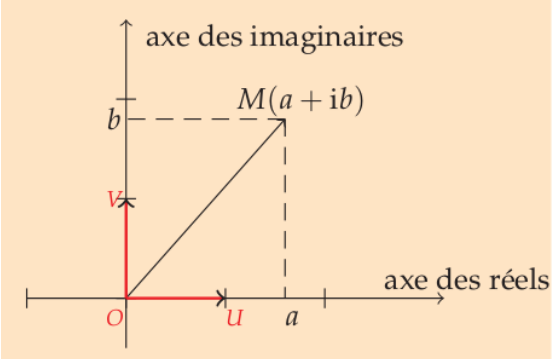
# Les nombres complexes

## Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OV})=(O;\vec{u};\vec{v})$.




**<u>Définition :</u>** Tout nombre complexe $z=a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

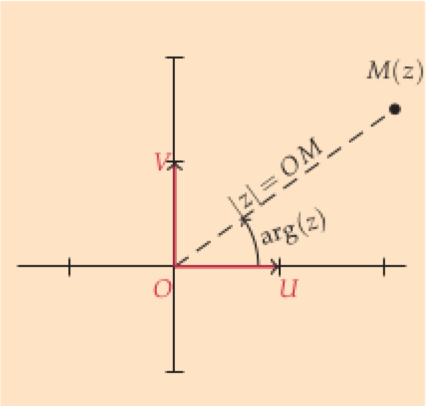
- un unique point $M(a;b)$ appelé **point image** de $z$.
- un unique vecteur $\overrightarrow{OM}(a;b)$ appelé **vecteur** image de $z$.

On dit que $z=a+ib$ est **l'affixe** du point $M$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent $M(z)$ ou $M(a+ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a+ib)$.

**<u>Remarques :</u>**
- Les complexes $z=a\in\mathbb{R}$ sont les **nombres réels** et sont représentés sur **l'axe des abscisses**.
- Les complexes $z=ib$, $b\in\mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **l'axe des ordonnées**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

## Module et argument d'un nombre complexe




**<u>Définition :</u>** Soit $z$ un complexe et $M$ un point d'affixe $z$.

- On appelle **module** de $z$ la distance $OM$.
  Le module de $z$ est noté $|z|$.
- Si $z\neq 0$, on appelle **argument** de $z$ <u>une</u> mesure en radians de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$. Un argument de $z$ est noté $\arg(z)$.
- Le complexe nul n'a pas d'argument et a pour module 0.

**<u>Remarque :</u>** L'argument d'un nombre complexe est donné à un multiple de $2\pi$ près.

**<u>Propriété :</u>** Si $z=a+ib$ est un nombre complexe, alors $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

**Exemple :** $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

**<u>Propriété :</u>** Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes.

- Le module du conjugué est égal au module du complexe $|\bar{z}|=|z|$ ;
- Le produit d'un complexe avec son conjugué est le carré du module $z\times\bar{z}=|z|^2$ ;
- Le module d'un produit est le produit des modules $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$ ;
- Le module d'un quotient est le quotient des modules $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

## Forme trigonométrique

**<u>Définition :</u>** Tout nombre complexe non-nul peut s'écrire sous la forme $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r=|z|>0$ et $\theta=\arg(z)$. Cette forme s'appelle **forme trigonométrique** de $z$.

**<u>Remarques :</u>**

- $r$ doit **impérativement** être positif puisqu'il s'agit du module du nombre complexe.
- Il est aussi possible d'utiliser la forme $[r;\theta]$, ce sont les **coordonnées polaires**.

**<u>Théorème :</u>** Pour passer d'une forme a une autre, soit $z$ un complexe non-nul tel que $z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

| | |
|---|---|
| $r=\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$ | $a=r\times\cos\theta$ |
| $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ | $b=r\times\sin\theta$ |