Variations

Dans tout le chapitre, on note f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

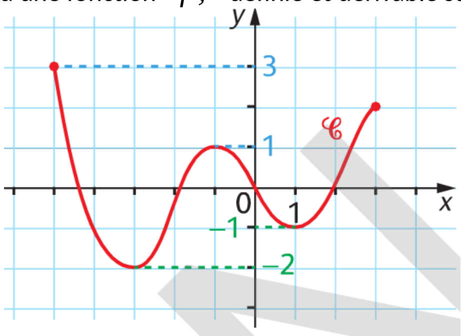
1. Signe de la dérivée et variation

Théorème

- Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple

Voici la courbe d'une fonction f, définie et dérivable sur $[-5;3]$. On en déduit le tableau de signe de f' :



x	-5		-3		-1		1		3
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Théorème

- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est décroissante sur I.

Remarque

Il existe même un résultat plus précis. En effet, si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où $f'(x)$ s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur I. Graphiquement, la courbe représentant f peut avoir quelques tangentes horizontales, mais malgré l'impression que l'on peut avoir visuellement, la fonction n'est constante sur aucun intervalle, aussi petit soit-il !

Méthode : *Étudier les variations d'une fonction* f

1) **On détermine l'ensemble de dérivation de f**
2) **On calcule la fontion dérivée f'**
3) **On étudie le signe de $f'(x)$**
4) **On en déduit les variations de la fonction f**

Application : Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - x$.

2. Extremum d'une fonction

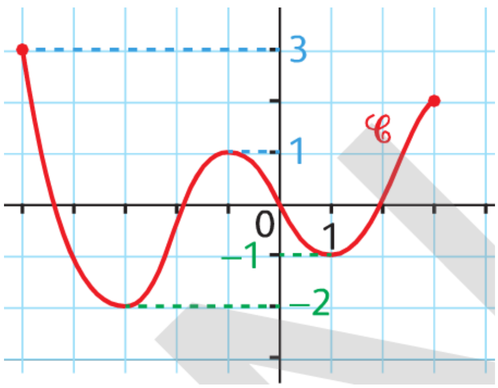
<u>Définition</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Le réel M est le **maximum** de f sur I s'il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
  On dit que le **maximum** de f sur I est **atteint** en a.
- Le réel m est le **minimum** de f sur I s'il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = m$ et que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.
  On dit que le **minimum** de f sur I est **atteint** en a.
- Un **extremum** est une valeur extrême, c'est-à-dire un **minimum** ou un **maximum**.

<u>Définition</u>

f admet un **maximum local** M sur I, atteint en c, s'il existe un intervalle ouvert J, contenu dans I et contenant c, tel que M soit un maximum de f sur J.

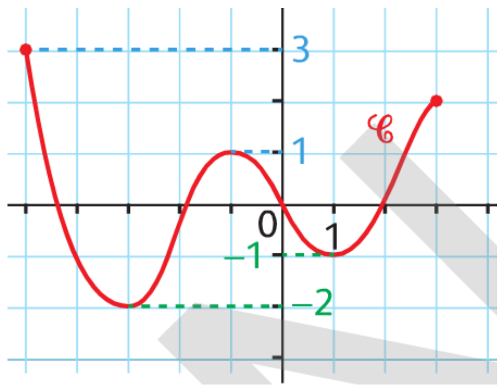
Alors $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in J$.



Ici, 1 est un maximum local de f. Il est atteint en -1.

f admet un **minimum local** m sur I, atteint en c, s'il existe un intervalle ouvert J, contenu dans I et contenant c, tel que m soit un minimum de f sur J.

Alors $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in J$.



Ici, -2 et -1 sont des minima locaux de f. Ils sont atteints respectivement en -3 et en 1.
Seul -2 est le minimum de f sur $[-5;3]$.

<u>Théorème</u> (Condition nécessaire) : Soit f une fonction définie sur I et a un réel de I qui ne soit pas une borne.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

ATTENTION ! La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. $f(x) = x^3$ est un contre-exemple lorsque $x = 0$.

<u>Théorème</u> (Condition suffisante) : Soit f une fonction définie sur I et a un réel de I qui ne soit pas une borne.

- Si la fonction dérivée s'annule en a **et qu'elle change de signe de part et d'autre**, alors f admet un extremum local en a.