Derivate parziali

$A \subseteq \mathbb{R}^n \quad n \neq 0 \qquad f: A \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in A \quad \text{def} \quad \exists\, \delta > 0 : B_\delta(x_0, y_0) \subseteq A$

$\exists$ qualche tipo di sfera non necessarie sferica δ dove del tipo $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$

Parzialmente: Sia funzione (anche una variabile x)

$g: \exists\, a, b > x_0 : a < b < x_0 + \delta$

Definisco la

$\varphi(x) = f(x, y_0) \qquad \forall x \in]a, b[, x \neq x_0$

Def.

Sia la funzione $\varphi(x)$ è derivabile nel punto x_0 allora $f(x, y_0)$ è derivabile parzialmente rispetto ad x nel punto (x_0, y_0).

Tra tale caso si numera:

$$f_x(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} \varphi'(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

in ordinamento derivata parziale di f in (x_0, y_0)

Rilancio:

$$\exists\, \varphi'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

Se f è derivabile di derivata parziale rispetto ad x nel punto (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Esercizio: Quali sono le funzioni derivate di f in (x, y)

Sia $x_0 = (x, y)$ con $y_0 = (x, y)$ $x \neq x$

Definisco la funzione (anche una variabile y)

$\varphi: \exists\, y_0, y_1 \in \mathbb{R} : y_0 < y < y_1$

Definisco la

$$\varphi(y) = f(x, y) \qquad \forall y \in]y_0, y_1[, y \neq y$$

Def.

Diciamo che f è derivabile parzialmente rispetto ad y in (x, y) se la funzione $\varphi(y)$ è derivabile.

Se $\exists$ tale tale caso $\exists$ numero

$$f_y(x, y) \overset{\text{def}}{=} \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

si chiama derivata parziale rispetto ad y in (x, y)

Rilancio:

$$\exists\, \varphi'(y) \overset{\text{def}}{=} \exists \lim_{y \to y} \frac{\varphi(y) - \varphi(y)}{y - y} \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{y \to y} \frac{f(x, y) - f(x, y)}{y - y} \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{y \to y} \frac{f(x, y) - f(x, y)}{y - y} \in \mathbb{R}$$

Quindi, se f è derivabile di derivata parziale rispetto ad y nel punto (x, y) allora:

$$f_y(x, y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{y \to y} \frac{f(x, y) - f(x, y)}{y - y}$$

Es:

- Consideriamo la funzione f, definita da

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

f è derivabile di derivata parziale prima nel punto $(0, 0)$?

Definiamo la funzione $\varphi(x) = f(x, y)$

$\varphi(x) = f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\nexists\, \varphi'(x)$ ma f non ha derivata parziale rispetto ad x in $(0, 0)$

f è derivabile di derivata parziale rispetto ad y nel punto $(0, 0)$?

$\varphi(y) = f(0, y) = \sqrt{y^2} = |y|$

$\nexists\, \varphi'(y)$ ma f non ha derivata parziale rispetto ad y in $(0, 0)$

f è derivabile di derivata parziale prima nel punto $(0, 0)$?

$\varphi(x) = f(x, 0) = \sqrt{x^2 + 0}$

$\exists\, \varphi'(x)$? $\qquad$ Sì

$\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 0}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi'(0) = \frac{0}{0}$

Quindi:

$\exists\, f_x(0, 0) = \frac{0}{0}$

Poiché:

$\psi(y) = f(0, y) = \sqrt{0 + y^2}$

$\exists\, \psi'(0)$? $\qquad$ Sì

$\psi'(y) = \frac{y}{\sqrt{0 + y^2}} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$\psi'(0) = \frac{0}{0}$

Quindi:

$\exists\, f_y(0, 0) = \frac{0}{0}$

Sia A = punto (tutto $\mathbb{R}$ tranne alcuni valori)

Def 2.

Diciamo che f è derivabile di derivata parziale prima rispetto ad x in A se f è derivabile di derivata parziale prima rispetto ad x in (x, y) con ogni punto di A.

Esempio 2. Sia

$f(x, y) = 4x^2y^2 - 4xy^3 + 3x - y + 7 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, f_x(x, y) = 8x^2y^2 - 4y^3 + 3 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, f_y(x, y) = 4 \cdot 2^2y - 4^2y^2 + 3x \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Esempio 3. Sia

$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - \log_2(x + 2^2 + 2y^2) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, f_x(x, y) = 2x - \frac{2x}{x + 2^2 + 2y^2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, f_y(x, y) = 6y - \frac{4y}{x + 2^2 + 2y^2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Esempio 3. Studiare la funzione

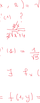
$f(x, y) = |xy| \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$

valutiamo, in generale, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$.

$\boxed{\exists\, f_x(x, y) \quad \exists\, f_y(x, y)}$

- Poiché $y \neq 0$ la funzione $|xy|$ è derivabile rispetto ad x in (x, y) se $x \neq 0$: $y \neq 0$

$\exists\, f_x(x, y) = \frac{|y|}{y} \qquad \forall x \neq 0, y \neq 0$



Se $x = 0$ la funzione

$f(0, y) = |0 \cdot y| = 0$

$\exists\, f'(0, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\boxed{\exists\, f_x(0, y) = 0}$

- Poiché $x \neq 0$ e considerate la funzione $|xy|$ (una variabile y). Essa non è derivabile come per $y = 0$. Quindi:

$\exists\, \frac{f_y(x, y)}{y} = |x| \cdot D\,|y| = |x| \cdot \frac{|y|}{y} \quad \text{se } x \neq 0 : y \neq 0$

Se f considera non la funzione $f(0, y)$ è:

$f(0, y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$\exists\, f_y(0, y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$\exists\, f_y(0, y)$ sì

$\exists\, f_x(x, y)$?

$f(x, y) = |xy| \quad \text{se } x \neq 0$

$\boxed{\begin{cases} |y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}}$

$\exists\, f_x(x, 0)$

$\varphi(x) = f(x, 0) = |x \cdot 0| = 0$

$\exists\, \varphi'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\exists\, f_x(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\exists\, \varphi'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\exists\, \varphi'(0)$

- Osserviamo che f non derivata parziale rispetto ad x in $\mathbb{R}$. Quindi anche la funzione

$A \ni (x, y) \xrightarrow{\text{def}} f_x(x, y)$

Tale funzione è stata detta funzione derivata parziale prima rispetto ad x.

- Se f_x è derivata di derivata parziale prima rispetto ad x (x, y) diremo che f ha derivata parziale seconda (x, x) rispetto ad x in (x, y) se accade:

$$f_{xx}(x, y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

Si chiama derivata seconda prima rispetto a x in (x, y).

- Si può dire che f ha derivata parzialmente rispetto ad y in A.

Diremo:

$$A \ni (x, y) \xrightarrow{f_y} f_y(x, y)$$

Se la funzione f_y è derivata di derivata parziale prima rispetto ad x (x, y) diremo che f ha derivata parziale seconda (x, y) rispetto ad y in (x, y)

$$f_{yx}(x, y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Si chiama derivata seconda prima rispetto a x in (x, y).

Esercizio: Determinare le derivate parziali seconde

$f(x, y) = x^2y^2 + y \cdot (x + 4y^2 + x) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, f_x(x, y) = 2xy^2 + y(x + 4y^2 + x) + y \cdot y$

$= 2xy^2 + y^2 + 4y^3 + xy$

$\boxed{\begin{aligned} &\exists\, f_x(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_y(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_{xx}(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_{yy}(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_{yx}(x, y) = \ldots \end{aligned}}$

Esercizio 2:

Calcolare, se esistono le derivate parziali prime

$f(x, y) = \frac{(2x^2y^2 + x)(2x^2y^2 + x)}{x^2 + 2y^2 + 1} \qquad \text{dom} = \mathbb{R}^2$

$\exists\, f_x(x, y) = \frac{(2x^2y^2 + x)(2x^2y^2 + x)' - (2x^2y^2 + x)'(2x^2y^2 + x)}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2} =$

$= \frac{(4x^2y^2 + 2y^2 + 1)(2x^2y^2 + x) - (4xy^2 + 1)(2x^2y^2 + x)}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2} =$

$= \frac{-2x^2y^2 + 4y^2 + 4xy^2 + 1 + 4xy - 2y}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}$

$\exists\, f_y(x, y) = \frac{(4xy + 4x)(2x^2y^2 + x)(x^2 + 2y^2 + 1) - (4xy^2 + 1)(2x^2y^2 + x)(4y)}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2} \ldots$

Esercizio 3:

Calcolare, se esistono le derivate parziali di

dom $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

$\exists\, f_x(x, y) = 4xy^2 + y \cdot D\,(\log^2 x) =$

$= 4xy^2 + y^2 \cdot x \cdot \frac{2 \log x}{x}$

$\boxed{\exists\, f_x(x, y) = 4xy^2 + 2 \cdot \log x}$

$\exists\, f_y(x, y) = 2x^2y$

$\boxed{\begin{aligned} &\exists\, f_{xx}(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_{yy}(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_{yx}(x, y) = \ldots \\ &\exists\, f_{yy}(x, y) = \ldots \end{aligned}}$

- Teorema (di Schwarz)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ derivata di derivata seconda per A. Se f_{xy}, f_{yx} sono continue in (x_0, y_0) allora:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$