Droites

Vecteur directeur d'une droite

<u>Définition :</u> On considère une droite d et deux points distincts A et B de d. On appelle **vecteur directeur** de la droite d tout vecteur non nul, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

<u>Remarques :</u>
- On dit que le vecteur ***dirige*** la droite d.
- La direction *(pas le sens)* du vecteur directeur définit la direction de la droite d.
- Deux vecteurs directeurs de d ont la même direction : ils sont colinéaires.
- Deux droites parallèles ont la même direction : ainsi tout vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

<u>Propriété :</u> Une droite d peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$. On a alors

$M \in d$ **si et seulement si** $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Équation cartésienne d'une droite

<u>Définition :</u> Une **équation cartésienne** de la droite passant par le point $A(x_A ; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de la forme $ax+by+c=0$.

Preuve : Un point M est sur la droite <u>ssi</u> $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires <u>ssi</u> $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})=0$ <u>ssi</u>
$a\times(x-x_A)-(-b)\times(y-y_A)=0$ <u>ssi</u> $ax+by+(-ax_A-by_A)=0$.

<u>Propriété :</u> Si les coordonnées d'un point $M(x;y)$ satisfont l'équation $ax+by+c=0$, alors M appartient à une droite dont $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est vecteur directeur.

Équation réduite d'une droite

<u>Définition :</u> Soit d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec a et b non tous nuls.

1. Si $b=0$, alors la droite d est **verticale**, parallèle à l'axe des ordonnées.

Elle admet une **équation réduite** de la forme $x=k$ pour une constante $k\in\mathbb{R}$.

Preuve : $b=0 \Leftrightarrow ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ car $a\neq 0$. Tous les points ont la même abscisse, c'est une droite verticale.

2. Si $b\neq 0$, alors la droite d admet une unique **équation réduite** de la forme $y=mx+p$.

m est le **coefficient directeur** (ou la pente) de d et p est l'**ordonnée à l'origine** de d.

Preuve : $b\neq 0 \Leftrightarrow ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.

<u>Remarques :</u>
- Si $a=0$, la droite est **horizontale**, parallèle à l'axe des abscisses. Son équation est de la forme $y=k$ pour $k\in\mathbb{R}$.
- Dans le second cas, la droite d est la représentation graphique de la fonction affine $f(x)=mx+p$.
- Une droite verticale ne peut être la représentation d'une fonction puisqu'un réel ne peut avoir qu'**UNE** image.

<u>Propriété :</u> Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $y=mx+p$.

La phrase '*Lorsque j'avance de 1, je monte de* m.' est la transcription parfaite de cette propriété. **Souvenez-vous en.**
Le point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0;p)$.

<u>Propriété :</u> Si l'on ne connait pas d'équation réduite de la droite, si celle-ci est donnée par deux points A et B par exemple, on peut facilement calculer le coefficient directeur de la droite (AB) grâce à la formule $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.
Pour trouver l'ordonnée à l'origine, il suffit d'utiliser qu'un point appartient à la droite : $y_A=mx_A+p \Leftrightarrow p=y_A-mx_A$.

Positions relatives de deux droites

Dans le plan, deux droites n'ont que trois situations possibles de coexister :
- elles sont **sécantes** : il existe un unique point d'intersection,
- elles sont **strictement parallèles** : l'intersection des deux droites est vide,
- elles sont **confondues** : l'intersection contient la droite elle-même.

Remarque : Deux droites confondues sont considérées comme parallèles.

<u>Propriété</u> Deux droites d'équations **cartésiennes** $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles <u>si et seulement si</u> leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, donc <u>si et seulement si</u> $ab'-ba'=0$.

<u>Propriété</u> Deux droites d'équations **réduites** $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles <u>si et seulement si</u> $m=m'$.
Si de plus $p=p'$, alors elles sont confondues.

Systèmes linéaires d'équations

Dans le cas de deux droites sécantes, le point d'intersection $M(x;y)$ a ses coordonnées qui vérifient les deux équations. On parle d'un **système linéaire de deux équations à deux inconnues** $\begin{cases} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$.

D'après les résultats précédents, ce système admet une unique solution <u>si et seulement si</u> $ab'-ba'\neq 0$.
Dans ce cas, les droites ne sont pas parallèles et la solution de ce système donne les coordonnées du point d'intersection.

1. Résolution par <u>substitution</u>

Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation. Soit à résoudre le système $(S)\ \begin{cases}4x+y=7\\3x-2y=8\end{cases}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4x+7\\ 3x-2\times(-4x+7)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4x+7\\ 3x+8x=8+14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4x+7\\ 11x=22\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4x+7\\ x=2\end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4\times 2+7\\ x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ x=2\end{cases} \Leftrightarrow (2;1) \text{ est solution du système } (S).$$

2. Résolution par <u>combinaison linéaire</u>

Il s'agit cette fois de multiplier chaque équation par un nombre de manière à pouvoir éliminer une variable en additionnant les deux équations membres à membres. Soit à résoudre le système $(S)\ \begin{cases}2x-3y=8\\5x+4y=-3\end{cases}$.

On va multiplier la première équation par 5 et la deuxième par -2.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-15y=40 & (5L_1)\\ -10x-8y=6 & (-2L_2)\end{cases} \Leftrightarrow$ On ajoute les deux équations obtenues : $-23y=46 \quad (L_1+L_2)$.

On en déduit que $y=-2$ et il suffit de remplacer y par sa valeur dans l'une des deux équations pour conclure.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\\ 2x-3\times(-2)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\\ 2x=8-6=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow (1;-2) \text{ est solution du système } (S).$$

Remarques : La deuxième équation dans la seconde méthode permet de vérifier notre solution.
Dans la majorité des cas, la résolution par combinaison linéaire est à privilégier.