SERIE NUMERICHE

- Premessa:

Sia $\{a_n\}$ una succ. di numeri reali

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow a_n \in \mathbb{R}$$

RICORDA.

- $\{a_n\}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

se

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n>\nu \Rightarrow |a_n - l|<\varepsilon$$

- $\{a_n\}$ diverge pos. (neg) e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (-\infty)$$

se:

$$\forall k>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}: \forall n>\nu \Rightarrow a_n > k \quad (<-k)$$

- $\{a_n\}$ monotona $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Se $\{a_n\}$ è crescente $\Rightarrow \lim a_n = \sup\{a_n\}$

Se $\{a_n\}$ è decrescente $\Rightarrow \lim a_n = \inf\{a_n\}$

- Criterio di Cauchy (per le succ.)

$\{a_n\}$ converge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}: \forall n,m>\nu \Rightarrow |a_n - a_m|<\varepsilon$

SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_n\}$ una succ. numerica

L'espressione

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

si chiama serie di termine generale a_n

Esempi:

1) $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La serie di termine generale a_n è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$

cioè:

$$1+2+3+4+ \dots + n + \dots$$

$S_1 = 1$
$S_2 = 1+2=3$
$S_3 = 1+2+3=6$
$\vdots$
$S_n = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la serie di termine generale a_n è:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$S_1 = 1$
$S_2 = 1+\frac{1}{2}$
$S_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
$\vdots$
$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$.

3) $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La serie di termine generale a_n è:

$$1+1+1+1+\dots$$

$S_1 = 1$
$S_2 = 1+1=2$
$S_3 = 1+1+1=3$
$\dots$
$S_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{-volte}} = n$

Consideriamo

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

S_n: si chiama somma parziale n-esima (o di posto n) della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$\{S_n\}$ si chiama successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Def.

Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se la successione $\{S_n\}$ converge.

In tal caso, posto

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

S si chiama somma della serie e si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente (neg.) se la successione $\{S_n\}$ diverge positiv. (neg).

Le serie convergenti, div. pos., div. neg si dicono regolari.

PER DEFINIZIONE ATTRIBUIAMO ALLA SERIE IL CARATTERE della success. delle sue somme parziali

Esempi:

Le serie termine generale

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 1$$

sono entrambe divergenti positivamente.

La succ. delle somme parziali di $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ è: successione somme parziali

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow +\infty$$

La succ. delle somme parziali di $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ è:

$$S_n = n \longrightarrow +\infty$$

SERIE GEOMETRICA

Sia $q \in \mathbb{R}$ la serie

$$1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$$

si chiama serie geom. di ragione q.

Costruiamo la successione delle somme parziali

$$n \in \mathbb{N} \quad S_n = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{se } q\neq 1 \\ n & \text{se } q=1 \end{cases}$$

1° caso) $q=1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge positivamente.}$$

2° caso) $q \neq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ \frac{1}{1-q} & -1<q<1 \\ \nexists & q\leq -1 \end{cases}$$

$$\lim q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0 & \text{se } -1<q<1 \\ \nexists & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

CARATTERE della SERIE GEOMETRICA:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \begin{cases} \text{diverge positiv.} & \text{se } q\geq 1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-q} & \text{se } -1<q<1 \\ \text{oscilla} & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

Es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \quad \text{div. positiv.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-3)^n \quad \text{oscill.}$$

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}\left(-\frac{3}{2}\right)$$