_1 k_2 & = 0. \end{cases}$$

Risolviamo rispetto a k_1 e k_2. Dalla seconda si ottiene:

$$k_2 = -\frac{\gamma}{a_1} k_1 \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 k_1 + \frac{\gamma^2}{a_1} k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2} \text{ e quindi:}$$
$$\Rightarrow k_2 = \frac{-\gamma}{a_1^2 + \gamma^2}.$$

Si ottiene quindi che l'integrale particolare è dato da:

$$\bar{y} = \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2} \sin \gamma x - \frac{\gamma}{a_1^2 + \gamma^2} \cos \gamma x.$$

In modo analogo per l'equazione differenziale :

$$y' + a_1 \gamma = \cos \gamma x$$

si ricavano:

$$k_1 = \frac{\gamma}{a_1^2 + \gamma^2}, \qquad k_2 = \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2},$$
$$\bar{y} = \frac{\gamma}{a_1 + \gamma^2} \sin \gamma x + \frac{a_1}{a_1^2 + \gamma^2} \cos \gamma x.$$

Riepilogando, si è pervenuti ai seguenti integrali generali.

- Per la equazione $y' + a_1 y = \sin \gamma x$:

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + \frac{1}{a_1^2 + \gamma^2} |a_1 \sin \gamma x - \gamma \cos \gamma x.|$$

- Per la equazione $y' + a_1 y = \cos \gamma x$:

$$y = c_1 e^{-a_1 x} + \frac{1}{a_1^2 + \gamma^2} |\gamma \sin \gamma x + a_1 \cos \gamma x|.$$

Riepilogando, siamo in grado di scrivere l'integrale particolare dell'equazione:

$$y' + a_1 y = A + B e^{\beta x} + C \sin \gamma x + c' \cos \gamma x$$

esendo $A, B, C, C' \in \Re$ costanti arbitrarie. Infatti, per un teorema visto in precedenza, l'integrale particolare è dato da:

i) Se $\beta \neq -a_1$

$$\bar{y} = \frac{A}{a_1} + \frac{B}{\beta + a_1} e^{\beta x} + \frac{c}{a_1^2 + \gamma_2} |a_1 \sin \gamma x + \gamma \cos \gamma x| +$$
$$\frac{c'}{a_1^2 + \gamma^2} |\gamma \sin \gamma x + a_1 \cos \gamma x|.$$

ii) Se $\beta = -a_1$

$$\bar{y} = \frac{A}{a_1} + B x e^{\beta x} + \frac{c}{a_1 + \gamma^2} |a_1 \sin \gamma x + \gamma \cos \gamma x| +$$
$$\frac{c'}{a_1^2 + \gamma^2} |\gamma \sin \gamma x + a_1 \cos \gamma x|.$$

10.5 Equazione differenziale del II ordine a coefficienti costanti

Sia data laequazione differenziale :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{10.19}$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ f una funzione reale di variabile reale. Studiamo innanzitutto la equazione omogenea associata:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{10.20}$$

Si vuole cercare una soluzione del tipo:

$$y = e^{\alpha x},$$

essendo $y' = \alpha e^{\alpha x}$ e $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$. Sostituendo in (10.20) si ottiene:

$$e^{\alpha x}(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) = 0.$$

L'equazione algebrica:

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0 \tag{10.21}$$

si chiama **equazione algebrica caratteristica associata** alla (10.20).

Come è noto, posto $\delta = a_1^2 - 4a_2$, l'equazione algebrica (10.21) ammette le seguenti soluzioni.

a) Due soluzioni reali e distinte $\alpha_1 \neq \alpha_2$, se $\delta > 0$,

b) due soluzioni reali e coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2, \delta = 0$

c) nessuna soluzione reale, $\delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$.

Esaminiamo i tre casi singolarmente.

Caso a) $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1 \neq \alpha_2$.
Le funzioni

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}; \qquad y_2 = e^{\alpha_2 x}$$

sono soluzioni particolari. Per vedere se sono linearmente indipendenti, calcoliamo

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \\ &e^{\alpha_1 x}\alpha_2 e^{\alpha_2 x} - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x} = \\ &(\alpha_1 - \alpha_2)e^{(\alpha_2+\alpha_2)x} \end{aligned}$$

Essendo:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow W(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y_1, y_2 \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Soluzione della equazione omegenea associata è quindi:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x},$$

essendo c_2 e $c_2 \in \mathbb{R}$. Caso b) $\alpha_1 = \alpha_2$.
La funzione $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ è una soluzione della equazione differenziale omogenea. Si verifica subito che $y_2 = xe^{\alpha_1 x}$ è anch'essa

una soluzione della equazione omogenea. Infatti, calcolando le sue derivate:

$$y_2' = e^{\alpha_1 x} + x\alpha_1 e^{\alpha_1 x}; \qquad y_2'' = \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1^2 x e^{\alpha_1 x}$$

e sostituendo, si ha:

$$\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_1^2 x e^{\alpha_1 x} + a_1 e^{\alpha_1 x} + a_1 x\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 x e^{\alpha_1 x} = 0,$$

$$\text{ovvero: } x[\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + \alpha_2] + [2\alpha_1 + a_1] = 0.$$

Ricordiamo che l'equazione caratteristica associata ha una soluzione doppia, pertanto:

$$\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_2 = 0, \quad \text{ed essendo:}$$

$$\alpha_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2a} \text{ con } \delta = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow 2\alpha_1 + a_1 = 0,$$

é dunque provato che $y_2 = xe^{\alpha_1 x}$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Verifichiamo inoltre che le soluzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \\ &= e^{\alpha_1 x}[e^{\alpha_1 x} + x\alpha_1 e^{\alpha_1 x}] - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} x e^{\alpha_1 x} = \\ &= e^{2\alpha_1 x}[1 + x\alpha_1 - x\alpha_1] = \\ &= e^{2\alpha_1 x} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soluzione della equazione omogenea associata è quindi:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}$$

Caso c) $\delta < 0$.
Cerchiamo una soluzione del tipo: $y = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, determinando α e β. Si ha:

$$\begin{aligned} y' &= \beta\cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + \alpha\sin\beta x \cdot e^{\alpha x}, \\ y'' &= \beta[-\beta\sin\beta x e^{\alpha x} + \\ &+ \alpha\cos\beta x \cdot e^{\alpha x}] + \alpha[\beta\cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + \alpha\sin\beta x \cdot e^{\alpha x}] = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\sin\beta x + (2\alpha\beta)\cos\beta x e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} &[(\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x e^{\alpha x}] + \\ &+ [a_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + a_1\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x] + a_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = 0. \end{aligned}$$

Raggruppando i termini comprendenti seno e coseno, si perviene alla seguente equazione:

$$[\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2]e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta(2\alpha + a_1)e^{\alpha x}\cos\beta x = 0.$$

Quindi deve aversi:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2 & = 0 \\ \beta\,(2\alpha + a_1) & = 0 \end{cases}$$

si ha quindi: $\alpha_1 = -a_1/2$ e $\beta^2 = a_1^2/4 - a_1^2/2 + a_2 = \dfrac{4a_2 - a_1^2}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -a_1/2 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}.$$

L'altra soluzione da ricercare è dello stesso tipo, precisamente:

$$y = e^{\alpha x}\cos\beta x. \text{ Infatti .}$$
$$y' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y'' = \alpha[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x] - \beta[\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x] =$$
$$(\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x e^{\alpha x} - (2\alpha\beta)\sin\beta x e^{\alpha x}.$$

sostituendo nell'equazione, si ottiene:

$$(\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x +$$
$$+ a_1[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x] + a_2 e^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2)e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta(2\alpha + a_1) = 0$$

che è facile riconoscere essere nelle stesse condizioni prima trovate. Quindi $\alpha = -a_1/2$ e $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$.

Proviamo ora che le due soluzioni trovate sono linearmente indipendenti. Calcoliamo partanto:

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 = \\ &= e^{\alpha x}\sin(\beta x)[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x] - \\ &\quad - e^{\alpha x}\cos(\beta x)[\beta e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x] = \\ &= e^{\alpha x}[\alpha\sin\beta x\cdot\cos\beta x - \beta\sin^2\beta x - \beta\cos^2\beta x - \alpha\sin\beta x\cos\beta x] \Rightarrow \\ &\Rightarrow W(x) = -\beta e^{\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ essendo: } \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2} \neq 0. \end{aligned}$$

Soluzione della omogenea associata è quindi:

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

essendo $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}a_1$. Riepilogando, l'integrale dell'equazione $y'' + a_1 y + a_2 y = 0$ è dato da:

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}; \qquad \alpha_1, \alpha_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \qquad a_1^2 - 4a_2 > 0$$
$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}. \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = -a_1/2, \quad a_1^2 - 4a_2 = 0$$
$$c_1 e^{ux}\cos vx + c_2 e^{ux}\sin vx, \qquad u = \frac{a_1}{2}, v = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}, 4a - a_1^2 > 0.$$

Ricerchiamo ora un integrale particolare delle equazione completa:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

nei casi in cui: $f(x) = 1$, $e^{\beta x}$, $\sin\gamma x$, $\cos\gamma x$.

1. $f(x) = 1$
   È immediato vedere che $\bar{y} = \frac{1}{a_2}(a_2 \neq 0)$. Infatti, $\bar{y}' = 0, \bar{y}'' = 0$ e l'equazione è soddisfatta. Se $a_2 = 0$, allora: $\bar{y} = \frac{x}{a_1}$ $(\bar{y}' = \frac{1}{a_1}, \bar{y}'' = 0)$. Se $a_1 = a_2 = 0$, allora $y = cx$, essendo c arbitrario.
2. $f(x) = e^{\beta x}$
   Investighiamo sulla ricerca di una soluzione particolare del tipo: $\bar{y} = ke^{\beta x}$ esendo k costante da determinare. Si ha:
   $y' = k\beta^{\beta x}$; $\quad y'' = k\beta^2 e^{\beta x}$ e sostituendo nell'equazione si ha:
   $$[k\beta^2 + a_1 k\beta + a_2 k]e^{\beta x} = e^{\beta x} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow k = [\beta^2 + a_1\beta + a_2]^{-1}, \quad \text{se: } \beta^2 + a_1\beta + a_2 \neq 0$$
   $$\text{quindi: } \bar{y} = [\beta^2 + a_1\beta + a_2]^{-1}e^{\beta x}$$
   Se: $\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$, allora β è una radice dell'equazione caratteristica. In tal caso la soluzione da cercare é del tipo: $\bar{y} = kxe^{\beta x}$ Ripetendo il procedimento si trova:
   $$k = \frac{1}{2\beta + a_1}$$
   Infine, se fosse simultaneamente: $\beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0$ e $2\beta + a_1 = 0$, cioè se β fosse radice doppia dell'equazione caratteristica, si fisserebbe: $\bar{y} = kx^2 e^{\beta x}$ Ripetendo il procedimento si trova:
   $$k = 1/2$$

Riepilogando:

$$\bar{y} = \begin{cases} [\beta^2 + a_1\beta + a_2]^{-1}e^{\beta x}, & \text{se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 \neq 0 \\ (2\beta + a_1)^{-1}e^{\beta x}; & \text{se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0, 2\beta + a_1 \neq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 e^{\beta x}. & \text{se } \beta^2 + a_1\beta + a_2 = 0, 2\beta + a_1 = 0. \end{cases}$$

3. $f(x) = \sin \gamma x$
In questo caso si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$\bar{y} = k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x$$

essendo k_1 e k_2 costanti da determinarsi.
Calcoliamo $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$

$$\bar{y}' = k_1 \gamma \cos \gamma x - k_2 \gamma \sin \gamma x$$
$$\bar{y}'' = -k_1 \gamma^2 \sin \gamma x - k_2 \gamma^2 \cos \gamma x$$

sostituendo nell'equazione, si ha:

$$k_1 \gamma^2 \sin \gamma x - k_2 \gamma^2 \cos \gamma x + a_1 [k_1 \gamma \cos \gamma x - k_2 \gamma \sin \gamma x] + a_2 [k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x] = \sin \gamma x.$$

Raggruppando rispetto a seno e coseno l'equazione diventa:

$$[-k_1 \gamma^2 - a_1 k_2 \gamma + a_2 k_1] \sin \gamma x + [-k_2 \gamma^2 + a_1 k_1 \gamma + a_2 k_2] \cos \gamma x = \sin \gamma x,$$

che è soddisfatta se:

$$\begin{cases} k_1(a_2 - \gamma^2) - k_2 a_1 & = 1 \\ k_1 a_1 \gamma + k_2(a_2 - \gamma^2) & = 0. \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a k_1 e k_2 si ottengono:

$$k_1 = \frac{a_2 - \gamma^2}{(a_2 - \gamma^2) + a_1 \gamma^2}$$
$$k_2 = \frac{-a_1 \gamma}{(a_2 - \gamma^2) + a_1 \gamma^2}.$$

Queste espressioni perdono senso nel caso in cui sia contemporaneamente $a_1 = 0$ ed $a_2 = \gamma^2$. In tal caso l'equazione diviene:

$$y'' + \gamma^2 y = \sin \gamma x;$$

una soluzione particolare di questa equazione è:

$$\bar{y} = -\frac{x}{2\gamma} \cos \gamma x$$

come si può facilmente verificare per sostituzione.

4. $f(x) = \cos \gamma x$
Si procede esattamente come nel caso precedente. Si cerca una soluzione del tipo:

$$\bar{y} = k_1 \sin \gamma x + k_2 \cos \gamma x$$

e si trova:

$$k_1 = \frac{a_1 \gamma}{(a_2 - \gamma^2) + a_1 \gamma^2}$$
$$k_2 = \frac{a_2 - \gamma^2}{(a_2 - \gamma^2) + a_1 \gamma^2}.$$

Se, contemporaneamente, $a_2 = \gamma^2$ e $a_1 = 0$, una soluzione particolare è data da:

$$\bar{y} = \frac{x}{2\gamma} \sin \gamma x.$$

5. Caso generale $f(x) = A + Be^{\beta x} + C \sin \gamma x + C' \cos \gamma x$.

$$0^{+\infty} \qquad \infty^{\infty} \tag{10.22}$$

Queste non sono da considerarsi forme indeterminate, dovendosi ovviamente porre:

$$0^{+\infty} = \infty^{-\infty} = 0 \qquad 0^{-\infty} = \infty^{+\infty} = \infty. \tag{10.23}$$

Si procede esattamente come già visto per le equazioni di primo grado.

Capitolo 11

Applicazioni alle Scienze Farmaceutiche

Sebbene le Scienze della Vita sembrino molto lontane dal formalismo astratto delle scienze matematiche molti fenomeni biologici sono rappresentabili con *semplici leggi* espresse con il linguaggio

Scopo del presente capitolo é mostrare alcune applicazioni concrete in modo esaltare la motivazione dello studio e giustificare gli sforzi effettuati per studiare i capitoli precedenti.

Nel capitolo 4 abbiamo presentato le funzioni piú importanti per le Scienze della Vita, cioé le funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche. Per i fenomeni di crescita e decadimento sono di particolare interesse le funzioni esponenziali, a^x, e logaritmiche, $\log_a x$, e, in particolare, quelle che fanno riferimento ad una base specifica: la base naturale e. Se $a = e$ (numero di Neper), la funzione esponenziale e la funzione logaritmica viste in precedenza divengono l'esponenziale e^x ed il logaritmo naturale $\ln x$. Per tali funzioni valgono, ovviamemente, tutte le proprietá, identitá e leggi viste in precedenza. Ricordiamo inoltre che:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x; \qquad \int e^x dx = e^x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x} = \ln|x| + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Sappiamo giá che le funzioni e^x e $\ln x$ divergono per $x \to +\infty$ e che entrambe sono funzioni monotone crescenti. Ci chiediamo ora quale delle due presenta la velocitá di crescita maggiore.

La risposta puó ottenersi facilmente osservando che e^x é un infinito di ordine superiore rispetto ad x. Infatti, $\lim_{x\to+\infty}(e^x/x) = +\infty$, come si puó facilemente verificare applicando le regola di l'Hospital. Ció prova che la crescita di e^x é *superlineare* cioé, graficamente, si trova sempre al di sopra della retta $y = x$.

Se adesso ricordiamo che $\ln x$ é la funzione inversa di e^x, ed il grafico della funzione inversa si ottiene come immagine speculare rispetto alla retta $y = x$, é immediato dedurre che $\ln x$ é *sublineare*. Conseguentemente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = 0. \tag{11.1}$$

Inoltre, é facile rendersi conto che, se $a > 0$, la funzione e^x é anche superpolinomiale, cioé $\forall a > 0$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} |\, x\,|^a\, e^x = 0. \tag{11.2}$$

Analogamente, é immediato mostrare che il logaritmo é *subpolinomiale*, cioé:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0; \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, \qquad \forall a > 0. \tag{11.3}$$

11.1 Crescita Esponenziale e Modelli di decadimento

Molti fenomeni naturali riguardano grandezze che aumentano o diminuiscono con rapiditá proporzinale al loro valore.

Questi fenomeni possono essere descritti matematicamente come segue.

Sia $y(t)$ il valore di una grandezza che varia con rapiditá proporzionale al suo valore. Essa é allora descritta dalla equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} = ky. \tag{11.4}$$

Riscritta nella forma $y' + ky = 0$ é, riconoscibilmente, una equazione differenziale lineare del I ordine a variabili separabili.

La sua soluzione generale é:

$$y(t) = Ce^{kt}, \qquad \forall C \in \mathbb{R}. \tag{11.5}$$

É facile riconoscere che il fenomeno rappresenta una crescita se $k > 0$, rappresenta invece un decadimento se $k < 0$.

Al variare del parametro C la (11.5) rappresenta una famiglia di curve esponenziali.

Per individuare quella che interessa in modo univoco occorre fornire un dato ulteriore. Fissata una origine dei tempi, $t = 0$, sia $y(t = 0) = y_0$ il valore assunto dalla quantitá y al tempo $t = 0$, allora:

$$y(0) = y_0 = C \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0\, e^{kt} \tag{11.6}$$

fornisce la soluzione unica cercata.

11.1.1 Tempo di dimezzamento e raddoppiamento.

La crescita esponenziale é caratterizzata da un tempo di raddoppiamento o dimezzamento (*half-life*) costante.

Supponiamo il fenomeno sia caratterizzato da una crescita ($k > 0$). Detto T_R il tempo in cui la variabile y raddoppia si ha:

$$y(t + T_R) = y_0\, e^{k(t+T_R)} = 2\, y(t),$$

riscrivendo:

$$y_0\, e^{kt} e^{kT_R} = 2\, y_0 e^{kt}.$$

$$e^{kT_R} = 2 \quad \Rightarrow \quad T_R = \frac{1}{k}\ln 2.$$

Analogamente se il fenomeno é caratterizzato da un decadimento ($k < 0$) cerchiamo il tempo di dimezzamento T_D. Si ha:

$$y(t + T_D) = y_0 e^{k(t+T_D)} = \frac{1}{2}y(t),$$

riscrivendo:

$$y_0 e^{kt} e^{kT_D} = \frac{1}{2} y_0 e^{kt},$$

$$e^{kT_D} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T_D = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{k}\ln 2.$$

11.1.2 Crescita di organismi.

• **Esempio 11.1** *Nelle prime settimane dopo la nascita, un neonato aumenta in peso con una rapiditá proporzionale al peso. Carlo, un bel maschietto, pesava 4 kg al momento della nascita e 4.4 kg dopo due settimane. Possiamo stimare quanto pesava 5 giorni dopo la nascita ?*

Soluzione. Indichiamo con $y(t)$ il peso del neonato (in kg) al tempo t (in giorni). L'istante $t = 0$ corrisponde al momento della nascita.
I dati del problema sono: $y(0) = 4$; $y(14) = 4,4$. L'incognita é: $y(5)$.

La legge del fenomeno é: $y(t) = y(0)e^{kt}$ Imponendo i dati si trova dapprima il valore di k :

$$y(14) = y(0)e^{14k} \Rightarrow k = \frac{1}{14}\ln\frac{y(14)}{y(0)} = \frac{1}{14}\ln(1,1)$$

quindi il valore di $y(5)$ é dato da:

$$y(5) = y(0)e^{5k} = 4e^{5\frac{1}{14}\ln(1,1)} = 4(1,1)^{5/14}$$

Calcolo approssimato del risultato.
Osserviamo che l'esponente $\frac{5}{14}$ puó essere scritto come segue:

$$5/14 = 5/15 + \delta \quad con\ \delta = 1/(15\cdot 14) \Rightarrow \frac{5}{14} \simeq \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad y(5) = 4\sqrt[3]{1,1}.$$

11.1.3 Culture biologiche.

• **Esempio 11.2** *Una certa cultura di cellule cresce con rapiditá proporzionale al numero di cellule presenti. Se la coltura contiene inizialmente 500 cellule e dopo 24 ore ne contiene 800, quante cellule vi saranno dopo altre 12 ore ?*
Soluzione. Siano:

- *$y(t)$ il numero di cellule al tempo t misurato in ore;*
- $y(t = 0) = 500$;
- $y(t = 24) = 800$.

Il fenomeno é regolato dalla legge $y'(t) = ky(t)$, con $y_0 = 500$. Si calcoli il valore di k :

$$y(t) = 500e^{kt}$$

essendo:

$$y(24) = 800 = 500e^{k\cdot 24} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{k\cdot 24} = 8/5 \Rightarrow 24k = \ln(8/5)$$
$$\Rightarrow ; k = (1/24)\ln(8/5) = (1/24)\ln(1,6).$$

Siamo pertanto in grado di calcolare il numero di particelle al tempo $t = 36$ ore:

$$y(t = 36) = 500e^{k\cdot 36} = 500e^{\frac{36}{24}\ln(1,6)} =$$
$$= 5\cdot 10^2 e^{\frac{3}{2}\ln(1.6)} = 5\cdot 10^2 e^{\ln(1,6)^{3/2}} =$$
$$= 5\cdot 10^2(1,6)^{3/2} = [5\sqrt{1,6^3}]10^2 \simeq 10^{12}.$$

• **Esempio 11.3** *I batteri di una certa cultura crescono con rapiditá proporzionale alla loro quantitá. Se inizialmente sono presenti 100 batteri ed il loro numero raddoppia in un'ora, quanti batteri saranno presenti dopo un tempo ulteriore di 1,5 ore ?*
Soluzione. Detto $y(t)$ il numero di batteri presenti al tempo t misurato in ore, la legge di crescita é: $y(t) = y_0e^{kt}$ con $y_0 = 1000$. Il tempo di raddoppiamento é $T_R = (1/k)\ln 2$. Quindi, se $T_R = 1$, risulta $k = \ln 2$.
Detto $t_2 = 2,5$ ore, si ha:

$$y(t_2) = y_0\, e^{k\cdot 2,5} = 100\, e^{2,5\ln 2} = 100\, 2^{2,5} = 100\, 2^2\, 2^{1/2} = 400\sqrt{2} \simeq 565.$$

• **Esempio 11.4** *In una cultura di batteri, la cui crescita é proporzionale al loro numero, il nmero di batteri triplica ogni 3 giorni.*

Se dopo 7 giorni di cultura sono presenti 10 milioni di batteri, quanti ve ne erano inizialmente ?
Soluzione. Indicohiamo con $y(t)$ il numero di batteri presenti al tempo t. Le unitá sono $y(t) =$ /milioni di batteri/ e $t =$ /giorni/.
La legge del fenomeno é:

$$y(t) = y_0\, e^{kt} \qquad con\ \ y_0\ \ incognita\ da\ determinare.$$

I dati a disposizione sono: $y(3) = 3y_0$ e $y(7) = 10$. Allora:

$$y(3) = y_0e^{3k} \Rightarrow 3k = \ln\frac{y(3)}{y_0} = \ln 3 \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln 3;$$

$$y(7) = y_0 e^{k7} \quad \Rightarrow \quad y_0 = y(7)e^{-7k} = y(7)e^{-\frac{7}{3}\ln 3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_0 = 10e^{\ln 3^{3/7}} = 10\ 3^{3/7} = 10/(3^2\sqrt[3]{3}) = (10/27)\sqrt[3]{3} \simeq 0,0137.$$

11.1.4 Assorbimento di un farmaco.

Mostreremo come le tecniche affrontate sono utili per lo studio di quella branca della scienza farmaceutica nota come **Farmaco Cinetica**. Ci limiteremo a quello che é conosciuto come il modello mono-compartimentimentale e ad una trattazione volta a mettere in evidenza l'utilizzo delle tecniche senza prestare troppa attenzione agli aspetti chimico-farmaceutici che verranno approfonditi in uno specifico corso.

Somministrazione per pillole.

Inizieremo con un esempio che considera la somministrazione di un farmaco in dosi discrete, del tipo pillole.
É noto che la quantitá di farmaco nell'organismo diminuisce con una rapiditá proporzionale alla concentrazione residua. Detta $x(t)$ la quantitá di farmaco l'equazione che regola questo processo é

$$\frac{dx}{dt} = -K_e\, x \tag{11.7}$$

Si riconosce che questa é una equazione differenziale a variabili separabili la cui soluzione generale é

$$x(t) = Ce^{-K_e t} \quad C \text{ costante da determinarsi} \tag{11.8}$$

• **Esempio 11.5** *La concentrazione del farmaco A nell'organismo ha un tempo di dimezzamento di 12 ore. É noto che l'effetto del farmaco é nullo se la quantitá scende al sotto 500 u (u = unitá di farmaco) e che il farmaco é tossico se si supera una concentrazione di 1000 u.*
Il farmaco é disponibile in dosi da 500 u.
La terapia iniza con una dose iniziale ($t_1 = 0$) di due compresse da 500 u. Determinare i tempi t_2, t_3, $\ldots t_n$ delle somministrazioni successive in modo che la concentrazione non scenda mai sotto le 600 u e non superi mai il limite di tossicitá.
Soluzione. Sappiamo che il tempo di dimezzamento é: $T_D = -(1/k)\ln 2$. Essendo $T_D = 12\ h$, si ha:

$$k = -\frac{T_D}{\ln 2} = -\frac{12}{\ln 2} < 0. \tag{11.9}$$

Noto k calcoliamo il tempo t_2 della seconda amministrazione. Indichiamo con $y(t)$ la concentrazione di farmaco al tempo t. Per non superare il limite di tossicitá questa deve esser fatta quando la concentrazione é 600 u, quindi:

$$y(t_2) = y_0 e^{-kt_2} \Rightarrow 600 = 1000e^{-kt_2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{k}\ln\frac{6}{10}.$$

Dopo la seconda iniezione ($t = t_2$) la concentrazione é $600 + 500 = 1100$ u. Il tempo t_3 per la somministrazione successiva si ottiene immediatamente se si considera come nuovo istante iniziale t_2. Detto $t_3' = t_3 - t_2$ si ha:

$$y(t_3') = y(t_2)e^{kt_3'} \Rightarrow 600 = 1000e^{kt_3'} \Rightarrow t_3' = \frac{1}{k}\ln\frac{6}{11} \Rightarrow t_3 = t_2 + \frac{1}{k}\ln\frac{6}{11}.$$

Gli altri tempi $t_4, t_5, \ldots, t_n$ si calcolano allo stesso modo. Si ha:

$$t_4 = t_3 + \frac{1}{k}\ln\frac{6}{11} = t_2 + 2\cdot\frac{1}{k}\ln\frac{6}{11}.$$

Quindi in generale

$$t_n = \frac{1}{k}\ln\frac{6}{10} + (n-2)\cdot\frac{1}{k}\ln\frac{6}{11}$$

Somministrazione per fleboclisi.

Affrontiamo adesso il caso di somministrazione per fleboclisi. Sappiamo cosa si intende per somministrazione per fleboclisi: una certa quantitá di medicinale viene immessa in una soluzione neutra (tipicamente 250 0 500 grammi di soluzione fisiologica) e questa viene introdotta nel corpo di un paziente per via endovena.

A differenza della somministrazione per capsule, iniezioni intramuscolari o endovene, dove l'immissione del prodotto puó considerarsi istantanea, nella amministrazione per via endovena una certa quantitá di medicinale viene introdotta nel paziente in un tempo finito che puó essere controlato dall'operatore sanitario. Il vantaggio di questa modalitá di somministrazione é quello di evitare forte concentrazioni di farmaco nel paziente.

Questa modalitá di somministrazione del farmaco puó essere utile per evitare di sovraccaricare l'organismo con dosi eccessive di farmaco.

Per prima cosa scriviamo l'equazione differenziale che regola il processo (esempio 1), quindi ne troviamo la soluzione.

• **Esempio 11.6** *Una sostanza medicinale é introdotta nella circolazione del sangue per via endovenosa. La flebo é regolata in modo da immettere in vena una quantitá costante a /nelle unitá scelte/ di medicinale con flusso costante nell'unitá di tempo.*

Nel paziente il medicinale viene assorbito ed eliminato dal fegato con un tasso proporzionale alla concentrazione del medicinale nel sangue.

Scrivere l'equazione che regola il fenomeno.

Soluzione. *Indichiamo con $x(t)$ la concentrazione di medicinale nel sangue. Fissiamo come istante iniziale (t=0) quello in cui inizia la somministrazione mediante la fleboclisi.*
La variazione della concentrazione nel sangue, $\frac{dx(t)}{dt}$, é dovuta a due effetti:

$$\frac{dx(t)}{dt} = + IN \text{ (medicinale immesso in circolo)}$$
$$- OUT \text{ (medicinale assorbito ed eliminato).}$$

Per effetto del primo termine dx/dt cresce in funzione del medicinale immesso in circolo al tempo t, cioé:

$$(\frac{dx}{dt})^{IN} = A(t) \quad \text{avendo ipotizzato } A(t) = a = \text{constante.}$$

Per effetto del secondo termine la concentrazione del medicinale decresce in funzione della concentrazione presente, cioé:

$$(\frac{dx}{dt})^{OUT} = B(t)\, x(t) \quad \text{supponendo } B(t) = b = \text{constante.}$$

Quindi, l'equazione cercata é:

$$\frac{dx}{dt} = a - b\, x.$$

L'assorbimento di un farmaco immesso in circolo mediante una fleboclisi é quindi descritto da una semplice equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti.

• **Esempio 11.7** *La quantitá $y(t)$ evolve nel tempo secondo la legge:*

$$y'(t) = a - by(t).$$

Noto il valore al tempo iniziale $y(t = 0) = y_0$ determinare la funzione $y(t)$ che permette di conoscere y al generico istante t.
Soluzione. *Riscriviamo la legge nella forma $y' + by = a$. Questa é una equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti non omogenea.*
Consideriamo la omogenea associata $y' + by = 0$ (equazione a variabili separabili), la cui soluzione é:

$$\frac{y'}{y} = -b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -b\, dt \Rightarrow \ln y(t) = -b\, t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
$$\text{quindi:} \quad y(t) = C_1 e^{-bt}, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Una soluzione particolare della equazione $y' + by = a$ é: $\bar{y} = a/b =$ costante. Quindi:

$$y(t) = a/b + C_1 e^{-bt}.$$

Imponendo la condizione iniziale:

$$y(t = 0) = y_0 \Rightarrow y_0 = a/b + C_1 \Rightarrow C_1 = y_0 - a/b.$$

si ottiene la soluzione cercata:

$$y(t) = y_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}).$$

Si osservi che, indipendentemente dal valore iniziale y_0, la soluzione tende ad un limite asintotico che dipende solo dal rapporto a/b. Infatti:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{a}{b}.$$

11.2 Velocitá di una reazione chimica

Supponiamo che una molecola di reagente A si combini con una molecola di reagente B per formare una singola molecola di prodotto C. e che inversamente, una molecola di C possa dissociarsi nelle molecole di A e B.

La reazione bidirezionale viene rappresentata dalla formula:

$$A + B \leftrightarrows C. \tag{11.10}$$

La direzione e la rapiditá di tale reazione dipendono dalle concentrazioni di A, B e C, indicate respettivamente con [A], [B] e [C] e misurate in moli, 1 mole $\simeq$ 6.023 10^{23} molecole.

Secondo la legge di azione di massa, la velocitá di produzione di C a partire da A e B é proporzionale al prodotto delle concentrazioni di A e B, ovvero:

$$\text{velocitá di produzione di C:} \quad \frac{d[C]}{dt} = k_1[A][B]. \tag{11.11}$$

Analogamente, la velocitá alla quale C si dissocia, é l'opposto della velocitá con cui A, oppure B, é prodotto da C, quindi é proporzionale alla concentrazione di C:

$$\text{velocitá di dissociazione di C.} \quad \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = k_2[C], \tag{11.12}$$

Quindi, la velocitá con cui [C] cambia nella soluzione é data dalla somma di (11.11) e (11.12):

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1[A][B] - k_2[C]. \tag{11.13}$$

La reazione sará in equilibrio se $d[C]/dt = 0$, cioé se la quantitá prodotta di C é eguale a quella dissociata, ovvero se:

$$\frac{[A][B]}{[C]} = \frac{k_2}{k_1} = costante. \tag{11.14}$$

Casi limiti.

Se $k_2 \ll k_1$ oppure $k_2 \simeq 0$, ovvero C é eliminato dalla soluzione come precipitato, la reazione continuerá sino all'esaurimento di A o B. Si dice allora che la reazione é completa.

Per calcolare il tempo in cui la reazione si esaurisce occorre conoscere la proporzione nella quale A e B si uniscono per formare una mole di C, le concentrazioni inziali di [A] e [B] ed, ovviamente, le costanti k_1 e k_2.

11.2.1 Reazione non reversibile.

Consideriamo il caso in cui la reazione sia non reversibile e proceda sino all'esaurimento dei costituenti A e B.

Supponiamo di fissare l'istante iniziale, $t = 0$, all'istante in cui si mescolano A e B, con le seguenti quantitá:

a molecole/cc del costituente A

b molecole/cc del costituente B.

Indichiamo con $x(t)$ il numero di molecole di C presenti all'istante t.
Supponiamo, per semplicitá, che C sia composto da una molecola di A ed una molecola di B.
Ne segue che la concentrazione di A la tempo t é data da $a - x$, quella di B da $b - x$.

Il fenomeno é regolato dall'equazione:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(a - x)(b - x), \tag{11.15}$$

che é una equazione differenziale *non lineare* ma a variabili separabili.

Caso $a \neq b$. Osserviamo innanzitutto che risulta sempre $(a - x)(b - x) \neq 0$, per cui:

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int k dt = kt + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right),$$

da cui

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{a-x} - \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{b-x}.$$

Essendo in generale:

$$\int \frac{dx}{(\alpha - x)} = -\ln|\alpha - x + C|,$$

considereremo $\alpha = a$ ed $\alpha = b$. Inoltre, essendo per ogni x, $a-x > 0$ e $b - x > 0$, si ha

$$\frac{1}{b-a}\big(-\ln(a-x) + \ln(b-x)\big) = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln\frac{b-x}{a-x} = (b-a)\,k\,t + (b-a)\cdot C.$$

Per calcolare la costante costante C impongo che al tempo $t = 0$ non vi sia composto, ed é ragionevole supporlo. Quindi:

$$\ln\frac{b}{a} = (b-a)\,C.$$

Si perviene pertanto alla seguente uguaglianza:

$$\ln\frac{b-x}{a-x} = (b-a)kt + \ln\frac{b}{a},$$
$$\ln\frac{b-x}{a-x} - \ln\frac{b}{a} = (b-a)\,k\,t,$$
$$\ln\Big(\frac{a}{b}\cdot\frac{b-x}{a-x}\Big) = (b-a)\,k\,t,$$
$$\frac{a}{b}\Big(\frac{b-x}{a-x}\Big) = e^{(b-a)\,k\,t},$$
$$\frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a}e^{(b-a)\,k\,t},$$

risolvendo rispetto ad x si ottiene:

$$x(t) = \frac{ab|e^{(b-a)kt} - 1|}{be^{(b-a)\,k\,t} - a}.$$

Caso $a = b$. Se $a = b = \alpha$, il fenomeno é descritto dalla equazione:

$$\frac{dx}{dt} = k\,(\alpha - x)^2.$$

Questa é una equazione differenziale non lineare a variabili separabili, quindi integrando ambo i membri si ottiene:

$$\frac{dx}{(\alpha - x)^2} = kdt$$
$$\int \frac{dx}{(\alpha - x)^2} = k\,t + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

dal cambio di variabile $y = (\alpha - x)$ ne consegue:

$$\frac{1}{\alpha - x} = kt + C$$
$$\alpha - x = \frac{1}{kt + C}$$
$$x(t) = \alpha - \frac{1}{kt + C}.$$

Imponendo la condizione iniziale $x(t = 0) = 0 \;\Rightarrow\; C = 1/\alpha$; quindi:

$$x(t) = \alpha - \frac{1}{kt + 1/\alpha} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{\alpha^2 kt}{\alpha kt + 1}.$$

Si osservi che, come ci si poteva aspettare, alla fine del processo $|C| = \alpha$; infatti:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \alpha.$$

11.3 Concentrazione di una soluzione

Consideriamo due esempi di calcolo della concentrazione di una soluzione.

• Esempio 11.8 *Lo zucchero si scioglie nell'acqua con una rapiditá proporzionale alla sua quantitá non ancora sciolta. Se inizialmente sono presenti 50 kg di zucchero e se dopo 5 ore ne rimangono solo 20 kg, quanto tempo sará necessario affinché si sia sciolto il 90% dello zucchero ?*

Soluzione. *Indichiamo con $y(t)$ la quantitá, in Kg, non sciolta*

di zucchero al tempo t, espresso in ore.
La legge che regola il fenomeno é $y(t) = y_0 e^{kt}$, $\quad y_0 = 50$.
Essendo noto il valore di y dopo un arco di tempo, ad esempio $t = 5$, possiamo ricavare k. Si ha:

$$y(5) = y_0 e^{k5} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}$$

Si vuole calcolare il tempo t_3 per il quale risulta $y(t_3) = 0.1\, y_0$.
Imponendo:

$$y(3) = 0.1 y_0 = y_0 e^{kt_3}.$$
$$\frac{1}{10} = e^{(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5})t_3} = e^{\frac{t_3}{5}\ln\frac{2}{5}}$$

si ha quindi: $\ln(1/10) = \frac{t_3}{5}\ln(2/5) \Rightarrow t_3 = 5\frac{\ln(1/10)}{\ln(2/5)}$.

• **Esempio 11.9** *Una cisterna contiene inizialmente 1000 litri di una soluzione con 50 kg di sali disciolti. Supponiamo che:*

1. *nella cisterna fluisca una soluzione contenente 10 gr di sale per litro, con una portata costante di 10 litri/min;*
2. *il liquido della cisterna é mantenuto ad ogni istante completamente mescolato;*
3. *La soluzione effluisce dal recipiente con una portata di 10 litri/min.*

Si vuole sapere quanto sale rimane nella cisterna, trascorsi 40 minuti dall'apertura delle valvole di carico e scarico dalla cisterna.

Soluzione. Stabiliamo le seguenti definizioni, siano:

- $x(t)$ *la quantitá di sale, espressa in kg, contenuta nella cisterna al tempo t, il tempo sará considerato in minuti;*
- $t = 0$ *l'apertura delle valvole di carico e scarico;*
- $x(0) = 50$ *kg.*

Si puó osservare che vale la seguente relazione .

Flusso entrante di sale (unitá kg/min) = Quantitá di sale per litro per portata (litri al minuto);
cioé:

Flusso entrante di sale: 10 gr/litro · 10 litri/min $= 10^{-2}$ *kg/litro ·* 10 *litri/min* $= 10^{-1}$ *kg/min.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Flusso uscente di sale [unitá kg/min]} = \\
&= \frac{\textit{Kg di sale nella cisterna}}{\textit{n.ro di litri nella cisterna}} \cdot \textit{portata in uscita} \\
&= \frac{x(t)}{1000}[\frac{kg}{litri}] \cdot 10\,[\frac{litri}{min}] = \\
&= 10^{-2}x(t)\ [\frac{kg}{min}].
\end{aligned}$$

Ricordiamo che, per la conservazione della massa, si ha che .

Variazione della quantitá di sale = Flusso IN - Flusso OUT,

cioé:

$$\frac{dx}{dt} = 10^{-1} - 10^{-2}x = \frac{1}{10} - \frac{1}{100}x = \frac{10-x}{100} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x'(t) = \frac{10-x}{100}$$

l'equazione da risolvere é quindi:

$$x'(t) = -10^{-2}x + 10^{-1}$$

Ponendo $10^{-2} = a$ *e* 10^{-1}, *allora:*

$$x'(t) + ax = b,$$

che é una equazione del I ordine, la cui equazione omogenea associata é data da:

$$x'(t) + ax = 0.$$

La soluzione della equazione omogenea associata é $x(t) = Ce^{-at}$, *essendo C una costante reale da determinare.*
La soluzione particolare é: $\bar{x} = b/a$ *come si puó verificare facilmente.*
Di conseguenza, la soluzione generale é:

$$x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}, C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare la costante C si impone la condizione iniziale $x(t = 0) = 50$ kg, risulta:

$$50 = \frac{b}{a} + C \Rightarrow C = 50 - b/a.$$

Considerando nuovamente l'equazione con valori numerici precedentemente stabiliti, al posto di a e b, si ha:

$$a = 10^{-2}; \quad b = 10^{-1}; \quad C = 50 - 10 = 40.$$

Quindi:

$$x(t) = 10 + 40e^{-t/100}$$

Se $t = 40$ minuti allora $x(40) = 10 + 40e^{-4/10} \simeq 36,8$ kg..

Capitolo 12

Cenni di Statistica e Probabilitá

In questo capitolo saranno dati alcuni cenni di Statistica Descrittiva e di Probabilitá per mostrare la connessione di questa disciplina con gli argomenti di matematica trattati.

12.1 Statistica

La statistica é la scienza che permette di studiare i fenomeni complessi dei quali non sono note le relazioni tra le diverse manifestazioni. La sua piú antica applicazione é nei fenomeni sociali. Con il fiorire delle scienze sperimentali la statistica é stata un valido supporto per l'analisi dei dati. Si possono distinguere due rami della statistica: la statistica descrittiva e la statistica inferenziale.

La **Statistica descrittiva** ha come scopo quello di descrivere le *caratteristiche* dell'insieme di *entitá statistiche* oggetto dello studio. Tale insieme prende il nome di **popolazione**, indipendentemente dal fatto che si tratti di individui o cose. I dati acquisiti vengono organizzati in *tabelle* e *grafici* di vario tipo. Se la descrizione delle caratteristiche puó essere effettuata mediante rilevazioni numeriche, allora é possible fornire *misure di sintesi* e *di tendenza centrale*, e *misure di dispersione*.

La **Statistica Inferenziale** ha come obiettivo lo studio delle caratteristiche di una popolazione partendo dai dati parziali ottenuti analizzando uno o piú campioni estratti, con metodologie appropriate dalla popolazione in esame. Per questo scopo occorre far

ricorso alla Teoria della Probabilitá. I risultati ottenuti saranno poi intesi in senso probabilistico.

L'obiettivo, in questo capitolo, solo quello di mostrare come la statistica descrittiva sia legata alla rappresentazione dei dati in insiemi numerici e la teoria della probabilitá alla integrazione.

12.2 Terminologia e Definizioni

Prima di procedere é opportuno, al fine di evitare ambiguitá nell'uso dei termini, definire alcuni concetti e termini di base della statistica.

- **Popolazione Statistica.** Con questo termine si individua *la collettivitá (o l'insieme P) entro cui si studia il fenomeno.* Ricordiamo che il termine viene utilizzato indipendentemente dal fatto che l'insieme in esame sia costituito da persone. Ad esempio:
  la popolazione statistica relativa all'occupazione in Italia negli ultimi 10 anni é costituita dai cittadini italiani in etá lavorativa negli ultimi 10 anni;
  la popolazione statistica relativa al numero di stanze delle abitazioni di una data regione é, invece, costituita da tutte le abitazioni di quella regione;
  la popolazione statistica relativa alla durata delle lampadine di una fabbrica é costituita da tutte le lampadine prodotte da quella fabbrica.

- **Unitá Statistica.** Con questo termine si individua *ogni elemento della popolazione statistica, cioé ogni individuo o cosa su cui si osserva il fenomeno.* In termini insiemistici una unitá statistica é un elemento $p \in P$.
  Quindi, ogni cittadino italiano in etá lavorativa negli ultimi 10 anni, ogni abitazione di quella regione, oppure ogni lampadina prodotta da quella fabbrica sono le unitá statistiche dei rispettivi fenomeni collettivi presi precedentemente come esempio.

- **Campione Statistico.** Con questo termine si individua *un qualsiasi insieme C di unitá statistiche appartenenti alla popolazione P* Un campione é dunque un sottoinsieme della popolazione statistica, $C \subset P$.
  Cosí, sempre riferendoci agli esempi giá visti, potremo dire che i soli cittadini residenti a Roma e in etá lavorativa negli ultimi

10 anni, o le abitazioni di una sola provincia di una data regione, oppure 50 delle lampadine prodotte da una data fabbrica, costituiscono campioni statistici delle rispettive popolazioni.

- **Carattere** *Statistico.* Con questo termine si individua *la caratteristica mediante la quale é possibile descrivere l'insieme delle unitá statistiche*, ovvero della popolazione. Sono ad esempio: l'altezza, il sesso, lo stato civile o l'etá degli individui, il numero di stanze delle abitazioni, a seconda del fenomeno che si intende studiare.

- **Modalitá.** Si definiscono modalitá *i modi diversi nei quali puó presentarsi il carattere* (ad esempio 20 anni, maschio, 50 Kg); qualora le modalitá vengano espresse in *termini* allora il carattere verrá detto *Mutabile* (ad esempio Sesso Maschio/Femmina); se invece le modalitá vengono espresse in *numeri* allora il carattere verrá chiamato *Variabile.*

- **Osservazione.** Con questo termine si individua il *valore assunto dal carattere, o dalla variabile statistica, in una unitá statistica.*
  Quindi lo sono, ad esempio, la durata di vita della singola lampadina, il numero di stanze di una abitazione, lo stato di occupazione (occupato/disoccupato) di un cittadino.

- **Scale** Con questo termine si intendono *i modi in cui sono organizzati i caratteri.* Si distinguono diversi tipi di scale:

  a) *Scala Nominale*: é rappresentata da quei caratteri con modalitá qualitative. Queste modalitá non presentano alcun ordine di successione (esempio: nazionalitá, sesso).

  b) *Scala Ordinale*: é rappresentata da quei caratteri con modalitá qualitative che presentano un ordinamento semplice ma senza una stima numerica (esempi: bambini, giovani, adolescenti, adulti).

  c) *Scala a intervalli*: i dati organizzati ad intervalli quando esiste una unitá di misura costante e, quindi, una misura di distanza tra le modalitá quantitative (esempio: altezza della popolazione ad intervalli di 5 cm).

  d) *Scala di rapporti o cardinale*: Si usa questo termine quando il carattere é rappresentato in modalitá quantitativa mediante una grandezza assoluta, generalmente numerica.

Come sará chiaro in seguito, per potere elaborare meglio i dati con sistemi elettronici la scala nominale e la scala ordinale sono spesso riferite a quantitá numeriche, ad esempio maschi=0, femmine=1.

- **Dati Statistici.** Con questo termine si intende *il numero che esprime quantitativamente il numero delle volte in cui una modalitá si é presentata nell'indagine.*

Completiamo con le definizioni di variabile aleatoria (o causale) e di variabile statistica, e con quelle di serie e seriazione statistica.

- Con il termine **variabile aleatoria** si intende *una entitá, numerica o non numerica, che puó assumere uno solo tra tutti i valori di un insieme, ed a ciascuno dei quali é associata una probabilitá.*

- Con il termine di **variabile statistica**, ci si riferisce invece ad *una entitá che, nelle osservazioni effettuate sulle unitá che costituiscono la popolazione, ha assunto piú valori, frequentemente diversi tra loro.*

L'unico legame tra questi due concetti puó, per ora, essere il seguente: prima della rilevazione dei dati una variabile statistica puó essere considerata come una variabile aleatoria.

Ricordiamo che la variabile statistica é una variabile quantitativa ed assume solo valori numerici; é invece un carattere o una variabile qualitativa quando assume valori non numerici. Cosí possiamo dire che il numero di stanze delle abitazioni italiane é una variabile statistica quantitativa, mentre la provincia di nascita dei cittadini italiani é una variabile statistica qualitativa. Quest'ultima infatti si presenta secondo modalitá non numeriche che sono espresse dai nomi delle varie province.

- Con il termine di **serie statistica** si intende *una successione di dati relativi a una variabile qualitativa.*

- Con il termine di **seriazione statistica** si intende *una successione di dati relativi a una variabile quantitativa.*

Si noti che in questo contesto il termine serie ha un significato diverso da quello che tale termine ha nella Analisi Matematica.

12.2.1 Esempi.

- **Esempio 12.1** *Supponiamo che l'indagine statistica in esame sia quella di rilevare il numero di stanze delle abitazioni italiane. In questo caso il numero di stanze delle abitazioni italiane é una variabile statistica, che nelle singole unitá si presenta nella modalitá 1 quando l'abitazione ha una sola stanza, nella modalitá 2 quando ha due stanze, nella modalitá 3 quando ha tre stanze, e cosí via. Sempre come esempio, l'altezza di un insieme di persone dai 15 ai 18 anni é una variabile statistica, che nelle singole unitá ha assunto valore* $1,56$ *se la persona presa in esame é alta 1,56 m; ha assunto valore* $1,71$ *se la persona misurata é alta 1,71 m, e cosí via.*

Riassumiamo quanto fin qui esposto, illustrando i concetti statistici che caratterizzano il seguente fenomeno.

- **Esempio 12.2** *Supponiamo di volere indagare sul titolo di studio dei cittadini italiani che hanno compiuto 25 anni.*

  - *Il fenomeno é collettivo in quanto é possibile conoscerlo soltanto attraverso una molteplicitá di osservazioni sul titolo di studio dei singoli cittadini.*

  - Il titolo di studio *é una variabile statistica qualitativa, infatti si presenta sotto diverse modalitá non numeriche corrispondenti a:*

    nessun titolo, licenza elementare, licenza media, diploma di scuola superiore, laurea.

  - *La popolazione statistica é l'insieme costituito da tutti i cittadini italiani di etá superiore ai 25 anni.*

    Una unitá statistica é ogni cittadino italiano con piú di 25 anni.

  - *Le modalitá* nessun titolo, licenza elementare, ..., laurea, *sono le diverse osservazioni, cioé i diversi valori che la variabile ha assunto quando l'unitá presa in esame si é rivelata in possesso del rispettivo titolo di studio. Se i laureati sono risultati 1423550, questo numero é un dato statistico.*

  - *Qualsiasi insieme di cittadini italiani di etá superiore a 25 anni, come quelli che in una determinata ora si trovano a passare per una ben precisa strada di Milano, o i primi 200 in ordine alfabetico dell'anagrafe di Stoccolma, é un campione della popolazione del nostro fenomeno.*

12.3 Statistica Descrittiva

Data una popolazione P della quale si vuole studiare una caratteristica espressa in termini quantitativi con una misura numerica (ad esempio l'altezza degli studenti dell'Universitá degli Studi di Catania nell'A. A. 2005-06) i dati raccolti possono essere rappresentati mediante un insieme numerico $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ essendo N la cardinalitá della popolazione. Gli elementi x_i non sono tutti necessariamente distinti. Tale insieme é finito, ovvero ha cardinalitá finita, ed é limitato, cioé. sará dotato di un minimo ed un massimo.

12.3.1 Organizzazione e Rappresentazione dei dati.

In una popolazione sufficientemente ampia, supponiamo che esistano $\bar{N}$ valori *distinti* dei dati raccolti. Tali dati distinti li indicheremo con x_j, ciascuno di essi si presenta f_j volte. La quantitá f_j viene chiamata **frequenza assoluta** del valore x_j. Ovviamente $\sum_{j=1}^{\bar{N}} f_j = N$.

In molti casi si preferisce sostituire le frequenze assolute con le frequenze relative f_h^r

$$f_r^j = \frac{f_j}{N} \tag{12.1}$$

dove la somma delle frequenze relative é

$$\sum_{j=1}^{\bar{N}} f_j^r = 1. \tag{12.2}$$

Indichiamo quindi con $\bar{S}$ l'insieme di coppie (x_j, f_j) dove $j = 1, 2, \ldots, \bar{N}$.

∗ **Nota 12.1** *Si osservi che questo é certamente il caso in cuila misura in esame puó assumere solo valori discreti, ad esempio solo numeri interi. Tuttavia anche nel casi in cui x_j puó assumere tutti i valori reali in un intervallo, la esistenza di una precisione intrinseca dello strumento di misura porta alla conseguenza che esisteranno molte entitá che hanno la stessa misura della caratteristica in esame.*

Organizzazione dei dati in ranghi. Se il numero di dati non é grande o se la variabilitá della caratteristica in esame é troppo

elevata, si preferisce organizzare i dati raggruppandoli in ranghi o classi.

Dato l'insieme S dei dati, indichiamo rispettivamente con h_m ed h_M il minimo ed il massimo valore assunto dagli elementi dell'insieme. Detto poi n un numero intero dividiamo l'intervallo $[h_m, h_M]$ in n parti eguali di ampiezza $\Delta = (h_M - h_m)/n$ e costruiamo n insiemi ciascuno dei quali contiene le misure i cui valori ricadono all'interno dell'intervallo stesso:

$$S_1 = \{h_j : h_m \leq h_j < h_m + \Delta\}, \tag{12.3}$$

e per $k = 2, \ldots, n-1$

$$S_k = \{h_j : h_m + (k-1)\Delta < h_j < h_m + k\Delta\}, \tag{12.4}$$

$$S_n = \{h_j . h_m + (n-1)\Delta \leq h_j \leq h_M\}. \tag{12.5}$$

Nel primo insieme la disequaglianza di sinistra e nell'ultimo la diseguaglianza di destra, sono chiuse in quanto l'intervallo $[h_m, h_M]$ é chiuso da entrambi i lati. Associamo, inoltre, ad ogni sottoinsieme S_k la coppia $(f_k, h_{medio-k})$, dove f_k é la cardinalitá dell'insieme S_k, cioé il numero di misure che ricadono nel k-esimo intervallo e $h_{medio-k}$ é il valore medio dell'intervallo che definisce S_k. La collezione C degli insiemi $S_k \subset S$ rappresenta la organizzazione dei dati in classi o ranghi di ampiezza Δ.

Puó accadere, per la natura dei dati o per altri motivi, che i dati siano raccolti direttamente in classi. Ad esempio se il Sistema Sanitario Nazionale volesse studiare il consumo di farmaci in funzione dell'etá, raccogliere il dato dividendo *ab initio* la popolazione statistica secondo l'anno di nascita senza tener conto del mese e del giorno di nascita. In questo caso la data di nascita esatta degli intervistati non fa parte della misura e, ovviamente, non é piú rilevabile. Analogamente quando in uno studio si utilizzano dati organizzati in ranghi tratti da pubblicazioni di studi precedenti il *dato grezzo* non eñoto. In questi casi, qualora si volesse procedere ad elaborazioni successive, al dato viene assegnato il valore centrale della classe. Cosí, ad esempio, si assume che gli individui la cui altezza cade nella classe tra 160-170 cm, siano tutti alti 165 cm.

Rappresentazione mediante Tabelle Se la variabile x_j, dei valori distinti delle misure, assume valori discreti o l'insieme delle misure é organizzato in ranghi, allora l'insieme S dei dati puó essere rappresentato mediante tabelle assolute f, nella terza le frequenze relative f_j^r in ciascuna classe.

Le tabelle permettono di avere una visione d'insieme del dato statistico che non sarebbe rilevabile dalla semplice elencazione degli elementi dell'insieme dei dati S.

12.3.2 Distribuzione di frequenza.

Si chiama **distribuzione di frequenza** la funzione $f(x)$ definita, (nel caso di una variabile statistica, per elencazione, che associa ad ogni elemento $x_j \in S$ la frequenza assoluta (o relativa) con cui tale elementoé presente in S. La distribuzione di frequenza viene quindi identificata da $\bar{N}$ coppie di valori (x_j, f_j). Una variabile statistica assume un insieme limitato di valori, oppure é organizzata in classi. Nella maggioranza dei casi le distribuzioni di frequenza assoluta o relativa di una variabile statistica organizzata per classi, vengono rappresentate con istogrammi.

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali rappresentiamo la distribuzione di frequenza dei dati in ranghi mediante n rettangoli avente base di ampiezza Δ (ampiezza della classe) ed altezza proporzionale ad f_j (o f_j^r). La costante di proporzionalitá é scelta in modo tale che l'area di ciascun rettangolo rappresenti la frequenza della classe. Per classi della stessa ampiezza, come quelle sinora descritte, tale costante vale $1/\Delta$. Tale rappresentazione viene detta **Istogramma** delle frequenze.

Si puó dedurre da quanto sopra detto che la misura dell'area dell'Istogramma delle frequenze assolute é eguale alla cardinalitá dell'insieme S, mentre l'area dell'Istogramma delle frequenze relative é uguale ad 1.

12.4 Probabilitá

Una delle applicazioni della teoria della misura é rappresentata dalla teoria della probabilitá. Ne diamo nel seguito un breve cenno rimandando il lettore alla trattazione più estesa che viene fatta nei testi che trattano di Statistica e Probabilitá.

Definizione 12.1 *La Probabilitá del verificarsi di un evento E é un numero reale compreso tra 0 ed 1, $P(E) \in [0,1]$.*

Se il verificarsi dell'evento é certo allora $P(E) = 1$, se invece l'evento E non ha alcuna possibilitá di verificarsi, evento impossibile, $P(E) = 0$.

Dato un evento E, esso puó verificarsi in diverse modalitá x. Ad esempio, se si considera il lancio di una moneta a due facce le modalitá vengono usualmente indicate con i termini *testa/croce* oppure *0/1*. Se la moneta é ben bilanciata le due facce hanno la stessa probabilitá di mostrarsi sul lato superiore della moneta dopo il lancio, lo spazio degli eventi si dice equiprobabile. Quindi la probabilitá che dopo il lancio si presenti la modalitá x = *testa*/0 é $P(E) = 1/2$. Ci aspettiamo infatti che, in una moneta ben bilanciata, le due modalitá siano equiprobabili e dopo *molti* lanci la frequenza degli eventi *testa* sia circa la metá del numero dei lanci effettuati. Con il termine *molti* si intende, in questo contesto, che l'affermazione é valida in senso asintotico, cioé quanto il numero di lanci tende all'infinito.

Da quanto detto si evidenzia il fatto che nell'osservazione di un fenomeno, o nel corso di un esperimento, una o più caratteristiche del fenomeno possono assumere valori diversi (quantitativi o qualitativi). Questo rappresenta la *variabilità del fenomeno* e la caratteristica che varia prende il nome di variabile casuale.

Definizione 12.2 *Si definisce variabile casuale o aleatoria, la caratteristica del fenomeno di assumere diversi valori durante la osservazione del fenomeno o nel corso di un esperimento.*

Definizione 12.3 *Quando la variabile x dell'evento puó assumere solo un insieme discreto di valori allora diremo che x é una* ***variabile casuale discreta.***

• **Esempio 12.3** *Come é noto un dado ha 6 facce numerate da 1 a 6. Dopo un lancio una delle facce viene mostrata in alto. Sia l'evento E il risultato del lancio del dado. Esso puó presentarsi con 6 modalitá, ovvero la variabile x puó assumere i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6. In un dado non truccato ogni faccia é equiprobabile, quindi:*

$$P(X = i) = \frac{1}{6} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \tag{12.6}$$

Consideriamo ora l'evento E_1 definito come segue:

il risultato del lancio del dado é un numero dispari.

Allora essendo i numeri dispari 3 si ha:

$$P(E_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \tag{12.7}$$

Se considiamo invece l'evento E_2

il risultato del lancio é un numero < 7,

allora $P(E_2) = 1$.

Definizione 12.4 *(Variabile Casuale Continua). Sia E un generico evento. Se la modalitá x dell'evento E puó assumere tutti i valori in un intervallo (a, b) di numeri reali, limitato o illimitato, allora x si dice variabile casuale continua.*

• **Esempio 12.4** *Un ago bilanciato é lasciato cadere in modo casuale su una superficie piana liscia sulla quale é stata segnata una retta.*
Per ogni lancio si misura l'angolo acuto che l'ago forma con la retta. La variabile dell'evento $E =$ lancio dell'ago é l'angolo x misurato, ad esempio in gradi, quindi $x \in [0, 90]$.

La variabile x é una variabile casuale continua. Nell'ipotesi ragionevole di equiprobabilitá, cioé di ago non truccato, la probabilitá che la variabile x assuma un valore $x \in [0, 90]$ é:

$$P(X = x) = 0 \tag{12.8}$$

$$P(X = x, x \in [0, 90]) = 1. \tag{12.9}$$

La seconda condizione é ovvia. Per la prima basta osservare che per il postulato della completezza dei nmeri reali esistono infiniti numeri reali $x \in [0, 90]$. Se, per assurdo, preso un generico $\bar{x} \in [0, 90]$, fosse $P(x = \bar{x}) > 0$, allora la probabilitá totale (nell'ipotesi di equiprobabilitá) divergerebbe. Si é pervenuti ad un assurdo, perché essendo la probabilitá dell'evento certo uguale ad 1 per definizione.

Consideriamo ora la probabilitá che x assuma un valore compreso in un intervallo $[x_1, x_2] \subset [0, 90]$. Supponiamo, per chiarire le idee, il caso particolare $x_1 = 10, x_2 = 20$. Si ha, ovviamente:

$$P(X = x, x \in [10, 20]) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Infatti, essendo l'ampiezza dell'intervallo $\delta = x_2 - x_1 = 10$, l'evento é equivalente a quello del lancio di un ipotetico dado a 10 facce o all'estrazione di un numero da 1 a 10.

Per il generico intervallo $[x_1, x_2]$ si ha quindi:

$$P(X = x, x \in [x_1, x_2]) = \frac{1}{90}(x_2 - x_1).$$

Per rappresentare questa probabilitá definiamo la funzione costante:

$$f(x), x \in [0, 90] \quad f(x) = \frac{1}{90}$$

Conseguentemente:

$$P(X = x, x \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

La funzione cosí definita prende il nome di **densitá di probabilitá** *della variabile casuale x.*

Nela caso particolare in cui $f(x)$ é constante si dice che x é distribuita uniformemente ed $f(x)$ viene chiamata una distribuzione uniforme.

Definizione 12.5 *Funzione di densitá di probabilitá. Si dice che una funzione reale f definita in un intervallo $[a, b]$ é una funzione di probabilitá di una variabile casuale continua x distribuita in $[a, b]$, se:*

$$a)\ f(x) \geq 0, \qquad \forall x \in [a, b] \tag{12.10}$$

$$b)\ \int_a^b f(x)dx = 1, \tag{12.11}$$

$$c)\ \forall x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{12.12}$$

Il concetto di funzione di probabilitá si estende a variabili casuali distribuite su intervalli semi-infiniti o infiniti. In questo caso gli integrali corrispondenti saranno integrali impropri.

Generalizzazione. Sia x una variabile casuale continua distribuita uniformemente in un intervallo $[a, b]$. La funzione di densitá di proabilitá in tale intervallo é data da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \forall x \in [a, b] \\ 0, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases} \tag{12.13}$$

• **Esempio 12.5** *Gli atomi radioattivi decadono emettendo particelle. L'intervallo di tempo T nel quale in generico atomo decade é una variabile casuale a valori in $[0, +\infty]$. É noto che il numero di atomi non ancora decaduti al generico tempo t é una funzione*

esponenziale. Detto $N(t)$ il numero di atomi non ancora decaduti al tempo t, si ha:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \tag{12.14}$$

dove N_0 é il numero di atomi radiotattivi (tutti non decaduti) al tempo iniziale.
Se si considera l'evento E = l'atomo decade dopo il tempo $T \geq t$, allora la probabilitá dell'evento segue la stessa legge funzionale, cioé:

$$P[E] = P[T \geq t] = Ce^{-kt}. \tag{12.15}$$

Si vuole trovare la funzione $f(x)$ di densitá di probabilitá. Da quanto detto in precedenza deve aversi:

$$1) \quad \int_t^{+\infty} f(x)dx = P[T \geq t] = Ce^{-kt}. \tag{12.16}$$

$$2) \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{12.17}$$

Osserviamo innanzitutto che, affinché possano valere la due relazioni precedenti, deve essere:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \tag{12.18}$$

Se per assurdo, ció non vero allora l'integrale divergerebbe.
Invertendo gli estremi di integrazione della 1) e cambiando il segno, si puó definire la funzione $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = -\int_{+\infty}^{t} f(x)dx; \qquad \varphi'(t) = -f(t). \tag{12.19}$$

Dalla prima delle (12.16) si ottiene:

$$\varphi(t) = -\int_{+\infty}^{t} f(x)dx = Ce^{-kt} \tag{12.20}$$

$$\tag{12.21}$$

$$\varphi'(t) = -Cke^{-kt}. \tag{12.22}$$

Quindi :

$$f(t) = C\,k\,e^{-kt} \tag{12.23}$$

Imponiamo ora la seconda delle (12.16), cioé $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$. Si trova:

$$1 = \int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{r \to \infty} \int_0^{r} Cke^{-kt}dt = C \lim_{r \to \infty} \left[-e^{kt}\right]_0^r = C \lim_{r \to \infty} \left[1 - e^{kr}\right] = C.$$

Quindi $C = 1$ e la funzione densitá di probabilitá é:

$$f(x) = e^{-kt} \tag{12.24}$$

• Esempio 12.6 *Trovare per quale valore della costante C la funzione $f(x) = C(1 - x^2)$ é una funzione di densitá di probabilitá in $x \in [-1, 1]$. Calcolare quindi*

$$P[X \quad -1 \leq x \leq 1/2].$$

Soluzione.

a) Verifichiamo che risulta : $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [-1, 1]$.
Ne segue che deve essere $C \geq 0$;

b) Imponiamo la normalizzazione:

$$1 = \int_{-1}^{1} f(x)d = \int_{-1}^{1} C(1 - x^2)dx = C\left[x - x^3/3\right]_{-1}^{1} = C\left[2 - \frac{2}{3}\right] = C \cdot \frac{4}{3} \tag{12.25}$$

Quindi:

$$C = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2). \tag{12.26}$$

c) Calcoliamo $P[X \quad -1 \leq x \leq 1/2]$.

$$P[X \quad -1 \leq x \leq 1/2] = \int -1^{1/2} f(x)dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{27}{32}. \tag{12.27}$$

12.5 Momenti della funzione di densitá

Definizione 12.6 *Si definisce momento di ordine p della funzione di densitá di probabilitá della variabile casuale x, con variazioni nel generico intervallo (a, b), la quantitá*

$$m^{(p)} = \int_a^b x^p f(x)dx. \tag{12.28}$$

Casi particolarmente importanti sono i momenti di ordine 1 e di ordine 2.

12.5.1 Media.

Definizione 12.7 *Media (o speranza matematica). Se x é una variabile casuale continua in $[a, b]$ con funzione di densitá di probabilitá f, la media di x (o speranza matematica) che si indica con μ o $E[X]$, é definita come il momento di ordine 1 della funzione di densitá di probabilitá, cioé:*

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx. \tag{12.29}$$

Definizione 12.8 *(Media di una funzione della variabile casuale x). Sia g una funzione della variabile casuale continua x con valori in un intervallo $[a, b]$ e con funzione densitá di probabilitá f. Allora la media della funzione g é definita da:*

$$< g(X) > = \int_a^b g(x) f(x) dx. \tag{12.30}$$

Per collegare questi concetti con quelli studiati in precedenza consideriamo la variabile casuale discreta Y che assume k valori discreti compresi in $[a, b]$.

Consideriamo un numero n di eventi e l'istogramma delle frequenze relative di tali eventi. Se vogliamo calcolare il valore medio, M_y, assunto dalla variabile Y negli n eventi avremo:

$$M_y = \frac{\sum_{i=1}^k f_i^{(a)} y_i}{\sum_{i=1}^k f_i^{(a)}} \tag{12.31}$$

dove f_i^a é la frequenza assoluta di occorrenza del valore discreto y_i, e $\sum_{i=1}^k f_i^a$ il numero di eventi n, cioé la cardinalitá dell'insieme delle prove effettuate.

Ricordando che la frequenza relativa del valore y_i é definita come:

$$f_i^r = \frac{f_i^a}{\sum_{i=1}^k f_i^a} \tag{12.32}$$

si ottiene:

$$M_y = \sum_{i=1}^k y_i f_i^r, \tag{12.33}$$

dove

$$\sum_{i=1}^k f_i^r = 1. \tag{12.34}$$

La funzione a valori discreti f_i^r é l'equivalente della funzione di densitá di probabilitá per la variabile discreta Y.

Se volessimo infatti calcolare la probabilitá $P[Y : y \in [y_p, y_q]]$ che la variabile Y assuma tutti i valori discreti compresi in $[y_p, y_q] \subset [a, b]$, essa sará data dal rapporto *numero di casi favorevoli/numero casi possibili*, cioé dalla somma delle frequenze relative:

$$P[Y : y \in [y_p, y_q]] = \sum_{i=p}^q f_i^r, \tag{12.35}$$

che é l'area della regione dell'istogramma delle frequenze relative, compresa tra i valori y_p ed y_q.

La funzione f_i^r soddisfa quindi a tutti i requisiti che sono richiesti alla funzione di densitá di probablitá. Infatti:

$$1) f_i^r \geq 0, \quad \forall i \in [1, k] \tag{12.36}$$

$$2) \sum_{i=1}^k f_i^r = 1 \tag{12.37}$$

$$3) P[Y : y \in [y_p, y_q]] = \sum_{i=p}^q f_i^r \tag{12.38}$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, che trasforma la variabile casuale Y da discreta a continua, si ritrovano le definizioni precedenti. Per immaginare un caso del genere si pensi alla variabile casuale discreta individuata dalla faccia di un dado, cioé un cubo sulle cui facce sono scritti i numeri interi da 1 a 6. Se per dado utilizziamo al posto di un cubo un solido regolare con k facce, la variabile casuale rimane discreta (utilizzando numeri razionali si potrebbe restare nell'intervallo [1,6]). Se invece $k \to +\infty$ allora il solido diviene una sfera e la variable casuale assumerá tutti i valori dell'intervallo.

Speranza Matematica.

La speranza matematica é cosí chiamata perché é un concetto che puó applicarsi ai giochi. Spiegheremo il concetto riferendoci quindi ad un gioco (i dadi) legati ad una variabile casuale discreta.

Supponiamo che in una partita un giocatore paghi al banco la somma di C euro per tirare un dato una volta. A sua volta il banco pagherá al giocatore le somme: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ a seconda che

escano rispettivamente i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Con un dado non truccato il giocatore ha la seguente probabilitá di vincita:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} v_i \cdot \frac{1}{6} \tag{12.39}$$

essendo la variabile equiprobabile con probabilitá $= 1/6$.

A seconda che sia $E(X) <=> C$ il gioco sará favorevole al banco, giusto (cioé entrambi hanno la stessa *speranza di vincita*) o favorevole al giocatore.

Se $v_i = i$ allora la scrittura precedente rappresenta la media della variabile casuale x, mentre per generici valori di v_i la scrittura precedente rappresenta la media della funzione della variabile aleatoria y, $v(y_i)$.

12.5.2 Varianza.

Definizione 12.9 *Si definisce varianza di una variabile casuale x con densitá di probabilitá $f(x)$, $x \in |a, b|$, la media della funzione $g(x) = (x-\mu)^2$, cioé il quadrato dello scarto della variabile casuale continua dalla media μ.*

La varianza é un momento di ordine 2 e si indica con σ^2 o $Var|x|$:

$$\sigma^2 = Var|x| = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx. \tag{12.40}$$

Sviluppando il quadrato del binomio ed utilizzando la proprietá additiva degli integrali si ottiene:

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 dx - 2\mu \int_a^b x f(x)dx + 2\mu^2 \int_a^b f(x)dx =$$
$$= \int_a^b x^2 f(x)dx - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Definizione 12.10 *(Deviazione Standard). La radice quadrata della varianza, σ, prende il nome di deviazione standard:*

$$\sigma = \left(\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx\right)^{1/2} \tag{12.41}$$

12.6 Distribuzione normale

Le funzioni di densitá di probabilitá piú interessanti sono le cosidette distribuzioni normali o *gaussiane*.

Esiste una *famiglia* di distribuzioni normali tutte collegate ad una distribuzione particolare chiamata distribuzione normale standard che ha la forma:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad z \in |-\infty, +\infty|. \tag{12.42}$$

L'integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \tag{12.43}$$

non é esprimibile in termini di funzioni elementari, tuttavia la funzione fé misurabile in $\mathbb{R}$ e la sua misura vale 1, quindi l'integrale vale $\sqrt{2\pi}$.

Si osservi che la funzione fé simmetrica rispetto a $z = 0$. Pertanto:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z)dz = 0 \tag{12.44}$$
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z)dz = 1. \tag{12.45}$$

Distribuzione normale generale

Diremo che una variabile casuale continua x é distribuita normalmente con media μ e deviazione standard $\sigma > 0$ se la sua funzione di densitá di probabilitá, che indicheremo con $f_{\mu,\sigma}$, è espressa in termini della distribuzione: normale standard f da:

$$f_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma} \tag{12.46}$$

∗ **Osservazione 12.1** *Come detto in precedenza la funzione $e^{-x^2/2}$ non ha primitive esprimibili con funzioni elementari. Conseguentemente il calcolo dell'integrale di f tra due qualunque estremi deve essere fatto ricorrendo a tavole o ad integrazioni numeriche.*

Le tavole. Sono facilmente reperibili tavole che riportano i valori della **distribuzione cumulativa** di una variabile casuale con distribuzione normale standard, cioè:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt. \tag{12.47}$$

Utilizzando queste tavole é possibile calcolare l'integrale della distribuzione normale standard tra due valori reali qualunque, utilizzando la proprietá additiva degli integrali:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{-\infty} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-z^2/2} dz = F(\beta) - F(\alpha). \tag{12.48}$$

Se infine si vogliono calcolare i valori relativi ad una funzione di distribuzione gaussiana con media μ e varianza σ allora occorre tener presente la (12.46).