MAZZOLDI, NIGRO, VOCI   ELEMENTI DI FISICA: MECCANICA E TERMOD.

Semplici osservatori di un gioco che non conosciamo.

METODO SPERIMENTALE

osservazione, ragionamento, esperimento

INDUTTIVO

FENOMENI NATURALI

PREVISIONI

TEORIA

PRINCIPI FONDAMENTALI

DEDUTTIVO

GRANDEZZA FISICA:

Un insieme di norme atte a misurare tale grandezza e ed assegnarle un'unità di misura.

EQUAZIONE DIMENSIONALE:

$$[X] = [L^p \, M^q \, T^r]$$

$\boxed{\text{La dimensione fisica della grandezza } X}$

Molte formule si possono esprimere in questa generica forma. Come rapporto tra lunghezza, massa e tempo.

$$J = \frac{m^2 \cdot Kg}{s^2} \quad , \quad N = \frac{m^2 \cdot Kg}{s^2}$$

MISURE ED ERRORI:

Esistono tre metodi di misura: misura diretta (metro), misura indiretta (attraverso formule), misura attraverso strumenti tarati.

È inevitabile nella misurazione, commettere un errore. Si cerca di rendere quest'errore il più piccolo possibile. Le cause degli errori sono varie: lo strumento, la tecnica della misura, l'influenza di grandezze diverse.

Gli errori si dividono in:

- errori sistematici;
- errori accidentali.

Quando si fanno dei calcoli, il risultato finale non può avere più cifre significative di quante ne abbia il valore con il minore numero di cifre significative.

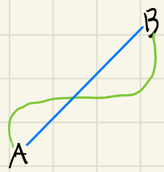
NOTAZIONE SCIENTIFICA:

Da base 2 a base 10

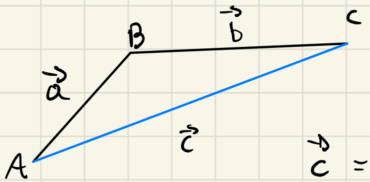
$10^m \leq b^k \leq 10^{m+1}$ $\qquad m = k \log b$

Grandezze vettoriali e grandezze scalari:

Spostamento:



percorso $\neq$ spostamento



regola del parallelogramma

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

La formulazione delle leggi fisiche in forma vettoriale è indipendente dal sistema. Inoltre il simbolismo è conciso

Grandezze scalari: numero (o unità di misura)

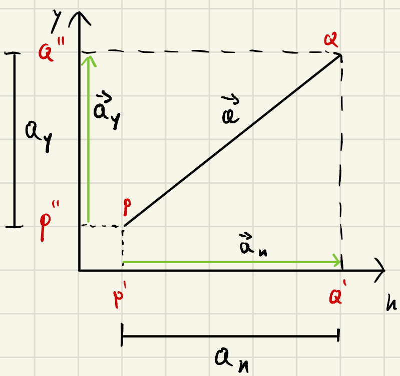
Grandezze vettoriale: modulo + verso + direzione + somma

Assiomi dello spazio Euclideo:

- Spazio piatto;
- Per due punti passa una ed una sola retta;
- Vale il teorema di Pitagora.

I vettori godono delle proprietà associativa, commutativa, del prodotto scalare, della differenza, distributiva ($k(a+b) = ka + kb$).

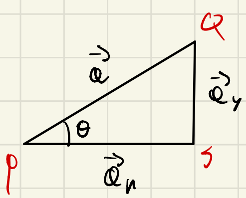
[redacted]



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$$

componenti cartesiane



$$a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$a_x = a \cos\theta$$

$$a_y = a \sin\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

In generale

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$c_z = a_z + b_z$$

Proprietà del prodotto vettoriale:

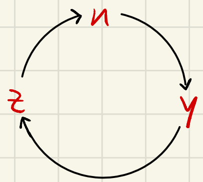
- anti-commutativa $\Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- distributiva
- NON vale l'associativa $\Rightarrow \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$

$\hat{x} \cdot \hat{x} = 0$

$\hat{x} \cdot \hat{y} = 1$

Disposizione ciclica $x\ y\ z$

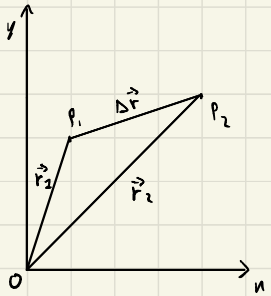
$\boxed{\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{z} \qquad \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{x} \qquad \hat{z} \cdot \hat{x} = \hat{y}}$



$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \hat{x}\,(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}\,(a_z b_x - a_x \cdot b_z) + \hat{z}\,(a_x b_y - a_y \cdot b_x)$$

Derivata di un vettore:



$\vec r_1 = \vec r(t_1) \Rightarrow$ posizione all'istante t_1

$\vec r_2 = \vec r(t_2) \Rightarrow$ posizione all'istante t_2

velocità media $= \dfrac{\vec r(t_2) - \vec r(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta \vec r}{t_2 - t_1}$

$\boxed{\text{posto } t_1 = t \quad \text{e} \quad t_2 = t + \Delta t}$

$$\vec v_m = \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t}$$

velocità istantanea $= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \dfrac{d\vec x}{d\vec t}$

$$\vec v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta \vec t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r + (t+\Delta t) - \vec r\,(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec r}{d\vec t}$$

Il vettore $\vec v$ è la derivata rispetto al tempo t del vettore posizione $\vec r$, e ha la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato.

In generale:

Il vettore $\vec{a}$ derivata di una grandezza vettoriale $\vec{b}$ rispetto alla grandezza scalare t

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Regole di derivazione:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$ m costante

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$ m non costante

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\,\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Attenzione all'ordine dei vettori

Cinematica:

Descrive i moti dei corpi

- punto materiale o massa puntiforme
- velocità media
- velocità istantanea

accellerazione media $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

accellerazione istantanea $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$\text{equazioni orarie} \begin{cases} x(t) & v_x(t) \\ y(t) & v_y(t) \\ z(t) & v_z(t) \end{cases}$$

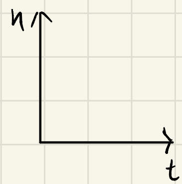
Moto rettilineo:

Il moto tridimensionale di un punto P che descrive una traiettoria curva nello spazio.

Il moto può essere rappresentato come somma di 3 moti rettilinei.

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\hat{x} + y(t)\cdot\hat{y} + z(t)\cdot\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\cdot\hat{x} + v_y(t)\cdot\hat{y} + v_z(t)\cdot\hat{z}$$



$$v = v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x \cdot dt$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x \cdot dt$$

Moto rettilineo uniforme:

velocità costante, accelerazione nulla

$a_x = 0$

$v_x(t) = \text{costante}$

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt \Rightarrow dx = v_x \, dt$$

Integrando: $$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x \, dt \Rightarrow x(t) - x_0 = v_{x_0} \int_{t_0}^{t} dt$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0}(t - t_0)$$

posto $t_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ v_x(t) &= v_{x_0} \end{aligned}\right\} \text{equazioni orarie}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato:

accelerazione costante

$a_x(t) = \text{costante} = a_x$

- $$dv_x = \left(\frac{dv_x}{dt}\right) dt = a_x \, dt$$

Integrando: $\int_{v_{x_0}}^{v_x(t)} dv_x = a_x \int_{t_0}^{t} dt$

$$v_x(t) - v_{x_0} = a_x(t-t_0) \Rightarrow v_x(t) = v_{x_0} + a_x(t-t_0)$$

- $dx = v_x(t)\,dt$

Integrando: $\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{x_0}^{t} v_x(t)\,dt \Rightarrow$

$$x(t) - x_0 = v_{x_0}\int_{t_0}^{t} dt + a_x \int_{t_0}^{t} (t-t_0)\,dt \Rightarrow$$

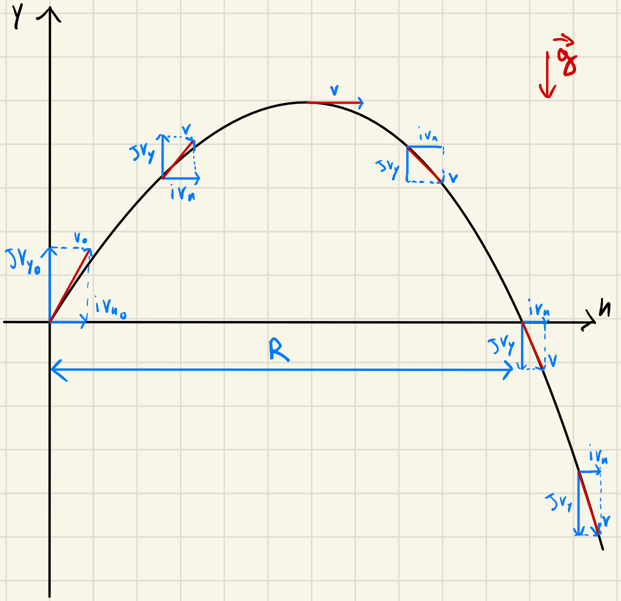
$$x(t) = x_0 + v_{x_0}(t-t_0) + \frac{1}{2} a_x (t-t_0)^2$$

Posto $t_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v_x(t) &= v_{x_0} + a_x t \end{aligned}\right\} \text{equazioni orarie}$$

$$v_x^2 - v_{x_0}^2 = 2 a_x (x - x_0)$$

Moto parabolico:



$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = 0\hat{x} - g\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{v}_0 = v_{x_0}\cdot\hat{x} + v_{y_0}\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{r}_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{x_0} = v_0 \cdot \cos\theta_0 \\ v_{y_0} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_{x_0} t \\ y = y_0 + v_y t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{m.r.u.} & \begin{cases} v_x = v_{x_0} & a_x = 0 \\ v_y = v_{y_0} - gt & a_y = -g \end{cases} \\ \text{m.r.u.a.} & \end{array}$$

Massima quota e tempo di risalita t_s:

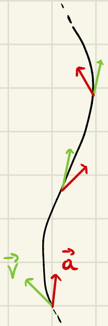
$$v_y(t_s) = 0 \Rightarrow v_{y_0} - g t_s = 0 \Rightarrow t_s = \frac{v_{y_0}}{g}$$

$$y_{max} = y(t_s) = \frac{v_{y_0}^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{y_0}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{y_0}^2}{g}$$

Gittata (o massima distanza):

$$y(x_{max}) = 0 \Rightarrow \frac{V_{y0}}{V_{x0}}\, x - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{V_{x0}}\right)^2 = 0 \Rightarrow X_{max} = \frac{V_{x0} \cdot V_{y0}}{g}$$

Accellerazione nel moto piano:



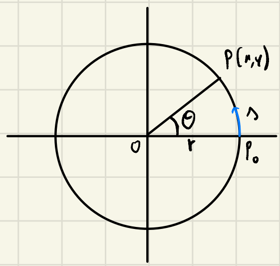
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(v \cdot \hat{v}) = \frac{d}{dt}(v\,\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

Cinematica rotazionale:

- Posizione angolare:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{radianti})$$

$$\theta = \theta(t)$$

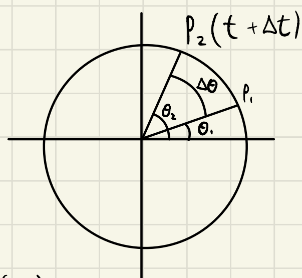


- Velocità angolare:

$$\theta_1 = \theta(t_1)\;;\; \theta_2 = \theta(t_2)$$

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \omega = \omega(t)$$

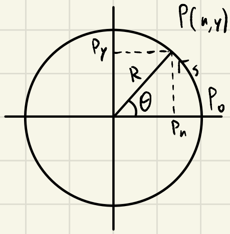


- accellerazione angolare:

$$\alpha_m = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt} = \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

Moto circolare uniforme:



$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = cost \Rightarrow s = s_0 + vt$$

$$x(t) = R\cos[\theta(t)] \qquad y(t) = R\sin[\theta(t)]$$

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2$$

moto circolare uniforme: $w = cost$

$$\theta = \theta_0 + wt$$

moto circolare uniformemente accellerato: $\alpha = cost$

$$\theta(t) = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$w(t) = w_0 + \alpha t$$

Cinematica lineare $\Longleftrightarrow$ Cinematica rotazionale

$$s = \theta R$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \Rightarrow v = \omega R$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \Rightarrow a_T = \alpha R$$

$$a_R = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_R = \omega^2 R$$

Dinamica:

Studio delle cause del moto dei corpi.

Meccanica classica: moto di grossi corpi con velocità trascurabili rispetto alla velocità della luce.

Forza = influenza dell'ambiente esterno

Massa = resistenza di un corpo accelerato da una forza.

Leggi di Newton:

1° legge: Principio d'inerzia

"Un corpo non soggetto a forze esterne permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme."

2° legge:

"La forza agente su un corpo è direttamente proporzionale alla accellerazione e ne condivide la direzione e il verso, con costante di proporzionalità data dalla massa del corpo."

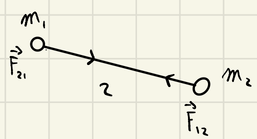
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3° legge:

"Quando due corpi interagiscono la forza $\vec{F}_{12}$ (azione) che il corpo 1 esercita sul corpo 2 è uguale e opposta alla forza $\vec{F}_{21}$ (reazione) che il corpo 2 esercita sul corpo 1."

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Forza di attrazione gravitazionale:

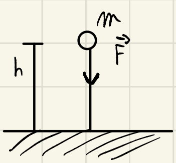


$$F_{12} = F_{21} = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/Kg\, s^2$$

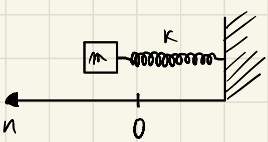
Forza peso:



$$F = G\,\frac{m_T \cdot m}{(R_T \cdot h)^2} \simeq G\,\frac{m_T}{R_T^{\,2}}\, m = mg$$

$$F = mg$$

Forza della molla:

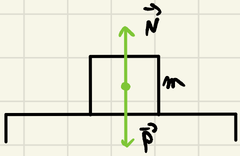


$$F = Kx$$

$$\vec{F} = -K\vec{x}$$

$$\vec{F} = -Kx(\hat{x})$$

Esempi :

- 

corpo in quiete $\Rightarrow \vec a = 0$

$\vec P$ = forza peso

$\vec N$ = forza esercitata dal tavolo

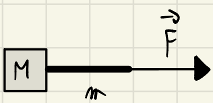
$$\vec P + \vec N = \cdot\cdot\,\vec a = 0$$

$$\vec P = -\vec N$$

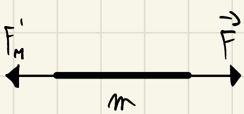
$$N = |\vec N| = |\vec P| = mg$$

> La forza $\vec P$ viene esercitata su m dalla terra, di conseguenza m esercita sulla terra una forza $\vec p\,' = -\vec p$

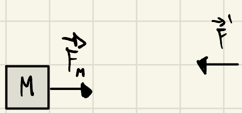
- Corpo tirato mediante una fune



$\vec F$ esercitata dalla mano sulla fune



$\vec F\,' = -\vec F$ esercitata dalla fune sulla mano

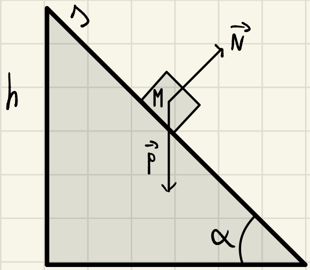


$\vec F_M$ esercitata dalla fune sul corpo M

$\vec F_M\,' = -\vec F_M$ esercitata da M sulla fune.

> T (tensione fune) > T_{max} la fune si spezza

Moto lungo il piano inclinato:



$$\vec P + \vec N = M\vec a$$

$$\begin{cases} P_s + N_s = M a_s \\ P_y + N_y = M a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M g \sin\alpha = M a \\ - M g \cdot \cos\alpha + N = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

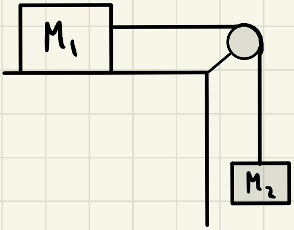
$$\Rightarrow \begin{cases} a = g \sin\alpha \\ N = M g \cos\alpha \end{cases}$$

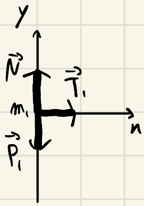
Nel corso del moto rettilineo uniforme:

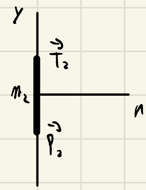
$$v^2 = v_0^2 + 2 a s = v_0^2 + 2 (g \sin\alpha) s = v_0^2 + 2 g h$$

(Vedere figura sopra)

Blocco sospeso mediante fune inestensibile e di massa trascurabile







$$\vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$N - m_1 g = 0 = m_1 a_{1y}$$

$$T_1 = m_1 a_{1x} = m_1 a_1$$

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 a_2$$

$$-m_2 g + T_2 = -m_2 a_2$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

Essendo la fune inestensibile $T_1 = T_2 = T$

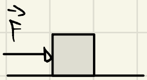
Inoltre $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} N = m_1 g \\ T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = m_1 g \\ T = m_1 a \\ m_2 g = (m_1 + m_2) a \end{cases}$$

$$a = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Attrito:



Se è fermo: si muove per $F \geq F_s$

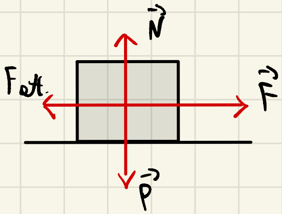
Se è in moto: si muove per $F \geq F_K$

F_s = attrito statico

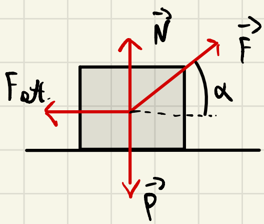
F_K = attrito dinamico $\Rightarrow$ opposto alla direzione del moto $\Rightarrow$ $F_K = \mu_K \cdot N$

Esempio:

Condizioni statiche:



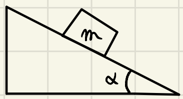
$$\begin{cases} F = F_{att} \\ P = N \end{cases} \Rightarrow F \leq \mu_s P$$



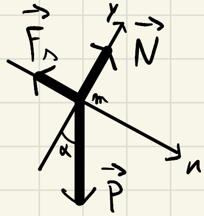
$$\begin{cases} F\cos\alpha = F_{att} \\ N + F\sin\alpha = P \end{cases} \Rightarrow F\cos\alpha \leq \mu_s (P - F\sin\alpha)$$

$$F \leq \frac{\mu_s P}{\cos\alpha + \mu_s \cdot \sin\alpha}$$

Determinazione sperimentale di μ_s, μ_k:



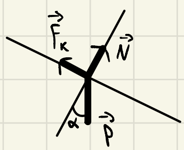
Caso statico:



$$\vec{F}_s + \vec{N} + \vec{P} = 0$$

$$\begin{cases} F_s \leq \mu_s N \\ N = mg\cos\alpha \\ -F_s + mg\sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_s \cdot mg\cos\alpha = mg\sin\alpha \Rightarrow \mu_s = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Caso dinamico:



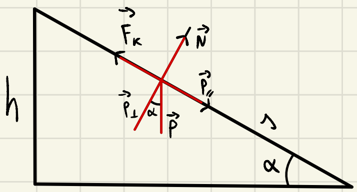
$$\vec{F}_k + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_k = \mu_k N \\ -F_k + mg\sin\alpha = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_k = mg\sin\alpha = \mu_k\, mg\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_k\, mg\sin\alpha = mg\cos\alpha \Rightarrow \mu_k = \mathrm{tg}\,\alpha$$

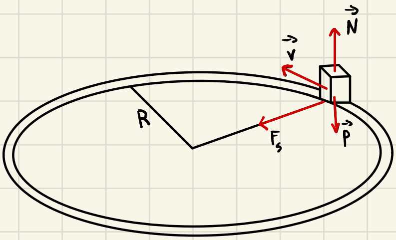
Moto lungo il piano inclinato (con attrito):



$$\vec{P} + \vec{N} + F_k = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} -P\cos\alpha + N = 0 \\ P\sin\alpha - F_k = ma \\ F_k = \mu_k N \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} N = P\cos\alpha \\ F_k = \mu_k\, mg\cos\alpha \\ a = g\sin\alpha - \mu_k\, g\cos\alpha \end{array}$$

Dinamica del moto circolare uniforme:



accellerazione centripeta $a_R = \frac{v^2}{R}$

$$\vec F_s = m\vec a_R = \frac{m v^2}{R}$$

$$\vec P + \vec N = 0 \Rightarrow N = -P \Rightarrow N = m g$$

Quantità di moto:

$$\vec p = m \vec v$$

- m = costante $\Rightarrow F = m\frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec v) = \frac{d\vec p}{dt} \Rightarrow \vec F = \frac{d\vec p}{dt}$
- $m \neq$ costante $\Rightarrow$ vale la stessa formula

Teorema dell'impulso:

$$\vec J = \int_0^t \vec F \, dt$$

$$d\vec p = \vec F \, dt \Rightarrow \int_{\vec p_0}^{\vec p} d\vec p = \int_0^{t_0} \vec F \, dt$$

$$\vec J = \vec p - \vec p_0 = \Delta \vec p$$

Dinamica rotazionale:

Momento meccanico di una forza rispetto ad un punto O

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Momento angolare di un punto materiale rispetto ad un punto O

$$L = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

DA RIVEDERE

Conservazione dell'energia:

L'energia totale di un sistema isolato rimane costante

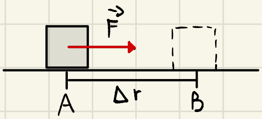
Lavoro:

l. motore $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $dW > 0$

l. resistente $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $dW < 0$

centripeta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $dW = 0$

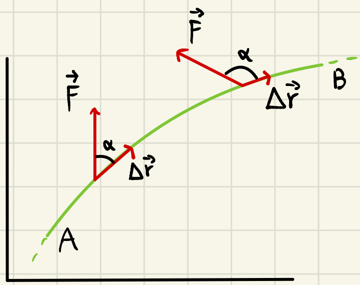
Forza costante:



$$W = F \cdot \Delta r \; (\cdot \cos\alpha)$$

Si misura in joule $J = 10^7$ erg

Forza non costante:



Suddividiamo il percorso tra A e B in $\Delta\vec{r}$ tale che $\vec{F}$ è costante in $\Delta\vec{r}$.

$$W_{\Delta r_i} = F_i \cdot \Delta r_i = F_i \cdot \Delta r_i \cdot \cos\alpha_i$$

$$W_{TOT} = \sum_i W_{\Delta r_i}$$

F è costante in un tratto infinitesimo di $d\vec{r}$

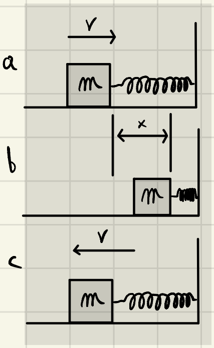
- Lavoro fatto da una forza $\vec{F}$ per spostare il suo punto di applicazione da A a B lungo il percorso l:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Energia cinetica:

$$W_{TOT} = K_2 - K_1 = \Delta K \quad , \quad K = \frac{1}{2} m v^2$$

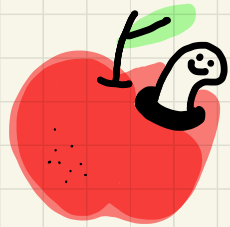
Energia potenziale:



$$V_{ANDATA} = V_{RITORNO}$$

$$W_{ANDATA} = W_{RITORNO}$$

$$\boxed{E = U + K}$$



$$\left.\begin{array}{l} U_{ANDATA} = -\frac{1}{2} k x^2 \\ U_{RITORNO} = \frac{1}{2} k x^2 \end{array}\right\} mgh$$

- Una forza è **conservativa** se il lavoro compiuto dalla forza su un punto materiale che si muove su un qualsiasi percorso chiuso è nullo.

Energia potenziale gravitazionale:

$$F = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$\Delta U = U(P) - U(P_0) = -\int_{P_0}^{P} F \cdot d\vec{r} \Rightarrow -\int_{r_0}^{r} -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \hat{r} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G m_1 m_2 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = -G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Potenza : (rapidità con cui un lavoro è compiuto)

Potenza media : $\dfrac{W}{\Delta t}$ $\quad J/s \equiv W$

$$\left.\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \\ dW &= P\, dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Dinamica dei sistemi dei punti materiali:

Per una generica particella i:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$\vec{F}_i^{(E)}$ = forze esterne

$\vec{F}_i^{(I)}$ = forze interne (esercitate dalle rimanenti particelle)

> La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene definito il sistema di punti

$$\vec{F}_i^{(I)} \neq 0$$

ma

$$\vec{F}_{TOT}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(I)} = 0$$

essendo

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad \text{(per la 3° legge del moto)}$$

Centro di massa:

Punto geometrico tale che:

$$r_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ = massa totale

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{P}_{TOT} &= M \cdot \vec{v}_{CM} \\ \vec{F}^{(E)}_{TOT} &= M \cdot \vec{a}_{CM}\end{aligned}}$$

Il moto del centro di massa dipende solo da forze esterne.

$$\vec{F}^{(E)}_{TOT} = M \cdot \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$$

In un sistema isolato:

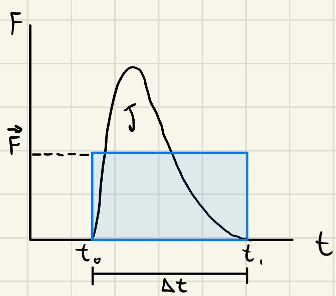
$\vec{F}^{(E)}_{TOT} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{TOT} = \text{costante}$ (Per il principio di conservazione della quantità di moto)

$\vec{F}^{(E)}_{TOT} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \text{cost}$ (CM si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete)

Di conseguenza c'è equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione.

Urti:

Fenomeno durante il quale il moto delle particelle collidenti varia, ed è possibile una separazione netta di tempo tra prima e dopo l'urto.



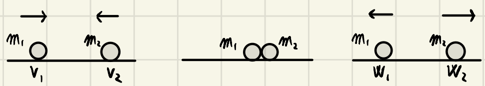
- elevata intensità
- breve tempo di reazione

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt = \Delta \vec{p}$$

$\vec{F} \to \infty$, $\Delta t \to 0 \Rightarrow J$ = valore finito $\Rightarrow \Delta p \neq 0$

La quantità di moto $\vec{p}_i$ di ogni particella cambia nel tempo Δt. F cambia ogni singolo $\vec{p}_i$, ma non cambia $\vec{p}_{tot}$.

Urto elastico:



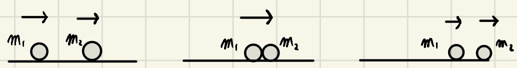
$\boxed{w_1 = (V_1)_f \quad w_2 = (V_2)_f}$

Si conserva l'energia cinetica e la quantità di moto. (somma $F^{(E)}$ nulla)

$$w_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

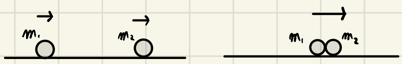
$$w_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Urto anelastico:



Non si conserva K ma soltanto la quantità di moto

Urto completamente anelastico:



Dopo l'urto i corpi collidenti rimangono attaccati.

Moto armonico semplice:

Oscillazioni:

Moto periodico: moto che si ripete ad intervalli di tempo uguali.

Moto oscillatorio: moto di una particella che si muove avanti e indietro, su uno stesso percorso.

Moto oscillatorio smorzato: moto oscillatorio tra limiti del percorso avanti e indietro non fissi.

Periodo T: tempo richiesto perché venga eseguita un'oscillazione completa.

Frequenza f $\left(\frac{1}{T}\right)$: numero di oscillazioni nell'unità di tempo.

Posizione di equilibrio: posizione del moto in cui non agisce alcuna forza.

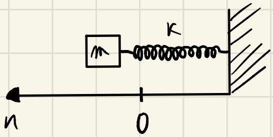
Spostamento: distanza dalla posizione di equilibrio.

Punti di inversione: punti in cui la velocità è nulla.

Forza di richiamo: agisce sulla particella in maniera da accelerarla verso la posizione di equilibrio.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Sistema massa - molla:



Un corpo di massa m, attaccato ad una molla ideale di costante elastica k e libero di muoversi in maniera orizzontale privo di attrito.

posizione di equilibrio = molla a riposo

forza di richiamo = allungamento o compressione $(F = -kx(\hat{x}))$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0} \xrightarrow{\text{(la soluzione più generale)}} \boxed{x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t}$$

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \phi)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad x(t) = B\cos(\omega t + \phi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (A = \text{ampiezza del moto})$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (\phi \text{ costante di fase})$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)} \quad \text{(derivata prima = velocità)}$$

$$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)} \quad \text{(derivata seconda = accellerazione)}$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}} \qquad \boxed{\tan\phi = \frac{x_0\,\omega}{v_0}}$$

Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad w_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0}$$ equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + w_0^2 = 0 \longrightarrow$$ equazione caratteristica

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}$$

Tre casi:

- $\gamma^2 > w_0^2 \longrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ reali e distinte (smorzamento forte)

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w_0^2} = -\gamma + \beta$$

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - w_0^2} = -\gamma - \beta$$

ove $\beta = \sqrt{\gamma^2 - w_0^2} < \gamma \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ negativi

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$$

- $\gamma^2 = w_0^2 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ reali e coincidenti (smorzamento critico)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

- $\gamma^2 < \omega_0^2 \longrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ immaginarie coniugati (smorzamento debole)

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

ove $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

Corpo rigido:

$$(\text{densità})\ \rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$$

Moto di un corpo rigido:

Moto di pura traslazione:

Tutti i punti descrivono traiettorie eguali, percorse con la stessa velocità $V = V_{CM}$

$$P_{TOT} = M v_{CM}$$

$$F^{(E)}_{TOT} = M \vec{a}_{CM} \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Moto di pura rotazione:

Tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenza diverse e che stanno su piani paralleli e hanno il centro sullo stesso asse, l'asse di rotazione.
In un dato instante tutti punti hanno la stessa velocità angolare ω^2 che parallela all'asse di rotazione.

$$\tau^{(E)}_{TOT} = \frac{L}{t}$$

$$I = m R^2$$

Teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_{CM} + M a^2$$

Nel moto di rotazione del corpo si conserva il momento angolare.