Produit Scalaire - Applications

Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

<u>Propriété :</u> Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2.$$

Preuve : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$,

car I milieu de $[AB]$ implique que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ et $IA=\frac{1}{2}AB$.

Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

<u>Propriété :</u> Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Preuve : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}AB^2=0\Leftrightarrow MI^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2\Leftrightarrow MI=\frac{1}{2}AB$.

Comme le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$ est le cercle de diamètre $[AB]$, le résultat est démontré.

<u>Remarque :</u> Dans le cas où l'on souhaite $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ avec $k\neq 0$, on applique la même méthode et on obtient un cercle de centre I dont le rayon dépend de k. Ce cercle peut éventuellement être réduit à un point ou bien être vide.

Formules d'Al-Kashi

Le théorème d'Al-Kashi est une généralisation du théorème de Pythagore dans un triangle non-rectangle. Il permet de mettre en lien les longueurs des côtés avec les angles du triangle.

<u>Propriété :</u> Soit ABC un triangle. On a

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}.$$

En posant $a=BC$, $b=AC$ et $a=BC$, alors

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\widehat{A},\quad b^2=a^2+c^2-2\,ac\cos\widehat{B}\quad\text{et}\quad c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos\widehat{C}.$$

Preuve : $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.