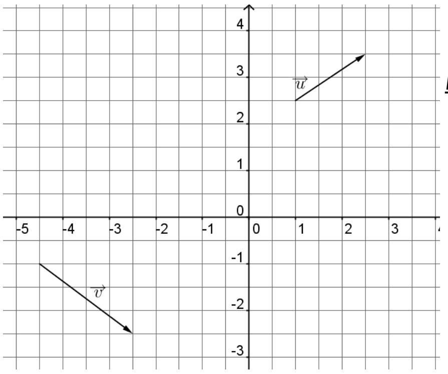
Vecteurs - Coordonnées

On se place dans un repère $(O\,;I,J)$.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.



<u>Remarque :</u> Le repère $(O\,;I,J)$ peut aussi se noter $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ où $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ noté aussi $(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$.

<u>Propriété :</u> Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux <u>si et seulement si</u> $x=x'$ <u>et</u> $y=y'$.

Implication directe : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, alors $x=x'$ et $y=y'$.

Implication réciproque : Si $x=x'$ et $y=y'$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux.

Contraposée : Si $x\neq x'$ ou $y\neq y'$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas égaux.

• Opération sur les vecteurs

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs. Les vecteurs suivants ont pour coordonnées

→ $\vec{u}+\vec{v}$ = $(x+x'\,;y+y')$, $k\vec{u}$ = $(kx\,;ky)$,

<u>Donc</u> $-\vec{u}$ = $(-x\,;-y)$.

<u>Propriétés :</u> On considère trois vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et deux réels k et k'.

- $\vec{u}+\vec{v}$ = $\vec{v}+\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ = $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $k(\vec{u}+\vec{v})$ = $k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u}$ = $k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u})$ = $(k\times k')\vec{u}$
- $k\vec{u}=\vec{0}$ **si et seulement si** $k=0$ **OU** $\vec{u}=\vec{0}$.

<u>Applications :</u>

On considère les points du plan $A(1\,;1)$, $B(3\,;5)$ et $C(-3\,;-1)$ dans un repère $(O\,;I,J)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

- ## Norme d'un vecteur

Définition : La norme d'un vecteur est la longueur de ce vecteur. Il s'agit donc de la distance entre les deux extrémités de la flèche. La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $||\vec{u}||$.

Exemple : Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, il s'agit simplement de la distance entre A et B, c'est-à-dire AB.

Pour les vecteurs de la base orthonormée, on a $||\vec{i}||=1$ et $||\vec{j}||=1$.

Propriété : Soit un vecteur $\vec{u}$ et k un réel non-nul.

Si $k>0$, alors la norme du vecteur $k\vec{u}$ est $||k\vec{u}||=k||\vec{u}||$. Mais si $k<0$, alors $||k\vec{u}||=(-k)||\vec{u}||$.

En effet, la norme doit rester **positive** puisqu'il s'agit d'une distance, et si $k<0$, alors $(-k)$ est positif.

En conclusion, pour tout k réel, $\boxed{||k\vec{u}||=|k|||\vec{u}||,}$ (c'est une nouvelle utilisation de la valeur absolue).

Propriété : Soit un vecteur $\vec{u}$ ayant pour coordonnées dans une base orthonormée $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est donnée par la formule $\boxed{||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}.}$

Application : Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on retrouve la formule

$$||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=AB.$$