Calculatrice autorisée - Le barème est donné à titre indicatif.
La rédaction et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans la notation.
TOUTES LES RÉPONSES DOIVENT ÊTRE RÉDIGÉES ET JUSTIFIÉES.

Exercice 1 : *(5 points)*

La scintigraphie cardiaque est une technique d'imagerie qui permet d'examiner la qualité de l'irrigation du coeur par les artères coronaires. Lors de cet examen, on injecte au patient un échantillon d'un isotope de thallium d'activité radioactive 60 MBq (Méga Becquerel).

On appelle demi-vie le temps mis par une substace radioactive pour perdre la moitié de son activité. Ainsi, après une demi-vie l'activité radioactive de cet échantillon de thallium est de 30 Mbq. Puis, après deux demi-vies, l'activité radioactive de cet échantillon est de 15 MBq.

On note u_0 l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) à l'injection. On note u_n l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) après n demi-vies, avec n entier naturel.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire la nature de la suite (u_n). Si c'est possible, préciser la raison.
4. Déterminer l'activité radioactive de cet échantillon après 5 demi-vies.
5. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u_n<0{,}25$.
6. Sachant que la demi-vie de cet isotope de thallium est d'environ 3 jours, déterminer le nombre de jours au bout desquels on est certain que l'activité radioactive de l'échantillon est strictement inférieure à 0,25 MBq.

Exercice 2 : *(6 points)*

Un club de tennis a effectué des statistiques sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.

Les résultats sur une semaine ont permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain au hasard. On notera les événements C : "L'heure est creuse" et T : "Le terrain est occupé".

1. Les terrains sont ouverts de 11h00 à 21h00 tous les jours de la semaine. Combiens d'heures hebdomadaires propose le club de tennis par terrain et par semaine ?
2. Établir le tableau croisé d'effectifs correspondant à la situation.
3. Déterminer $\text{Card}(C\cap T)$. Interpréter ce résultat.
4. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
5. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.
6. Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés : 10 € pour une heure pleine et 6 € pour une heure creuse. Calculer la somme que peut espérer avoir le club à la fin de la semaine.
7. Le club comporte 10 terrains. Calculer la recette hebdomadaire moyenne du club.

Exercice 3 : *(3 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-2x+9)^2$ et h un nombre réel non-nul.

1. a) Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.

   b) En déduire que la fonction f est dérivable en 2 et déterminer $f'(2)$.

2. a) Justifier, à l'aide des propriétés sur les ensembles de dérivabilité, que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x et retrouver le résultat de la question 1. b) .

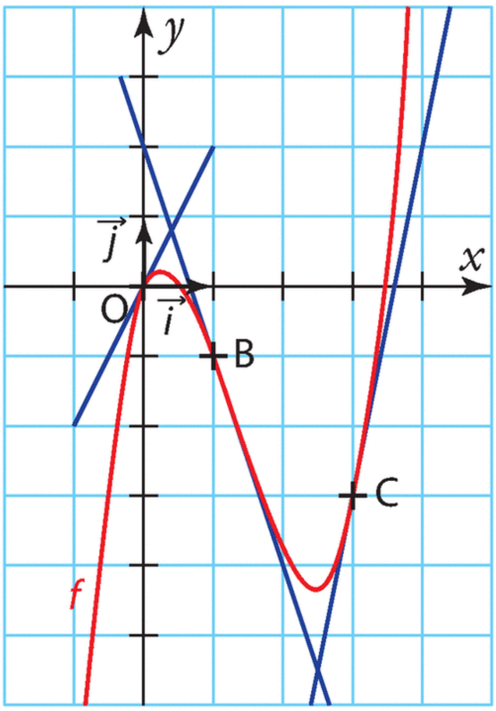
Exercice 4 : *(4 points)*

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa fonction dérivée sur I.

$m(x)=-\frac{2}{9}x^3+4x^2-5$ sur $I=\mathbb{R}$, $n(x)=-\frac{7x}{2}(8x+1)$ sur $I=\mathbb{R}$,

$j(x)=\frac{1}{5x^5}$ sur $I=]0;+\infty[$, $p(x)=-\cos(4x+3)$ sur $I=\mathbb{R}$.

Exercice 5 : *(3 points)*



Dans le repère orthonormé (O,I,J) ci-contre, la courbe C_f représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et les droites tracées représentent les tangentes à C_f respectivement au point O, au point B d'abscisse 1 et au point C d'abscisse 3.

1. Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point C.
3. La courbe C_f est la représentation graphique de la fonction

$$f(x)=x^3-4x^2+2x.$$

Retrouver par le calcul les résultats des questions 1. et 2. .