9.1. Probleme din logica propoziţiilor

Problema 9.1.1.

Folosind metoda tabelelor de adevăr verificaţi:

1. asociativitatea conectivei „$\downarrow$”: $p \downarrow (q \downarrow r) \equiv (p \downarrow q) \downarrow r$;
2. dacă se poate aplica o lege a lui De'Morgan pentru conectiva „$\uparrow$”: $\neg(p \uparrow q) \equiv \neg p \downarrow \neg q$;
3. asociativitatea conectivei „$\uparrow$”: $p \uparrow (q \uparrow r) \equiv (p \uparrow q) \uparrow r$;
4. dacă se poate aplica o lege a lui De'Morgan pentru conectiva „$\downarrow$”: $\neg(p \downarrow q) \equiv \neg p \uparrow \neg q$;
5. dacă are loc proprietatea de absorbţie: $p \uparrow (p \downarrow q) \equiv p$;
6. distributivitatea conectivei „$\uparrow$” faţă de conectiva „$\downarrow$”: $p \uparrow (q \downarrow r) \equiv (p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow r)$;
7. distributivitatea conectivei „$\downarrow$” faţă de conectiva „$\uparrow$”: $p \downarrow (q \uparrow r) \equiv (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$.

Problema 9.1.2.

Utilizând metoda tabelelor de adevăr decideţi tipul (consistentă, inconsistentă, tautologie, contingentă) formulei A:

1. $A = \neg p \vee \neg(q \wedge r) \to q \wedge \neg p$;
2. $A = p \vee \neg(q \wedge \neg r) \to p \wedge q \wedge \neg r$;
3. $A = \neg p \vee (q \wedge \neg r) \to p \wedge \neg q \wedge r$;
4. $A = \neg(\neg p \vee q) \vee r \to \neg p \wedge \neg(q \wedge r)$;
5. $A = (p \vee q) \wedge \neg r \to p \wedge q \wedge r$;
6. $A = \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \to q \wedge \neg p$;
7. $A = p \to (q \wedge r) \vee q \wedge \neg p$

Dacă formula A este contingentă, scrieţi toate modelele lui A, sau anti-modelele sale, dacă sunt mai puţine decât modelele.

Problema 9.1.3.

Demonstraţi că au loc următoarele relaţii de consecinţă logică:

1. $p \to q \models (q \to r) \to (p \to r)$;
2. $p \to q \models (r \to p) \to (r \to q)$;
3. $p \to q \models (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$;
4. $p \to q \models (q \to r) \to (p \to q \wedge r)$;
5. $p \to q \models (q \to r) \to (p \to q \vee r)$;
6. $p \to r \models (q \to r) \to ((p \vee q) \to r)$;
7. $p \to (q \to r) \models (p \to q) \to (p \to r)$

folosind metoda tabelelor de adevăr.

Problema 9.1.4.

Demonstraţi că formulele următoare sunt tautologii utilizând metoda tabelelor de adevăr.

1. legea permutării premiselor: $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$;
2. semidistributivitatea la stânga a conectivei „$\to$” faţă de „$\wedge$”: $(p \to (q \wedge r)) \to ((p \to q) \wedge (p \to r))$;
3. semidistributivitatea la stânga a conectivei „$\to$” faţă de „$\vee$”: $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$;
4. regula silogismului: $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$;
5. semidistributivitatea la stânga a conectivei „$\vee$” faţă de „$\to$”: $p \vee (q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$;
6. legea separării premiselor: $(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$;

7. legea reunirii premiselor: $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$.

Problema 9.1.6.

Aduceţi la FNC (forma normală conjunctivă) şi FND (forma normală disjunctivă):

1. legea separării premiselor: $(U \wedge V \to Z) \to (U \to (V \to Z))$;
2. semidistributivitatea la stânga a disjuncţiei faţă de implicaţie:
   $U \vee (V \to Z) \to ((U \vee V) \to (U \vee Z))$;
3. legea permutării premiselor: $(U \to (V \to Z)) \to (V \to (U \to Z))$;
4. semidistributivitatea la stânga a implicaţiei faţă de conjuncţie:
   $(U \to (V \wedge Z)) \to ((U \wedge V) \to (U \wedge Z))$;
5. regula silogismului: $(U \to V) \wedge (V \to Z) \to (U \to Z)$;
6. axioma a doua a calculului propoziţional: $(U \to (V \to Z)) \to ((U \to V) \to (U \to Z))$;
7. teorema de tăiere: $(U \to V) \wedge (U \wedge V \to Z) \to (U \to Z)$

Folosind una din aceste forme normale, demonstraţi că această lege sau proprietate este o formulă validă în calculul propoziţional.

Problema 9.1.7.

Utilizând forma normală adecvată (FNC sau FND) demonstraţi:

1. $\models (U \to (V \to Z)) \to (U \wedge V \to Z)$;
2. $\models (U \to V) \to ((V \to Z) \to (U \to V \wedge Z))$;
3. $\models (U \to (V \wedge Z)) \to ((U \to V) \wedge (U \to Z))$;
4. $\models (U \to V) \to ((V \to Z) \to (U \to V \vee Z))$;
5. $\models (U \to V) \to ((Z \to U) \to (Z \wedge U \to V))$;
6. $\models (U \to V) \to ((U \to Z) \to (U \to (V \wedge Z)))$;
7. $\models (U \to Z) \to ((V \to Z) \to (U \vee V \to Z))$.

Problema 9.1.8.

Utilizând forma normală adecvată scrieţi toate modelele formulelor:

1. $(p \vee q \to r) \to (p \to r) \wedge q$;
2. $\neg(\neg p \vee q) \vee r \to \neg p \wedge \neg(q \wedge r)$;
3. $(p \wedge q \to r) \to (p \to r) \wedge q$;
4. $(p \vee q) \wedge \neg r \to p \wedge q \wedge r$;
5. $p \vee \neg(q \wedge \neg r) \to p \wedge q \wedge \neg r$;
6. $(p \vee q \to r) \to (q \to r) \wedge p$;
7. $(q \vee r \to p) \to (p \to r) \wedge q$.

Problema 9.1.9.

Demonstraţi că următoarele formule sunt inconsistente folosind forma normală adecvată:

1. $(U \to (V \to Z)) \wedge \neg((U \to V) \to (U \to Z))$;
2. $(\neg U \vee V) \wedge \neg(\neg V \to \neg U)$;
3. $(U \to V) \wedge (U \wedge V \to Z) \wedge (U \wedge \neg Z)$;
4. $(U \to (V \vee Z)) \wedge (\neg(U \to V) \wedge \neg(U \to Z))$;
5. $U \wedge (V \to Z) \wedge ((U \wedge V) \wedge \neg(U \wedge Z))$;
6. $(U \to (V \to Z)) \wedge (U \wedge V \wedge \neg Z)$;
7. $(U \to (V \to Z)) \wedge \neg(V \to (U \to Z))$.

Problema 9.1.14.

Folosind metoda tabelelor semantice (construcţia arborelui binar) decideţi tipul formulei A. Dacă A este consistentă, scrieţi toate modelele sale:

1. $A = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \to (q \leftrightarrow r)$;
2. $A = (p \vee q \to r) \to (p \vee r \to q)$;
3. $A = (p \wedge q \to r) \to (p \to r) \wedge q$;

4. $A = (q \vee r \to p) \to (p \to r) \wedge q$;
5. $A = (r \vee q) \vee (p \to \neg r) \to (p \leftrightarrow q)$;
6. $A = (r \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg r) \to (p \leftrightarrow q)$;
7. $A = (q \wedge r \to p) \to (p \to r) \wedge q$.

Problema 9.1.15.

Demonstraţi că formula A este tautologie folosind metoda tabelelor semantice (construcţia arborelui binar):

1. legea permutării premiselor: $A = (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$;
2. legea separării premiselor: $A = (p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$;
3. distributivitatea la stânga a conectivei „$\to$” faţă de „$\vee$”:
   $A = (p \to q \vee r) \leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$;
4. teorema de tăiere: $A = (p \to q) \wedge (p \wedge q \to r) \to (p \to r)$;
5. legea reunirii premiselor: $A = (p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$;
6. $A = (p \to q) \to ((r \to t) \to (p \wedge r \to q \wedge t))$;
7. distributivitatea la stânga a conectivei „$\to$” faţă de „$\wedge$”:
   $A = (p \to q \wedge r) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$.

Problema 9.1.16.

Folosind metoda tabelelor semantice (construcţia arborelui binar) demonstraţi că au loc relaţiile de consecinţă logică:

1. $p \to q \vee r \models (p \to q) \vee (p \to r)$;
2. $p \to (q \to r), r \vee \neg q \models (p \to \neg q) \vee r$;
3. $\neg (p \to r) \to \neg p \models (p \to q) \to (p \to r)$;
4. $p \to (\neg q \vee \neg r \wedge s), p, r \models \neg q$;
5. $p \to q \models (r \to t) \to (p \wedge r \to q \wedge t)$;
6. $p \to q, r \to t, p \wedge r \models q \wedge t$;
7. $p \to (q \to r) \models q \to (p \to r)$.

Problema 9.1.19*.

Folosind strategia saturării pe nivele verificaţi dacă au loc relaţiile:

1. $\neg p \to (\neg q \to r) \models (\neg p \to q) \vee r$;
2. $p \vee (q \to r), q \wedge r \models p \to (q \to r)$;
3. $p \wedge (q \to r), q \vee r \models p \to (q \to r)$;
4. $p \to r, q \to t, p \wedge q \models r \wedge t$;
5. $p \to (q \vee r \wedge s), p, \neg r \models q \vee r$;
6. $p \to (\neg q \vee r \wedge s), p, \neg s \models \neg q \vee s$;
7. $p \to q, r \to t, p \wedge r \models q \wedge t$.

Problema 9.1.22.

Folosind rezoluţia generală demonstraţi că formulele următoare sunt tautologii:

1. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$;
2. $(B \to A) \wedge (C \to A) \to (B \wedge C \to A)$;
3. $(B \to A) \wedge (C \to A) \to (B \vee C \to A)$;
4. $(A \to C) \to ((\neg A \to B) \to (\neg B \to C))$;
5. $A \vee (B \to C) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$;
6. $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$;
7. $(A \to B) \to ((\neg A \to C) \to (\neg B \to C))$.

Problema 9.1.23.

Demonstraţi inconsistenţa următoarelor mulţimi de clauze folosind rezoluţia blocării. Alegeţi două indexări diferite pentru literalii din clauze.

1. $\{p \vee q, p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee r, \neg p \vee \neg r\}$;
2. $\{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg r, \neg p \vee r, p \vee r\}$;

3. $\{p \vee q, p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee \neg r, r, \neg p \vee r\}$;
4. $\{p \vee q, \neg p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee \neg r, \neg q \vee r\}$;
5. $\{p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q \vee r, p \vee q, \neg r\}$;
6. $\{p \vee q, \neg p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee \neg q, r\}$;
7. $\{p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, r \vee q, \neg r \vee q\}$.

Problema 9.1.24.

Construiţi o respingere liniară din mulţimea de clauze S. Există respingeri input şi unit din S?

1. $S = \{p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r, \neg p \vee r\}$;
2. $S = \{p \vee \neg r, q \vee r, \neg q \vee r, \neg p \vee \neg r\}$;
3. $S = \{q \vee r, \neg p, \neg q \vee r, p \vee \neg r\}$;
4. $S = \{\neg p \vee q, p \vee \neg q \vee r, \neg r, p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q\}$;
5. $S = \{p \vee r, \neg q, p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg r, q \vee r\}$;
6. $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q, p \vee \neg q\}$;
7. $S = \{p, q \vee r, \neg p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q\}$.

Problema 9.1.24*.

Utilizând strategia eliminării verificați inconsistența mulțimilor de clauze de mai jos. Eliminați o clauză (la alegere) și folosind aceeași strategie verificați inconsistența noii mulțimi.

1. $S = \{p \vee q \vee r, \neg q \vee r, \neg r, \neg p \vee r\}$;
2. $S = \{p \vee \neg r, q \vee r, \neg q \vee r, \neg p \vee \neg r\}$;
3. $S = \{q \vee r, \neg p, \neg q \vee r, p \vee \neg r\}$;
4. $S = \{\neg p \vee q, p \vee \neg q \vee r, \neg r, p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q\}$;
5. $S = \{p \vee r, \neg q, p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg r, q \vee r\}$;
6. $S = \{p \vee q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q, p \vee \neg q\}$;
7. $S = \{p, q \vee r, \neg p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q\}$.

Problema 9.1.25.

Utilizând strategia mulţimii suport demonstraţi că au loc următoarele deducţii:

1. $\neg(p \vee q) \to r, \neg p \vee q \vee r, \neg r \vdash q \wedge \neg r$;
2. $p \vee \neg r, \neg q \to r, \neg q \vdash \neg(p \to q)$;
3. $q \wedge r \to p, p \vee q, q \to r \vdash p$;
4. $r \to p \vee q, \neg p \to r, \neg q \vdash p \wedge \neg q$;
5. $\neg p \to q, (q \to r) \wedge \neg r \vdash p \wedge \neg r$;
6. $q \to p, q \vee r, p \to r \vdash r$;
7. $\neg p \to q \vee r, \neg q, p \to q \vdash \neg(p \vee q) \wedge r$.

Problema 9.1.26.

Demonstrați legea silogismului: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ utilizând:

1. o metodă sintactică;
2. o metodă semantică;
3. o metodă directă;
4. o metodă prin respingere;
5. o metodă semantică și directă;
6. o metodă sintactică și directă;
7. o metodă semantică și prin respingere.

9.2. Probleme din logica predicatelor

Problema 9.2.6.

Construiţi toate formele normale prenexe, Skolem şi clauzale ale următoarelor formule:

1. $(\exists x)(\neg(\exists y) p(y) \to (\forall y)(q(y) \to r(x)))$;
2. $(\exists x)((\exists y) p(y) \to \neg(\forall y)(q(y) \to r(x)))$;
3. $(\forall x)(\neg(\exists y) p(y) \to (\forall y)(q(y) \to r(x)))$;

4. $(\forall x)\,((\exists y)p(y) \to \neg(\forall y)(q(y) \to r(x)))$;
5. $(\exists x)\,((\forall y)p(y) \to \neg(\exists y)(q(y) \to r(x)))$;
6. $(\forall x)\,(\neg(\forall y)p(y) \to (\exists y)(q(y) \to r(x)))$;
7. $(\forall x)\,((\forall y)p(y) \to \neg(\exists y)(q(y) \to r(x)))$.

Problema 9.2.7.

Aduceţi la o formă normală prenexă şi la o formă normală clauzală următoarele formule:

1. $(\forall x)(\forall y)((\exists z)p(z) \wedge (\exists u)(q(x,u) \to (\exists z)q(y,z)))$;
2. $(\exists x)(\forall y)((\exists z)p(z) \wedge (\exists u)(q(x,u) \to (\exists z)q(y,z)))$;
3. $(\forall x)(\exists y)((\exists z)p(z) \wedge (\exists u)(q(x,u) \to (\exists z)q(y,z)))$;
4. $(\exists x)(\exists y)((\exists z)p(z) \wedge (\forall u)(q(x,u) \to (\exists z)q(y,z)))$;
5. $(\forall x)(\exists y)((\exists z)p(z) \wedge (\forall u)(q(x,u) \to (\exists z)q(y,z)))$;
6. $(\forall x)(\forall y)((\exists z)p(z) \wedge (\forall u)(q(x,u) \to (\exists z)q(y,z)))$;
7. $(\forall x)(\forall y)((\exists z)p(z) \wedge (\exists u)(q(x,u) \to (\forall z)q(y,z)))$.

Problema 9.2.8.

Sunt unificabili atomii din perechile următoare? Dacă da, aflaţi cel mai general unificator al acestora. Prin convenţie: *a*,*b*,*c*– constante, *x,y,z,u*– variabile, *f,g,h*– simboluri de funcţii.

1. $P(a,x,g(g(y)))$ şi $P(y,f(z),f(z))$;
   $P(x,g(f(a)),f(x))$ şi $P(f(y),z,y)$;
   $P(a,x,g(g(y)))$ şi $P(z,h(z,u),g(u))$;
2. $P(a,x,f(g(y)))$ şi $P(y,f(z),f(z))$;
   $P(x,g(f(a)),f(b))$ şi $P(f(y),z,z)$;
   $P(a,x,f(g(y)))$ şi $P(z,h(z,u),f(b),z)$;
3. $P(a,f(x),g(h(y)))$ şi $P(y,f(z),g(z))$;
   $P(x,g(f(a)),h(x,y))$ şi $P(f(z),g(z),y)$;
   $P(g(y),x,f(g(y)))$ şi $P(z,h(z,u),f(u))$;
4. $P(a,g(x),f(g(y)))$ şi $P(y,z,f(z))$;
   $P(b,g(f(a)),z)$ şi $P(f(y),z,g(y))$;
   $P(a,h(x,b),f(g(y)))$ şi $P(z,h(z,u),f(u))$;
5. $P(a,x,g(f(y)))$ şi $P(f(z),z,g(x))$;
   $P(a,x,g(f(y)))$ şi $P(x,y,g(f(b)))$;
   $P(a,h(x,u),g(z))$ şi $P(y,h(y,f(z)),g(x))$;
6. $P(a,y,g(f(z)))$ şi $P(z,f(z),x)$;
   $P(y,f(x),z)$ şi $P(y,f(y),f(y))$;
   $P(h(x,y),x,y)$ şi $P(h(y,x),f(z),z)$;
7. $P(a,x,g(f(y)))$ şi $P(f(y),z,x)$;
   $P(x,a,g(b))$ şi $P(f(y),f(y),g(x))$;
   $P(h(x,a),f(z),z)$ şi $P(h(y,x),f(x),a)$.

Problema 9.2.13.

Utilizând metoda tabelelor semantice (construind arborele binar), demonstraţi:

1. distributivitatea cuantificatorului „ $\exists$ ” faţă de „ $\vee$ ”:
   $\vdash (\exists x)(p(x) \vee q(x)) \leftrightarrow (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$;
2. distributivitatea cuantificatorului „ $\forall$ ” faţă de „ $\wedge$ ”:
   $\vdash (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \wedge q(x))$;
3. semidistributivitatea cuantificatorului „ $\forall$ ” faţă de „ $\to$ ”:
   $\vdash (\forall x)(p(x) \to q(x)) \to ((\forall x)p(x) \to (\forall x)q(x))$;
   Arătaţi că implicaţia inversă nu are loc.
4. semidistributivitatea cuantificatorului „ $\exists$ ” faţă de „ $\wedge$ ”:
   $\vdash (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \to (\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)$;
   Arătaţi că implicaţia inversă nu are loc.

5. semidistributivitatea cuantificatorului „ $\forall$ ” faţă de „ $\vee$ ”:
$\vdash (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \to (\forall x)(p(x) \vee q(x))$;
Arătaţi că implicaţia inversă nu are loc.
6. $\vdash (\forall x)p(x) \wedge ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)) \leftrightarrow (\forall x)p(x)$;
7. $\vdash (\exists x)p(x) \vee (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\exists x)p(x)$.

Problema 9.2.14.

Utilizând metoda tabelelor semantice (construind arborele binar), verificaţi dacă au loc:

1. $\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)p(x,y)$;
2. $\vdash (\exists x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$;
3. $\vdash (\forall y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$;
4. $\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$;
5. $\vdash (\forall y)(\forall x)p(x,y) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x,y)$;
6. $\vdash (\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)p(x,y)$;
7. $\vdash (\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x,y)$.

Problema 9.2.15.

Demonstraţi inconsistenţa următoarelor mulţimi de clauze utilizând rezoluţia blocării. Utilizaţi două indexări diferite pentru literalii din clauze.

1. $S = \{\neg p(x) \vee q(x), p(a), \neg q(x) \vee \neg r(x), \neg w(a), r(y) \vee w(y)\}$;
2. $S = \{p(x) \vee \neg q(x), \neg p(a) \vee r(x), q(x), w(z), \neg r(y) \vee \neg w(y)\}$;
3. $S = \{p(x) \vee q(x) \vee r(x), \neg p(a), \neg q(x), \neg w(a), \neg r(y) \vee w(y)\}$;
4. $S = \{p(x) \vee q(x), \neg p(x) \vee r(x), \neg q(y) \vee r(y), \neg r(x) \vee w(x), \neg w(f(z))\}$
5. $S = \{p(x) \vee q(x), \neg p(a) \vee w(x), \neg q(y) \vee r(y), \neg r(x) \vee w(x), \neg w(a)\}$;
6. $S = \{\neg p(x) \vee \neg q(x), p(z) \vee w(x), q(y) \vee w(y) \vee \neg r(y),$
$\neg r(x) \vee \neg w(x), r(g(a,b))\}$;
7. $S = \{p(x) \vee q(x), \neg p(x), \neg q(f(a)) \vee r(z), \neg w(z), \neg r(y) \vee w(y)\}$.

Problema 9.2.16.

Verificaţi dacă următoarele formule sunt teoreme utilizând rezoluţia generală:

1. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)p(x,y,z) \to (\exists y)(\forall z)p(z,y,z)$;
2. $(\forall x)(\forall y)((p(x,y) \to p(y,x)) \to (\forall x)p(x,x)$;
3. $((\exists x)p(x) \to (\exists x)q(x)) \to (\exists x)(p(x) \to q(x))$;
4. $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \to ((\exists x)p(x) \to (\exists x)q(x))$;
5. $p(a) \wedge (\forall x)(p(x) \to p(f(x))) \to (\forall x)p(x)$;
6. $(\forall x)(\forall y)(q(x,y) \to p(x,y)) \to ((\forall z)q(z,z) \to (\forall x)p(x,x))$;
7. $((\forall x)p(x) \to (\forall x)q(x)) \to (\forall x)(p(x) \to q(x))$.

Problema 9.2.17.

Verificaţi dacă se poate obţine concluzia pornind de la ipoteze, prin utilizarea rezoluţiei cu strategia input şi a clauzei rădăcină negativă:

1. $(\forall x)(\forall y)(q(x,y) \to p(x,y)), (\forall z)q(z,z) \vdash (\forall x)p(x,x)$;
2. $(\exists x)(\forall y)(p(x,y) \to r(x)), (\forall x)(\forall y)p(x,y) \vdash (\exists z)r(z)$;
3. $(\forall x)p(a,x,x), (\forall x)(\forall y)(\forall h)(\forall t)(p(t,x,y) \to p(f(h,t),x,f(h,y)))$
$\vdash p(f(2,a), f(3,a), f(2,f(3,a)))$;
4. $(\forall x)(p(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to q(y)), p(a), p(b) \vdash (\exists z)q(z)$;
5. $(\forall x)(\neg p(x) \wedge \neg q(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to w(y)), (\forall x)(w(x) \to p(x)),$

$\neg p(a), \neg p(b), \neg w(c) \vdash (\exists z)q(z)$;

6. $(\forall x)(p(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to q(y)), r(a), r(b), \neg r(c) \vdash (\exists z)q(z)$;
7. $(\forall x)(p(x) \to r(x)), (\forall y)(p(y) \to q(y)), p(a), p(b), \neg p(c) \vdash (\exists z)q(z)$.

Problema 9.2.18.

Să se demonstreze deducţiile următoare utilizând o strategie/rafinare a rezoluţiei:

1. $(\forall x)(\forall y)(p(y,x) \wedge q(x) \to q(y)), (\forall x)(\forall y)(r(y,x) \to q(y)),$
   $r(b,a), p(c,b) \vdash (\exists z)q(z)$;
2. $(\forall x)(p(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to q(y)), p(a), p(b) \vdash (\exists z)q(z)$;
3. $(\forall x)(\neg p(x) \wedge \neg q(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to w(y)), (\forall x)(w(x) \to p(x)),$
   $\neg p(a), \neg p(b), \neg w(c) \vdash (\exists z)q(z)$;
4. $(\forall x)(p(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to q(y)), r(a), r(b), \neg r(c) \vdash (\exists z)q(z)$;
5. $(\forall x)(\neg p(x) \wedge \neg q(x) \to r(x)), (\forall y)(r(y) \to w(y)), (\forall x)(w(x) \to p(x)),$
   $\neg p(a), \neg w(c) \vdash (\exists z)q(z)$;
6. $(\forall x)(\forall y)(\neg p(y,x) \to q(y)), (\forall x)(\forall y)(r(y,x) \wedge q(x) \to q(y)),\ r(b,a), \neg p(a,b) \vdash (\exists z)q(z)$;
7. $(\forall x)(p(x) \to r(x)), (\forall y)(p(y) \to q(y)), p(a), \neg r(c) \vdash (\exists z)q(z)$.

Problema 9.2.19.

Utilizând rezoluţia liniară, demonstraţi:

1. semidistributivitatea cuantificatorului „ $\forall$ ” faţă de „ $\vee$ ”:
   $\vdash (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \to (\forall x)(p(x) \vee q(x))$;
   Arătaţi că implicaţia inversă nu are loc.
2. semidistributivitatea cuantificatorului „ $\exists$ ” faţă de „ $\wedge$ ”:
   $\vdash (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \to (\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)$;
   Arătaţi că implicaţia inversă nu are loc.
3. $\vdash (\exists x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$;
4. distributivitatea cuantificatorului „ $\exists$ ” faţă de „ $\vee$ ”:
   $\vdash (\exists x)(p(x) \vee q(x)) \leftrightarrow (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$;
5. $\vdash (\exists x)p(x) \vee (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\exists x)p(x)$;
6. semidistributivitatea cuantificatorului „ $\forall$ ” faţă de „ $\to$ ”:
   $\vdash (\forall x)(p(x) \to q(x)) \to ((\forall x)p(x) \to (\forall x)q(x))$;
   Arătaţi că implicaţia inversă nu are loc.
7. $\vdash (\forall x)p(x) \wedge ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)) \leftrightarrow (\forall x)p(x)$.

Problema 9.2.20.

Verificaţi următoarele echivalenţe utilizând rezoluţia blocării:

1. $(\forall x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$;
2. $(\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)p(x,y)$;
3. $(\forall x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)p(x,y)$;
4. $(\exists x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$;
5. $(\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x,y)$;
6. $(\forall y)(\forall x)p(x,y) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x,y)$;
7. $(\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)p(x,y)$.

Problema 9.2.21.

Utilizând rezoluţia generală, verificaţi dacă formulele următoare sunt sau nu sunt teoreme:

1. $(\forall x)(\exists y)\neg(p(y,x) \leftrightarrow \neg p(y,y))$;
2. $(\forall x)(\exists y)\neg(p(x,y) \leftrightarrow \neg p(y,y))$;
3. $(\forall x)(\exists y)\neg(p(y,y) \leftrightarrow \neg p(x,y))$;

4. $(\forall x)(\exists y)\neg(p(y,y) \leftrightarrow \neg p(y,x))$;
5. $(\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)p(x,y)$;
6. $(\exists y)(\exists x)p(x,y) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x,y)$;
7. $(\forall y)(\forall x)p(x,y) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x,y)$.

9.3. Probleme cu algebre booleene, funcţii booleene şi circuite logice

Problema 9.3.1.

Pentru următoarele funcţii booleene de trei variabile, date prin intermediul tabelelor de valori, scrieţi cele două forme canonice: *conjunctivă* (FCC) şi *disjunctivă* (FCD). Simplificaţi funcţiile utilizând diagrame Veitch.

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1

Problema 9.3.2.

Simplificaţi următoarele funcţii booleene de patru variabile, date prin formele canonice disjunctive, utilizând diagrame Veitch:

1. $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\vee\, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$;
2. $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\vee\, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$;
3. $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\vee\, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$;
4. $f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\vee\, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$;
5. $f_5(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
$\vee\, x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$;
6. $f_6(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$\vee\, \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$;
7. $f_7(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$
$\vee\, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$.

Problema 9.3.3.

Simplificaţi următoarele funcţii booleene de trei variabile, date prin mintermii expresiilor, utilizând diagrame Karnaugh:

1. $f_1(x_1,x_2,x_3)= m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$;
2. $f_2(x_1,x_2,x_3)= m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$;
3. $f_3(x_1,x_2,x_3)= m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$;
4. $f_4(x_1,x_2,x_3)= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6$;
5. $f_5(x_1,x_2,x_3)= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$;
6. $f_6(x_1,x_2,x_3)= m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$;
7. $f_7(x_1,x_2,x_3)= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$.

Problema 9.3.4.

Utilizând metoda lui Quine simplificaţi următoarele funcţii booleene de trei variabile:

1. $f_1(x_1,x_2,x_3)= x_1(\bar{x}_2 \uparrow x_3) \vee \bar{x}_1x_2$;   2. $f_2(x_1,x_2,x_3)= x_3(x_1 \vee x_2) \vee (\bar{x}_2 \downarrow x_3)$;

3. $f_3(x_1,x_2,x_3)= x_2(x_1 \uparrow \overline{x}_3) \vee \overline{x}_2 x_3$; 4. $f_4(x_1,x_2,x_3)= x_1(x_2 \vee x_3) \vee (x_1 \downarrow \overline{x}_3)$;

5. $f_5(x_1,x_2,x_3)= x_3(\overline{x}_1 \uparrow x_2) \vee x_1\overline{x}_3$; 6. $f_6(x_1,x_2,x_3)= x_2(x_1 \vee x_3) \vee (\overline{x}_1 \downarrow x_2)$;

7. $f_7(x_1,x_2,x_3)= x_2(\overline{x}_1 \uparrow x_3) \vee x_1\overline{x}_2$.

Problema 9.3.5.

Simplificaţi următoarele funcţii booleene de patru variabile date prin valorile de 1, utilizând metoda lui Quine:

1. $f_1(1,1,1,1)=1$, $f_1(1,1,0,1)=1$, $f_1(0,1,1,1)=1$, $f_1(1,1,0,0)=1$, $f_1(0,1,0,0)=1$, $f_1(0,0,0,0)=1$, $f_1(0,0,0,1)=1$, $f_1(0,0,1,1)=1$;
2. $f_2(1,1,0,1)=1$, $f_2(0,1,0,1)=1$, $f_2(0,1,0,0)=1$, $f_2(0,0,0,0)=1$, $f_2(0,0,1,0)=1$, $f_2(1,0,1,1)=1$, $f_2(1,0,0,1)=1$, $f_2(0,0,1,1)=1$;
3. $f_3(0,1,0,1)=1$, $f_3(0,1,0,0)=1$, $f_3(0,1,1,0)=1$, $f_3(1,0,1,0)=1$, $f_3(1,0,0,0)=1$, $f_3(0,0,1,0)=1$, $f_3(1,0,0,1)=1$, $f_3(0,0,0,1)=1$;
4. $f_4(0,1,0,1)=1$, $f_4(0,1,1,1)=1$, $f_4(1,1,1,0)=1$, $f_4(1,1,0,0)=1$, $f_4(0,1,1,0)=1$, $f_4(1,0,0,0)=1$, $f_4(0,0,0,0)=1$, $f_4(0,0,0,1)=1$;
5. $f_5(1,1,1,1)=1$, $f_5(0,1,0,1)=1$, $f_5(0,1,1,1)=1$, $f_5(1,1,1,0)=1$, $f_5(1,1,0,0)=1$, $f_5(1,0,0,0)=1$, $f_5(1,0,0,1)=1$, $f_5(0,0,0,1)=1$;
6. $f_6(1,1,0,1)=1$, $f_6(0,1,0,1)=1$, $f_6(0,1,1,1)=1$, $f_6(1,1,1,0)=1$, $f_6(0,1,1,0)=1$, $f_6(1,0,1,0)=1$, $f_6(1,0,1,1)=1$, $f_6(1,0,0,1)=1$;
7. $f_7(1,1,1,1)=1$, $f_7(1,1,0,1)=1$, $f_7(0,1,0,1)=1$, $f_7(0,1,0,0)=1$, $f_7(0,1,1,0)=1$, $f_7(0,0,1,0)=1$, $f_7(1,0,1,1)=1$, $f_7(0,0,1,1)=1$.

Problema 9.3.6.

Simplificaţi următoarele funcţii booleene de trei variabile date prin zerourile acestora, utilizând metoda lui Quine:

1. $f_1(0,1,0) = f_1(0,1,1) = f_1(1,0,1) = 0$;
2. $f_2(0,0,0) = f_2(0,0,1) = f_2(1,1,1) = 0$;
3. $f_3(0,0,1) = f_3(0,1,0) = f_3(1,1,0) = 0$;
4. $f_4(0,0,0) = f_4(0,1,1) = f_4(1,0,0) = 0$;
5. $f_5(0,0,0) = f_5(1,1,0) = f_5(1,1,1) = 0$;
6. $f_6(0,1,0) = f_6(1,0,0) = f_6(1,0,1) = 0$;
7. $f_7(0,1,1) = f_7(1,0,0) = f_7(1,1,1) = 0$.

Problema 9.3.7.

Simplificaţi următoarele funcţii booleene de patru variabile utilizând şi diagramă Karnaugh:

1. $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_3\overline{x}_4$;
2. $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3$;
3. $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_3x_4$;
4. $f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3$;
5. $f_5(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_3x_2x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4$;
6. $f_6(x_1,x_2,x_3,x_4)= \overline{x}_1\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3\overline{x}_4$;
7. $f_7(x_1,x_2,x_3,x_4)= \overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3 \vee x_1\overline{x}_4$.

Problema 9.3.8.

Desenaţi circuitul logic asociat funcţiei booleene de mai jos, simplificaţi funcţia şi desenaţi circuitele logice corespunzătoare tuturor formelor simplificate ale funcţiei, utilizând doar porţi de bază:

1. $f_1(\mathrm{x, y}, z) = \mathrm{x}(\mathrm{y} \oplus \mathrm{z}) \vee \mathrm{y}(\mathrm{x} \oplus \mathrm{z}) \vee \mathrm{x}(\overline{\mathrm{y}} \downarrow \overline{\mathrm{z}}) \vee (\mathrm{x} \downarrow \mathrm{y})\overline{\mathrm{z}}$;
2. $f_2(\mathrm{x, y, z}) = \mathrm{x}(\mathrm{y} \uparrow \mathrm{z}) \vee \overline{\mathrm{x}}(\overline{\mathrm{y}} \oplus \mathrm{z}) \vee \mathrm{y}(\overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{z}})$;
3. $f_3(\mathrm{x, y, z}) = \mathrm{x}(\overline{\mathrm{y}} \oplus \mathrm{z}) \vee \mathrm{y}(\overline{\mathrm{x}} \oplus \mathrm{z}) \vee \overline{\mathrm{x}}(\overline{\mathrm{y}} \downarrow \mathrm{z}) \vee (\overline{\mathrm{x}} \downarrow \mathrm{y})\mathrm{z}$;
4. $f_4(\mathrm{x, y, z}) = \overline{\mathrm{x}}(\mathrm{y} \uparrow \overline{\mathrm{z}}) \vee \mathrm{x}(\overline{\mathrm{y}} \oplus \mathrm{z}) \vee \overline{\mathrm{y}}(\overline{\mathrm{x}} \oplus \mathrm{z})$;
5. $f_5(\mathrm{x, y, z}) = \overline{\mathrm{x}}(\mathrm{y} \oplus \overline{\mathrm{z}}) \vee \overline{\mathrm{y}}(\mathrm{x} \oplus \mathrm{z}) \vee \overline{\mathrm{x}}(\mathrm{y} \downarrow \mathrm{z}) \vee (\overline{\mathrm{x}} \downarrow \mathrm{y})\overline{\mathrm{z}}$;
6. $f_6(\mathrm{x, y, z}) = \mathrm{x}(\overline{\mathrm{y}} \uparrow \overline{\mathrm{z}}) \vee \overline{\mathrm{x}}(\mathrm{y} \oplus \mathrm{z}) \vee \overline{\mathrm{y}}(\overline{\mathrm{x}} \oplus \mathrm{z})$;

7. $f_7(x, y, z) = x(y \oplus \overline{z}) \vee y(\overline{x} \oplus z) \vee x(y \downarrow z) \vee (x \downarrow y)\overline{z}$.

Problema 9.3.9.

Desenaţi un circuit logic având trei variabile de intrare şi conţinând toate porţile de bază şi derivate. Scrieţi funcţia booleană corespunzătoare şi simplificaţi-o, iar apoi desenaţi un circuit logic simplificat.

Problema 9.3.10.

Pentru o funcţie booleană de 4 variabile, dată prin intermediul tabelei sale de valori, scrieţi expresia corespunzătoare formei canonice disjunctive, aplicaţi o metodă de simplificare şi desenaţi circuitele logice ale tuturor formelor sale simplificate.