

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра общей физики

Лабораторная работа 1.2.5

Исследование прецессии уравновешенного гироскопа

Преподаватель: к.ф.-м.н., доц. Яворский В.А.

Обучающийся: Готов А.А.

Долгопрудный  
2021

## Введение

### Цели работы

- Исследовать вынужденную прецессию гироскопа
- Установить зависимость скорости вынужденной прецессии гироскопа от величины момента сил, действующих на ось гироскопа
- Определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии

### Приборы и материалы

1. Гироскоп в кардановом подвесе
2. Секундомер
3. Набор грузов
4. Отдельный ротор гироскопа
5. Цилиндр известной массы (Цилиндр + весы)
6. Крутильный маятник
7. Штангенциркуль
8. Линейка

## Теоретические сведения

Уравнения движения твёрдого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Уравнений 1 и 2 достаточно для описания движения твердого тела

Момент импульса твердого тела по главным осям  $x, y, z$  равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z \quad (3)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  - главные моменты инерции,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - компоненты вектора угловой скорости. Для гироскопа справедливо, что

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y$$

В силу 2, приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, то

$$|\Delta\vec{L}| \ll |\vec{L}|$$

С этим связана устойчивость быстро вращающегося гироскопа. В случае, если центр масс неподвижен, гироскоп называют уравновешенным

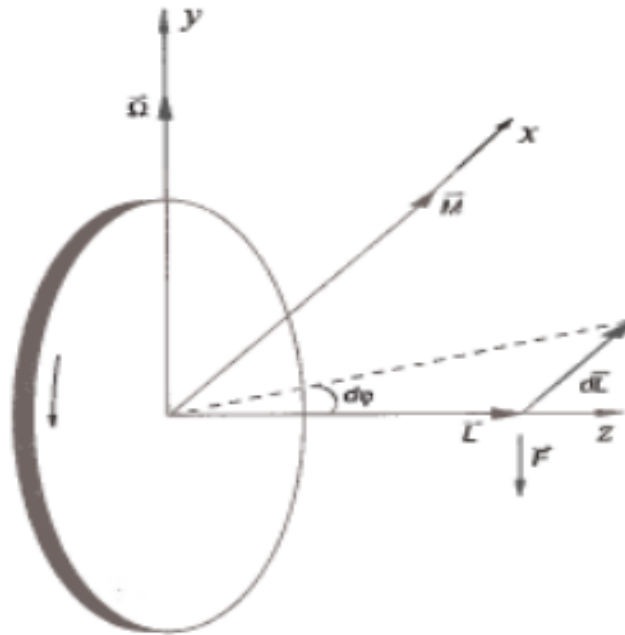


Рис. 1: Маховик

Рассмотрим маховик, изображенный на рис.1, вращающийся вокруг оси  $Oz$ , перпендикулярной к плоскости маховика. Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = \omega_y = 0$$

Пусть ось повернулась в плоскости  $xOz$  по направлению к  $Ox$  на бесконечно малый угол  $d\phi$ . Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси  $Oy$ , так что

$$d\phi = \Omega dt$$

где  $\Omega$  - угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

$$L_\Omega \ll L_{\omega_0} \quad (5)$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный  $I_z\omega_z$  до приложения внешних сил, только повернется в плоскости  $xOz$  по направлению к оси  $Ox$  не изменяя своей величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = Ld\phi = L\Omega dt$$

Изменение направлено вдоль  $Ox$ , поэтому

$$d\vec{L} = [\vec{\Omega}, \vec{L}]dt$$

В силу 2 имеем:

$$\vec{M} = [\vec{\Omega}, \vec{L}] \quad (6)$$

Для гироскопа массой  $m$ , у которого ось собственного вращения наклонена на угол  $\alpha$  от вертикали, скорость прецессии равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z\omega_z \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha}{I_z\omega_0 \sin \alpha} = \frac{mgl}{I_z\omega_0} \quad (7)$$

$l$  - расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа

Для изучения регулярной прецессии гироскопа используют к его оси подвешивают дополнительные грузы. Тогда скорость прецессии

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z\omega_0} \quad (8)$$

$m$  - масса груза,  $l$  - расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа рис.2

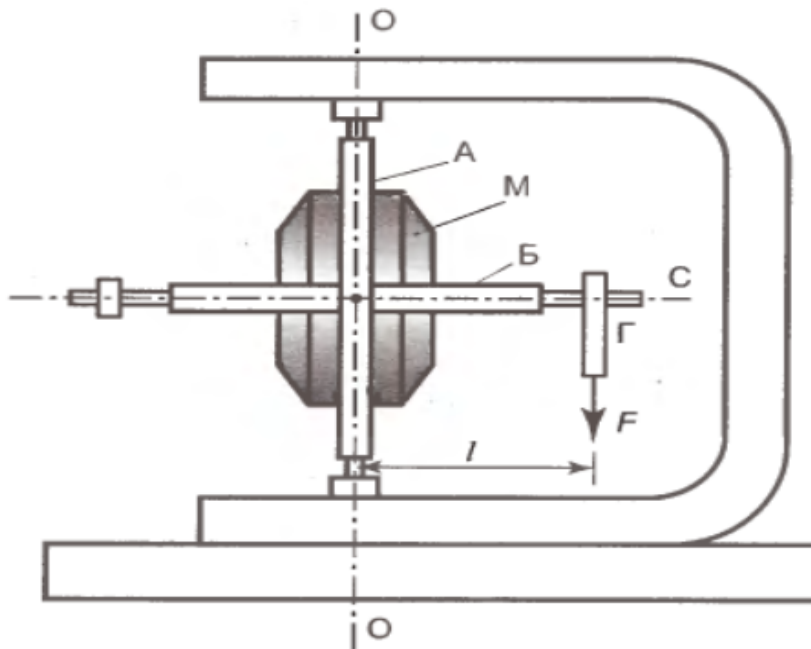


Рис. 2: Схема экспериментальной установки

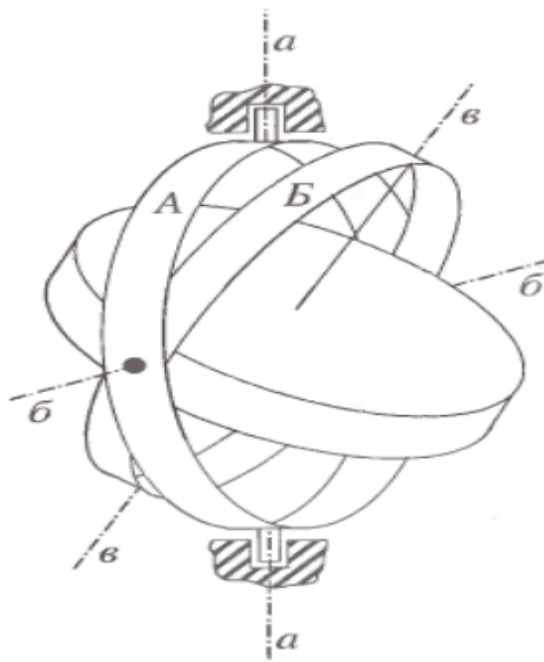


Рис. 3: Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора (с помощью формулы 9). Момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I_0$  измеряется по крутильным колебаниям копии ротора, подвешенной вдоль оси симметрии на проволоке. Период считается по формуле

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}} \quad (9)$$

Для исключения неизвестной величины - модуля кручения проволоки, - к той же проволоке подвешивают цилиндр с известными массой и диаметром сечения, для которого легко считается момент инерции  $I_{\text{ц}}$ . Тогда момент инерции ротора  $I_0$  определяется по формуле

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T^2} \quad (10)$$

## Ход работы

1)

Рассмотрим реакцию гироскопа на воздействие внешних сил. Согласно теории, описывающей поведение гироскопа, направление отклонения должно совпадать с направлением действия момента прикладываемой силы. Прикладывая силы перпендикулярно рычагу (очевидно, что в таком случае они также будут перпендикулярны плечу силы), отметим, что гироскоп действительно отклоняется перпендикулярно рычагу и направлению действия силы. Несложно подтвердить, что направление отклонения совпадает с направлением вектора  $[\vec{r}, \vec{F}]$ , т.е. удовлетворяет теоретическим данным

2)

Подвесим к рычагу груз. Отметим начавшуюся прецессию гироскопа, а также медленное горизонтальное (вниз) движение гироскопа из-за трения в оси карданового подвеса (аа на рис.3)

3)

Измерим скорость прецессии гироскопа в зависимости от массы груза, подвешенного на рычаг, параллельно замеряя скорость опускания рычага гироскопа.

Будем считать период прецессии гироскопа как время, необходимое для опускания на 10-12 градусов, за которое он совершит целое число оборотов, деленное на число оборотов

$$l = 12,2 \text{ см} \quad \Delta l = 0,1 \text{ см}$$

m, г	n	T, с	t, с	$\Omega, c^{-1}$	$\Omega_{\text{опуск}}, c^{-1}$	M, Н*М
341	7	208	29.7	0.2114	0.053	0.408
273	6	229	37.7	0.1656	0.048	0.326
219	5	230	46.0	0.1376	0.048	0.212
180	4	223	55.8	0.1137	0.049	0.215
142	3	212	70.7	0.0899	0.052	0.170
116	2	173	86.5	0.0736	0.073	0.139
92	2	219	109.5	0.0574	0.050	0.110
74	2	271	135.5	0.0464	0.041	0.088
57	1	177	177.0	0.0355	0.062	0.068

$$\Delta T = 0.03 \text{ с} \quad \Delta m = 1 \text{ г} \quad (\text{по разряду последней цифры измеренных значений})$$

$$\text{Тогда } \varepsilon_{\Omega} = \varepsilon_t = \varepsilon_{\omega} = \varepsilon_T = \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} = 0.2\%$$

$\Omega_{\text{опуск}}$  - угловая скорость опускания рычага гироскопа

По данным таблицы посчитаем  $\langle \Omega_{\text{опуск}} \rangle$ ;

$$\langle \Omega_{\text{опуск}} \rangle = 0.052 \text{ с}^{-1}$$

По результатам эксперимента построим график зависимости и определим коэффициент наклона и свободный член графика  $\Omega(m)$

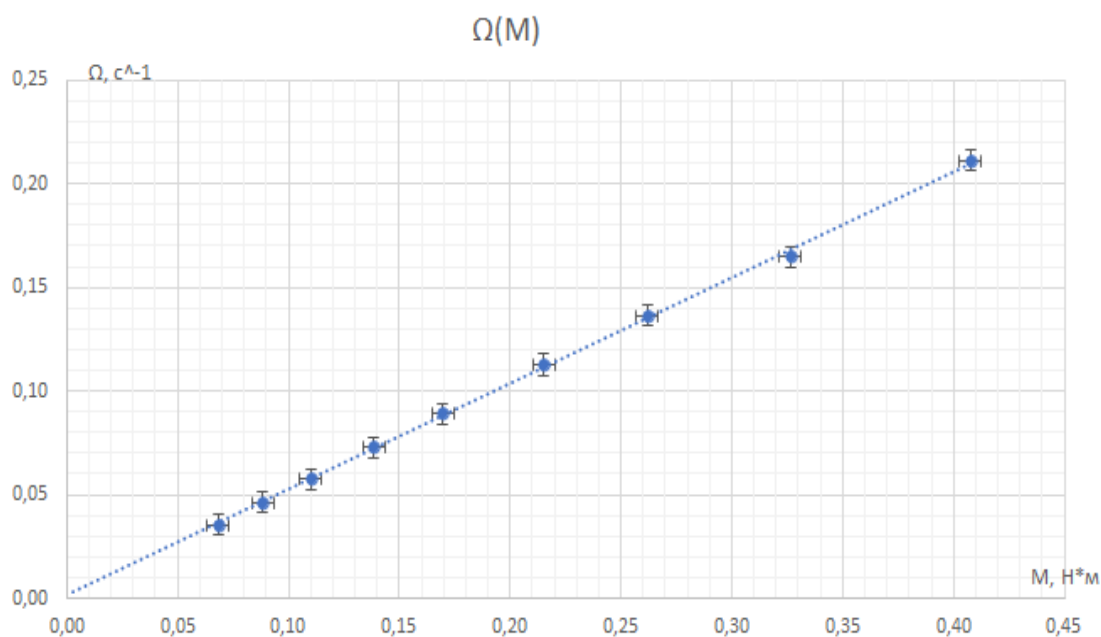


Рис. 4: График 1

$$\alpha = \frac{\langle \Omega M \rangle - \langle \Omega \rangle \langle M \rangle}{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2} = 0.512 \frac{1}{c \cdot \text{кг}}$$

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{7} \left( \frac{\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2}{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2} - \alpha^2 \right)} = 0.005 \frac{1}{c \cdot \text{кг}}$$

$$b = \langle \Omega \rangle - \alpha \langle M \rangle = 0.00128 c^{-1}$$

$$\sigma_b = \sigma_\alpha \sqrt{\langle M^2 \rangle} = 0.00211 c^{-1}$$

5)

Снимем характеристики цилиндра и посчитаем его момент инерции по формуле (10)

$$M_{\text{ц}} = 1617.8 \text{ г} \quad \Delta M_{\text{ц}} = 0.3 \text{ г}$$

$$d = 78.4 \text{ мм} \quad \Delta d = 0.1 \text{ мм}$$

где  $m$  - масса цилиндра,  $d$  - его диаметр

$$\text{Тогда момент инерции цилиндра } I_{\text{ц}} = \frac{M_{\text{ц}} R^2}{2} = \frac{M_{\text{ц}} d^2}{8}$$

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} = \frac{M_{\text{ц}} d^2 T_0^2}{8 T_{\text{ц}}^2}$$

$T_0$  — период колебаний ротора,  $T_{\text{ц}}$  — период колебаний цилиндра

$$N = 10 \quad \Delta t = 0.3 c$$

$t_0, c$	$t_{\text{ц}},$	$T_0,$	$T_{\text{ц}},$
31.7	40.4	3.17	4.04
31.8	40.2	3.18	4.02
31.8	40.3	3.18	4.03

$$\langle T_0 \rangle = 3.18 c \quad \langle T_{\text{ц}} \rangle = 4.03 c$$

$$I_0 = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta M_{\text{н}}}{M_{\text{н}}}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t_0}{t_0}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t_{\text{н}}}{t_{\text{н}}}\right)^2} = 0.2 * 10^{-4} \text{ кг} * \text{ м}^2$$

$$\varepsilon_{I_0} = 2.6\%$$

6)

Ввиду малости  $b$ , будем считать подтвержденной теоретическую зависимость (8). Тогда  $\alpha = \frac{gl}{I_0 \omega}$  и  $\omega = \frac{mgl}{I_0 \Omega} = \frac{gl}{I_0 \alpha} = \frac{8glT_{\text{н}}^2}{M_{\text{н}} d^2 T_0^2 \alpha}$

$$\omega = 2524 \text{ с}^{-1}$$

$$\sigma_{\omega}^{\text{приб}} = \omega \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (\varepsilon_{I_0})^2 + (\varepsilon_{\Omega})^2} = 70 \text{ с}^{-1}$$

$$\sigma_{\omega}^{\text{случ}} = \omega \frac{\sigma_{\alpha}}{\alpha}$$

$$\varepsilon_w = \frac{\sqrt{(\sigma_{\omega}^{\text{случ}})^2 + (\sigma_{\omega}^{\text{приб}})^2}}{\omega} = 2.9\% \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 402 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_{\nu} = \varepsilon_{\omega} = 2.9\%$$

$$\sigma_{\nu} = 12 \text{ с}^{-1}$$

7)

Включим осциллограф и источник, а затем настроим такую частоту, чтобы на экране осциллографа получился эллипс, тем самым определим искомую частоту вращения ротора гироскопа.

$$\nu = 400 \text{ Гц}$$

8)

Определим момент сил трения в оси

$\nu$ , Гц	380	370	360	350	340	330	320	310	300	290	280	270
$t$ , с	20.8	46.6	72.4	99.8	127.0	154.6	183.0	212.9	244.1	274.8	305.4	338.3

$$\Delta t = 0.3 \text{ с}$$

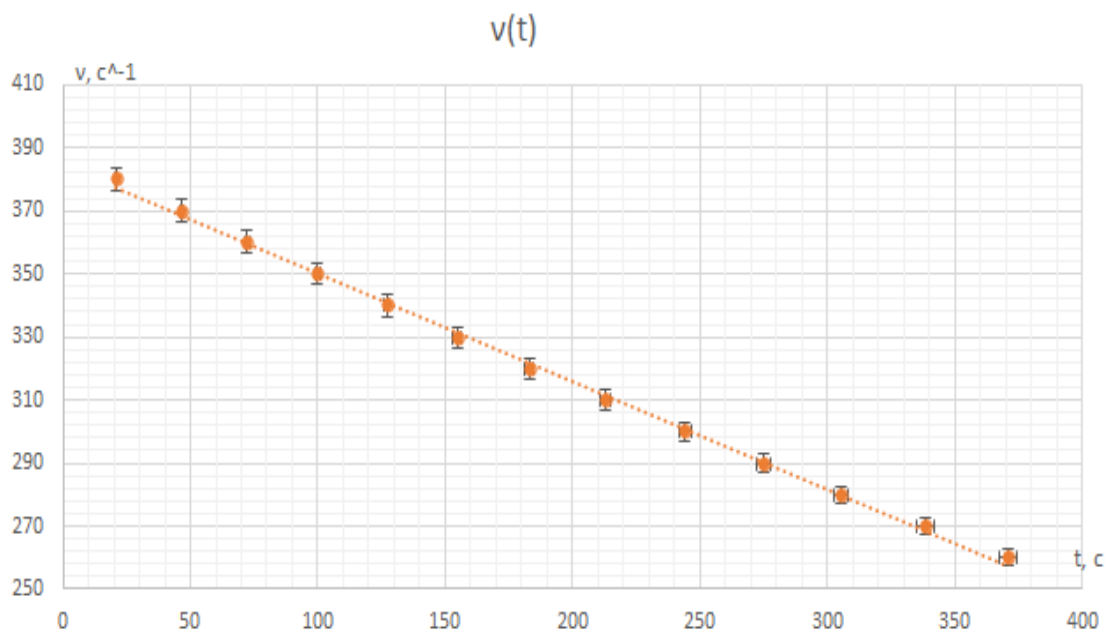


Рис. 5: График 1

Из (2) и (3) получим следующее соотношение



$$\vec{M} = \frac{dI_0\vec{\omega}}{dt}$$

Тогда справедливо:

$$M_{\text{тр}} = \frac{2\pi I_0\nu}{t} = 2\pi I_0\beta$$

$\beta$  - коэффициент наклона графика  $\nu(t)$

$$\beta = \frac{\langle \nu t \rangle - \langle \nu \rangle \langle t \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} = -0.343c^{-1}$$

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{1}{11} \left( \frac{\langle \nu^2 \rangle - \langle \nu \rangle^2}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} - \beta^2 \right)} = 0.004c^{-1}$$

$$M_{\text{тр}} = 1.66 * 10^{-3} H * \text{м}$$

$$\sigma_{M_{\text{тр}}}^{\text{приб}} = M_{\text{тр}} \sqrt{\left( \frac{\Delta t}{\langle t \rangle} \right)^2 + \left( \frac{d\nu}{\langle \nu \rangle} \right)^2 + (\varepsilon_{I_0})^2} = M_{\text{тр}} \varepsilon_{I_0}$$

$$\sigma_{M_{\text{тр}}}^{\text{случ}} = M_{\text{тр}} \frac{\sigma_\beta}{\beta}$$

$$\sigma_{M_{\text{тр}}} = 0.05 * 10^{-3} H * \text{м}$$

$$\varepsilon_{M_{\text{тр}}} = 2,8\%$$

## Выводы

В ходе работы были получены значения физических величин, описывающих процесс прецессии уравновешенного гироскопа. Значения получены с приемлемой точностью: максимальная относительная погрешность составила 2.9% при определении частоты вращения оси гироскопа. Значительный вклад в нее внесла погрешность измерения времени крутильных колебаний ротора и цилиндра.

Наряду с погрешность значительный вклад в погрешность измерения  $M_{\text{тр}}$  внесла случайная погрешность. Это может говорить о том, что хотя момент сил трения в оси и угловое ускорение вращения можно считать постоянным при большой частоте вращения, при затухании вращения, уменьшается и значение момента сил трения, из-за чего зависимость при дальнейших измерениях уже нельзя считать линейной.

Установлено, что момент сил трения действительно много меньше моментов внешних сил, исследуемых в данной работе. В частности, момент сил трения в среднем на 2 порядка меньше момента силы тяжести подвешенных грузов

В ходе работы были экспериментально подтверждены теоретические зависимости, описывающие процесс прецессии уравновешенного гироскопа.