Suites - la suite

Rappels :

Formule explicite : formule donnant directement u_n **en fonction de** n.
Relation de récurrence : relation exprimant u_{n+1} **en fonction de** u_n, sans oublier la donnée du premier terme.

Suite arithmétique : $u_{n+1}=u_n+r$ et $u_n=u_0+n\times r$. r est la **raison** de la suite arithmétique.
Suite géométrique : $v_{n+1}=q\times v_n$ et $v_n=u_0\times q^n$. q est la **raison** de la suite géométrique.

Sens de variation d'une suite

Une suite (u_n) est

- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\geq u_n$,
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\leq u_n$,
- **constante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n$.

Une suite est dite **monotone** si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

Remarques :
- On peut obtenir des définitions de stricte monotonie en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- On peut aussi regarder les variations à partir d'un certain rang p en regardant la même chose mais pour $n\geq p$.
- Une suite est dite **stationnaire** si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Étude de la différence entre deux termes consécutifs

Propriété :
Pour étudier les variations d'une suite, il suffit de comparer la différence de deux termes consécutifs à 0.

- Si $u_{n+1}-u_n\geq 0$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $u_{n+1}-u_n\leq 0$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Corollaire :
Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r.

- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

Étude du quotient entre deux termes consécutifs

Propriété :
Pour étudier les variations d'une suite **dont les termes sont non-nuls**, on peut aussi comparer le quotient de deux termes consécutifs à 1.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Corollaire :
Soit (v_n) une suite **géométrique** de raison q et dont le premier terme v_0 est non-nul.

- Si $q>1$, alors la suite (v_n) est
  - **strictement croissante** si $v_0>0$ et **strictement décroissante** si $v_0<0$.
- Si $q<1$, alors la suite (v_n) est
  - **strictement décroissante** si $v_0>0$ et **strictement croissante** si $v_0<0$.
- Si $q=1(\text{ou } q=0)$, alors la suite (v_n) est **constante** (ou **stationnaire**).
- Si $q<0$, alors la suite (v_n) n'est pas monotone (elle change de signe à chaque terme).

Notion de limite

Le but dans ce paragraphe est d'étudier le comportement d'une suite (u_n) pour de très grandes valeurs de n.
On dit que n tend vers l'infini, ce que l'on donne $n \to +\infty$.

Définition :
Soit (u_n) une suite de réels et $L \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) **converge** vers L lorsque les termes de la suite se rapprochent indéfiniment de L pour de grandes valeurs de n.
L est appelée la **limite** de la suite (u_n) et on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$.

Lorsque la suite (u_n) ne **converge** pas, on dit qu'elle **diverge**. Il y a alors plusieurs cas possibles :

- Si les termes de la suite deviennent arbitrairement grands lorsque n augmente, on dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou que la suite tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- Si les termes de la suite deviennent arbitrairement petits lorsque n augmente, on dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ou que la suite tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

- Dans les autres cas, la suite (u_n) n'admet pas de limites.

Je vous laisse observer des exemples graphiques dans votre manuel aux pages 54 et 55 et dans l'Activité 8 page 47.