Les nombres complexes

Premières définitions

<u>**Définition**</u> Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- il contient un nombre i tel que $i^2=-1$;
- il est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

<u>**Exemples :**</u>

- Les nombres -1 ; 0 ; $\frac{3}{4}$; 2 sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de $\mathbb{C}$.
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : $-i$; $2i$; $i\sqrt{2}$ sont aussi dans $\mathbb{C}$.
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1+i$; $2+2i$.

<u>**Définition :**</u> Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $z=a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z.

- a est appelée **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
- b est appelée **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

<u>**Remarques :**</u>

- Lorsque la partie imaginaire d'un complexe z est nulle, alors $z=a$ est un réel.
- Lorsque la partie réelle d'un complexe z est nulle, alors $z=ib$ est un **imaginaire pur**.

Addition, soustraction et multiplication

<u>**Propriété :**</u> Pour ces trois opérations, tout se passe dans $\mathbb{C}$ comme cela se passerait dans $\mathbb{R}$, en se rappelant que le carré de i est égal à -1 pour le produit.

- Si $z_1=a_1+i\,b_1$ et $z_2=a_2+i\,b_2$ alors $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$.
- Si $z_1=a_1+i\,b_1$ et $z_2=a_2+i\,b_2$ alors $z_1-z_2=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$.
- Si $z_1=a_1+i\,b_1$ et $z_2=a_2+i\,b_2$ alors $z_1\times z_2=a_1a_2+i\,a_1b_2+ib_1a_2+i^2b_1b_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2)$.

Quotient et conjugué

On a vu dans l'Activité 2 que la division par un nombre complexe nécessite l'utilisation du **conjugué**.

<u>**Définition :**</u> Le **conjugué** d'un nombre complexe $z=a+ib$ est le complexe $a-ib$ noté $\overline{z}$.

<u>**Propriété :**</u> Si $z=a+i\,b$ est un nombre complexe, alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$ est un nombre réel positif.

Preuve : $z\times\overline{z}=(a+ib)\times(a-ib)=a^2-iab+iba-i^2b^2=a^2+b^2$.

<u>**Méthode :**</u> Pour calculer le quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple : $\frac{3+4i}{2+i}=\frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-3i+8i-4i^2}{2^2-i^2}=\frac{6+5i+4}{4+1}=\frac{10+5i}{5}=2+i$.

<u>**Propriété :**</u> La conjugaison se comporte très simplement avec les opérations :

- Le conjugué du conjugué est le complexe lui-même $\overline{\overline{z}}=z$;
- Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;
- Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$;
- Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.