Fonctions - Signes

Définition et tableau de signes

Définition :
On dit qu'une fonction f est **positive** sur un ensemble I lorsque pour toute valeur $x \in I$, on a $f(x) \geq 0$.
De même, on dit que f est **négative** sur un ensemble I lorsque pour toute valeur $x \in I$, on a $f(x) \leq 0$.

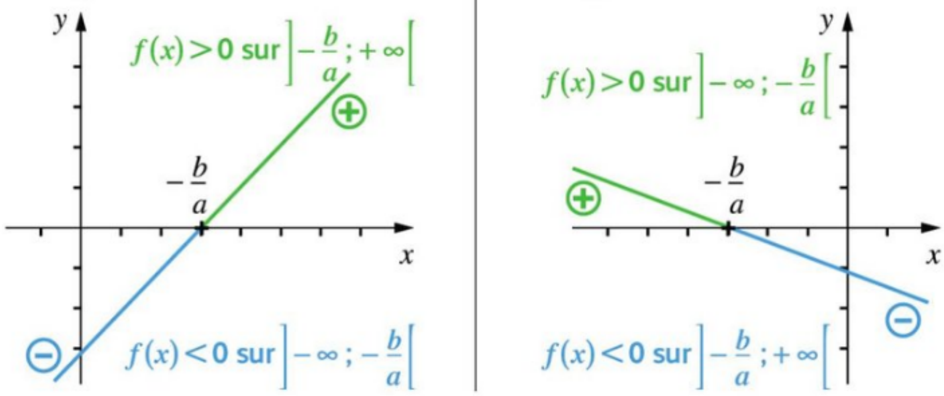
Étudier le signe d'une fonction consiste à déterminer les ensembles sur lesquels elle est positive et ceux sur lesquels elle est négative. Très souvent, le résultat est donné sous la forme d'un **tableau de signes**.

Signe d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, pour a et b deux réels.

Propriété :
Comme pour les variations, le signe de $f(x) = ax + b$ dépend du signe de a. Celui-ci change en $x = -\dfrac{b}{a}$, unique solution de l'équation $ax + b = 0$.
Preuve : $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

Cas $a > 0$: f est croissante | **Cas $a < 0$: f est décroissante**



On résume ces informations dans un tableau de signes.

Tableau de signes pour $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Tableau de signes pour $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Rappels : inéquations et opérations

Définition : On dit que deux inéquations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Propriété Les manipulations algébriques suivantes transforment une inéquation en une inéquation équivalente.

- Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres ;
- Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inéquation par un même nombre positif non-nul ;
- Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inéquation par un NOMBRE NÉGATIF non-nul
  EN MODIFIANT LE SENS DE L'INÉGALITÉ ;
- Développer, factoriser et réduire les membres de l'inéquation.

Signe d'un produit et inéquation-produit

Pour étudier le signe du produit $A(x)\times B(x)$, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes d'un produit. On construit alors un tableau de signes bilan.

Exemple :

Résolution de l'inéquation-produit :

$$(x-6)(-2x+3)>0$$

x	$-\infty$		1,5		6		$+\infty$
Signe de $x-6$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc le produit $(x-6)(-2x+3)$ est **strictement positif** lorsque :

$$x\in\left]1{,}5\,;6\right[$$

L'ensemble S des solutions de l'inéquation est $S=\left]1{,}5\,;6\right[$.

Signe d'un quotient et inéquation-quotient

Pour étudier le signe d'un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes d'un quotient à l'aide d'un tableau de signes en prenant garde aux éventuelles **valeurs interdites**.

Exemple :

Résolution de l'inéquation $\frac{-2x+4}{x-1}\leqslant 0$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $-2x+4$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe du quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble S des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-\infty\,;1\right[\cup\left[2\,;+\infty\right[$$