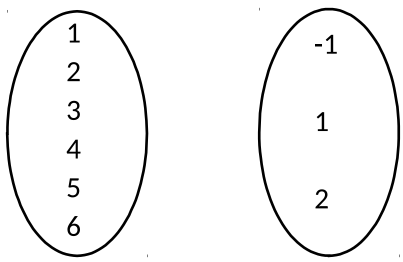
Définition : On note Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Notation : Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z…
Lorsque x désigne un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » se note $\{X=x\}$.
De la même manière, on peut définir les évènements $\{X \leq x\}$, $\{X \geq x\}$, $\{X < x\}$ et $\{X > x\}$.

Exemple : On lance un dé équilibré et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

- Si le résultat obtenu est 1 ou 6, je gagne 2 jetons,
- Si le résultat obtenu est 5, je gagne 1 jeton,
- Sinon je perds 1 jeton.

On définit une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu.
On peut représenter cette expérience par le schéma ci-contre.
X prend les valeurs -1, 1 ou 2.



Dé Gains

• Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définition : Une variable aléatoire est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque x_i de E associe sa probabilité, notée $p(X=x_i)$.
On peut la représenter sous la forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	…	$p(X=x_n)$

Il est impératif de vérifier que la somme de toutes les probabilités vaut 1.

<u>**Exemple**</u> : En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i				Total
$p(X=x_i)$				

• Espérance, variance et écart-type d'une loi de probabilité

<u>**Définitions :**</u>
Avec ces notations, la loi de probabilité de X associe à chaque x_i de E sa probabilité notée $p_i = p(X=x_i)$.

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est la moyenne de la série des x_i pondérés par p_i

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n,$$

- **La variance de la loi de probabilité de** X est la variance de la série des x_i pondérés par p_i :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n (x_n - E(X))^2,$$

- **L'écart-type de la loi de probabilité de** X est l'écart-type de la série des x_i pondérés par p_i :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Interprétation :

La variance et l'écart-type ont les mêmes définitions que pour une série statistique. L'espérance remplace la moyenne. Lorsque la variable aléatoire représente un gain algébrique, il s'agit du gain moyen que le joueur peut espérer remporter. L'écart-type symbolise lui la dispersion des valeurs autour de l'espérance.

Exemple :

x_i				Total
$p(X=x_i)$				
$(x_i-E(X))^2$				

- **Espérance de X :**

- **Variance de X :**

- **Ecart-type de X :**

• Transformation affine d'une variable aléatoire :

Propriété : Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. Soit a et b deux réels. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y=aX+b$. Alors :

- $E(Y)=aE(X)+b$
- $V(Y)=a^2V(X)$
- $\sigma(Y)=|a|\sigma(X)$

Le cours du manuel est extrêmement bien écrit pour ce chapitre, servez-vous-en. Aussi, vous trouverez dans le TP1 (page 320) des rappels quant à l'utilisation de la calculatrice pour calculer ses valeurs.