Exercice suivi du cours de C : E R O

J. Lieber, Université de Lorraine, `Jean.Lieber@loria.fr`, dernière version : 10 mars 2019

(Si vous voyez des erreurs, merci de me les signaler.)

Énoncé de l'exercice

Question 1. Décrivez informellement un domaine de votre choix, dans lequel vous allez exprimer des connaissances.

Question 2. Le formalisme considéré dans cette question est la logique propositionnelle. Dans ce formalisme, vous allez écrire, en alternance :

— Une phrase en français ou en anglais relative au domaine choisi ;

— Une représentation de cette phrase par une ou plusieurs formules de ce formalisme.

L'objectif étant d'utiliser Ã bon escient tous les constructeurs de ce formalisme (pour la logique propositionnelle : les connecteurs logiques).

Par ailleurs, vous aurez soin de choisir un vocabulaire explicite. Par exemple, pour exprimer le fait que les chats sont des félins, vous écrirez `chat` ⇒ `félin` plutôt que $c \Rightarrow f$ (même si vous expliquez préalablement que c — resp., f — représente le fait que l'individu considéré est un chat — resp., un félin).

Enfin, vous éviterez toutes les tautologies (p. ex., `chat` ⇔ `chat`, traduisant « Un chat est un chat, et réciproquement. »).

Question 3. Même question avec la logique du premier ordre.

Question 4. Même question avec RDFS. vous utiliserez au moins une fois chacune des propriétés suivantes : `rdf:type`, `rdfs:subClassOf`, `rdfs:subPropertyOf`, `rdfs:domain` et `rdfs:range`.

Question 5. Même question avec la logique de descriptions $\mathcal{SHOIQ}(\mathtt{D})$. vous aurez soin d'utiliser des noms de concepts, de rôles et d'instances sous les bonnes casses :

— Un concept atomique commence par une majuscule et a une majuscule pour chaque « nouveau mot », les autres lettres étant en minuscule (exemples : `Chat`, `ChatNoirEtBlanc`) ;

— Un nom de rôle commence par une minuscule et a une majuscule pour chaque « nouveau mot », les autres lettres étant en minuscule (exemples : `aPourEnfant`, `estUnEnfantDe`), sachant que le premier mot contenu dans le nom du rôle est souvent un verbe Ã la troisième personne du singulier de l'indicatif ;

— Un nom d'instance est en petites majuscules, la séparation entre mots se faisant par le caractère « _ » (exemples : GUTENBERG, IGOR_STRAVINSKY).

Question 6. OWL DL, dans sa version 1.0, est équivalent Ã la logique de descriptions $\mathcal{SHOIN}(\mathtt{D})$. Cependant, il existe plusieurs constructeurs de formules et de concepts propres Ã OWL DL qui ne sont pas dans $\mathcal{SHOIN}(\mathtt{D})$ mais qui peuvent être traduits en $\mathcal{SHOIN}(\mathtt{D})$.

Le but de cette question est d'écrire des phrases et leurs traductions en OWL DL (sous la syntaxe des logiques de descriptions) faisant appel aux constructeurs propres Ã OWL DL suivants : $\ni$ `r.a`, « `r` est fonctionnel », « `r` est inverse fonctionnel », « `D` est domaine de `r` » et « `R` est co-domaine de `r` ». Enfin, vous donnerez la traduction en $\mathcal{SHOIQ}(\mathtt{D})$ de ces formules.

Question 7. Considérez une notion relative au domaine choisi qui, selon vous, « relève du flou » et modélisez cette notion Ã l'aide d'un ensemble flou ou d'une relation floue.

Question 8. Répondez Ã la question 2 avec la logique propositionnelle possibiliste.

Question 9. Même question avec une algèbre qualitative (soit l'algèbre de Allen, soit l'algèbre RCC8).

Question 10. Décrivez un processus de changement de croyances (p. ex., révision ou contraction) dans le domaine choisi, en utilisant la logique propositionnelle comme formalisme pour représenter des croyances.
Vous pourrez, par exemple, utiliser l'opérateur de révision de Dalal ou son opérateur de contraction.

Question 1 : choix du domaine

Le domaine considéré est celui des rats-taupes glabres (leur organisation sociale, leur alimentation, etc.).

Question 2 : formalisation en logique propositionnelle

Le rat-taupe glabre est un rongeur.

$$\texttt{rat\_taupe\_glabre} \Rightarrow \texttt{rongeur} \qquad (\Rightarrow)$$

Les deux seules espèces de mammifère eusociaux sont le rat-taupe glabre et le rat-taupe de Damara [1].

$$(\texttt{mammifère} \wedge \texttt{animal\_eusocial}) \Rightarrow (\texttt{rat\_taupe\_glabre} \vee \texttt{rat\_taupe\_de\_Damara}) \qquad (\wedge, \vee)$$

Ces deux espèces sont disjointes : il n'existe aucun individu Ã la fois rat-taupe glabre et rat-taupe de Damara.

$$\neg\texttt{rat\_taupe\_glabre} \vee \neg\texttt{rat\_taupe\_de\_Damara} \qquad (\neg)$$

Une reine rat-taupe glabre est, par définition, une femelle reproductrice de cette espèce.

$$\texttt{reine\_rat\_taupe\_glabre} \Leftrightarrow (\texttt{rat\_taupe\_glabre} \wedge \texttt{femelle} \wedge \texttt{individu\_reproducteur}) \qquad (\Leftrightarrow)$$

Les rats-taupes glabres sont soit femelles, soit mâles.

$$\texttt{rat\_taupe\_glabre} \Rightarrow (\texttt{femelle} \oplus \texttt{mâle}) \qquad (\oplus)$$

Question 3 : formalisation en logique du premier ordre

Tout rat-taupe glabre vit dans une colonie.

$$\forall x\ (\texttt{rat\_taupe\_glabre}(x) \Rightarrow (\exists y\ \texttt{vit\_dans}(x, y) \wedge \texttt{colonie}(y))) \qquad (\forall, \exists, \text{prédicats unaires et binaires})$$

Une colonie de rats-taupes glabres est, par définition, une colonie dans laquelle il existe au moins un rat-taupe glabre.

$$\forall x\ (\texttt{colonie\_rat\_taupe\_glabre}(x) \Leftrightarrow \exists y\ \texttt{vit\_dans}(x, y) \wedge \texttt{rat\_taupe\_glabre}(y))$$

1. En fait, ce sont les seules espèces *connues* de mammifères eusociaux.

Dans toute colonie de rats-taupes glabres, il y a une reine (qui vit dans la colonie).

$$\forall x\ (\texttt{colonie\_rat\_taupe\_glabre}(x)\ \Rightarrow \texttt{vit\_dans}(x, \texttt{la\_reine\_de\_la\_colonie}(x)))$$

(symboles de fonctions)

Les colonies de rats-taupes glabres se situent dans les trois pays suivants : l'éthiopie, le Kenya et la Somalie.

$$\begin{array}{l}\forall x\ (\texttt{colonie\_rat\_taupe\_glabre}(x)\ \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\texttt{est\_situé\_en}(x, \text{ÉTHIOPIE})\\ \vee\ \texttt{est\_situé\_en}(x, \text{KENYA})\\ \vee\ \texttt{est\_situé\_en}(x, \text{SOMALIE})\end{array}\right)\\ \wedge\ \exists x\ \texttt{colonie\_rat\_taupe\_glabre}(x) \wedge \texttt{est\_situé\_en}(x, \text{ÉTHIOPIE})\\ \wedge\ \exists x\ \texttt{colonie\_rat\_taupe\_glabre}(x) \wedge \texttt{est\_situé\_en}(x, \text{KENYA})\\ \wedge\ \exists x\ \texttt{colonie\_rat\_taupe\_glabre}(x) \wedge \texttt{est\_situé\_en}(x, \text{SOMALIE})\end{array}$$

(constantes)

Question 4 : formalisation en RDfS

Raymond est un rat-taupe glabre.

$$(\texttt{raymond rdf:type RatTaupeGlabre}) \qquad (\texttt{rdf:type})$$

Le rat-taupe glabre est un rongeur.

$$(\texttt{RatTaupeGlabre rdfs:subClassOf Rongeur}) \qquad (\texttt{rdfs:subClassOf})$$

Si x est la reine de la colonie y alors x est membre de cette colonie.

$$(\texttt{estLaReineDe rdfs:subPropertyOf estMembreDe}) \qquad (\texttt{rdfs:subPropertyOf})$$

Si x est la reine de y alors x est une reine et y est une colonie.

$$(\texttt{estLaReineDe rdfs:domain Reine}) \qquad (\texttt{rdfs:domain})$$
$$(\texttt{estLaReineDe rdfs:range Colonie}) \qquad (\texttt{rdfs:range})$$

Question 5 : formalisation en $\mathcal{SHOIQ}(\texttt{D})$

Le rat-taupe glabre est un rongeur.

$$\texttt{RatTaupeGlabre} \sqsubseteq \texttt{Rongeur} \qquad (\texttt{C} \sqsubseteq \texttt{D})$$

Les deux seules espèces de mammifère eusociaux sont le rat-taupe glabre et le rat-taupe de Damara.

$$\texttt{Mammifère} \sqcap \texttt{AnimalEusocial} \sqsubseteq \texttt{RatTaupeGlabre} \sqcup \texttt{RatTaupeDeDamara} \qquad (\sqcap, \sqcup)$$

Ces deux espèces sont disjointes : il n'existe aucun individu Ã la fois rat-taupe glabre et rat-taupe de Damara.

$$\texttt{RatTaupeGlabre} \sqcap \texttt{RatTaupeDeDamara} \sqsubseteq \bot \qquad (\bot)$$

Un rat-taupe glabre de sexe féminin qui a eu un petit est nécessairement une reine.

$$\texttt{RatTaupeGlabre} \sqcap \exists\texttt{aPourSexe.Sexeféminin} \sqcap \exists\texttt{aPourPetit.}\top \sqsubseteq \texttt{Reine} \qquad (\top, \exists\texttt{r.C})$$

Un rat-taupe mâle est, par définition, un rat-taupe ayant un sexe masculin.

$$\texttt{RatTaupeGlabreMâle} \equiv \texttt{RatTaupeGlabre} \sqcap \exists\texttt{aPourSexe.SexeMasculin} \qquad (\equiv)$$

Un rat-taupe qui n'est pas un mâle est un nécessairement de sexe féminin.

$$\texttt{RatTaupeGlabre} \sqcap \neg\texttt{RatTaupeGlabreMâle} \sqsubseteq \exists\texttt{aPourSexe.Sexeféminin} \qquad (\neg)$$

Une colonie de rats-taupes glabres est, par définition, une colonie dans laquelle vit au moins un rat-taupe glabre et, dans une telle colonie, aucun rongeur d'une autre espèce ne vit.

$$\texttt{ColonieRTG} \equiv \texttt{Colonie} \sqcap \exists\texttt{aPourHabitant.RatTaupeGlabre}$$
$$\texttt{ColonieRTG} \sqsubseteq \forall\texttt{aPourHabitant.}(\neg\texttt{Rongeur} \sqcup \texttt{RatTaupeGlabre}) \qquad (\forall\texttt{r.C})$$

Marcel est un petit d'Aliénor, laquelle est une reine rat-taupe glabre.

$$\texttt{aPourPetit}(\text{ALIÉNOR}, \text{MARCEL}) \qquad (\texttt{r}(\texttt{a},\texttt{b}))$$
$$(\texttt{Reine} \sqcap \texttt{RatTaupeGlabre})(\text{ALIÉNOR}) \qquad (\texttt{C}(\texttt{a}))$$

Une colonie de rats-taupes glabres comprend entre 70 et 300 individus de cette espèce.

$$\texttt{ColonieRTG} \sqsubseteq (\geqslant 70\ \texttt{aPourHabitant.RatTaupeGlabre}) \sqcap (\leqslant 300\ \texttt{aPourHabitant.RatTaupeGlabre}) \qquad ((\geqslant n\ \texttt{r.C}), (\leqslant n\ \texttt{r.C}))$$

La colonie de rats-taupes glabres dans laquelle vit la reine Aliénor contient exactement 200 individus.

$$(\texttt{ColonieRTG} \sqcap \exists\texttt{aPourReine.}\{\text{ALIÉNOR}\}) \sqsubseteq (= 200\ \texttt{aPourHabitant.RatTaupeGlabre}) \qquad ((= n\ \texttt{r.C}), \{\texttt{a}_1, \ldots, \texttt{a}_n\})$$

(autrement écrit : toute colonie de rats-taupes glabres ayant pour reine Aliénor comprend 200 individus).

La taille d'un rat-taupe glabre est inférieure ou égale Ã 33 centimètres.

$$\texttt{RatTaupeGlabre} \sqsubseteq \exists\texttt{tailleEnCentimètres.} \leqslant_{33.} \qquad (\exists g.\varphi)$$

Aliénor mesure 32 centimètres.

$$\texttt{tailleEnCentimètres}(\text{ALIÉNOR}, \texttt{32.})$$

Si x est dans la même colonie que y et que y est dans la même colonie que z alors x est dans la même colonie que z.

« `estDansLaMêmeColonieQue` est transitif. » (« `r` est transitif. »)

x a pour habitant y si et seulement si y vit dans x.

$$\texttt{aPourHabitant} \equiv \texttt{vitDans}^{-} \qquad (\texttt{s} \equiv \texttt{r}^{-})$$

La reine d'une colonie est un de ses habitants.

$$\texttt{aPourReine} \sqsubseteq \texttt{aPourHabitant} \qquad (\texttt{r} \sqsubseteq \texttt{s})$$

Question 6 : formalisation en OWL DL 1.0

La colonie dans laquelle vit Marcel est en Somalie (autrement écrit : l'ensemble des colonies où vit Marcel est inclus dans l'ensemble des colonies situées en Somalie).

$$\ni \texttt{aPourHabitant.}\text{MARCEL} \sqsubseteq \ni \texttt{estSituéEn.}\text{SOMALIE} \qquad (\ni \texttt{r.a})$$
$$\exists\texttt{aPourHabitant.}\{\text{MARCEL}\} \sqsubseteq \exists\texttt{estSituéEn.}\{\text{SOMALIE}\}$$

Dans chaque colonie, il y a au plus une reine.

« `aPourReine` » est fonctionnel. » (« `r` est fonctionnel. »)

$$\top \sqsubseteq (\leqslant 1\ \texttt{aPourReine.}\top)$$

Une reine est reine d'une seule colonie.

« `aPourReine` » est inverse fonctionnel. » (« `r` est inverse fonctionnel »)

Si x a pour reine y alors x est une colonie.

« Colonie est domaine de aPourReine. » (« D est domaine de r. »)

$\exists \texttt{aPourReine}.\top \sqsubseteq \texttt{Colonie}$

Si x a pour reine y alors y est une reine.

« Reine est co-domaine de aPourReine »

$\top \sqsubseteq \forall \texttt{aPourReine}.\texttt{Reine}$

Question 7 : modélisation par un sous-ensemble floue ou une relation floue

La notion considérée est celle de « grande colonie de rats-taupes glabres ».

Elle peut être modélisée par un sous-ensemble flou de l'univers $\mathcal{U}$ des colonies de rats-taupes glabres et Ã l'aide de la fonction nb_rtg : $\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels).

La notion est définie par GCRTG, sous-ensemble flou de $\mathcal{U}$, par :

$$\text{pour } x \in \mathcal{U}, \qquad \mu_{\texttt{GCRTG}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \texttt{nb\_rtg}(x) \leqslant 150 \\ \dfrac{\texttt{nb\_rtg}(x) - 150}{100} & \text{si } 150 \leqslant \texttt{nb\_rtg}(x) \leqslant 250 \\ 1 & \text{si } \texttt{nb\_rtg}(x) \geqslant 250 \end{cases}$$

Question 8 : formalisation en logique propositionnelle possibiliste

Si un rat-taupe glabre n'est pas stérile, alors il est certain que c'est une reine ou un mâle :

$$(\texttt{rat\_taupe\_glabre} \wedge \texttt{individu\_reproducteur} \Rightarrow \texttt{reine\_rat\_taupe\_glabre} \vee \texttt{mâle}, \quad \text{N1})$$

Si x est un humain et y est un rat-taupe glabre, alors il n'est que faiblement possible que x trouve y beau (ou belle), mais la réciproque, quoique possible, l'est encore moins.

avec $\varphi = \texttt{humain} \wedge \texttt{trouve\_que\_les\_rats\_taupes\_glabres\_sont\_beaux}$

et $\psi = \texttt{rat\_taupe\_glabre} \wedge \texttt{trouve\_que\_les\_humains\_sont\_beaux}$

$$(\varphi, \quad \Pi 0{,}3) \qquad (\neg\varphi, \quad \text{N}0{,}7)$$
$$(\psi, \quad \Pi 0{,}2) \qquad (\neg\psi, \quad \text{N}0{,}8)$$

On remarquera dans cet exemple qu'un fragment de la logique possibiliste du premier ordre serait probablement plus approprié.

Question 9 : formalisation dans l'algèbre de Allen ou l'algèbre RCC8

L'algèbre RCC8 va nous permettre de représenter des connaissances relatives Ã la zone géographique dans laquelle habite le rat-taupe glabre.

La zone géographique du rat-taupe glabre (ZG_RTG) est une partie stricte de la Corne de l'Afrique :

$\texttt{ZG\_RTG}\ \{TPP, NTPP\}\ \texttt{CorneAfrique}$

ou, de façon équivalente : $\texttt{CorneAfrique}\ \{TPPi, NTPPi\}\ \texttt{ZG\_RTG}$

La corne de l'Afrique est située en partie dans l'hémisphère Nord :

$\texttt{CorneAfrique}\ \{PO\}\ \texttt{HémisphèreNord}$

La corne de l'Afrique partage une frontière avec la mer Rouge :

$$\texttt{CorneAfrique}\ \{EC\}\ \texttt{MerRouge}$$

Les zones géographiques du rat-taupe glabre et de la taupe Ã queue glabre sont disjointes :

$$\texttt{ZG\_RTG}\ \{DC\}\ \texttt{ZG\_taupe\_Ã\ \_queue\_glabre}$$

Et, afin d'avoir utilisé les 8 relations d'RCC8, voici une tautologie :

$$\texttt{ZG\_RTG}\ \{=\}\ \texttt{ZG\_RTG}$$

Question 10 : changement de croyances sur le domaine

Considérons les croyances suivantes : « Les rats-taupes glabres sont des taupes. Les taupes sont des insectivores. » On peut les formaliser comme suit :

$$\psi = (\texttt{rat\_taupe\_glabre} \Rightarrow \texttt{taupe}) \wedge (\texttt{taupe} \Rightarrow \texttt{insectivore})$$

Or, suite Ã une discussion avec un autre agent, l'agent se met Ã douter du fait que les rats-taupes glabres sont insectivores. Il veut donc contracter ψ par μ, avec :

$$\mu = \texttt{rat\_taupe\_glabre} \Rightarrow \texttt{insectivore}$$

Soit $\dotplus$ et $\dot{-}$, respectivement les opérateurs de révision et de contraction de Dalal, liés par l'identité de Harper :

$$\psi \dot{-} \mu = \psi \vee (\psi \dotplus \neg\mu)$$

Calculons $\psi \dot{-} \mu$. On notera $i = \texttt{insectivore}$, $r = \texttt{rat\_taupe\_glabre}$ et $t = \texttt{taupe}$. On a le tableau suivant, dont les lignes représentent les interprétations sur les quatre variables propositionnelles considérées :

	i	r	t	ψ	μ	$\neg\mu$	$d_H(\mathcal{I}, \mathcal{I}_3)$, pour $\mathcal{I} \models \psi$	$d_H(\mathcal{I}, \mathcal{I}_4)$, pour $\mathcal{I} \models \psi$	$\psi \dot{-} \mu$
$\mathcal{I}_1$	F	F	F	V	V	F	1	2	V
$\mathcal{I}_2$	F	F	V	F	V	F	–	–	F
$\mathcal{I}_3$	F	V	F	F	F	V	–	–	V
$\mathcal{I}_4$	F	V	V	F	F	V	–	–	V
$\mathcal{I}_5$	V	F	F	V	V	F	2	3	V
$\mathcal{I}_6$	V	F	V	V	V	F	3	2	V
$\mathcal{I}_7$	V	V	F	F	V	F	–	–	F
$\mathcal{I}_8$	V	V	V	V	V	F	2	1	V

Cherchons une formule équivalente Ã $\psi \dot{-} \mu$ et facile Ã interpréter. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\neg(\psi \dot{-} \mu)) &= \{\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_7\} \\ \text{par conséquent, } \neg(\psi \dot{-} \mu) &\equiv (\neg i \wedge \neg r \wedge t) \vee (i \wedge r \wedge \neg t) \text{donc } \psi \dot{-} \mu \quad \equiv (i \vee r \vee \neg t) \wedge (\neg i \vee \neg r \vee t) \\ &\equiv (t \wedge \neg r \Rightarrow i) \wedge (i \wedge r \Rightarrow t) \end{aligned}$$

La contraction a consisté Ã affaiblir les deux implications de ψ en renforçant leurs parties gauches.