Fonction exponentielle

Existence et unicité

<u>Définition :</u> Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes $f(0)=1$ et $f'=f$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée $\exp$.
Ainsi, pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, $\exp(0)=1$ et $\exp'(x)=\exp(x)$.

Preuve : L'existence est admise, la preuve de l'unicité est dans votre manuel page 172.

Propriétés algébriques

<u>Propriété :</u> La propriété principale de la fonction exponentielle est qu'elle transforme les sommes en produits.
Pour tout couple de réels $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

Preuve : La preuve de ce résultat est donnée dans l'Activité 3.

<u>Corollaire :</u> Pour tous réels a et b, et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}, \qquad \exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \text{et} \qquad (\exp(a))^n=\exp(an).$$

Preuve :

- $\exp(a)\times\exp(-a)=\exp(a+(-a))=\exp(0)=1\Rightarrow\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$.
- $\exp(a-b)=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times\dfrac{1}{\exp(b)}=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- La preuve du dernier point fait l'objet de l'Activité 4.

Notation

<u>Définition :</u> On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle. Ainsi $\exp(1)=e$.
Une valeur approchée de e est $e\simeq 2{,}718$.

Comme la fonction exponentielle partage les mêmes propriétés que les fonctions puissances, on choisit de noter plus simplement la fonction exponentielle : $\exp(x)=e^x$.

Ainsi, comme pour les puissances, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$e^{x+y}=e^x\times e^y, \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x}, \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad \text{et} \qquad (e^x)^n=e^{nx}.$$

<u>Propriété :</u> Pour tout $a\in\mathbb{R}$, la suite (u_n) définie pour $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=e^{an}$ est une suite géométrique.
Son premier terme vaut $u_0=e^0=1$ et sa raison est e^a.

Preuve : Ce résultat est démontré dans l'Activité 5.

Le lien est très fort entre suites géométriques et fonction exponentielle : toute suite géométrique de raison strictement postitive peut s'écrire à l'aide d'une fonction exponentielle.
Si $q>0$, il existe un réel a tel que $e^a=q$. Alors $u_n=u_0q^n=u_0e^{an}$.

Étude de la fonction

<u>**Propriété :**</u> La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Preuve : $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$ et $e^x \neq 0$ car $e^x \times e^{-x} = 1$.

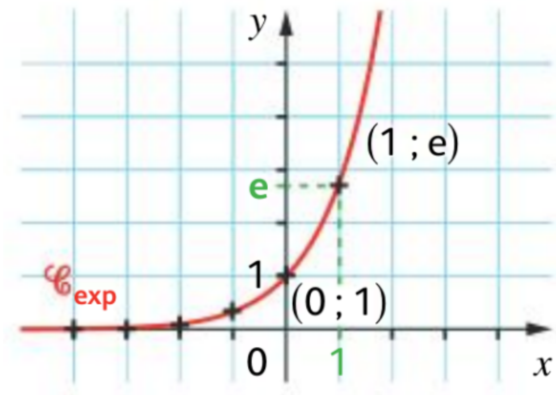
<u>**Propriété :**</u> La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : On sait que la fonction exponentielle admet pour dérivée la fonction exponentielle. Or celle-ci est strictement positive, donc la dérivée est strictement positive, donc la fonction est strictement croissante.

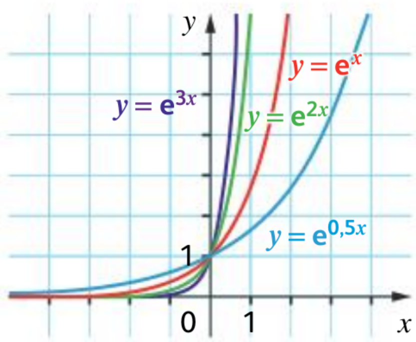
<u>**Corollaire :**</u> Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
En particulier, si $b = 0$, $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ et $e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$.

Représentation graphique

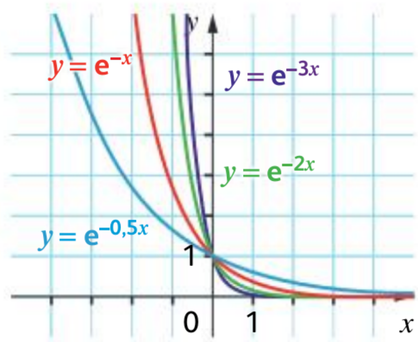
- La courbe de la fonction exponentielle passe par les ponts de coordonnées $(0;1)$ et $(1;e)$.
- La courbe est toujours strictement **au-dessus** de l'axe des abscisses.



Représentation graphique des fonctions $f(x) = e^{kx}$ selon que $k > 0$ ou $k < 0$



Croissance exponentielle



Décroissance exponentielle

Exponentielle d'une fonction affine

<u>**Propriété :**</u> Si a et b sont deux réels, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et pour tout réel x, $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.