Notes de recherche

Alexis Evaristo

19 août 2025

Résumé

Ces notes rassemblent les réflexions et résultats issus de mes traveaux de recherche lors de mon stage de 1ère année de cycle ingérieur à l'école Polytech Lille, au laboratoire Cristal. Elles ne prétendent pas à l'exhaustivité mais servent de base pour une formalisation ultérieure.

Table des matières

1 Introduction

L'étude des équations différentielles polynomiales ordinaires (ou *polynomial ordinary differential equations*, PODEs) constitue un domaine central de l'analyse algébrique. L'algorithme de Denef–Lipshitz fournit une méthode constructive permettant de déterminer des solutions de telles équations sous forme de séries formelles à puissances entières (Formal Power Series, FPS). Cet outil a montré son efficacité dans de nombreux cas, mais il peut échouer à produire une solution, en particulier lorsque l'équation ne possède pas de solution formelle classique autour de l'origine.

Dans ce contexte, une question naturelle se pose : peut-on élargir l'espace des solutions en considérant des séries formelles plus générales, notamment les *séries de Puiseux*, c'est-à-dire les séries à puissances fractionnaires ? Ces séries prennent la forme

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n x^{n/s}, \quad a_n \in \mathbb{K},$$

et généralisent les FPS tout en restant manipulables algébriquement.

L'objectif de ce travail est d'explorer une méthode systématique pour détecter l'existence de telles solutions. Il est possible de voir cela sous forme d'algoritme, dont l'*entrée* est notre polynôme différentiel $P(x)$ et éventuellement des conditions initialles, et la *sortie* est une solution de P sous forme de séries de Puiseux.

Deux idées viennent :

- Généraliser les *lemme 2.2 et 2.3* de Denef et Lipshitz pour des séries de Puiseux ;
- Trouver un changement de variable transformant P en un nouveau PODE Q qui admet une solution formelle classique ;

Dans la suite nous aborderons la seconde idée.

2 Formulation rigoureuse du problème

Considérons un polynome différentiel $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...)$ en la variable différentiel y, qui ne possède pas de solution en FPS, c'est à dire de la forme $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Nous cherchons alors à savoir s'il existe une solution en série de Puiseux, c'est à dire de la forme $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$ avec $s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Pour cela nous cherchons à déterminer s'il existe un changement de varaible $t = f(x)$ de telle sorte à obtenir un nouveau polynome différentiel que l'on note $Q(t, z, \dot{z}, \ddot{z}, ...)$, qui lui admet une solution en FPS de la forme $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$. L'objectif est donc de savoir s'il existe un tel changement de variable et de comment le trouver.

Avant de continuer, il convient de fixer certaines notations qui seront utilisées dans la suite afin d'éviter les confusions. Pour une fonction quelquonque f en la variable x, on note $\dot{f} = \frac{df}{dx}$ qui ne faut pas confondre avec $\frac{df}{dt}$ qui correspond à la dérivé de f en la variable t. Attention se ne sont pas des dérivées partielles de f, il est possible de voir $\frac{df}{dt}$ comme un dérivée composée de f en la variable t, c'est à dire de la forme $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{f}\frac{dx}{dt}$.

Remarque 2.1. Remarquons que le problème est en réalité plus large que de simplement trouver une solution en série de Puiseux pour P, il est également possible d'imposer des conditions initiales à la solution recherchée, c'est-à-dire par exemple de trouver $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$ telle que $P(x, \bar{y}, \dot{\bar{y}}, \ddot{\bar{y}}, ...) = 0$ et $\bar{y}(0) = y_0$, $\dot{\bar{y}}(0) = y_1$, $\ddot{\bar{y}}(0) = y_2$, ... avec $y_0, y_1, y_2, ... \in \mathbb{R}$ fixés.

3 Cadre de travail et hypothèses

La suite des résultats est basée sur une hypothése assez forte, selon laquelle pour passer d'une FPS $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ à une série de Puiseux $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$, il est toujours possible de considérer un changement de variable de la forme $x^a = t^b$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq b$. Autrement dit, en reprenant la notation utilisée plus haut, $f(x) = x^{a/b}$.

Cette hypothèse est due à l'observation suivante, il existe d'autre changements de variables permettant de passer d'une FPS $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ à une série de Puiseux, il est possible par exemple de considérer $t = x + x^{4/3}$. Après changement de variable, on obtient $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x + x^{4/3})^n$, développons pour $i \in 1, 2$: pour $i = 1$ la série possède les puissances de x suivantes $x + x^{4/3} = x^{3/3} + x^{4/3}$, et pour $i = 2$ la série fait apparaitre les puissances de x suivantes $(x + x^{4/3})^2 = x^2 + 2x^{7/3} + x^{16/9}$. Mettons maintenant toutes les puissances de x au même dénominateur : $x^{3/3} + x^{4/3} + x^2 + 2x^{7/3} + x^{16/9} = x^{9/9} + x^{12/9} + x^{16/9} + x^{18/9} + 2x^{21/9}$. Il vient que pour $i = 1$ la série obtenu était une série de Puiseux avec $s = 3$, et donc éventuellement un changement de forme $t = x^{1/3}$ aurait suffit. De même pour $i = 2$ la série obtenu serait une série de Puiseux avec $s = 9$, et on aurait un changement de forme $t = x^{1/9}$. Il est donc possible d'imaginer que l'on peut itérer pour $i > 2$, et continer de se ramenner à un changement de variable de la forme $t = x^{a/b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq b$. Il est alors possible d'immaginer que l'on puisse généraliser avec des changements de variable de la forme $t = x^{q_1} + x^{q_2} + x^{q_3} + ...$, avec $q_1, q_2, q_3, ... \in \mathbb{Q}$.

4 Exemple complet

Le mieux est de commencer avec un exemple complet de la méthode que je cherche à développer. Considérons maintenant le polynome $P(x, \dot{y}) = \dot{y}^2 - x$. (Un simple calcul integrale nous donne que $\bar{y}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_{const}$) C'est un exemple intéressant car simple et approchable avec des calculs relativement simple. Commençons par faire le changement de varaible $t^b = x^a$, on obtient le polynome

$$Q(t, \dot{z}) = \dot{z}^2 (\frac{a}{b})^2 t^{\frac{2(a-b)}{a}} - t^{\frac{b}{a}}$$

On se demande maintenant comment choisir judicieusement a et b afin que le polynome $Q(t, \dot{z})$, possède une solution en FPS. Il vient assez rapidement que $a = 1$, en effet on souhaite que $\frac{2(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^*$, mais surtout que $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}^*$ ce qui revient à dire que $a = 1$ car $pgcd(a, b) = 1$. Ainsi on obtient :

$$Q(t, \dot{z}) = \dot{z}^2 (\frac{1}{b})^2 t^{2(1-b)} + t^b$$

Avant de continuer, il est important de transformer un peu notre polynome Q. Puisque $b > 1$, alors $2(1 - b) < 0$. On note

$$K(t, \dot{z}) = t^{2(b-1)} Q(t, \dot{z}) = \dot{z}^2 (\frac{1}{b})^2 + t^{3b-2}$$

.

Maintenant on cherche à déterminer b, pour cela on utilise la même méthode que dans la section 1.6 de *An Introduction to Differential Algrbra*.

- Step 1 : differenciate K

$$K = \dot{z}^2/b^2 + t^{3b-2} \tag{1}$$
$$K' = 2\dot{z}\ddot{z}/b^2 + (3b-2)t^{3b-3} \tag{2}$$
$$K'' = 2(\ddot{z}^2 + \dot{z}z^{(3)})/b^2 + (3b-2)(3b-3)t^{3b-4} \tag{3}$$
$$K^{(3)} = 2(2\ddot{z}z^{(3)} + \ddot{z}z^{(3)} + \dot{z}z^{(4)})/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)t^{3b-5} \tag{4}$$
$$K^{(4)} = 2(3(z^{(3)})^2 + 3\ddot{z}z^{(4)} + \ddot{z}z^{(4)} + \dot{z}z^{(5)})/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)(3b-5)t^{3b-6} \tag{5}$$

- Step 2 : rename $z^{(i)}$ as z_i

$$K = z_1^2/b^2 + t^{3b-2} \tag{6}$$
$$K' = 2z_1z_2/b^2 + (3b-2)t^{3b-3} \tag{7}$$
$$K'' = 2(z_2^2 + z_1z_3)/b^2 + (3b-2)(3b-3)t^{3b-4} \tag{8}$$
$$K^{(3)} = 2(2z_2z_3 + z_2z_3 + z_1z_4)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)t^{3b-5} \tag{9}$$
$$K^{(4)} = 2(3(z_3)^2 + 3\ddot{z}z_4 + \ddot{z}z_4 + z_2z_5)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)(3b-5)t^{3b-6} \tag{10}$$

- Step 3 : evaluate the polynomial at $t = 0$ and denote them k_i

$$k_0 \quad z_1^2/b^2 + 0^{3b-2} = 0 \tag{11}$$
$$k_1 \quad 2z_1z_2/b^2 + (3b-2) \cdot 0^{3b-3} = 0 \tag{12}$$
$$k_2 \quad 2(z_2^2 + z_1z_3)/b^2 + (3b-2)(3b-3) \cdot 0^{3b-4} = 0 \tag{13}$$
$$k_3 \quad 2(2z_2z_3 + z_2z_3 + z_1z_4)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4) \cdot 0^{3b-5} = 0 \tag{14}$$
$$k_4 \quad 2(3(z_3)^2 + 3\ddot{z}z_4 + \ddot{z}z_4 + z_2z_5)/b^2 + (3b-2)(3b-3)(3b-4)(3b-5) \cdot 0^{3b-6} = 0 \tag{15}$$

- Step 4 : "solve"

Le but est maintenant de déterminer la valeur de b en utilisant ses équations de tel sorte que les z_i soient non tous nuls, en effet cela reviendrait à dire qu'il existe une solution en FPS pour K.

Dans notre cas, la résolution de $k_0 = 0$ nous donne que $z_1 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$. Il vient ensuite que $k_1 = 0$ car $b > 1$. Par la suite, on obtient que $z_2 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que $k_3 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$. De même d'après k_4 on a $z_3 = 0$ pour tout $b \in \mathbb{N}^*$. Et finalement en traitant k_4, on obtient que pour $b = 2$, $z_3^2 = 16$, et $z_3 = 0$ pour $b > 2$. Mais $b = 2$ n'est pas la seule valeur de b qui fonctionne, nous verrrons dans le chapitre 6 que tout b pair fonctionne. Cet exemple permet de voir comment les z_i sont tous nuls lorsque $b > 2$ (à l'exception de z_0) , et que le choix de b est unique ici.

Un couple solution est donc $(a, b) = (1, 2)$, nous pouvons alors construire une solution pour K en utilisant la formule (8) de la partie 1.6 de *An Introduction to Differential Algrbra* , $\bar{z}(t) = z_0 + z_1 t + z_2\frac{t^2}{2} + z_3\frac{t^3}{3} + z_4\frac{t^4}{4} + z_5\frac{t^5}{5} + ...$ Il vient en prenant $z_3 = 4$, que $\bar{z}(t) = z_0 + \frac{2}{3}t^3$ et après changement de variable inverse, on obtient une solution pour le polynome P initial, $\bar{y}(x) = z_0 + \frac{2}{3}x^{3/2}$ avec $z_0 \in \mathbb{R}$, qui est bien la solution attendue.

On se demande maintenant s'il est possible de déterminer les valeurs de a et b de façon systématique et si oui comment. Le chapitre suivant aborde de façon plus formelle comment déterminer les valeurs possibles de a en utilisant des propriétés arithmétiques élémentaires.

5 Inférer sur les valeurs possible de a

Dans cette parties, on définies des régles de calculs et propriétés afin de déterminer les valeurs possibles de a du changement de variable $t = x^{a/b}$. Ces résultats seront utilisés pour l'implémentation d'un algorithme.

5.1 Hypothèses supplémentaires et propriétés imédiates

Puisque que le but de ce changement de variable est de passer d'une FPS $\bar{z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ à une série de Puiseux, $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^{n/s}$, alors si l'on considére le changement de varaible $t = x^{a/b}$, il faut que $b \nmid a$. Autrement, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = bk$, et alors on obtient $\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (x^k)^n$ qui est également une FPS, ce que l'on souhaite éviter. Ainsi lorsque l'on considére le couple $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il faut que $b \nmid a$, c'est-à-dire que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Cela implique que $b > 1$.

Aussi, remarquons qu'il est toujours possible de se ramenner à un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, tel que $pgcd(a, b) = 1$. En effet, supposons que $pgcd(a, b) = d$ ($\neq b$ d'après la remarque précédente), alors $\exists (a', b') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $a = da'$et $b = db'$. d'où $t = x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{da'}{db'}} = x^{\frac{a'}{b'}}$.

Proposition 5.1. *Soit un couple* $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, *tels que* $pgcd(a, b) = 1$, *alors* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^* \iff a \mid k$.

Démonstration. Il est évident que si $a \mid k$, alors $a \mid k(a - b)$. Supposons maintenant que $\frac{k(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^*$, alors $ka - kb \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow -kb \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow kb \equiv 0 \pmod{a}$. Donc $a \mid kb$, or $pgcd(a, b) = 1$, donc $a \mid k$, d'où le résultat.

□

Proposition 5.2. *Soit un couple* $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, *tels que* $pgcd(a, b) = 1$, *alors* $\forall k, l \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k(a-lb)}{a} \in \mathbb{Z}^* \iff a \mid lk$.

Démonstration. Il est évident que si $a \mid lk$, alors $a \mid k(a-lb)$. Supposons maintenant que $\frac{k(a-lb)}{a} \in \mathbb{Z}^*$, alors $ka - klb \equiv 0 \pmod a \Rightarrow -klb \equiv 0 \pmod a \Rightarrow klb \equiv 0 \pmod a$. Donc $a \mid klb$, or $pgcd(a,b) = 1$, donc $a \mid kl$, d'où le résultat.

□

Dans la suite, il sera toujours supposé que $\frac{a}{b}$ est un rationnel pur réduit, c'est-à-dire $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}$ et $pgcd(a,b) = 1$.

5.2 Exemple simple pour a

On considére le polynome différentiel $P(x,\dot{y}) = 4\dot{y}^3 + 3\dot{y}^4$. Supposons qu'il n'existe pas de solution en FPS, on cherhce à déterminer s'il existe une solution en série de Puiseux. Pour cela on procéde au changement de variable générique $t = x^{a/b}$, c'est à dire $x = t^{b/a}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ respectant les hypothèses définies plus haut. Pour obtenir notre nouveau polynome différentiel Q en la variable différentiel z, on utilise $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}$. On a : $\frac{dt}{dx} = \frac{dx^{a/b}}{dx} = \frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1} = \frac{a}{b}t^{\frac{a-b}{a}}$, d'où $\frac{dz}{dx} = \dot{z}\frac{a}{b}t^{\frac{a-b}{a}}$

On obtient ainsi $Q(t,\dot{z}) = 4(\frac{a}{b})^3\dot{z}^3t^{\frac{3(a-b)}{a}} + 3(\frac{a}{b})^4\dot{z}^4t^{\frac{4(a-b)}{a}}$. Mais on ne sait pas encore si Q est bien un polynome, en effet il fait apparaitre des puissances de t qui peuvent ne pas être entières. Afin que l'on puisse utiliser les traveux de Dénef et Lipshitz pour déterminer une solution en FPS $\bar{z}$, on a besoin que Q soit un polynôme en t, autrement dit les puissances de t doivent être entières. Cela revient donc à dire que $\frac{3(a-b)}{a}$ et $\frac{4(a-b)}{a}$ sont des entiers ($\in \mathbb{Z}^*$). Ainsi d'après la proposition 5.1, on obtient que $a \mid 3$ et $a \mid 4$, donc $a = 1$.

Nous aborberons plus tard comment inférer sur b. Notons que ici le changement de variable adéquat est obtenu avec $a = 1$ et $b = 2$, donc $t = x^{1/2}$, c'est le seul changement de variable qui donne un polynome Q pour lequel le software détermine une solution en FPS.

5.3 Généralisation

Plus haut, nous avons abordé un exemple avec un polynome P assez simple, essayons maintenant de généraliser cette approche.

Supposons maintenant qu'on ait un polynome $P(x,y,\dot{y},\ddot{y},...) = ... + a_i\dot{y} + ...$, alors $k = 1$ et il est immédiat d'après la proposition 5.1 que $a \mid k = 1$, donc que $a = 1$. De même si l'on a $P(x,y,\dot{y},\ddot{y},...) = ... + a_i(\dot{y})^p + ...$, avec p un nombre premier, alors il vient que $a \mid p$, donc $a \in \{1,p\}$. Si l'on a $P(x,y,\dot{y},\ddot{y},...) = ... + a_i(\dot{y})^l + ...$, avec l un entier naturel quelquonque, alors toujours d'après la proposition 5.1, $a \mid l$ et donc $a \in \{\text{diviseurs de l}\}$. Il vient que si l'on a $P(x,y,\dot{y},\ddot{y},...) = ... + a_{i_1}\dot{y}^{l_1} + ... + a_{i_2}\dot{y}^{l_2} + ...$, alors $a \mid l_1$, $a \mid l_2, ...$ Donc si $\exists i \neq j$ tels que $pgcd(k_i,k_j) = 1$, alors $a = 1$.

Un cas particulier est le suivant : si l'on a $P(x,y,\dot{y},\ddot{y},...) = ... + x + ...$, alors il vient immédiatement que $a = 1$.

5.3.1 Dérivées d'ordre supérieur

Intéressons-nous maintenant aux dérivées d'ordre supérieur. Généralisons le calcul $\frac{dt}{dx}$:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}) \tag{16}$$

$$= \frac{a}{b}(\frac{a}{b}-1)x^{\frac{a}{b}-2} \tag{17}$$

$$= \frac{a}{b}(\frac{a}{b}-1)t^{\frac{a-2b}{a}} \tag{18}$$

Par itération, il vient que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^k t}{dx^k} = \frac{a}{b}(\frac{a}{b}-1)(\frac{a}{b}-2)...(\frac{a}{b}-k+1)t^{\frac{a-kb}{a}} \tag{19}$$

Ainsi, si notre polynome est de la forme $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = ... + a_i y^{(k)} + ...$, alors $a \mid k$. De la même maniére que dans la section précédente, si $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = ... + a_{i_1} y^{(k_1)} + ... + a_{i_2} y^{(k_2)} + ...$, alors $a \mid k_1$, $a \mid k_2, ...$ Donc si $\exists i \neq j$ tels que $pgcd(k_i, k_j) = 1$, alors $a = 1$.

5.3.2 Produit de dérivées d'ordre supérieur

Maintenant comment inférer sur les valeurs possibles de a, lorsque l'on a un produit de 2 dérivées d'ordre différents. $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = ... + a_i y^{(k_1)} \cdot y^{(k_2)} + ...$ On obtient alors (toujours après changement de variable), que $\frac{a-k_1 b}{a} + \frac{a-k_2 b}{a} = \frac{2a-(k_1+k_2)b}{a} \in \mathbb{Z}^*$. Il vient avec la proposition 5.2 consuivante que $a \mid k_1 + k_2$.

5.3.3 Produit de dérivées d'orde 1 avec des puissances

Que ce passe-t-il si l'on considére $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = ... + a_i(\dot{y})^{l_1}(\dot{y})^{l_2} + ...$ avec $l_1, l_2 \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, il faut que $\frac{l_1(a-b)}{a} + \frac{l_2(a-b)}{a} = \frac{(l_1+l_2)(a-b)}{a} \in \mathbb{Z}^*$. Ce qui d'après la proposition 5.1 implique que $a \mid l_1 + l_2$. Il vient la proposition immédiate suivante,

5.3.4 Produit de dérivées d'ordre supérieur avec puissances

On considére maintenant que $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = ... + a_i(y^{k_1})^{l_1}(y^{k_2})^{l_2} + ...$ alors que peut-on dire de a ? On procéde au changement de variable habituel et on obtient que $\frac{l_1(a-k_1 b)}{a} + \frac{l_2(a-k_2 b)}{a} = \frac{(l_1+l_2)a-(l_1 k_1+l_2 k_2)b}{a} \in \mathbb{Z}^*$, ce qui équivaut à dire que $a \mid l_1 k_1 + l_2 k_2$. Encore une fois cette information doit être utilisée avec d'autres informations obtenues sur a afin de précicer les valeurs de a possibles.

5.3.5 Non Autonomous Case

Dans cette sous section, on considére que x ou une de ces puissances intervient dans l'écriture de P. Commençons pas un cas simples. On peut imaginer que l'on ait $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = ... + a_i \dot{y} x + ...$. Il vient que $Q(t, \dot{z}, \ddot{z}, ...) = ... + a_i \dot{z} t^{\frac{a-b}{a}} t^{\frac{b}{a}} + ... = ... + a_i \frac{a}{b} \dot{z} t^{\frac{a-2b}{a}} + ...$, ce qui implique que $a \in \{1, 2\}$.

Maintenant si $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = ... + a_i y^{(k_1)} x^{k_2} + ...$, il vient que : $\frac{k_1(a-b)}{a} + \frac{k_2 b}{a} = \frac{k_1 a + (k_2 - k_1) b}{a} \in \mathbb{Z}^*$. On a donc $k_1 a + (k_2 - k_1) b \mod a = 0$, c'est-à-dire que $k_2 - k_1 \equiv 0 \pmod a$, soit encore $k_2 \equiv k_1 \pmod a$. Remarquons que si k_1 et k_2 sont premiers entre eux, alors $a = 1$.

5.3.6 Forumule Générale

On peut facilement généraliser cette approche pour obtenir une formule généraliste.

On considére maintenant le polynome differentiel

$$P(x, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = \sum_{i>0} a_i (y^{(k_1^i)})^{l_1^i} ... (y^{(k_{n_i}^i)})^{l_{n_i}^i} x^{\alpha^i}$$

D'après ce que l'on a déjà vu plus haut, il vient que $\forall i > 0$, $a \mid l_1^i k_1^i + ... + l_{n_i}^i k_{n_i}^i - \alpha^i$.

5.4 Code Python pour déterminer a

Code python qui permet de prendre un polynome différentiel défini comme dans l'exemple du *software demo* et de renvoyer la liste des a possibles.

```python

from functools import reduce
from math import gcd as math_gcd

from sympy import Indexed, IndexedBase, Pow, symbols, var


def all_divisors(n):
    n = abs(n)
    divs = set()
    for i in range(1, int(n**0.5) + 1):
        if n % i == 0:
            divs.add(i)
            divs.add(n // i)
    return sorted(divs)


def common_divisors(lst):
    if not lst:
        return []
    g = reduce(math_gcd, lst)
    return all_divisors(g)


def analyse_polynome(P):
    xi = var("xi")
    x, y = IndexedBase("x"), IndexedBase("y")
    result_list = []

    monomes = P.as_ordered_terms()

    for monome in monomes:
        coeff = 0
        power_x = 0

        factors = monome.as_ordered_factors()

        for factor in factors:
            # Cas y[...]**n
            if isinstance(factor, Pow):
                base, exp = factor.args
                # dérivée de y
                if isinstance(base, Indexed) and base.base == y:
                    order = len(base.indices)
                    coeff += order * int(exp)
                # puissance de x
                elif base == x:
                    power_x += int(exp)
            # Cas y[...] (pas élevé à une puissance)
            elif isinstance(factor, Indexed) and factor.base == y:
                order = len(factor.indices)
                coeff += order
            elif factor == x:
                power_x += 1
```

```

    result_list.append(coeff - power_x)

  print("Liste des valeurs associées aux monômes :", result_list)
  return common_divisors(result_list)

```

Traitons un exemple concret, on considére le polynome $P(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, ...) = (y^{(3)})^3 - x^2y - y^3$.

```
xi = var('xi')
x, y = IndexedBase('x'), IndexedBase('y')

P = y[xi, xi, xi]**3 - x**2 * y - y[xi]**3

print("Diviseurs communs :", analyse_polynome(P))
```

Le code affiche une première liste $[9, -2, 3]$ qui correspond à la liste associée aux monômes de P, et retourne une liste de tous les diviseurs communs de cette première liste, qui sont donc les valeurs possibles de a, dans notre cas la fonction retourne la liste $[1]$.

5.5 Code Python pour déterminer b avec la force

Pour l'instant nous n'avons pas de formule générale pour déterminer b, c'est pourquoi on propose une approche brute qui une fois la liste des valeurs possibles de a connue, la parcours dans une première boucle for puis dans une seconde boucle for essaye de trouver une valeur de b qui convient.

Code permettant d'éfectuer le changement de coordonnées et de passer de P à Q :

```

def arrangement_k_parmi_n(n,k):
 """
 Permet de faire le calcul du nombre d'arrangements de k parmi n
 avec n potentiellement un nombre à virgule
 """
 perm = n
 for i in range(1,k):
  perm *= (n-i)
 return perm

def get_dt_on_dx(k):
 """
 k le nombre de doit que l'on dérive
 """
 return arrangement_k_parmi_n(a/b, k) * t **((a-k*b)/a)



def change_of_coordinate(P):
 """
 P est notre polynome exprimé en fonction de y, xi et x
 retourne le polynome Q
 """
 Q = P.copy()
 Q = Q.subs(x, t**(b/a))

 Q = Q.subs(y[xi], z[tau] * get_dt_on_dx(1))
 Q = Q.subs(y[xi,xi],z[tau,tau] * get_dt_on_dx(2) )
 Q = Q.subs(y[xi,xi,xi], z[tau,tau,tau] * get_dt_on_dx(3))
```

```python
    Q = Q.subs(y[xi,xi,xi,xi],z[tau,tau,tau,tau] * get_dt_on_dx(4) )
    Q = Q.subs(y, z)

    return Q
```

Le code suivant permet de passer de Q à K :

```python

def min_expr_with_condition(exprs, condition):
    """
    Fonction qui prend la liste des exposants de t dans Q et renvoie
    le plus petit en tenant compte de la condition (qui est en général b > 1).
    """
    b = list(condition.free_symbols)[0]  # on suppose qu'il n'y a qu'une variable ici
    min_expr = None

    for expr in exprs:
        if min_expr is None:
            min_expr = expr
        else:
            # On vérifie si expr < min_expr sous la condition donnée
            diff = simplify(expr - min_expr)
            if diff.is_negative:  # Si c'est sûr que expr < min_expr
                min_expr = expr
            elif diff.is_comparable is False:
                # On essaye d'évaluer numériquement pour un b > 1
                f = lambdify(b, diff, 'numpy')
                test_val = f(2)  # b=2 par exemple (b > 1)
                if test_val < 0:
                    min_expr = expr

    return min_expr

def get_puissances_var(expr, var):
    """
    Renvoie la liste des puissances (symboliques ou numériques) de `var`
    présentes dans les monômes de l'expression `expr`.
    """
    expr = expand(expr)
    puissances = set()  # pour éviter les doublons

    # Découpe en monômes
    if isinstance(expr, Add):
        termes = expr.args
    else:
        termes = [expr]

    for terme in termes:
        _, monome = terme.as_coeff_Mul()

        if isinstance(monome, Mul):
            facteurs = monome.args
        else:
            facteurs = [monome]

        for facteur in facteurs:
            if isinstance(facteur, Pow) and facteur.base == var:
                puissances.add(facteur.exp)
```

```
            elif facteur == var:
                puissances.add(1)

    return list(puissances)



def get_K(Q,value_a):
  """
  Focntion qui prend le polynome Q et qui le transforme
  en polynome K qui n'as plus de puissances négatives

  Pour cela on prend la plus petite valeur beta de t (qui est négative)
  et on multiplie Q par t à la puissance -beta
  """
  Q = Q.subs(a,value_a)

  power_list_t = get_puissances_var(Q,t)

  beta = min_expr_with_condition(power_list_t, b > 1)

  Q = Q * t ** (-beta)
  Q = Q.expand()

  return powsimp(Q, force=True) # permet de faire t^{2 - 4b} \cdot t^{4b - 2} = t^0 = 1

K = get_K(Q,1)
print(K)

```

Le code suivant permet de parcourir a et b pour trouver une solution de K :

```
R = DifferentialRing (derivations = [tau],
                        blocks = [[t,z],q,
                          '(t,z)[oo:-1]'],
          parameters = [q,'(t,z)[oo:-1]'],
                           notation='jet')

Z = [t,z]
Zbar = { t['(tau,k)'] : 't[k]', z['(tau,k)'] : 'z[k]' }

def get_Puiseux_solution(P):
  Q = change_of_coordinate(P)
  print("Q :" , Q)

  list_a = analyse_polynome(P)
  print("a:",list_a)
  for value_a in list_a:
    K = get_K(Q.copy(),value_a)

    for value_b in range(2,5):
      K2 = K.copy() # important sinon on ne remplace b qu'une seule fois
      K2 = K2.subs(b,value_b)

      DL = R.DenefLipshitz ([K2, t[tau] - 1, t[0] ], Z, Zbar, q)
      # Ne pas oublier les conditions sur t

      print("a:", value_a, "b:", value_b, "DL:")
```

```
    print([ U.constraints () for U in DL ])
    print([ U.series () for U in DL])
```

6 Inférer sur les valeurs possibles de b

Comme nous l'avons vu dans l'exemple de la section 4, il vient que déterminer les valeurs de b possibles est plus complexe qu'il n'y parait.

Reprenons l'exemple de la section 4 :

6.1 Exemple de b solution

Repartons de notre polynome $K = \frac{(\dot{z})^2}{b^2} - t^{3b-2}$ et essayons de déterminer l'ensemble des valeurs de b qui conviennent. Il suffit pour cela de trouver les valeurs de b tel qu'il existe au moins un $i \in \mathbb{N}$, $z_i \neq 0$, car cela revient à dire qu'il existe une solution. Calculons les dévirée suscessives de K.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$K^{(n)} = \frac{(\dot{z}^2)^{(n)}}{b^2} + (3b-2)...(3b-1-n)t^{3b-2-n} \tag{20}$$

$$= \frac{1}{b^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\dot{z}^{(k)}\dot{z}^{(n-k)} + (3b-2)...(3b-1-n)t^{3b-2-n} \tag{21}$$

Pour obtenir ce résultat, on a utilisé la formule de Leibniz.

On cherche à faire apparaitre une puissance d'un z_i afin de ne pas à avoir à se préocuper des produits de deux z_i et z_j qui peuvent être nuls. Cela revient à dire que que l'on cherche un n tel qu'il existe un entier $k < n$, ce qui équivaut à dire que n est pair. De plus, n doit vérifier $3b - 2 - n = 0$ afin de faire apparaitre une puissance nulle (car lorsqu'on évalue en 0 alors on fait apparaitre $0^0 = 1$). On peut écrire $b = \frac{n+2}{3} \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, il suffit alors ne résoudre le système de congruence suivant :

$$n \equiv 0 \mod 2 \tag{22}$$

$$n \equiv 1 \mod 3 \tag{23}$$

Il vient relativement vite que l'on peut écrire $n = 6l + 4$, avec $l \in \mathbb{N}$. On obtient ainsi que $b = \frac{n+2}{3} = \frac{6l+2+4}{3} = \frac{6l+6}{3} = 2l + 2$.

Conclusion : Ainsi, nous vevons de démontrer qu'il existe une infinité de valeurs de b qui conviennent. Cela permet de conclure que le couple de changement de variable (a, b), s'il existe, n'est pas unique.

Remarque 6.1. Une remarque importante à formuler est que même si un polynome n'admet pas de changement de variable convenable, alors cela ne veut pas dire qu'il n'admet pas de série de Puiseux solution. Il est éventuellement possible d'itérer les changements de variables afin de trouver une solution. Aussi il est plus facile de montrer qu'il existe une solution que de montrer qu'il n'en existe aucune, en effet dans le premier cas, il suffit de trouver un seul b alors qu'il est plus dur de montrer qu'aucun ne convient.

6.2 Exemple de b solution plus complexe

Voici un exemple un peu plus complexe avec $P = \dot{y}^3 - x^2$. Le changement de variable nous donne immédiatement $a = 1$ et $K = \frac{\dot{z}^3}{b^3} - t^{5b-3}$. On utilise ici la formule de Leibniz généralisé pour étudier la dévirée n-ième de $\dot{z}^3$. Il vient :

$$(\dot{z}\dot{z}\dot{z})^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} \prod_{i=0}^{3} \dot{z}^{(k_i)}$$

Il vient de que l'on cherche à avoir $k_1 = k_2 = k_3$ d'où $k_1 = \frac{n}{3} \in \mathbb{N}$. Et $5b - 3 - n = 0$. Ce qui nous donne le système de congruence suivant :

$$n \equiv 0 \mod 3 \tag{24}$$
$$n \equiv 2 \mod 5 \tag{25}$$

Soit $n = 15l + 12$, avec $l \in \mathbb{N}$. D'où $b = 3l + 3$.

Explicitons un peu les solutions que l'on obtient pour différentes valeurs de b. Prenons $b = 3$ (c'est à dire l = 0 et n = 12). On regarde donc $K^{(12)}$, et il vient que $k_{12} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3^3}\frac{12!}{4!^3}z_5^3 - 12! = 0 \Leftrightarrow z_5 = 3 \cdot 4!$. De même que dans l'exemple précédent, on a z_0 libre et $z_i = 0 \forall i \in \mathbb{N}^* \setminus \{5\}$. On peut alors construire la solution $\bar{z} = z_0 + \frac{z_0}{5!}t^5 = z_0 + \frac{3.4!}{5!}t^5 = z_0 + \frac{3}{5}t^5$. Et il vient après changement de variable $t = x^{\frac{5}{3}}$, $\bar{y} = z_0 + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$.

Prenons maintenant $b = 6$, c'est-à-dire $n = 27$. On résout alors $k_{27} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6^3}\frac{27!}{9!^3}z_{10}^3 - 27! = 0 \Leftrightarrow z_{10} = 6 \cdot 9!$. Il vient qu'une solution est $\bar{z} = z_0 + \frac{z_{10}}{10!}t^{10} = z_0 + \frac{3}{5}t^{10}$. Après changement de variable de la forme $t = x^{\frac{1}{6}}$, on obtient $\bar{z} = z_0 + \frac{3}{5}t^{\frac{10}{6}} = z_0 + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}$, qui est bien la solution attendue.

6.3 Exemple de changement de varaible itéré

Voici un exemple qui permet d'illustrer l'idée décrite dans la remarque précédente, est-il possible d'itérer les changements de variable ?

On considére de nouveau l'exemple $P = \dot{y}^2 - x$, on sait maintenant que tout changement de la forme $x^a = t^b$ avec $(a, b) = (1, 2k)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ fonctionne. Commençons par montrer que ce n'est plus le cas si b est impair :

Repartons de $K = \frac{\dot{z}^2}{b^2} - t^{3b-2}$, et posons $b = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. C'est-à-dire que $K = \frac{\dot{z}^2}{(2k+1)^2} - t^{6k+1}$. Reprenons la même logique, on observe les valeurs de n possibles vérifiant le système de congruence :

$$n \equiv 0 \mod 2 \tag{26}$$
$$n \equiv 1 \mod 6 \tag{27}$$

Ecrivons alors $n = 6l + 1$, avec $l \in \mathbb{N}$, or $n \equiv 0 \mod 2 \Leftrightarrow 6l \equiv 1 \mod 2 \Leftrightarrow 0 \equiv 1 \mod 2$, ce qui est absurbe. Il n'est donc pas possible de considérer que b est impair.

Faisons néanmoins le choix de considérer que b est impair, l'idée est maintenant d'itérer pour la seconde fois un changement de variable pour essayer de trouver une solution au polynome de départ P. On considére le changement de variable $t^c = v^d$ sur $K_1 = \frac{\dot{z}^2}{(2k+1)^2} - t^{6k+1}$, avec $c, d \in \mathbb{N}^*$ vérifiant les même hypothéses que a et b. il vient rapidement que $c \mid 2$ et $c \mid 6k + 1$ ce qui implique que $c = 1$, on obtient alors $K_2 = \frac{\dot{w}^2}{(2k+1)^2 d^2} - t^{6dk+3k-2}$. Nous cherchons alors des informations à partide l'équation $6dk + 3k - 2 - n = 0$ (avec k considérer comme étant fixé). Il est alors possible d'écrire $d = \frac{n+2}{6k+3} \Leftrightarrow n+2 \equiv 0 \mod 6k+3$, ce qui nous donne le système de congruence suivant :

$$n \equiv 0 \mod 2 \tag{28}$$
$$n+2 \equiv 0 \mod 6k+3 \tag{29}$$

Remarquons que $6k+3 = 3(2k+1)$ est toujours impair. On note $\kappa = 6k+3$, on peut écrire $n = \kappa m - 2$ avec $m \in \mathbb{N}$ et il vient $n = \kappa m - 2 \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow \kappa m \equiv 2 \mod 2 \Rightarrow \kappa m \equiv 0 \mod 2$. Puisque κ est impair, alors κm est pait si et seulement si m est pair. Les valeurs de n que l'on recherhce peuvent ainsi s'écrire $n = \kappa(2l) - 2$ avec $l \in \mathbb{N}^*$. Injectons cette écriture de n dans l'équation de d :

$$d = \frac{n+2}{6k+3} \tag{30}$$
$$= \frac{2\kappa l - 2 + 2}{\kappa} \tag{31}$$
$$= 2l \tag{32}$$

Ainsi, il existe encore une fois une infinité de changement de variables possibles, et nous venons de démontrer qu'il est possible de trouver une solution pour le polynome d'origine P après avoir itérer une seconde fois le processus.

Vérifions que l'on a bien une solution :

$$\bar{w}(v) = \frac{(2k+1)(2l)}{6kl+3l} v^{6kl+3l} + C$$

Avec le premier changement de variable inverse, $v = t^{1/2l}$, on obtient :

$$\bar{z}(t) = \frac{(2k+1)(2l)}{3l(2k+1)} x^{\frac{6kl+3l}{2l}} + C$$

Avec le second changement de variable de inverse, $t = x^{1/2k+1}$, on obtient :

$$\bar{y}(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3(2k+1)}{2(2k+1)}} + C \tag{33}$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \tag{34}$$

6.4 Exemple plus complexe

Nous traitons maintenant un exemple un peu plus complexe en considérant :

$$P = \dot{y}^2 - x^3\dot{y} - x$$

Le software ne lui trouve pas de solution en série formelle.

Pour cette résolution, nous allons essayer d'être un peu plus méthodique, pour commencer nous allons numéroter chaque monôme : $(1) = \dot{y}^2$, $(2) = x^3\dot{y}$, $(3) = x$.

Je décris ici l'idée principale de la méthode que je cherche à mettre en oeuvre, elle sera plus détaillée par la suite : L'idée de la méthode consiste à regarder les dérivées n-ième du polynôme K_b que l'on obtient après changement de variable et de regarder l'information que l'on obtient à partir de chaque monôme. Dans les exemples précédent on a essayé de faire apparaitre une puissance de l'un des z_i avec une constante pour un certain n et b fixés en s'assurant que les informations fournies par les dérivées j-ième de K_b avec $j < n$ n'impliques pas que $z_i = 0$.

Poursuivons :

$$K_b = \dot{z}^2/b^2 - \dot{z}t^{4b-1}/b - t^{3b-2}$$

.

On numérote les nouveaux monômes : $[1] = \dot{y}^2/b^2$, $[2] = \dot{z}t^{4b-1}/b$, $[3] = t^{3b-2}$

$$[1] \Rightarrow n \equiv 0 \mod 2$$
$$[3] \Rightarrow 3b - 2 - n = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3b-2-n}{3} \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Leftrightarrow n = 1 \mod 3$$

.

Finalement on obtient que $n = 6l + 4$ et $b = 2l + 2$ avec $l \in \mathbb{N}$ conviennent. Mais cela ne constitue qu'une partie de l'information, en effet nous vevons d'utiliser l'information contenue dans [1] et [3], mais est-ce suffisant ?

En fait le avec le software on vérifie que l'unique solution possible est $b = 2$, mais alors pourquoi est-ce que $b = 6$ ne fonctionne pas ? (i.e $l = 2$ et $n = 16$)

Donc $K_b^{(16)}$ permet d'écrire une égalité entre z_9 et une constante grace aux informations fournies par [1] et [3]. Regardons alors la présence de z_9 dans [2] de $K_b^{(j)}$, $j < 16$ (le cas $j = 16$ est absurde) :

Il suffit de regarder $[2]^{(j)}$ avec la formule de Leibniz, il vient que $j = 15$ fait effectivement apparaitre une égalité entre z_9 et d'autres z_i qui sont nuls et ainsi $z_9 = 0$.

Tout cela permet de mettre en évidence que regarder uniquement deux monômes ne suffit pas à obtenir une solution viable, car chaque monôme contient un bout de l'information. Mais cela pemet de développer une idée, que ce passe-t-il si l'on remplace (2) par une dérivée trop élévée ou alors trop petite pour inférer avec seulement l'information de [1] et [3] ? Nous développerons cette idée dans la suite.

6.4.1 Construction d'une classe de polynômes

Nous allons nous inspirer de l'exemple précédent afin de créer une classe de polynômes qui admettent toujours une solution en série de Puiseux.

6.5 Explication de ma démarche

Jusqu'à maintenant on a cherchait à montrer qu'il existait au moins un z_i non nul, ce qui permet de dire qu'il existe une solution même si 'lon ne la construit pas. Pour cela, on a jusqu'à présent utiliser une condition très spécifique qui revient à faire apparaitre une certaine puissance d'un certain z_i qui n'est pas déjà nul. Cette condition est assez restrictive, on peut la considérer comme un cas particulier d'une condition plus large qui pourrait être : "On cherche une relation entre plusieurs z_i non nuls et éventuellement une constante", ce qui est tout de suite plus compliqué. L'exemple suivant montre que les caluls sont dès le début bien plus compliqué dans ce cas :

Prenons $P = \dot{y}\ddot{y}x + xy - 1$, il viendra que $k_0 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, ce que l'on ne peut pas inclure dans un système de congruence.

6.6 Cas particuliers

Dans cette section j'aborde des cas particuliers. Dans la sous section suivant on simplifie en fixant $a = 1$.

Aussi il convient d'introduire une notation importante, on note β la plus petite puissance sympbolique du polynôme Q_b, par exmple on avait $\beta = 2 - 2b$ dans le tout premier exemple que nous avons traiter ensemble.

Il existe plusieurs cas particuliers, lorsque $\beta < 0$, c'est le cas le plus courant, alors $K_b = t^{-\beta}Q_b$. Le cas où $\beta < 0$ et $K_b = Q_b$. Et enfin le cas qui est au centre la sous section suivante, le cas où $\beta = 0$ et $K_b = Q_b$.

6.6.1 Cas où $\beta = 0$ et $K_b = Q_b$

Cela ce produit avec le polynômes ayant des monômes de la forme

$$(y^{k_1})^{l1}...(y^{k_n})^{l_n}x^{k_1l_1+...+k_nl_n}$$

qui après changement de coordonnées devient

$$(z^{k_1})^{l1}...(z^{k_n})^{l_n}t^{l_1+...+l_n}$$

On allons étudier le cas particulier où $P = \sum_{i>0} a_i y^{k_i} x^{k_i}$, avec k_i une suite d'entiers naturels non tous nuls.

Commençons avec un exemple :

$$P = y^{(3)}x^3 + y^{(2)}x^2 + y + 1$$

Il vient rapidement que $\forall n > 0$, $P^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y^{3+n-i}(x^3)^{(i)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{2+n-k}(x^2)^{(k)} + y^{(n)}$.

Lorsque l'on évalue en $x = 0$ afin de déterminer les y_i il vient que $\forall n > 0$,

$$P^{(n)}(x=0) = \binom{n}{3} y^{(n)} + \binom{n}{2} y^{(n)} + y^{(n)} + y^{(n)}$$

. D'où, $\forall n > 0$, $y_n = 0$. C'est un résultat que l'on peut généraliser pour tout polynôme P de cette forme.

Il vient ainsi que ces polynômes n'ont pas de solution en série entière. Mais peut-être qu'ils ont des solutions en série de Puiseux ?

Continuons avec le même exemple :

Après changement de coordonnées, on obtient le polynôme suivant (simplifié en enlevant les coefficients a_i) :

$$R = z^{(3)}t + z^{(2)}t + z + 1$$

On remarque rapidement la présence de t dans deux monômes ce qui introduit un simple shift/décallage de 1 que l'on peut supprimer en dévivant une première fois seulement, et il vient que R possède avec FPS et que P possède une PS. En allant un peu plus loin dans les calculs, il est possible d'obtenir une formule générique de R dérivé n fois et en l'évaluant en $t = 0$, on obtient (à coefficients près) :

$$z_0 = 1 \text{ et } \forall n > 0 : z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = 0$$

Il reste une question à se poser, puique nous vevons de trouver une solution $\bar{z}$ à R en FPS et que R ne possède pas de puissance symbolique de b alors est-ce que cela veut dire que toutes les valeurs de b conviennent ? C'est un résultat qu'il faudra regarder de plus près avec le software.

Aussi il est possible de généraliser le résultat précédent pour tout polynôme P de cette forme.

Je pense que cette sous section était importante afin d'introduire ces nouveaux monômes qui sont très utile afin de construire de nouveaux exemple pertinent. En effet lorsque l'on fait disparaitre la puissance symbolique de b d'un monôme il est plus facile d'obtenir des informations sur les z_i lorsque l'on évalue en $t = 0$. (Je pense qu'il est même possible de créer une classe de polynômes qui admet toujours une solution en série de Puiseux lorsque le polynôme contient au moins deux de ces monômes, c'est un résultat à vérifier.)

6.7 Le début d'une théorie ?

Ici j'aborde une idée nouvelle, elle à été abordée lors d'une présentation de mes recherhces. C'est l'idée d'introduire des poids pour chaque monômes. J'ai essayer de mettre en oeuvre cette idée mais j'ai du mal à la généraliséer. Afin de visualiser les choses un peu mieux, voici deux polynômes bien différents :

$$P_1 = y\dot{y} + y^{(4)} + y^{(5)}$$
$$P_2 = x\dot{y} + y + x$$

Pour P_1 les deux derniers monômes permettent de trouver un z_i non nul, pareil pour P_2.

Ainsi ces deux cas différents montrent (même si l'on a pas déjà formuller proprement une notion de poids) qu'il ne suffit uniquement de prendre les deux monômes de poids minimaux comme avec P_1 car on arrive aussi à prouver qu'il existe une solution pour P_2 en prenant les deux monômes de poids maximaux. Je pense donc que l'idée de définir des poids n'est pas suffisante pour construire une théorie fiable, pour moi il faudrait définir une notion de distance entre les monômes. Ainsi s'il existe au moins deux mônomes avec une distance aux autres monômes suffisament petite (ou grande) alors il existe une solution en série de Puiseux.

Voici une suite de remarque que je trouve importante pour la suite des recherches : je pense qu'il est intéressant de regarder les polynômes qui font intervenir des monômes sans puissances symboliques de b. Je pense que x et ces puissances dans un monôme de P ont une importance spéciale car ils permettent lorsque l'on dérive de créer des décallages et éventuellement permettent d'aligner ou non des z_i ensemble (ou avec une constante).