Primitives

Premières définitions

Primitiver est l'opération réciproque de dériver. Les applications en physique sont multiples.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dont la dérivée sur I est f. On a alors $F'=f$.

Exemple : Une primitive de $f(t)=4t$ est $F(t)=2t^2$ car $F'(t)=2\times 2t=4t=f(t)$.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient F et G deux primitives de f sur I. Alors il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $G(t)=F(t)+C$.
Toutes les primitives de f sont égales **à une constante près**. Graphiquement, cela se représente par une translation verticale de la courbe représentative de la fonction.

Exemple Les primitives de $f(t)=4t$ sont les fonctions de la forme $F(t)=2t^2+C$, pour une constante C.

Méthodes de calcul pour une fonction polynomiale

On se sert des formules de dérivation que l'on utilise à l'envers.

Propriété : Soit n un entier naturel. Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^n$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, avec C une constante réelle.

Preuve : $F'(x)=\frac{(n+1)x^n}{n+1}+0=x^n=f(x)$.

Propriété : Comme pour le cas de la dérivation, la primitivation d'une fonction polynomiale se fait terme-à-terme en utilisant la formule précédente.

Exemple Les primitives de $f(t)=4t^3+7t$ sont les fonctions de la forme $F(t)=4\times\frac{t^4}{4}+7\times\frac{t^2}{2}+C=t^4+\frac{7}{2}t^2+C$.

Méthodes de calcul pour une fonction trigonométrique

On raisonne de la même manière pour les fonctions cosinus et sinus.

Propriété : Soient A, ω et ϕ des nombres réels avec $\omega\neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=A\cos(\omega t+\phi)$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\phi)+C$, avec C une constante réelle.

Preuve : $F'(t)=\frac{A}{\omega}\times\omega\cos(\omega t+\phi)=A\cos(\omega t+\phi)$.

Propriété : Soient A, ω et ϕ des nombres réels avec $\omega\neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=A\sin(\omega t+\phi)$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\phi)+C$, avec C une constante réelle.

Preuve : $F'(t)=-\frac{A}{\omega}\times\omega\times(-\sin(\omega t+\phi))=A\sin(\omega t+\phi)$.