**53. a)** $p(\overline{E} \cap F) = p(\overline{E}) \times p_{\overline{E}}(F) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{18}$

**b)** $p(\overline{E} \cap \overline{F}) = p(\overline{E}) \times p_{\overline{E}}(\overline{F}) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{18}$

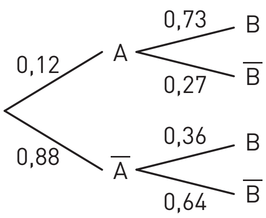
**54.** Lorsque l'on rencontre un adhérent, on appelle :

- G l'événement « l'adhérent est un garçon » ;
- L l'événement « l'adhérent a emprunté plus de 50 livres ».

D'après l'énoncé, $p(G) = 0{,}55$ et $p(G \cap L) = 0{,}2$ et on cherche $p_G(L) = \frac{p(G \cap L)}{p(G)} = \frac{0{,}2}{0{,}55} \approx 0{,}36$.

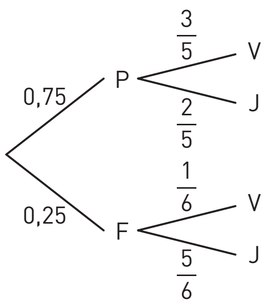
## Construire un arbre pondéré

**55.**



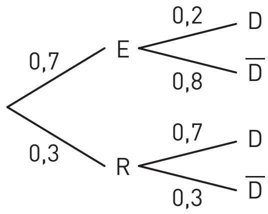

**56.** Lorsque l'on réalise cette expérience aléatoire, on appelle :

- P l'événement « la pièce tombe sur Pile » ;
- F l'événement « la pièce tombe sur Face » ;
- V l'événement « la boule est verte » ;
- J l'événement « la boule est jaune ».




**57.** Lorsque l'on prélève un objet au hasard dans la production, on appelle :

- E l'événement « c'est une équerre » ;
- R l'événement « c'est un rapporteur » ;
- D l'événement « il a un défaut ».




## Partitions de l'univers

**58.** Non car $A \cup B \cup C$ est différent de l'univers puisque cette union ne contient pas les personnes ayant 18 ou 19 ans.

**59. a)** Les ensembles $A = \{1 ; 2\}$, $B = \{9\}$, $C = \{3 ; 5 ; 7\}$ et $D = \{4 ; 6 ; 8 ; 10\}$ forment une partition de l'univers car ils sont tous disjoints et que leur union est bien l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

**b)** De même, les événements E : « le nombre obtenu est un nombre pair inférieur ou égal à 10 », F : « le nombre obtenu est un nombre impair inférieur à 8 » et G : « le nombre obtenu est 9 » forment une partition de l'univers.

**60.** $C = \overline{A \cup B}$

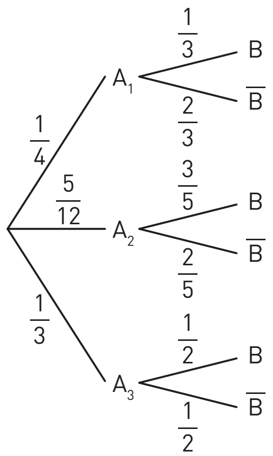
**61. 1. a)** $p(A_3) = 1 - p(A_1) - p(A_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{3}$

**b)** $p(A_1 \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

**c)** $p_{A_2}(B) = \frac{p(A_2 \cap B)}{p(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$

**d)** $p_{A_3}(\overline{B}) = \frac{p(A_3 \cap \overline{B})}{p(A_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}$

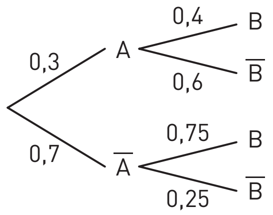
**2.**




**3.** $p(A_1 \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

## Inversion du conditionnement

**62. 1.**




**2.** $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

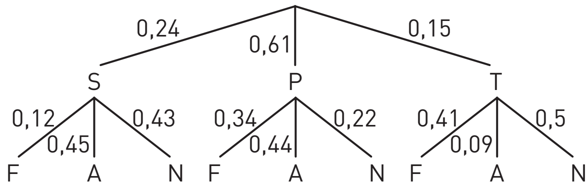
**3.** $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$
$= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,75 = 0,645$

On en déduit $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,12}{0,645} \approx 0,186$.

**4.** $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,3 \times 0,6}{1 - 0,645} \approx 0,507$

**5.** La probabilité que la dragée contienne une amande sachant qu'elle est rose est supérieure à la probabilité que la dragée contienne une amande sachant qu'elle est bleue, donc elle a plutôt intérêt à choisir une dragée rose.

**63. 1.**




**2. a)** $p(N \cap S) = p(S) \times p_S(N) = 0,24 \times 0,43 = 0,1032$

**b)** $p(N) = p(S) \times p_S(N) + p(P) \times p_P(N) + p(T) \times p_T(N)$
$= 0,24 \times 0,43 + 0,61 \times 0,22 + 0,15 \times 0,5 = 0,3124$

**c)** $p_N(S) = \dfrac{p(N \cap S)}{p(N)} = \dfrac{0,1032}{0,3124} \approx 0,33$

**3.** On cherche à comparer $p_N(S)$, $p_N(P)$ et $p_N(T)$ or :

- $p_N(S) \approx 0,33$ ;
- $p_N(P) = \dfrac{0,61 \times 0,22}{0,3124} \approx 0,43$ ;
- $p_N(T) = \dfrac{0,15 \times 0,5}{0,3124} \approx 0,24$.

Donc si l'on sait que l'élève fait de la natation, il est plus probable qu'il soit en première.

**4. a)** $p(A \cup N) = p(A) + p(N)$ car A et N sont disjoints, donc :

$p(A \cup N) = 0,24 \times 0,45 + 0,61 \times 0,44 + 0,15 \times 0,09 + 0,3124$
$= 0,7023$

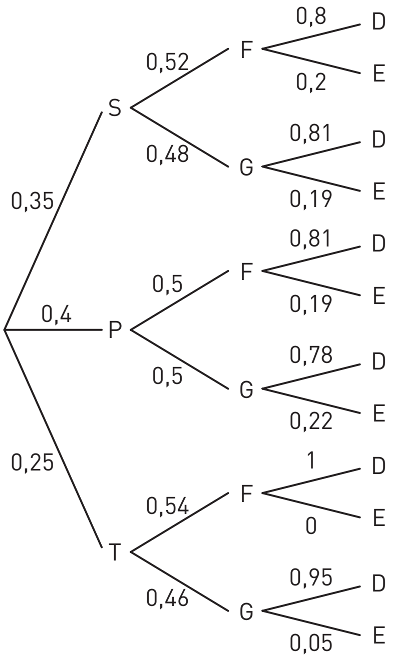
**b)** On cherche :

$p(S) + p(P \cap F) + p(T \cap F) = 0,24 + 0,61 \times 0,34 + 0,15 \times 0,41$
$= 0,5089$

**64. 1.** Quand on rencontre une de ces personnes au hasard, on considère les événements :

- S : « l'élève est en seconde » ;
- P : « l'élève est en première » ;
- T : « l'élève est en terminale » ;
- F : « l'élève est une fille » ;
- G : « l'élève est un garçon » ;
- D : « l'élève est demi-pensionnaire » ;
- E : « l'élève est externe ».

On a alors l'arbre ci-dessous.

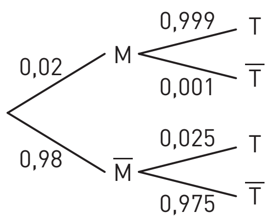



**2.** $p(\mathrm{E}) = 0{,}35 \times 0{,}52 \times 0{,}2 + 0{,}35 \times 0{,}48 \times 0{,}19 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}19 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}22 + 0{,}25 \times 0{,}54 \times 0 + 0{,}25 \times 0{,}46 \times 0{,}05 = 0{,}15607$

**3.** On cherche $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{G} \cap \mathrm{S}) = \dfrac{p(\mathrm{G} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{E})}{p(\mathrm{E})}$

$= \dfrac{0{,}35 \times 0{,}48 \times 0{,}19}{0{,}15607} \approx 0{,}2045.$

**65. 1.**




**2. a)** • $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0{,}02 \times 0{,}999 = 0{,}01998$

• $p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{M}}) \times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0{,}02 \times 0{,}999 + 0{,}98 \times 0{,}025 = 0{,}04448$

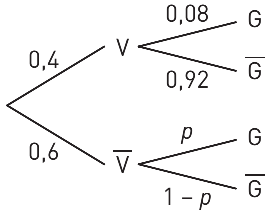
**b)** $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}01998}{0{,}04448} \approx 0{,}45$

**c)** Ce test n'est pas vraiment efficace car quand il est positif, il n'y a que « 45 % de chance » que la personne soit malade.

## Avec une inconnue

**66. 1.** $p(\mathrm{G}) = 0{,}2$, d'après l'énoncé.

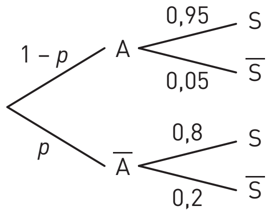
**2.** On a l'arbre ci-dessous où $p$ est inconnue :




**3.** $p(\mathrm{V} \cap \mathrm{G}) = p(\mathrm{V}) \times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{G}) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$

**4.** $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{V} \cap \mathrm{G}) + p(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G})$, donc $p(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G}) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$, puis $p_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{G}) = \dfrac{p(\overline{\mathrm{V}} \cap G)}{p(\overline{\mathrm{V}})} = \dfrac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28.$

**67. 1.**



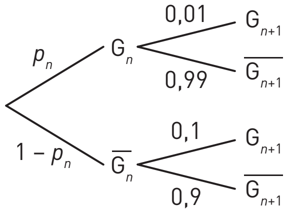

**2.** Il s'agit de trouver $p$ le plus grand nombre possible tel que $p(\mathrm{S}) \geqslant 0{,}9$ or
$p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}) + p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{S})$
$= (1 - p) \times 0{,}95 + p \times 0{,}8 = 0{,}95 - 0{,}15p$

Résolvons donc $0{,}95 - 0{,}15p \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow -0{,}15p \geqslant -0{,}05$
$\Leftrightarrow p \leqslant \dfrac{-0{,}05}{-0{,}15} \Leftrightarrow p \leqslant \dfrac{1}{3}$

En conclusion, cette entreprise doit utiliser la société B pour un tiers de ses livraisons au maximum.

## Probabilités et suites

**68. 1.**




**2.** $p_{n+1} = p(\mathrm{G}_{n+1}) = p(\mathrm{G}_n) \times p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{G}_{n+1}) + p(\overline{\mathrm{G}_n}) \times p_{\overline{\mathrm{G}_n}}(\mathrm{G}_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}01 + (1 - p_n) \times 0{,}1 = 0{,}01p_n + 0{,}1 - 0{,}1p_n$
$= -0{,}09p_n + 0{,}1$

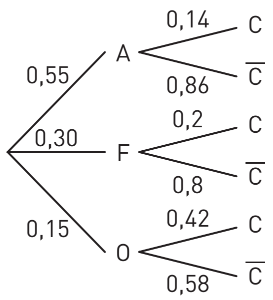
$p(\text{R}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{R}) + p(\overline{\text{A}}) \times p_{\overline{\text{A}}}(\text{R}) = 0,2 \times \frac{1}{3} + 0,8 \times \frac{1}{3}$
$= \frac{1}{3} = p_{\text{A}}(\text{R})$, donc A et R sont indépendants.

**75.** En plus des événements donnés dans l'énoncé, on considère :

• A : « le meuble choisi est un canapé » ;

• O : « le meuble choisi est un pouf ».

On a alors :




De plus, $p(\text{C}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{C}) + p(\text{F}) \times p_{\text{F}}(\text{C}) + p(\text{O}) \times p_{\text{O}}(\text{C})$
$= 0,55 \times 0,14 + 0,3 \times 0,2 + 0,15 \times 0,42 = 0,2 = p_{\text{F}}(\text{C})$, donc F et C sont indépendants.

**76.** On considère les événements :

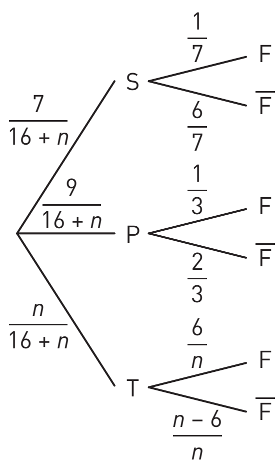
• S : « l'élève est en seconde » ;

• P : « l'élève est en première » ;

• T : « l'élève est en terminale » ;

• F : « l'élève est une fille ».

L'arbre pondéré ci-dessous représente la situation.




Les événements T et F sont indépendants si, et seulement si, $p(\text{F}) = p_{\text{T}}(\text{F})$ or :

$p(\text{F}) = p(\text{S}) \times p_{\text{S}}(\text{F}) + p(\text{P}) \times p_{\text{P}}(\text{F}) + p(\text{T}) \times p_{\text{T}}(\text{F})$

$= \frac{7}{16+n} \times \frac{1}{7} + \frac{9}{16+n} \times \frac{1}{3} + \frac{n}{16+n} \times \frac{6}{n} = \frac{1}{16+n} + \frac{3}{16+n}$

$+ \frac{6}{16+n} = \frac{10}{16+n}$ et $p_{\text{T}}(\text{F}) = \frac{6}{n}$.

Il s'agit donc, pour $n > 0$ et entier, de résoudre

$\frac{10}{16+n} = \frac{6}{n} \Leftrightarrow 10n = 6(16+n) \Leftrightarrow 10n = 96 + 6n \Leftrightarrow 4n = 96$

$\Leftrightarrow n = 24$.

## Épreuves indépendantes

**77.** On appelle $p$ la probabilité d'obtenir Pile.

On a alors :

| 1er lancer / 2e lancer | **Pile** | **Face** |
|---|---|---|
| **Pile** | $p^2$ | $(1-p) \times p$ <br> $= p - p^2$ |
| **Face** | $p \times (1-p)$ <br> $= p - p^2$ | $(1-\text{p})^2$ <br> $= 1 - 2\text{p} + \text{p}^2$ |

Il s'agit donc de résoudre :

$2(p - p^2) = 0,4 \Leftrightarrow 2p^2 - 2p + 0,4 = 0$

On calcule le discriminant de $2p^2 - 2p + 0,4$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 0,4 = 0,8 > 0$, donc il y a deux racines réelles, donc deux valeurs possibles pour $p$ :

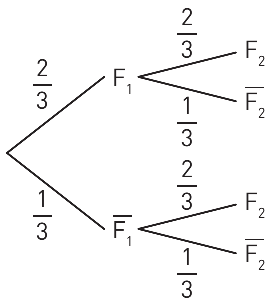
$p_1 = \frac{2 + \sqrt{0,8}}{4}$ ou $p_2 = \frac{2 - \sqrt{0,8}}{4}$ (ces deux nombres étant compris entre 0 et 1).

**78. 1.** *A priori*, le résultat du premier lancer n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième, donc on peut penser que les deux épreuves sont indépendantes.

**2.** On considère les événements :

• $\text{F}_1$ : « le résultat du premier lancer est favorable, c'est-à-dire dans $\{1 ;3 ;5 ;6\}$ » ;

• $\text{F}_2$ : « le résultat du deuxième lancer est favorable, c'est-à-dire dans $\{1 ;3 ;5 ;6\}$ ».




| 1ᵉʳ lancer / 2ᵉ lancer | Favorable | Non favorable |
|---|---|---|
| **Favorable** | $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ |
| **Non favorable** | $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ |

La probabilité qu'il gagne en deux coups est donc $\frac{4}{9}$.

**79. 1. a)**

| Coup d'Elsa / Coup de Dwayne | Pierre | Feuille | Ciseau |
|---|---|---|---|
| **Pierre** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ |
| **Feuille** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ |
| **Ciseau** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ |

**b)** La probabilité d'un match nul est $3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

**2. a)**

| Coup d'Elsa / Coup de Dwayne | Pierre | Feuille | Ciseau |
|---|---|---|---|
| **Pierre** | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ |
| **Feuille** | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ |
| **Ciseau** | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ |

**b)** On rappelle que :

– la pierre bat le ciseau ;

– le ciseau bat la feuille ;

– la feuille bat la pierre.

On a marqué en blanc dans le tableau les cas de victoire d'Elsa, en gris clair les victoires de Dwayne et en gris foncé les cas de match nul.

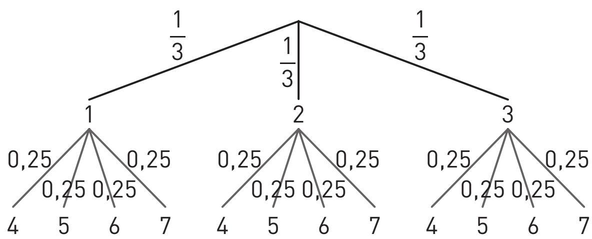
La probabilité qu'Elsa gagne est $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

La probabilité que Dwayne gagne est $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

La probabilité de match nul est $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

Autrement dit, cette stratégie ne permet pas à Dwayne d'améliorer ses chances de victoires (mais ne les diminue pas non plus).

**80.**




| 1ᵉʳ nombre / 2ᵉ nombre | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **4** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ |
| **5** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ |
| **6** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ |
| **7** | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ |

La probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit paire est $6\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

## Travailler autrement

**81.** et **82.** On appelle :

• P l'événement « la porte choisie au premier tour est la bonne » ;

• G l'événement « on gagne le jeu ».