深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基于图像的三维模型重建

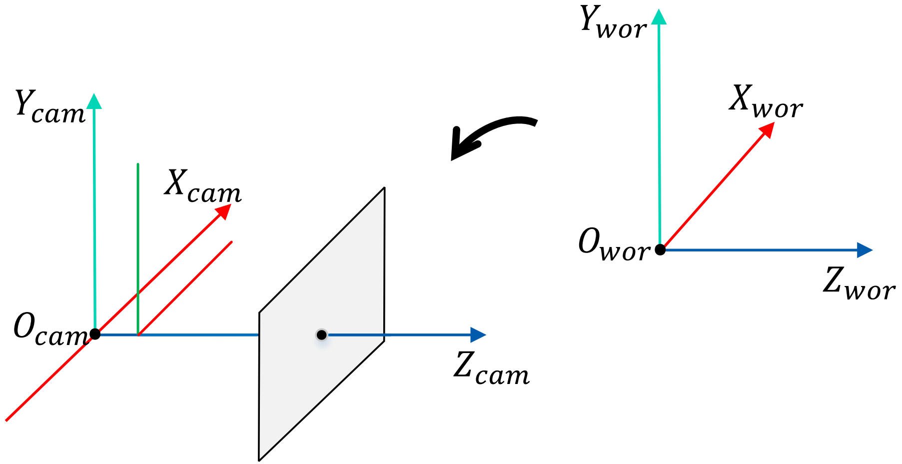
成像原理与图像特征

课程内容

- ✓ **针孔相机模型**
  - ✓ 针孔相机模型
  - ✓ 径向畸变
- ✓ **特征检测与匹配**
  - ✓ 常用的特征检测子与描述子
  - ✓ 特征匹配策略
  - ✓ 最新进展
- ✓ **2D-2D:对极几何**
  - ✓ 对极约束
  - ✓ 本质/单应矩阵
  - ✓ 直接线性变换法

针孔相机模型-外参数矩阵

1. 世界坐标系到相机坐标系



$$\boldsymbol{X}_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

点的相机坐标

$$\boldsymbol{X}_w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

点的世界坐标

刚体变换

$$\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_w + \boldsymbol{t}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

逆变换

$$\boldsymbol{X}_w = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{X}_c - \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

针孔相机模型-外参数矩阵

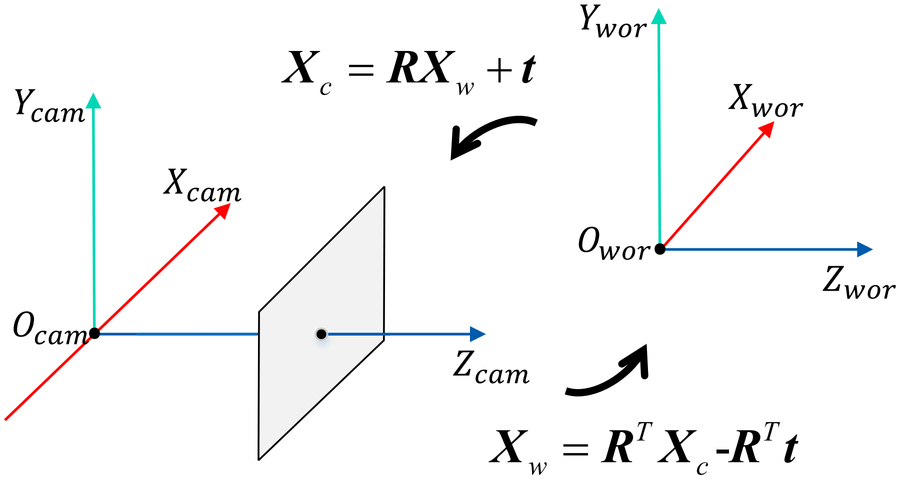
1.1 相机中心在世界坐标系中的位置

$$O^{c}_{\text{cam}} = 0$$

$$O^{w}_{\text{cam}} = R^{T} O^{c}_{\text{cam}} - R^{T} t = - R^{T} t$$

O^{c}_{cam} ---相机中心在相机坐标系中的坐标

O^{w}_{cam} ---相机中心在世界坐标系中的坐标



1.2 相机朝向（Z轴）在世界坐标系中的方向

Z^c ---相机坐标系中Z轴上的一点

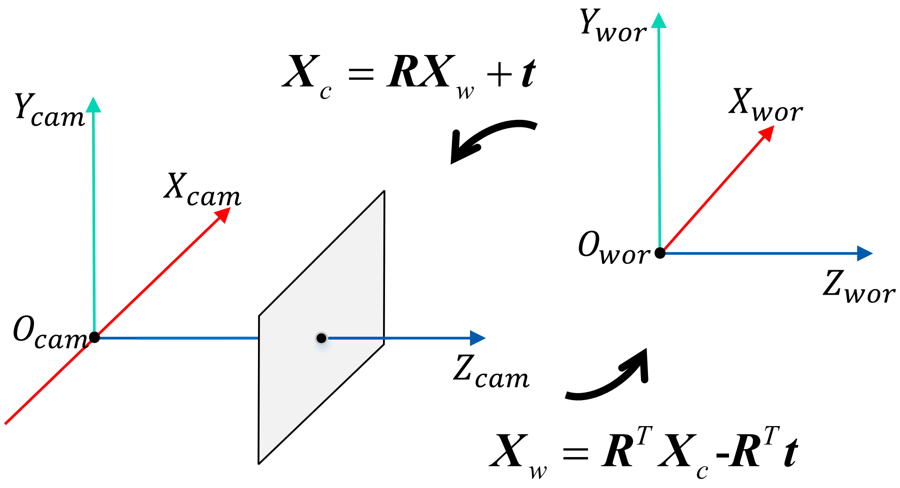
$$Z^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O^c_{\mathrm{cam}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r^c = Z^c - O^c_{\mathrm{cam}}$$

$$r^w = (R^T Z^c - R^T t) - (R^T O^c_{\mathrm{cam}} - R^T t)$$

$$= R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R(2,:)$$

旋转矩阵的第3行?



针孔相机模型-内参数矩阵

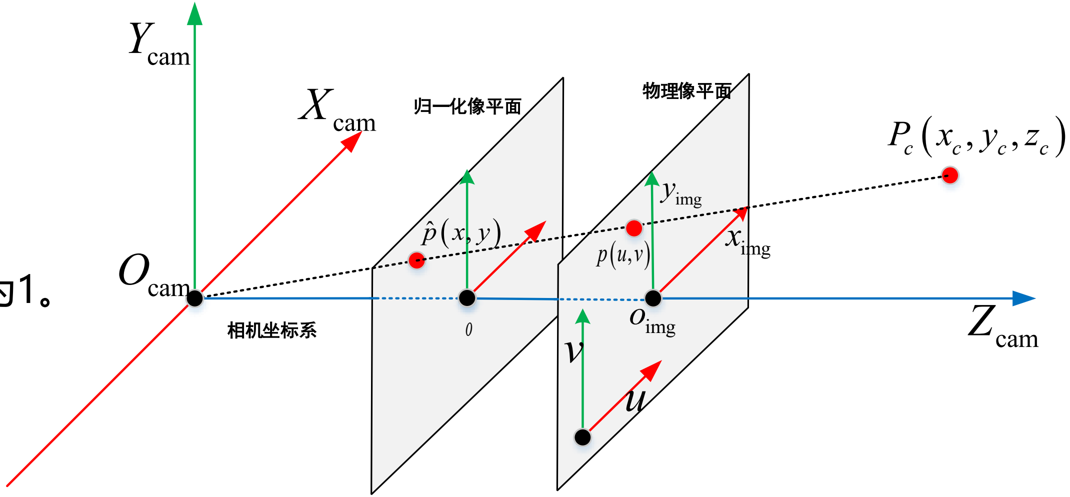
深蓝学院 shenlanxueyuan.com

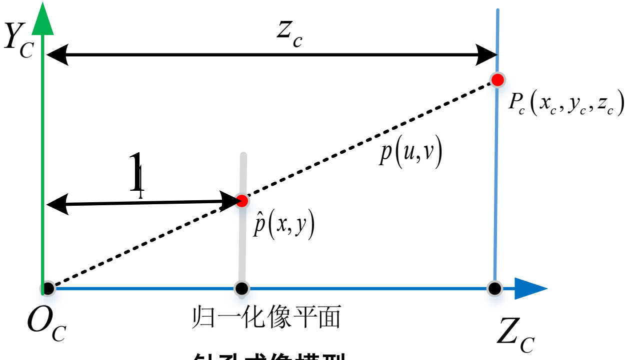
2. 相机坐标系到归一化像平面坐标系

归一化像平面：

虚拟的平面，

与物理像平面平行，且距离相机光心距离为1。





针孔成像模型

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_c}{z_c} \\ \frac{y_c}{z_c} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

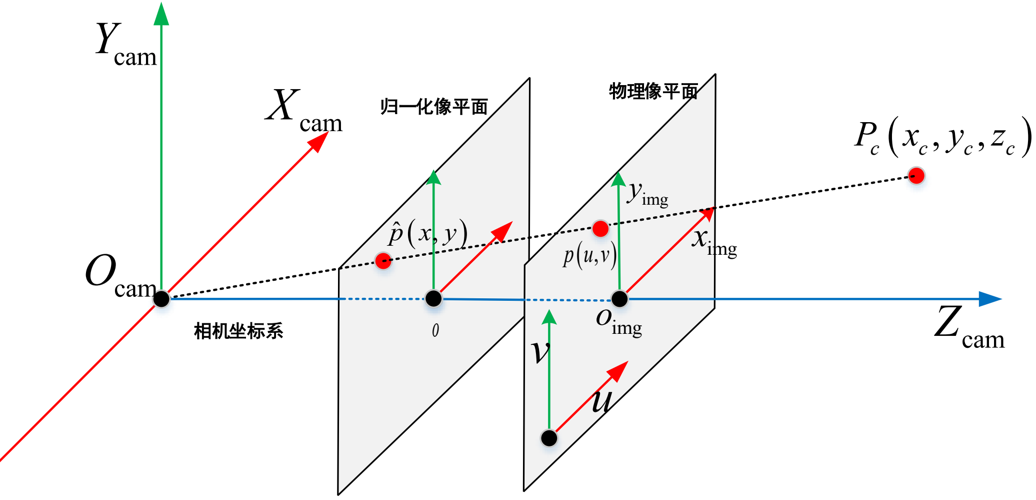
针孔相机模型-内参数矩阵

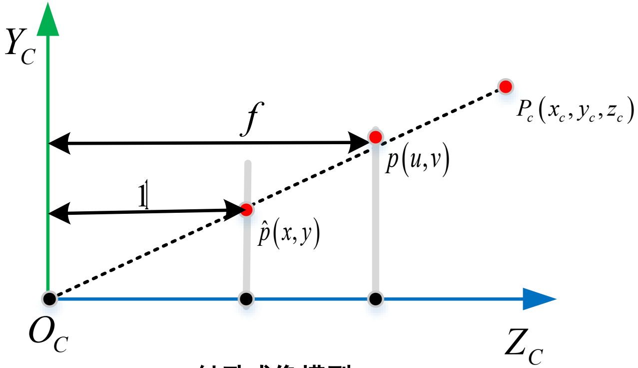
3. 归一化像平面标系到物理像平面坐标系

物理像平面:

实际存在的平面,

它是相机CCD阵列所在的平面。





针孔成像模型

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\alpha x \\ f\beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha x \\ f_\beta y \end{pmatrix}$$

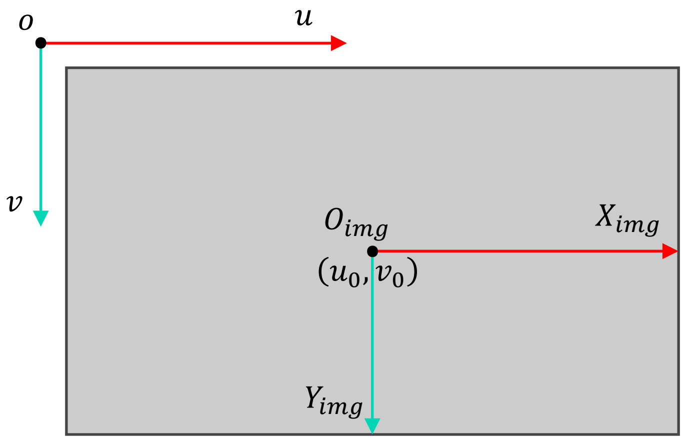
α, β ---单位是像素/毫米

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & f_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

针孔相机模型-内参数矩阵

3.1 物理像平面坐标系

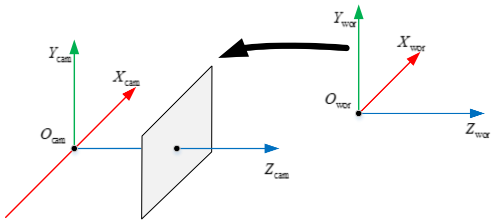
一般以左上角为坐标原点，需要进行坐标系平移。



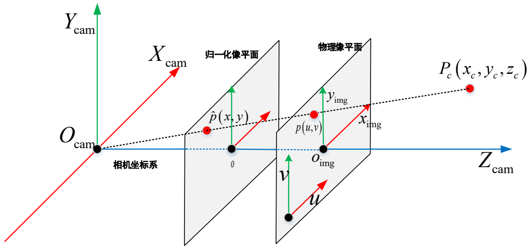
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha x + u_0 \\ f_\beta y + v_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

一般情况下 $f_\alpha = f_\beta$

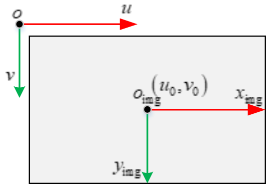
针孔相机模型-透视矩阵



$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \boldsymbol{K} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

针孔相机模型-透视矩阵

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c}\begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c}\begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c}\boldsymbol{K}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{3\times 4} = \boldsymbol{K}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

6个外参数 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}$ 姿态估计

5个内参数 $f_\alpha = f_\beta, k_1, k_2, u_0, v_0$ 相机标定

k_1, k_2为径向畸变系数，接下来介绍

针孔相机模型-径向畸变

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

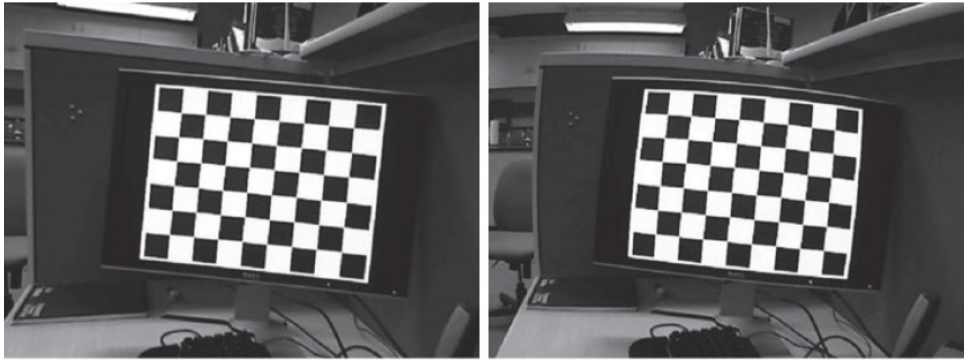
成因：透镜不能完全满足针孔模型假设

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, r^2 = x^2 + y^2$$

k_1, k_2为径向畸变系数

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$



直线变弯曲，由图像中心往外畸变程度越来越大

针孔相机模型-径向畸变

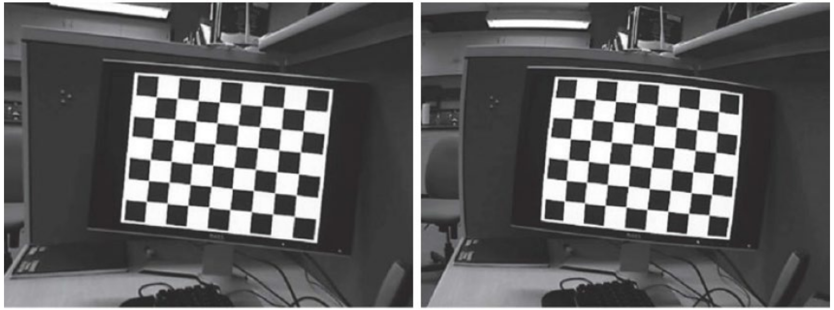
径向畸变系数的最小乘估计

理想情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\text{-}u_0 \\ v\text{-}v_0 \end{bmatrix}}$$

畸变情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{f\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}\text{-}u_0 \\ \tilde{v}\text{-}v_0 \end{bmatrix}}$$



$$\boxed{f\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)\boxed{f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

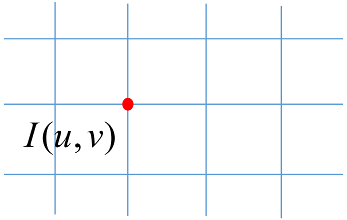
$$\begin{bmatrix} (u-u_0)r^2 & (u-u_0)r^4 \\ (v-v_0)r^2 & (v-v_0)r^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}-u \\ \tilde{v}-v \end{bmatrix}$$

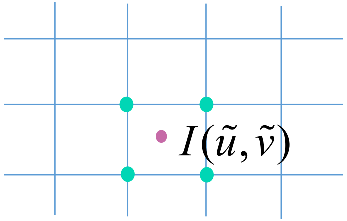
提供理想点 $[u \quad v]^T$ 与畸变点 $[\tilde{u} \quad \tilde{v}]^T$ 的对应关系，通过最小二乘进行估计。

针孔相机模型-径向畸变

径向畸变矫正

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$





双线性/三线性插值

矫正后的图像　　矫正前的图像

针孔相机模型-透视矩阵

Coding

实现简单的相机C++类，完成相机投影过程的代码

课程内容

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- ✓ **针孔相机模型**
  - ✓ 针孔相机模型
  - ✓ 径向畸变
- ✓ **特征检测与匹配**
  - ✓ 常用的特征检测子与描述子
  - ✓ 特征匹配策略
  - ✓ 最新进展
- ✓ **2D-2D:对极几何**
  - ✓ 对极约束
  - ✓ 本质/单应矩阵
  - ✓ 直接线性变换法

特征检测子 Feature Detector

Harris 角点检测

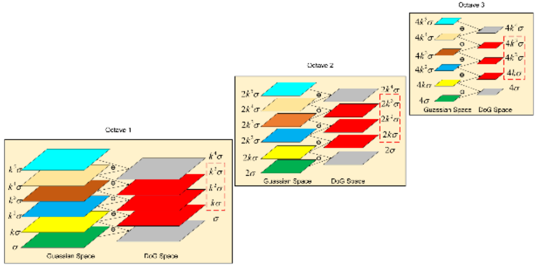
常用于跟踪不具有尺度不变性

$$H=\begin{bmatrix} \sum_{(x,y)} w(x,y)\left(\frac{\partial I}{\partial x}(x,y)\right)^2 & \sum_{(x,y)} w(x,y)\left(\frac{\partial I}{\partial x}(x,y)\frac{\partial I}{\partial y}(x,y)\right) \\ \sum_{(x,y)} w(x,y)\left(\frac{\partial I}{\partial x}(x,y)\frac{\partial I}{\partial y}(x,y)\right) & \sum_{(x,y)} w(x,y)\left(\frac{\partial I}{\partial y}(x,y)\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$C=\det(H)-k\operatorname{trace}(H)^2=\lambda_1\lambda_2-k(\lambda_1+\lambda_2)^2,\ k=0.04$$

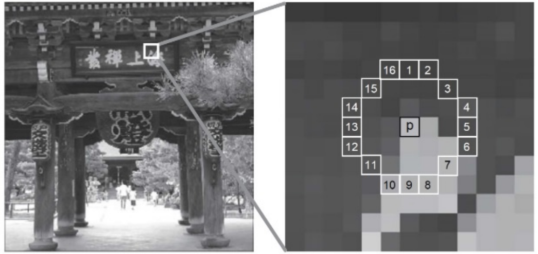
SIFT特征点检测

具有尺度旋转光照不变性
计算量大



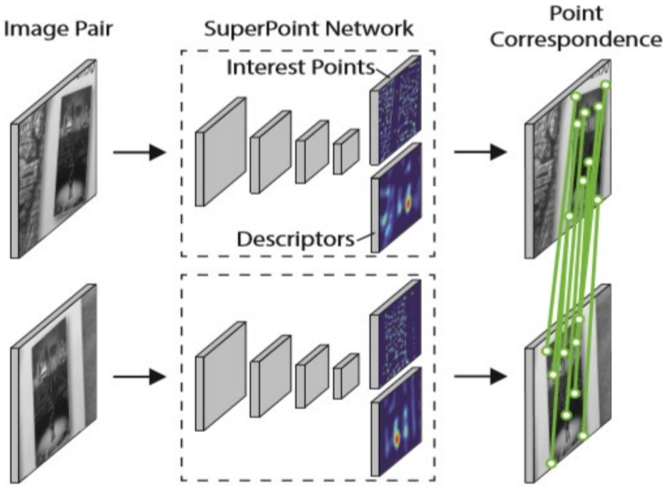
ORB特征点检测

速度快、具有尺度旋转不变性



深度学习的方法

SuperPoint: Self Supervised Interest Point Detection and Description



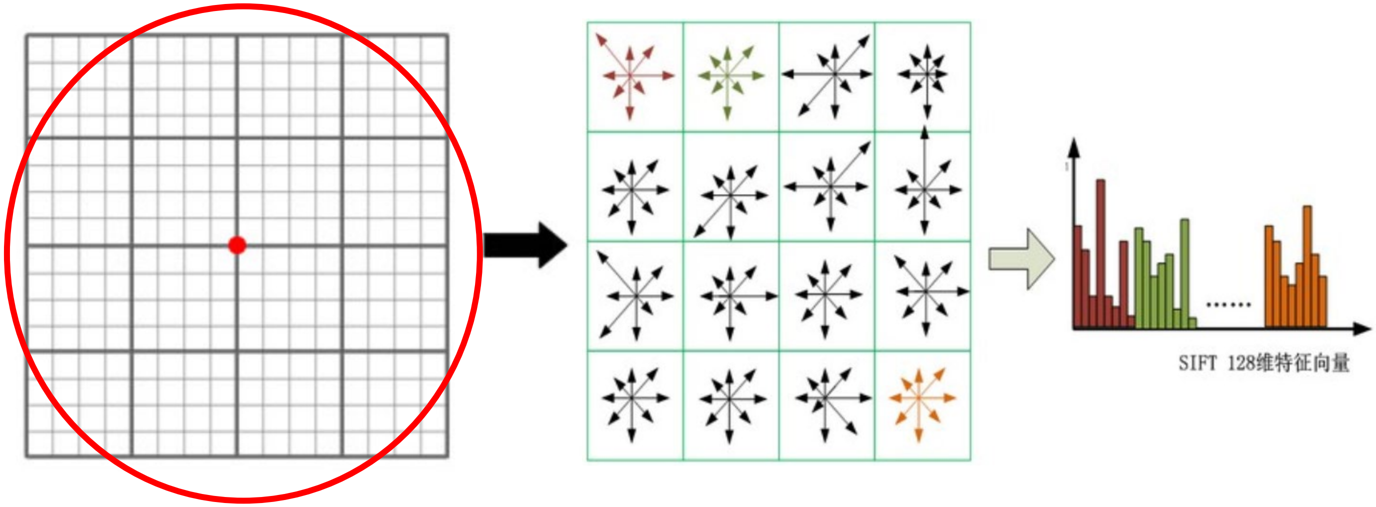
深度学习提供极端场景下关键点的提取方法，但需要大量的训练数据才能够得到较好的泛化性

基于直方图的描述子

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

SIFT描述子-统计局部梯度信息

- 将区域划分成4x4的block
- 每个block内统计梯度方向的直方图(高斯加权梯度作为系数)



高斯加权保证距离特征点近的像素作用更大

梯度直方图计算8个方向

二进制描述子(BRIEF)

描述子形式

- 描述向量由N个0或者1组成 $N=128,256,512$
- 生成速度快，匹配效率高，不具有旋转不变性

图像进行如高斯滤波预处理

↓

在支持区域内随机采样N对大小5x5的Patch

↓

比较Patch内像素和的大小，并保留结果构成特征向量

$$\tau(p;x,y)=\begin{cases}1, & if\, p(x)<p(y)\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$p(x)$，$p(y)$ 是建立在x,y处的Patch

特征描述子ORB

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

Steer BRIEF

N对采样点 $S = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{y}_1 & \cdots & \boldsymbol{y}_n \end{pmatrix}$

根据特征点的主方向计算旋转 $S_\theta = R_\theta S$

在新的采样点上进行BRIEF描述子生成。

Oriented FAST

+

Rotated BRIEF

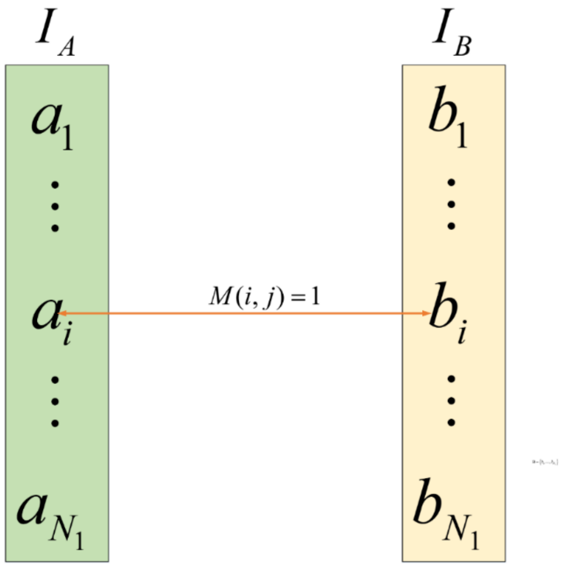
=

ORB

特征匹配 Feature Matching

问题描述

特征匹配：计算两幅图像中特征描述子的匹配关系



欧氏距离 $$D_{euc}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

马氏距离 $$D_{mahal}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\left((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right)^{\frac{1}{2}}$$

归一化互相关 $$NCC(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_a s_b}(a_i-u_a)(b_i-u_b)$$

汉明距离 $$D_{ham}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{n}a_i\oplus b_i$$

匹配策略

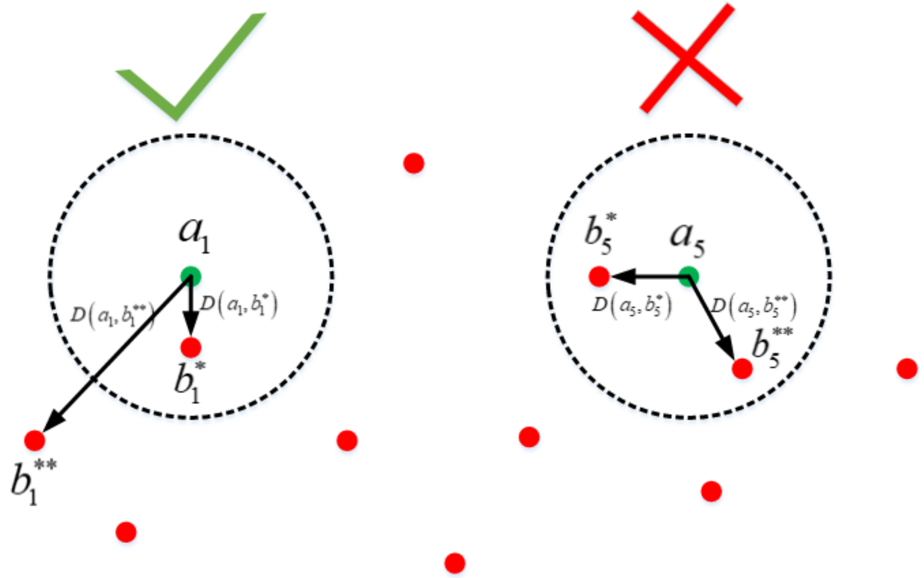
最近邻搜索

$$b^{*}=\underset{b\in \mathrm{B}}{\arg\min}\, D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), D(a,b^{*})<\beta$$

最近邻距离比(lowe-ratio)

$$\frac{D(a,b^{*})}{D(a,b^{**})}<\alpha$$

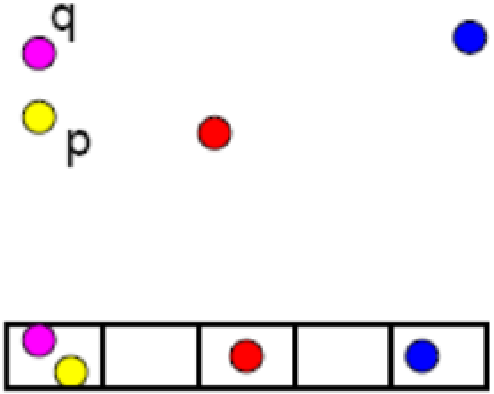
最近邻距离和次近邻距离的比值小于一个设定的阈值。



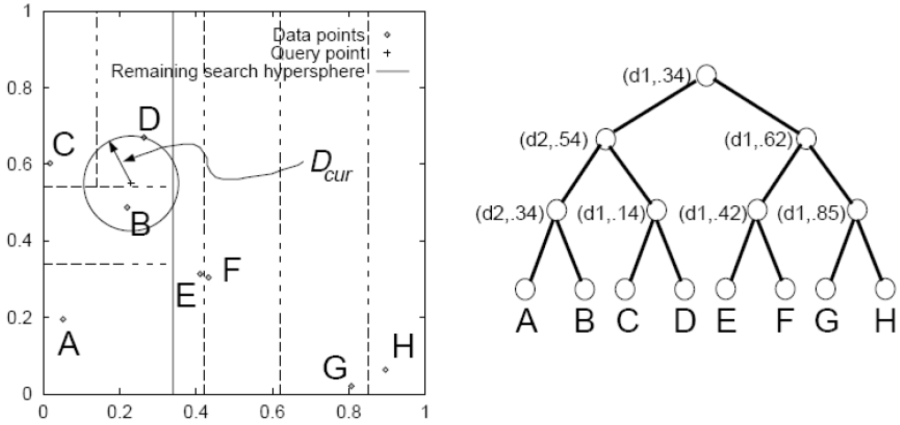
高效匹配

快速最近邻搜索

哈希表



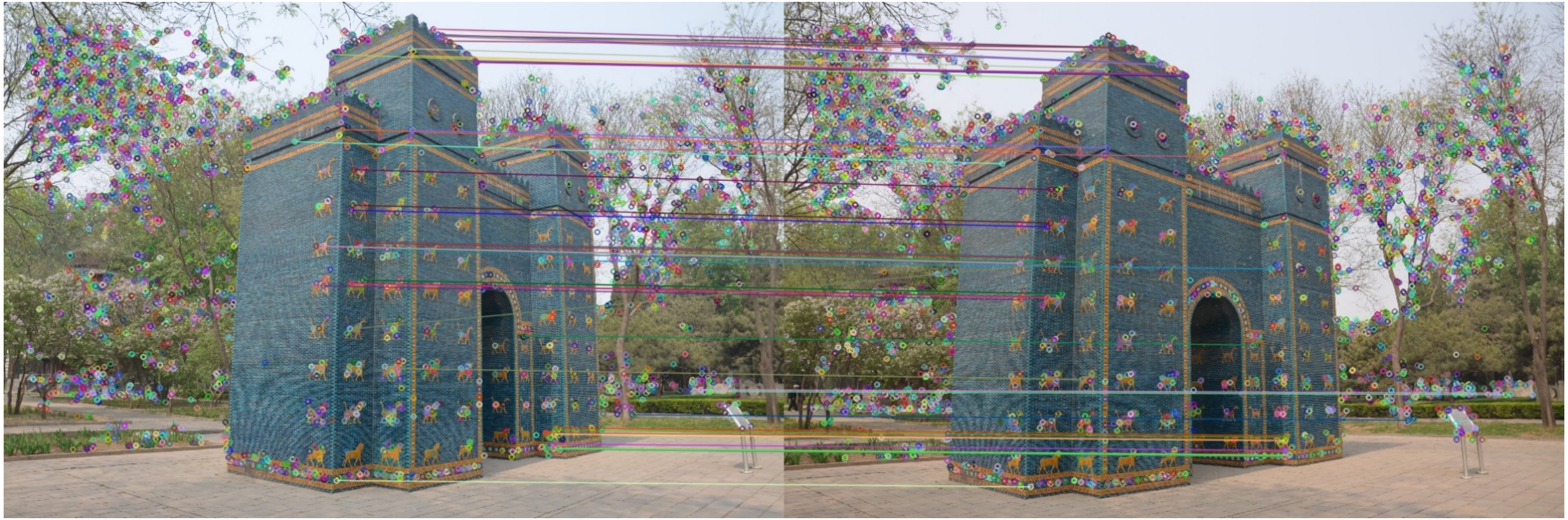
多维Kd-tree



特征匹配

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

BFM(Bruce Force Mather)匹配ORB的结果



选择最好的50个匹配结果进行显示

2D-2D: 对极几何-对极约束

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

对极约束 $x_2^T F x_1 = 0$ $\hat{x}_2^T E \hat{x}_1 = 0$

其中 $E = K_2^{-T} F K_1$ $\hat{x}_1 = K_1^{-1} x_1$ $\hat{x}_2 = K_2^{-1} x_2$

公式推导

$$P_1 = K_1 [I, \quad 0] \qquad P_2 = K_2 [R, \quad t]$$

$$d_1 x_1 = K_1 X \Rightarrow d_1 K_1^{-1} x_1 = X = d_1 \hat{x}_1$$

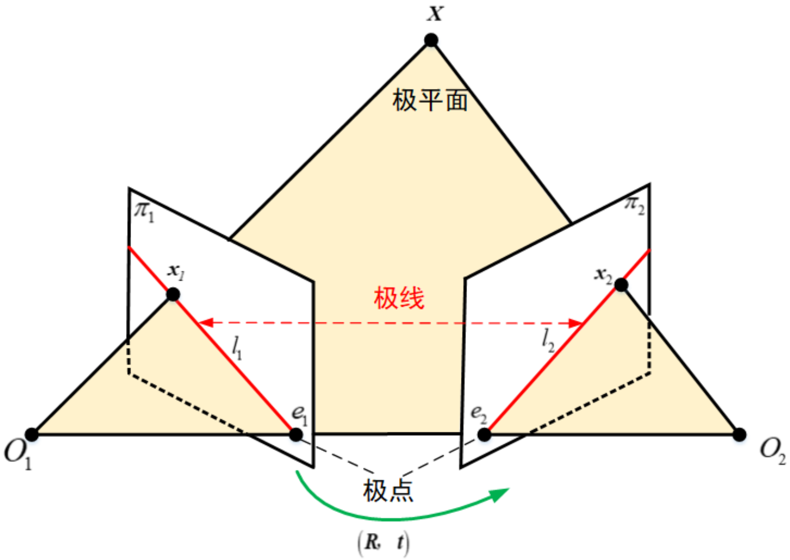
$$d_2 x_2 = K_2 (RX + t) \Rightarrow d_2 K_2^{-1} x_2 = RX + t = d_1 R \hat{x}_1 + t$$

$$\Rightarrow d_2 [t]_\times \hat{x}_2 = d_1 [t]_\times R \hat{x}_1 + [t]_\times t$$

$$\Rightarrow d_2 \hat{x}_2^T [t]_\times \hat{x}_2 = d_1 \hat{x}_2^T [t]_\times R \hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_2^T [t]_\times R \hat{x}_1 = \hat{x}_2^T E \hat{x}_1 = 0 \qquad x_2^T K_2^{-T} [t]_\times R K_1^{-1} x_1 = x_2^T F x_1 = 0$$

$$E = [t]_\times R \qquad F = K_2^{-T} E K_1^{-1}$$



本质矩阵: $E = [t]_\times R$

基础矩阵: $F = K_2^{-T} E K_1^{-1}$

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

基础矩阵性质

- ✓ 3x3的矩阵，秩为2
- ✓ 具有7个自由度
- ✓ 奇异值为 $[\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad 0]^T$
- ✓ 极线约束 $l_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F}$，$l_2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1 = 0$

基础矩阵求解方法

直接线性变换法

- 8点法
- 最小二乘法

基于RANSAC的鲁棒方法

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

直接线性变换法

对于一对匹配点 $\boldsymbol{x}_1=[u_1,\ v_1,\ 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=[u_2,\ v_2,\ 1]^{\mathrm{T}}$

根据对极约束 $\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{pmatrix} u_2 & v_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

令 $\boldsymbol{f}=[F_{11},\ F_{12},\ F_{13},\ F_{21},\ F_{22},\ F_{23},\ F_{31},\ F_{32},\ F_{33}]^T$，则有，

$$[u_1u_2,\ u_2v_1,\ u_2,\ u_1v_2,\ v_1v_2,\ v_2,\ u_1,\ v_1,\ 1]\,\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$$

每一对匹配点提供一个约束

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

直接线性变换法

每对匹配点提供一个约束 $[u_1u_2,\ u_2v_1,\ u_2,\ u_1v_2,\ v_1v_2,\ v_2,\ u_1,\ v_1,\ 1]\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$

当有n对匹配点时 $$A=\begin{pmatrix} u_1^{(1)}u_2^{(1)}, & u_2^{(1)}v_2^{(1)}, & u_2^{(1)}, & v_2^{(1)}u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}v_2^{(1)}, & v_2^{(1)}, & u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1 \\ u_1^{(2)}u_2^{(2)}, & u_2^{(2)}v_2^{(2)}, & u_2^{(2)}, & v_2^{(2)}u_1^{(2)}, & v_1^{(2)}v_2^{(2)}, & v_2^{(2)}, & u_1^{(2)}, & v_1^{(2)}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n)}u_2^{(n)}, & u_2^{(n)}v_2^{(n)}, & u_2^{(n)}, & v_2^{(n)}u_1^{(n)}, & v_1^{(n)}v_2^{(n)}, & v_2^{(n)}, & u_1^{(n)}, & v_1^{(n)}, & 1 \end{pmatrix} \qquad A\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$$

- 要保证有唯一解至少需要8对匹配点；
- $n=8$ 时，若A非奇异，则有唯一解，称为8点法； A^TA **的最小特征值对应的特征向量即为最优解。**
- $n\geq 8$ 时，可用最小二乘法求解。

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

奇异值约束

直接线性变化法无法保证基础矩阵的奇异值约束—有两个非0奇异值

根据奇异值约束对矩阵进行重构：

$$\min \left\| \boldsymbol{F} - \hat{\boldsymbol{F}} \right\|, \quad \text{wrt. svd}(\boldsymbol{F}) = [\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad 0]$$

对得到的基础矩阵$\hat{\boldsymbol{F}}$ 进行奇异值分解，即

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T \text{ with } \boldsymbol{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

利用奇异值约束对基础矩阵进行重构

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\text{diag}(\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad 0)\boldsymbol{V}^T$$

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

Coding

实现基础矩阵的求解过程：

1）直接线性变换法；

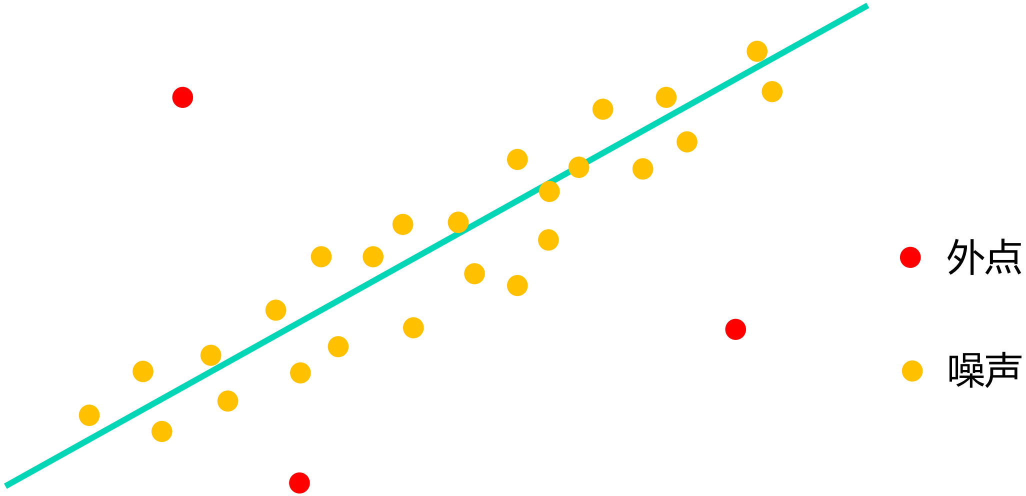
2）奇异值约束。

2D-2D: 对极几何-RANSAC

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

RANSAC-随机一致性采样

解决样本中的外点问题，最多可处理50%的外点情况。



噪声可建模而外点不可建模，
外点对最小二乘影响巨大。

2D-2D: 对极几何-RANSAC

RANSAC-随机一致性采样

N：样本点个数；

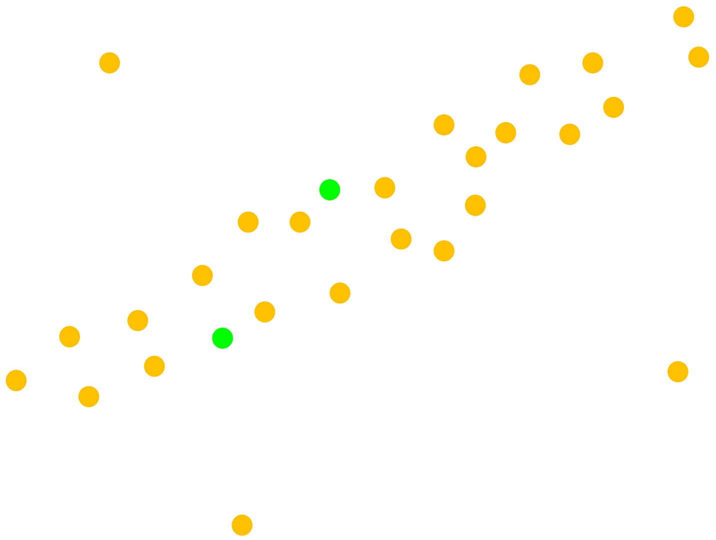
K：求解模型需要最少的点的个数。

1. 随机采样K个点；
2. 对该K个点拟合模型；
3. 计算其它点到拟合模型的距离，小于一定阈值，当作内点，统计内点个数；
4. 重复M次，选择内点数最多的模型；
5. 利用所有的内点重新估计模型（可选）。

2D-2D: 对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

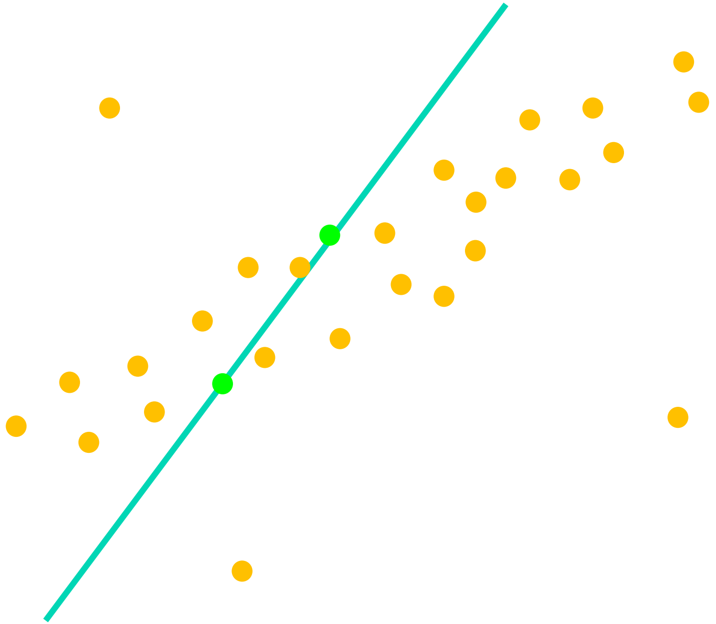
1. 随机选取$K = 2$个点



2D-2D: 对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

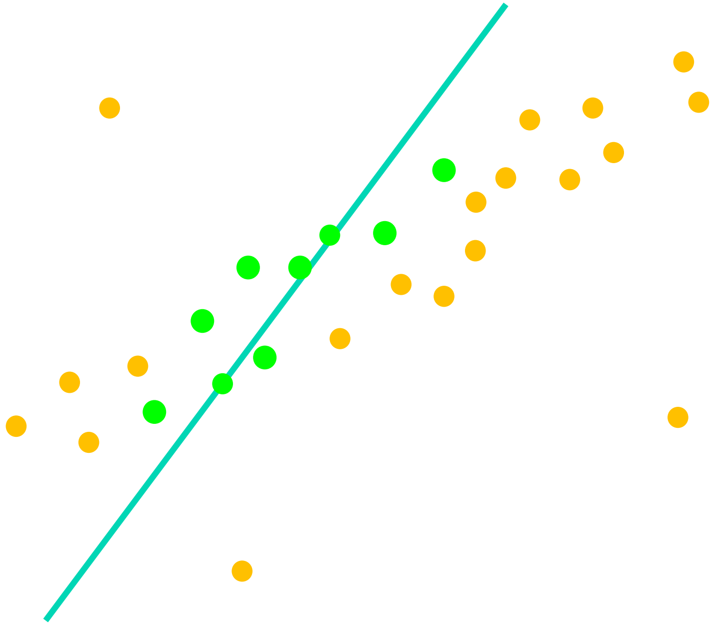
2. 拟合一条直线



2D-2D: 对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

3. 统计内点个数

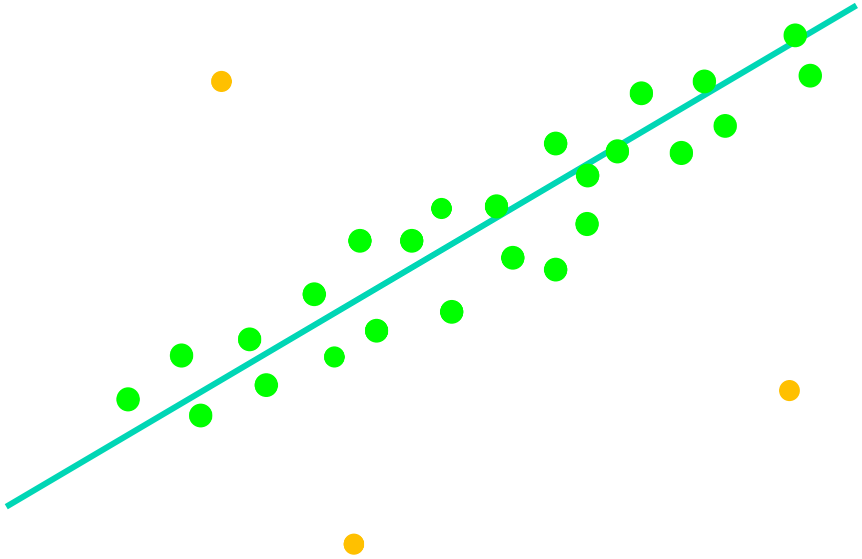


内点个数为9

2D-2D: 对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

4. 重复上述过程M次，找到内点数最大的模型

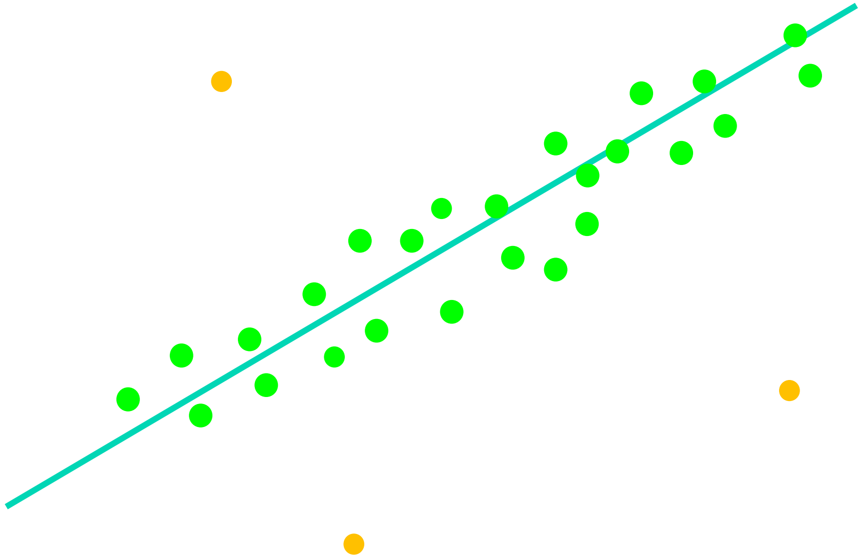


内点个数为25

2D-2D: 对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

5. 利用所有的内点重新估计直线



2D-2D: 对极几何-RANSAC

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

RANSAC-采样次数的计算

N：样本点个数；

K：求解模型需要最少的点的个数；

p：内点的概率

p^K：K个点都是内点的概率

$1-p^K$：K个点至少有一个外点的概率

$(1-p^K)^M$：M次采样全部失败的概率

$z=1-(1-p^K)^M$：M次采样至少有1次成功的概率

$$M=\frac{\log(1-z)}{\log(1-p^K)}$$

计算$p=0.9, K=8$时，想要采样成功率达到$z\geq 0.99$，所需要的采样次数M

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

RANSAC-估计基础矩阵

算法流程

1. 随机采样8对匹配点$\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$;
2. 8点法求解基础矩阵$\hat{F}$;
3. 奇异值约束获取基础矩阵F;
4. 计算误差，并统计内点个数;
5. 重复上述过程，选择内点数最多的结果;
6. 对所有内点执行2,3，重新计算F。

内点判断标准-Sampson Distance

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{(\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_1)^2}{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1)_x^2 + (\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1)_y^2 + (\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F})_x^2 + (\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F})_y^2}$$

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) < \tau$$

2D-2D: 对极几何-基础矩阵F

Coding

RANSAC 估计基础矩阵F

2D-2D: 对极几何-本征矩阵E

本征矩阵性质

- ✓ 3x3的矩阵，秩为2
- ✓ 具有5个自由度
- ✓ 奇异值为$[\sigma, \quad \sigma, \quad 0]^T$

求解基础矩阵F

⬇

$$\hat{E} = K_2^T F K_1$$

$$\hat{E} = U\mathrm{diag}(\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad 0)V^T$$

⬇

$$E = U\mathrm{diag}(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad 0)V^T$$

2D-2D: 对极几何-本征矩阵E

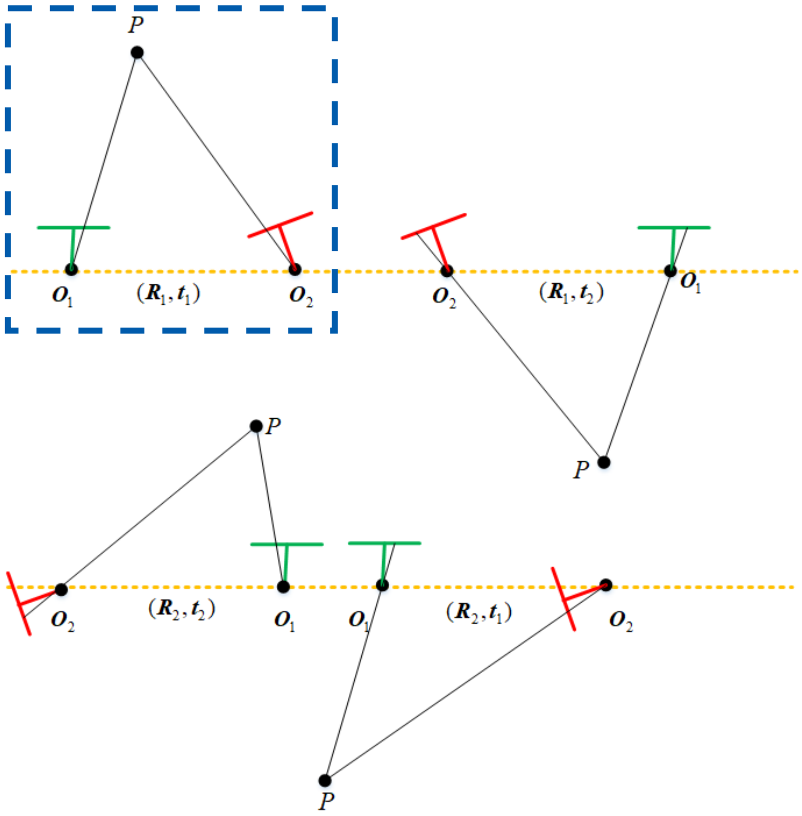
相机姿态的恢复

$$E = U\Sigma V^T,\ \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma,\ \sigma,\ 0)$$

$$t_1 = U(:,2) \qquad R_1 = UR_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$t_2 = -U(:,2) \qquad R_2 = UR_Z^T\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},\ R_Z^T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$



共有4种情况 $(R_1,t_1),(R_1,t_2),(R_2,t_1),(R_2,t_2)$

2D-2D: 对极几何-本征矩阵E

相机姿态的恢复-选择正确的相机姿态

相机的世界坐标O_1, O_2

$$\boldsymbol{O}_1 = -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{O}_2 = -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}$$

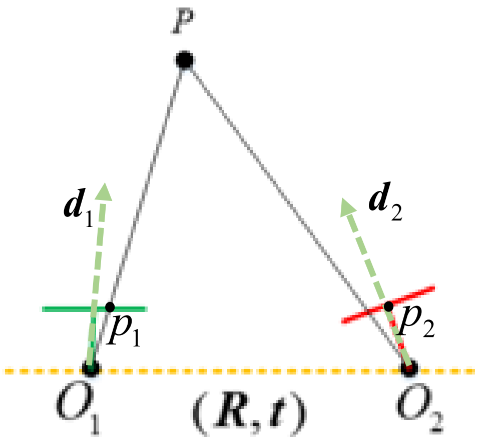
相机的世界坐标中的朝向d_1, d_2

$$\boldsymbol{d}_1 = [0, \quad 0, \quad 1]^T$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^T & \boldsymbol{r}_2^T & \boldsymbol{r}_3^T & -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}_3^T$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^T & \boldsymbol{r}_2^T & \boldsymbol{r}_3^T \end{bmatrix}$$

利用相机姿态$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}$和匹配点$p_1, p_2$进行三角量测得到三维点$P$



P需满足同时位于两个相机的前方：

方法1：

$$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}_1)^T \boldsymbol{d}_1 > 0$$

$$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}_2)^T \boldsymbol{d}_1 > 0$$

方法2：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \boldsymbol{RP} + \boldsymbol{t}, \quad z_c > 0$$

对两个相机成立

2D-2D: 对极几何

Coding

实现本征矩阵中恢复相机参数

2D-2D: 对极几何-单应矩阵H

空间中特征点位于一平面上

$$n^T X + d = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n^T X}{d} = 1$$

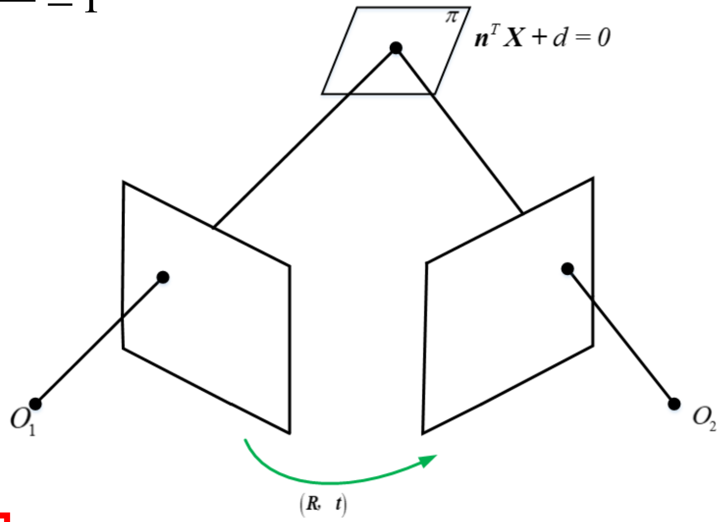
$$x_2 = K_2 (RX + t)$$

$$= K_2 \left(RX + t \cdot \left(-\frac{n^T X}{d} \right) \right)$$

$$= K_2 \left(R - \frac{tn^T}{d} \right) X$$

$$= K_2 \left(R - \frac{tn^T}{d} \right) K_1^{-1} x_1$$

$$\boxed{x_2 = Hx_1, \quad H = K_2 \left(R - \frac{tn^T}{d} \right) K_1^{-1}}$$



单应矩阵是满秩的

$$x_1 = H^{-1} x_2$$

t = 0时，对应纯旋转

$$H = K_2 R K_1^{-1}$$

即单应矩阵有两种情况：

1.空间点位于平面

2.相机纯旋转

2D-2D: 对极几何-单应矩阵H

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

直接线性变换法

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$

$$v_2 = \frac{H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$

8个自由度，每对点有两个约束

$$H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13} - H_{31}u_1u_2 - H_{32}u_2v_1 - H_{33}u_2 = 0$$

$$H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23} - H_{31}u_1v_2 - H_{32}v_1v_2 - H_{33}v_2 = 0$$

令$H_{33} = 1$总共需要4对特征点

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1, & 0, & 0, & 0, & -u_1^{(1)}u_2^{(1)}, & -u_2^{(1)}v_1^{(1)} \\ 0, & 0, & 0, & u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1, & -u_1^{(1)}v_2^{(1)}, & -v_1^{(1)}v_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(4)}, & v_1^{(4)}, & 1, & 0, & 0, & 0, & -u_1^{(4)}u_2^{(4)}, & -u_2^{(4)}v_1^{(4)} \\ 0, & 0, & 0, & u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1, & -u_1^{(4)}v_2^{(4)}, & -v_1^{(4)}v_2^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_2^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ u_2^{(4)} \\ v_2^{(4)} \end{pmatrix}$$

2D-2D: 对极几何-单应矩阵H

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

RANSAC-估计单应矩阵

算法流程

1. 随机采样4对匹配点$\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$;
2. 4点法求解单应矩阵H;
3. 计算误差，并统计内点个数;
4. 重复上述过程，选择内点数最多的结果;
5. 对所有内点执行3,4，重新计算H。

内点判断标准-Sampson Distance

$$E\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{H}\right) < \tau$$

$$E\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{H}\right) = d\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{x}_2\right)^2 + d(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1)^2$$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢聆听！

Thanks for Listening