ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра общей физики

Лабораторная работа 1.3.1-1.3.2

Определение модуля Юнга тонкой проволоки посредством ее растяжения, определение модуля кручения с помощбю крутильного матника

Преподаватель: к.ф.-м.н., доц. Яворский В.А.

Обучающийся: Глотов А.А

Долгопрудный
2021

Введение

Цели работы

- Эксперементальная проверка зависимости между напряжением и деформацией (Закон Гука) для одноосного растяжения
- Получение модюля Юнга для тонкой проволоки
- Исследование зависимости углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил для крутильного маятника
- Рассчет модуля кручения и сдвига для крутильного маятника по измерениям периода куртильных колебаний

Приборы и материалы

1. Прибор Лермонтова
2. Проволока из исследуемого материала
3. Зрительная трубка со шкалой
4. Набор грузов
5. Микрометр
6. Рулетка
7. Секундомер
8. Линейка

Теоретические сведения
Часть 1

Примем за ось X ось, в направлении которой растягивается наша проволока,тогда справделива будет формула

$$\sigma = E\varepsilon \ (1)$$

Тогда при отстутствии F_y и F_z справедливо

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E} \ (2)$$

Или

$$F = k\Delta x \qquad k = \frac{ES}{l_x} \ (3)$$

Измерения проводятся на следующей установке

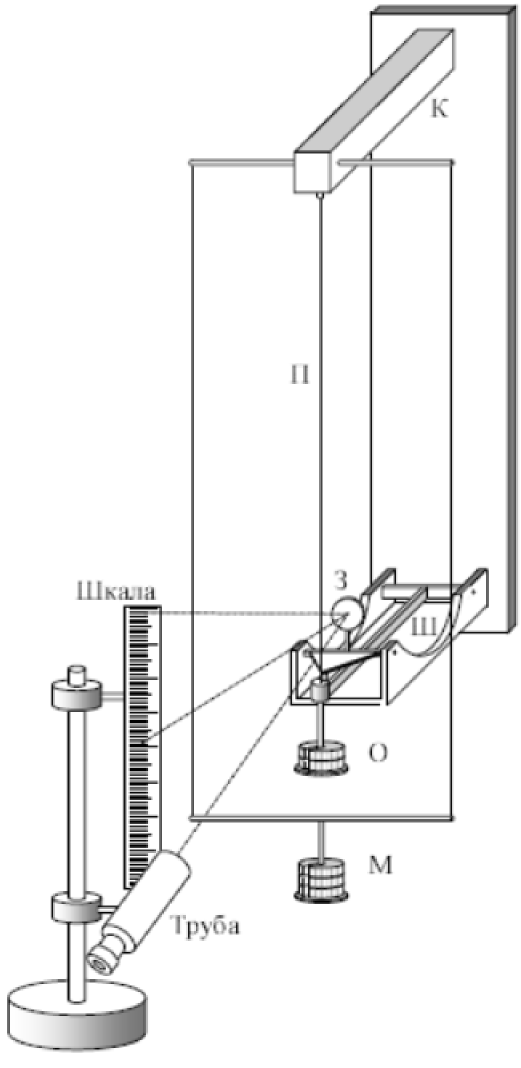

Рис. 1. Прибор Лермантова

Отметим, что т.к. проволока изначально не в идеальном состоянии, необходимо приложить некоторую силу, чтобы убрать изначальные деформации. Поэтому начальные точки с большой вероятностью не лягут на прямую

Необходимо учесть, что проволока имеет свое разрушающее напряжение, при достижении которого уже не возвращается в исходное состояние. Поэтому необходимо проводить измерения в пределах 30 процентов от разрушаещего напряжения, которое определяется серией экспериментов

Определим связь между удлинением проволоки и значением шкалы, снимаемым с помощью трубки. Очевидно, что при малых удлинениях угол α мал, и тогда

$$\tan(\alpha) = \alpha = \frac{\Delta l}{r} \ (4)$$

В то же время направление луча изменится на 2α, причем d в малых изменениях справедливо

$$2\alpha = \frac{x}{h} \qquad x = \frac{nL}{N} \ (5)$$

$\frac{L}{N}$ - длина одного деления шкалы

Приравнивая (4) к (5) получим

$$\Delta l = \frac{nrL}{2Nh} \ (6)$$

Часть 2

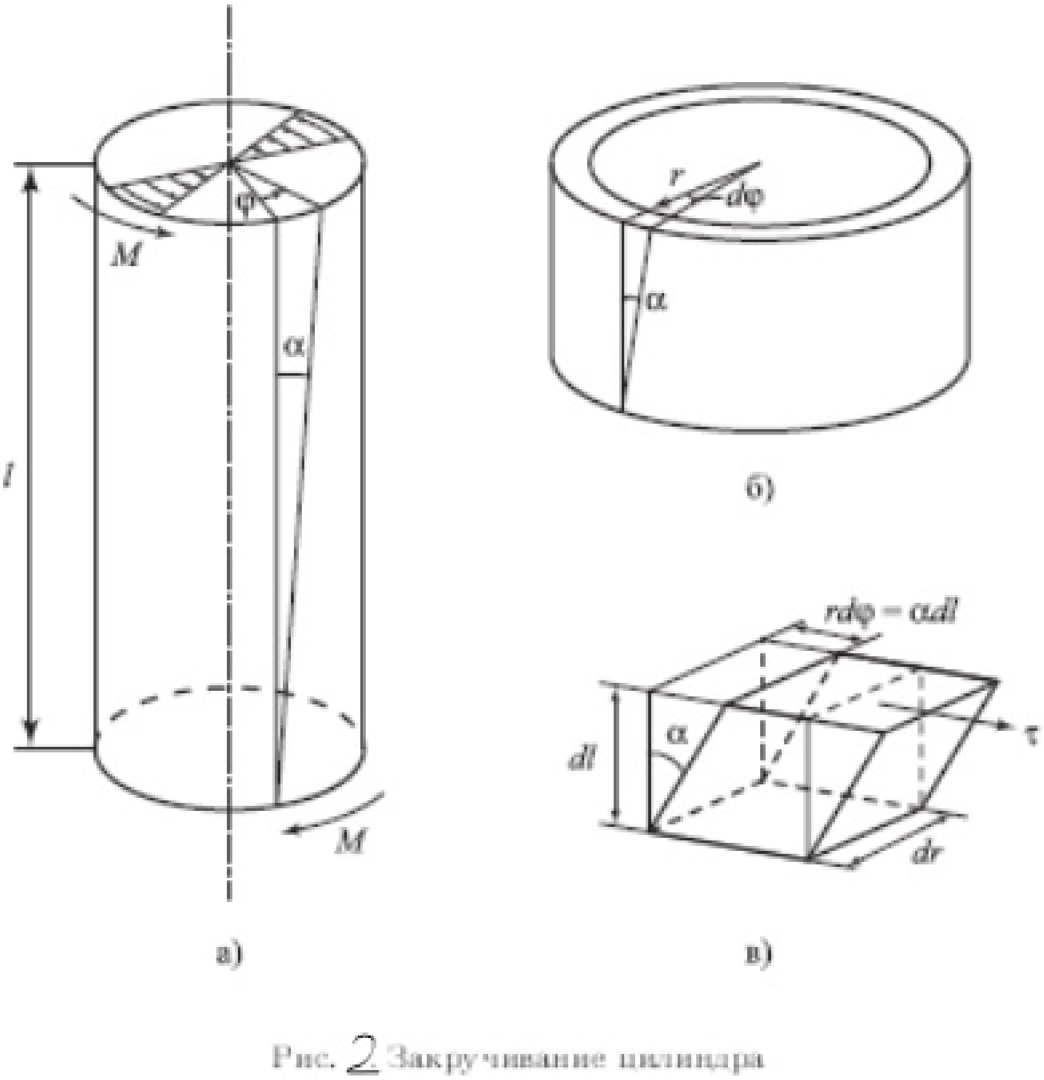

Рис. 2 Закручивание цилиндра

Рассмотрим часть закручиваемого круглого цилиндра (см.рис 2а)Рассмотрим кольцо радиуса r с бесконечно малой толщиной dr и бесконечно малой высотой dl. При небольшом угле скручивания выполняется

$$\alpha dl = rd\varphi \ (7)$$

Касательное напряжение τ связано с углом сдвига и модулем сдвига G соотношением

$$\tau = G\alpha \ (8)$$

Подставляя (7) в (8) получим

$$\tau = Gr\frac{d\varphi}{dl} \ (9)$$

Касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра

$$dM = 2\pi r dr \cdot \tau \cdot r \ (10)$$

Суммарный момент цилиндра определим как интеграл по радиусу

$$M = 2\pi G\frac{d\varphi}{dl}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \pi G\frac{d\varphi}{dl}\frac{R^4}{2} \ (11)$$

Момент неизменен по длине и линейно зависит от угла поворота. Тогда для цилиндра M определяется как

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l}\varphi = f\varphi \qquad f = \frac{\pi R^4 G}{2l}(12)$$

f - модуль кручения Вращение вокруг вертикальной оси под действием упругого момента, возникающего в проволоке описывается уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M \ (13)$$

I - момент инерции вращаемого тела, φ - угол поворота от положения равновесия, M - момент упругих сил. При малых колебаниях M описывается по формуле

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l}\varphi \ (14)$$

Введем

$$\omega^2 = \frac{f}{I}(15)$$

Получаем уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$$

Его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0\sin(\omega t + \theta) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} \ (16)$$

Отметим, что полученные уравнения справедливы только для идеальных (незатухающих) колебаний. Поэтому необходимо убедиться, что затуханием можно пренебречь. Это будет выполняться, если после 10 колебаний амплитуда уменьшается менее чем в 2 раза, а период не зависит от начальной амплитуды

Ход работы

Часть 1

1) Определение сечения проволоки

Диаметр проволоки примем известным (определен и фисирован для установки)

$< d >= 0,46$мм $\quad \Delta d = 0.01$мм

2) Измерение длины проволоки

$l_0 = 176.0$см $\qquad \sigma_{l_0}^{instr} = 0.2$см

3) Возьмем необходимую зависимость из теоретической части (6)

$\frac{L}{N} = 1$мм

Тогда $x = \frac{L}{N} n$, причем x в мм численно равен n

4) Отметим, что имеющихся грузов (общей массой 2208,5г недостаточно для достижения 30 процентов от разрушающего напряжения. Зная диаметр проволоки, нетрудно посчитать, что для этого необходима масса примерно 5кг. По мере выполнения п.5 убедимся, что проволока действительно возвращается в исходное состояние

5) Снимем зависимость n(m)

x, мм	m, г	x, мм	m, г	x, мм	m, г	x, мм	m, г
0	0	-221	-2208,5	0	0	-221	-2208,5
29	245,6	-195	-1962,9	23	245,6	-194	-1962,9
55	490,9	-167	-1718,5	52	490,9	-165	-1718,5
78	736,2	-143	-1473,3	77	736,2	-140	-1473,3
103	982,3	-118	-1227,8	102	982,3	-115	-1227,8
128	1227,8	-94	-982,3	126	1227,8	-92	-982,3
152	1473,3	-71	-736,2	150	1473,3	-68	-736,2
175	1718,5	-48	-490,9	174	1718,5	-44	-490,9
200	1962,9	-23	-245,6	197	1962,9	-21	-245,6
223	2208,5	0	0	218	2208,5	0	0

$\Delta n = 1 \quad \sigma_x = 1$мм

6)

$$F = \frac{ES}{l_x} l = \frac{E\pi d^2}{4 l_x} l$$

Пересчитаем x в l по (6)

$r = 13.0$см $\quad h = 135.0$см $\quad l_0 = 176$см

$\sigma_r = 0.1$см $\qquad \sigma_h = 0.2$см $\qquad \sigma_{l_0} = 0.2$см

Отметим, что $\frac{\sigma_h}{h}$ примерно в 5 раз меньше $\frac{\sigma_r}{r}$ Тогда $\varepsilon_l = \varepsilon_r = 0.8\%$

l, см	m, г	l, см	m, г	l, см	m, г	l, см	m, г
0	0	0,106	2208,5	0	0	0,106	2208,5
0,014	245,6	0,094	1962,9	0,011	245,6	0,093	1962,9
0,026	490,9	0,080	1718,5	0,025	490,9	0,079	1718,5
0,038	736,2	0,069	1473,3	0,037	736,2	0,067	1473,3
0,050	982,3	0,057	1227,8	0,049	982,3	0,055	1227,8
0,062	1227,8	0,045	982,3	0,061	1227,8	0,044	982,3
0,073	1473,3	0,034	736,2	0,072	1473,3	0,033	736,2
0,084	1718,5	0,023	490,9	0,084	1718,5	0,021	490,9
0,096	1962,9	0,011	245,6	0,095	1962,9	0,010	245,6
0,107	2208,5	0	0	0,105	2208,5	0	0

По данным таблицы построим график (см. график 1) зависимости l(m)

$$l = m\frac{4gl_0}{\pi E d^2} = m\frac{g}{k}$$

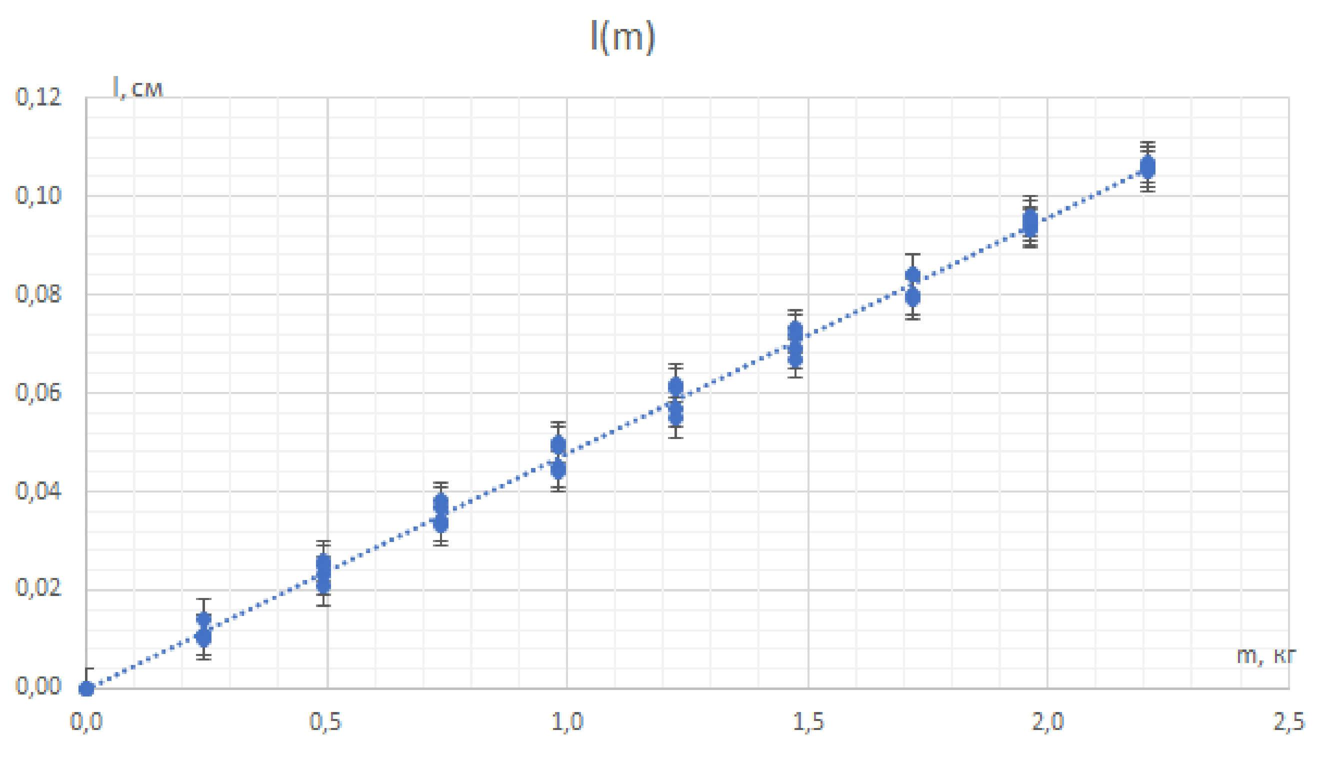

Рис. 1: График 1

Обозначим коэффицент наклона графика за α

Методом наименьших квадратов определим значение и погрешность α. Прямая должна идти через 0. Тогда

$\alpha = \frac{<lm>}{<m^2>} = 4.8 * 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{кг}}$

$\sigma_\alpha^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{39}(\frac{<l^2>}{<m^2>} - \alpha^2)} = 7.1 * 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{кг}}$

$\frac{\sigma_\alpha^{\text{случ}}}{\alpha} = \frac{\sigma_E^{\text{случ}}}{E} = \frac{\sigma_k^{\text{случ}}}{k}$

$\sigma_k^{\text{приб}} = k\sqrt{(\frac{\Delta l}{l})^2 + (\frac{\Delta m}{<m>})^2 + (\frac{\Delta g}{g})^2} = k\varepsilon_l$

$\sigma_E^{\text{приб}} = E\sqrt{(\frac{l_0}{l_0})^2 + (\frac{\Delta l}{l})^2 + 4(\frac{\Delta d}{d})^2 + (\frac{\Delta g}{g})^2} = E\varepsilon_l$

При подсчете приборных погрешностей мы пренебрегли всеми погрешнотями, кроме l, ввиду их относительной малости

Полная погрешность k и E выразится как

$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{случ}})^2 + (\sigma_k^{\text{приб}})^2}$

$\sigma_E = \sqrt{(\sigma_E^{\text{случ}})^2 + (\sigma_E^{\text{приб}})^2}$

Тогда определим значения и погрешности значений k и E

$k = 2.05 * 10^4 \frac{H}{\text{м}} \quad E = 2.16 * 10^{11} \frac{H}{\text{м}^2}$

$\sigma_k = 0.4 * 10^3 \frac{H}{\text{м}} \quad \sigma_E = 0.4 * 10^{10} \frac{H}{\text{м}^2}$

$\varepsilon_k = 2.0\% \quad \varepsilon_E = 1.9\%$

8) По табличным данным получаем, что наши результаты с наиболшей точностью удовлетворяют характеристикам стали(модуль Юнга лежит в диапазоне $(21,2 - 22,0) * 10^{10}$)Па

Часть 2

1) Измеряя периоды 10 колебаний для случайного угла амплитуды и примерно в два раза меньшего получим времена колебаний $t = 34.3c$ и $t = 34.2c$ при приборной погрешности $\Delta t = 0.3c$. Тогда можно говорить, что в пределах погрешности это одно и то же время. Отметим измеряемую амплитуду, и все дальнейшие измерения будем проводить, устанавливая амплитуду не более отмеченной и будем считать такие колебания малыми.
2) Установим амплитуду колебаний такую же, как в первом пункте. Замерим 10 колебаний и в момент прохождения точек остановки (точки максимального отклонения от точки равновесия) последнего колебания, отметим эти положения. Сравнив их с исходным, получим, что они отличие точно меньше двухкратного. Значит, колебания в пределах установленной амплитуды при 10 колебаниях колебания можно считать слабозатухающими. Значит, возможно использование формул для идеальных колебаний (формулы 7-16). $\Delta_T = \Delta_t/10$
$\Delta_l = 1$мм С учетом округления $\Delta_t = 0.1c$
3) Проведем измерения крутильных колебаний для различных l - расстояний от точки подвеса до грузов

l, мм	t, с	T, с	l^2, м$^2 * 10^{-3}$	T^2, c^2
154	44.6	4.5	23.72	19.9
142	42.0	4.2	20.16	17.6
133	39.1	3.9	17.69	15.3
122	36.8	3.7	14.88	13.5
112	33.9	3.4	12.54	11.5
103	31.3	3.1	10.61	9.8
92	28.7	2.9	8.46	8.2
83	26.2	2.6	6.89	6.9
45	17.5	1.8	2.03	3.1

$I_{\text{гр}}$ - Момент инерции для одного груза
Используем закон Гюйгенса-Штейнера и подставим все в (16). Тогда

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f}(2m(\frac{I_{\text{гр}}}{m} + l^2) + I_{st})$$

I_{st} - момент инерции стержня(ось движения цилиндров)

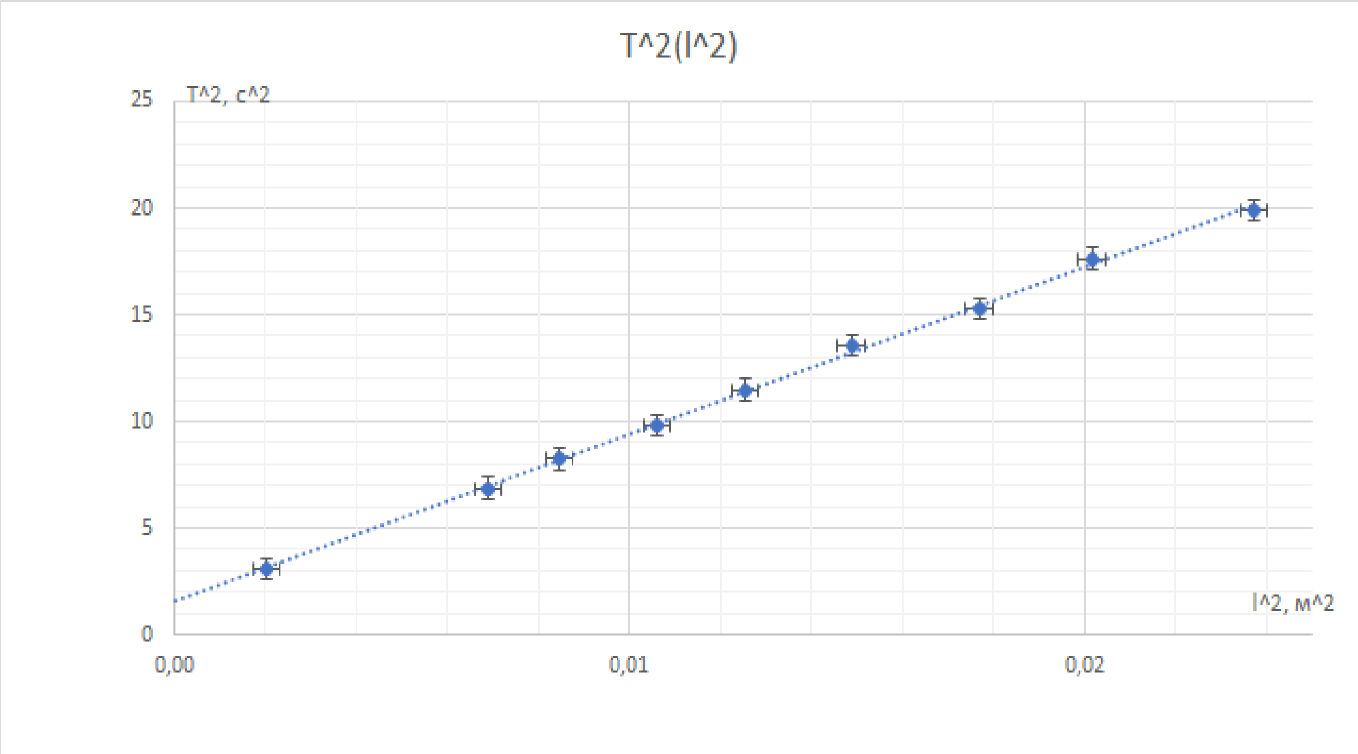

Рис. 2: График 2

Обозначим угловой коэффициент прямой за β

$$\beta = \frac{8\pi^2 m}{f} = \frac{256\pi m l_0}{d^4 G}$$

$\beta = \frac{<T^2 l^2> - <T^2><l^2>}{<l^4> - <l^2>^2} = 785.5\frac{c^2}{м^2}$

$\sigma_\beta^{случ} = \sqrt{\frac{1}{7}(\frac{<T^4> - <T^2>^2}{<l^4> - <l^2>^2} - \beta^2)} = 10,6\frac{c^2}{м^2}$

$\frac{\sigma_\beta^{случ}}{\beta} = \frac{\sigma_G^{случ}}{G}$

4) l_0 - длина проволоки

d - диаметр проволоки

m - масса одного цилиндра

$l_0 = 1.75$м $\quad \sigma_{l_0} = 0.02$м

$d = 1.98$мм $\quad \sigma_d = 0.01$мм

$m = 373.5$г $\quad \sigma_m = 0.3$г

5) $G = \frac{32fl}{\pi d^4}$

Тогда приборную погрешность G рассчитаем по следующей формуле:

$\sigma_G^{приб} = G\sqrt{(\frac{\Delta l}{l})^2 + 16(\frac{\Delta d}{d})^2}$

$\sigma_G = \sqrt{(\sigma_G^{приб})^2 + (\sigma_G^{случ})^2}$

6) Получим итоговое значение G

$G = 4.4 * 10^{10}\frac{H}{м^2} \quad \sigma_G = 0.1 * 10^{10}\frac{H}{м^2}$

$\varepsilon_G = 2.7\%$

Выводы

При измермениях растижения проволоки и периода крутильных основная вклад в погрешность вносит погрешность проведения прямой, на ее фоне погрешности измерений необходимых величин являются пренебрежимо малыми. Значит, улучшением точности измерений добиться значительного улучшения точности итоговых данных добиться невозможно, для этого потребуется изменение метода измерений.

Значения E и G были получены с точностью 1,7% и 2.7%. Это говорит о том, что методы получения значений являются достоточно точными.

Значение E лежит на интервале $(21.2 - 22.0) * 10^{10} \frac{H}{\text{м}^2}$. Наиболее точно это значение удовлетворяет значению модуля Юнга стали$(20 - 21) * 10^{10}) \frac{H}{\text{м}^2}$, однако проволока также могла быть и медной $(20{,}4 \frac{H}{\text{м}^2})$

Значение G ледит на интервале $(4.3 - 4.5) * 10^{10} \frac{H}{\text{м}^2}$. Эти значения удовлетворяют возможным значений модуля сдвига для меди (3,5-4,9), что позволяет с высокой точностью утверждать, что материал, из которого изговолена проволока - медь. Однако в вероятный интервал полученного значения модуля сдвига также попадает титан (4,38), что делает его вероятным материалом изготовления проволоки.