Activité 1. Relier une fonction et sa dérivée

- **Durée estimée :** 40 min

- **Objectif :** Découvrir le lien entre la variation d'une fonction et le signe de la dérivée, par une approche graphique puis algébrique.

A. Conjecturer avec un logiciel de géométrie dynamique

2. a) La tangente est « montante » si son coefficient directeur est positif, donc la courbe est aussi « montante » en ce point.

b) La tangente est « descendante » si son coefficient directeur est négatif, donc la courbe est aussi « descendante » en ce point.

3. a) $f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-1]$

b) $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-1\,;5]$

c) $f'(x) \geqslant 0$ sur $[5\,;+\infty[$

4. $f'(x) = 0$ lorsque $x = -1$ ou $x = 5$.

5.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	↗		42	↘	-66	↗	

6. Lorsque $f'(x)$ est positif sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.

Lorsque $f'(x)$ est négatif sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.

B. Étude algébrique du signe de la dérivée

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

2. $f'(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -12$ et $c = -15$. $f'(x)$ est donc du signe de a sur $\mathbb{R}$, sauf entre les racines s'il y en a. Le discriminant Δ est égal à 324. $f'(x)$ a donc deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$. On en déduit donc que $f'(x) = 0$ lorsque $x = -1$ ou $x = 5$, et que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]5\,;+\infty[$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;5[$.

3. Cela correspond bien aux résultats trouvés à la question **A.5**.

Activité 2. Optimisation

- **Durée estimée :** 40 min

- **Objectif :** Découvrir l'optimisation avec l'aide d'un tableur.

A. Utilisation d'un tableur

2. B2=80/A2

3. C2=2*A2+B2

4. $L_2 = 6{,}3$ m et $L_2 \approx 12{,}7$ m.

B. Modélisation avec une fonction

1. On sait que $L_2 \times L_1 = 80$. Donc $L_2 = \dfrac{80}{L_1} = \dfrac{80}{x}$. Or, Bordure $= 2 \times L_1 + L_2$.

Donc $b(x) = 2x + \dfrac{80}{x}$.

2. b est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;20]$, donc elle est dérivable sur $]0\,;20]$.

$$b'(x) = 2 - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^2 - 80}{x^2}$$

3. Le dénominateur x^2 est strictement positif sur $]0\,;20]$. Donc $b'(x)$ est du signe du numérateur $2x^2 - 80$. Or c'est un trinôme qui a deux racines $x_1 = -2\sqrt{10}$ et $x_2 = 2\sqrt{10}$.

x	0		$2\sqrt{10}$		20
$b'(x)$		$-$	0	$+$	
b	↘		$25{,}3$	↗	

4. $x = 2\sqrt{10}$ correspond à $b'(x) = 0$.