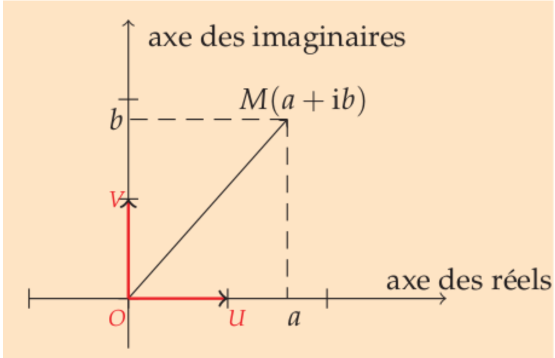
Les nombres complexes

Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OV}\right)=\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.



<u>Définition :</u> Tout nombre complexe $z=a+ib$ avec $a\,,b\in\mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

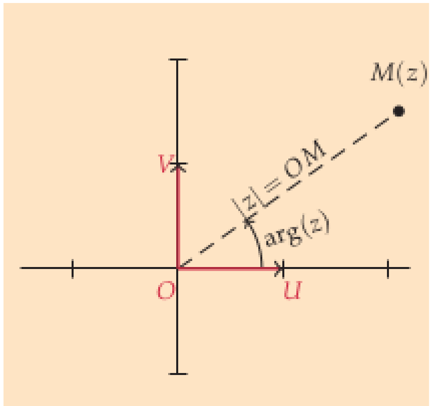
- un unique point $M\left(a\,;b\right)$ appelé **point image** de z.
- un unique vecteur $\overrightarrow{OM}\left(a;\,b\right)$ appelé **vecteur** image de z.

On dit que $z=a+ib$ est **l'affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent $M\left(z\right)$ ou $M\left(a+ib\right)$ et $\overrightarrow{OM}\left(z\right)$ ou $\overrightarrow{OM}\left(a+ib\right)$.

<u>Remarques :</u>
- Les complexes $z=a\in\mathbb{R}$ sont les **nombres réels** et sont représentés sur **l'axe des abscisses**.
- Les complexes $z=ib\,,\;b\in\mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **l'axe des ordonnées**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Module et argument d'un nombre complexe



<u>Définition :</u> Soit z un complexe et M un point d'affixe z.

- On appelle **module** de z la distance OM.
  Le module de z est noté $|z|$.
- Si $z\neq 0$, on appelle **argument** de z <u>une</u> mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$. Un argument de z est noté $\arg\left(z\right)$.
- Le complexe nul n'a pas d'argument et a pour module 0.

<u>Remarque :</u> L'argument d'un nombre complexe est donné à un multiple de 2π près.

<u>Propriété :</u> Si $z=a+i\,b$ est un nombre complexe, alors $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple : $|3+4\,i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

<u>Propriété :</u> Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

- Le module du conjugué est égal au module du complexe $|\bar{z}|=|z|$;
- Le produit d'un complexe avec son conjugué est le carré du module $z\times\bar{z}=|z|^2$;
- Le module d'un produit est le produit des modules $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$;
- Le module d'un quotient est le quotient des modules $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Forme trigonométrique

<u>Définition :</u> Tout nombre complexe non-nul peut s'écrire sous la forme $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ avec $r=|z|>0$ et $\theta=\arg\left(z\right)$. Cette forme s'appelle **forme trigonométrique** de z.

<u>Remarques :</u>
- r doit **impérativement** être positif puisqu'il s'agit du module du nombre complexe.
- Il est aussi possible d'utiliser la forme $\left[r\,;\theta\right]$, ce sont les **coordonnées polaires**.

<u>Théorème :</u> Pour passer d'une forme à une autre, soit z un complexe non-nul tel que $z=a+ib=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$.

$r=\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$	$a=r\times\cos\theta$
$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$	$b=r\times\sin\theta$