



1803

Segundo Examen Parcial (Parte Práctica) - Astrofísica Galáctica y Extragaláctica

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Astronomía

Alexander González Troncoso¹
¹alexander.gonzaleztr@udea.edu.co
29/10/2023

Problema

Suponga que tiene que construir un modelo para una galaxia de disco (solo disco) y que lo modelará con un perfil de Kuzmin. Suponga que le interesa estudiar las características de las órbitas de las estrellas en ese disco. Fije unos valores para los parámetros estructurales del modelo, y justifíquelos según las características que le quiera atribuir a su modelo de galaxia. Escoja un valor de masa que sea igual a $x10^{11}M_{sun}$ donde x es el último dígito de su cédula (si su cédula termina en 0, escoja $x = 1$ o $x = 9$)

1. Construya predicciones analíticas (hasta donde sea posible, “últimas consecuencias”) para las características de las órbitas levemente fuera del equilibrio calculando las frecuencias de epiciclo y vertical (anexe sus derivaciones, puede ser escrito a mano). Muestre cómo se deben comportar esas frecuencias como función de las coordenadas e interprete.
2. Utilice una aproximación de diferencias finitas (del orden que usted quiera) o un integrador numérico para integrar la órbita de una estrella en el potencial analítico de Kuzmin.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla\phi$$

Explique la forma como implementó su solución numérica al problema. Inicialmente estudie la órbita de la estrella en una configuración de equilibrio. Use la teoría para estimar las condiciones iniciales de su estrella y justifique cada paso y escogencia que haga. Integre su órbita durante al menos tres periodos orbitales y analícela a la luz de lo que predice su modelo. Luego introduzca pequeñas perturbaciones radiales y verticales al movimiento de la estrella. Justifique la magnitud de las perturbaciones

que introduce y explique cómo las implementa. Integre la órbita perturbada durante al menos tres periodos orbitales y analice los resultados a la luz de lo que predice la teoría.

3. Ahora suponga que el disco galáctico está embebido en un halo de materia oscura de masa M_h . Suponga que este halo es un esferoide achatado en uno de sus ejes (¿Cuál?). Para tal fin, modele el halo utilizando un modelo de Miyamoto-Nagai con masa M_h y parámetros de forma a_h y b_h . Escoja valores para M_h , a_h y b_h . Justifique su elección. ¿Prediga cómo cambiarían la frecuencia de epícolo y vertical de las órbitas de las estrellas en el disco al considerar la presencia del halo? ¿Cómo esperaría que fuera ese cambio? Busque una justificación clara para su predicción. Trate de simular el fenómeno considerando el potencial del disco y el halo simultáneamente.

Se recomienda usar un sistema de unidades tal que:

- Unidad de masa = 10^{10} Msun
- Unidad de longitud = 1 Kpc
- Unidad de tiempo = 1,1 Gyr
- Constante gravitacional = 43007,1

Resultados

1. Para desarrollar este punto, primero vamos a tener en cuenta el modelo de Kuzmin (que fué el primero modelo de disco galácticos que vimos en clase). En el cuál se definió el potencial de la siguiente manera, para un disco infinitesimalmente delgado.

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}} \quad (a \geq 0)$$

Ahora bien, a partir de esto podemos pensar entonces en realizar el análisis de las órbitas de las estrellas, partiendo entonces de la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

En clase, resolvimos el problema en los casos de simetría esférica y simetría Axial, en este caso en particular, vamos a utilizar el **Sistema con Simetría Axial**, en donde el potencial se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi(R, z)$$

En donde podemos escribir en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \phi(R, z) = \frac{\partial \phi}{\partial R} \hat{e}_R + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{e}_z$$

A partir de esto, se llega entonces a una definición del **potencial efectivo** que nos será útil.

$$\Phi_{eff} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

En este punto estamos haciendo una transformación de coordenadas a un sistema rotante, donde Φ es el potencial que vamos a utilizar en este caso (Kuzmin) y el segundo término debe corresponder también a un potencial, el cuál es el potencial centrípeto, en donde L_z corresponde a el momento angular, que es contante para cada órbita establecida.

Con esto se termina escribiendo dos ecuaciones de movimiento que en este caso no utilizaremos a profundidad, pero que vale la pena mencionar.

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}$$

Ahora bien, vamos a analizar el caso de pequeñas perturbaciones, en donde lo primero es que en las galaxias de disco muchas estrellas se encuentran en órbitas casi circulares, por lo que es útil derivar soluciones aproximadas a las ecuaciones mencionadas anteriormente, que sean válidas para dichas órbitas. Definimos entonces.

$$R = R_g \pm x$$

Donde R_g : es el radio guía para una órbita de momento angular L_z específico y x : es la perturbación radial $x \ll R_g$. Así pues $(x, z) = (0, 0)$ son las coordenadas en el plano meridional del mínimo en Φ_{eff} . Ahora bien, cuando expandimos Φ_{eff} en una serie de Taylor alrededor de este punto, obtenemos entonces lo siguiente:

$$\Phi_{eff} = \Phi_{eff}(R_g, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2 + O(xz^2)$$

Teniendo en cuenta que el termino que es proporcional a xz desaparece porque Φ_{eff} es asumido como simetrico alrededor de $z = 0$. Además el primer término como hicimos en clase es una constante, y podemos hacer que esta constante valga cero.

Así obtenemos entonces que la aproximación se puede escribir como:

$$\Phi_{eff}(R, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2$$

De aquí se define entonces las constantes que vamos a implementar en este punto.

■ **Frecuencia de Epiciclo:**

$$\kappa^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)}$$

■ **Frecuencia Vertical:**

$$\nu^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}$$

De esta forma, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\kappa^2 x \\ \ddot{z} &= -\nu^2 z\end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta estas ecuaciones, x y z evolucionan como los desplazamientos de dos osciladores armónicos, con frecuencias κ y ν , respectivamente. Sin embargo, si sustituimos en la ecuación para Φ_{eff} obtenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}\kappa^2(R_g) &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3}{R_g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} \\ \nu^2(R_g) &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}\end{aligned}$$

Que son las ecuaciones (3.79a) y (3.79b) del libro Galactic Dynamics, James Binney (2ed.,)

Ahora bien, lo que procede es realizar las correspondientes derivadas para encontrar estas dos frecuencias, teniendo en cuenta que el potencial efectivo se definió como el potencial (del modelo de Kuzmin):

Frecuencia de Epiciclo:

Vamos entonces a calcular las derivadas correspondientes:

$$\begin{aligned}\kappa^2(R_g) &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3}{R_g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left[-\frac{GM}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{1/2}} \right] = -GM \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{1/2}} \right] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial R} &= -GM \left(\frac{-2R}{2(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial R} &= GM \left(\frac{R}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right)\end{aligned}$$

Ahora derivamos por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} &= GM \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right] \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} &= GM \left[\frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} &= GM \left[\frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} + R \left(\frac{-3(2R)}{2(R^2 + (a + |z|)^2)^{5/2}} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} &= GM \left[\frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} - \frac{3R^2}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{5/2}} \right] \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} &= GM \frac{(a + |z|)^2 - 2R^2}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

Ahora bien, vamos a evaluar en $R = R_g$ y $z = 0$, así obtenemos nuestra expresión final.

$$\begin{aligned}\kappa^2(R_g) &= GM \frac{a^2 - 2R_g^2}{(R_g^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{3}{R_g} GM \left(\frac{R_g}{(R_g^2 + a^2)^{3/2}} \right) \\ \kappa^2(R_g) &= GM \frac{a^2 - 2R_g^2}{(R_g^2 + a^2)^{5/2}} + GM \frac{3}{(R_g^2 + a^2)^{3/2}} \\ \kappa^2(R_g) &= GM \frac{a^2 - 2R_g^2 + 3(R_g^2 + a^2)}{(R_g^2 + a^2)^{5/2}} \\ \boxed{\kappa^2(R_g) &= GM \frac{R_g^2 + 4a^2}{(R_g^2 + a^2)^{5/2}}}\end{aligned}$$

De aquí, podemos notar que la frecuencia de epícolo es más alta cerca del centro de la galaxia (donde R es pequeño) y disminuye con la distancia radial, en donde muestra justamente la disminución que existe de la influencia gravitacional con la distancia al centro galáctico.

Frecuencia Vertical:

$$\nu^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}$$

Ahora bien, en este caso, realizamos el procedimiento, pero en este caso vamos a derivar respecto a z , de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial R} \left[-\frac{GM}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{1/2}} \right] = -GM \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{1/2}} \right]$$

Para esto, vamos a tener en cuenta que $\frac{\partial}{\partial u}(|u|) = \frac{u}{|u|}$, con esto en mente, resolvemos entonces:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -GM \left[-\frac{z(a + |z|)}{|z|(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right] = GM \left[\frac{z(a + |z|)}{|z|(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right]$$

Ahora, procedemos a sacar la segunda derivada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= GM \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z(a + |z|)}{|z|(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right] \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= GM \left[-\frac{z^2(a + |z|)}{|z|^3(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} + \frac{a + |z|}{|z|(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} + \dots \right] \\ &\quad \left[\dots \frac{1}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} - \frac{3(a + |z|)^2}{R^2 + (a + |z|)^2)^{5/2}} \right] \end{aligned}$$

Ahora, esto debemos evaluarlo inicialmente en $z = 0$, por tanto, vamos a sacar el límite con z tendiendo a cero, en donde vamos a obtener lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = GM \left[\frac{1}{(R^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3a^2}{R^2 + a^2)^{5/2}} \right]$$

Luego, finalmente podemos evaluar en $R = R_g$ obteniendo la expresión:

$$\nu^2(R_g) = GM \left[\frac{1}{(R_g^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3a^2}{R_g^2 + a^2)^{5/2}} \right]$$

$$\nu^2(R_g) = GM \frac{(R_g^2 + a^2) - 3a^2}{(R_g^2 + a^2)^{5/2}}$$

$$\boxed{\nu^2(R_g) = GM \frac{R_g^2 - 2a^2}{(R_g^2 + a^2)^{5/2}}}$$

De aquí, notamos que ν es la frecuencia con la que una estrella oscilará hacia arriba y hacia abajo a través del plano de la galaxia si se perturba ligeramente de su posición de equilibrio en el plano $z = 0$. Algo muy importante es que debido a la construcción analítica que realizamos, es fundamental tener en cuenta que $R_g^2 \geq 2a^2$, para que se conserve la coherencia matemática, puesto que dicho planteamiento está diseñado para el disco de la galaxia, si miramos para valores muy pequeños podemos estar tomando el bulbo de dicha galaxia, en tal caso la frecuencia se tomaría números negativos, que matemáticamente no tienen sentido, este efecto se debe a que las estrellas no pueden experimentar oscilaciones verticales en esta zona, esta situación se le sale de las manos al modelo con el que estamos trabajando que es específicamente para el disco.

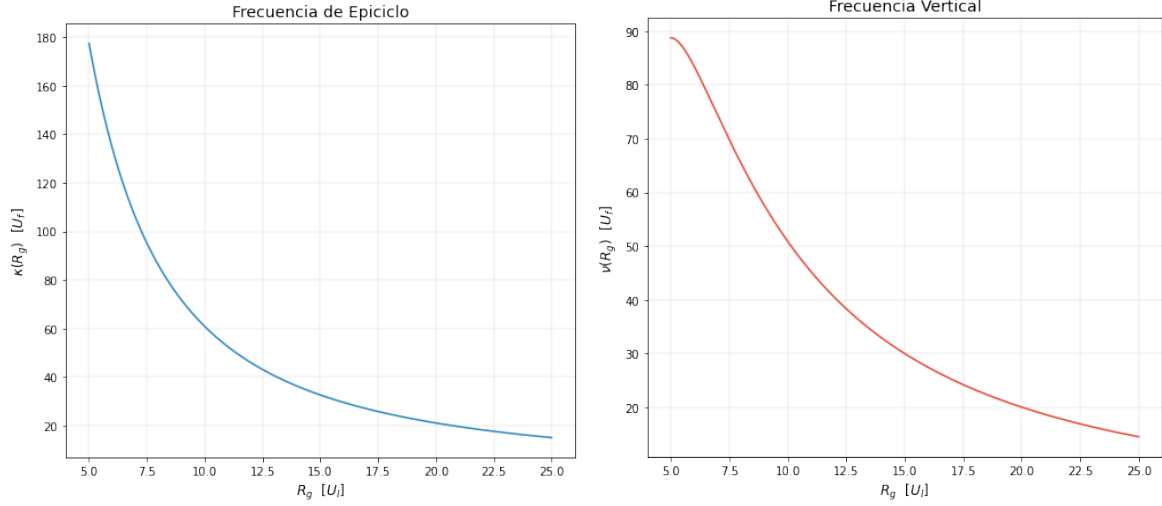


Figura 1: Frecuencias Correspondientes.

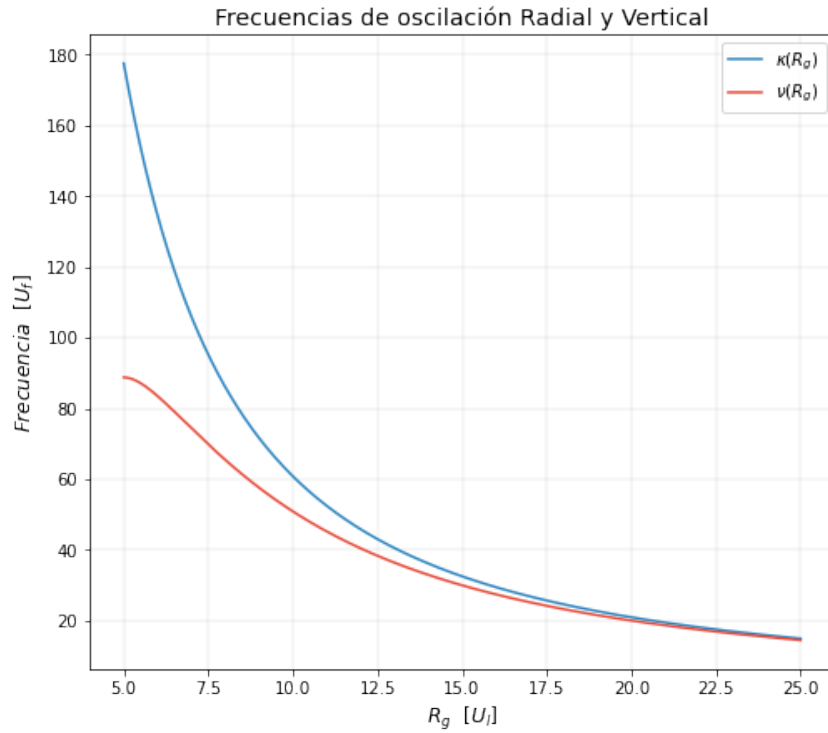


Figura 2: Comparación entre frecuencias.

Teniendo en cuenta que para realizar estas figuras, se utilizaron los siguientes parámetros.

$G = 43007,1 \text{ } Ua$ [Unidades arbitrarias]

$M = 80 \text{ } U_M$ [Unidades de masa] $\frac{8 \times 10^{11}}{1 \times 10^{10} M_\odot}$

$a = 2,5 \text{ } U_l$ [Unidades de longitud 1 Kpc], debido a que este es un valor aproximado para el caso de las galaxias de disco, reportado en (Tabla 12, pag 18 Binney) [2]

$R = [5, 25] \text{ } U_l$ [Unidades de longitud], porque el Diámetro del disco 23-30 kpc[1]

Podemos ver entonces en la Figura 2, que ambas frecuencias tienden a disminuir a medida que nos alejamos del centro, hacia las periferias del disco, la interacción gravitacional va disminuyendo, entonces la frecuencia en la que se mueven de su órbita las estrellas tanto radial como verticalmente va disminuyendo, además notamos que la frecuencia más alta se presenta hacia el centro del disco y que la frecuencia de oscilación radial es más fuerte que la oscilación vertical, debido a la forma del disco y del potencial a lo largo del mismo.

2. En este punto, vamos entonces a estudiar el movimiento de una estrella en la galaxia, para esto vamos a utilizar de nuevo el potencial de Kuzmin, el cuál viene dado por la siguiente expresión:

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}} \quad (a \geq 0)$$

Acompañado con esta teoría en [2] encontramos la siguiente figura que nos ilustra un poco la situación.

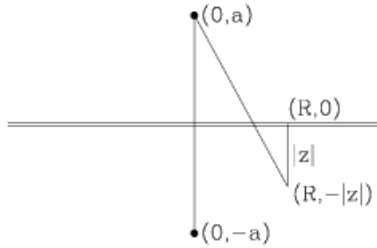


Figure 2.6 At the point $(R, -|z|)$ below Kuzmin's disk, the potential is identical with that of a point mass located distance a above the disk's center.

Como se indica en la figura, en puntos con $z < 0$, Φ_K es idéntico al potencial de una masa puntual M ubicado en el punto $(R, z) = (0, a)$, y cuando $z > 0$, Φ_K coincide con el potencial generado por una masa puntual en $(R, z) = (0, -a)$. Por lo tanto, $\nabla^2 \Phi_K$ debe desaparecer (ser cero) en todas partes excepto en el plano $z = 0$. Nos estamos ubicando entonces en una órbita que se encuentra en una configuración de equilibrio.

Primero, veamos el comportamiento de este potencial, para diferentes valores de R y tomando $z = 0$, para esto utilizaremos los mismos valores de G, M, a que en el ítem anterior.

Para esto, podemos hacerlo de dos formas, una directamente poner la ecuación presentada, pero una forma mucho más interesante es utilizando la librería de python 'galpy', la cual contiene una gran variedad de potenciales 'galpy.potential' que pueden usarse para la integración de órbitas, el cálculo de coordenadas de ángulo de acción, como parte de funciones de distribución de estado estacionario y para estudiar las propiedades de los potenciales gravitacionales. <https://docs.galpy.org/en/v1.7.2/potential.html>

Para utilizar el potencial correspondiente importamos 'KuzminDiskPotential', además es útil utilizar 'units' de astropy para tener un mejor manejo de las unidades de nuestro problema. De aquí encontramos entonces la siguiente figura.

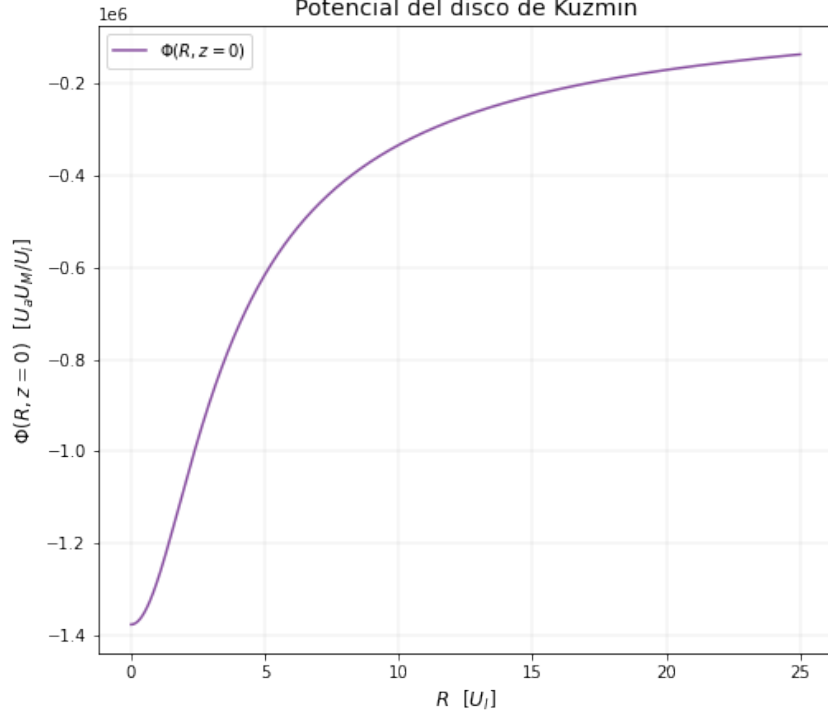


Figura 3: Potencial de Kuzmin para $z = 0$ y con $a = 2,5 [U_l]$

También podemos ver entonces como sería la velocidad circular en este caso para cada una de las órbitas, matemáticamente se puede encontrar de la siguiente manera (Con $z = 0$):

$$v_c(R) = \sqrt{R \left| \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|} = \sqrt{RGM \left(\frac{R}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \right)} \rightarrow v_c(R) = R \sqrt{\frac{GM}{(R^2 + a^2)^{3/2}}}$$

En donde la figura sería la siguiente: Para realizar la integración de la Órbita, va-

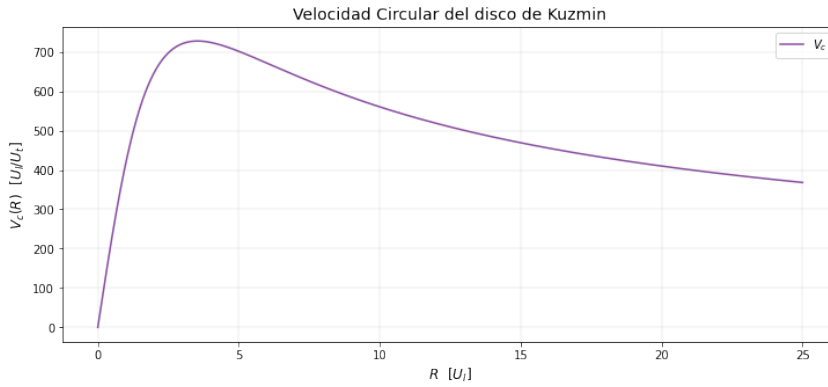


Figura 4: Velocidad Circular del disco de Kuzmin

mos entonces a tener en cuenta 'Orbit' de 'galpy.orbit', la cuál nos permite darle las

características de nuestra órbita. La inicialización más simple proporciona las condiciones iniciales directamente en el marco de coordenadas cilíndrico galactocéntrico. 'Orbit()' en este caso, calcula automáticamente la dimensionalidad del espacio a partir de las condiciones iniciales. En tres dimensiones, las condiciones iniciales se dan como $[R, v_R, v_T, z, v_z, \text{phi}]$, inicialmente como vamos a tener en cuenta una órbita de la estrella en una configuración de equilibrio, solo basta asignarle un radio a la órbita, en nuestro caso será $R = 8$ kpc, que sería como se movería aproximadamente el Sol si se encontrara en $z = 0$. El valor de v_T , en nuestro caso es la velocidad central de esa órbita y v_R, v_z son las variaciones en velocidad radial y vertical que inicialmente serán cero. Integrando por medio de Odeint, la órbita se vería de la siguiente manera:

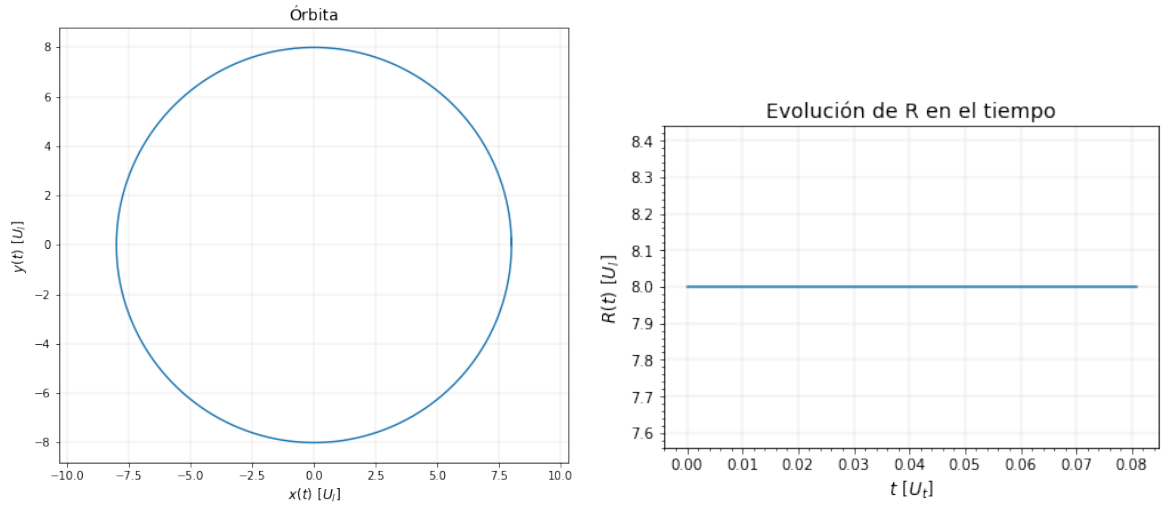


Figura 5: Órbita para estrella en $R = 8$ kpc, al no tener perturbaciones, al lado derecho podemos ver la evolución de R en el tiempo, se mantiene constante.

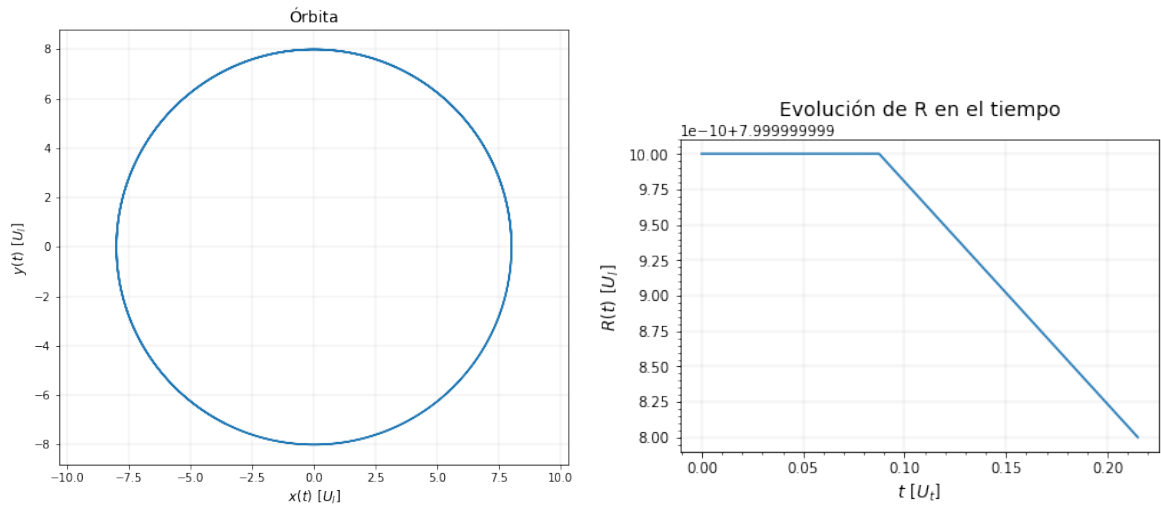


Figura 6: Órbita para estrella en $R = 8$ kpc, para 3 periodos, es decir, 3 vueltas en su órbita.

Al lado derecho de esta última figura notamos que al pasar el tiempo el R al que pusimos la estrella se mantiene constante, la escala vertical muestra variaciones de 10^{-10} (valor que se da por la naturaleza del integrador). Este resultado se mantiene en lo esperado, al no tener variaciones, nuestra estrella se va a mantenerse en esa posición de equilibrio.

Continuando un poco con la parte analítica del ítem anterior, en donde se obtuvo que las ecuaciones de movimiento se podían escribir de la siguiente manera:

$$\ddot{x} = -\kappa^2 x$$

$$\ddot{z} = -\nu^2 z$$

Cuya solución, la vimos en clase y vendrían dadas de la siguiente manera:

$$x(t) = x_0 \cos(\kappa t + \psi)$$

$$z(t) = z_0 \cos(\nu t + \xi)$$

En donde por construcción matemática teníamos que $R = R_g + x$, por lo que finalmente las expresiones quedan como:

$$R(t) = R_g + x_0 \cos(\kappa t + \psi)$$

$$z(t) = z_0 \cos(\nu t + \xi)$$

Donde R_g : es el radio guía, que en este caso se fijó el valor más cercano a 8 Kpc, debido a la construcción del primer ítem, este valor quedó como 8,003, t : es el tiempo, el cuál debe ser un arreglo, en principio, el tiempo para los 3 periodos de tiempo es aproximadamente de 0,215 Gyr, x_0 y z_0 , son las perturbaciones que vamos a tener en cuenta, estas se fijaron basandonos en el Sol, teniendo en cuenta que en clase se mencionó que el Sol está a veces más lejos y a veces más cerca del centro galáctico, pero no más de 30 pc = 0,03 Kpc. Los valores de ψ y ξ se establecieron analizando el cambio que producían en los resultados, se eligió un valor arbitrario ya que no presentaban muchos cambios en los resultados que vamos a analizar.

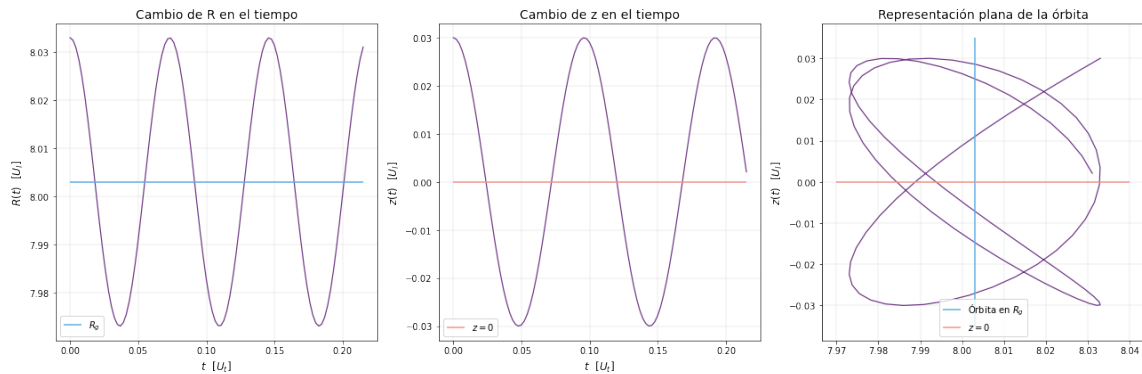


Figura 7: Representación de las variaciones en el radio y en la vertical.

Notamos entonces aquí que la variación tanto en el Radio de referencia como en la vertical es notoria, estas perturbaciones se mantienen de forma oscilante como lo esperabamos, además se nota que la frecuencia es mayor para las variaciones radiales que para las variaciones verticales como lo vimos en el primer punto, por otro lado, aunque no es tan fácil de ver, notamos que en la representación plana de la órbita el radio va variando entre valores alrededor de $R_g = 8,003$ Kpc, que fue nuestro valor de referencia, la línea azul sería la órbita circular alrededor de la galaxia y la línea rosa sería entonces la línea sobre la que está variando el z , partiendo de $z = 0$.

Por otro lado, también podemos utilizar 'galpy' como lo hicimos al inicio para mirar las órbitas perturbadas tanto de manera radial, como de manera vertical.

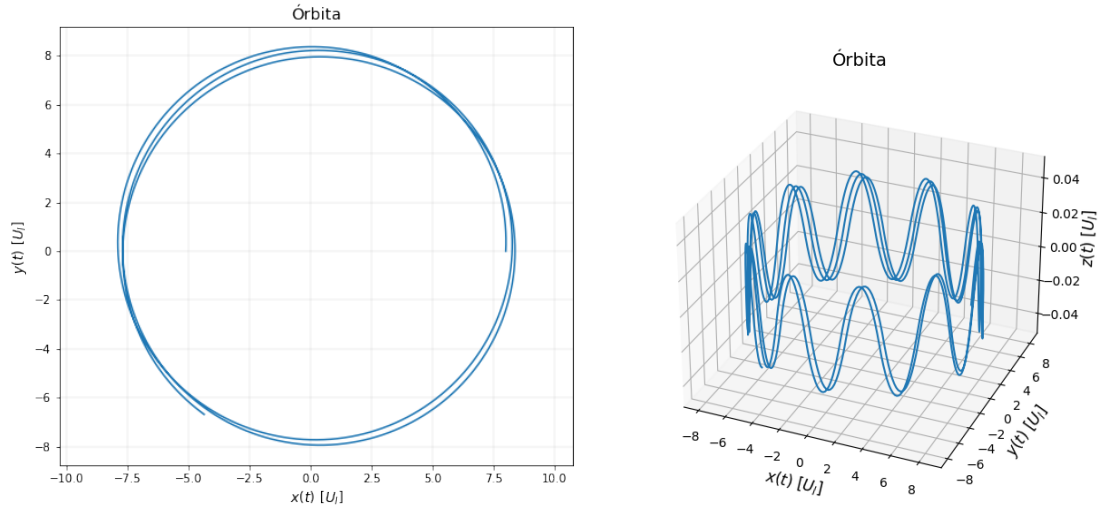


Figura 8: Representación de las variaciones en el radio y en la vertical en la órbita de nuestra estrella.

3. En este punto, vamos a introducir el hecho de que el disco galáctico está embebido en un halo de materia oscura de masa M_h . Para esto, vamos a inicialmente suponer que este halo es un esferoide achatado en uno de sus ejes, es decir, tomamos la esfera y la achatamos en una de las direcciones, esta dirección es el eje z , para formar de este modo el elipsoide. De aquí vamos a obtener simetría circular en el plano xy y la asimetría en el eje z , para la construcción de esto, vamos tener que elegir unos parámetros de forma, a_h y b_h los cuales controlan el nivel de esfericidad y el nivel de grueso del sistema respectivamente. Para definir estos valores debemos tener en cuenta la literatura y lo visto en clase, para galaxias similares a al Vía Láctea, como lo hemos venido trabajando. Para este caso, por un lado, encontramos que la masa se puede tomar como $M_h = 1,9 \times 10^{12} M_\odot$, esta masa es una gran porción de la masa de toda la galaxia, aproximadamente un 95 % de la masa total, por otro lado tenemos que la relación b_h/a_h puede tomar valores $0,8 \leq b_h/a_h \leq 0,9$ (Cap 25, Pag 1042, Carroll [1]), en nuestro caso elegiremos un razón de $b_h/a_h = 0,9$, es decir que b_h es el 90 % de a_h , ahora bien, en los puntos anteriores, hemos trabajado con $a = 2,5$ Kpc para el disco, sin embargo, teniendo en cuenta que teóricamente el radio del Halo es unas 10 veces más grande que el disco de la galaxia, entonces

vamos a asumir que ese valor de a_h también unas 10 veces más grande, en concreto tomamos $a_h = 20$ Kpc, por tanto, el valor otro parámetro es $b_h = 18$ Kpc. Además por otro lado, vamos a utilizar los radios hasta 200 Kpc. Con esto en mente, podemos inicialmente ver como sería el comportamiento de esos cascarones Elipsoides.

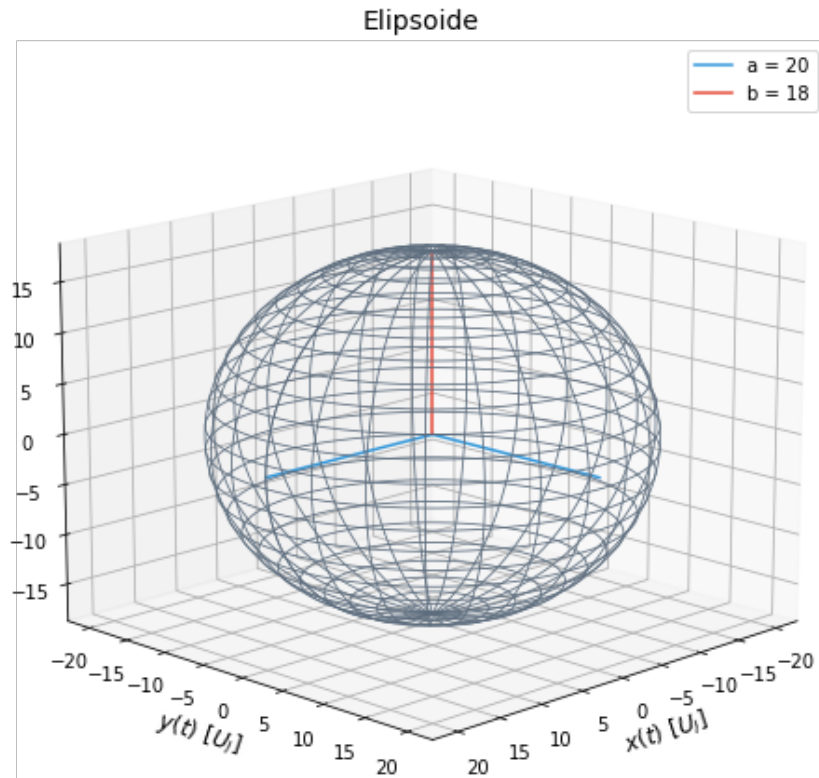


Figura 9: Elipsoide formado luego de achatar una esfera, asimétrico en el eje z

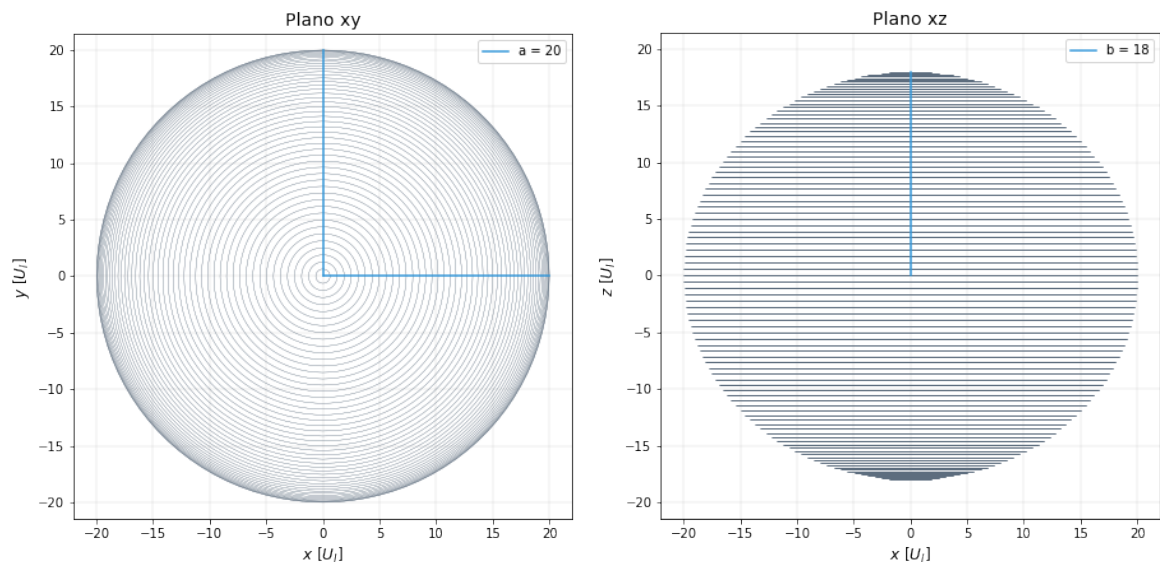


Figura 10: Vista desde diferentes planos.

En este último grafico es mucho más claro que existe una simetría en el plano xy

y una asimetría respecto al eje z , se nota por lo apretadas que están las líneas en este caso hacía los 'polos'.

Para el Halo, vamos a utilizar el modelo de **Miyamoto-Nagai**, el cuál viene dado por la siguiente expresión:

$$\Phi_M(R, z) = - \frac{GM_h}{\sqrt{R^2 + (a_h + \sqrt{b^2 + z^2})^2}}$$

Con esto en mente, podemos entonces ver como se comporta el potencial y la velocidad circular, teniendo en cuenta que podemos sumar la componente del disco y del halo, de la siguiente manera:

$$\Phi_T = \Phi_H + \Phi_D$$

Donde Φ_H :Es el potencial del Halo, por medio del modelo de Miyamoto-Nagai y Φ_D :Es el potencial del Disco, por medio del modelo de Kuzmin.

$$v^2(R) = v_{cH}^2 + v_{cD}^2$$

Que son las velocidades circulares de ambos modelos.

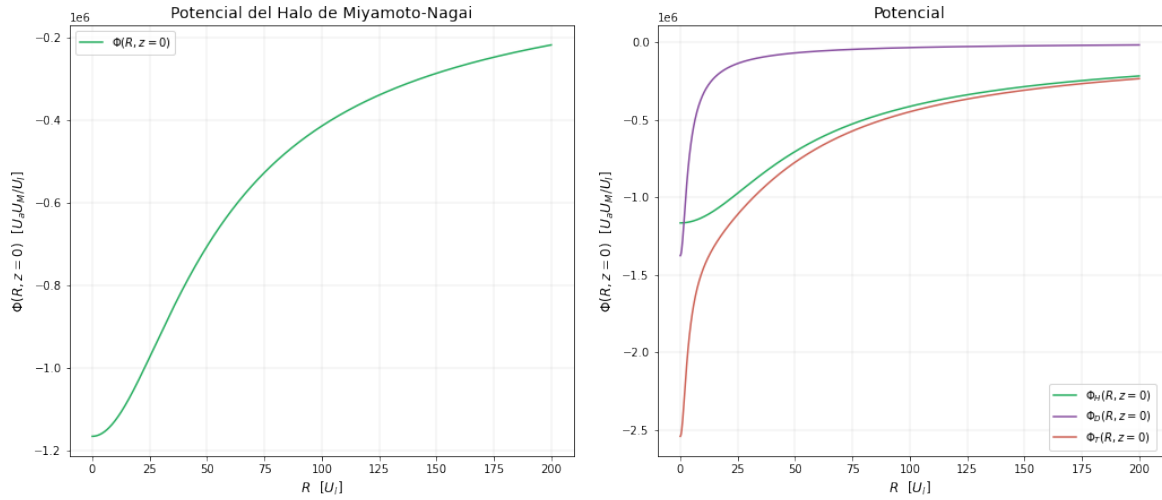


Figura 11: Potencial total, del disco y del halo

Podemos observar que de cierta forma es lo que se espera, teniendo en cuenta las observaciones que se han realizado, en donde el disco por si solo no da razón de todo lo que queda faltando, al sumar la parte del Halo, se tiene información más cercana a las observaciones.

Ahora bien, para discutir las variaciones en las frecuencias de estas oscilaciones, podemos entonces partir del hecho que mencionamos anteriormente y es que la masa del Halo de la galaxia representa casi el 95 % de la masa total de la galaxia, y esto se ve reflejado en la velocidad circular, entre más nos alejamos del centro,

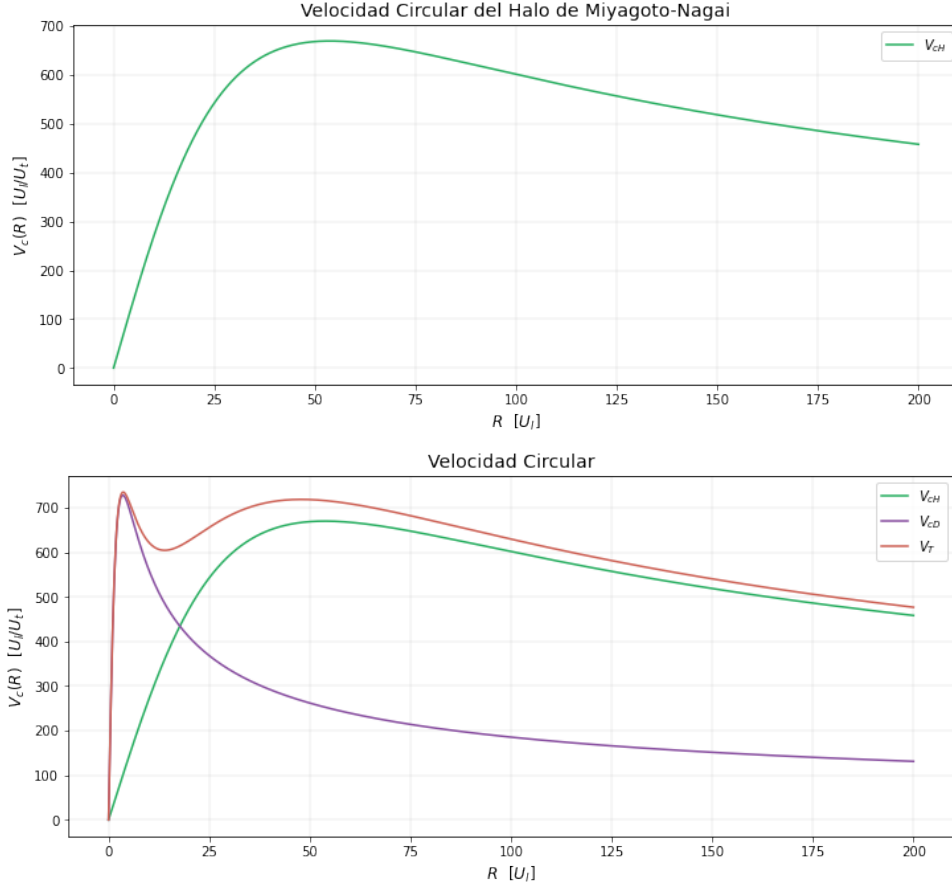


Figura 12: Velocidad circular total, del disco y del halo

empieza a gobernar la materia oscura, entonces al introducir este Halo de tanta materia influye de cierta manera en el potencial, proporcionando una contribución adicional, por tanto se espera que las frecuencias de epiciclo y vertical de las órbitas de las estrellas en el disco cambien. En general, el halo de materia oscura aumentará la atracción gravitacional en las regiones exteriores del disco y, por lo tanto, influirá en la dinámica de las estrellas en esas regiones. Por otro lado, se puede pensar que la presencia del halo de materia oscura generalmente aumentará la estabilidad vertical de las órbitas estelares. Esto se debe a que el halo ejerce una fuerza de suavización gravitatoria en el plano vertical, evitando de alguna forma que las estrellas se alejen demasiado del plano del disco, es por esto en gran medida que se presenta este comportamiento en las galaxias.

Podemos ver un poco de este comportamiento si hacemos el procedimiento del punto anterior, pero aplicando en este caso la contribución del potencial del halo y viendo como serían las órbitas correspondientes.

En esta figura se ve que la órbita se ve afectada en mayor medida en el caso Radial cuando ingresamos la presencia del Halo, sin embargo, las perturbaciones en cuando a la vertical se ven muy similares al caso anterior en donde solo teníamos el disco, notamos incluso algunos valores más bajos en este caso, dando a entender que se estabiliza un poco este movimiento vertical, esta claro que estos efectos se ven más

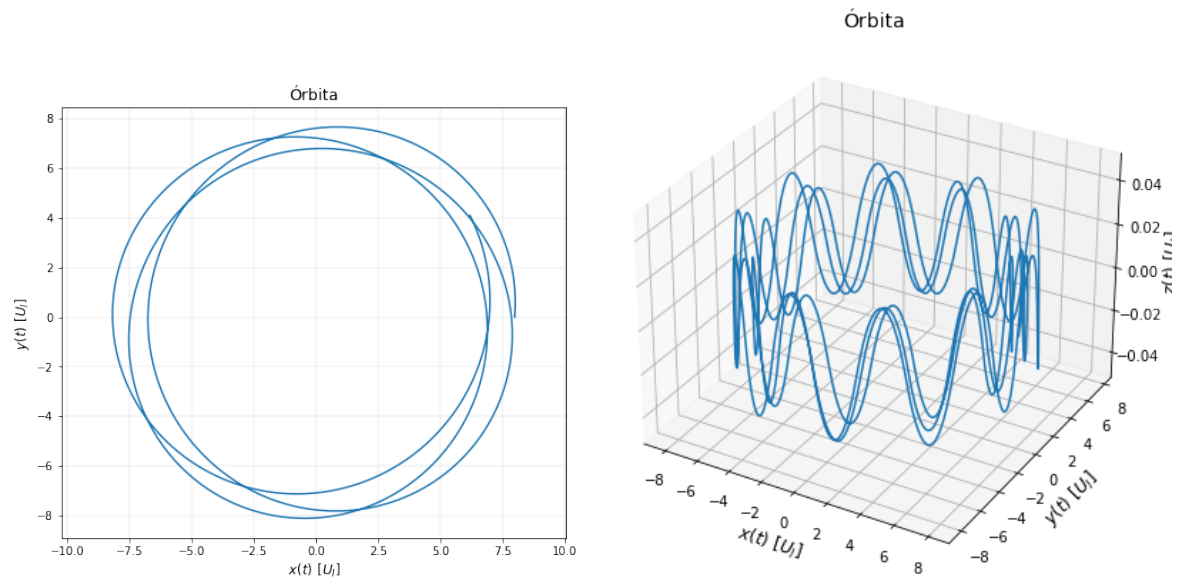


Figura 13: Representación de las variaciones en el radio y en la vertical en la órbita de nuestra estrella, teniendo en cuenta la contribución del Halo de materia oscura.

cuando nos alejamos más del centro de la galaxia.

Conclusiones

En este ejercicio práctico, se lofró estudiar el comportamiento del movimiento de una estrella alrededor de la galaxia, por medio de diferentes modelos sencillos que nos permiten encontrar resultados bastante acoplados a la teoría, es muy importante tener en cuenta que el movimiento de la estrella se penso para datos como nuestro Sol, a partir de esto nos pudimos dar cuenta del comportamiento oscilatorio que tiene la estrella alrededor de su trayectoria. Para este desarrollo fueron importante algunas herramientas computacionales como librerías específicas de Python, que nos permitieron manerjar los potenciales, integrarlos y solucionar las ecuaciones de movimiento, estas fueron 'galpy', 'orbit', 'potential', entre otras, que están registradas en la siguiente referencia [3].

Finalmente se puede decir que para realizar un mejor modelo es necesario tener en cuenta la constribución de todas las componentes morfológicas de la galaxias (disco, halo y bulbo), puesto que cada uno de ellos contribuye en los resultados que podamos obtener para poder comparar con las observaciones realizadas hasta el momento en este ambito.

Referencias

- [1] Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. (2017b). An Introduction to Modern Astrophysics (2nd Revised ed.). Cambridge University Press.
- [2] James Binney & Scott Tremaine Galactic Dynamics: Second Edition (Princeton Series in Astrophysics, 13) 2nd Edition
- [3] Introduction. (s. f.). galpy documentation. https://docs.galpy.org/en/v1.9.0/getting_started.html
- [4] Jo Bovy (Dynamics and Astrophysics of Galaxies). (s. f.). <https://galaxiesbook.org/chapters/0-01.-Preface.html>