算法设计与分析

Computer Algorithm Design & Analysis

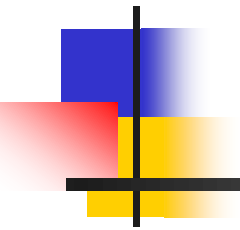
2019.3

王多强

dqwang@mail.hust.edu.cn

群名称：2019-算法

群　号：835135560



Chapter 4
Divide-and-Conquer

分治策略

本章开始研究算法的设计技术

第一种技术：**增量式方法**

例：插入排序算法

- 设计思想：从A[1]开始，在子数组A[1..j-1]完成排序后，将下一个元素A[j]插入到子数组A[1..j]的适当位置，从而生成一个包含更多元素的有序子数组A[1..j]。——这种**通过不断增加的策略完成计算的方法**就是**增量式方法**。

本章学习另一种算法设计方法：“分治法”（Divide and Conquer）

分治法的基本思想：

当问题规模比较大而无法直接求解时，将原始问题分解为几个规模较小、性质与原始问题一样的子问题，然后递归地求解这些子问题，最后合并子问题的解以得到原始问题的解。

分治法遵循三个基本步骤：

1）分解（Divide）：将原问题分为若干个规模较小、**相互独立**，性质与原问题一样的子问题；

2）解决（Conquer）：若子问题规模较小、可直接求解时则直接解；否则“**递归**”求解各个子问题，即继续将较大子问题分解为更小的子问题，然后**用同一策略继续求解子问题。**

3）合并（Combine）：将子问题的解合并成原问题的解。

分治算法的实例：归并排序

设A[1..n]是含有n个元素序列：

- **归并排序的基本思路：**

分解：将A一分为二，得到两个子序列A_1和A_2，它们各有n/2个元素。

解决：递归地对两个子序列进行排序，从而得到关于A_1和A_2的有序子序列A'_1和A'_2

合并：合并A'_1和A'_2，得到关于A的完整有序序列A'。

- **归并排序的过程描述：**
  - MERGE-SORT(A,p,r)
  - MERGE(A,p,q,r)

详见2.3，P16~22

- **归并排序的时间分析：$T(n)=2T(n/2)+cn = O(n\log n)$**

分治与递归

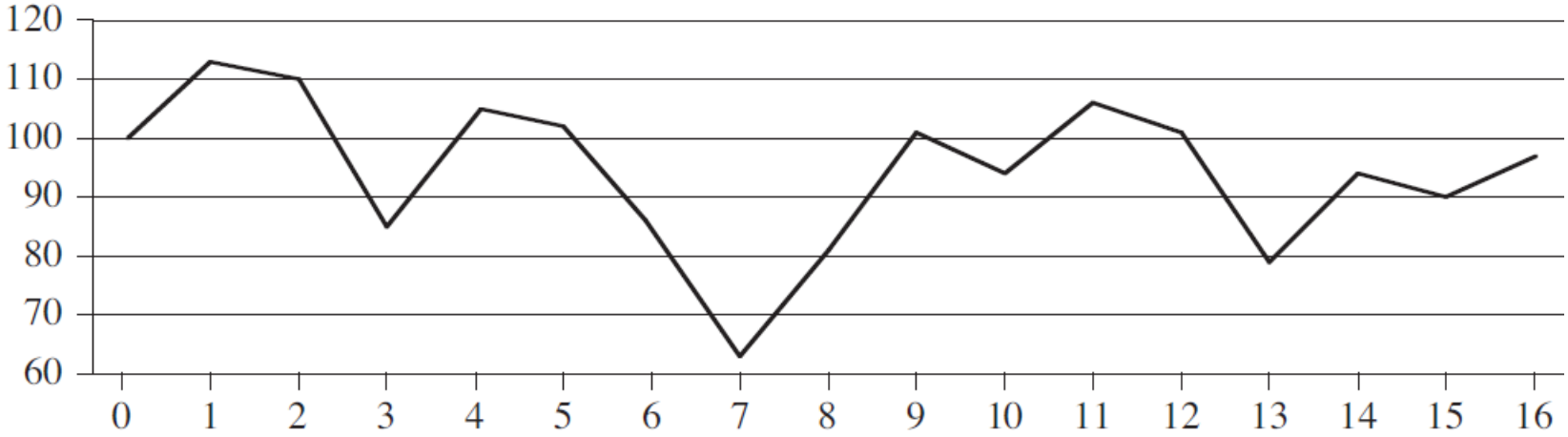
由于分解出来的子问题的性质与原问题一样，所以对子问题的求解实际上是算法的递归执行。

因此，分治的基本策略就是递归求解。

- 若子问题的规模足够小，就不需要再进一步分解了，这种情况称为基本情况(base case)。
  - 基本情况的子问题可以直接求解。
- 若子问题的规模还比较大，需要进一步分解并递归求解，这种情况称为递归情况(recursive case)。

4.1 最大子数组问题

- 一个关于炒股的story：



Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	−3	−25	20	−3	−16	−23	18	20	−7	12	−5	−22	15	−4	7

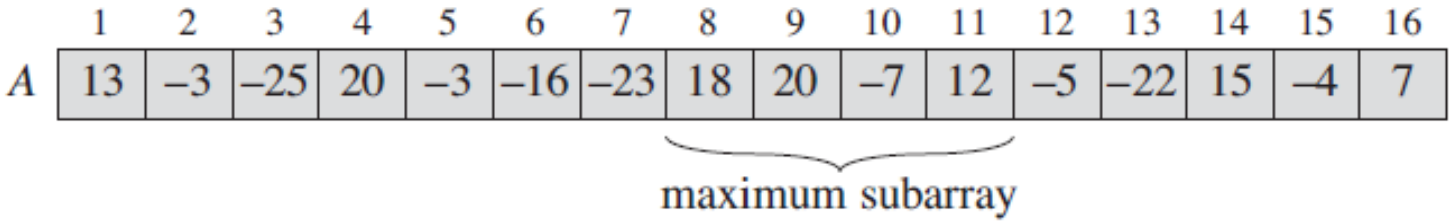
- **问：哪段时间最赚钱？**

  即股市有起落，从哪天到哪天的收益最大呢？

- 从问题定义到建模求解

求解炒股问题的算法模型：**最大子数组问题**

已知数组A，在A中寻找“**和最大**”的**非空连续子数组**。



——称这样的连续子数组为**最大子数组**(***maximum subarray***)

- 怎么求解?

方法一：**暴力求解法**（**brute-force solution**）

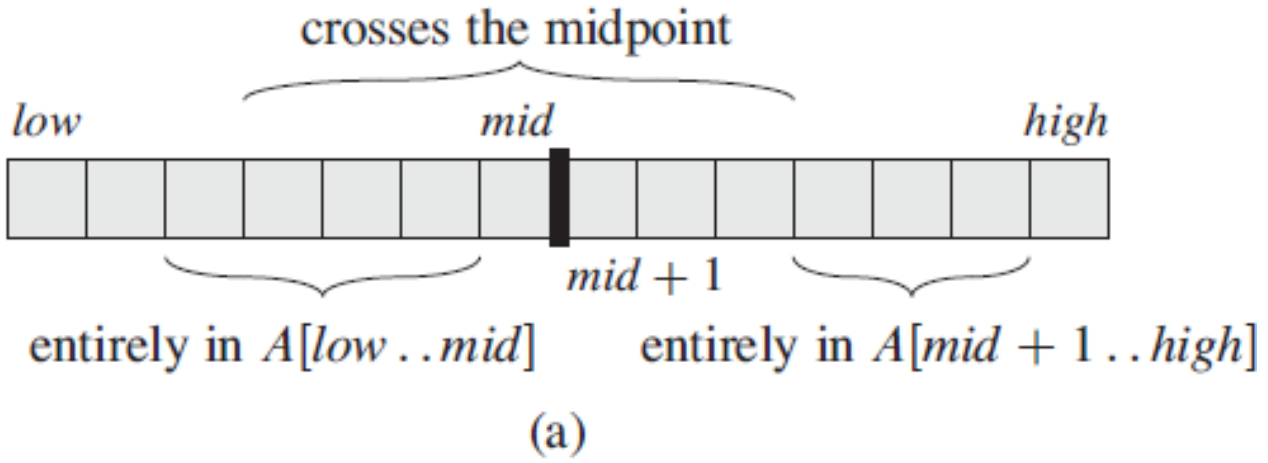
搜索A的每一对起止下标区间的和，和最大的子区间就是最大子数组，时间复杂度：$\binom{n-1}{2} = \Theta(n^2)$

方法二：使用分治策略求解

设当前要寻找子数组A[low...high]的最大子数组。

分治的基本思想是：

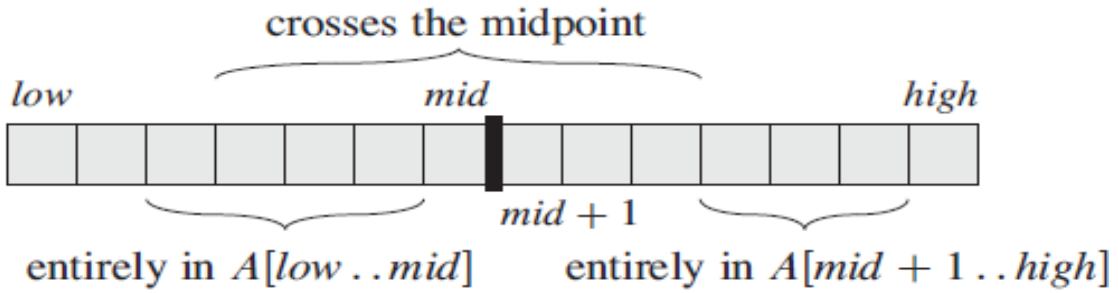
- 首先将子数组A[low...high]划分为两个规模尽量相等的子子数组，分割点：**mid=(low+high)/2**
- 然后分别求解A[low...mid]和A[mid+1...high]的最大子数组。



基于上述划分有：

A[low...high]的连续子数组A[i...j]所处的位置必是下面三种情况之一：

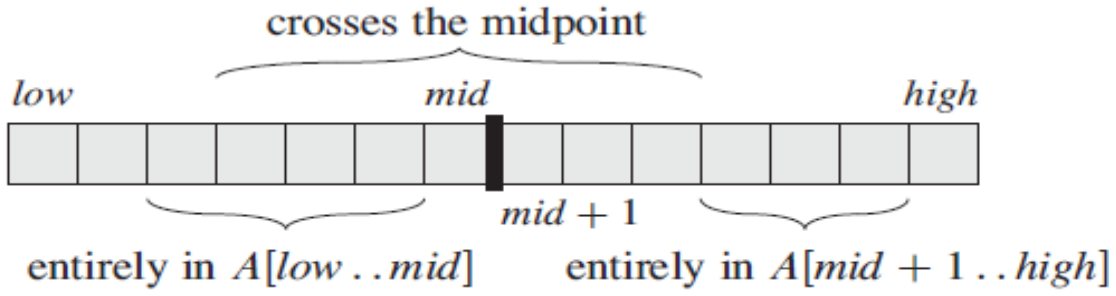
- entirely in the subarray $A[low\,..\,mid]$, so that $low \le i \le j \le mid$,
- entirely in the subarray $A[mid+1\,..\,high]$, so that $mid < i \le j \le high$, or
- crossing the midpoint, so that $low \le i \le mid < j \le high$.



(a)

A[low..high]的最大子数组也是A[low..high]的连续子数组，所以A[low..high]的一个最大子数组所处的位置也必然是这三种情况之一。

即：A[low..high]的这个“最大子数组”必然是：或者完全位于A[low.. mid]中、或者完全位于A[mid+1 .. high]中、或者是跨越中点的所有子数组中和最大的那个。



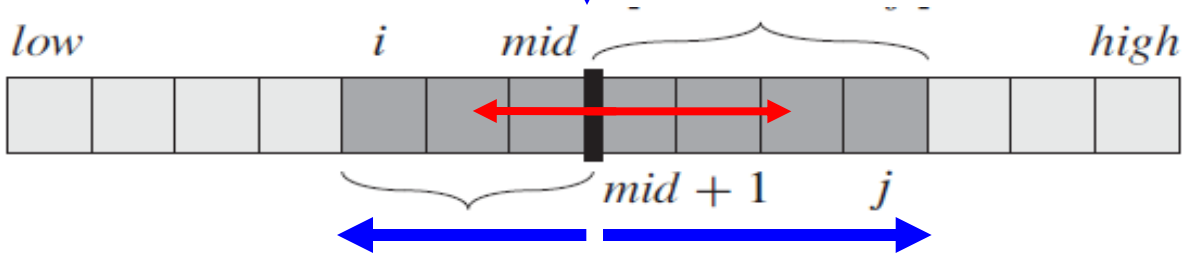
(a)

求解过程分析

1）对于完全位于A[low .. mid]和A[mid+1.. high]中的最大子数组，可以在这两个较小的子数组上用递归的方法进行求解。

2）**怎么寻找跨越中点的最大子数组呢?**

这样的子数组必然跨越中点mid



从mid出发，分别向左和向右找出“和最大”的子区间，mid分别是左右区间的终点和起点。然后合并这两个区间即可得到跨越中点时的A[low ... high]的最大子数组。

以下2个过程用于求解最大子数组问题

过程1：FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY，求跨越中点的最大子数组

```
FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
 1  left-sum = −∞
 2  sum = 0
 3  for i = mid downto low
 4       sum = sum + A[i]
 5       if sum > left-sum
 6            left-sum = sum
 7            max-left = i
 8  right-sum = −∞
 9  sum = 0
10  for j = mid + 1 to high
11       sum = sum + A[j]
12       if sum > right-sum
13            right-sum = sum
14            max-right = j
15  return (max-left, max-right, left-sum + right-sum)
```

搜索从mid开始向左的半个区间，找出左侧"和最大"的连续子数组

同理，搜索从mid+1开始向右的半个区间，找出右边"和最大"的连续子数组

返回搜索的结果

- 时间复杂度：$\Theta(n)$

过程2： FIND-MAXIMUM-SUBARRAY，求最大子数组问题的分治算法

```
FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, high)
 1  if high == low
 2       return (low, high, A[low])          // base case: only one element
 3  else mid = ⌊(low + high)/2⌋
 4       (left-low, left-high, left-sum) =
              FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, mid)
 5       (right-low, right-high, right-sum) =
              FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, mid + 1, high)
 6       (cross-low, cross-high, cross-sum) =
              FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
 7       if left-sum ≥ right-sum and left-sum ≥ cross-sum
 8            return (left-low, left-high, left-sum)
 9       elseif right-sum ≥ left-sum and right-sum ≥ cross-sum
10            return (right-low, right-high, right-sum)
11       else return (cross-low, cross-high, cross-sum)
```

求A[low~mid]的最大子数组

求A[mid+1~high]的最大子数组

求跨越中点的最大子数组

返回其中的大者作为A[low..high]的解。

FIND-MAXIMUM-SUBARRAY的时间分析

令 **T(n)**表示求解n个元素的最大子数组问题的执行时间。

1）**当n=1时，T(1)=Θ(1)**。否则，

2）对A[low..mid]和A[mid+1..high]两个子问题递归求解，每个子问题的规模是n/2，所以每个子问题的求解时间为T(n/2)，**两个子问题递归求解的总时间是2T(n/2)**。

3）**FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY的时间是Θ(n)。**

算法FIND-MAXIMUM-SUBARRAY执行时间T(n)的递归式为：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1, \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{if } n > 1. \end{cases} \Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$$

还有没有更快的算法？4.1-5给出了一个线性时间算法

4.2 Strassen矩阵乘法

回顾一下矩阵运算

已知两个n阶方阵： $A=(a_{ij})_{nxn}$， $B=(b_{ij})_{nxn}$

1）**矩阵加法**

$C=A+B=(c_{ij})_{nxn}$ ，其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，$i,j=1,2,...,n$

时间复杂度： $\Theta(n^2)$

2）**矩阵乘法**

$C=AB=(c_{ij})_{nxn}$ ，其中，$c_{ij}=\sum_{1\le k\le n}a_{ik}b_{kj}$，$i,j=1,2,...,n$

时间复杂度： $\Theta(n^3)$。

共有n^2个c_{ij}需要计算，每个c_{ij}需要n次乘运算,n-1次加法

实现两个n×n矩阵乘的过程

```
SQUARE-MATRIX-MULTIPLY(A, B)
1  n = A.rows
2  let C be a new n × n matrix
3  for i = 1 to n
4      for j = 1 to n
5          c_ij = 0
6          for k = 1 to n
7              c_ij = c_ij + a_ik · b_kj
8  return C
```

朴素的矩阵乘法

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

众所周知，朴素的矩阵乘法的计算时间是$\Theta(n^3)$.

能否用少于$\Theta(n^3)$的时间完成矩阵乘的计算?

1969年德国数学家Strassen： $n^{2.81}$

Strassen矩阵乘法：基于分治策略的矩阵乘算法

最基本的情况：两个2X2矩阵相乘

1）直接相乘

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C=AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

直接相乘共需要8次乘法和4次加法

2) Strassen的计算方法：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C=AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

令： **P**=$(a_{11}+a_{22})(b_{11}+b_{22})$

Q=$(a_{21}+a_{22})\ b_{11}$

R=$a_{11}\ (b_{12}-b_{22})$

S=$a_{22}\ (b_{21}-b_{11})$

T=$(a_{11}+a_{12})b_{22}$

U=$(a_{11}-a_{21})\ (b_{11}+b_{12})$

V=$(a_{12}-a_{22})\ (b_{21}+b_{22})$

则，

c_{11} = **P+S-T+V** = $(a_{11}+a_{22})(b_{11}+b_{22}) + a_{22}\ (b_{21}-b_{11})$
$-(a_{11}+a_{12})b_{22}+(a_{12}-a_{22})\ (b_{21}+b_{22})$
$\equiv a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$

c_{12} = **R+T** $\equiv a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$

c_{21} = **Q+S** $\equiv a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$

c_{22} = **P+R-Q-U** $\equiv a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

乘法次数：7次

加（减）法次数：18次

Strassen计算方法的分析:

令： $P=(a_{11}+a_{22})(b_{11}+b_{22})$

$Q=(a_{21}+a_{22})\ b_{11}$

$R=a_{11}\ (b_{12}-b_{22})$

$S=a_{22}\ (b_{21}-b_{11})$

$T=(a_{11}+a_{12})b_{22}$

$U=(a_{11}-a_{21})\ (b_{11}+b_{12})$

$V=(a_{12}-a_{22})\ (b_{21}+b_{22})$

则，

$c_{11}=P+S-T+V$

$c_{12}=R+T$

$c_{21}=Q+S$

$c_{22}=P+R-Q-U$

计算量分析：

- 乘法次数：7次
- 加（减）法次数：18次

特点：

- 增加了加（减）法的计算次数，减少了乘法的计算次数。

带来的改进：

- 直观上，在用程序完成的计算中，通常认为乘法运算比加法运算需要更多的时间，Strassen矩阵乘通过减少乘法计算量、适当增加加法计算量，从总体上减少矩阵乘的运算时间。
- **理论上到底能减少多少呢?**

矩阵乘的**分治思路**

- 设 n = 2^k ，两个n阶方阵为

$$A = (a_{ij})_{nxn}$$

$$B = (b_{ij})_{nxn}$$

(注：若$n \neq 2^k$ ，可通过在A和B中补0使之变成阶是2的幂的方阵)

首先，将A和B分成4个(n/2)x(n/2)的子矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

方法1：朴素的分治思想 —— 简单的矩阵分块相乘

$$C = AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

共有：8次(n/2)x(n/2) 矩阵乘

4次(n/2)x(n/2) 矩阵加

注：**任意两个子矩阵块的乘可以沿用同样的规则**：如果子矩阵的阶大于2，则将子矩阵分成更小的子矩阵，直到每个子矩阵只含一个元素为止。从而构造出一个递归计算过程。

简单矩阵分块相乘的时间分析：

令T(n)表示两个n×n矩阵相乘的计算时间。

则首次分块时，需要：

1) 8次(n/2)×(n/2) 矩阵乘 ⟶ 8T(n/2)

2) 4次(n/2)×(n/2) 矩阵加 ⟶ dn^2

故，

$$T(n)=\begin{cases} b & n \le 2 \\ 8T(n/2)+dn^2 & n > 2 \end{cases}$$

其中，b，d是常数

化简得：$T(n) = O(n^3)$ ⟹ 没有变化

方法2：Strassen矩阵乘的一般方法

令

$P=(A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$

$Q=(A_{21}+A_{22})\ B_{11}$

$R=A_{11}\ (B_{12}-B_{22})$

$S=A_{12}\ (B_{21}-B_{11})$

$T=(A_{11}+A_{12})B_{22}$

$U=(A_{11}-A_{21})\ (B_{11}+B_{12})$

$V=(A_{12}-A_{22})\ (B_{21}+B_{22})$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

则，

$C_{11}=P+S-T+V$

$C_{12}=R+T$

$C_{21}=Q+S$

$C_{22}=P+R-Q-U$

计算量：

(n/2)x(n/2) 矩阵乘法：7次

(n/2)x(n/2) 矩阵加法：18次

注：Strassen矩阵乘也是一个递归求解过程， 任意两个子矩阵块的乘可以沿用同样的规则进行。

Strassen矩阵乘法的计算复杂度分析

令T(n)表示两个$n=2^k$阶矩阵的Strassen矩阵乘所需的计算时间，则有：

$$T(n)=\begin{cases} b & n\le 2 \\ 7T(n/2)+an^2 & n>2 \end{cases}$$ 其中， a和b是常数

化简：$T(n)=an^2(1+7/4+(7/4)^2+\ldots+(7/4)^{k-1})+7^kT(1)$

$\le cn^2(7/4)^{\log n}+7^{\log n}$

$=cn^2n^{\log(7/4)}+n^{\log 7}$

$=cn^{\log 4+\log 7-\log 4}+n^{\log 7}$

$=(c+1)n^{\log 7}$

$=O(n^{\log 7})\approx O(n^{2.81})$

这里，k=log*n*

Strassen矩阵乘法是通过递归实现的，C++实现代码如下：

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 6;    //Define the size of the Matrix

template<typename T>
void Strassen(int n, T A[][N], T B[][N], T C[][N]);

template<typename T>
void input(int n, T p[][N]);

template<typename T>
void output(int n, T C[][N]);

int main() {
   //Define three Matrices
   int A[N][N],B[N][N],C[N][N];

   //对A和B矩阵赋值，随便赋值都可以，测试用
   for(int i=0; i<N; i++) {
     for(int j=0; j<N; j++) {
        A[i][j] = i * j;
        B[i][j] = i * j;
     }
   }

   //调用Strassen方法实现C=A*B
   Strassen(N, A, B, C);

   //输出矩阵C中值
   output(N, C);

   system("pause");
   return 0;
}

/**The Input Function of Matrix*/
template<typename T>
void input(int n, T p[][N]) {
    for(int i=0; i<n; i++) {
      cout<<"Please Input Line "<<i+1<<endl;
      for(int j=0; j<n; j++) {
        cin>>p[i][j];
      }
    }
}

/**The Output Fanction of Matrix*/
template<typename T>
void output(int n, T C[][N]) {
    cout<<"The Output Matrix is :"<<endl;
    for(int i=0; i<n; i++) {
      for(int j=0; j<n; j++) {
        cout<<C[i][j]<<" "<<endl;
      }
    }
}

/**Matrix Multiplication as the normal algorithm*/
template<typename T>
void Matrix_Multiply(T A[][N], T B[][N], T C[][N]) {  //Calculating A*B->C
    for(int i=0; i<2; i++) {
      for(int j=0; j<2; j++) {
        C[i][j] = 0;
        for(int t=0; t<2; t++) {
          C[i][j] = C[i][j] + A[i][t]*B[t][j];
        }
      }
    }
}

/**Matrix Addition*/
template <typename T>
void Matrix_Add(int n, T X[][N], T Y[][N], T Z[][N]) {
    for(int i=0; i<n; i++) {
      for(int j=0; j<n; j++) {
        Z[i][j] = X[i][j] + Y[i][j];
      }
    }
}

/**Matrix Subtraction*/
template <typename T>
void Matrix_Sub(int n, T X[][N], T Y[][N], T Z[][N]) {
    for(int i=0; i<n; i++) {
      for(int j=0; j<n; j++) {
        Z[i][j] = X[i][j] - Y[i][j];
      }
    }
}

/**
* 参数n指定矩阵A,B,C的阶数，因为随着递归调用Strassen函数
* 矩阵A,B,C的阶数是递减的N只是预留足够空间而已
*/
template <typename T>
void Strassen(int n, T A[][N], T B[][N], T C[][N]) {
    T A11[N][N], A12[N][N], A21[N][N], A22[N][N];
    T B11[N][N], B12[N][N], B21[N][N], B22[N][N];
    T C11[N][N], C12[N][N], C21[N][N], C22[N][N];
    T M1[N][N], M2[N][N], M3[N][N], M4[N][N], M5[N][N], M6[N][N], M7[N][N];
    T AA[N][N], BB[N][N];

    if(n == 2) {  //2-order
      Matrix_Multiply(A, B, C);
    } else {
      //将矩阵A和B分成阶数相同的四个子矩阵，即分治思想。
      for(int i=0; i<n/2; i++) {
        for(int j=0; j<n/2; j++) {
          A11[i][j] = A[i][j];
          A12[i][j] = A[i][j+n/2];
          A21[i][j] = A[i+n/2][j];
          A22[i][j] = A[i+n/2][j+n/2];

          B11[i][j] = B[i][j];
          B12[i][j] = B[i][j+n/2];
          B21[i][j] = B[i+n/2][j];
          B22[i][j] = B[i+n/2][j+n/2];
        }
      }

      //Calculate M1 = (A0 + A3) × (B0 + B3)
      Matrix_Add(n/2, A11, A22, AA);
      Matrix_Add(n/2, B11, B22, BB);
      Strassen(n/2, AA, BB, M1);

      //Calculate M2 = (A2 + A3) × B0
      Matrix_Add(n/2, A21, A22, AA);
      Strassen(n/2, AA, B11, M2);

      //Calculate M3 = A0 × (B1 - B3)
      Matrix_Sub(n/2, B12, B22, BB);
      Strassen(n/2, A11, BB, M3);

      //Calculate M4 = A3 × (B2 - B0)
      Matrix_Sub(n/2, B21, B11, BB);
      Strassen(n/2, A22, BB, M4);

      //Calculate M5 = (A0 + A1) × B3
      Matrix_Add(n/2, A11, A12, AA);
      Strassen(n/2, AA, B22, M5);

      //Calculate M6 = (A2 - A0) × (B0 + B1)
      Matrix_Sub(n/2, A21, A11, AA);
      Matrix_Add(n/2, B11, B12, BB);
      Strassen(n/2, AA, BB, M6);

      //Calculate M7 = (A1 - A3) × (B2 + B3)
      Matrix_Sub(n/2, A12, A22, AA);
      Matrix_Add(n/2, B21, B22, BB);
      Strassen(n/2, AA, BB, M7);

      //Calculate C0 = M1 + M4 - M5 + M7
      Matrix_Add(n/2, M1, M4, AA);
      Matrix_Sub(n/2, M7, M5, BB);
      Matrix_Add(n/2, AA, BB, C11);

      //Calculate C1 = M3 + M5
      Matrix_Add(n/2, M3, M5, C12);

      //Calculate C2 = M2 + M4
      Matrix_Add(n/2, M2, M4, C21);

      //Calculate C3 = M1 - M2 + M3 + M6
      Matrix_Sub(n/2, M1, M2, AA);
      Matrix_Add(n/2, M3, M6, BB);
      Matrix_Add(n/2, AA, BB, C22);

      //Set the result to C[][N]
      for(int i=0; i<n/2; i++) {
        for(int j=0; j<n/2; j++) {
          C[i][j] = C11[i][j];
          C[i][j+n/2] = C12[i][j];
          C[i+n/2][j] = C21[i][j];
          C[i+n/2][j+n/2] = C22[i][j];
        }
      }
    }
}
```

- Strassen算法的发表（1969年）引起很大的轰动。
- 但从实用的角度看，Strassen算法并不是解决矩阵乘法的最好选择：

  （1）隐藏在Strassen算法运行时间$\Theta(n^{\log 7})$中的常数因子比直接过程的$\Theta(n^3)$的常数因子大。

  （2）对于稀疏矩阵，有更快的专用算法可用。

  （3）Strassen算法的数值稳定性不如直接过程，其计算过程中引起的误差积累比直接过程大。

  （4）递归过程生成的子矩阵会消耗更多的存储空间。
- 不断地在改进。见P63的分析讨论。
- 目前已知的n×n矩阵乘的最优时间是$O(n^{2.376})$

4.3 求解递归式

分治和递归是“**一对好兄弟**”。

- 分治的基本思想是递归策略
- 分治算法形式上是一个递归计算过程
- 分治算法的时间分析通常用递归关系式进行推导

设原始问题的规模为n，之后被分解为两个子问题，子问题的规模分别n_1和n_2。

用T(n)表示对规模为n的问题进行求解的时间，则规模分别为n_1和n_2的子问题的求解时间可表示为$T(n_1)$和$T(n_2)$。

- **一般，T(n)和$T(n_1)$、$T(n_2)$的关系可表示为**

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + f(n)$$

对子问题递归求解花费的时间

计算过程中，除递归求解子问题以外，其它必要处理所花费的时间

◆如果$n_1 = n_2 \approx n/2$，则T(n)可表示为：

$$T(n) = 2T(n/2) + f(n)$$

如 **归并排序**： $T(n) = 2T(n/2) + cn$

或如 **二分查找**： $T(n) = T(n/2) + 1$

- **分治算法的计算时间表达式往往是递归式。**
- 那么如何化简递归式，以得到形式简单的限界函数?

介绍三种常用的递归式求解方法:

- 代换法
- 递归树法
- 主方法

注：递归式求解的目标是得到形式简单的渐近限界函数表示

(即用O、Ω、Θ表示的函数式）。

预处理——对表达式细节的简化

为便于处理，通常做如下假设和简化处理

(1) **运行时间函数T(n)的定义中，一般假定自变量n为正整数。**

- 因为这样的n通常表示数据的个数。

(2) **忽略递归式的边界条件，即n较小时函数值的表示。**

- 原因在于，虽然递归式的解会随着T(1)值的改变而改变，但此改变不会超过常数因子，对函数的阶没有根本影响。

(3) 对上取整、下取整运算做合理简化

如:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + f(n)$$

通常忽略上、下取整函数，可写为以下简单形式:

$$T(n) = 2T(n/2) + f(n)$$

1) 代换法(The substitution method for solving recurrences)

用代换法解递归式基本思想：

先猜测解的形式，然后用数学归纳法验证猜测的正确性。

此时，用猜测的解作为归纳假设，在推论证明时作为较小值代入函数（因此得名“代换法”），然后证明推论的正确性。

- 用代换法解递归式的步骤：

(1) 猜测解的形式

(2) 用数学归纳法证明猜测的正确性

例：用代换法确定下式的上界

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

怎么猜?

该式与 $T(n) = 2T(n/2) + n$ 类似，故猜测其解为

$$T(n) = O(n\log n)$$

代入法要证明的是：如何恰当选择常数c，使得 $T(n) \le cn\log n$ 成立?

所以现在设法证明： $T(n) \le cn\log n$，并**确定常数c的存在**。

证明：

假设该界对$\lfloor n/2 \rfloor$成立，即$T(\lfloor n/2 \rfloor) \le c\lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)$，

则在数学归纳法推论证明阶段对递归式做代换，有：

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le 2(c\lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\
&\le cn\log(n/2) + n && \text{去掉底函数} \\
&= cn\log n - cn\log 2 + n && \text{对数运算} \\
&= cn\log n - (c-1)n && \text{化简结果}
\end{aligned}
$$

故，要使**T(n)≤cnlogn**成立，只要c≥1就可以，这样的c是合理存在的。

上面的过程证明了当n足够大时猜测的正确性，但对边界值是否成立呢?

也就是： ***T(n)≤cnlogn* 的结论对于较小的n成立吗?**

分析：事实上，对n=1，上述结论存在问题：

（1）作为边界条件，我们有理由假设**T(1)=1**；

（2）但对n=1，带入表达式有：**T(1)≤c•1•log1=0**，

与T(1)=1不相符。

归纳证明的基础不成立，怎么处理?

- 从n_0的性质出发：只需要存在常数n_0，使得$n \geq n_0$时结论成立即可，所以**n_0不一定取1**。

所以，这里不取$n_0=1$，而取$n_0=2$，用T(2)、T(3)代替T(1)作为归纳证明中的边界条件：

（1）依然合理地假设T(1) =1。

（2）研究什么样的c使得T(2)、T(3)可以满足T(n)≤cnlogn。

(即使得 T(2)≤2clog2　且 T(3)≤3clog3 成立)

- 将T(1)=1带入递归式，有：T(2) = 4，T(3)=5
- 要使 T(2)≤2**c**log2 和T(3)≤3**c**log3 成立，只要c≥2即可。
- 综上所述，取常数**c≥2**，结论T(n)≤cnlogn成立。

  命题得证。

$$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$$

如何猜测递归式的解呢?

遗憾的是，并不存在通用的方法来猜测递归式的正确解。

1）主要靠经验

- 尝试1：看有没有形式上类似的表达式，以此推测新递归式解的形式。
- 尝试2：先猜测一个较宽的界，然后再缩小不确定范围，逐步收缩到紧确的渐近界。
- **避免盲目推测**

如：对 $T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$ 猜测有 T(n)=O(n)

似乎有 $T(n)\le 2(c\lfloor n/2 \rfloor)+n\le cn+n=\mathrm{O}(n)$ 成立

但是错误，原因：并未证出一般形式T(n)≤cn成立（cn+n≮cn）

必要的时候要做一些技术处理

1）去掉一个低阶项：见书上的例子

2）变量代换：对陌生的递归式做些简单的代数变换，使之变成较熟悉的形式。

例：设有递归式 $T(n) \leq 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$

分析：原始形态比较复杂

(1) **做代数代换**：令 $m = \log n$，则n=2^m, $\sqrt{n} = 2^{m/2}$

(2) **忽略下取整**，直接使用$\sqrt{n}$ 代替 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

得：

$$T(2^m) \leq 2T(2^{m/2}) + m$$

$T(2^m) \le 2T(2^{m/2}) + m$

再设 **S(m) = T(2^m)**，得以下形式递归式：

$$S(m) \le 2S(m/2) + m$$

从而获得**形式上熟悉**的递归式。

根据前面的一些讨论，可得新的递归式的上界是：

$$O(m \log m)$$

再**将S(m)、m=log*n* 带回T(n)**，有，

$$\begin{aligned} T(n) &= T(2^m) \\ &= S(m) = O(m \log m) \\ &= O(\log n \log \log n) \end{aligned}$$

这里，$m = \log n$

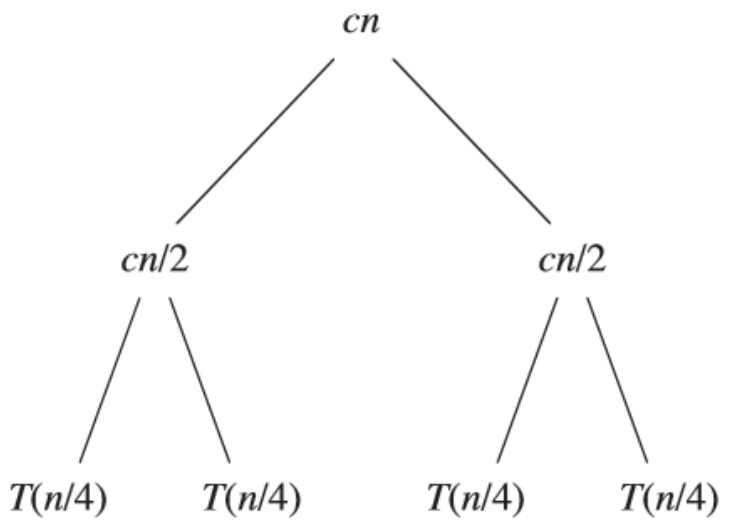
2）递归树法(The recursion-tree method for solving recurrences)

- 根据递归式的定义，可以画一棵递归树

目的：来帮助我们猜测递归式的解。

- 递归树：反应递归的执行过程。每个节点表示一个单一子问题的代价，子问题对应某次递归调用。根节点代表顶层调用的代价，子节点分别代表各层递归调用的代价。

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{if } n > 1 \end{cases}$$



基于递归树的时间分析

节点代价：在递归树中，每个节点有求解相应（子）问题的代价(cost，这里指除递归以外的其它代价)。

层代价：每一层各节点代价的和。

总代价：整棵树的各层代价之和

目　　标：利用树的性质，获取对递归式解的猜测，然后用代换法或其它方法加以验证。

例：已知递归式 $T(n)=3T(\lfloor n/4 \rfloor)+\Theta(n^2)$，求其上界

准备性工作：为简单起见，对一些细节做必要、合理的简化和假设，这里为：

(1) **去掉底函数的表示**

- 理由：底函数和顶函数对递归式求解并不“重要”。

(2) **假设n是4的幂**，即$n=4^k$，$k=\log_4 n$。

- 一般，当证明$n=4^k$成立后，再加以适当推广，就可以把结论推广到n不是4的幂的一般情况了。

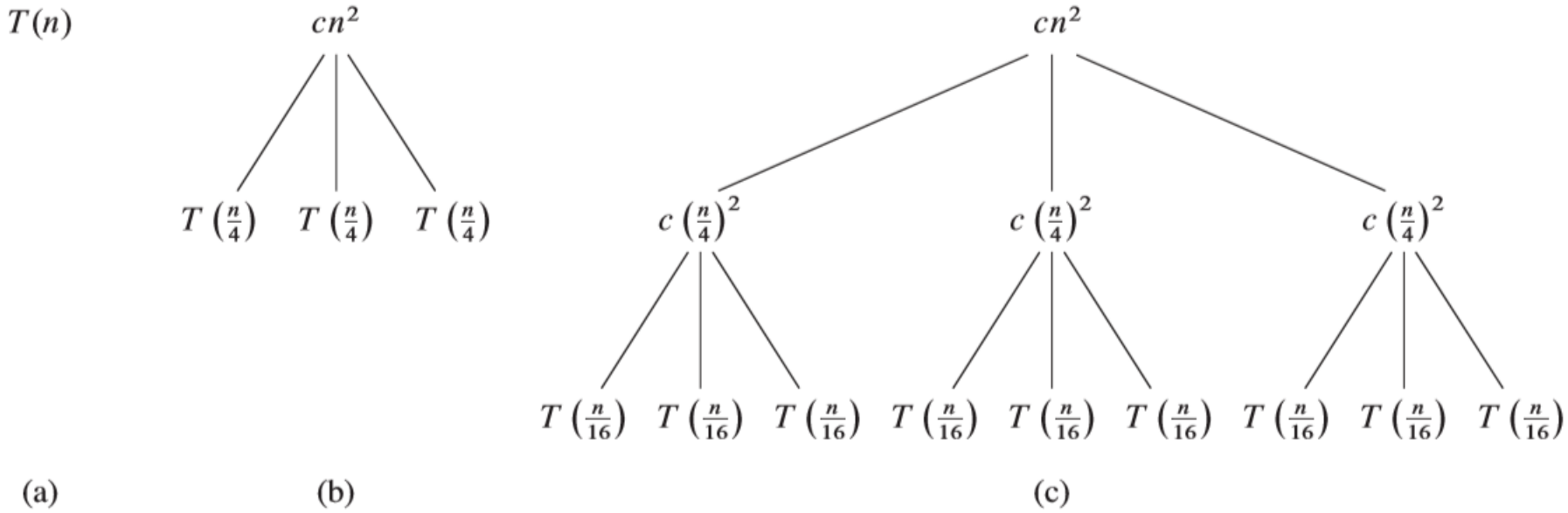
(3) **展开** $\Theta(n^2)$，代表递归式中非重要项。

- 假设其常系数为c，$c>0$，从而去掉 Θ 符号，转变成cn^2的形式，便于后续的公式化简。

最终得以下形式的递归式：$T(n)=3T(n/4)+cn^2$

$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$$

用递归树描述T(n)的演化过程:

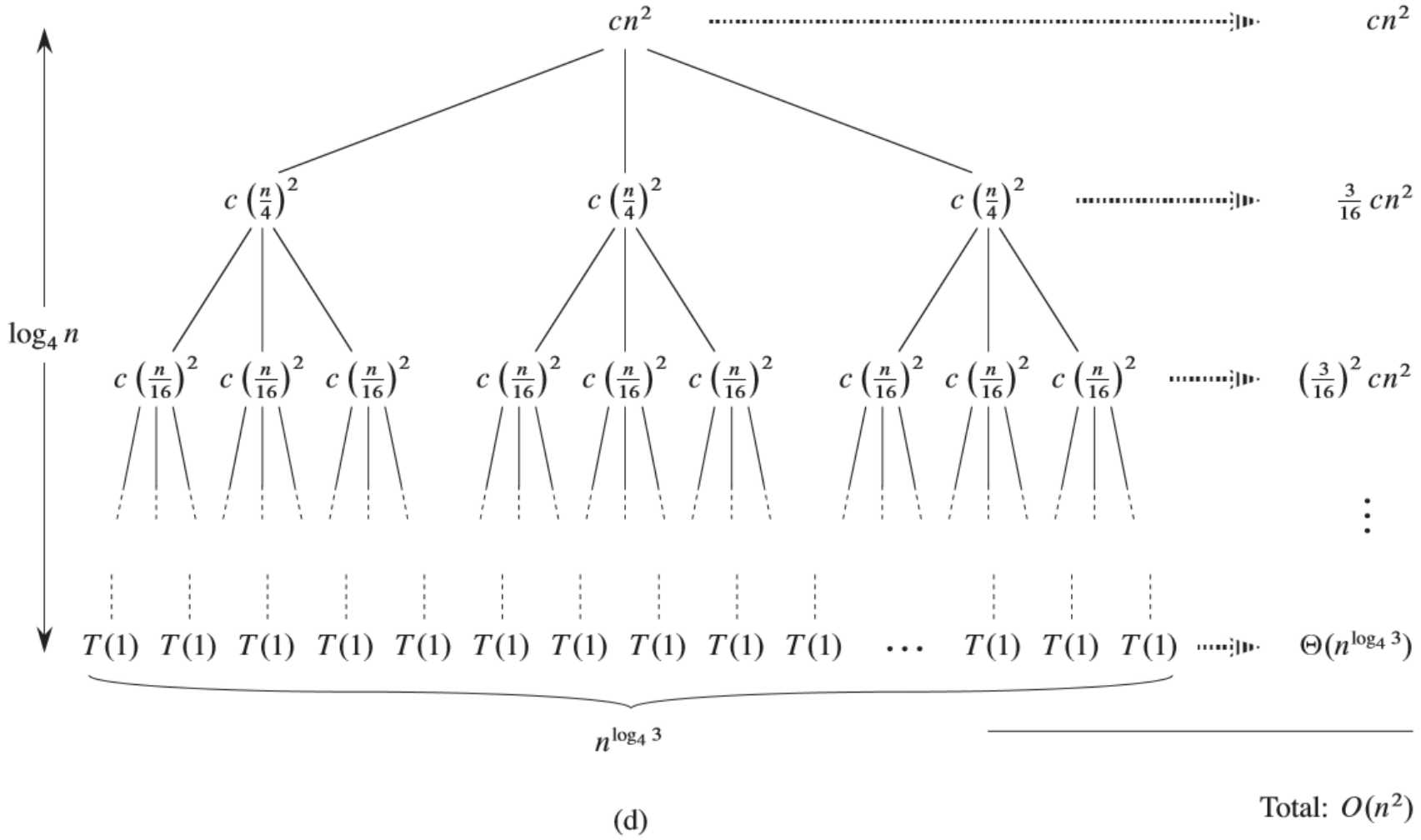


a) 对原始问题T(n)的描述。

b) 第一层递归调用的分解情况，cn^2是顶层计算除递归以外的代价，T(n/4)是分解出来的规模为n/4的子问题的代价，总代价$T(n)=3T(n/4)+cn^2$。

c) 第二层递归调用的分解情况。$c(n/4)^2$是三棵二级子树除递归以外的代价。

继续扩展下去，直到递归的最底层，得到如下形式的递归树：



(d)

d) 完全扩展的递归树，**递归树高度为$\log_4 n$(共有$\log_4 n+1$层)**

树的深度：子问题的规模按1/4的方式减小，在递归树中，

深度为i的节点，子问题的大小为$n/4^i$。

当**$n/4^i=1$**时，子问题规模仅为1，达到边界值。

所以，

- 节点分布层：$0\sim\log_4 n$
- 树共有$\log_4 n+1$层
- 从第2层起，每一层上的节点数为上层节点数的3倍
- 深度为i的层节点数为3^i。

代价计算

(1) **内部节点**：位于0~$\log_4 n-1$层

深度为i的节点的局部代价为 $c(n/4^i)^2$，

i层节点的总代价为：$3^i c(n/4^i)^2 = (3/16)^i cn^2$ 。

(2) **叶子节点**：位于$\log_4 n$层，共有$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ 个，

每个叶子节点的代价为T(1),

叶子节点总代价为 $n^{\log_4 3}T(1) = \Theta(n^{\log_4 3})$

(3) 树的总代价

整棵树的总代价等于各层代价之和，则有

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2 cn^2 + \ldots\ldots + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

利用等比数列化简上式。

- 对于实数x≠1，和式 $\sum_{k=0}^{n} X^k = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$ 是一个几何级数（等比数列），其值为 $\sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}$
- 当和是无穷的且|x|<1时，得到无穷递减几何级数，此时

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k = \frac{1}{1 - X}$$

T(n)中，cn^2项的系数构成一个递减的几何级数。

将T(n)扩展到无穷，即有

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{1}{1-(3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

至此，获得T(n)解的一个猜测：$T(n)=O(n^2)$，成立吗?

用代换法证明猜测的正确：

- 将T(n)≤dn²作为归纳假设，d是待确定的常数，带入推论证明过程，有

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) \\
&\le 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \le 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\
&\le 3d(n/4)^2 + cn^2 \\
&= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2
\end{aligned}
$$

c是引入的另一个常量

显然，要使得T(n)≤dn²成立，只要d≥(16/13)c即可。所以，T(n)≤dn²的猜测成立。

定理得证（边界条件的讨论略）。

另： O(n²)是T(n)的一个紧确界，为什么？

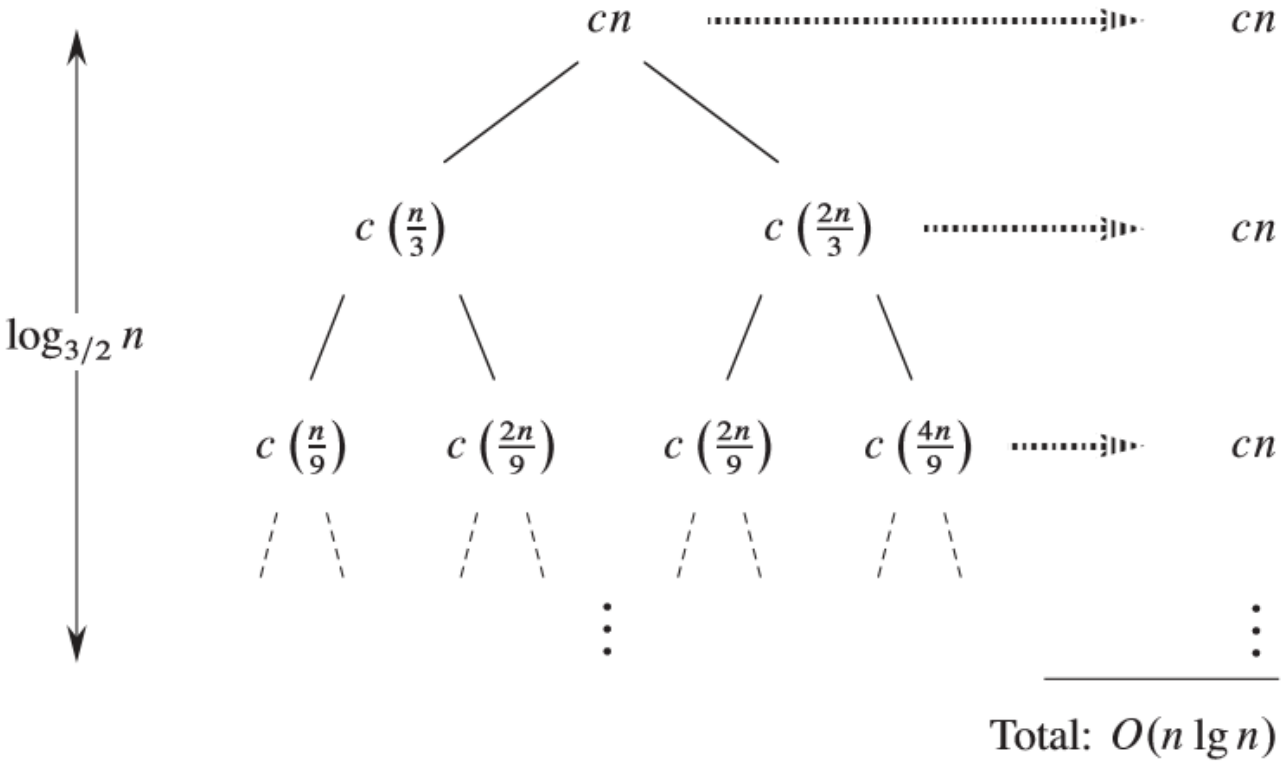
例 求表达式 $T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+O(n)$ 的上界

（这里，表达式中直接省略了下取整和上取整函数）

进一步地，**引入常数c**，展开O(n)，得：

$$T(n) \le T(n/3) + T(2n/3) + cn$$

递归树为：



分析：

- **该树并不是一个完全的二叉树。**
  - 从根往下，越来越多的内节点在左侧消失(1/3分叉上)，因此每层的代价并不都是cn，而是**≤cn的某个值**。
- **树的深度**：
  - 在上述形态中，最长的路径是最右侧路径，由

$$n \rightarrow (2/3)n \rightarrow (2/3)^2 n \rightarrow \ldots \rightarrow 1$$

组成。

  - 当$\mathbf{k=\log_{3/2} n}$时，$(3/2)^k/n=1$，所以树的深度为$\mathbf{\log_{3/2} n}$。

- 递归式解的猜测：
  - 至此，我们可以合理地猜测该树的总代价**至多是层数乘以每层的代价**，并鉴于上面关于层代价的讨论，我们可以假设递归式的上界为：

$$O(cn\log_{3/2}n)=O(n\log n)$$

注：这里，我们假设每层的代价为cn。

事实上，cn为每层代价的上界，这一假设是合理的细节简化处理。

猜测的证明：证明O(nlogn)是递归式的上界

即证明：**T(n)≤dnlog*n***,

d是待确定的合适的正常数

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le T(n/3) + T(2n/3) + cn \\
&\le d(n/3)\log(n/3) + d(2n/3)\log(2n/3) + cn \\
&= (d(n/3)\log n - d(n/3)\log 3) + (d(2n/3)\log n - d(2n/3)\log 3/2)) + cn \\
&= dn\log n - d((n/3)\log 3 + (2n/3)\log(3/2)) + cn \\
&= dn\log n - d((n/3)\log 3 + (2n/3)\log 3 - (2n/3)\log 2) + cn \\
&= dn\log n - dn(\log 3 - 2/3) + cn \le dn\log n
\end{aligned}
$$

成立吗？

上式的成立条件：$d \ge c/(\log 3 - (2/3))$，**存在！**

∴ 猜测正确，递归式解得证。

3）主方法（The master method for solving recurrences）

如果递归式有如下形式，在满足一定的条件下，可以用**主方法**直接给出渐近界：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中，a、b是常数，且a≥1，b>1；f(n)是一个渐近正的函数。

上式给出了算法总代价与子问题代价之间的关系，含义为：

规模为n的原问题被分为a个子问题，每个子问题的规模是n/b。T(n)表示原始问题的时间，则每个子问题的时间为T(n/b)；问题分解及子问题解合并及其它有关运算的代价由函数f(n)描述。

注：这里采用了细节的简化，没有考虑n/b的取整问题，省略了下取整、上取整，但本质上不影响对递归式渐近行为的分析。

对上述形式的递归式渐近界的求解可用称之为“主定理”的结论给出的。

定理2.1 主定理

设a≥1和b>1为常数，设f(n)为一函数，T(n)是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中n/b指$\lfloor n/b \rfloor$或$\lceil n/b \rceil$。

则T(n)可能有如下的渐近界：

1）若对于某常数ε>0，有 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2）若$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3）若对某常数ε>0，有$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$，且对常数c<1与所有足够大的n，有 $af(n/b) \le cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$。

理解主定理:

1）T(n)的解似乎与f(n)和 $n^{\log_b a}$ 有“密切关联”：

f(n)和 $n^{\log_b a}$ 比较，T(n)取了其中较大的一个。

如：第一种情况，函数 $n^{\log_b a}$ 比较大，所以 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

第三种情况，函数f(n) 比较大，所以 $T(n)=\Theta(f(n))$

第二种情况，两个函数一样大，则乘以对数因子，得

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$$

2) 在第一种情况中，f(n)要**多项式**地小于 $n^{\log_b a}$ 。即，对某个常量ε>0，f(n)必须渐近地小于 $n^{\log_b a}$，两者相差了一个 n^{ε} 因子。

3) 在第三种情况中，f(n)不仅要大于 $n^{\log_b a}$，而且要多项式地大于 $n^{\log_b a}$，还要满足一个“规则性”条件 $af(n/b) \le cf(n)$ 。

4) 若递归式中的f(n)与 $n^{\log_b a}$ 的关系不满足上述性质：

- f(n)小于等于 $n^{\log_b a}$，但不是多项式地小于。
- f(n)大于等于 $n^{\log_b a}$，但不是多项式地大于。

则不能用主方法求解该递归式。

使用主方法：分析递归式满足主定理的哪种情形，即可得到解（无需证明，保证正确）。

例2.6 解递归式 $T(n)=9T(n/3)+n$

分析：这里，a=9，b=3，f(n)=n。

则 $n^{\log_b a}=n^{\log_3 9}=\Theta(n^2)$ 。

因为 $f(n)=n=O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$ ，其中取ε=1，

所以对应主定理的第一种情况。

于是有： $T(n)=O(n^2)$

例2.7 解递归式 $T(n) = T(2n/3) + 1$

分析：这里，a=1，b=3/2，f(n)=1，因此有

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

且有

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$$

故主定理第二种情况成立，即 T(n)=Θ(log*n*)

例2.8 解递归式 $T(n)=3T(n/4)+n\log n$

分析：这里，a=3，b=4，f(n)=nlog$n$,

$$n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}=O(n^{0.793})$$

故，$f(n)=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$ 成立，其中可取ε≈0.2。

同时，对足够大的n，

$$af(n/b)=3(n/4)\log(n/4)\le(3/4)n\log n=cf(n)$$

其中，**c = 3/4**。

所以第三种情况成立，**T(n) = Θ(nlogn)**。

例2.9 递归式 $T(n)=2T(n/2)+n\log n$ 不能用主方法求解

分析：这里，a=2，b=2，

$$n^{\log_b a}=n^{\log_2 2}=O(n)$$

且，f(n)=nlog$n$ 渐进大于 $n^{\log_b a}$

第三种情况成立吗？

$n^x (\log n)^y < n^{x+\varepsilon}$

事实上不成立，因为对于任意正常数ε，

$$f(n)/n^{\log_b a}=(n\log n)/n=\log n<n^{\varepsilon}$$

不满足 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

注：要想 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$，应有 $f(n)/n^{\log_b a}>n^{\varepsilon}$。

因此该递归式落在情况二和情况三之间，条件不成立，不能用主定理求解。

4.6 证明主定理

为什么主定理是正确的?

主定理证明：（略，P55）

注：在使用主定理时不用再证明其正确性。

还有没有其它方法化简递归式?

4）直接化简

根据递推关系，展开递推式，找出各项系数的构造规律(如等差、等比等），最后得出化简式的最终形式。

如：$T(n)=2T(n/2)+2$

$=2(2T(n/2^2)+2)+2$

$=2^2T(n/2^2)+2^2+2$

…

$=2^{k-1}T(2)+\sum_{1\le i\le k-1}2^i$

$=2^{k-1}+2^k-2$

$=3n/2-2$

例：化简递归式 $T(n)=2T(n/2)+n\log n$

$$
\begin{aligned}
&T(n)=2T(n/2)+n\log n\\
&=2(2T(n/4)+(n/2)\log(n/2))+n\log n\\
&=2^2T(n/2^2)+n\log n-n+n\log n\\
&=2^2T(n/2^2)+2n\log n-n\\
&=2^2(2T(n/2^3)+(n/4)\log(n/4))+2n\log n-n\\
&=2^3T(n/2^3)+n\log n-2n+2n\log n-n\\
&=2^3T(n/2^3)+3n\log n-2n-n\\
&=\ldots\\
&=2^kT(n/2^k)+kn\log n-n\sum_{i=1}^{k-1}i\\
&=n+kn\log n-n(k-1)k/2\\
&=n+n\log^2 n-(n/2)\log^2 n+n\log n/2\\
&=O(n\log^2 n)
\end{aligned}
$$

33.4 最近点对问题

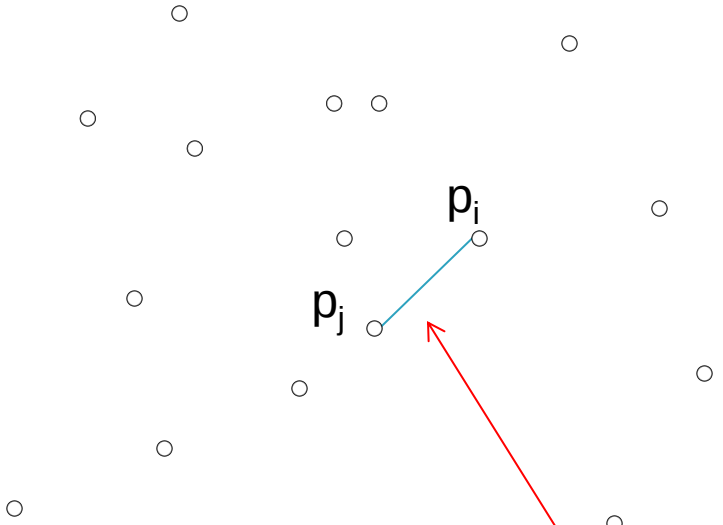
1. 问题描述

已知平面上分布着点集P中的n个点$p_1,p_2,...p_n$，点i的坐标记为(x_i,y_i)，$1 \le i \le n$。两点之间的距离取其欧式距离，记为

$$d(p_i,p_j)=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$$

问题：找出一对距离最近的点。

注：允许两个点位于同一个位置，此时两点之间的距离为0。



平面上分布的点集

$$d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

分析：

一种方法是暴力搜索（全搜索）的方法：对每对点都计算距离，然后比较大小，找出其中的最小者。

该方法的时间复杂度为：

- 计算点间距离： $O(n^2)$，因为共有$C_2^n = n(n-1)/2$对点间的距离要计算。
- 找最小距离：$O(n^2)$，因为需要$n(n-1)/2-1$次比较。

所以，总的时间复杂度：$O(n^2)$。

问：**有没有更好的办法?**

2.求解最近点对问题的分治方法

这里，利用分治法“设计”一个具有**O(nlogn)**时间复杂度的算法求解最近点对问题。

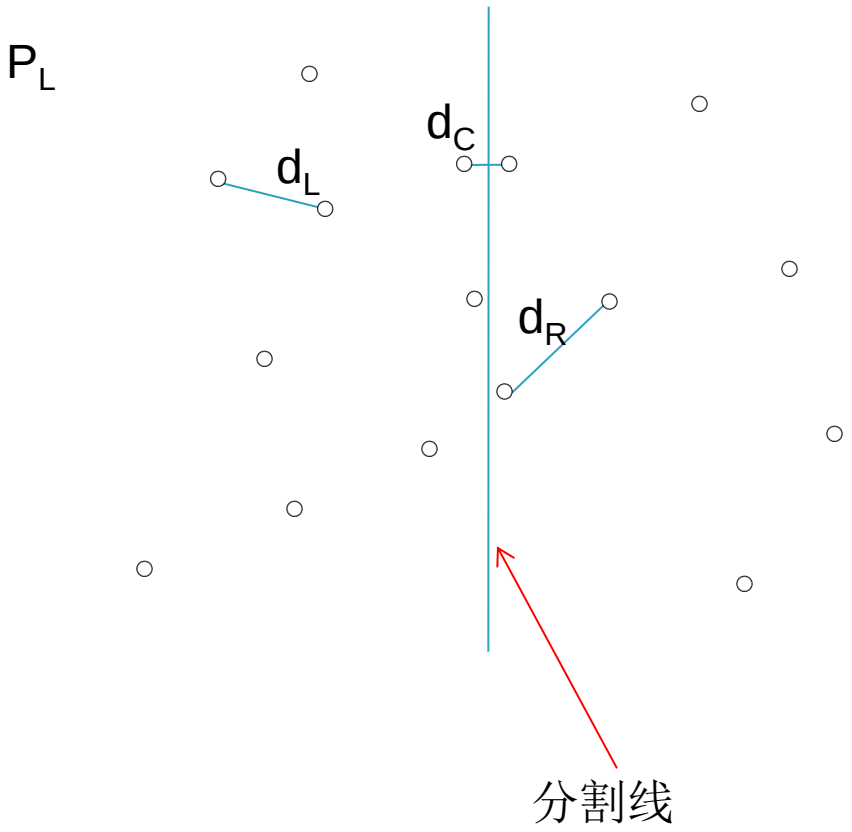
设计策略：分治

1）首先将所有的点按照x坐标排序

排序过程需要O($n$log$n$)的时间，不会从整体上增加时间复杂度的数量级 (加法规则)。

2）划分

由于点已经按x坐标排序，所以空间上可以“想象” 画一条垂线作为分割线，将平面上的点集分成左、右两半P_L和P_R。



记，

d_L: P_L中的最近点对距离

d_R: P_R中的最近点对距离

d_C: 跨越分割线的最近点对距离

则，最近的一对点或者在P_L中，或者在P_R中，或者一个端点在P_L中而另一个在P_R中（跨越分割线）。

建立一个递归过程求d_L和d_R，并在此基础上计算d_C。而且，要使得对d_C的计算至多只能花O(n)的时间。

这样，递归过程将由两个大致相等的一半大小的递归调用和O(n)附加工作组成，总的时间表示为：

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

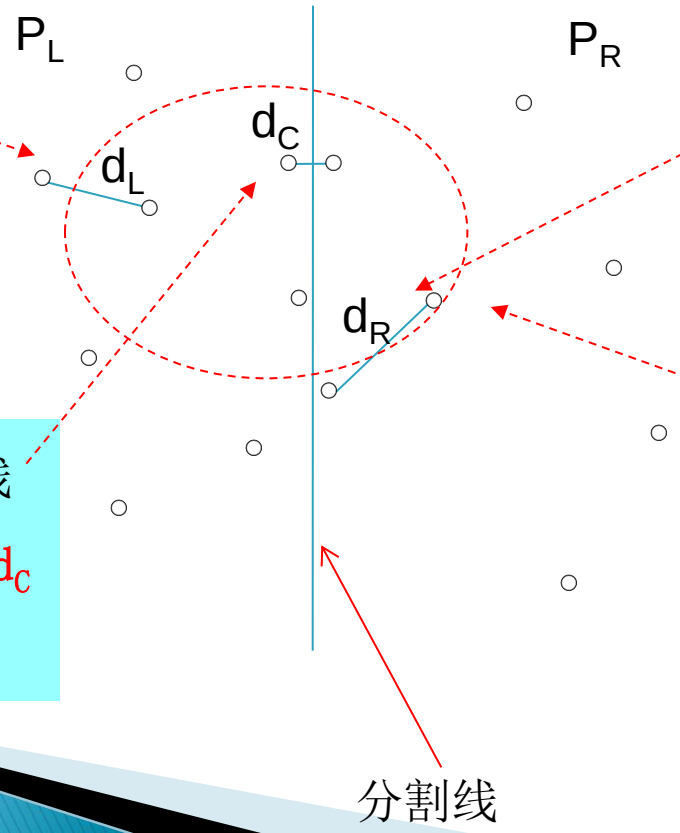
就可以控制在**O(nlogn)**以内。

基于上述思想的算法流程大致描述如下：

(1)做分割线（垂线），
将点集分为P_L和P_R两部分

(2)递归地在P_L中的找具有d_L的点对

(3)递归地在P_R中的找具有d_R的点对

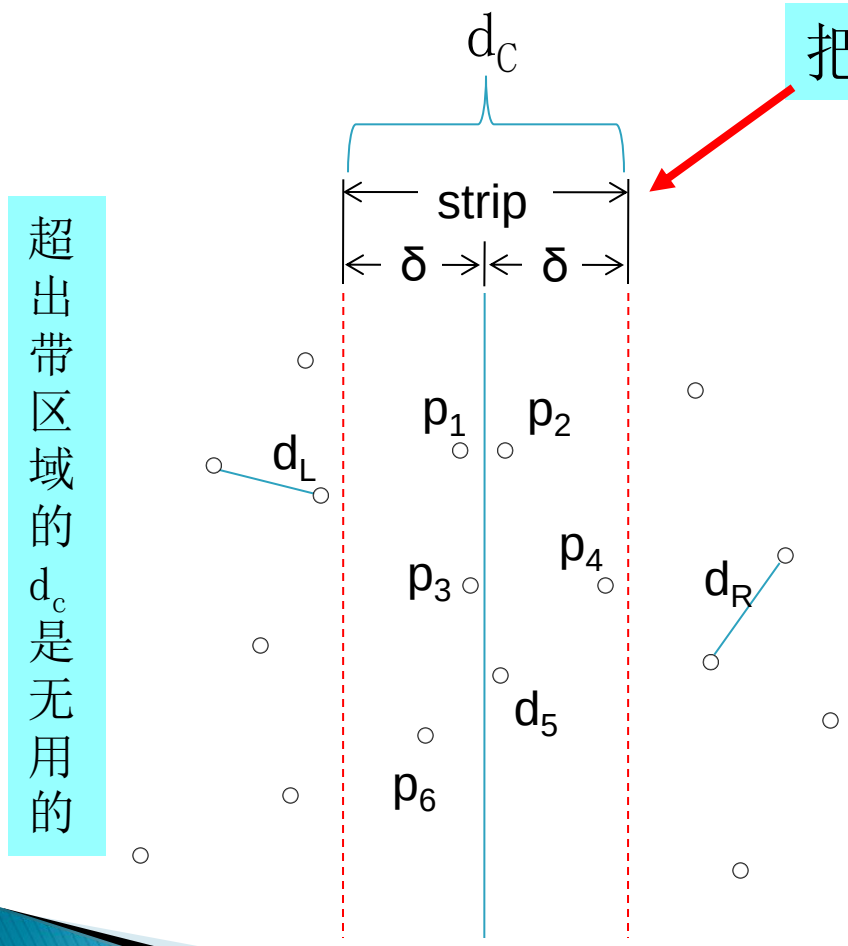


(4)在跨越分割线的点对中找具有d_C的点对

(5)返回$\min(d_L, d_R, d_C)$对应的点对

该如何实现？

令$\delta=\min(d_L,d_R)$，通过观察可得：应有$d_C<\delta$，则d_C对应的点对必然在分割线两侧的δ 距离以内。



把这个区域叫做带(strip)

超出带区域的d_c是无用的

从而，对d_C的搜索只限制在strip区域内，这样就限定了需要考虑的点的个数。

3）计算d_C

方法一：对**均匀分布的大型稀疏点集**

- 可预计位于该带中的点均匀而“稀疏”，
- 个数平均只有$O(\sqrt{n})$个点在这个带中。

因此，可以O(n)的时间计算出这些点对之间的距离。

描述如下：

for i=1 to numPointsInStrip do

for j=i+1 to numPointsInStrip do

if dist(p_i,p_j)<δ

δ = dist(p_i,p_j);

δ在不断的修正中

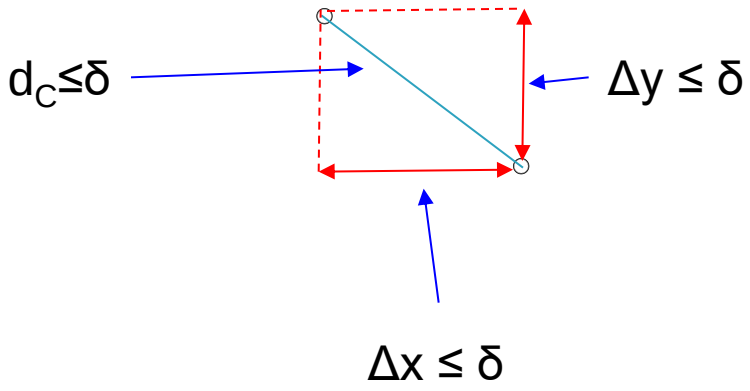
这里，numPointsInStrip = $O(\sqrt{n})$

方法一存在的问题：

在最坏的情况下，所有的点可能都在Strip内。因此，该方法不能总以线性时间运行。

如何改进?

事实上，这样的d_C的两个点的y坐标相差最多也不会大于δ，否则$d_C > \delta$。



计算d_C的改进：

设点也按它们的y坐标排序，从p_i开始向远处（向下）搜索。

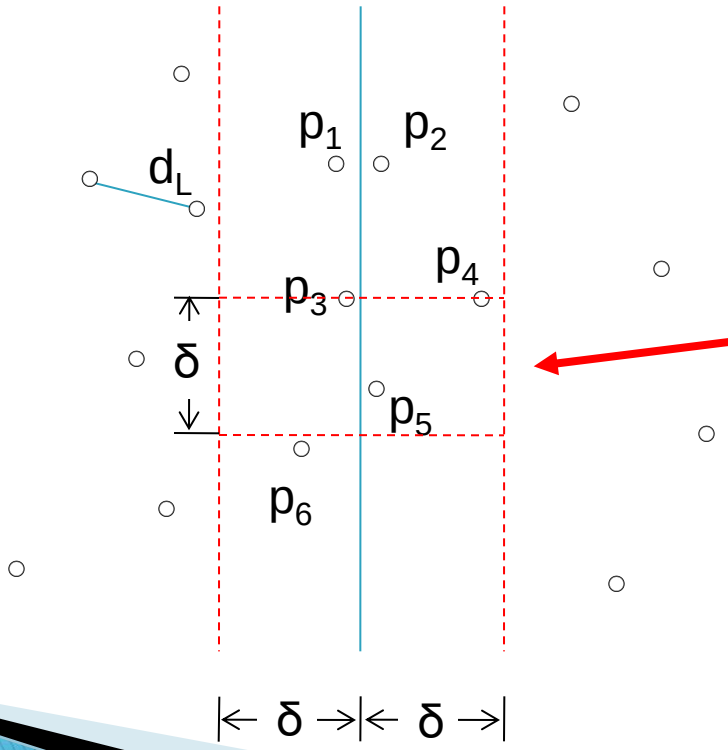
假设搜索到p_j时，p_j与p_i的y坐标相差大于δ，那么对于p_i而言更远的结点就没必要搜索了，转而处理p_i后面的点p_{i+1}。

算法描述如下：

```
for i=1 to numPointsInStrip do
    for j=i+1 to numPointsInStrip do
        if p_i and p_j 's y-coordinates differ by more than δ
            break;
        else if dist(p_i,p_j)<δ        ← Δy< δ
            δ = dist(p_i,p_j);
```

分析：

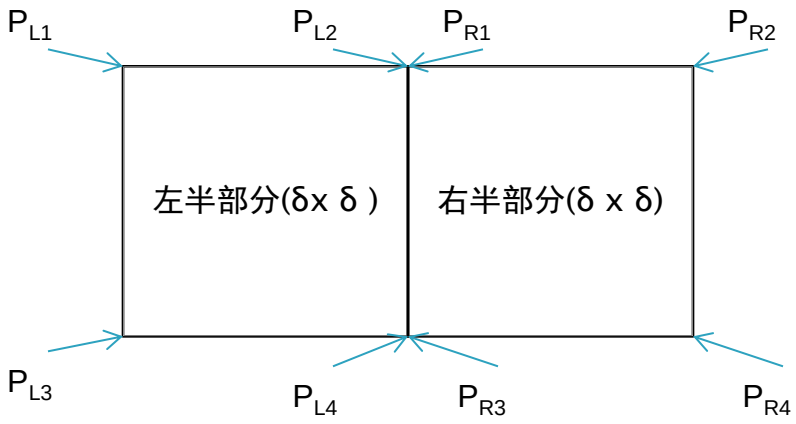
上述改进对运算时间的**影响是显著**的，因为对每一个p_i，在p_i和p_j的y坐标相差大于δ时，就会退出内层循环。这一过程中仅有少数的p_j被考察，大大减少了计算量。如，



对于p_3只有两个点p_4和p_5落在垂直距离δ之内的带状区域中。

一般情况下，对于任意的点p_i，在最坏情况下，最多有7个p_j需要考虑。

- 这是因为，最坏情况下，p_i和p_j点必定落在该带状区域左半部分的δXδ方块内或者右半部分的δXδ方块内。
- 每个方块最多包含4个点，且分别落在四个角上，并且其中一个是p_i，另外7个就是需要考虑的p_j点。如图所示：



这样，对于每个p_i，最多有7个p_j要考虑，也就是**最多计算p_i和另外7个点的距离**，所以对每个p_i，计算时间可看作是O(1)的。

则，计算d_C的时间就为O(n)，即使在最坏的情况下。

于是，可得：最近点对的求解过程由两个一半大小的递归调用加上合并两个结果的线性附加工作组成：

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

那么最近点对问题就可以得到O(nlogn)的解了吗?

还有问题需要讨论：点y坐标的排序问题

问题所在：如果每次递归都要对点的y坐标重新进行排序，则这又要有O(nlogn)的附加工作。

总的时间为

$$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$$

若如此，整个算法的时间复杂度就为$O(n\log^2 n)$。

如何处理?

解决方案：改进对点坐标进行排序的处理方法——**预排序**。

策略：(1) 设置两个表，

- P表：按x坐标对点排序得到的表；
- Q表：按y坐标对点排序得到的表。

这两个表可以在预处理阶段花费O(nlogn)时间得到

(2) 再记，P_L和Q_L是传递给左半部分递归调用的参数表，P_R和Q_R是传递给右半部分递归调用的参数表。

在将P分为P_L和P_R之后，复制Q到Q_L和Q_R中， 然后**删除Q_L和Q_R中不在各自范围内的点**。这一操作花费O(n) 时间即可完成。而此时Q_L和Q_R均已按y坐标排好序。

然后：将P_L、P_R和经上面处理后得到的Q_L、Q_R带入递归过程进行处理，P_L、P_R是按照x坐标排序的点集，Q_L、Q_R是按照y坐标排序的点集。

最后：当递归调用返回时，扫描本级的Q表，**删除其x坐标不在带内的所有点**。此时Q中就只含有带中的点，而且这些点已是按照y坐标排好序了的。这一处理需要O(n)的时间。下一步，对每个p_i，寻找近邻中$\Delta y \le \delta$的p_j即可。

综上所述，所有附加工作的总时间为O(n)，则整个算法的计算时间为

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$
$$= O(n \log n)$$

作业（递归式化简部分）：

(2.4)

(4.1-5)：要求见下一页

(4.3-2) 证明递归式 $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ 的解是O(lg*n*)

(4.3-9) 利用改变变量的方法求解递归式 $T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log n$。得到的解应是紧确的。

(4.4-6) 对递归式 $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$ 利用递归树证其解是 $\Omega(n \log n)$，其中c是一个常数。

(4.5-1) 用主方法来给出下列递归式的紧确渐近界：

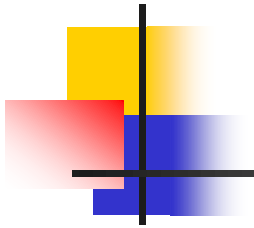
b) $T(n) = 2T(n/4) + n^{1/2}$

d) $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

(4.5-4) 主方法能否应用于递归式$T(n)=4T(n/2)+n^2\log n$?为什么？给出此递归式的渐近上界。

4.1-5要求：阅读4.1-5题面及以下程序，然后写出你对这个算法的理解。

```
MAX-SUBARRAY-LINEAR(A)
  n = A.length
  max-sum = −∞
  ending-here-sum = −∞
  for j = 1 to n
      ending-here-high = j
      if ending-here-sum > 0
          ending-here-sum = ending-here-sum + A[j]
      else ending-here-low = j
          ending-here-sum = A[j]
      if ending-here-sum > max-sum
          max-sum = ending-here-sum
          low = ending-here-low
          high = ending-here-high
  return (low, high, max-sum)
```



- 自学“最近点对问题”

  重点体会：算法是如何确保时间复杂度最终达到O(nlogn)的?

第四章4学时