Probabilité : Variables aléatoires

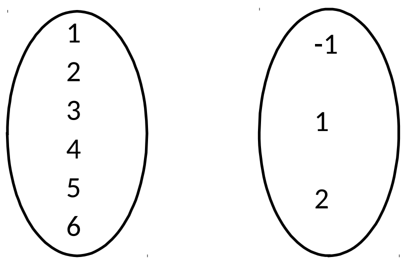
Définition : On note Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une <u>variable aléatoire</u> discrète définie sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Notation : Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z…
Lorsque x désigne un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » se note $\{X=x\}$.
De la même manière, on peut définir les évènements $\{X\leq x\}$, $\{X\geq x\}$, $\{X<x\}$ et $\{X>x\}$.

Exemple : On lance un dé équilibré et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

- Si le résultat obtenu est 1 ou 6, je gagne 2 jetons,
- Si le résultat obtenu est 5, je gagne 1 jeton,
- Sinon je perds 1 jeton.

On définit une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu.
On peut représenter cette expérience par le schéma ci-contre.
X prend les valeurs -1, 1 ou 2.



Dé Gains

• Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définition : Une variable aléatoire est définie qur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque x_i de E associe sa probabilité, notée $p(X=x_i)$.
On peut la représenter sous la forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	…	$p(X=x_n)$

Il est impératif de vérifier que la somme de toutes les probabilités vaut 1.

<u>**Exemple**</u> : En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i				Total
$p(X=x_i)$				

• Espérance d'une loi de probabilité

<u>**Définition :**</u>
Avec ces notations, la loi de probabilité de X associe à chaque x_i de E sa probabilité notée $p_i=p(X=x_i)$.

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est la moyenne de la série des x_i pondérés par p_i

$$E(X) = p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n,$$

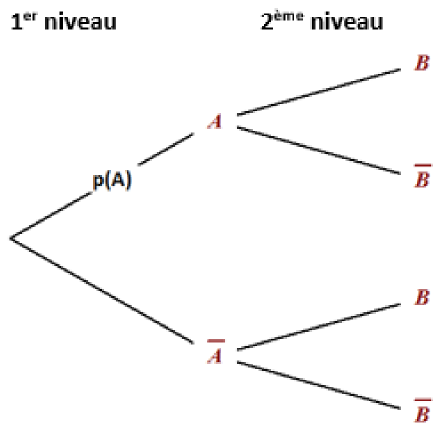
<u>**Interprétation :**</u> Lorsque la variable aléatoire représente un gain algébrique, il s'agit du gain moyen que le joueur peut espérer remporter.

<u>**Exemple :**</u>

- <u>**Espérance de X :**</u>

• Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes :

On se place dans le cas de deux expériences aléatoires à deux issues qui se produisent l'une après l'autre de façon indépendante (c'est-à-dire que le résultat de la seconde épreuve ne dépend pas de ce qu'il s'est passé lors de la première épreuve). On peut alors représenter la situation par un arbre où A et $\overline{A}$ sont les issues de la première expérience et B et $\overline{B}$ sont les issues de la seconde.



Les quatre issues possibles sont $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$.
Les probabilités s'obtiennent en mutipliant les branches apparaissant sur le chemin menant à cette issue : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

ATTENTION !! Cette formule ne doit pas être confondue avec celle des probabilités conditionnelles. Il s'agit en fait d'un cas particulier puisqu'ici, les deux épreuves sont indépendantes (donc $p_A(B)=p(B)$).

<u>Exemple :</u>
Nous avons deux urnes de 5 boules :
2 rouges et 3 jaunes dans la première,
4 rouges et une jaune dans la seconde.
On note R_1 : "tirer une rouge dans l'urne 1"
et R_2 : "tirer une rouge dans l'urne 2", réaliser l'arbre pondéré représentant la situation.
Quelle est la probabilité de $R_1\cap\overline{R_2}$? Et $\overline{R_1}\cap R_2$?
En déduire la probabilité d'avoir tiré deux boules de couleurs différentes.

• Loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli de paramètre** p est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- le **succès,** de probabilité p,
- l'**échec,** de probabilité $1-p$.

Il est possible d'introduire une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon. Ainsi $p(X=1)=p$ et $p(X=0)=1-p$. L'exemple le plus parlant est évidemment le *pile ou face.*

La loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli est appelée Loi de Bernoulli de paramètre p.
Elle peut- être représentée par le tableau ci-contre.

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	$1-p$	p

L'espérance d'une Loi de Bernoulli est $E(X)=p$.

Les arbres pondérés peuvent aussi servir pour représenter la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. Je peux par exemple répéter trois épreuves de Bernoulli et regarder le nombre de succès. Il faudra alors ajouter les probabilités de tous les chemins de l'arbre menant à un résultat favorable, chaque chemin ayant pour probabilité le produit des probabiltés présentes sur chacune des branches.