Arithmétique

Rappels : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers **naturels** $\{0;1;2;...\}$ (positifs) et $\mathbb{Z}$ celui des entiers **relatifs** $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$ (positifs et négatifs).

Multiples et diviseurs

Définition : Soient deux entiers relatifs n et p. S'il existe un entier relatif q tel que $n=p\times q$, on dit que

- p **divise** n ou que p est un **diviseur** de n,
- n est **divisible** par p ou que n est un **multiple** de p.

Remarque : 1 et n sont toujours des diviseurs de n et n a une infinité de multiples : $2n, 3n, -n, ...$
Tous les multiples d'un entier n sont de la forme $k\times n$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$.

Nombres premiers

Définition : Un nombre entier **naturel** est premier s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts :

1 et lui-même.

Remarque : 1 **n'**est **pas** un nombre premier.

Exemples : Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...$

Les nombres premiers sont les *briques élémentaires* des ensembles des entiers. C'est l'objet du théorème suivant, appelé **Théorème fondamental de l'arithmétique**.

Théorème Tout entier naturel peut se décomposer de manière unique comme un produit de nombres premiers.

Propriété : Tout nombre entier n qui n'est pas premier admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

On se sert de cette propriété pour montrer qu'un nombre est premier : s'il n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que $\sqrt{n}$, alors n est forcément lui-même premier.

Parité

Définition : Soit un entier relatif n.

- Si n est divisible par 2, on dit que n est **pair**. Il existe alors un entier k tel que $n=2\times k$.
- Sinon, on dit que n est **impair**. Il existe alors un entier k tel que $n=2\times k+1$.

Propriété : Soit un entier relatif n.

- Si n est pair, alors son carré n^2 est pair.
- Si n est impair, alors son carré n^2 est impair.

Preuve :

- Si n est pair, on peut écrire $n=2k$. Alors $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2$, donc n^2 est pair.
- Si n est impair, on peut écrire $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=(2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2=4k^2+4k+1=2\times(2k^2+2k)+1$, donc n^2 est impair.