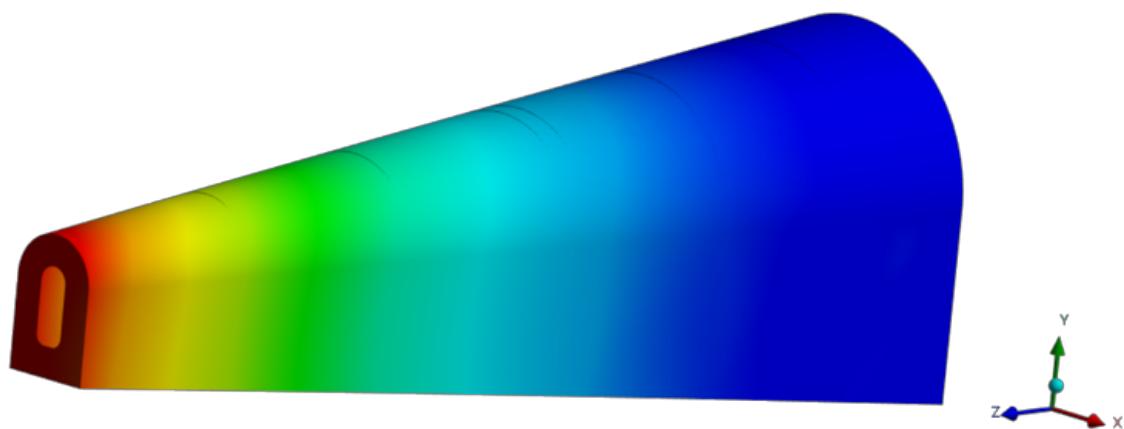


UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR



ESTRUTURAS AEROESPACIAIS II

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS AEROESPACIAIS

Dimensionamento do cone de cauda em compósito de uma aeronave de 6 lugares

Trabalho realizado por:
Alexandre Jesus Oliveira Nº 46457
Filipe Costa Soares Nº 45608
Manuel Landeiro Alves Nº 45633
Grupo 5

Docente:
Prof. Pedro Vieira Gamboa

9 de junho de 2023

Índice

1	Introdução	1
2	Carregamento	1
2.1	Cargas de balanceamento	2
2.2	Cargas de inércia	2
2.3	Esfórcos ao longo da cauda	3
3	Laminado	4
4	Propriedades da Secção	4
4.1	Escolha de Idealização	5
4.2	Centro Elástico	5
4.3	Segundos Momentos de Área	5
5	Esfórcos	6
5.1	Tensões Diretas	6
5.2	Considerações de Afilamento	6
5.3	Fluxo de Corte	6
5.4	Cálculo do $q_{s,0}$	7
5.5	Critérios de Falha	8
6	Análise de elasticidade	8
6.1	Ângulo de Torção	8
6.2	Deflexão Vertical	9
7	Algoritmos de otimização e Resultados	9
7.1	Estudo Paramétrico	9
7.2	Algoritmo Evolucionário	10
8	Análise Computacional no <i>Ansys</i>	11
8.1	Metodologia	11
8.1.1	<i>ACP (Pre)</i>	11
8.1.2	<i>Static Structural</i>	11
8.1.3	<i>ACP (Post)</i>	12
8.2	Localização e configuração das cavernas	12
8.3	Resultados	12
8.3.1	Sem Cavernas (0C)	12
8.3.2	8 Cavernas com 5cm de largura (8C_5cm)	12
8.3.3	8 Cavernas com 15cm de largura (8C_15cm)	12
8.4	Estudo de convergência da malha	13
9	Comparação de Resultados e Comentários	13
10	Conclusão	15
A	Propriedades dos materiais compósitos	16
B	Código Ilustrativo — Implementação	16
C	Resultados — Análise Computacional em <i>Python</i>	17
D	Resultados — Análise Computacional em <i>Ansys</i>	17

Lista de Figuras

1	Esquema da implementação do código em <i>Python</i>	1
2	Geometria do cone de cauda e parâmetros	2
3	Cargas de balanceamento na aeronave	2
4	Forças em y e momentos	3
5	Secção da fuselagem	6
6	Esquema do empilhamento adotado para simulação da estrutura (canto inferior direito da secção).	11
7	Captura da deformação da estrutura (8C_5cm).	13
8	Captura do campo de valores dos critérios da falha (8C_5cm).	13
9	Captura da deformação da estrutura (8C_15cm).	13
10	Captura do campo de valores dos critérios da falha (8C_15cm).	13
11	Estudo de convergência da malha.	13
12	Distribuição de Tensões	14
13	Captura do campo de valores dos critérios de falha (8C_15cm).	14
14	<i>Plot</i> em <i>Python</i> - Fator de Segurança	14
15	<i>Plot</i> em <i>Python</i> dos campos de tensões.	17
16	Carregamento e Condições de Fronteira.	17
17	Captura da deformação da estrutura com configuração 0C e aplicação das forças F_1 , F_2 e F_g	18
18	Captura do campo de valores dos critérios de falha na secção da raiz junto ao laminado 2 (8C_15cm).	18
19	Malha (8C_15cm).	18
20	Desenho CAD das oito cavernas, com a respetiva coordenada em z (8C_15cm).	19
21	Exemplo de <i>Rosette</i> e <i>Oriented Selection Set</i> (laminado 1).	19

Lista de Tabelas

1	Carregamento resultante da condição de voo.	2
2	Carregamento devido às cargas de inércia.	3
3	Resultados obtidos e notação dos laminados.	11
4	Tabela de Resultados	15
5	Propriedades dos materiais compósitos.	16

Referências

- [1] Filipe Soares Alexandre Oliveira, Manuel Alves. Fuselage composite structural analysis and optimization in python. <https://github.com/AlexFwf1/Estruturas-Aeroespaciais-II>, 2023.
- [2] P.V. Gamboa. Apontamentos da unidade curricular. <http://webx.ubi.pt/~pgamboa/>, 2022 - 2023. Estruturas Aeroespaciais I, II.
- [3] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, 2006.

1 Introdução

No âmbito da unidade curricular de Estruturas Aeroespaciais II, foi proposta a realização de um miniprojeto, com o intuito de dimensionar a cauda de uma fuselagem e otimizar os laminados a que esta constitui. Este miniprojeto toca em diversos aspectos lecionados em Estruturas Aeroespaciais II como análise estrutural em compósitos e análise de elasticidade. Para além disso, este trabalho inclui também algum desenvolvimento e aplicação de algoritmos de otimização.

A cauda de uma aeronave é a parte traseira da fuselagem que suporta estruturalmente os estabilizadores horizontais e verticais. O objetivo da cauda é providenciar estabilidade e controlo da aeronave durante o voo e suportar estruturalmente os esforços aerodinâmicos que nela surgem. O dimensionamento estrutural é o processo de determinar as dimensões e combinações de materiais de forma a garantir que a estrutura seja capaz de suportar as cargas a que está sujeita. Com base nessas previsões, é possível determinar as tensões diretas e de corte em função das dimensões da fuselagem. Assim obtém-se as tensões internas máximas e paralelamente calculam-se as deformações e a massa. Por fim, executou-se um algoritmo evolucionário que permitiu obter dimensões que satisfaçam as condições limite, minimizando a relação entre a massa e o custo da cauda, garantindo a integridade da estrutura.

Para alcançar este objetivo, utilizou-se dois métodos de análise:

- Idealização Estrutural:

O método de idealização é o método de idealização estrutural parcial. Recorrendo à linguagem de programação **Python**, escreveu-se um código que permite determinar os esforços na cauda, as propriedades geométricas da secção, as propriedades equivalentes dos laminados bem como as tensões e deformações. O afilamento da fuselagem também foi considerado no cálculo das forças. Deste modo, recorreu-se a um algoritmo evolucionário em conjunto com um estudo paramétrico para determinar a configuração de laminados mais otimizada. O código desenvolvido poderá ser consultado em [1].

- Método dos Elementos Finitos (*FEM*):

Na segunda fase do trabalho, utilizou-se um programa comercial de análise estrutural, o **Ansys®**. Neste foi possível a obtenção de alguns parâmetros de interesse como a deformação máxima, deflexão, torção e ainda o campo de valores dos critérios de falha da estrutura, com vista em compararmos os valores com os obtidos na primeira fase do trabalho, recorrendo à construção dos diversos laminados com vista em realizar uma análise estática. Foi utilizado o módulo de compósitos *ACP (Pre)* e *(Post)* para criar e analisar os laminados, ao passo que a análise estática foi feita no *Static Structural*.

Por fim, fez-se uma análise crítica comparando os resultados obtidos através dos dois métodos, com o objetivo de avaliarmos a nossa abordagem ao problema e a forma como foi implementado o modelo matemático.

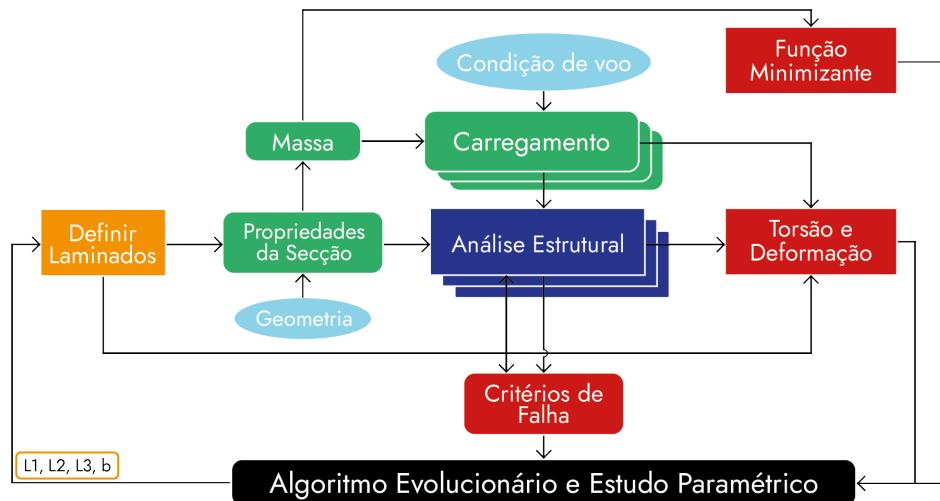


Figura 1: Esquema da implementação do código em *Python*.

2 Carregamento

Ao projetar uma determinada aeronave é necessário ter em conta vários aspectos da mesma. Esta não pode operar fora dos limites de sustentação, propulsão e estrutura estabelecidos. O estudo feito neste trabalho corresponde a uma condição de voo de $n = 4$ e $V = 152$ m/s. A aeronave em estudo é uma aeronave de 6 passageiros com uma massa de 3350 kg, envergadura de $b = 12$ m, corda média de $c = 1,48$ m e o comprimento do cone de cauda de $L = 5,18$ m ($i = 5$). A geometria encontra-se representada na Figura 2.

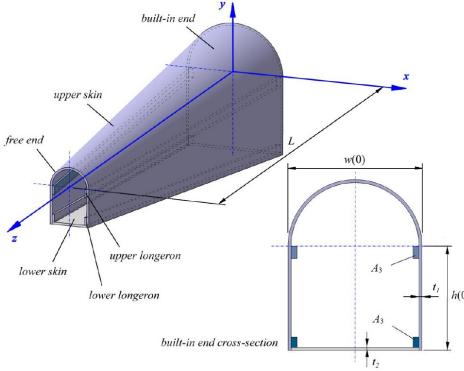


Figura 2: Geometria do cone de cauda e parâmetros

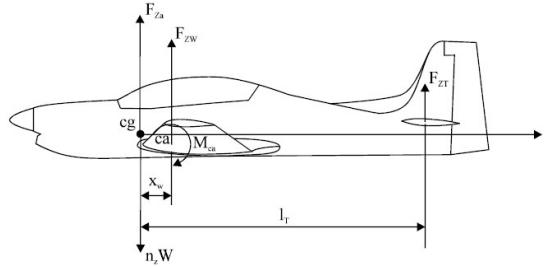


Figura 3: Cargas de balanceamento na aeronave

A aeronave está sujeita a forças verticais: a força de balanceamento na empunagem horizontal F_b , aplicada em $z = 5,18$ m; e forças de inércia de massas $m_1 = 250$ kg, $m_2 = 250$ kg e $m_3 = 150$ kg aplicadas nas posições $z_1 = 0,6$ m, $z_2 = 2,2$ m e $z_3 = 5,18$ m, respectivamente. Existe também uma força horizontal causada pelo leme de direção igual a $S_x = F_b/2$, aplicada na ponta livre no plano de simetria vertical e numa posição vertical $y = 1,2$ m.

Foi necessário calcular o ângulo de ataque da aeronave de forma a dividir as forças resultantes nas suas respetivas componentes no eixo de coordenadas do cone de cauda. Sendo α o ângulo de ataque, o coeficiente de sustentação é dado pela equação:

$$C_L = \frac{0,011\pi^2 b(\alpha + 4)}{b + 2c} \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_L(b + 2c)}{0,011\pi^2 b} - 4 \quad (1)$$

Sendo $L = nW$, o ângulo de ataque nesta condição de voo é 3° . Dado que $\cos\alpha \approx 1$ para ângulos de ataque pequenos, é possível desprezar a divisão das forças nas respetivas componentes. Deste modo, a análise torna-se também mais conservadora.

2.1 Cargas de balanceamento

Representadas na Figura 3, as cargas de balanceamento são as forças mais significativas na empunagem horizontal, devendo ser conhecidas para permitir um correto dimensionamento do cone de cauda da aeronave. O seu cálculo permite-nos também determinar a força horizontal aplicada na ponta livre do cone de cauda. A posição do centro de gravidade, z_{CG} , está a 0,074 m à frente do centro aerodinâmico da asa, que se encontra em $z_W = -0,5$ m.

Considerando as forças representadas na Figura 2, a seguinte equação de equilíbrio dos momentos em torno do centro aerodinâmico da asa permite calcular a força na empunagem horizontal (F_{Zt}):

$$M_{ca} - n_z W x_w - F_{Zt}(l_t - x_w) = 0 \Leftrightarrow F_{Zt} = \frac{M_{ca} - n_z W x_w}{l_t - x_w} \quad (2)$$

Sendo V_E a velocidade da aeronave, S a área alar, \bar{c} a corda média e C_m o coeficiente de momento, o momento na empunagem horizontal M_{ca} é dado por:

$$M_{ca} = \frac{\rho V_E^2 S \bar{c} C_m}{2} \quad (3)$$

Conhecida a força na empunagem horizontal, sabe-se que a força horizontal é metade desse valor:

$$S_x = \frac{F_{Zt}}{2} \quad (4)$$

Considerando a densidade do ar $\rho = 1,225$ kg/m³, a aceleração gravítica $g = 9,80665$ m/s² e $C_m = -0,15$ e tendo em conta os dados fornecidos no enunciado tem-se:

Momento [Nm] Empunagem Horizontal	Força [N] Empunagem Horizontal	Força [N] Horizontal
$M_{ca} = -55794,22$	$F_{Zt} = -11534,95$	$S_x = -5767,47$

Tabela 1: Carregamento resultante da condição de voo.

2.2 Cargas de inércia

Sendo m a massa de inércia, g a aceleração gravítica e n o fator de carga, as cargas de inércia sofridas no cone de cauda da fuselagem são dadas por:

$$F = mgn \quad (5)$$

z [m]	0,6	2,2	5,18
Força de Inércia [N]	F_1=9806,65	F_2= 9806,65	F_3=5883,99

Tabela 2: Carregamento devido às cargas de inércia.

Não obstante, o cone de cauda apresenta massa, M_t , o que deve ser de igual modo considerada na análise. No cálculo da massa utilizou-se integração numérica, nomeadamente o método dos trapézios de Newton–Cotes. De modo a calcular o custo, C_t , para posteriormente utilizar na função mínimo, recorreu-se ao mesmo método. Com vista em conhecer o ponto de aplicação da força associada ao peso do cone de cauda, foi calculado a coordenada z do centro de gravidade, \bar{z}_t .

$$M_t = h \sum_{z=0}^N (\rho_1(A_{sc} + A_{bv}) + \rho_2 A_{bh} + \rho_3 A_t) \quad F_M = M_t g n \quad (6)$$

$$C_t = h \sum_{z=0}^N (c_1 \rho_1(A_{sc} + A_{bv}) + c_2 \rho_2 A_{bh} + c_3 \rho_3 A_t) \quad (7)$$

$$\bar{z}_t = \frac{\Delta z \sum_{z=0}^N z (\rho_1[A_{sc} + A_{bv}] + \rho_2 A_{bh} + \rho_3 A_t)}{\Delta z \sum_{z=0}^N (\rho_1[A_{sc} + A_{bv}] + \rho_2 A_{bh} + \rho_3 A_t)} \quad (8)$$

2.3 Esforços ao longo da cauda

Tendo em conta as equações anteriores, é possível determinar as forças e os momentos aplicados ao longo do comprimento do cone de cauda da fuselagem nos eixos x e y . A força no eixo x , ao longo de todo o comprimento da cauda é dada apenas pela força horizontal resultante do leme de direção:

$$F_x(z) = S_x \quad (9)$$

A força no eixo O_y varia ao longo da posição z no comprimento do cone de cauda da fuselagem, devido às forças de inércia estarem aplicadas nas posições distintas z_1 , z_2 e z_3 bem como o peso do cone de cauda, W_t :

$$0 \leq z < z_1 \Rightarrow F_y(z) = F_{Zt} - F_3 - F_2 - F_1 - W_t \quad (10)$$

$$z_1 \leq z < z_2 \Rightarrow F_y(z) = F_{Zt} - F_3 - F_2 - W_t \quad z_2 \leq z \leq L \Rightarrow F_y(z) = F_{Zt} - F_3 - W_t \quad (11)$$

O diagrama de momentos é dado pelo o integral o diagrama de esforços e deve ter em conta o peso do cone cauda aplicada no centroide dado an equação 23. O diagrama de momentos é dado por:

$$0 \leq z < z_1 \Rightarrow M_x(z) = (F_{Zt} - F_3)(L - z_2) + (F_{Zt} - F_3 - F_2)(z_2 - z_1) + (F_{Zt} - F_3 - F_2 - F_1)(z_1 - z) - W_t(\bar{z}_t - z) \quad (12)$$

$$z_1 \leq z < z_2 \Rightarrow M_x(z) = (F_{Zt} - F_3)(L - z_2) + (F_{Zt} - F_3 - F_2)(z_2 - z) - W_t(\bar{z}_t - z) \quad (13)$$

$$z_2 \leq z \leq L \Rightarrow M_x(z) = (F_{Zt} - F_3)(L - z) - W_t(\bar{z}_t - z) \quad (14)$$

Em todo o comprimento da cauda, o momento em y é dado por:

$$M_y(z) = S_x(L - z) \quad (15)$$

Tendo em conta as equações anteriores, é possível determinar os diagramas de esforços da cauda da fuselagem. No entanto, os diagramas na Figura 4 não têm em consideração o peso da cauda, visto que este depende dos laminados, variando com o número de camadas e os materiais compósitos utilizados. Deste modo, os diagramas apresentados na Figura 4 têm apenas em consideração as forças que já são conhecidas inicialmente: as cargas de inércia, a carga na empennagem horizontal e a força horizontal.

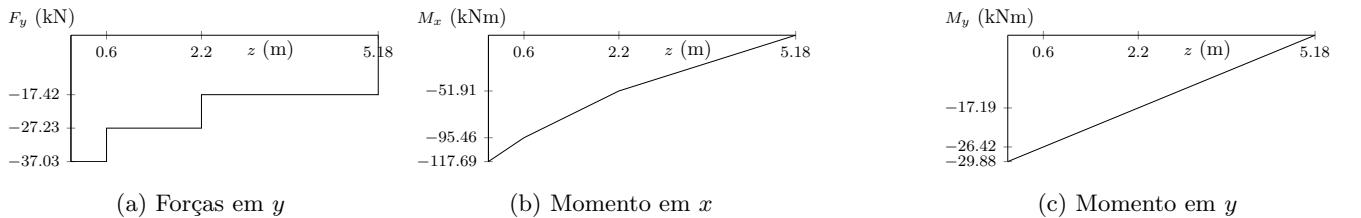


Figura 4: Forças em y e momentos

3 Laminado

De modo a determinar as propriedades equivalentes do laminado, devemos saber quais são as propriedades do material, a quantidade e a orientação do número de camadas que o constituem.

Para calcular o peso da cauda e a função minimizante, foi preciso conhecer a massa volémica dos laminados através de uma média ponderada das massas volémicas dos diferentes materiais, tendo em conta o número de camadas. Utilizou-se a mesma abordagem para determinar o custo médio do laminado. Considerando n o número de camadas, ρ a massa volémica e C o custo específico do material em €/kg, obtendo-se:

$$\rho_i = \frac{1}{n_{total}} \begin{bmatrix} n_{HS} \\ n_{HM} \\ n_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{HS} \\ \rho_{HM} \\ \rho_G \end{bmatrix} \quad C_i = \frac{1}{n_{total}} \begin{bmatrix} n_{HS} \\ n_{HM} \\ n_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{HS} \cdot C_{HS} \\ \rho_{HM} \cdot C_{HM} \\ \rho_G \cdot C_G \end{bmatrix} \quad (16)$$

A matriz \bar{K} que tem em consideração o ângulo θ da camada, sendo $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Sendo os elementos da matriz K dados por:

$$K_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}; K_{12} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}}; K_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}}; K_{33} = G_{12} \quad (18)$$

Temos que as extensões são iguais para todas as camadas sendo dadas pelas tensões médias sentidas no ponto em estudo. Substituindo a equação anterior nas relações tensão-extensão, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = t[a] \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{K}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{K}]t[a] \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Por fim, tendo em conta que a orientação das camadas pode não coincidir com a orientação dos eixos, é necessário transformar as tensões dos eixos de referência para a orientação das camadas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Substituindo as relações anteriores, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix} t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Tendo em conta a espessura t da camada e a matriz $[a]$, as constantes elásticas equivalentes do laminado são dadas por:

$$t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{v_{yx}}{E_y} & -\frac{m_x}{E_x} \\ -\frac{v_{xy}}{E_x} & -\frac{1}{E_y} & -\frac{m_y}{E_y} \\ -\frac{m_x}{E_x} & -\frac{m_y}{E_y} & -\frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

4 Propriedades da Secção

As propriedades da secção são um conjunto de características geométricas que determinam o seu comportamento mecânico. Destas características, destacam-se o centroide elástico (\bar{x}, \bar{y}) e os segundos momentos de área (I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}). No entanto, numa análise onde os materiais não são constantes, os segundos momentos de área ponderados ($EI_{xx}, EI_{yy}, EI_{xy}$) devem ser usados para salvaguardar a validade da metodologia. As propriedades da secção são fundamentais para a determinação do seu comportamento quando sujeito a cargas externas, permitindo conhecer esforços internos e deformações.

A secção em estudo é composta por dois troços verticais (BV), um troço horizontal (BH) e um troço semicírcular (BSC). As dimensões específicas da secção dependem da sua posição axial em z , pelo que a análise das propriedades é feita considerando essa coordenada. O carregamento associado a cada secção é calculado em simultâneo com as propriedades da secção.

```
for Seccao_Z in np.linspace(COMPRIMENTO_FUSELAGEM, 0, NUMERO_DE_SECCOES):
    Seccao = Propriedades_Seccao.Definir_Propriedades(Seccao_Z, Laminados, Espessura_Tensor)
    Forcas, Momentos = Carregamento.Obter_Forcas_e_Momentos(Seccao_Z, Peso_Por_Metro, Peso_Cauda)
    ...
```

Os parâmetros utilizados são: w - o diâmetro; t_1 - espessura do troço vertical; t_2 - espessura do troço horizontal; A_1 - a área dos booms superiores; A_2 - a área dos booms inferiores; h - comprimento do troço vertical.

4.1 Escolha de Idealização

O enunciado *Trabalho de Estudo* sugere a implementação de idealização total em que quer os tensores como a casca são totalmente idealizados. Esta abordagem requer apenas um número reduzido de pontos, sendo especialmente benéfico numa implementação em *Excel* onde a abstração de cálculo é limitativa a custo de facilidade de uso. No entanto, com a utilização de uma linguagem de programação, abstrações como *classes e funções* permitem uma fácil implementação dos métodos de cálculo associados. Deste modo, juntando a maior precisão associada, procedeu-se à implementação de idealização parcial, oferecendo também um melhor comportamento determinístico evitando a utilização de métodos iterativos. Neste tipo de idealização, apenas os tensores são idealizados e considerados dimensionalmente nulos enquanto que a sua localização correspondente à interseção da linha média da casca exterior com os mesmos.

4.2 Centro Elástico

O centro de área elástico, denominado como “centro elástico” no seguimento do relatório, é a posição geométrica média tendo em conta os módulos elásticos dos materiais da secção transversal. O cálculo deste é dado pela seguinte expressão:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \cdot \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \cdot \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i} \quad (23)$$

Para maior precisão na análise geométrica, consideram-se as distâncias a partir da linha média da secção da casca, incluindo a espessura do segmento em estudo. Para facilitar futuros cálculos, assumimos:

$$w' = \frac{w}{2} - \frac{t_1}{2} \quad h' = h - \frac{t_2}{2} \quad (24)$$

No cálculo do centro elástico é necessário saber qual o valor das áreas de cada elemento. Com isto, pode-se calcular o valor da área total com a fórmula 26.

$$A_{BH} = (w - 2t_1)t_2 \quad A_{BV} = ht_1 \quad A_{BSC} = \frac{1}{2}\pi \left(\left(\frac{w}{2}\right)^2 - \left(\frac{w}{2} - t_1\right)^2 \right) \quad (25)$$

$$A_{Total} = A_{BSC} + 2A_{BV} + A_{BH} + 4A_3 \quad (26)$$

Para além disso devemos conhecer qual a localização do centro de massa de cada elemento que a compõe. O eixo de coordenadas inicial coincide como centro da semicircunferência da casca superior.

Troço Horizontal: $(x; y) = (0; -h')$	Tensor de cima direita: $(x; y) = (w; 0)$
Troço Vertical(direita): $(x; y) = (w'; \frac{-h}{2})$	Tensor de cima esquerda: $(x; y) = (-w'; 0)$
Troço Vertical(esquerda): $(x; y) = (-w'; -h')$	Tensor de baixo direita: $(x; y) = (w'; -h)$
Troço em Semicírculo: $(x; y) = (0; \frac{w-t_1}{\pi})$	Tensor de baixo esquerda: $(x; y) = (-w'; -h)$

4.3 Segundos Momentos de Área

O segundo momento de área é uma medida da distribuição da massa ou da densidade numa determinada secção transversal, sendo fundamental no cálculo dos esforços e das deformações.

Sabe-se que $I_{xx} = I'_{xx} + Ay^2$, onde I'_{xx} trata-se do segundo momento de área do troço individual e Ay^2 refere-se ao segundo momento de área devido ao Teorema dos Eixos Paralelos.

$$I_{xx_{BV}} = \frac{h^3 t_1}{12} + A_{BV} (\bar{y}_{BV} - \bar{y})^2 \quad I_{xx_{BH}} = \frac{t_1 (w - 2t_1)^3}{12} + A_{BH} (\bar{y}_{BH} - \bar{y})^2 \quad (27)$$

$$I_{xx_{BSC}} = \frac{\pi}{8} \left(\left(\frac{w}{2}\right)^4 - \left(\frac{w - 2t_1}{2}\right)^4 \right) + A_{BSC} (\bar{y}_{BSC} - \bar{y})^2 - A_{BSC} (\bar{y}_{BSC})^2 \quad (28)$$

$$I_{yy_{BV}} = \frac{t_1^3 h}{12} + (t_1 h) (w')^2 \quad I_{yy_{BH}} = \frac{(w - 2t_1)^3 t_2}{12} \quad I_{yy_{BSC}} = \frac{\pi}{8} \left(\left(\frac{w}{2}\right)^4 - \left(\frac{w - 2t_1}{2}\right)^4 \right) \quad (29)$$

Calculando os segundos momentos de área referentes aos tensores:

$$I_{xx_4} = I_{xx_1} = A_1 (\bar{y} - 0)^2 \quad I_{xx_3} = I_{xx_2} = A_2 (\bar{y} - (-h'))^2 \quad (30)$$

$$I_{yy_1} = A_1 \left(\bar{x} - \left(\frac{w}{2} - t_1\right) \right) \quad I_{yy_2} = A_2 (\bar{x} - (w')) \quad I_{yy_3} = A_2 (\bar{x} - (-w')) \quad I_{yy_4} = A_2 (\bar{x} - (-w')) \quad (31)$$

Com isto, somando os segundos momentos de área dos tensores obteve-se a seguinte equação válido para x e y :

$$I' = EI = E_2 I_{BH} + 2E_1 I_{BV} + E_1 I_{BSC} + 2E_3 (I_{B1} + I_{B2}) \quad (32)$$

O I_{xy} é nulo devido à existência de um eixo de simetria na geometria em relação a y .

5 Esforços

O cálculo da discretização do fluxo de corte e das tensões diretas em função do s será aplicado a todas as secções. O número de secções no processo de otimização definiu-se 9 secções. Em situação de análise pontual, 65 secções foram usadas. O número de secções tem de satisfazer $2^n + 1$ devido ao método de integração explicado com mais detalhe na secção da Elasticidade.

5.1 Tensões Diretas

A partir da expressão das tensões diretas [2], devido à simetria ($I_{xy} = 0$) e à força axial ser desprezável, a equação 33 pode ser simplificada para:

$$\sigma_z = E_{x_i} \left(\frac{M_y I'_{xx} - M_x I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} x + \frac{M_x I'_{yy} - M_y I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} y \right) \iff \sigma_z = E_{x_i} \left(\frac{M_y}{I'_{yy}} x + \frac{M_x}{I'_{xx}} y \right) \quad (33)$$

No seguimento da idealização parcial, considerou-se a análise de tensões diretas na casca, pelo que a totalidade das tensões não é suportada pelos tensores, tendo a casca um papel importante nesse suporte. Assim, de forma a considerar a contribuição dos tensores, $S_{y,w}$ e $S_{x,w}$ devem ser calculados.

5.2 Considerações de Afilamento

O cone de cauda é afilado, sendo a secção na raiz maior que a ponta. Assim, sabe-se que o valor dos segundos momentos de área não são constantes ao longo da fuselagem e, por consequência, os valores das forças de corte variam, transmitindo-se numa variação do fluxo de corte ao longo da fuselagem. Os tensores oferecem uma contribuição positiva nas forças de corte totais sentida no cone de cauda. É, portanto, necessário calcular forças de corte que tenham em conta a contribuição do afilamento: $S_{y,w}$ e $S_{x,w}$. Primeiramente, é necessário determinar as forças de tração/compressão que estão aplicadas nos tensores:

$$\sigma_z(x, y, z) P_{z,r} = \sigma_{z_i} A_{tensores} \quad (34)$$

Deste modo, determinaram-se as forças transversais, através das seguintes fórmulas:

$$P_{y,r} = P_{z,r} \frac{\delta y}{\delta z} \quad P_{x,r} = P_{z,r} \frac{\delta x}{\delta z} \quad (35)$$

Em que,

$$\frac{\delta y}{\delta z} = \frac{y_{ponta} - y_{raiz}}{z_{ponta} - z_{raiz}} \quad \frac{\delta x}{\delta z} = \frac{x_{ponta} - x_{raiz}}{z_{ponta} - z_{raiz}} \quad (36)$$

Assim, conseguiu-se obter os valores de $S_{y,w}$ e $S_{x,w}$, possibilitando a definição das forças aplicadas pela empunhadura na ponta livre da fuselagem:

$$S_{y,w} = S_y - \sum_{n=1}^4 P_{y,r} \quad S_{x,w} = S_x - \sum_{n=1}^4 P_{x,r} \quad (37)$$

5.3 Fluxo de Corte

Na determinação do fluxo de corte, como temos uma secção fechada foi necessária a abertura da mesma em C, visível na Figura 5. Primeiramente, calculou-se o fluxo de corte considerando a secção aberta pela fórmula geral 38. No entanto, esta deve ser adaptada de modo a contemplar a utilização dos segundos módulos de elasticidade ponderados. Assim, o fluxo de corte correspondente à casca deve estar multiplicado pelo módulo de elasticidade do laminado da casca enquanto que a parte correspondente aos tensores deve estar multiplicada pelo módulo de elasticidade do laminado dos tensores, resultando na equação 39.

$$q_b = A \left(\int_0^s t_D y \, ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) + B \left(\int_0^s t_D x \, ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) \quad (38)$$

$$q_b = E_{casca} \left(A \int_0^s t_D y \, ds + B \int_0^s t_D x \, ds \right) + E_{tensor} \left(A \sum_{r=1}^n B_r y_r + B \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) + q_{b-1} \quad (39)$$

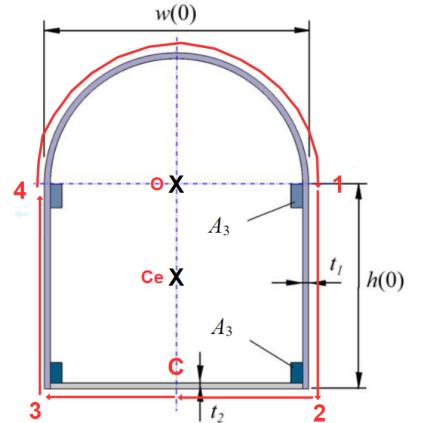


Figura 5: Secção da fuselagem

Devido à simetria da secção:

$$A = - \frac{S_{y,w}}{I_{xx}} \quad B = - \frac{S_{x,w}}{I_{yy}} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} q_{b_{C3}} &= E_2 \left(A \int_0^s t_2 y_2 ds + B \int_0^s t_2 (0-s) ds \right) + E_3 \cdot 0 + 0 \\ q_{b_{C3}} &= E_2 \left(At_2 y_2 s - B t_2 \frac{s^2}{2} \right) \quad s = \{0, w'\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{b_{34}} &= E_1 \left(A \int_0^s t_1 (y_3 - s) ds + B \int_0^s t_1 x_3 ds \right) + E_3 (AB_3 y_3 + BB_3 x_3) + q_3 \\ q_{b_{34}} &= E_1 \left(A \left(t_1 y_3 s + t_1 \frac{s^2}{2} \right) + B t_1 x_3 s \right) + E_3 (AB_3 y_3 + BB_3 x_3) + q_3 \quad s = \{0, h'\} \end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $ds = w' d\theta$:

$$\begin{aligned} q_{b_{41}} &= E_1 \left(A \left(\int_0^s t_1 (y_1 + w' \sin \theta) w' d\theta \right) + B \left(\int_0^s t_1 (-w' \cos \theta) w' d\theta \right) \right) + E_3 (AB_4 y_4 + BB_4 x_4) + q_4 \\ q_{b_{41}} &= E_1 (A (t_1 w' y_1 \theta + t_1 w'^2 [1 - \cos \theta]) + B (-t_1 w'^2 \sin \theta)) + E_3 (AB_4 y_4 + BB_4 x_4) + q_4 \quad \theta = \{0, \pi\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{b_{12}} &= E_1 \left(A \int_0^s t_1 (y_1 - s) ds + B \int_0^s t_1 x_1 ds \right) + E_3 (AB_1 y_1 + BB_1 x_1) + q_1 \\ q_{b_{12}} &= E_1 \left(At_1 \left(y_1 s - \frac{s^2}{2} \right) + B t_1 x_1 s \right) + E_3 (AB_1 y_1 + BB_1 x_1) + q_1 \quad s = \{0, h'\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{b_{2c}} &= E_2 \left(A \int_0^s t_2 y_2 ds + B \int_0^s t_2 (x_2 - s) ds \right) + E_3 (AB_2 y_2 + BB_2 x_2) + q_2 \\ q_{b_{2c}} &= E_2 \left(At_2 y_2 s + B t_2 \left(x_2 s - \frac{s^2}{2} \right) \right) + E_3 (AB_2 y_2 + BB_2 x_2) + q_2 \quad s = \{0, w'\} \end{aligned}$$

5.4 Cálculo do $q_{s,0}$

Recorrendo à equação dos momentos, considerando equilíbrio estático, tem-se que o momento provocado pelos esforços externos será igual ao momento provocado pelos internos, resultando em:

$$T_{ext} = T_{int} \iff T + S_x \eta_0 + S_y \xi_0 = \oint_s p q_b(s) ds + 2A q_{s,0} - \sum_{r=1}^m P_{x,r} \eta_0 + \sum_{r=1}^m P_{y,r} \xi_0 \quad (41)$$

Para a resolução desta equação, consideraram-se os momentos externos em torno do centro da semicircunferência, possibilitando o cálculo do integral. É anulada igualmente a contribuição do S_y visto que a linha de ação coincide com o centro da semicircunferência. S_x provoca um momento positivo, uma vez que se arbitrou o sentido anti-horário como o sentido positivo dos momentos enquanto que a torção pura (T) é nula. Para o η_0 assumiu-se como sendo igual a 1.2, considerando $I = \int q_b ds$. Observe-se para cada troço:

$$\begin{aligned} I_{C3} &= \int_0^{w'} q_{b_{C3}} ds = \int_0^{w'} E_2 \left(At_2 y_2 s - B t_2 \frac{s^2}{2} \right) ds \\ &= E_2 \left(\frac{At_2 y_2 w'^2}{2} - \frac{B t_2 w'^3}{6} \right) \\ I_{34} &= \int_0^{h'} q_{b_{34}} ds = \int_0^{h'} E_1 \left(A \left(t_1 y_3 s + t_1 \frac{s^2}{2} \right) + B t_1 x_3 s \right) + E_3 (AB_3 y_3 + BB_3 x_3) + q_3 \quad ds \\ &= E_1 \left(A \left(\frac{t_1 y_3 h'^2}{2} + \frac{t_1 h'^3}{6} \right) + B \frac{t_1 x_3 h'^2}{2} \right) + E_3 (AB_3 y_3 h' + BB_3 x_3 h') + q_3 h' \\ I_{41} &= \int_0^\pi w' q_{b_{41}} d\theta = \int_0^\pi w' (E_1 (A (t_1 w' y_1 \theta + t_1 w'^2 [1 - \cos \theta]) + B (-t_1 w'^2 \sin \theta)) + E_3 (AB_4 y_4 + BB_4 x_4) + q_4) \quad d\theta \\ &= E_1 \left(A \left(\frac{t_1 w'^2 y_1 \pi^2}{2} + t_1 w'^3 \pi \right) - 2B t_1 w'^3 \right) + E_3 (AB_4 y_4 w' \pi + BB_4 x_4 w' \pi) + q_4 w' \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^{h'} q_{b_{12}} ds = \int_0^{h'} E_1 \left(At_1 \left(y_1 s - \frac{s^2}{2} \right) + B t_1 x_1 s \right) + E_3 (AB_1 y_1 + BB_1 x_1) + q_1 \quad ds \\ &= E_1 \left(A \left(\frac{t_1 y_1 h'^2}{2} - \frac{t_1 h'^3}{6} \right) + B \frac{t_1 x_1 h'^2}{2} \right) + E_3 (AB_1 y_1 h' + BB_1 x_1 h') + q_1 h' \\ I_{2C} &= \int_0^{w'} q_{b_{2C}} ds = \int_0^{w'} E_2 \left(At_2 y_2 s + B t_2 \left(x_2 s - \frac{s^2}{2} \right) \right) + E_3 (AB_2 y_2 + BB_2 x_2) + q_2 \quad ds \\ &= E_2 \left(A \frac{t_2 y_2 w'^2}{2} + B \left(\frac{t_2 x_2 w'^2}{2} - \frac{t_2 x_2 w'^3}{6} \right) \right) + E_3 (AB_2 y_2 w' + BB_2 x_2 w') + q_2 w' \end{aligned}$$

Não se aplicaram diretamente as equações no integral fechado uma vez que estas continuam a ser úteis no cálculo da torção. Aplicou-se a fórmula no centro da semicircunferência, integrando no sentido horário.

$$\oint_s pq_b(s)ds = -h'I_{C3} - w'I_{34} - w'I_{41} - w'I_{12} - h'I_{2C} \quad (42)$$

Deste modo a equação do $q_{s,0}$ fica:

$$q_{s,0} = \frac{S_x\eta_0 - \oint_s pq_b ds + \sum P_{x,r}\eta_r - \sum P_{y,r}\xi_r}{2A} \quad (43)$$

Por fim, o fluxo de corte para qualquer ponto da secção fechada é descrito por:

$$q_{s_i} = q_{b_i} + q_{s,0} \quad (44)$$

5.5 Critérios de Falha

Uma análise estrutural deve contemplar uma análise de falha, com vista em saber se efetivamente a estrutura em estudo entra ou não em rotura. Consiste em analisar a existência de pontos onde os critérios de falha afirmam-se superiores ao limite desejado. Para encontrar pontos de falha, dividiu-se a secção num número finito de pontos e aplicaram-se os critérios de falha em cada ponto da casca e nos tensores individualmente. Para obter uma análise com máxima precisão necessitaria de um número infinito de pontos, algo impraticável computacionalmente. No processo de otimização do laminado, onde o tempo de convergência é um parâmetro de prevalente importância, o número de pontos em cada troço definiu-se entre 10 e 15.

Em cada ponto calculou-se o vetor da tensão média e , através da transformação de eixos descrito no capítulo da Definição dos Laminados, obtiveram-se as tensões nominais de cada camada. Com estas tensões, aplicaram-se os critérios de falha para avaliar a falha em cada uma das camadas. Deste modo, adotaram-se os critérios da Tensão Máxima, Tsai-Hill e de Hoffman. O fator de segurança resultante é uma combinação do fator de segurança limite (FS) e o fator de qualidade (FQ) sendo 1,5 e 1,25, respectivamente, resultando num fator de segurança resultante ($FS_r = FS \times FQ$) de 1,875. Repetiu-se o processo anterior para todas as secções descretizadas.

Critério de Tsai-Hill:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right) \geq \frac{1}{1,875} \quad (45)$$

Critério de Hoffman:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}(\sigma_1)^2 + F_{22}(\sigma_2)^2 + F_{33}(\sigma_{12})^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \geq \frac{1}{1,875} \quad (46)$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}; \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}; \quad F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}; \quad F_{33} = \frac{1}{S^2}; \quad F_{12} = -\frac{1}{2X_t X_c} \quad (47)$$

Teoria da tensão máxima:

$$\begin{aligned} &\text{Para tensões de tração, } \frac{\sigma_1}{X_t} \geq \frac{1}{1,875}, \quad \frac{\sigma_2}{Y_t} \geq \frac{1}{1,875} \\ &\text{Para tensões de compressão, } \frac{|\sigma_1|}{|X_t|} \geq \frac{1}{1,875}, \quad \frac{|\sigma_2|}{|Y_t|} \geq \frac{1}{1,875} \\ &\text{Para tensões de corte, } \frac{|\sigma_{12}|}{S} \geq \frac{1}{1,875} \end{aligned}$$

6 Análise de elasticidade

O dimensionamento do cone de cauda passa por não permitir que a torção da ponta livre e o declive da deflexão na ponta não superem o valor de 0,5 graus. Para isso é necessário analisar o comportamento elástico da estrutura em estudo.

6.1 Ângulo de Torção

Uma aeronave em voo está constantemente sujeita à torção. Na fuselagem, este fenômeno pode ocorrer quando realizadas determinadas manobras ou quando a aeronave está sujeita a rajadas de vento, sendo importante que a mesma tenha capacidade de resistir aos momentos de torção consequentes. Sendo G_i o módulo de elasticidade ao corte do laminado em específico e A_v a área varrida da secção, a taxa de torção é dada pela equação geral:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_v} \oint_s \frac{q}{G_i t} ds \quad (48)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{A_v} \oint_s \frac{q}{t_i G_i} ds \right) dz \quad (49)$$

Devido ao facto do fluxo de corte e da área da secção não serem constantes ao longo da estrutura, o integral exterior é notoriamente difícil de resolver por meio de métodos analíticos. Utilizou-se então uma aproximação do

integral original através de métodos computacionais. Deste modo utilizou-se o método de integração de Romberg, nomeadamente devido à alta precisão que acarta no estudo de funções contínuas. Este consiste em utilizar uma extrapolação de Richardson repetidamente através da regra do trapézio de Newton–Cotes. Para ser aplicável, o integrante deve ter derivadas contínuas como é o caso da equação 49. A implementação é facilitada com a utilização da biblioteca do *Python* `scipy`. Este método requer $2^k + 1$ pontos logo a quantidade de secções usada na simulação é definida a ter isso em conta. Para uma análise baixa precisão utilizou-se 9 secções enquanto que na alta precisão (confirmação do resultado obtido) utilizou-se 1025.

Necessitou-se obter uma equação algébrica do integral fechado apenas em função de z . Note-se que equações semelhantes foram obtidas no cálculo do $q_{s,0}$ na equação 42. A derivação fica:

$$\oint_s \frac{q_s}{G_i t_i} ds = \oint_s \frac{q_b}{G_i t_i} + \frac{q_{s,0}}{G_i t_i} ds = \left(\frac{I_{C3} + I_{2C}}{G_2 t_2} + \frac{I_{34} + I_{41} + I_{12}}{G_1 t_1} \right) + q_{s,0}(z) \left(\frac{2h' + \pi w'}{G_1 t_1} + \frac{2w'}{G_2 t_2} \right)$$

Estes integrais dependem apenas das dimensões da secção a estudar, possibilitando a integração numérica. Note-se que $q_{s,0}$ também depende de z , logo foi necessário implementar o fluxo de corte nos pontos $\{1,2,3,4,C\}$. A implementação no *Python* passou por guardar todos os valores numa *array* e utilizar `scipy.integrate.romb()` para obter a torção na ponta livre.

6.2 Deflexão Vertical

$$v'' = -\frac{I_{yy}M_x - I_{xy}M_y}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} = -\frac{M_x}{EI_{xx}} = -\frac{M_x}{I'_{xx}} \quad (50)$$

$$v' = -\int_0^L \frac{M_x(z)}{I'_{xx}(z)} dz + C_1 \quad (51)$$

Como a deflexão na raiz é nula, tem-se:

$$v'(z=0) = 0 \iff C_1 = 0 \quad (52)$$

Similarmente à torção, o integral é calculado usando `scipy.integrate.romb()` de forma a obter o declive da defleção na ponta livre.

7 Algoritmos de otimização e Resultados

O processo de otimização é separado da análise estrutural. Neste, a análise estrutural é tratada como uma função em que são fornecidos os laminados e espessuras respetivas enquanto que a análise devolve existência ou não de falha na estrutura, bem como a função minimizante correspondente.

$$F_{Simulacao} = f(L_1, L_2, L_3, b) = (X_1, F_{min}) \quad (53)$$

L_1 e L_2 são matrizes de ordem 4×3 nas quais as linhas representam os ângulos de orientação das camadas enquanto que as colunas representem os materiais fornecidos. L_3 têm apenas $\theta = 0$, ou seja, a matriz L_3 têm dimensão 1×3 , devido à natureza do carregamento.

$$L_1 = L_2 = M_{m \times n} : \theta_i = \{0, 45, -45, 90\}, M_i = \{C_{HS}, C_{HM}, G\} \quad (54)$$

As variáveis devolvidas são X_1 , uma variável binária indicando se a estrutura falha e F_{min} , que representa a função mínimo. A função minimizante é calculada com base nas fórmulas 7 e 6. É de notar que a ordem do laminado não importa no modelo matemático. Esta propriedade é aproveitada na implementação do código permitindo utilizar as matrizes L_1 , L_2 , L_3 em que os valores representam o número de camadas.

Por sua vez, a otimização é a seleção da melhor combinação de laminados e espessuras que minimiza a função minimizante, ao mesmo tempo que faz X_1 ser *False* (ou seja, fazendo com que estrutura não falhe). No entanto, as matrizes L_1 , L_2 e L_3 são inteiras e a função F é demasiado complexa para recorrer a métodos algébricos de modo a calcular um mínimo. Surgiu a necessidade de recorrer a métodos discretos de otimização para obter uma solução, [3]. Assim sendo, neste trabalho utilizou-se uma combinação de estudos paramétricos e um algoritmo evolucionário.

7.1 Estudo Paramétrico

Um estudo paramétrico é um estudo em que todas as variáveis de interesse são discretizadas constituindo todas as combinações dentro de um conjunto de limites. Essas combinações são avaliadas selecionando a combinação que tiver um menor F_{min} . Para tal, é necessário obter todas as combinações de interesse até um número de camadas máximo, n_{max} . Considerando quatro ângulos de interesse, o número de graus de liberdade será 28. É possível apenas variar todos os valores da matriz até n_{max} e só usar aquelas que tenham um número de camadas inferior, mas este

método é totalmente ineficiente dado que o número de combinações necessárias a percorrer é de n_{max}^{28} , surgindo um grande interesse em usar um método mais eficiente. Sendo n o número de camadas de um dado laminado, o método desenvolvido neste projeto é o seguinte:

1. Obtenção de todas as possibilidades de laminado para apenas uma camada.

$$C(n=1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\} \quad (55)$$

2. Criação de uma tabela com n dimensões na qual os dois eixos da tabela são a lista criada no ponto anterior. Para cada elemento da tabela, é obtida a soma do elemento de cada eixo correspondente. Devido à simetria da tabela apenas surge a necessidade de obter o triângulo superior da tabela em conjunto com a diagonal. Este processo é semelhante a calcular as combinações com repetição com tamanho n .

$$C(n=2) = \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad (56)$$

A tabela é válida para $n = 2$. Para obter n superiores, é necessário criar tabelas com n dimensões e realizar o mesmo processo. De modo a obter um laminado simétrico, apenas é necessário multiplicar por 2 cada combinação.

3. Repetição o processo acima até n_{max} e juntar todas as combinações resultantes.

Agora com todas as combinações de um laminado arbitrário, surgiu a necessidade de calcular todas as combinações com L_1, L_2, L_3 e b . No entanto, a quantidade de combinações produzidas tipicamente ultrapassava a memória *RAM* do computador. Foi necessário evitar guardar as combinações e produzir em *runtime*, ou seja, produzir a combinação sem a guardar. Isto pode ser obtido através de *nested loops* para cada laminado. Cada simulação leva, em média, 10ms se não falhar e 2 a 5 ms se falhar. De forma a acelerar o estudo, é possível pré-calcular a F_{min} e verificar se é menor do que a de uma simulação funcional anteriormente encontrada. No caso de ser inferior a simulação com essa combinação é executada. A razão de implementação do método de Newton-Cotes torna-se clara agora dado que é desejável o máximo de velocidade de computação para F_{min} . O cálculo de F_{min} foi especialmente otimizado calculando todas as constantes previamente. Tudo o que dependa do laminado foi implementado de forma a reduzir ao mínimo o número de passos. O método foi especialmente acelerado usando a biblioteca *Multicore* que permite expandir o poder computacional para múltiplos núcleos do *CPU* reduzindo o tempo de computação significativamente.

Apesar de este ser o melhor método global de otimização dado que garante o encontro de um mínimo global nos dados colocados, é extremamente ineficiente. Para $n_{max} = 20$ e $b_{possivel} = 10$, o tempo de cálculo consegue ser superior a vários anos. Tentativas com $n = 10$ mais baixos não encontraram soluções. Para obter resultados mais rapidamente, foi necessário obter estimativas de resultados através de um algoritmo mais eficaz, que deu origem à implementação de um algoritmo evolucionário.

7.2 Algoritmo Evolucionário

O algoritmo evolucionário é um algoritmo de otimização inspirado na evolução biológica. Um conjunto inicial de soluções candidatas é gerado e atualizado iterativamente. Através da eliminação de soluções menos desejadas e geração de combinações com pequenas variações é possível obter de forma mais eficaz mínimos locais em combinações de entrada com um grande número de graus de liberdade, [3].

Primeiramente, combinaram-se as matrizes L_1, L_2 e L_3 numa só matriz L_a de modo a facilitar posteriormente a criação de novos elementos. Iniciou-se uma matriz L_a com um número de camadas igual em todos os ângulos e materiais, sendo de seguida retirada uma camada em todos os ângulos e materiais até a análise falhar.

Em segundo lugar, executou-se o processo evolucionário. Aqui a população inicial é constituída por $L_{a_{inicial}}$ resultante do passo anterior. A partir da população existente, cada elemento da população origina N elementos, em que cada elemento é adicionado a uma matriz com dimensões L_A aleatória com valores $Maleatoria \in \{-k, k\}$, sendo k um parâmetro inteiro significando alcance da matriz. Um maior k significa que a população alcança maior território na função multidimensional L_a . Cada novo elemento é avaliado estruturalmente, dando a conhecer a respetiva F_{min} , em que se a estrutura não falhar então o elemento é adicionado à população. De seguida, a população é ordenada em termos de F_{min} e mantido apenas p_{max} elementos com melhor F_{min} (o valor máximo da população a considerar). O processo de criação de novos elementos à eliminação dos elementos menos bons chama-se *geração*. Este processo

é repetido até a solução estagnar por múltiplas gerações. Inicialmente, $k = 10$ de forma a aumentar a velocidade de convergência, no entanto, quando o algoritmo encontra alguma estagnação de solução duas vezes seguidas, k diminui com o intuito de aumentar a probabilidade de encontrar um elemento melhor nas proximidades de cada elemento da população.

A cada cinco gerações, um algoritmo de cruzamento de espécies é aplicado. Este algoritmo consiste na seleção de dois elementos aleatórios da população criando vários elementos novos através de uma mistura aleatória dos elementos originais. Este processo é repetido múltiplas vezes até criar uma população com a dimensão definida anteriormente.

Encontrou-se a necessidade de aplicar outro método de criação de elementos específico a esta implementação a que deu-se o nome de *Shuffling*. Consiste em organizar os elementos da matriz de forma aleatória, e pode ser aplicado quer à matriz num todo como apenas às colunas ou linhas. O *Shuffling* é aplicado a cada cinco gerações.

De forma a obter vários mínimos locais, são executadas 10 populações com valores de espessura diferentes. As populações resultantes são processadas por um algoritmo de cruzamento da população. O resultado desta população é novamente colocado no processo evolucionário. O melhor resultado dos processos anteriores é considerado uma boa solução para este problema.

A grande desvantagem a esta implementação específica é o algoritmo usar funções geradoras aleatórias, o que torna o resultado não determinístico. É possível melhorar a rapidez de convergência e eficácia computacional alterando a ordem e prioridade das ações do algoritmo o que pode levar a melhores resultados.

A partir da solução resultante, foi usado um estudo paramétrico em que se fixou o L_1 e L_2 , variando L_3 e b . A melhor solução obtida corresponde a $F_m = 24.425$ em que:

	Laminado 1	Laminado 2	Laminado 3
Resposta ao Trabalho de Estudo	$t_1 = 0,7 \text{ [mm]}$	$t_2 = 0,8 \text{ [mm]}$	$A_3 = 6,763 \text{ [mm}^2]$ $t_3 = 0,1 \text{ [mm]}$ $b = 67,63 \text{ [mm]}$
Notação	$(90_2/45_3/0_2)_s$	$(-45_5/45_3)_s$	(0_2)
Material	CFRP-HS	CFRP-HM	GFRP

Tabela 3: Resultados obtidos e notação dos laminados.

8 Análise Computacional no *Ansys*

Obtida a solução ao problema através do código em *Python*, procedeu-se à validação dos resultados num programa comercial de análise estática estrutural (*Ansys*) que tem como base o Método dos Elementos Finitos. Construindo os laminados obtidos na geometria do cone de cauda e aplicando o respetivo carregamento, foi possível a determinação dos valores da deformação, ângulo de torção e campo de valores dos critérios de falha.

8.1 Metodologia

8.1.1 ACP (Pre)

Primeiramente, no *Engineering Data*, foram introduzidos os materiais e as respetivas propriedades que constam no enunciado *Trabalho de Estudo*. Desenhou-se a geometria do cone de cauda no ambiente *Wireframe and Surface Design* do programa comercial *CATIA V5* à qual não foi atribuída qualquer espessura, de modo a ser identificada pelo *Ansys* como um elemento tipo casca.

Em *Geometry* no *Ansys*, importou-se a geometria do cone de cauda em formato *.igs*. Não obstante, no *Space Claim* foi aplicado *Share Topology* a toda a geometria de modo a estabelecer contactos entre os diversos componentes da estrutura. No *Model*, gerou-se a malha (Figura 19) com *Face Meshing* e *Mesh Connection Group* e ainda se efetuou a separação e nomenclatura de todos os componentes da estrutura através de *Named Selections*.

Por último, no *Setup*, procedeu-se à construção dos laminados. As camadas foram criadas em *Fabrics* e o empilhamento dos laminados em *Stackups* e *Sub Laminates*. O empilhamento foi feito de acordo com o esquema da Figura 6 de forma *bottom-up*, ficando de acordo com as *Rosettes* criadas bem como com os *Oriented Selection Sets* necessários para cada *Named Selection* (Figura 21). A associação de cada *Oriented Selection Set* ao respetivo laminado foi feita no *Modeling Groups*.

8.1.2 Static Structural

De modo a realizar a simulação do carregamento na estrutura, inicialmente conectou-se o *Setup* do *ACP (Pre)* ao *Model* do *Static Structural*.

No *Model*, com o objetivo de inserir as condições de fronteira (Figura 16) aplicou-se um *Fixed Support* na raiz, as forças diretas como *Force* (F_1 em $z = 600\text{mm}$, F_2 em



Figura 6: Esquema do empilhamento adotado para simulação da estrutura (canto inferior direito da secção).

$z = 2200mm$, F_g em $z = 2311mm$ e $F_r = F_3 + F_b$ em $z = 5180mm$) e ainda a força S_x como *Remote Force* (em $z = 5180mm$ e $y = 1200mm$). Cada força foi aplicada na caverna com localização correspondente à coordenada z .

Já em *Solutions*, procurou-se obter a *Total Deformation* para visualização a deformação total (maioritariamente vertical devido à natureza do carregamento) e a *Flexible Rotation Probe* na caverna da ponta livre ($z = 5180mm$) em torno de x e em torno de z , de modo a conhecermos a deflexão e a torção (em graus).

8.1.3 ACP (Post)

Começou-se por conectar o *Engineering Data* do *ACP (Pre)* ao *Engineering Data* do *ACP (Post)*, bem como o *Model* do *ACP (Pre)* e a *Solution* do *Static Structural* aos *Results* do *ACP (Post)*.

Em *Definitions*, inseriu-se um *Failure Criteria* com os mesmos critérios utilizados na implementação em *Python* (Tensão Máxima, Tsai-Hill e Hoffman). Posteriormente, em *Solutions*, criou-se uma *Solution* tipo *Failure* associando o *Failure Criteria* definido no passo anterior.

8.2 Localização e configuração das cavernas

As cavernas (Figura 20) foram colocadas nas coordenadas em z onde seriam aplicados os vários tipos de carregamento, contando também com a força associada ao peso da própria fuselagem. Para além destas cinco cavernas, adicionou-se outras duas entre a caverna localizada na ponta livre e a caverna em que estaria aplicada a força do peso da estrutura de forma igualmente espaçada e ainda uma entre as cavernas em que estariam aplicadas as forças de inércia 1 e 2, modo a aproximar melhor a geometria à idealização matemática considerada. Na parte inferior das cavernas colocou-se uma curvatura com o objetivo de evitar alguma concentração de tensões local.

Relativamente à configuração, tal como é prática comum nas estruturas em compósito, utilizou-se um compósito em *sandwich* com face superior e inferior do laminado 1 e núcleo em espuma PVC de densidade $80km/m^3$ com $5mm$ de espessura, resultando numa espessura total de $6,4mm$ para cada caverna. Foi variado ainda o valor da espessura da espuma PVC na esperança de obter resultados diferentes, mas verificou-se que a sua influência é pouco significativa, fixando-se o valor de $5mm$ de forma arbitrária, assegurando que a estrutura não falhasse.

8.3 Resultados

A teoria da idealização estrutural considera as secções como não deformáveis, não avaliando deformações da secção e fenómenos de flambagem, típicos de corpos de espessura reduzida. Contudo, o método de elementos finitos consegue contemplar estes fenómenos tornando a sua análise mais próxima da realidade. Para uma verificação apropriada de resultados, cavernas devem ser adicionadas para acomodar fenómenos de flambagem e deformação de secção. Um número infinito de cavernas resultaria numa aproximação total da idealização estrutural, contudo tal não é prático. Foi realizado uma análise sem cavernas de forma a compreender a prevalência dos efeitos de deformação. Paralelamente, foram realizados 2 testes com cavernas com larguras distintas de forma a avaliar a sua eficácia a resistir à deformação e a distribuir as forças localizadas.

8.3.1 Sem Cavernas (0C)

Na análise da estrutura sem cavernas, a aplicação do carregamento total conduzia a estrutura a colapsar e os resultados teriam valor muito divergente e pouco fiéis à realidade. Deste modo, simulou-se a estrutura com aplicação somente das forças F_1 , F_2 e F_g para efeitos de confirmação de resultados (Figura 17), apresentando uma deformação máxima demasiado elevada para carregamento restrinrido.

8.3.2 8 Cavernas com 5cm de largura (8C_5cm)

Para uma configuração de 8 cavernas com $5cm$ de largura e $10cm$ de raio de curvatura inferior, confirmou-se que a deformação máxima já apresenta um valor mais fiel à realidade para o carregamento na totalidade, visível na Figura 7.

Apesar de nesta configuração a casca não falhar, verificou-se uma elevada concentração de tensões nas cavernas (Figura 8), nomeadamente junto às curvaturas inferiores, motivo que levou à falha esta configuração. Deste modo, surgiu a necessidade de fazermos mais uma iteração, variando a largura das cavernas.

8.3.3 8 Cavernas com 15cm de largura (8C_15cm)

Já numa configuração de 8 cavernas com $15cm$ de largura e $10cm$ de raio de curvatura inferior, para além da deformação máxima reduzir ligeiramente (Figura 9), verificou-se que as cavernas já não falham (Figura 10), revelando-se como uma boa configuração.

Contudo, quer na configuração 8C_5cm como na 8C_15cm, a observação dos critérios de falha indica que, relativamente ao inverso do fator de segurança ($\frac{1}{FS} = \frac{1}{1,875} = 0,533$), numa região do laminado 2 junto à secção encastrada,

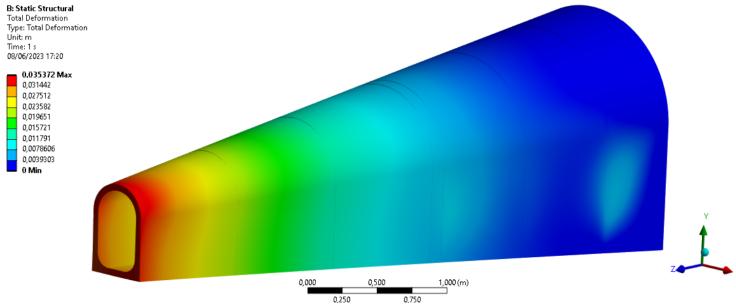


Figura 7: Captura da deformação da estrutura (8C_5cm).

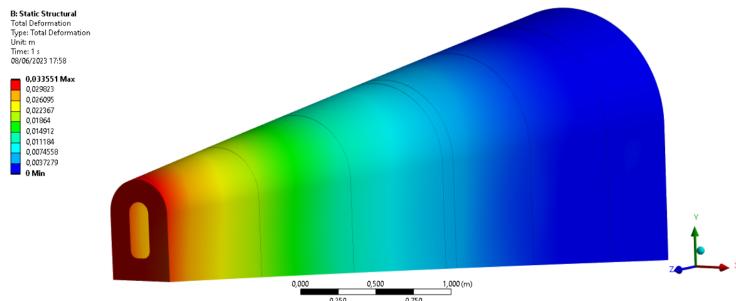


Figura 9: Captura da deformação da estrutura (8C_15cm).

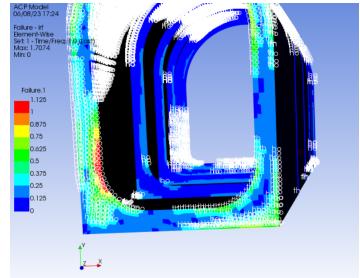


Figura 8: Captura do campo de valores dos critérios da fala (8C_5cm).

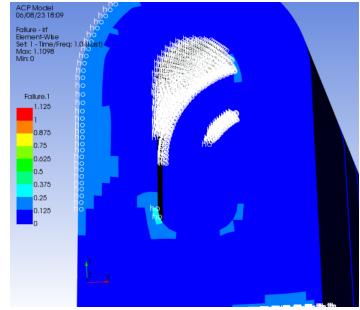


Figura 10: Captura do campo de valores dos critérios da fala (8C_15cm).

há um elemento que efetivamente falha ($\frac{1}{FS}_{max} = 1,1098$), tendo cerca de cinco elementos ao seu redor que superam o valor de 0,533. Já a restante estrutura apresenta valores inferiores a este, validando a implementação matemática. No próximo capítulo vão ser abordadas comentários sobre este comportamento.

8.4 Estudo de convergência da malha

De modo a descobrir qual a malha mais eficiente computacionalmente para não comprometer significativamente o resultado obtido, efetuou-se um estudo de convergência da malha.

Este consistiu na alteração do tamanho do elemento, no *Model* do *ACP (Pre)*, com vista a variar o número de nós total da malha, registando o resultado da deformação máxima para cada valor total de nós, resultando no gráfico da Fig.11.

Da observação do gráfico, vemos que a partir dos 60000 nós, para esta geometria, o valor da deformação máxima apresenta-se como aproximadamente constante, fazendo o resultado ser do nosso interesse em termos de precisão a partir deste. Para além disso, não é prevista a necessidade da utilização de um elevado número de nós uma vez que a geometria não apresenta regiões de dupla curvatura e é um elemento tipo casca.

Devido a problemas na geração da malha, não foi possível traçar uma curva com mais pontos, não permitindo conhecer a tendência da curva para valores superiores a 107466 nós, forçando a utilização do maior número possível de nós dentro das restrições da versão do *Ansys*.

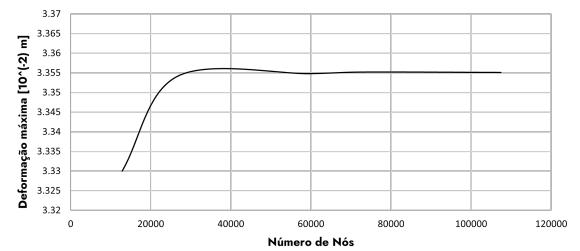


Figura 11: Estudo de convergência da malha.

9 Comparação de Resultados e Comentários

Uma análise estrutural completa envolve uma investigação minuciosa dos resultados obtidos e uma compreensão profunda das características que podem implicar. É necessário considerar como essas características podem manifestar implicitamente as vantagens e limitações dos algoritmos subjacentes aos métodos utilizados. Começando pela idealização estrutural, cujos resultados podem ser encontrados na secção 7.2, notou-se que a raiz não se tornou crítica na análise estrutural mesmo com um carregamento acentuadamente superior. Os segundos momentos de área conseguem compensar o aumento do carregamento, levando a menores esforços na raiz.

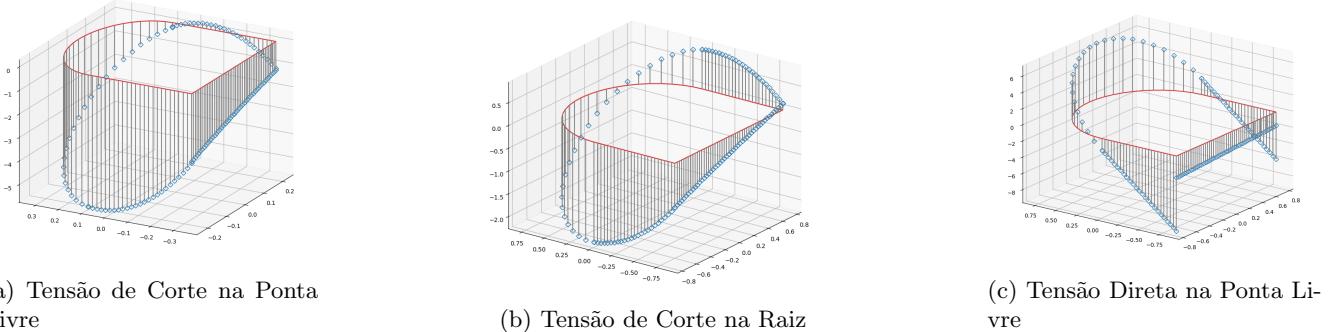


Figura 12: Distribuição de Tensões

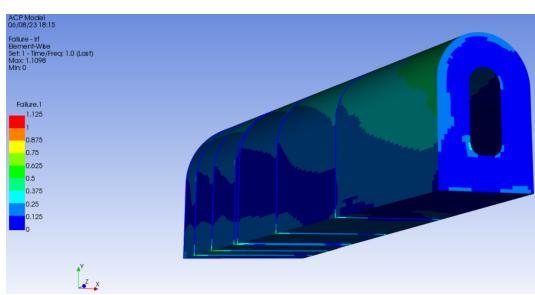


Figura 13: Captura do campo de valores dos critérios de falha (8C_15cm).

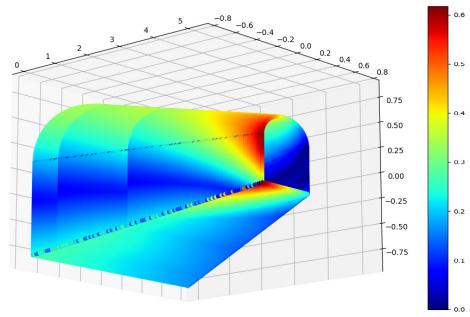


Figura 14: Plot em Python - Fator de Segurança

É de que notar que o empilhamento dos laminados presentes na Tabela 3 foi escolhido arbitrariamente, salvaguardando apenas a simetria dos mesmos, afinal o modelo matemático implementado não prevê qualquer empilhamento específico. No entanto, quando falamos de uma aplicação real acontece que a estrutura pode ter comportamentos diferentes para dois empilhamentos distintos com as mesmas orientações e número de camadas. Apenas a simetria foi salvaguardada no empilhamento dos laminados com vista em evitar um desequilíbrio de momento fletor que surge quando os laminados não o são. Isto deve-se, de um modo geral, ao facto de se um laminado não é simétrico a distribuição de tensões também não será simétrica ao longo da secção do laminado.

Os resultados da idealização estrutural convergiram para uma combinação de laminados onde a espessura dos tensores foi minimizada e usa fibra de vidro. Esta tendência deve-se ao cálculo do fluxo de corte contemplar a contribuição da tensão direta dos tensores. Na ponta livre existe uma elevada concentração de tensões de corte no quadrante superior esquerdo da secção, como se pode observar nas Figuras 12 e 14. O aumento de área do tensor faz aumentar o fluxo de corte no troço vertical (devido à tensão direta ser negativa neste ponto), aumentando as tensões num troço que já se encontrava sobrecarregado. Os algoritmos de otimização contemplaram esta tendência e reduziram ao máximo a área e rigidez do tensor. No entanto, a otimização acabou por encontrar um ponto ótimo onde a espessura do tensor b não é nula.

Não obstante, no canto inferior esquerdo da ponta livre, existe uma grande concentração de esforços totalmente resultantes do critério de Tsai-Hill. Estes esforços acabam por não ser críticos neste dimensionamento dado que o critério crítico acabou por se revelar ser a torção máxima estando o ponto crítico no quadrante superior esquerdo da secção da ponta livre. Diante disso, o algoritmo de otimização preferiu a utilização de fibra de carbono HM para o laminado 1 e manter a utilização de fibra de carbono HS para o laminado 2. A utilização de fibra de carbono HS no laminado 2 é crucial dado que, se fosse utilizado fibra de carbono HM para as mesmas camadas, a estrutura acabaria por falhar inevitavelmente. Dado o laminado 1 concretizar grande parte da secção, a utilização de fibra de carbono HM demonstrou ser mais eficaz a resistir à torção no lugar de usar mais camadas de fibra de carbono HS. Apenas nos tensores a fibra de vidro foi preferida possivelmente pelas razões explicadas anteriormente.

No programa comercial de análise estrutural, verificou-se que a configuração de 8 cavernas com 15 cm de largura é de facto uma boa solução ao problema. No entanto, existe uma região junto à secção da raiz onde os elementos falham acima do fator de segurança tal como pode ser visto na figura 18. Já a restante estrutura apresenta valores abaixo do fator de segurança, ou seja, a estrutura só entra em rotura na região referida em 8.3.3. Desconfia-se que este fenómeno de aparição pontual de falha tenha origem em artefactos da computação por usar-se uma malha pouco refinada nessa região. Não se obteve a possibilidade de aumentar o número de nós devido às limitações da licença do programa. Se esta região se revelar problemática, numa aplicação real é apenas necessário reforçar localmente as vizinhanças dessa região ou adicionar curvatura ao canto alterando efetivamente a geometria, podendo não ser possível. A concentração de esforços não foi prevista pela idealização estrutural, sendo esta uma limitação do método uma vez que a teoria não incorpora cálculo de concentração de tensões em arestas da estrutura. Num futuro estudo

com vista em minimizar o peso para uma aplicação real, de modo a obter o número ótimo de cavernas, teriam de ser realizadas novas para configurações com sete, seis, cinco e quatro cavernas, o que necessariamente conduzia a solução à diminuição da massa da estrutura, salvaguardando o compromisso de manter a estabilidade estrutural.

Como já foi referido anteriormente, a configuração sem cavernas não teve a possibilidade de ser simulada na totalidade das forças. Mesmo assim, verificou-se uma deformação excessivamente acentuada, como é visível da Figura 17. Tal resultado era de esperar devido ao *Ansys* conseguir prever com precisão o comportamento de flambagem e averiguar com sucesso a deformação de secções, que é um aspeto limitativo da idealização estrutural.

Não obstante, confrontou-se a solução do critério de falha do *Ansys* com um *plot* do critério de falha no *Python* a partir da configuração 8C_15cm. De um modo geral, reconheceram-se visualmente semelhanças tais como: a concentração de tensões no quadrante superior esquerdo da ponta livre; a concentração de tensões no tensor inferior esquerdo e a atenuação de esforços no centro do troço esquerdo e troço direto. Somente no laminado inferior não se verificaram tantas semelhanças, na região mais próxima da ponta livre. É de notar que a escala de cores na idealização estrutural difere da escala do *Ansys*. Apesar disso, assumimos que os resultados da idealização estrutural tenham sido bem conseguidos, verificando com alguma confiança que o algoritmo tenha sido devidamente implementado. No apêndice podem ser consultados *plots* dos campos de tensões diretas e de corte obtidos no *Python* (15).

Para além disso, foi possível confirmar através do *Composite Failure Tool* no *Ansys*, que ao ser utilizado o critério de Hoofman para além do da tensão máxima e de Tsai-Hill, os resultados obtidos tenderiam a ser mais conservadores. Tal se havia confirmado na implementação em *Python* devido à maioria dos pontos calculados terem este como critério de falha dominante.

Foram organizados, na Tabela 4, os resultados das implementações em *Python* e em *Ansys*. Apesar do campo de falha se ter revelado semelhante, a deflexão e torção total revelaram-se com uma taxa de erro relativamente elevada o que pode indicar algum erro na idealização estrutural ou uma limitação desconhecida do modelo, mesmo usando um elevado número de secções e pontos, salvaguardando o resultado do critério mais crítico, a torção na ponta livre.

		Deformação máxima [mm]	Deflexão [º] Ponta Livre	Torsão [º] Ponta Livre	Falho (FS)	Número de nós
Python	Modelo Matemático	22,3	0,49309	0,4967	-	-
Ansys	0C	-	-	-	Sim	40872
	8C_5cm	35,372	5,12	1,63	Est. Dim: Não Cavernas: Sim	117052
	8C_15cm	33,551	0,9694	0,4851	Est. Dim: Não Cavernas: Não	107466
Erro Relativo 8C_15cm		33,5%	49,1%	-2,3%		

Tabela 4: Tabela de Resultados

10 Conclusão

Em suma, este trabalho foi constituído por dois grandes passos. Em primeiro lugar, foi necessário determinar o carregamento a que a estrutura estaria sujeita. De seguida, foi descretizado o cone de cauda em múltiplos pontos e secções de modo a calcular os esforços em cada ponto bem como analisar a partir dos critérios de falha a existência de algum ponto que não satisfaça os critérios de falha. Consequentemente, foram desenvolvidos algoritmos de otimização, como o algoritmo evolucionário e um estudo paramétrico, para encontrar a melhor solução que satisfaça as condições do problema. Típicas execuções da otimização superaram milhões de simulações executadas de idealização estrutural, com tempo de execução entre 1 a 8 horas. De seguida, foi necessário validar os resultados com recurso a um programa comercial de análise estrutural devido a maior fidelidade de análise e, por fim, foi realizado uma análise da configuração de cavernas e feita uma comparação pormenorizada dos resultados e avaliado as vantagens e limitações a que estas implementações demonstram.

Em suma, todos os objetivos do trabalho foram cumpridos com relativo sucesso, desde a simulação estrutural usando o método de idealização parcial com uma linguagem de programação, passando pela aplicação de métodos de otimização até à validação de resultados usando um programa de simulação comercial. Os resultados obtidos demonstraram boa precisão no campo de falha, no entanto, os resultados de elasticidade demonstraram erros relativos elevados. Na execução do trabalho foi necessário aplicar conhecimentos referentes a outras unidades curriculares como matemática computacional e permitiu a aprendizagem e consolidação aos autores de ferramentas como o *CATIA V5* para *CAD design*, *Python* enquanto ferramenta de cálculo e geração de *plots* e ainda o ambiente comercial *Ansys* para análise estrutural.

A Propriedades dos materiais compósitos

Propriedade	Parâmetro	Unidade	CFRP-HS	CFRP-HM	GFRP
Massa volêmica	ρ	kg/m ³	1600	1600	1900
Módulo elástico longitudinal	E_1	GPa	140	180	40
Módulo elástico transversal	E_2	GPa	10	8	8
Módulo de corte	G_{12}	GPa	5	5	4
Coeficiente de Poisson maior	v_{12}	-	0,30	0,30	0,25
Resistência longitudinal à tração	X_t	MPa	1500	1000	1000
Resistência longitudinal à compressão	X_c	MPa	1200	850	600
Resistência transversal à tração	Y_t	MPa	50	40	30
Resistência transversal à compressão	Y_c	MPa	250	200	110
Resistência ao corte	S	MPa	70	60	40
Preço	C_S	€/kg	100	120	50

Tabela 5: Propriedades dos materiais compósitos.

B Código Ilustrativo — Implementação

Obtenção de Combinações

```
#Obter combinações para n = 1, i = ângulos, j = materiais
for Rows in range(i):
    for Columns in range(j):
        Possibilidade_A = np.zeros((i, j))
        Possibilidade_A[Rows, Columns] = 1
        Matriz_A_List.append(Possibilidade_A)
Tabela_nD = itertools.combinations_with_replacement(tuple(Matriz_A_List), n)
#Somar cada elemento dado que o que vem do anterior é apenas uma matriz (ixj, n) de elementos não somados
#→ automaticamente. O suposto é uma array (ixj) de elementos somados
Combinacoes_Soma_N = np.sum(Tabela_nD, axis=1)
Combinacoes_Soma_N_Unica_Simetrica = Combinacoes_Soma_N_Unica * 2

return Combinacoes_Soma_N_Unica_Simetrica
```

Estudo Paramétrico

```
Min = 10e100
Combinacao_Minimo = None
for Lam1 in Laminados_1:
    for Lam2 in Laminados_2:
        for Lam3 in Laminados_3:
            for b in Espessuras:
                F_min = Massa_E_Custo.Recalcular_Funcao_Minimo(Lam1,Lam2,Lam3,Espessura)
                if F_min < Min:
                    Falha = Main.Simulacao(Lam1,Lam2,Lam3,Espessura, Dados_Precomputados)
                    if Falha == False:
                        Min = F_min
                        Combinacao_Minimo = (Lam1,Lam2,Lam3,Espessura)
```

Algoritmo Evolucionário

```
def Create_Childs(Parent):
    Childs = [] #Parent = (L_a, b, F_min)
    for _ in range(Generation_Birth):
        Child_Laminado = np.copy(Parent[0]) - np.random.randint(-N,N+1, size=Laminado_Inicial.shape) #variações
        #atraves matrizes aleatorias, alcance N.
        Child_Laminado[Child_Laminado < 0] = 0 #Se existires valores negativos, converter para 0.
        Child_Espessura = Parent[1] - np.random.randint(-Espessura_Divergencia*N,Espessura_Divergencia*N+1) #Repete o
        #mesmo processo mas para apenas um valor discreto, espessura.
        if Child_Espessura < 0: Child_Espessura = 0
        if not Analisar(Child_Laminado, Child_Espessura):
            Childs.append((Child_Laminado, Child_Espessura, Minimo(Child_Laminado, Child_Espessura)))
    return Childs

Population = []
while not Analisar(Laminado_Geral, Espessura):
    Laminado_Geral -= 1
    Laminado_Geral += 1
```

```

while True:
    for Parent in Population: #Criar novos elementos.
        Childs = Create_Childs(Parent)
        Population.append(Childs)
    Survivors = sorted(Survivors, key=lambda x: x[2]) #Organizar por F_min
    while len(Survivors) > Maximum_Population: #Despejar elementos de menor F_min
        Survivors.pop()
    Stop, N = Analise_Estagnacao(Estagnacao,Survivors[0][2], N, 3) #Analisar se as gerações acabam por estagnar.
    if Stop: break

```

C Resultados — Análise Computacional em *Python*

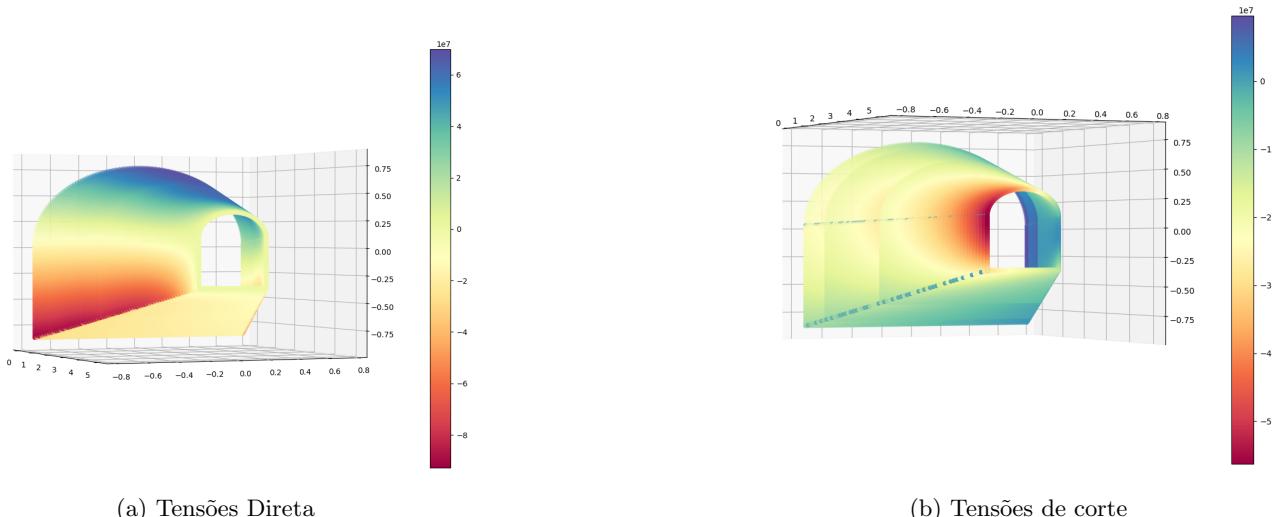


Figura 15: Plot em *Python* dos campos de tensões.

D Resultados — Análise Computacional em *Ansys*

B: Static Structural
 Static Structural
 Time: 1, s
 08/06/2023 15:46

A Fixed Support
B Force F1: 9806,6 N
C Force F2: 9806,6 N
D Force Fg: 935,4 N
E Force Fr: 17419 N
F Remote Force Sx: 5767,4 N

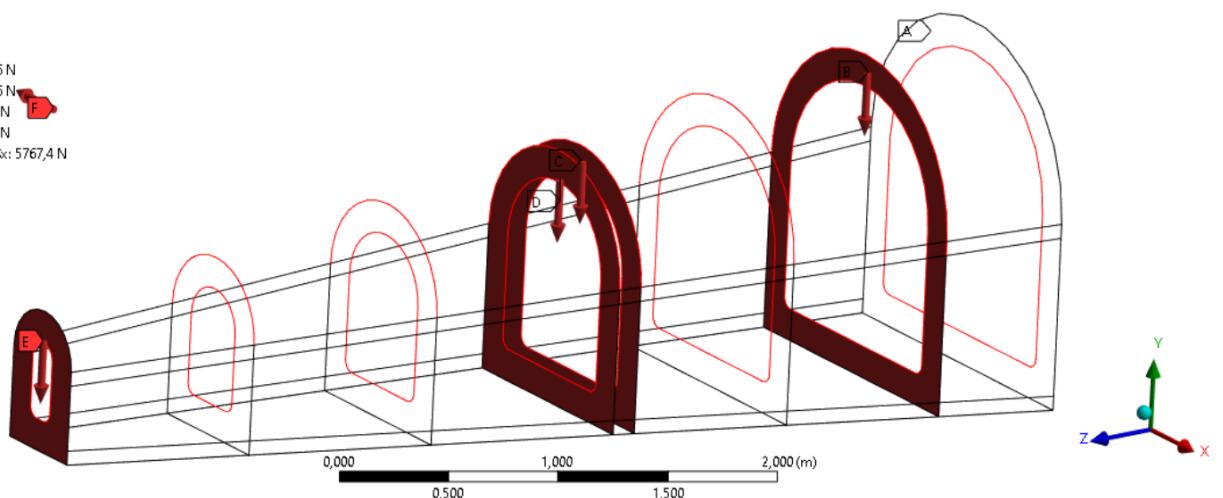


Figura 16: Carregamento e Condições de Fronteira.

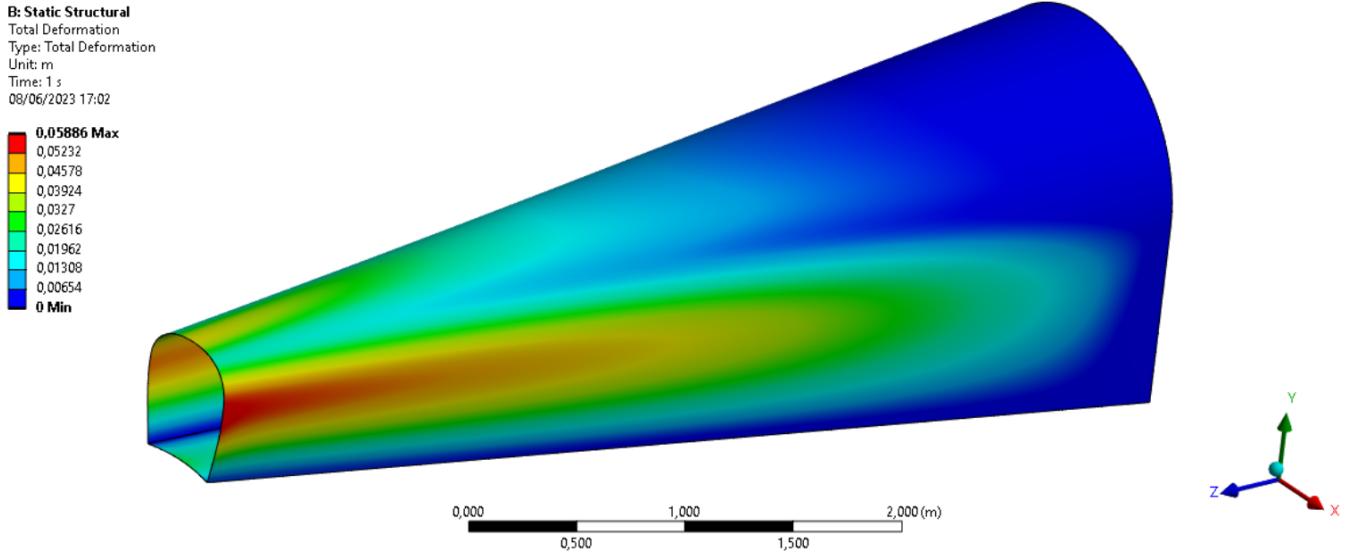


Figura 17: Captura da deformação da estrutura com configuração 0C e aplicação das forças F_1 , F_2 e F_g .

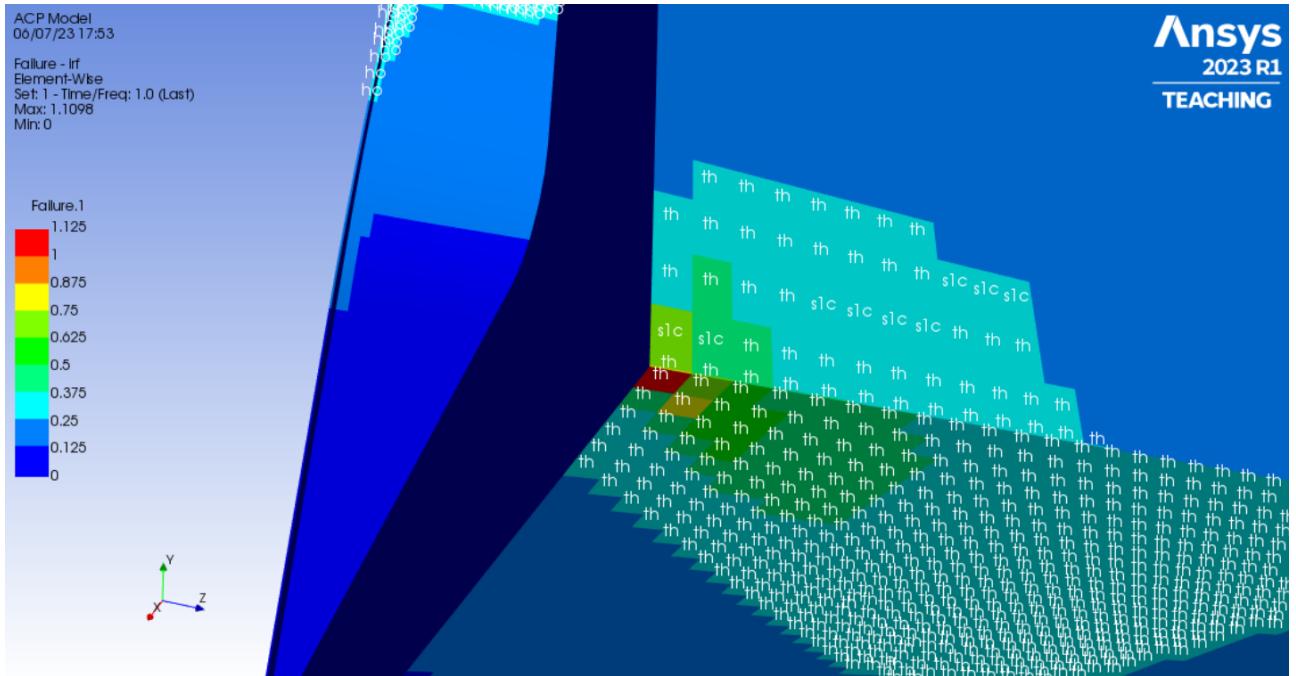


Figura 18: Captura do campo de valores dos critérios de falha na secção da raiz junto ao laminado 2 (8C_15cm).

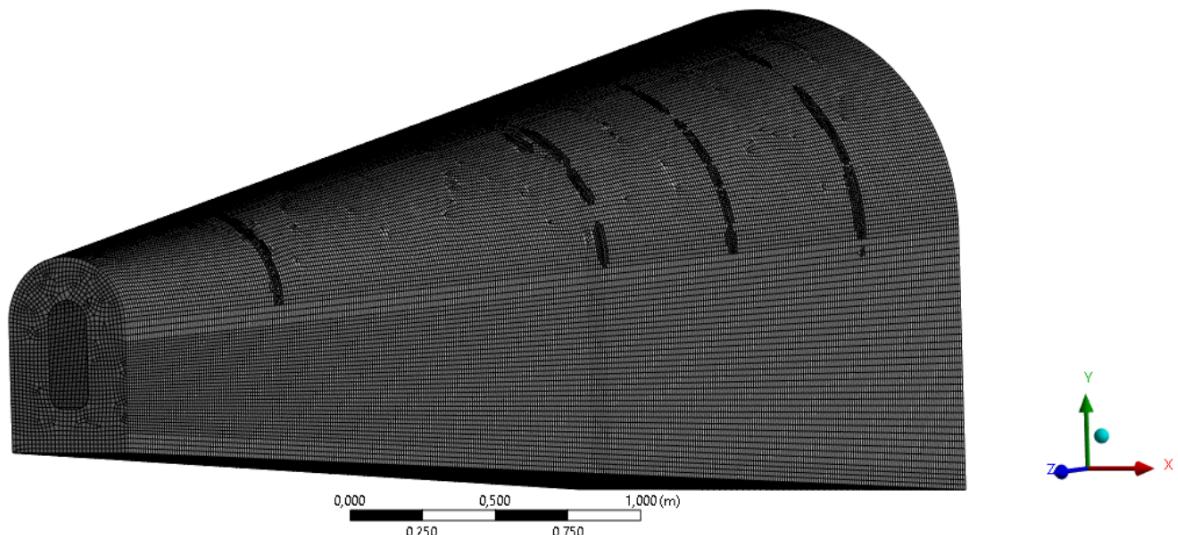


Figura 19: Malha (8C_15cm).

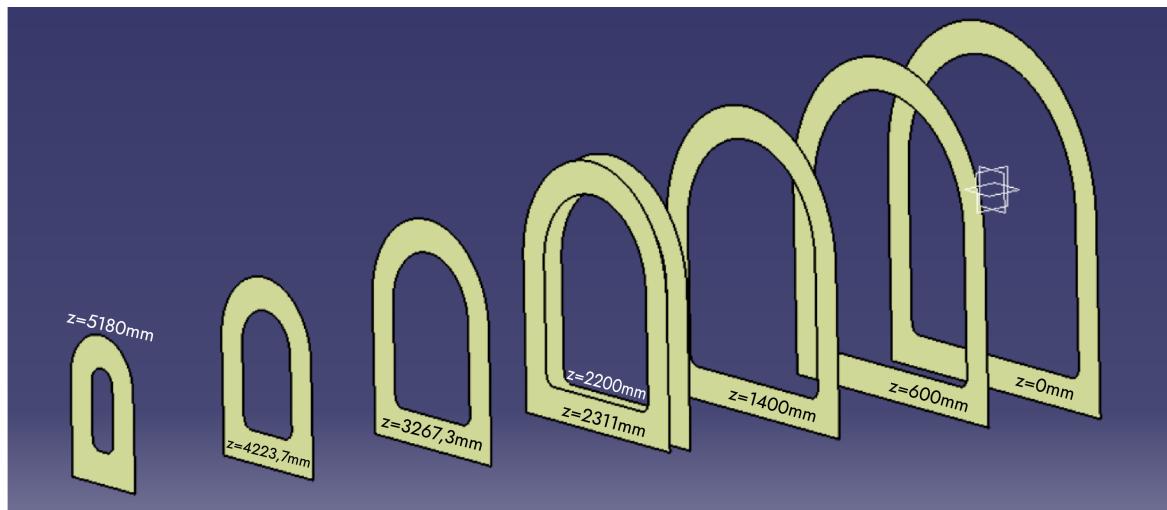


Figura 20: Desenho CAD das oito cavernas, com a respetiva coordenada em z (8C_15cm).

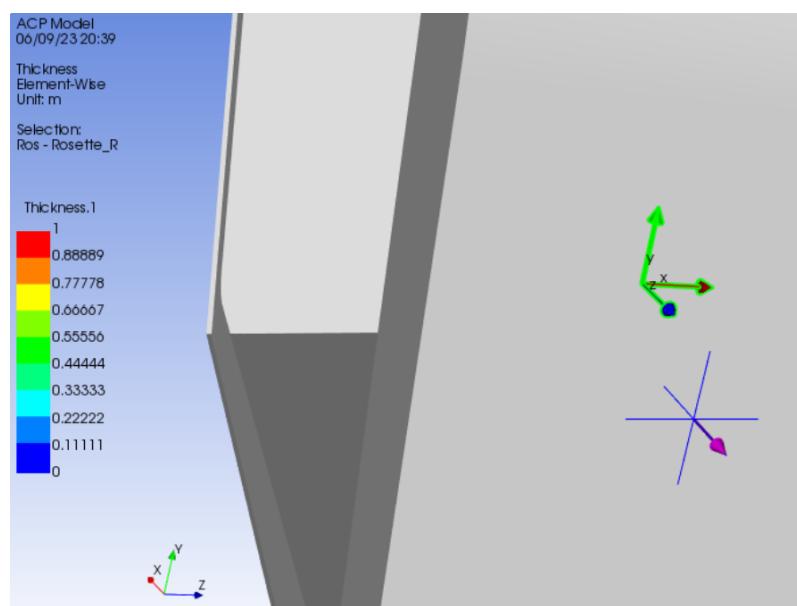


Figura 21: Exemplo de *Rosette* e *Oriented Selection Set* (laminado 1).