

1 Линейная регрессия

1.1 Рассмотрим задачу линейной регрессии

$$Q(w) = (y - Xw)^T(y - Xw) \rightarrow \min_w.$$

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$.
2. Выведите формулу для оптимального w .
3. Выведите формулу для матрицы-шляпницы (hat-matrix), связывающей вектор фактических y и вектор прогнозов $\hat{y} = H \cdot y$.

1.2 Рассмотрим задачу регрессии с одним признаком и без константы, $\hat{y}_i = w \cdot x_i$. Решите в явном виде задачи МНК со штрафом:

1. $Q(w) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) + \lambda w^2$;
2. $Q(w) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) + \lambda |w|$;

1.3 Храбрая и торопливая исследовательница Мишель хочет решить задачу линейной регрессии по n наблюдениям с вектором y и матрицей признаков X . Сначала исследовательница Мишель так торопилась, что совсем забыла последнее наблюдение и оценила задачу с более коротким вектором y^- и матрицей X^- , где не хватает последней строки. Затем Мишель взяла правильную матрицу X , но неправильный вектор y^* , в котором она вместо фактического последнего наблюдения вектора y вписала его прогноз, полученный с помощью регрессии с y^{-1} и X^- .

1. Как связаны \hat{y}_n^- и \hat{y}_n^* (прогнозы для последнего наблюдения полученные по модели без последнего наблюдения и модели с неверным последним наблюдением)?
2. Как выглядит вектор, равный разнице $y - y^*$?
3. Какие величины находятся в векторе $H \cdot (y - y^*)$? Чему равна последняя, n -ая, компонента этого вектора? Выразите её через H_{nn} и ошибку прогноза последнего наблюдения по модели без последнего наблюдения, $y_n - \hat{y}_n^-$.
4. Как связаны между собой ошибка прогноза n -го наблюдения по полной модели, ошибка прогноза n -го наблюдения по модели без последнего наблюдения и H_{nn} ?
5. Как быстро провести кросс-валидацию с выкидыванием одного наблюдения для задачи линейной регрессии?

2 Линейные классификаторы

2.1 Рассмотрим плоскость в \mathbb{R}^3 , задаваемую уравнением $5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 10 = 0$ и две точки, $A = (2, 1, 4)$ и $B = (4, 0, 4)$.

1. Найдите любой вектор, перпендикулярный плоскости.
2. Правда ли, что отрезок AB пересекает плоскость?
3. Найдите длину отрезка AB ;
4. Не находя расстояние от точек до плоскости, определите, во сколько раз точка A дальше от плоскости, чем точка B ;
5. Найдите расстояние от точки A до плоскости.

2.2 Рассмотрим простейший персептрон с константой, единственным входом x_1 и пороговой функцией активации. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое отрицание (в ответ на 0 выдавал 1, и наоборот).

2.3 Рассмотрим простейший персептрон с константой, двумя входами x_1, x_2 и пороговой функцией активации.

Здесь ассистенты нарисуют в tikz картинку, достойную стоять вместо Джоконды в Лувре

1. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое ИЛИ (OR).
2. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое И (AND).
3. Докажите, что веса невозможно подобрать так, чтобы персептрон реализовывал исключающее логическое ИЛИ (XOR).
4. Добавьте персептрону вход $x_3 = x_1 \cdot x_2$ и подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал XOR.
5. Реализуйте XOR с помощью трёх персептронов с двумя входами и константой. Укажите веса и схему их взаимосвязей.

2.4 В коробке завалилось три персептрона, у каждого два входа с константой и пороговая функция активации. Реализуйте с их помощью функцию

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 \geq |x_1 - 3| + 2; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

2.5 Рассмотрим следующий набор данных:

x_i	z_i	y_i
-1	-1	0
1	-1	0
-1	1	0
1	1	0
0	2	1
2	0	1
0	-2	1
-2	0	1

1. Существует ли персептрон с константой, двумя входами и пороговой функцией активации, способный идеально классифицировать y_i на данной выборке? А хватит ли двух таких персептронов? А может хватит трёх?
2. Введите такое преобразование исходных признаков $h_i = h(x_i, z_i)$, при котором с идеальной классификацией y_i справился бы даже персептрон с одним входом, константой и пороговой функцией активации.

2.6 Бандерлог из Лога¹ ведёт блог, любит считать логарифмы и оценивать логистические регрессии. С помощью нового алгоритма Бандерлог решил задачу классификации по трём наблюдениям и получил $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$.

y_i	b_i
1	0.7
-1	0.2
-1	0.3

1. Постройте ROC-кривую.
2. Найдите площадь под ROC-кривой и индекс Джини.
3. Постройте PR-кривую (кривая точность-полнота).

¹деревня в Кадуйском районе Вологодской области

4. Найдите площадь под PR-кривой.
5. Как по-английски будет «бревно»?

2.7 Классификатор Бандерлога имеет вид

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i > t; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что площадь под ROC-кривой равна вероятности того, случайно выбранный положительный объект окажется позже случайно выбранного отрицательного объекта, если объекты ранжированы по возрастанию величины b_i .

2.8 Все средние издали выглядят одинаково, среднее $= f^{-1}(0.5f(x_1) + 0.5f(x_2))$. Например, у среднего арифметического $f(t) = t$, у среднего гармонического $f(t) = 1/t$.

1. Какая f используется для среднего геометрического?

Для измерения качества бинарной классификации Ара использует среднее арифметическое точности и полноты, Гена — среднее геометрическое, а Гарик — среднее гармоническое.

2. У кого будут выходить самые «качественные» и самые «некачественные» прогнозы?

2.9 Бандерлог начинает все определения со слов «это доля правильных ответов»:

1. ассигасу — это доля правильных ответов. . .
2. точность (precision) — это доля правильных ответов. . .
3. полнота (recall) — это доля правильных ответов. . .
4. TPR — это доля правильных ответов. . .

Закончите определения Бандерлога так, чтобы они были, хм, правильными.

2.10 Алгоритм бинарной классификации, придуманный Бандерлогом, выдаёт оценки вероятности $b_i = \mathbb{P}(y_i = 1|x_i)$. Всего у Бандерлога 10000 наблюдений. Если ранжировать их по возрастанию b_i , то окажется что наблюдения с $y_i = 1$ занимают ровно места с 5501 по 5600.

Найдите площадь по ROC-кривой и площадь под PR-кривой.

2.11 Бандерлог собрал выборку из 900 муравьёв и 100 китов. Переменная y_i равна 1 для китов. Бандерлог хочет, чтобы его алгоритм классификации выдавал для каждого наблюдения число $b_i = f(x_i) \in [0; 1]$, оценку вероятности того, что наблюдение является китом. В качестве признака Бандерлог использует количество глаз, не задумавшись о том, что оно равно двум и для муравьёв, и для китов.

Решите задачу минимизации эмпирической функции риска и найдите все b_i для функций потерь:

1. $L(y_i, b_i) = (y_i - b_i)^2$, если для муравьёв $y_i = 0$;

2. $L(y_i, b_i) = |y_i - b_i|$, если для муравьёв $y_i = 0$;

3. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} -\log b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ -\log(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases} ;$

4. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} 1/b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ 1/(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases} ;$

2.12 Бандерлог утверждает, что открыл новую верхнюю границу для пороговой функции потерь, $\tilde{L}(M_i) = 1 + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(-x_i)$, где $M_i = y_i \cdot \langle w, x_i \rangle$. Прав ли бандерлог?

2.13 Бандерлог из Лога оценил логистическую регрессию по четырём наблюдениям и одному признаку с константой, получил $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$, но потерял последнее наблюдение:

y_i	b_i
1	0.7
-1	0.2
-1	0.3
?	?

1. Выпишите функцию потерь для задачи логистической регрессии.
2. Выпишите условие первого порядка по коэффициенту перед константой.
3. Помогите бандерлогу восстановить пропущенные значения!

2.14 У Бандерлога три наблюдения, первое наблюдение — кит, остальные — муравьи. Киты кодируются $y_i = 1$, муравьи — $y_i = -1$. На этот раз Бандерлог, чтобы быть уверенным, что x_i различаются, сам лично определил $x_i = i$. После этого Бандерлог оценивает логистическую регрессию с константой.

1. Выпишите эмпирическую функцию риска, которую минимизирует Бандерлог;
2. При каких оценках коэффициентов логистической регрессии эта функция достигает своего минимума?

2.15 Рассмотрим целевую функцию логистической регрессии с константой

$$Q(w) = \frac{1}{\ell} \sum L(y_i, b_i),$$

$$\text{где } b_i = 1/(1 + \exp(-\langle w, x_i \rangle)) \text{ и } L(y_i, b_i) = \begin{cases} -\log b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ -\log(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$;
2. Найдите $dQ(0)$ и $d^2Q(0)$;
3. Выпишите квадратичную аппроксимацию для $Q(w)$ в окрестности $w = 0$;
4. С какой задачей совпадает задача минимизации квадратичной аппроксимации?

2.16 Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

Винни-Пух использует логистическую регрессию с константой для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл.

1. Какие оценки коэффициентов получит Винни-Пух?
2. Какой прогноз вероятности правильности мёда при встрече с неправильными пчёлами даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без рассчитывания коэффициентов?

2.17 Винни-Пух оценил логистическую регрессию для прогнозирования правильности мёда от высоты дерева (м) x_i и удалённости от дома (км) z_i : $\ln odds_i = 2 + 0.3x_i - 0.5z_i$.

1. Оцените вероятность того, что $y_i = 1$ для $x = 15$, $z = 3.5$.
2. Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y_i = 1$ для $x = 15$, $z = 3.5$.
3. При каком значении x предельный эффект увеличения x на единицу в точке $z = 3.5$ будет максимальным?

3 Матрицы

3.1 Известна матрица X ,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

1. Найдите QR-разложение матрицы $X'X$;
2. Найдите QR-разложение матрицы XX' ;
3. Найдите спектральное разложение матрицы $X'X$;
4. Найдите спектральное разложение матрицы XX' ;
5. Найдите сингулярное разложение (SVD) матрицы X ;

3.2 Объясните геометрический смысл QR, SVD и спектрального разложений.

3.3 Бандрелог выполнил SVD-разложение матрицы регрессоров X . Помогите Бандерлогу поскорее найти формулу для матрицы-шляпницы H , которая проецирует y на пространство столбцов матрицы X , $\hat{y} = Hy$.

3.4 Бандрелог выполнил QR-разложение матрицы регрессоров X . Помогите Бандерлогу поскорее найти формулу для матрицы-шляпницы H , которая проецирует y на пространство столбцов матрицы X , $\hat{y} = Hy$.

4 Метод опорных векторов

4.1 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1, 1)$, $(1, -1)$ и синие: $(-1, 1)$, $(-1, -1)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C .
2. Укажите опорные вектора.

4.2 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1, 1)$, $(1, -1)$ и синие: $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ и $(2, 0)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C .
2. Укажите опорные вектора.

4.3 Эконометресса Авдотья решила использовать метод опорных векторов с гауссовским ядром с параметром $\sigma = 1$ и штрафным коэффициентом $C = 1$. Соответственно, она минимизировала целевую функцию

$$\frac{w'w}{2} + C \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

где разделяющая плоскость задаётся $w'x - w_0 = 0$, а ξ_i — размеры «заступа» за разделяющую полосу.

Затем Авдотья подумала, что неплохо бы выбрать наилучшие C и σ . Ей лень было использовать кросс-валидацию, поэтому Авдотья минимизировала данную функцию по $C \geq 0$ и $\sigma \geq 0$. Какие значения она получила?

4.4 Задан вектор $w = (2, 3)$ и число $w_0 = 7$.

1. Нарисуйте прямые $\langle w, x \rangle = w_0$, $\langle w, x \rangle = w_0 + 1$, $\langle w, x \rangle = w_0 - 1$.
2. Найдите ширину полосы между $\langle w, x \rangle = w_0 + 1$ и $\langle w, x \rangle = w_0 - 1$.
3. Найдите расстояние от точки $(5, 6)$ до прямой $\langle w, x \rangle = w_0 - 1$.

4.5 Заданы две прямые, $l_0: x^{(1)} + 3x^{(2)} = 9$ и $l_1: x^{(1)} + 3x^{(2)} = 13$. Найдите подходящий вектор w и число w_0 так, чтобы прямая l_0 записывалась как $\langle w, x \rangle = w_0 - 1$, а прямая l_1 как $\langle w, x \rangle = w_0 + 1$.

4.6 Даны наблюдения

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	y
1	0	0
2	0	0
0	3	1
0	4	1

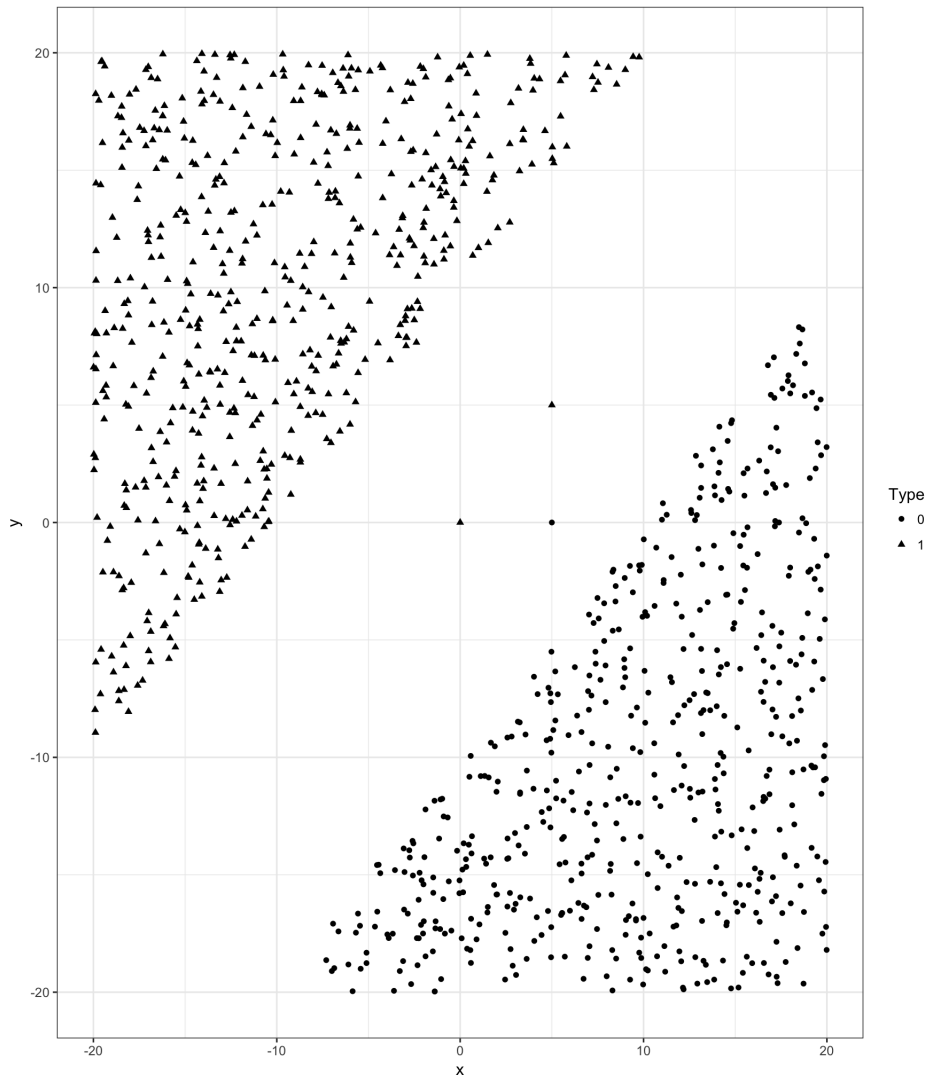
1. Нарисуйте разделяющую полосу наибольшей ширины.
2. Решите задачу оптимизации

$$\min_{w, w_0} \frac{1}{2} \langle w, w \rangle$$

при ограничении: для $y_i = 1$ выполнено условие $\langle w, x \rangle \geq w_0 + 1$, а для $y_i = 0$ выполнено условие $\langle w, x \rangle \leq w_0 - 1$.

3. Для точки $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) = (1, 1)$ найдите значение $\langle w, x \rangle - w_0$ и постройте прогноз \hat{y} .

4.7 По картинке качественно решите задачу разделения точек:



Целевая функция имеет вид:

$$\min_{w, w_0} \frac{1}{2} w' w + C \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Уравнение разделяющей поверхности — $w'x = w_0$, уравнения краёв полосы: $w'x = w_0 + 1$ и $w'x = w_0 - 1$. Нарушителями считаются наблюдения, которые попали на нейтральную полосу или на чужую территорию. Здесь $\xi_i = |w| \cdot d_i$, где d_i — длина «заступ» наблюдения за черту «своих».

1. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = 1$? Найдите w , w_0 , и величины штрафов ξ_i .
2. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = +\infty$? Найдите w , w_0 , и величины штрафов ξ_i .

4.8 ююю

5 Ядра к бою!

5.1 Ядерная функция, скалярное произведение в расширяющем пространстве, имеет вид $K(a, b) = \exp(-|a - b|^2)$.

Имеются вектора $a = (1, 1, 1)$ и $b = (1, 2, 0)$.

Найдите длину векторов и косинус угла между ними в исходном и расширяющем пространстве.

5.2 Рассмотрим два вектора, $v_1 = (1, 1, 2)$ и $v_2 = (1, 1, 1)$. Переход в спрямляющее пространство осуществляется с помощью гауссовской ядерной функции с параметром γ , $k(v, v') = \exp(-\gamma|v - v'|^2)$.

1. Как от γ зависят длины векторов в спрямляющем пространстве?
2. Как от γ зависит угол между векторами в спрямляющем пространстве?

5.3 Имеются три наблюдения A , B и C :

	x	y
A	1	-2
B	2	1
C	3	0

1. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC .
2. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью гауссовского ядра с $K(x, x') = \exp(-|x - x'|^2)$.
3. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью полиномиального ядра второй степени.

5.4 Переход из двумерного пространства в расширяющее задан функцией

$$f : (x_1, x_2) \rightarrow (1, x_1, x_2, 3x_1x_2, 2x_1^2, 4x_2^2).$$

Найдите соответствующую ядерную функцию.

5.5 Ядерная функция имеет вид

$$K(x, y) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2.$$

Как может выглядеть функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ переводящие исходные векторы в расширенное пространство?

5.6 Является ли функция $K(x, z)$ ядром?

1. $K(x, z) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = z; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} ;$
2. $K(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = z; \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} ;$
3. $K(x, z) = \sin(x^T z);$
4. $K(x, z) = \cos(x^T x) \sin(z^T z);$

5.7 Пусть x и z — строки символов, возможно разной длины. Рассмотрим две функции. Функция $K_1(x, z)$ равна единице, если строки x и z совпадают. Функция $K_2(x, z)$ — число совпадающих подстрок. Функция K_3 — произведение количеств букв «а» в обоих словах.

1. Найдите $K_1(\text{«мама»}, \text{«ам»})$ и $K_2(\text{«мама»}, \text{«ам»})$, $K_3(\text{«мама»}, \text{«ам»})$
2. Является ли функция K_1 ядром?
3. Является ли функция K_2 ядром?
4. Является ли функция K_3 ядром?

5.8 На прямой аллее растёт три дуба. Находятся в точках с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$. Исследователь Винни-Пух проверил и выяснил, что на втором Дубе водятся правильные пчёлы, а на остальных — неправильные.

1. Являются ли пчёлы линейно разделимыми в пространстве исходной аллеи?
2. Помогите Винни-Пуху выписать прямую задачу метода опорных векторов в пространстве исходной аллеи;
3. Помогите Винни-Пуху выписать двойственную задачу метода опорных векторов в пространстве исходной аллеи;
4. Помогите Винни-Пуху выписать двойственную задачу метода опорных векторов в бесконечномерном пространстве с ядерной функцией $K(x, z) = \exp(-(x - z)^2)$; Являются ли точки в нём линейно разделимыми?
5. Помогите Винни-Пуху выписать прямую и двойственную задачу метода опорных векторов в спрямляющем пространстве с ядерной функцией $K(x, z) = (xz + 1)^2$; Являются ли точки в нём линейно разделимыми?

6 Двойственные задачи

- 6.1** Выпишите двойственную задачу для минимизации $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при ограничении $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$.
- 6.2** Выпишите двойственную задачу для $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ при ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$, $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$, все $x_i \geq 0$.
- 6.3** Выпишите двойственную задачу для максимизации $1/x_1 + 2/x_2$ при ограничении $2x_1 + 3x_2 = 10$ и $x_1 \in [1; 10]$, $x_2 \in [2; 6]$.
- 6.4** Выпишите двойственную задачу для минимизации $f(x) = \frac{1}{2}x'Hx + g'x$ при ограничении $A'x = b$.
- 6.5** Выпишите двойственную задачу для минимизации $f(x) = \frac{1}{2}x'Hx + g'x$ при ограничении $A'x \leq b$.
- 6.6** Выпишите прямую и двойственную задачу для метода опорных векторов в исходном пространстве.
- 6.7** Выпишите прямую и двойственную задачу для метода опорных векторов в спрямляющем пространстве с использованием ядра $K(., .)$.

7 Метод главных компонент

- 7.1** Найдите прямую, у которой сумма квадратов расстояний до точек $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ будет минимальной. Чему равна при этом доля объяснённого разброса точек?
- 7.2** Есть две переменных, $x = (1, 0, 0, 3)'$, $z = (3, 2, 0, 3)'$. Найдите первую и вторую главные компоненты.
- 7.3** Известна матрица выборочных ковариаций трёх переменных. Для удобства будем считать, что переменные уже центрированы.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Выразите первую и вторую главные компоненты через три исходных переменных.
 2. Выразите первую и вторую главные компоненты, через три исходных переменных, если перед методом главных компонент переменные необходимо стандартизировать.
- 7.4** Пионеры, Крокодил Гена и Чебурашка собирали металлолом несколько дней подряд. В распоряжение иностранной шпионки, гражданки Шапокляк, попали ежедневные данные по количеству собранного металлолома: вектор g — для Крокодила Гены, вектор h — для Чебурашки и вектор x — для Пионеров. Гена и Чебурашка собирали вместе, поэтому выборочная корреляция $\text{sCorr}(g, h) = -0.9$. Гена и Чебурашка собирали независимо от Пионеров, поэтому выборочные корреляции $\text{sCorr}(g, x) = 0$, $\text{sCorr}(h, x) = 0$. Если регрессоры g , h и x центрировать и нормировать, то получится матрица \tilde{X} .
1. Найдите параметр обусловленности матрицы $(\tilde{X}'\tilde{X})$.
 2. Вычислите одну или две главные компоненты (выразите их через вектор-столбцы матрицы \tilde{X}), объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии регрессоров.
 3. Шпионка Шапокляк пытается смоделировать ежедневный выпуск танков, y . Выразите оценки коэффициентов регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 g + \beta_3 h + \beta_4 x + \varepsilon$ через оценки коэффициентов регрессии на главные компоненты, объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии.